

# Lista 1 - Cálculo 3

Kevin Nakashima

2025

1. Calcule a integral dupla  $\iint_Q \sin(x - y) \, dx \, dy$ , sendo  $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ . (Resp. 0.)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_Q \sin(x - y) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - y) \, dx \, dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \cos(x - y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \cos(-y) \, dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) - \cos(y) \, dy \\ &= \left[ \cos(y) + \sin(y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 + 1 - 1 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Desenhe a região de integração no plano  $xy$  e calcule a integral iterada  $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9 + y^2} \, dx \, dy$ . (Resp.  $98/3$ .)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^y \sqrt{9 + y^2} \, dx \, dy &= \int_0^4 y \sqrt{9 + y^2} \, dy, \quad u = 9 + y^2 \Rightarrow du = 2y \, dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_9^{25} \sqrt{u} \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ u\sqrt{u} \right]_9^{25} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (125 - 27) \\ &= \frac{98}{3}. \end{aligned}$$

3. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies  $x^2 + y^2 = 16$  e  $z = 4x$  para  $x \geq 0$ . (Resp. 512/3.)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 4x \, dy \, dx &= 8 \int_0^4 x \sqrt{16-x^2} \, dx, \quad u = 16-x^2 \Rightarrow du = -2x \, dx \\ &= 4 \int_0^{16} \sqrt{u} \, du \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ u\sqrt{u} \right]_0^{16} \\ &= \frac{8}{3} \cdot 64 \\ &= \frac{512}{3}. \end{aligned}$$

4. Determine a região de integração  $D$ , esboce-a no plano  $xy$  e troque a ordem de integração da integral iterada  $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx$ .

**Resolução:**

Troca da ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

5. Calcule a integral dupla  $\iint_Q \cos(y^3) \, dx \, dy$ , sendo  $Q$  a região no plano  $xy$  limitada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2$  e  $x = 0$ . (Resp.  $(\sin 8)/3$ .)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_Q \cos(y^3) \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 y^2 \cos(y^3) \, dy, \quad u = y^3 \Rightarrow du = 3y^2 \, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^8 \cos(u) \, du \\ &= \frac{1}{3} \left[ \sin(u) \right]_0^8 \\ &= \frac{\sin(8)}{3}. \end{aligned}$$

6. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies  $z = 1 - y^2$ ,  $x + z = 2$  e  $x = 2$  para  $z \geq 0$ . (Resp.  $8/15$ .)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{y^2+1}^2 x - y^2 - 1 \, dx dy &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{x^2}{2} - y^2 x - x \right]_{y^2+1}^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^4 - 2y^2 + 1 \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

7. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros  $x^2 + y^2 = a^2$  e  $x^2 + z^2 = a^2$ . (Resp.  $16a^3/3$ )

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-x^2} \, dy dx &= 4 \int_{-a}^a a^2 - x^2 \, dx \\ &= 4 \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a \\ &= 4 \cdot \frac{4a^3}{3} \\ &= \frac{16a^3}{3}. \end{aligned}$$

8. Calcule  $\iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dA$ , sendo  $D$  a região da Figura 1 no primeiro quadrante do plano  $xy$  situada entre as circunferências  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ . (Resp.  $\frac{\pi}{4}(8 \ln 2 - 3)$ )

**Resolução:**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r \ln(r^2) \, dr d\theta, \quad u = r^2 \Rightarrow du = 2r \, dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^4 \ln(u) \, du d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_1^4 \ln(u) \, du \\ &= \frac{\pi}{4} (8 \ln(2) - 3). \end{aligned}$$

9. Calcule o volume limitado pelas superfícies  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$  e  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Veja Figura 2. (Resp.  $32/9$ )

**Resolução:**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq 2 \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin(\theta)} r^2 \, dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \sin(\theta)} d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^3(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) \, d\theta, \quad u = \cos(\theta) \Rightarrow du = -\sin(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du \\ &= \frac{8}{3} \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

10. Determine a área da região  $D$  da Figura 3 no plano  $xy$  definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

(Resp.  $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ .)

**Resolução:**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 2 \leq r \leq 4 \sin(\theta), \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D dA &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_2^{4 \sin(\theta)} r \, dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_2^{4 \sin(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8 \sin^2(\theta) - 2) \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[ 8 \left( \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) - 2 \right] d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4 \cos(2\theta)) \, d\theta \\ &= \left[ 2\theta - 2 \sin(2\theta) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

11. Determine o volume do sólido  $W$  da Figura 4 dado por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 9\}.$$

(Resp.  $\frac{256\pi}{3}$ .)

