Lista 1 - Cálculo 3

Kevin Nakashima

2025

1. Calcule a integral dupla $\iint_Q \sin(x-y)\,dx\,dy$, sendo $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. (Resp. 0.)
   Resolução:
   Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_Q \sin(x-y)\ dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-y)\ dxdy \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos(x-y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\ dy \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) - \cos(-y)\ dy \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) - \cos(y)\ dy \\
&= \Big[\cos(y) + \sin(y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0 + 1 - 1 - 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Desenhe a região de integração no plano xy e calcule a integral iterada $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2}\,dx\,dy$. (Resp. 98/3.)
   Resolução:
   Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2}\ dxdy &= \int_0^4 y\ \sqrt{9+y^2}\ dy,\ \ u = 9+y^2 \Rightarrow\ du = 2y\ dy \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_9^{25} \sqrt{u}\ du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \Big[u\sqrt{u}\Big]_9^{25} \\
&= \frac{1}{3} \cdot (125 - 27) \\
&= \frac{98}{3}.
\end{aligned}$$

3. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 4x$ para $x \geq 0$. (Resp. 512/3.)
Resolução:
Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 4x \; dydx &= 8\int_0^4 x\sqrt{16-x^2} \; dx, \;\; u = 16 - x^2 \Rightarrow \;\; du = -2x \; dx \\
&= 4\int_0^{16} \sqrt{u} \; du \\
&= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \Big[u\sqrt{u} \Big]_0^{16} \\
&= \frac{8}{3} \cdot 64 \\
&= \frac{512}{3}.
\end{aligned}$$

4. Determine a região de integração D, esboce-a no plano xy e troque a ordem de integração da integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx$.
Resolução:
Troca da ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y) \; dydx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) \; dxdy.$$

5. Calcule a integral dupla $\displaystyle\iint_Q \cos(y^3)\, dx\, dy$, sendo Q a região no plano xy limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$. (Resp. $(\sin 8)/3$.)
Resolução:
Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_Q \cos(y^3) \; dxdy &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3) \; dxdy \\
&= \int_0^2 y^2 \cos(y^3) \; dy, \;\; u = y^3 \Rightarrow \;\; du = 3y^2 \; dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^8 \cos(u) \; du \\
&= \frac{1}{3} \Big[\sin(u) \Big]_0^8 \\
&= \frac{\sin(8)}{3}.
\end{aligned}$$

6. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $x + z = 2$ e $x = 2$ para $z \geq 0$. (Resp. 8/15.)
Resolução:
Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{y^2+1}^{2} x - y^2 - 1 \; dxdy &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2}{2} - y^2x - x\right]_{y^2+1}^{2} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^4 - 2y^2 + 1 \; dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15} \\
&= \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

7. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$. (Resp. $16a^3/3$)
Resolução:
Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2 - x^2} \; dydx &= 4\int_{-a}^{a} a^2 - x^2 \; dx \\
&= 4\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} \\
&= 4\cdot\frac{4a^3}{3} \\
&= \frac{16a^3}{3}.
\end{aligned}$$

8. Calcule $\displaystyle\iint_D \ln(x^2 + y^2)\, dA$, sendo D a região da Figura 1 no primeiro quadrante do plano xy situada entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (Resp. $\dfrac{\pi}{4}(8\ln 2 - 3)$)
Resolução:
Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D \ln(x^2 + y^2)\; dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r\ln\left(r^2\right)\; drd\theta,\; u = r^2 \Rightarrow\; du = 2r\; dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^4 \ln\left(u\right)\; dud\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cdot\int_1^4 \ln\left(u\right)\; du \\
&= \frac{\pi}{4}\;(8\ln\left(2\right) - 3).
\end{aligned}$$

9. Calcule o volume limitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2y$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Veja Figura 2. (Resp. 32/9)
Resolução:
Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 0 \le r \le 2\sin(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin(\theta)} r^2\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sin(\theta)} d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin(\theta)(1-\cos^2(\theta))\, d\theta, \ u = \cos(\theta) \Rightarrow \ du = -\sin(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du \\
&= \frac{8}{3} \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{32}{9}.
\end{aligned}$$

10. Determine a área da região D da Figura 3 no plano xy definida por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \le 4 \text{ e } x^2 + y^2 \ge 4\right\}.$$

(Resp. $\dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$.)
Resolução:
Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 2 \le r \le 4\sin(\theta), \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D dA &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_2^{4\sin(\theta)} r\, dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{4\sin(\theta)} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8\sin^2(\theta) - 2)\, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[8\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) - 2\right] d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4\cos(2\theta))\, d\theta \\
&= \Big[2\theta - 2\sin(2\theta)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

