



Laboratório de Física I

Livro de Práticas

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
Laboratório de Ensino de Física

Laboratório de Física I: livro de práticas

São Carlos
2017

Impressa e encadernada no setor gráfico do IFSC/USP

© 2017 IFSC/USP

Todos os direitos reservados ao Instituto de Física de São Carlos

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC

Universidade de São Paulo. Instituto de Física de São Carlos. Laboratório de Ensino de Física.

Laboratório de Física I: livro de práticas / compilado por Jose F. Schneider. São Carlos: Instituto de Física de São Carlos, 2017.

124p.

ISBN 978-85-61958-05-3

1. Física. I. Schneider, José F., comp. II. Título.

CDD 530

Agradecimentos

Nosso trabalho de compilação, revisão e sistematização destas apostilas de Laboratório é a última contribuição aos esforços de muitos colegas do IFSC ao longo dos anos, que trabalharam no desenvolvimento das práticas e das primeiras versões das apostilas. Alguns colegas e mentores que gostaríamos especialmente de reconhecer são os professores Renê A. Carvalho, Horácio C. Panepucci, Otaciro R. Nascimento, Roberto M. Faria, Maria C. Terrile, Rosemary Sanchez, José P. Donoso, Cláudio J. Magon, Dietrich Schiel, Mariangela Tassinari, Máximo Siu Li, Antonio José da Costa Filho, Luiz Agostinho Ferreira, Valmor R. Mastelaro, Francisco G. Guimarães e Tito J. Bonagamba. A contribuição do corpo técnico do Laboratório de Ensino tem sido fundamental em muitas oportunidades para o aprimoramento das montagens experimentais, e vale reconhecer o esforço de Amauri Gentil, Antenor Fabbri Petrilli Filho, Cláudio Boense Bretas, Ércio Santoni, Jae Antonio de Castro Filho e Marcos José Semenzato. A revisão dessa edição teve a contribuição de Renato Antônio Cruz, João Renato Muniz e Fernando Fernandes Paiva, docentes colaboradores durante os anos de 2011, 2013 e 2015, respectivamente. Os compiladores também agradecem à biblioteca do IFSC pelo cuidadoso trabalho de normatização.

Como nenhuma revisão é verdadeiramente final, gostaríamos de receber os comentários, atualizações, sugestões e correções de todos aqueles que usaram esse material em suas aulas de laboratório, para assim melhorar as futuras edições destas apostilas.

José F. Schneider

Listas de Figuras

Figura 1.1 - Exemplos de comparação de duas grandezas medidas com incerteza $x_1 \pm \sigma_1$ e $x_2 \pm \sigma_2$. (a) e (b): Resultados equivalentes dentro da incerteza, compatíveis com a condição (9). (c) Resultados não-equivalentes de acordo com a condição (10).	32
Figura 2.1 - Variação do comprimento ΔL de uma barra de alumínio em função da temperatura.....	35
Figura 2.2 - (a) Relação não linear desconhecida entre duas variáveis y e x . (b) Gráfico de y em função de x^3 , demonstrando a existência de uma relação cúbica entre as variáveis.....	39
Figura 2.3 - Relação não linear desconhecida entre duas variáveis y e x . (a) Gráfico em escala lineares e (b) em escala logarítmicas (“di-log” ou “log-log”).	41
Figura 2.4 - Amplitude de oscilação em função do tempo em escala mono-log de duas décadas.	45
Figura 3.1 - Duas grandezas físicas x e y , medidas experimentalmente (círculos abertos), com relação possivelmente linear. Linha contínua: melhor reta traçada graficamente representando a relação entre as grandezas. P1, P2 e P3: pontos escolhidos sobre a reta para o cálculo dos parâmetros.	48
Figura 3.2 - Exemplo de duas grandezas físicas x e y medidas experimentalmente (círculos), com relação possivelmente linear. Linha contínua: melhor reta determinada pelo método de mínimos quadrados. Linhas tracejadas: banda de incerteza média do ajuste.....	51
Figura 3.3 - Exemplo de ajuste linear insatisfatório (linha contínua) de um conjunto de dados experimentais (círculos), devido à existência de uma relação não linear entre x e y , ou a erros não aleatórios durante o experimento.	53