**Resolução:**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 3 \leq r \leq 5, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} 2 \iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} \, dA &= 2 \int_0^{2\pi} \int_3^5 r \sqrt{25 - r^2} \, dr d\theta, \quad u = 25 - r^2 \Rightarrow du = -2r \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{16} \sqrt{u} \, du \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \left[ u\sqrt{u} \right]_0^{16} \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot 64 \\ &= \frac{256\pi}{3}. \end{aligned}$$

12. (a) Definimos uma integral imprópria sobre todo  $\mathbb{R}^2$  por

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dy \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dA$$

onde  $D_a$  é o disco com raio  $a$  e centro na origem. Mostre que

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dy \, dx = \pi.$$

**Resolução:**

Seja

$$I(a) = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dA,$$

em que

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

De acordo com o definido no enunciado, temos

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a),$$

então devemos mostrar que

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \pi.$$

Para isso, notamos que a região de integração ( $D_a$ ) em coordenadas polares

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

é obtida para  $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$ . Então, aplicamos o Teorema de Fubini e a mudança de variável na integral  $I(a)$  (observando que  $x^2 + y^2 = r^2$ ), para obter o seguinte:

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \int_0^a r e^{-r^2} \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} \, dr = 2\pi \int_0^a r e^{-r^2} \, dr.$$

Agora, calculemos  $\int_0^a r e^{-r^2} \, dr$ . Chamando  $u = -r^2$  (então  $du = -2r \, dr$ ), observamos que  $r \in [0, a]$  implica que  $u = 0$ , e  $r = a$  implica que  $u = -a^2$ , então

$$\int_0^a r e^{-r^2} \, dr = \int_0^a r e^u \cdot \frac{du}{-2r} = -\frac{1}{2} \int_0^a e^u \, du = \frac{1}{2} \int_{-a^2}^0 e^u \, du,$$

daí

$$\int_0^a r e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} [e^u]_{-a^2}^0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}).$$

Então,

$$I(a) = 2\pi \int_0^a r e^{-r^2} dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

De onde concluímos que

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-a^2}) = \pi.$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

onde  $S_a$  é o quadrado com vértices  $(\pm a, \pm a)$ . Use essa definição para mostrar que

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi.$$

**Resolução:**

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(c) Deduza

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**Resolução:**

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(d) Fazendo a mudança de variável  $t = \sqrt{2}x$ , mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

**Resolução:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

13. Uma carga elétrica é distribuída sobre o disco  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ , de modo que a densidade de carga em  $(x, y)$  é  $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.

**Resolução:**

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA.$$

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sigma(x, y) \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \, dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2\pi}{3} \text{ coulombs.}
 \end{aligned}$$

14. Uma lâmina ocupa a parte do disco  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$  no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo  $x$ . (Resp.  $(3/8, 3\pi/16)$ )

**Resolução:**

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D x \sigma(x, y) \, dA, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D y \sigma(x, y) \, dA.$$

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo de  $M$ :

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D \sigma(x, y) \, dA \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \sin(\theta) \, dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \, d\theta \cdot \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \left[ -\cos(\theta) \right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $x_{CM}$ :

$$\begin{aligned}
 x_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D x \sigma(x, y) \, dA \\
 &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) \, dr d\theta \\
 &= 3 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) \, d\theta \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta \\
 &= \frac{3}{8} \cdot \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $y_{CM}$ :

$$\begin{aligned}
 y_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D y \sigma(x, y) dA \\
 &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta \\
 &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) d\theta \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= \frac{3}{8} \cdot \left[ \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{3\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

15. Determine o centro de gravidade (ou centro de massa) de uma lâmina plana limitada pela parábola  $y = x^2$  e pelas retas  $y = 0$  e  $x = 4$ , sabendo-se que a densidade no ponto  $P = (x, y)$  é proporcional à abscissa do ponto  $P$ .