11. Determine o volume do sólido W da Figura 4 dado por

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 9\right\}.$$

(Resp. $\frac{256\pi}{3}$.)
Resolução:
Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 3 \leq r \leq 5, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
2\iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2}\, dA &= 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 r\,\sqrt{25 - r^2}\, dr d\theta,\ u = 25 - r^2 \Rightarrow\ du = -2r\ dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{16} \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{4\pi}{3} \cdot \Big[u\sqrt{u} \Big]_0^{16} \\
&= \frac{4\pi}{3} \cdot 64 \\
&= \frac{256\pi}{3}.
\end{aligned}$$

12. (a) Definimos uma integral imprópria sobre todo $\mathbb{R}^2$ por

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \pi.$$

Resolução:
Seja

$$I(a) = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA,$$

em que

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

De acordo com o definido no enunciado, temos

$$I = \lim_{a\to\infty} I(a),$$

então devemos mostrar que

$$I = \lim_{a\to\infty} I(a) = \pi.$$

Para isso, notamos que a região de integração (D_a) em coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta),$$

é obtida para $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$. Então, aplicamos o Teorema de Fubini e a mudança de variável na integral $I(a)$ (observando que $x^2 + y^2 = r^2$), para obter o seguinte:

$$I(a) = \int_0^{2\pi}\int_0^a re^{-r^2}\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a re^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^a re^{-r^2}\, dr.$$

Agora, calculemos $\int_0^a re^{-r^2} dr$. Chamando $u = -r^2$ (então $du = -2rdr$), observamos que $r \in [0, a]$ implica que $u = 0$, e $r = a$ implica que $u = -a^2$, então

$$\int_0^a re^{-r^2} dr = \int_0^a re^u \cdot \frac{du}{-2r} = -\frac{1}{2}\int_0^a e^u du = \frac{1}{2}\int_{-a^2}^0 e^u du,$$

daí

$$\int_0^a re^{-r^2}dr = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-a^2}^0 = \frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right).$$

Então,

$$I(a) = 2\pi\int_0^a re^{-r^2}dr = 2\pi\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-a^2}) = \pi(1-e^{-a^2}).$$

De onde concluímos que

$$I = \lim_{a\to\infty} I(a) = \lim_{a\to\infty}\pi\left(1-e^{-a^2}\right) = \pi.$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use essa definição para mostrar que

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi.$$

Resolução:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \\ &= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \lim_{a\to\infty}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(c) Deduza

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Resolução:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Resolução:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

13. Uma carga elétrica é distribuída sobre o disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1\}$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.
Resolução:

$$Q = \iint_D \sigma(x,\ y)\,dA.$$

Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sigma(x,\ y)\ dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2\pi}{3} \text{ coulombs.}
\end{aligned}$$

14. Uma lâmina ocupa a parte do disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x. (Resp. $(3/8,\ 3\pi/16)$)

Resolução:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D x\ \sigma(x,\ y)\ dA, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D y\ \sigma(x,\ y)\ dA.$$

Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo de M:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin(\theta)\ drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\ d\theta \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Cálculo de x_{CM}:

$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D x\ \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\ drd\theta \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\theta)}{2}\ d\theta \\
&= \frac{3}{8} \cdot \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Cálculo de y_{CM}:

$$\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D y\ \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin^2(\theta)\ drd\theta \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\ d\theta \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\ d\theta \\
&= \frac{3}{8} \cdot \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

15. Determine o centro de gravidade (ou centro de massa) de uma lâmina plana limitada pela parábola $y = x^2$ e pelas retas $y = 0$ e $x = 4$, sabendo-se que a densidade no ponto $P = (x, y)$ é proporcional à abscissa do ponto P.
Resolução:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D x\ \sigma(x,\ y)\ dA, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D y\ \sigma(x,\ y)\ dA.$$

Cálculo de M:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= \int_0^4 \int_0^{x^2} kx\ dydx \\
&= k \int_0^4 x^3\ dx \\
&= k \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 \\
&= 64k.
\end{aligned}$$

Cálculo de x_{CM}:

$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D x\ \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= \frac{1}{64k} \int_0^4 \int_0^{x^2} kx^2\ dydx \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 x^4\ dx \\
&= \frac{1}{320} \cdot \left[x^5\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{320} \cdot 1024 \\
&= \frac{16}{5}.
\end{aligned}$$

Cálculo de y_{CM}:

$$\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{M} \iint_D y\ \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= \frac{1}{64k} \int_0^4 \int_0^{x^2} kxy\ dydx \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{128} \int_0^4 x^5\ dx \\
&= \frac{1}{128} \cdot \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{128} \cdot \frac{4096}{6} \\
&= \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

16. Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0{,}1x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y?