Práticas

Figura 1.1 - Paquímetro universal com vernier.	58
Figura 1.2 - Princípio de funcionamento do vernier. (a) Zeros do vernier e da escala principal alinhados. Observe que as divisões do vernier são 10% mais curtas que as da régua principal. (b) Alinhamento na divisão 1 do vernier. O deslocamento do vernier com relação ao zero da escala principal é de 1/10 de unidade da escala principal. (c) Alinhamento na divisão 4 do vernier. O deslocamento do vernier corresponde, agora, a 4/10 de unidade da escala principal.	59
Figura 1.3 - Detalhe da leitura do paquímetro, para o caso de um vernier de 20 divisões (precisão 0,05 mm).	60
Figura 1.4 - Micrômetro de parafuso (precisão de 0,01 mm).	62
Figura 1.5 - Detalhe da leitura do micrômetro, para um tambor de 50 divisões (precisão 0,01 mm).	63
Figura 2.1 - Dispositivo para a medida da deflexão x de uma barra de aço de comprimento L fixa em um extremo e carregada no extremo livre.	70
Figura 3.1 - Pêndulo simples de comprimento L . T : tensão da corda. P : força peso.	76
Figura 3.2 - Objeto se deslocando sobre um plano inclinado sem atrito. N : força normal. P : força peso. v : velocidade do objeto.	77
Figura 3.3 - (a) Trilho de ar para análise do movimento uniformemente acelerado no plano inclinado. (b) Detalhe do carrinho suspenso, mostrando o segmento de circuito com a agulha de faiscamento.	80
Figura 4.1 - Exemplo de diagramas de equilíbrio de forças para um corpo em equilíbrio apoiado sobre um plano inclinado: (a) sistema real, (b) diagrama de corpo isolado para o centro de massa, (c) triângulo de forças.	89
Figura 4.2 - Corpo em repouso submetido a uma força de tração compensada pela força de atrito estática entre as superfícies.	91
Figura 4.3 - Variação do módulo da força de atrito em função da intensidade da força de tração atuando sobre o corpo.	92

Figura 4.4 - Sistema de duas polias equilibrando três massas suspensas. A condição de equilíbrio do sistema é aplicada ao ponto A.	96
Figura 4.5 - Sistema para a medida da tensão de ruptura de um fio <td>97</td>	97
Figura 5.1 - Sistema massa-mola vertical. L_0 : Comprimento natural da mola sem carga. L : Comprimento da mola com o corpo suspenso. h : Altura do centro de massa do corpo.....	102
Figura 5.2 - Configurações para análise da energia mecânica do sistema massa-mola. (a) Massa em repouso em contato com o solo. (b) Massa acelerada, após ser solta a partir da configuração mostrada em (a).	104
Figura 5.3 - Dispositivo para a medida de velocidade média da massa na configuração mostrada na figura 5.2.b.	108
Figura 6.1 - Duas massas em colisão experimentam a ação de forças de contato F_1 e F_2 iguais e opostas, atuando respectivamente sobre as massas m_1 e m_2	113
Figura 6.2 - Representação esquemática da variação da força de contato, em função do tempo, durante uma colisão de duração $\Delta t = t_f - t_i$. Linha tracejada: força média equivalente.	115
Figura 6.3 - Trilho de ar para estudar colisões unidimensionais. Carrinho 1: incidente com massa m_1 , velocidade inicial v_1 . Carrinho 2: massa m_2 inicialmente em repouso. A posição da mola no carrinho 2, enfrentando o carrinho 1, indica que a colisão será aproximadamente elástica.	121

Listas de Tabelas

Tabela 1.1 -Fórmulas de propagação de incertezas para algumas funções elementares	28
Tabela 2.1 -Variação ΔL do comprimento de uma barra de alumínio com a temperatura	34
Tabela 2.2 -Variação da variável y , medida em unidades arbitrárias (u. a.), com a variável x , também em unidades arbitrárias	38
Tabela 2.3 -Variação da amplitude de oscilação de um sistema amortecido em função do tempo	44
Tabela 3.1 -Modelo de organização dos dados para os cálculos de mínimos quadrados de acordo com as equações (8) a (12).	52
Tabela 3.2 -Dados experimentais de duas grandezas com relação possivelmente linear	52