**Resolução:**

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D x \sigma(x, y) dA, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D y \sigma(x, y) dA.$$

Cálculo de  $M$ :

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D \sigma(x, y) dA \\
 &= \int_0^4 \int_0^{x^2} kx dy dx \\
 &= k \int_0^4 x^3 dx \\
 &= k \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^4 \\
 &= 64k.
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $x_{CM}$ :

$$\begin{aligned}
 x_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D x \sigma(x, y) dA \\
 &= \frac{1}{64k} \int_0^4 \int_0^{x^2} kx^2 dy dx \\
 &= \frac{1}{64} \int_0^4 x^4 dx \\
 &= \frac{1}{320} \cdot [x^5]_0^4 \\
 &= \frac{1}{320} \cdot 1024 \\
 &= \frac{16}{5}.
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $y_{CM}$ :

$$\begin{aligned}y_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D y \, \sigma(x, y) \, dA \\&= \frac{1}{64k} \int_0^4 \int_0^{x^2} kxy \, dy dx \\&= \frac{1}{64} \int_0^4 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx \\&= \frac{1}{128} \int_0^4 x^5 \, dx \\&= \frac{1}{128} \cdot \left[ \frac{x^6}{6} \right]_0^4 \\&= \frac{1}{128} \cdot \frac{4096}{6} \\&= \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

16. Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for  $\rho(x, y) = 1 + 0,1x$ , é mais difícil girar a pá em torno do eixo  $x$  ou do eixo  $y$ ?

**Resolução:**

Cálculo momento de inércia em relação ao eixo  $x$ :

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_D y^2 \sigma(x, y) dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^2 \left( y^2 + \frac{xy^2}{10} \right) dx dy \\
 &= \int_0^2 \left[ xy^2 + \frac{x^2 y^2}{20} \right]_0^2 dy \\
 &= \int_0^2 \left( 2y^2 + \frac{y^2}{5} \right) dy \\
 &= \frac{11}{5} \int_0^2 y^2 dy \\
 &= \frac{11}{5} \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \frac{88}{15}.
 \end{aligned}$$

Cálculo momento de inércia em relação ao eixo  $y$ :

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_D x^2 \sigma(x, y) dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^2 \left( x^2 + \frac{x^3}{10} \right) dx dy \\
 &= \int_0^2 \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{40} \right]_0^2 dy \\
 &= \frac{46}{15} \int_0^2 dy \\
 &= \frac{92}{15}.
 \end{aligned}$$

Portanto, é mais difícil girar a pá em torno do eixo  $y$ , pois  $I_x < I_y$ .

17. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1+y) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante  $C$ .

**Resolução:**

$$\iint_D f(x, y) \, dA = 1.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dA &= \int_0^2 \int_0^1 Cx(1+y) \, dx dy \\ &= C \int_0^2 \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy \\ &= \frac{C}{2} \int_0^2 y + 1 \, dy \\ &= \frac{C}{2} \cdot \left[ \frac{y^2}{2} + y \right]_0^2 \\ &= \frac{C}{2} \cdot 4 \\ &= 2C \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Encontre  $P(X \leq 1, Y \geq 1)$ .

**Resolução:**

Possivelmente, houve um erro de digitação, uma vez que o resultado não está de acordo com o gabarito.

Para  $P(X \leq 1, Y \geq 1)$ :

Cálculo integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dA &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^1 x(1+y) \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{4} \int_1^2 y + 1 \, dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{y^2}{2} + y \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{8} = 0,625. \end{aligned}$$

Para  $P(X \leq 1, Y \leq 1)$ :  
Cálculo integral dupla:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dA &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 x(1+y) \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 y + 1 \, dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{y^2}{2} + y \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{8} = 0,375.\end{aligned}$$

(c) Encontre  $P(X + Y \leq 1)$ .

**Resolução:**

Cálculo integral dupla:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dA &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-y} x(1+y) \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} \right]_0^{1-y} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 y^3 - y^2 - y + 1 \, dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + y \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{48} \approx 0,1042.\end{aligned}$$

(Resp. (a)  $\frac{1}{2}$  (b) 0,375 (c)  $\frac{5}{48} \approx 0,1042$ )

18. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 km na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto  $A = (x_0, y_0)$ , suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \frac{1}{20} [20 - d(P, A)]$$

onde  $d(P, A)$  denota a distância entre os pontos  $P$  e  $A$ .

- (a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo  $k$  indivíduos contaminados por quilômetro quadrado. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em  $A$ .

**Resolução:**

Determinação da integral dupla:

$$k \iint_D f(P) \, dA = \frac{k}{20} \iint_D (20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \, dA.$$

- (b) Calcule a integral para o caso em que  $A$  está no centro da cidade e para o caso em que  $A$  está na periferia da cidade. Onde seria preferível viver?