    Resolução:

    Cálculo momento de inércia em relação ao eixo x:

$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_D y^2 \ \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= \int_0^2 \int_0^2 \left(y^2 + \frac{xy^2}{10}\right) dxdy \\
&= \int_0^2 \left[xy^2 + \frac{x^2y^2}{20}\right]_0^2 dy \\
&= \int_0^2 \left(2y^2 + \frac{y^2}{5}\right) dy \\
&= \frac{11}{5} \int_0^2 y^2 \ dy \\
&= \frac{11}{5} \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{88}{15}.
\end{aligned}
$$

    Cálculo momento de inércia em relação ao eixo y:

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iint_D x^2 \ \sigma(x,\ y)\ dA \\
&= \int_0^2 \int_0^2 \left(x^2 + \frac{x^3}{10}\right) dxdy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{40}\right]_0^2 dy \\
&= \frac{46}{15} \int_0^2 \ dy \\
&= \frac{92}{15}.
\end{aligned}
$$

    Portanto, é mais difícil girar a pá em torno do eixo y, pois $I_x < I_y$.

17. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x,y)=\begin{cases} Cx(1+y) & \text{se } 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.
Resolução:

$$\iint_D f(x,\ y)\ dA=1.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\ y)\ dA &= \int_0^2\int_0^1 Cx(1+y)\ dxdy\\ &= C\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^2y}{2}\right]_0^1 dy\\ &= \frac{C}{2}\int_0^2 y+1\ dy\\ &= \frac{C}{2}\cdot\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_0^2\\ &= \frac{C}{2}\cdot 4\\ &= 2C\Rightarrow\ 2C=1\Rightarrow\ C=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Encontre $P(X\leq 1,\ Y\geq 1)$.
Resolução:
Possivelmente, houve um erro de digitação, uma vez que o resultado não está de acordo com o gabarito.
Para $P(X\leq 1,\ Y\geq 1)$:
Cálculo integral dupla:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\ y)\ dA &= \frac{1}{2}\int_1^2\int_0^1 x(1+y)\ dxdy\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^2y}{2}\right]_0^1 dy\\ &= \frac{1}{4}\int_1^2 y+1\ dy\\ &= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_1^2\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}\\ &= \frac{5}{8}=0,625.\end{aligned}$$

Para $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$:
Cálculo integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,\ y)\ dA &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 x(1+y)\ dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2}\right]_0^1 dy \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 y + 1\ dy \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{y^2}{2} + y\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{8} = 0,375.
\end{aligned}$$

(c) Encontre $P(X + Y \leq 1)$.
Resolução:
Cálculo integral dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,\ y)\ dA &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-y} x(1+y)\ dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2}\right]_0^{1-y} dy \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 y^3 - y^2 - y + 1\ dy \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + y\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} \\
&= \frac{5}{48} \approx 0,1042.
\end{aligned}$$

(Resp. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0,375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}1042$)

18. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 km na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto $A = (x_0, y_0)$, suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \frac{1}{20}\left[20 - d(P, A)\right]$$

onde $d(P, A)$ denota a distância entre os pontos P e A.

(a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por quilômetro quadrado. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A.
Resolução:
Determinação da integral dupla:

$$k \iint_D f(P)\ dA = \frac{k}{20} \iint_D (20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})\ dA.$$

(b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde seria preferível viver?

Resolução:

Primeiro caso:

Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 0 \le r \le 10, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{20}\iint_D (20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})\, dA &= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} (20-r)r \ drd\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} 20r - r^2 \ drd\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\left[10r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_{10}^{0} d\theta \\
&= \frac{100k}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{200\pi k}{3} \approx 209k.
\end{aligned}$$

Segundo caso:

Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 0 \le r \le -20\cos(\theta), \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{20}\iint_D (20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})\, dA &= \frac{k}{20}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{-20\cos(\theta)} (20-r)r \ drd\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{-20\cos(\theta)} 20r - r^2 \ drd\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[10r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^{-20\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(4000\cos^2(\theta) + \frac{8000\cos^3(\theta)}{3}\right) d\theta \\
&= \frac{200k}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(3\cos^2(\theta) + 2\cos^3(\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{200k}{3}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos^2(\theta)\ d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\cos^3(\theta)\ d\theta\right) \\
&= \frac{200k}{3}\left(3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta)(1-\sin^2(\theta))\ d\theta\right) \\
&= \frac{200k}{3}\left(\frac{3}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - 2\int_{-1}^{1}(1-u^2)\ du\right), \ u = \sin(\theta) \\
&= \frac{200k}{3}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right) \\
&= \frac{200k}{3}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\cdot\frac{4}{3}\right) \\
&= 200k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{9}\right) \approx 136k.
\end{aligned}$$

Portanto, seria preferível viver na periferia, uma vez que $136k < 209k$.