Práticas

Tabela 1.1 -Volumes das peças metálicas medidos direta e indiretamente e as respectivas densidades resultantes	64
Tabela 1.2 -Determinação do diâmetro d de um fio de cobre medido com um micrômetro	66
Tabela 2.1 -Valores de referência para módulos de elasticidade na tração E (módulo de Young), na compressão B e no cisalhamento S para diferentes materiais	69
Tabela 3.1 -Comprimento do pêndulo L , tempo de N oscilações t_N , período de oscilação T e valores de T^2 para linearização dos dados	83
Tabela 3.2 -Posição y em função do tempo t para movimento do carrinho sobre o trilho de ar inclinado.....	84
Tabela 4.1 -Valores de referência de coeficientes de atrito estático e dinâmico para diferentes pares de superfícies	93
Tabela 6.1 -Classificação dos tipos de colisão em função da variação da energia cinética total e comportamentos do coeficiente de restituição e da quantidade de movimento total	118

Sumário

Introdução: por que Física?	13
O Laboratório de Física I	15
Dicas para a confecção dos relatórios	17
Capítulo 1: Medidas de grandezas físicas	21
1.1 Medidas diretas e indiretas.....	21
1.2 Precisão dos instrumentos	22
1.3 Erros de medida	22
1.3.1 Erros grosseiros	23
1.3.2 Erros sistemáticos	23
1.3.3 Erros aleatórios ou estatísticos	23
1.4 Incerteza em medidas diretas	24
1.4.1 Dados sem dispersão.....	26
1.5 Incerteza em medidas indiretas: propagação de erros	27
1.6 Algarismos significativos e arredondamento.....	29
1.7 Comparação de grandezas físicas com incertezas	31
Capítulo 2: Tabela de dados e gráficos	33
2.1 Tabelas	33
2.2 Gráficos	34
2.3 Linearização e escalas logarítmicas	37
2.3.1 Linearização dos dados.....	38
2.3.2 Escalas logarítmicas.....	40
Capítulo 3: Relações lineares entre dados experimentais	47
3.1 Método gráfico	47
3.2 Método dos mínimos quadrados	49
Prática 1: Instrumentos, medidas e incertezas	57
1.1 Objetivos.....	57
1.2 Introdução.....	57
1.3 Paquímetro	57
1.4 Micrômetro.....	61
1.5 Parte experimental	63
1.5.1 Medidas direta e indireta do volume	63
1.5.2 Medida indireta da densidade	64
1.5.3 Medida direta com dispersão	65
Prática 2: Módulo de elasticidade	67
2.1 Objetivos.....	67
2.2 Introdução.....	67

2.2.1	Deflexão de uma barra.....	69
2.3	Parte experimental	72
2.3.1	Determinação do módulo de Young.....	72
2.3.2	Análise da relação comprimento-deformação.....	73
Prática 3: Movimento unidimensional	75	
3.1	Objetivos.....	75
3.2	Introdução.....	75
3.2.1	Pêndulo simples: movimento oscilatório harmônico	75
3.2.2	Plano inclinado: movimento retilíneo uniformemente acelerado	77
3.3	Parte experimental	79
3.3.1	Pêndulo simples	81
3.3.2	Plano inclinado	83
Prática 4: Estática.....	87	
4.1	Objetivos.....	87
4.2	Introdução.....	87
4.2.1	Equilíbrio estático	87
4.2.2	Diagramas de forças	88
4.2.3	Forças de atrito.....	90
4.3	Parte experimental	95
4.3.1	Sistema de polias	98
4.3.2	Tensão de ruptura de uma corda	98
4.3.3	Coeficiente de atrito estático	99
Prática 5: Conservação da energia mecânica	101	
5.1	Objetivos.....	101
5.2	Introdução.....	101
5.2.1	Energia mecânica durante o movimento.....	103
5.3	Parte experimental	107
5.3.1	Parâmetros da mola	108
5.3.2	Medida da energia mecânica	109
Prática 6: Colisões unidimensionais	111	
6.1	Objetivos.....	111
6.2	Introdução.....	111
6.2.1	Colisões entre duas partículas: impulso e força média	112
6.2.2	Velocidades e referenciais	116
6.2.3	Energia cinética para um sistema de partículas em colisão	117
6.3	Parte experimental	121
6.3.1	Choque elástico entre dois corpos de massas iguais	122
6.3.2	Choque plástico entre dois corpos de massas iguais	124