**Resolução:**

**Primeiro caso:**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq 10, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \frac{k}{20} \iint_D (20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dA &= \frac{k}{20} \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (20 - r) r dr d\theta \\ &= \frac{k}{20} \int_0^{2\pi} \int_0^{10} 20r - r^2 dr d\theta \\ &= \frac{k}{20} \int_0^{2\pi} \left[ 10r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^{10} d\theta \\ &= \frac{100k}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{200\pi k}{3} \approx 209k. \end{aligned}$$

**Segundo caso:**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq -20 \cos(\theta), \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \frac{k}{20} \iint_D (20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dA &= \frac{k}{20} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{-20 \cos(\theta)} (20 - r) r dr d\theta \\ &= \frac{k}{20} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{-20 \cos(\theta)} 20r - r^2 dr d\theta \\ &= \frac{k}{20} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ 10r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^{-20 \cos(\theta)} d\theta \\ &= \frac{k}{20} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left( 4000 \cos^2(\theta) + \frac{8000 \cos^3(\theta)}{3} \right) d\theta \\ &= \frac{200k}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left( 3 \cos^2(\theta) + 2 \cos^3(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{200k}{3} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3 \cos^2(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2 \cos^3(\theta) d\theta \right) \\ &= \frac{200k}{3} \left( 3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) d\theta \right) \\ &= \frac{200k}{3} \left( \frac{3}{2} \left[ \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - 2 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \right), \quad u = \sin(\theta) \\ &= \frac{200k}{3} \left( \frac{3\pi}{2} - 2 \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 \right) \\ &= \frac{200k}{3} \left( \frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{4}{3} \right) \\ &= 200k \left( \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9} \right) \approx 136k. \end{aligned}$$

Portanto, seria preferível viver na periferia, uma vez que  $136k < 209k$ .

19. Determine a área do plano  $z = 2 + 3x + 4y$  que está acima do retângulo  $[0, 5] \times [1, 4]$ . (Resp.  $15\sqrt{26}$ )

**Resolução:**

Aplicação da definição:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\ &= \int_1^4 \int_0^5 \sqrt{26} dx dy \\ &= 5\sqrt{26} \int_1^4 dy \\ &= 15\sqrt{26}. \end{aligned}$$

20. Determine a área do plano  $3x + 2y + z = 6$  que está no primeiro octante. (Resp.  $3\sqrt{14}$ )

**Resolução:**

Aplicação da definição:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2y}{3}} \sqrt{14} dx dy \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 \left(2 - \frac{2y}{3}\right) dy \\ &= \sqrt{14} \cdot \left[2y - \frac{y^2}{3}\right]_0^3 \\ &= 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

21. Determine a área do cilindro  $y^2 + z^2 = 9$  que está acima do retângulo com vértices  $(0, 0), (4, 0), (0, 2)$  e  $(4, 2)$ . (Resp.  $12\sin^{-1}(2/3)$ )

**Resolução:**

Parametrização da superfície:

$$\gamma(x, y) = (x, y, \sqrt{9 - y^2}), \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Cálculo das derivadas parciais:

$$\gamma_x = (1, 0, 0), \quad \gamma_y = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{9 - y^2}}\right).$$

Cálculo do produto vetorial:

$$\gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{9 - y^2}} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{y}{\sqrt{9 - y^2}}, 1\right) \Rightarrow \|\gamma_x \times \gamma_y\| = \sqrt{\frac{y^2}{9 - y^2} + 1}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \|\gamma_x \times \gamma_y\| \, dA \\
&= \int_0^4 \int_0^2 \sqrt{\frac{y^2}{9-y^2} + 1} \, dy dx \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{9-y^2}} \, dy dx, \quad y = 3 \sin(u) \Rightarrow dy = 3 \cos(u) \, du \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^{\arcsin(\frac{2}{3})} \frac{3 \cos(u)}{\sqrt{9-9 \sin^2(u)}} \, du dx \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^{\arcsin(\frac{2}{3})} \frac{3 \cos(u)}{3 \sqrt{1-\sin^2(u)}} \, du dx \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^{\arcsin(\frac{2}{3})} du dx \\
&= 3 \int_0^4 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) dx \\
&= 12 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

22. Determine a área do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$  que está entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ . (Resp.  $\frac{\pi}{6} [17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}]$ )

**Resolução:**

Parametrização da superfície:

$$\gamma(x, y) = (x, y, y^2 - x^2)$$

Cálculo do produto vetorial:

$$\gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (2x, -2y, 1) \Rightarrow \|\gamma_x \times \gamma_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \|\gamma_x \times \gamma_y\| \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r \sqrt{4r^2 + 1} \, dr d\theta, \quad u = 4r^2 + 1 \Rightarrow du = 8r \, dr \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du d\theta \\
&= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[ u\sqrt{u} \right]_5^{17} d\theta \\
&= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \, d\theta \\
&= \frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{12} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

23. A Figura 5 mostra a superfície criada quando o cilindro  $y^2 + z^2 = 1$  intercepta o cilindro  $x^2 + z^2 = 1$ . Encontre a área desta superfície.