19. Determine a área do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$. (Resp. $15\sqrt{26}$)
Resolução:
Aplicação da definição:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dA \\ &= \int_1^4 \int_0^5 \sqrt{26}\; dxdy \\ &= 5\sqrt{26} \int_1^4 dy \\ &= 15\sqrt{26}. \end{aligned}$$

20. Determine a área do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante. (Resp. $3\sqrt{14}$)
Resolução:
Aplicação da definição:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2y}{3}} \sqrt{14}\; dxdy \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 \left(2 - \frac{2y}{3}\right) dy \\ &= \sqrt{14} \cdot \left[2y - \frac{y^2}{3}\right]_0^3 \\ &= 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

21. Determine a área do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices $(0, 0), (4, 0), (0, 2)$ e $(4, 2)$. (Resp. $12 \sin^{-1}(2/3)$)
Resolução:
Parametrização da superfície:

$$\gamma(x,\ y) = (x,\ y,\ \sqrt{9 - y^2}),\ 0 \le x \le 4,\ 0\ \le y \le 2.$$

Cálculo das derivadas parciais:

$$\gamma_x = (1,\ 0,\ 0), \quad \gamma_y = \left(0,\ 1,\ -\frac{y}{\sqrt{9 - y^2}}\right).$$

Cálculo do produto vetorial:

$$\gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{9-y^2}} \end{vmatrix} = \left(0,\ \frac{y}{\sqrt{9 - y^2}},\ 1\right) \Rightarrow \|\gamma_x \times \gamma_y\| = \sqrt{\frac{y^2}{9 - y^2} + 1}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_D \|\gamma_x \times \gamma_y\| \; dA \\
&= \int_0^4 \int_0^2 \sqrt{\frac{y^2}{9-y^2}+1} \; dydx \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{9-y^2}} \; dydx, \;\; y = 3\sin(u) \Rightarrow \;\; dy = 3\cos(u) \; du \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^{\arcsin(\frac{2}{3})} \frac{3\cos(u)}{\sqrt{9-9\sin^2(u)}} \; dudx \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^{\arcsin(\frac{2}{3})} \frac{3\cos(u)}{3\sqrt{1-\sin^2(u)}} \; dudx \\
&= 3 \int_0^4 \int_0^{\arcsin(\frac{2}{3})} \; dudx \\
&= 3 \int_0^4 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \; dx \\
&= 12 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

22. Determine a área do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (Resp. $\frac{\pi}{6}\left[17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right]$)
Resolução:
Parametrização da superfície:

$$\gamma(x,\; y) = (x,\; y,\; y^2 - x^2)$$

Cálculo do produto vetorial:

$$\gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \Big(2x,\; -2y,\; 1\Big) \Rightarrow \; \|\gamma_x \times \gamma_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 1 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Cálculo da integral dupla:

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_D \|\gamma_x \times \gamma_y\| \; dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r\sqrt{4r^2+1} \; drd\theta, \;\; u = 4r^2 + 1 \Rightarrow \;\; du = 8r \; dr \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_5^{17} \sqrt{u} \; dud\theta \\
&= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \Big[u\sqrt{u}\Big]_5^{17} \; d\theta \\
&= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} 17\sqrt{17} - 5\sqrt{5} \; d\theta \\
&= \frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{12} \int_0^{2\pi} \; d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

23. A Figura 5 mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.
Resolução:
Parametrização da superfície:

$$\gamma(x,\ y) = (x,\ \cos(\theta),\ \sin(\theta)),\ -|\cos(\theta)| \leq x \leq |\cos(\theta)|,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Cálculo do produto vetorial:

$$\gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \Big(0,\ -\cos(\theta),\ -\sin(\theta)\Big) \Rightarrow \|\gamma_x \times \gamma_y\| = 1.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\begin{aligned} A &= 2 \iint_D \|\gamma_x \times \gamma_y\|\ dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-|\cos(\theta)|}^{|\cos(\theta)|} dx d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)|\ d\theta \\ &= 4 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\ d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta)\ d\theta \right) \\ &= 4 \left(\Big[\sin(\theta) \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin(\theta) \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \\ &= 4 \cdot 4 \\ &= 16. \end{aligned}$$

24. Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint\limits_D xy^2z^3\, dV$ onde D é a região no primeiro octante limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $y = x$, $x = 1$ e $z = 0$. (Resp. $\dfrac{1}{364}$.)
Resolução:
Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned} \iiint_D xy^2z^3\ dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^3\ dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{xy^2z^4}{4} \right]_0^{xy} dydx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^x x^5y^6\ dydx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left[\frac{x^5y^7}{7} \right]_0^x dx \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12}\ dx \\ &= \frac{1}{28} \left[\frac{x^{13}}{13} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

25. Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint\limits_D x\,dV$ onde D é o tetraedro com faces sobre os planos coordenados $x=0$, $y=0$, $z=0$ e o sobre o plano $x+\dfrac{y}{2}+z=1$. (Resp. $\dfrac{1}{12}$.)
Resolução:
Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_D xy^2z^3\ dV &= \int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{1-x-\frac{y}{2}} x\ dzdydx\\
&= \int_0^1\int_0^{2-2x} x\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\ dydx\\
&= \int_0^1\int_0^{2-2x} \left(x-x^2-\frac{xy}{2}\right)\ dydx\\
&= \int_0^1 \left[xy-x^2y-\frac{xy^2}{4}\right]_0^{2-2x}\ dx\\
&= \int_0^1 x^3-2x^2+x\ dx\\
&= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

26. Calcule o volume do sólido abaixo do gráfico de $z=1+x^2+3y^2$ e acima do plano xy para (x,y) restrito à região limitada pelas curvas $y=x$, $y=-x+2$ e $y=0$. (Resp. $\dfrac{8}{3}$.)
Resolução:
Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_D\ dV &= \int_0^1\int_y^{2-y}\int_0^{1+x^2+3y^2} dzdxdy\\
&= \int_0^1\int_y^{2-y} 1+x^2+3y^2\ dxdy\\
&= \int_0^1 \left[x+\frac{x^3}{3}+3xy^2\right]_y^{2-y}\ dy\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (-20y^3+24y^2-18y+14)\ dy\\
&= \frac{1}{3}\left[-5y^4+8y^3-9y^2+14y\right]_0^1\\
&= \frac{1}{3}\cdot 8\\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

27. Use integral tripla para calcular o volume da região entre os planos $x + y + 2z = 2$ e $2x + 2y + z = 4$ no primeiro octante. (Resp. 2.)
Resolução:
Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_D dV &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}^{4-2x-2y} dzdxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2-x} (-3x - 3y + 6)\ dydx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 (-3x^2 - 12x + 12)\ dx \\
&= \frac{1}{4} \left[x^3 - 6x^2 + 12x \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot 8 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

28. Calcule a integral de $f(x, y, z) = z$ sobre o sólido que está acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e que seja interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Resp. 60π.)
Resolução:
Coordenadas cilindricas:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq r\sqrt{3}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\ dV &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_0^{r\sqrt{3}} dzdxdy \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^3 r^3\ dxdy \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^3 dy \\
&= 30 \int_0^{2\pi} dy \\
&= 60\pi.
\end{aligned}$$

29. Calcule o volume do sólido que está simultaneamente no interior da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e do cilindro $x^2+(y-1)^2=1$. (Resp.: $\dfrac{16}{3}\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)$.)

Resolução:

Coordenadas cilindricas:

$$x=r\cos(\theta),\quad y=r\sin(\theta),\quad z=z,\quad 0\le r\le 2\sin(\theta),\quad 0\le\theta\le\pi,\quad -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \sqrt{4-x^2-y^2}\,dV &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin(\theta)}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\ dzdrd\theta\\
&= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin(\theta)} r\sqrt{4-r^2}\ drd\theta,\ u=4-r^2\ \Rightarrow\ du=-2r\ dr\\
&= \int_0^{\pi}\int_{4-4\sin^2(\theta)}^{4}\sqrt{u}\ dud\theta,\ 4-4\sin^2(\theta)=4(1-\sin^2(\theta))=4\cos^2(\theta)\\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\Big[u\sqrt{u}\Big]_{4cos^2(\theta)}^{4} d\theta\\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\pi} 1-|\cos^3(\theta)|\ d\theta\\
&= \frac{16}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^3(\theta)\ d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1+\cos^3(\theta)\ d\theta\right)\\
&= \frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{16}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

30. Calcule $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dV$ onde D é o conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ e $z\ge 0$. (Resp.: $\dfrac{62\pi}{5}$)

Resolução:

Coordenadas esféricas:

$$x=\rho\cos(\theta)\sin(\phi),\quad y=\rho\sin(\theta)\sin(\phi),\quad z=\rho\cos(\phi),\quad 1\le\rho\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\ dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho^4\sin(\phi)\ d\rho d\theta d\phi\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^5\sin(\phi)}{5}\right]_1^2 d\theta d\phi\\
&= \frac{31}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin(\phi)\ d\theta d\phi\\
&= \frac{62\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\phi)\ d\phi\\
&= \frac{62\pi}{5}\Big[-\cos(\phi)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{62\pi}{5}
\end{aligned}$$

31. Calcule a integral tripla $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$ onde D é o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e os cones $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ (Resp.: $\frac{\pi}{12}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1)$.)