Introdução: por que Física?

Estudos, realizados pelos Conselhos de Engenharia, mostram que o Brasil perde US\$ 15 bilhões por ano com falhas de projetos, somente contabilizando o setor público, atribuídas à má formação básica dos profissionais. As oportunidades de crescimento futuro do país dependem criticamente da disponibilidade de engenheiros qualificados para inovar e resolver problemas de interesse estratégico. Da próxima geração de engenheiros não se espera que sejam apenas usuários treinados para aplicar soluções prontas, mas criadores de soluções nos novos cenários econômicos e tecnológicos. Cabe à USP, a maior universidade do país, a responsabilidade de formá-los com as mais altas qualificações, os quais, no futuro, assumirão a liderança nos setores produtivos de base tecnológica no Brasil.

As Ciências Exatas, abrangendo Física, Matemática e Química, constituem o fundamento dos processos, técnicas e linguagem da Engenharia. Assuntos, como, por exemplo, materiais inteligentes, modelos computacionais ou sensoriamento, fazem com que a fronteira entre Ciências e Engenharias seja cada vez mais difusa. O profissional que não possui uma base de conhecimento sólida nessas disciplinas, diminui drasticamente suas chances de compreender os problemas de sua área de atuação e de se comunicar com outros especialistas. Consequentemente, sua capacidade de resolver desafios tecnológicos e inovar fica limitada. Nesse aspecto, o IFSC busca fazer uma contribuição decisiva logo no início desse processo de formação.

O Laboratório de Física I

Os Laboratórios de Física têm uma missão diferente das disciplinas teóricas. Em primeiro lugar, oferecem a oportunidade de revisar e consolidar conceitos fundamentais de Física, fazendo a transposição a situações práticas concretas. Em segundo lugar, procuram desenvolver a capacidade de planejar e executar medições, processar os dados quantitativamente e apresentar os resultados de acordo com os padrões da comunidade técnica e científica. **No entanto, sua missão mais importante consiste em desenvolver a capacidade de análise crítica desses resultados, para discutir o seu significado, sua validade e extrair conclusões logicamente fundamentadas. Esse quesito requer a maior atenção do estudante, pois terá o maior peso na avaliação.**

A apostila tem a finalidade de apresentar os objetivos e métodos dos experimentos propostos, que deverão ser compreendidos antes de realizar a aula prática. A Seção I, de Conceitos Gerais, apresenta conceitos de medidas, incertezas e processamento de dados que serão aplicados nas práticas das disciplinas de Laboratório de Física Geral I e II. Fique atento: as apostilas de práticas deste semestre indicam quais capítulos serão necessários estudar antes de fazer a prática. As apostilas das práticas estão localizadas na Seção II. A introdução teórica é apenas um guia para revisar sumariamente os conceitos físicos, imprescindíveis para entender a prática. Para uma discussão mais aprofundada, na seção de Bibliografia são indicados livros de referência. As seções de descrição da montagem experimental e dos procedimentos auxiliam na compreensão do experimento antes e durante a aula prática. As questões propostas têm a finalidade de chamar a atenção sobre aspectos

fundamentais da prática, tanto da teoria como da análise dos resultados e, por isso, o estudante sempre deve tentar responde-las. As caixas de texto tituladas **A Física e a Engenharia** apresentam exemplos de diferentes aplicações práticas e sua conexão com os conceitos físicos discutidos nos experimentos realizados no laboratório, com aplicações em diferentes áreas da Engenharia.