**Resolução:**

Parametrização da superfície:

$$\gamma(x, y) = (x, \cos(\theta), \sin(\theta)), \quad -|\cos(\theta)| \leq x \leq |\cos(\theta)|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo do produto vetorial:

$$\gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = (0, -\cos(\theta), -\sin(\theta)) \Rightarrow \|\gamma_x \times \gamma_y\| = 1.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} A &= 2 \iint_D \|\gamma_x \times \gamma_y\| \, dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-|\cos(\theta)|}^{|\cos(\theta)|} dx \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| \, d\theta \\ &= 4 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta) \, d\theta \right) \\ &= 4 \left( \left[ \sin(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[ \sin(\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \\ &= 4 \cdot 4 \\ &= 16. \end{aligned}$$

24. Calcule a integral tripla  $\iiint_D xy^2z^3 \, dV$  onde  $D$  é a região no primeiro octante limitado pela superfície

$z = xy$  e os planos  $y = x$ ,  $x = 1$  e  $z = 0$ . (Resp.  $\frac{1}{364}$ .)

**Resolução:**

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_D xy^2z^3 \, dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^3 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x \left[ \frac{xy^2z^4}{4} \right]_0^{xy} dy \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^x x^5y^6 \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left[ \frac{x^5y^7}{7} \right]_0^x dx \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} \, dx \\ &= \frac{1}{28} \left[ \frac{x^{13}}{13} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

25. Calcule a integral tripla  $\iiint_D x \, dV$  onde  $D$  é o tetraedro com faces sobre os planos coordenados  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e o sobre o plano  $x + \frac{y}{2} + z = 1$ . (Resp.  $\frac{1}{12}$ .)

**Resolução:**

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
 \iiint_D xy^2z^3 \, dV &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} x \, dzdydx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} x \left(1 - x - \frac{y}{2}\right) dydx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(x - x^2 - \frac{xy}{2}\right) dydx \\
 &= \int_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{4}\right]_0^{2-2x} dx \\
 &= \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \, dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

26. Calcule o volume do sólido abaixo do gráfico de  $z = 1 + x^2 + 3y^2$  e acima do plano  $xy$  para  $(x, y)$  restrito à região limitada pelas curvas  $y = x$ ,  $y = -x + 2$  e  $y = 0$ . (Resp.  $\frac{8}{3}$ .)

**Resolução:**

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
 \iiint_D dV &= \int_0^1 \int_y^{2-y} \int_0^{1+x^2+3y^2} dzdxdy \\
 &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (1 + x^2 + 3y^2) dxdy \\
 &= \int_0^1 \left[x + \frac{x^3}{3} + 3xy^2\right]_y^{2-y} dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (-20y^3 + 24y^2 - 18y + 14) dy \\
 &= \frac{1}{3} \left[-5y^4 + 8y^3 - 9y^2 + 14y\right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 8 \\
 &= \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

27. Use integral tripla para calcular o volume da região entre os planos  $x + y + 2z = 2$  e  $2x + 2y + z = 4$  no primeiro octante. (Resp. 2.)

**Resolução:**

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
 \iiint_D dV &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}^{4-2x-2y} dz dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2-x} (-3x - 3y + 6) dy dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 (-3x^2 - 12x + 12) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[ x^3 - 6x^2 + 12x \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 8 \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

28. Calcule a integral de  $f(x, y, z) = z$  sobre o sólido que está acima do plano  $xy$  e abaixo do cone  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  e que seja interior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  e exterior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . (Resp.  $60\pi$ .)

**Resolução:**

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq r\sqrt{3}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z dV &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_0^{r\sqrt{3}} dz dx dy \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^3 r^3 dx dy \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_1^3 dy \\
 &= 30 \int_0^{2\pi} dy \\
 &= 60\pi.
 \end{aligned}$$

29. Calcule o volume do sólido que está simultaneamente no interior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e do cilindro  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ . (Resp.:  $\frac{16}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right)$ .)