Resolução:

Coordenadas esféricas:

$$x=\rho\cos(\theta)\sin(\phi),\quad y=\rho\sin(\theta)\sin(\phi),\quad z=\rho\cos(\phi),\quad 0\le\rho\le 4,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{6}\le\phi\le\frac{\pi}{3}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4 e^{\rho^3}\rho^2\sin(\phi)\ d\rho d\phi d\theta,\ u=\rho^3\Rightarrow\ du=3\rho^2\ d\rho\\
&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{64} e^u\sin(\phi)\ dud\phi d\theta\\
&=\frac{e^{64}-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin(\phi)\ d\phi d\theta\\
&=\frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\\
&=\frac{\pi}{12}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1).
\end{aligned}$$

32. Seja $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 0\le z\le 1-x^2-y^2\}$.

(a) Escreva a integral $\iiint_B xyz\, dV$ em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

Resolução:

Coordenadas cartesianas:

Integral tripla:

$$\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}\int_0^{1-x^2-y^2} xyz\ dzdydx.$$

Coordenadas cilindricas:

Mudança de coordenada:

$$x=r\cos(\theta),\quad y=r\sin(\theta),\quad z=z,\quad 0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le z\le 1-r^2.$$

Integral tripla:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r^3\sin(\theta)\cos(\theta)z\ dzdrd\theta.$$

Coordenadas esféricas:

Mudança de coordenada:

$$x=\rho\cos(\theta)\sin(\phi),\quad y=\rho\sin(\theta)\sin(\phi),\quad z=\rho\cos(\phi),$$

$$0\le\rho\le\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{4-3\cos^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)},\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}.$$

Integral tripla:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{4-3\cos^2\phi}}{2\sin^2(\phi)}} \rho^5\sin(\theta)\cos(\theta)\sin^3(\phi)\cos(\phi)\ d\rho d\phi d\theta.$$

(b) Encontre o valor da integral usando uma das integrais iteradas obtida no item (a). (Resp.: 0.)
Resolução:
Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\ dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r^3\sin(\theta)\cos(\theta)z\ dzdrd\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3-2r^5+r^7)\sin(\theta)\cos(\theta)\ drd\theta\\ &= \frac{1}{48}\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta\\ &= \frac{1}{48}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2\theta)}{2}\ d\theta\\ &= \frac{1}{96}\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{192}\cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

33. Considere a transformação definida por

$$x = uv \quad \text{e} \quad y = v - u$$

(a) Usando T, determine a imagem D no plano xy do retângulo R no plano uv de vértices $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$ e $(0,2)$.
Resolução:
Transformação das coordenadas:

$$\begin{aligned}(0,\ 1) &\Rightarrow\ (0.1,\ 1-0) = (0,\ 1)\\ (1,\ 1) &\Rightarrow\ (1.1,\ 1-1) = (1,\ 0)\\ (1,\ 2) &\Rightarrow\ (1.2,\ 2-1) = (2,\ 1)\\ (0,\ 2) &\Rightarrow\ (0.2,\ 2-0) = (0,\ 2)\end{aligned}$$

A imagem D corresponde à área delimitida pelos pontos (0, 1), (1, 0), (2, 1), (0, 2).

(b) Calcule a área de D. (Resp.: 2)
Resolução:
Cálculo da integral dupla:

$$A = \iint_D dA = \int_0^2\int_0^{2-\frac{x}{2}} dydx - 1 = \int_0^2 2 - \frac{x}{2}\ dx - 1 = \left[2x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 - 1 = 4 - 1 - 1 = 2.$$

34. Considere a transformação T definida por

$$x = u + v \quad e \quad y = v - u^2$$

(a) Determine a imagem D no plano xy da região Q no plano uv limitada pelas retas $u = 0$, $v = 0$ e $u + v = 2$.
Resolução:
Determinação da imagem D:

$$\begin{aligned}&0 \le u,\ 0 \le v,\ u+v \le 2\ \Rightarrow\ 0 \le u+v \le 2\ \Rightarrow\ 0 \le x \le 2\\ &x = u+v\ \Rightarrow\ v = x-u,\ y = v-u^2\ \Rightarrow\ y = x-u-u^2\ \Rightarrow -x^2 \le y \le x\end{aligned}$$

Portanto, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ -x^2 \le y \le x\}$

(b) Usando T, calcule $\displaystyle\iint_D \left(x - y + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dA$. (Resp.: 4)
Resolução:
Cálculo do determinante da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ -2u & 1\end{vmatrix} = 1 + 2u.$$