Finalmente, o fator mais importante, para garantir o aproveitamento da aula prática, é a interação com o professor, os técnicos e os colegas. **Sempre discuta suas dúvidas com eles!**

Dicas para a confecção dos relatórios

Apresentaremos, a seguir, algumas sugestões de como o relatório, de um dado experimento, deverá ser elaborado. Lembre-se de que sua elaboração deverá ser pensada para que qualquer pessoa, com conhecimentos básicos de Física, possa entender seu conteúdo sem ter de recorrer a outras fontes de informação.

- a) O relatório deve ser escrito em folha de papel almaço ou de acordo com as instruções do docente;
- b) Indique, inicialmente, o(s) nome(s) do(s) aluno(s) que estão elaborando o relatório, a data de sua realização e o título do experimento de acordo com a apostila;
- c) **OBJETIVO(S):** Descreva, de maneira clara e sucinta, o(s) objetivo(s) que deverão ser alcançados durante a realização do referido experimento;
- d) **MATERIAIS E MÉTODOS:** Descreva quais materiais e aparelhos foram utilizados durante a realização do experimento e como os dados experimentais foram obtidos. Essas informações devem permitir a qualquer outra pessoa repetir suas medidas sem que **seja necessária sua participação ou a consulta à apostila.**
- e) **RESULTADOS E DISCUSSÃO:** Apresente seus resultados de forma ordenada por meio de tabelas, gráficos etc. Descreva os itens apresentados na apostila e, em seguida, os resultados. Quando necessário, coloque equações no relatório e os dados utilizados nelas. **DISCUTA** seus resultados em função de outros, obtidos no mesmo

experimento, ou de valores disponíveis em tabela ou de valores esperados.

- f) **CONCLUSÕES:** Aqui deve ser apresentada uma conclusão geral do relatório: se os resultados obtidos estão de uma maneira geral, próximos ao esperado ou, se não, quais foram as causas desse desacordo. Faça uma análise do conhecimento adquirido pelo grupo durante a realização do experimento.

A forma de organizar o relatório não é rígida. Pode-se dividi-lo em tantas partes quantas forem necessárias. Se o mesmo incluir várias experiências diferentes, é preferível apresentá-las separadamente para facilitar a leitura.

Seção I: Conceitos Gerais

Capítulo 1: Medidas de grandezas físicas

Em Ciências Exatas, o resultado da medida de uma grandeza física consiste do valor numérico associado à sua incerteza, expressos no sistema de unidades apropriado. Esses valores devem refletir com a maior fidelidade possível o processo de medida completo, incluindo os instrumentos, a montagem experimental e o método experimental. Neste capítulo, são apresentados os conceitos fundamentais do processo de medida aplicados em todo tipo de experimento ou ensaios de laboratório e os critérios utilizados para a obtenção dos resultados.

1.1 Medidas diretas e indiretas

Nas *medidas diretas*, o valor numérico atribuído à grandeza física é lido diretamente da escala do instrumento. Podemos citar, como exemplos, o comprimento medido com uma régua, o tempo medido com um cronômetro ou a corrente elétrica medida com um amperímetro.

Nas *medidas indiretas*, a grandeza resulta de um cálculo realizado com valores de grandezas medidas diretamente. Por exemplo, o volume de um objeto pode ser determinado indiretamente, a partir das medidas diretas de suas dimensões com régua ou paquímetro. A maioria das grandezas físicas é medida indiretamente. Em alguns casos, a grandeza pode ser medida de ambas as formas. Por exemplo, a velocidade de um objeto é medida indiretamente através da medida direta da distância percorrida e o tempo empregado. No entanto, é possível também construir e calibrar um velocímetro,

de forma que se obtenha diretamente o valor da velocidade em uma determinada escala.