**Resolução:**

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z, \quad 0 \leq r \leq 2 \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{4-x^2-y^2} \, dV &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin(\theta)} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz dr d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \int_0^{2 \sin(\theta)} r \sqrt{4-r^2} \, dr d\theta, \quad u = 4-r^2 \Rightarrow du = -2r \, dr \\ &= \int_0^\pi \int_{4-4 \sin^2(\theta)}^4 \sqrt{u} \, du d\theta, \quad 4-4 \sin^2(\theta) = 4(1-\sin^2(\theta)) = 4 \cos^2(\theta) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi \left[ u \sqrt{u} \right]_{4 \cos^2(\theta)}^4 d\theta \\ &= \frac{16}{3} \int_0^\pi 1 - |\cos^3(\theta)| \, d\theta \\ &= \frac{16}{3} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^3(\theta) \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 1 + \cos^3(\theta) \, d\theta \right) \\ &= \frac{16}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

30. Calcule  $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$  onde  $D$  é o conjunto dos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  e  $z \geq 0$ . (Resp.:  $\frac{62\pi}{5}$ )

**Resolução:**

Coordenadas esféricas:

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi), \quad y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = \rho \cos(\phi), \quad 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^4 \sin(\phi) \, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^5 \sin(\phi)}{5} \right]_1^2 d\theta d\phi \\ &= \frac{31}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \, d\theta d\phi \\ &= \frac{62\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi) \, d\phi \\ &= \frac{62\pi}{5} \left[ -\cos(\phi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{62\pi}{5} \end{aligned}$$

31. Calcule a integral tripla  $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$  onde  $D$  é o sólido no primeiro octante limitado pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e os cones  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  e  $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$  (Resp.:  $\frac{\pi}{12}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1)$ .)

**Resolução:**

Coordenadas esféricas:

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi), \quad y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = \rho \cos(\phi), \quad 0 \leq \rho \leq 4, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^4 e^{\rho^3} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta, \quad u = \rho^3 \Rightarrow du = 3\rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{64} e^u \sin(\phi) du d\phi d\theta \\ &= \frac{e^{64}-1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{12}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1). \end{aligned}$$

32. Seja  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ .

- (a) Escreva a integral  $\iiint_B xyz dV$  em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

**Resolução:**

**Coordenadas cartesianas:**

Integral tripla:

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} xyz dz dy dx.$$

**Coordenadas cilíndricas:**

Mudança de coordenada:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - r^2.$$

Integral tripla:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) z dz dr d\theta.$$

**Coordenadas esféricas:**

Mudança de coordenada:

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi), \quad y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = \rho \cos(\phi),$$

$$0 \leq \rho \leq \frac{-\cos(\phi) + \sqrt{4-3\cos^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Integral tripla:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{-\cos(\phi) + \sqrt{4-3\cos^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}} \rho^5 \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^3(\phi) \cos(\phi) d\rho d\phi d\theta.$$

- (b) Encontre o valor da integral usando uma das integrais iteradas obtida no item (a). (Resp.: 0.)

**Resolução:**

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) z \, dz dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 - 2r^5 + r^7) \sin(\theta) \cos(\theta) \, dr d\theta \\ &= \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{96} \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{192} \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

33. Considere a transformação definida por

$$x = uv \quad e \quad y = v - u$$

- (a) Usando  $T$ , determine a imagem  $D$  no plano  $xy$  do retângulo  $R$  no plano  $uv$  de vértices  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  e  $(0, 2)$ .

**Resolução:**

Transformação das coordenadas:

$$\begin{aligned}(0, 1) &\Rightarrow (0.1, 1 - 0) = (0, 1) \\ (1, 1) &\Rightarrow (1.1, 1 - 1) = (1, 0) \\ (1, 2) &\Rightarrow (1.2, 2 - 1) = (2, 1) \\ (0, 2) &\Rightarrow (0.2, 2 - 0) = (0, 2)\end{aligned}$$

A imagem  $D$  corresponde à área delimitada pelos pontos  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(0, 2)$ .

- (b) Calcule a área de  $D$ . (Resp.: 2)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$A = \iint_D dA = \int_0^2 \int_0^{2-\frac{x}{2}} dy dx - 1 = \int_0^2 2 - \frac{x}{2} \, dx - 1 = \left[ 2x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2 - 1 = 4 - 1 - 1 = 2.$$

34. Considere a transformação  $T$  definida por

$$x = u + v \quad e \quad y = v - u^2$$

- (a) Determine a imagem  $D$  no plano  $xy$  da região  $Q$  no plano  $uv$  limitada pelas retas  $u = 0$ ,  $v = 0$  e  $u + v = 2$ .