Cálculo da integral dupla:

$$
\begin{aligned}
\iint_D \left(x - y + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dA &= \int_0^2 \int_0^{2-u} \left(u + u^2 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} (1+2u)\ dvdu \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-u} \left[\left(u + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} (1+2u)\ dvdu \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-u} \frac{1+2u}{u+\frac{1}{2}}\ dvdu \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-u} \frac{2(u+\frac{1}{2})}{u+\frac{1}{2}}\ dvdu \\
&= 2 \int_0^2 \int_0^{2-u} dvdu \\
&= 2 \int_0^2 (2-u)\ du \\
&= 2 \left[(2u - \frac{u^2}{2})\right]_0^2 \\
&= 2 \cdot 2 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

35. Calcule $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\, dA$, onde D é a região triangular limitada pela reta $x + y = 2$ e os eixos coordenados. (Resp.: $e - e^{-1}$)
Resolução:
Mudança de variável:

$$u = y - x, \quad v = y + x \ \Rightarrow\ x = \frac{v-u}{2}, \quad y = \frac{u+v}{2}.$$

Cálculo do determinante da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Cálculo da integral dupla:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\ \frac{1}{2}\ dudv &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} dv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(ve - \frac{v}{e}\right) dv \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{v^2 e}{2} - \frac{v^2}{2e}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(2e - \frac{2}{e}\right) \\
&= e - \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

36. Calcule a área do conjunto R no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 2x$ e hipérboles $xy = 1$ e $xy = 2$. (Resp.: $\frac{1}{2}\ln 2$)
Resolução:
Mudança de variável:

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy, \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

Cálculo do determinante da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{2u^2}\sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{1}{2u}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\int_1^2 \int_1^2 \left| -\frac{1}{2u} \right| dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u}\ dudv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \Big[\ln(u) \Big]_1^2 dv$$
$$= \frac{\ln(2)}{2} \int_1^2 dv$$
$$= \frac{\ln(2)}{2}.$$

37. Calcule a integral $\iint_R \frac{1}{y^2}\, dA$, onde R é a região do exercício anterior.
Resolução:
Cálculo da integral dupla:

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{uv} \left| -\frac{1}{2u} \right| dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u^2 v}\ dudv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \Big[-\frac{1}{uv} \Big]_1^2 dv$$
$$= \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{v}\ dv$$
$$= \frac{1}{4} \Big[\ln(v) \Big]_1^2$$
$$= \frac{\ln(2)}{4}$$

38. Esboce a região definida por $y \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 2$ e $x^2 + y^2 \geq 1$. Encontre a integral da função

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

sobre esta região. (Resp.: 0)
Resolução
Coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Cálculo da integral dupla:

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\ dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_1^{\sqrt{2}} r\sin(\theta)\cos(\theta)\ drd\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(\theta)\cos(\theta) \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta$$
$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(2\theta)\ d\theta$$
$$= \frac{1}{8} \Big[-\cos(2\theta) \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{8} \cdot 0$$
$$= 0.$$

39. Encontre a área delimitada pela curva $r^2 = \cos\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. (Resp.: 1)
Resolução:
Cálculo da integra dupla:

$$\begin{aligned}
\iint_D dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\cos(\theta)}} r\ drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\cos(\theta)}} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sin(\theta)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

40. Seja A a região em $\mathbb{R}^3$ limitada pelos planos $y = 1$, $y = -x$, $x = 0$, $z = 0$ e $z = -x$. Calcule

$$\iiint_A e^{x+y+z}\, dV.$$

(Resp.: $3 - e$)
Resolução:
Cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
\iiint_A e^{x+y+z}\, dV &= \int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1}\int_{0}^{-x} e^{x+y+z}\ dzdydx \\
&= \int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1} \Big[e^{x+y+z}\Big]_0^{-x} dydx \\
&= \int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1} (e^y - e^{x+y})\ dydx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big[e^y - e^{x+y}\Big]_{-x}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{0} (e - e^{x+1} - e^{-x} + 1)\ dx \\
&= \Big[ex - e^{x+1} + e^{-x} + x\Big]_{-1}^{0} \\
&= 3 - e.
\end{aligned}$$