1.2 Precisão dos instrumentos

Ao utilizar instrumentos de medida direta, temos que saber identificar a precisão D dos valores fornecidos. Em instrumentos com escalas de comparação ou ponteiros de agulha, a máxima precisão D pode ser identificada como a mínima divisão da escala que o observador é capaz de apreciar. Como exemplo, podemos utilizar uma trena, em que $D = 1 \text{ mm}$. Alguns operadores, entretanto, têm apreciação maior e são capazes de fazer leituras no meio de duas divisões resultando em $D = 0,5 \text{ mm}$. Quando for utilizado um instrumento com mostrador numérico, mecânico ou eletrônico, D é a última casa decimal mostrada. Contudo, note que a precisão D da escala não é garantida para toda medida; depende das condições de uso do instrumento. Assim, se usada uma trena para medir comprimentos e ela não estiver esticada e alinhada com o objeto, seria incorreto assumir que o valor medido tem uma precisão de 0,5 mm.

1.3 Erros de medida

Uma grandeza física, a ser determinada pelo processo de medida, possui um valor que poderíamos chamar de *valor verdadeiro*. Em alguns casos, esse valor já é conhecido antes de fazer o experimento como, por exemplo, quando se mede um padrão para aferir o funcionamento de um equipamento. Porém, na maioria dos casos práticos o *valor verdadeiro da grandeza é desconhecido*. O resultado do experimento fornece o *valor medido*. Quanto mais próximo o valor medido está do valor verdadeiro, maior é a *exatidão* da medida. Como todo experimento possui uma incerteza intrínseca, chamada comumente de

“erro”, nunca saberemos dizer se o valor que foi medido é exatamente o verdadeiro. Para saber avaliar de que ordem é o erro, devemos notar que existem três fontes fundamentais de erro.

1.3.1 Erros grosseiros

São cometidos por imperícia do operador, tais como erros de leitura ou de cálculos, desconhecimento do método experimental ou do uso dos instrumentos. Essa fonte de erros não será discutida, pois é um assunto evidentemente constrangedor. Fica como responsabilidade do operador do experimento conhecer o método de medida e saber como operar os instrumentos corretamente.

1.3.2 Erros sistemáticos

São cometidos de forma idêntica durante o experimento, tipicamente por uma limitação do método de medida ou uma falha do instrumento. Um exemplo típico é a medida de valores de comprimentos sem perceber que a régua utilizada não começa a partir do zero. Esses erros atuam sempre no mesmo sentido sobre o valor numérico, causando resultados por excesso ou defeito, com relação ao valor verdadeiro. *A repetição do experimento nas mesmas condições não elimina esses erros.* Portanto, o operador deve revisar cuidadosamente o método de medida e conferir a calibração dos instrumentos, para determinar se há possibilidade de estar cometendo erros sistemáticos.

1.3.3 Erros aleatórios ou estatísticos

Esses são os erros mais importantes de analisar. São causados pelas mudanças aleatórias, não controladas, nas condições do processo de medida,

incluindo o operador, os instrumentos, o ambiente do experimento e o próprio sistema físico. Por exemplo, a dificuldade visual do usuário para apreciar a escala ou a coincidência de um ponteiro do instrumento, causa flutuações na leitura, tanto para cima, como para baixo do valor verdadeiro. Esses erros são inevitáveis, mas pela sua natureza aleatória é possível definir estratégias experimentais para minimizá-los e para estimar o quanto influenciam na confiabilidade do resultado numérico.

1.4 Incerteza em medidas diretas

A existência de erros aleatórios pode fazer com que o resultado numérico x_i , obtido da medida de uma grandeza física X , não seja reproduzível em ocasião da repetição do experimento. Dessa maneira, uma série de N medidas pode mostrar uma dispersão de valores. Quando a dispersão é aleatória, aparecem valores acima e abaixo do valor verdadeiro com a mesma probabilidade. Assim, ao calcular a média aritmética dos x_i , dada pela equação (1), os erros aleatórios tendem a se cancelar mutuamente.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1)$$

Para um número N , suficientemente grande de medidas, podemos esperar que \bar{x} se aproxime do valor verdadeiro e o resultado do experimento seja cada vez mais exato.