**Resolução:**

Determinação da imagem  $D$ :

$$\begin{aligned}0 \leq u, 0 \leq v, u + v \leq 2 &\Rightarrow 0 \leq u + v \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ x = u + v &\Rightarrow v = x - u, y = v - u^2 \Rightarrow y = x - u - u^2 \Rightarrow -x^2 \leq y \leq x\end{aligned}$$

Portanto,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -x^2 \leq y \leq x\}$

- (b) Usando  $T$ , calcule  $\iint_D \left(x - y + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dA$ . (Resp.: 4)

**Resolução:**

Cálculo do determinante da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(x - y + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dA &= \int_0^2 \int_0^{2-u} \left(u + u^2 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} (1+2u) \, dvdu \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2-u} \left[\left(u + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} (1+2u) \, dvdu \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2-u} \frac{1+2u}{u + \frac{1}{2}} \, dvdu \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2-u} \frac{2(u + \frac{1}{2})}{u + \frac{1}{2}} \, dvdu \\
 &= 2 \int_0^2 \int_0^{2-u} dvdu \\
 &= 2 \int_0^2 (2-u) \, du \\
 &= 2 \left[2u - \frac{u^2}{2}\right]_0^2 \\
 &= 2 \cdot 2 \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

35. Calcule  $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dA$ , onde  $D$  é a região triangular limitada pela reta  $x + y = 2$  e os eixos coordenados. (Resp.:  $e - e^{-1}$ )

**Resolução:**

Mudança de variável:

$$u = y - x, \quad v = y + x \Rightarrow x = \frac{v - u}{2}, \quad y = \frac{u + v}{2}.$$

Cálculo do determinante da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} \, dudv &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^v dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(ve - \frac{v}{e}\right) dv \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{v^2 e}{2} - \frac{v^2}{2e}\right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(2e - \frac{2}{e}\right) \\
 &= e - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

36. Calcule a área do conjunto  $R$  no primeiro quadrante limitada pelas retas  $y = x$  e  $y = 2x$  e hipérboles  $xy = 1$  e  $xy = 2$ . (Resp.:  $\frac{1}{2} \ln 2$ )

**Resolução:**

Mudança de variável:

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy, \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

Cálculo do determinante da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{2u^2} \sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^2 \left| -\frac{1}{2u} \right| dudv &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u} dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ \ln(u) \right]_1^2 dv \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \int_1^2 dv \\ &= \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

37. Calcule a integral  $\iint_R \frac{1}{y^2} dA$ , onde  $R$  é a região do exercício anterior.

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{uv} \left| -\frac{1}{2u} \right| dudv &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u^2v} dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ -\frac{1}{uv} \right]_1^2 dv \\ &= \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{1}{4} \left[ \ln(v) \right]_1^2 \\ &= \frac{\ln(2)}{4} \end{aligned}$$

38. Esboce a região definida por  $y \geq x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 2$  e  $x^2 + y^2 \geq 1$ . Encontre a integral da função

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

sobre esta região. (Resp.: 0)

**Resolução**

Coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dA &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_1^{\sqrt{2}} r \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(\theta) \cos(\theta) \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left[ -\cos(2\theta) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

39. Encontre a área delimitada pela curva  $r^2 = \cos \theta$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . (Resp.: 1)

**Resolução:**

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_D dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\cos(\theta)}} r \, dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{\cos(\theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin(\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

40. Seja  $A$  a região em  $\mathbb{R}^3$  limitada pelos planos  $y = 1$ ,  $y = -x$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$  e  $z = -x$ . Calcule

$$\iiint_A e^{x+y+z} \, dV.$$

(Resp.:  $3 - e$ )

**Resolução:**

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_A e^{x+y+z} \, dV &= \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 \int_0^{-x} e^{x+y+z} \, dz dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 \left[ e^{x+y+z} \right]_0^{-x} dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 (e^y - e^{x+y}) \, dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[ e^y - e^{x+y} \right]_{-x}^1 dx \\ &= \int_{-1}^0 (e - e^{x+1} - e^{-x} + 1) \, dx \\ &= \left[ ex - e^{x+1} + e^{-x} + x \right]_{-1}^0 \\ &= 3 - e. \end{aligned}$$

41. Encontre o volume da região em  $\mathbb{R}^3$  limitada acima pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e abaixo pela superfície  $z = x^2 + y^2$ . (Resp.:  $2\pi \left[ -\frac{1}{3}(1 - r_0^2)^{3/2} + \frac{1}{3} - \frac{r_0^4}{4} \right]$  onde  $r_0^2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ )

**Resolução:**

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_V dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (r\sqrt{1-r^2} - r^3) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (r\sqrt{1-r^2}) \, dr \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r^3 \, dr \, d\theta, \quad u = 1 - r^2 \Rightarrow du = -2r \, dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 \sqrt{u} \, du \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r^3 \, dr \, d\theta, \quad r_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{u^3} \right]_{1-r_0}^1 d\theta - \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{r_0}} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 1 - \sqrt{(1-r_0)^3} \, d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} r_0^2 \, d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} (1 - \sqrt{(1-r_0)^3}) - \frac{2\pi r_0^2}{4} \\
&= 2\pi \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{(1-r_0)^3} - \frac{r_0^2}{4} \right]
\end{aligned}$$

42. Encontre o volume acima da metade superior do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  e dentro da esfera  $\rho = 2a \cos \phi$ . (Resp.:  $\pi a^3$ )

**Resolução:**

Coordenadas esféricas:

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi), \quad y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = \rho \cos(\phi), \quad 0 \leq \rho \leq 2a \cos(\phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_V dV &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2a \cos(\phi)} \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi \\
&= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \cos^3(\phi) \, d\theta \, d\phi \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi) \cos^3(\phi) \, d\phi, \quad u = \cos(\phi) \Rightarrow du = -\sin(\phi) \, d\phi \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 u^3 \, du \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \cdot \frac{3}{16} \\
&= \pi a^3.
\end{aligned}$$

43. Encontre a integral de linha de  $f(x, y, z) = x + y + z$  sobre o segmento de reta de  $(1, 2, 3)$  a  $(0, -1, 1)$ .  
(Resp.:  $3\sqrt{14}$ )

**Resolução:**

Parametrização da curva:

$$\gamma(t) = (t, 3t - 1, 2t + 1), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Cálculo da integral de linha:

$$\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \int_0^1 (t + 3t - 1 + 2t + 1) \sqrt{1 + 9 + 4} \, dt \\ &= \int_0^1 6t \sqrt{14} \, dt \\ &= 6\sqrt{14} \int_0^1 t \, dt \\ &= 6\sqrt{14} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 6\sqrt{14} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

44. Integre a função  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$  sobre o caminho (Figura 6) de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$  dado por  $C_1 \cup C_2$ , onde

$$C_1: \quad \gamma(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \quad \gamma(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(Resp.:  $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9)$ )

**Resolução:**

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds$$

Cálculo de  $\int_{C_1} f \, ds$ :

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f \, ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \int_0^1 (t + t) \sqrt{1 + 4t^2} \, dt \\ &= 2 \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt, \quad u = 1 + 4t^2 \Rightarrow du = 8t \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_1^5 \sqrt{u} \, du \\ &= \frac{1}{6} \left[ u\sqrt{u} \right]_1^5 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Cálculo de  $\int_{C_2} f \, ds$ :

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f \, ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \int_0^1 (2 - t^2) \, dt \\ &= \left[ 2t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Cálculo de  $\int_C f \, ds$ :

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds = \frac{1}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1) + \frac{5}{3} = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9).$$

45. Uma argola de arame circular com densidade constante  $\delta$  encontra-se ao longo da circunferência  $C$  de equação  $x^2 + y^2 = a^2$  no plano  $xy$ . Encontre o momento de inércia da argola em relação ao eixo  $z$ , mais especificamente, calcule a integral de linha

$$I_z = \oint_C (x^2 + y^2) \delta \, ds.$$

(Resp.:  $I_z = 2\pi\delta a^3$ )

**Resolução:**

Parametrização da curva:

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral de linha:

$$\int_0^{2\pi} a^2 \delta \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} \, dt = \delta a^3 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \delta a^3.$$

46. Um arame tem a forma da curva obtida como a interseção da porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , com o plano  $x + z = 2$ . Sabendo que a densidade em cada ponto é dada por  $f(x, y, z) = xy$ , calcule a massa total do arame. (Resp.: 4.)

**Resolução:**

Parametrização da curva:

$$\gamma(t) = (1 + \sin(t), \sqrt{2} \cos(t), 1 - \sin(t)), \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo da integral de linha:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos(t) + 2 \sin(t) \cos(t)) \, dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos(t) + \sin(2t)) \, dt \\ &= \left[ 2 \sin(t) - \frac{\cos(2t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} \\ &= 4. \end{aligned}$$