41. Encontre o volume da região em $\mathbb{R}^3$ limitada acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e abaixo pela superfície $z = x^2 + y^2$. (Resp.: $2\pi\left[-\frac{1}{3}(1 - r_0^2)^{3/2} + \frac{1}{3} - \frac{r_0^4}{4}\right]$ onde $r_0^2 = (\sqrt{5} - 1)/2$)
Resolução:
Coordenadas cilindricas:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$
\begin{aligned}
\iiint_V dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r \ dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (r\sqrt{1-r^2} - r^3) \ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (r\sqrt{1-r^2}) \ drd\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r^3 \ drd\theta, \ u = 1 - r^2 \ \Rightarrow \ du = -2r \ dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} \sqrt{u} \ dud\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r^3 \ drd\theta, \ r_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{u^3}\right]_{1-r_0}^{1} d\theta - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{r_0}} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 1 - \sqrt{(1-r_0)^3} \ d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} r_0^2 \ d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} \ (1 - \sqrt{(1-r_0)^3}) - \frac{2\pi r_0^2}{4} \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-r_0)^3} - \frac{r_0^2}{4}\right]
\end{aligned}
$$

42. Encontre o volume acima da metade superior do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e dentro da esfera $\rho = 2a\cos\phi$. (Resp.: πa^3)
Resolução:
Coordenadas esféricas:

$$x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi), \quad y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \quad z = \rho\cos(\phi), \quad 0 \leq \rho \leq 2a\cos(\phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Cálculo da integral tripla:

$$
\begin{aligned}
\iiint_V dV &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a\cos(\phi)} \rho^2\sin(\phi) \ d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2a\cos(\phi)} \sin(\phi) \ d\theta d\phi \\
&= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos^3(\phi) \ d\theta d\phi \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi)\cos^3(\phi) \ d\phi, \ u = \cos(\phi) \ \Rightarrow \ du = -\sin(\theta) \ d\theta \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} u^3 \ du \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \left[\frac{u^4}{4}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \\
&= \frac{16a^3\pi}{3} \cdot \frac{3}{16} \\
&= \pi a^3.
\end{aligned}
$$

43. Encontre a integral de linha de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre o segmento de reta de $(1, 2, 3)$ a $(0, -1, 1)$. (Resp.: $3\sqrt{14}$)
Resolução:
Parametrização da curva:

$$\gamma(t) = (t,\ 3t - 1,\ 2t + 1), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Cálculo da integral de linha:

$$\begin{aligned} \int_C f\ ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\ dt \\ &= \int_0^1 (t + 3t - 1 + 2t + 1)\sqrt{1 + 9 + 4}\ dt \\ &= \int_0^1 6t\sqrt{14}\ dt \\ &= 6\sqrt{14}\ \int_0^1 t\ dt \\ &= 6\sqrt{14}\ \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 6\sqrt{14} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

44. Integre a função $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre o caminho (Figura 6) de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ dado por $C_1 \cup C_2$, onde

$$C_1 : \quad \gamma(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$C_2 : \quad \gamma(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(Resp.: $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9)$)
Resolução:

$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds$$

Cálculo de $\int_{C_1} f\ ds$:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f\ ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\ dt \\ &= \int_0^1 (t + t)\sqrt{1 + 4t^2}\ dt \\ &= 2\ \int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2}\ dt,\ u = 1 + 4t^2\ \Rightarrow\ du = 8t\ dt \\ &= \frac{1}{4}\ \int_1^5 \sqrt{u}\ du \\ &= \frac{1}{6}\ \left[u\sqrt{u}\right]_1^5 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Cálculo de $\int_{C_2} f\ ds$:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f\ ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\ dt \\ &= \int_0^1 (2 - t^2)\ dt \\ &= \left[2t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Cálculo de $\int_C f\ ds$:

$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds = \frac{1}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1) + \frac{5}{3} = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9).$$

45. Uma argola de arame circular com densidade constante δ encontra-se ao longo da circunferência C de equação $x^2 + y^2 = a^2$ no plano xy. Encontre o momento de inércia da argola em relação ao eixo z, mais especificamente, calcule a integral de linha

$$I_z = \oint_C (x^2 + y^2)\delta\, ds.$$

(Resp.: $I_z = 2\pi\delta a^3$)
Resolução:
Parametrização da curva:

$$\gamma(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Cálculo da integral de linha:

$$\int_0^{2\pi} a^2\delta\sqrt{a^2\sin^2(t) + a^2\cos^2(t)}\ dt = \delta a^3 \int_0^{2\pi}\ dt = 2\pi\delta a^3.$$

46. Um arame tem a forma da curva obtida como a interseção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, com o plano $x + z = 2$. Sabendo que a densidade em cada ponto é dada por $f(x, y, z) = xy$, calcule a massa total do arame. (Resp.: 4.)
Resolução:
Parametrização da curva:

$$\gamma(t) = (1 + \sin(t),\ \sqrt{2}\cos(t),\ 1 - \sin(t)), \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo da integral de linha:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t))\ dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos(t) + \sin(2t))\ dt \\
&= \left[2\sin(t) - \frac{\cos(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} \\
&= 4.
\end{aligned}$$