Qual será, então, a incerteza provável associada à dispersão dos resultados do experimento? Existem duas formas mais comuns de avaliar o grau de dispersão: o desvio médio e o desvio padrão. O desvio médio Δ é simplesmente a média aritmética dos desvios de cada dado experimental com relação ao valor médio, em módulo, conforme mostrado a seguir:

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (2)$$

O desvio padrão σ tem um significado semelhante, utilizando a função quadrado, que também é sempre positiva, em lugar do módulo dos desvios.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (3)$$

A raiz quadrada garante que σ tenha as mesmas unidades da grandeza X . Tanto Δ como σ indicam a ordem de grandeza da dispersão dos dados ao redor do valor de \bar{x} . Assim, o resultado do processo de medida pode ser informado fornecendo o intervalo $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$. Um tratamento estatístico rigoroso mostra que se o experimento for repetido, existe uma probabilidade de 68% de que o valor medido se encontre dentro desse intervalo¹.

Assim, o resultado do experimento com sua incerteza, deve ser representado da seguinte forma:

$$\bar{x} \pm \sigma \quad (4)$$

ou, de forma menos rigorosa:

$$\bar{x} \pm \Delta \quad (5)$$

É importante, portanto, entender que o resultado do experimento não é, simplesmente, um número \bar{x} , o valor mais provável, mas um *intervalo de confiança* que dá uma ideia da magnitude dos erros aleatórios afetando o experimento. Os experimentos de maior precisão são aqueles cujo desvio padrão é menor. Observe que um experimento preciso (σ pequeno, erros

¹ Se o intervalo considerado for $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$, a probabilidade é de 95,5% e se for $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$, é de 99,7%. Portanto, se um valor x_i estiver fora da faixa de $\pm 3\sigma$, é extremamente provável que, durante essa medida, tenha acontecido um erro grosseiro ou sistemático. Nesse caso, é lícito excluir o dado do conjunto.

aleatórios pequenos) não, necessariamente, é um experimento exato (\bar{x} próximo do valor verdadeiro); a presença de erros sistemáticos pode afastar todos os valores x_i do valor verdadeiro.

Note que nas equações (2) e (3), os desvios dependem inversamente do número de medidas N e, portanto, tendem a se reduzir quando N aumenta. Esse comportamento parece indicar que podemos aumentar a precisão do experimento sem limites, simplesmente repetindo as medidas, o que é falso. Temos de lembrar que a precisão da medida está limitada pela precisão dos próprios instrumentos. Então, quando o valor calculado para σ , ou para Δ , é menor que a precisão D do instrumento, a incerteza será dada pelo próprio valor D :

$$\bar{x} \pm D \quad (6)$$

1.4.1 Dados sem dispersão

Em algumas medidas diretas, pode ocorrer que todos os valores x_i medidos sejam idênticos, ou difiram, no máximo, no valor da mínima divisão da escala do instrumento D . Nesse caso, a dispersão é nula e não há necessidade de calcular uma média; o resultado do experimento é único (x_i). O exemplo típico é a medida de comprimentos de objetos rígidos, de faces bem definidas, com uma trena ($D = 1\text{ mm}$) ou um paquímetro ($D = 0,05\text{ mm}$); a repetição da medida fornece valores equivalentes. Isso significa que os erros aleatórios são pequenos, menores que a precisão D do instrumento. Nesse caso, a incerteza do experimento pode ser atribuída à D e o resultado da medida é:

$$x_i \pm D \quad (7)$$

Forma correta de expressar o resultado de uma medida

- Não existem resultados experimentais sem incerteza: não deixe valores medidos sem sua incerteza.
- Se há dispersão nos valores das medidas repetidas x_i , calcule o valor médio \bar{x} e o desvio padrão σ , ou desvio médio Δ . O resultado da medida é:

$$\bar{x} \pm \sigma \quad \text{ou} \quad \bar{x} \pm \Delta$$

- Caso, entretanto, o desvio seja nulo (ausência de dispersão nas medidas) ou seja menor que a precisão D do instrumento, essa é a incerteza:

$$\bar{x} \pm D$$

- A primeira casa significativa da incerteza define onde serão truncados e arredondados os resultados.
- Evite arredondar e truncar durante os cálculos auxiliares; façam-no apenas no resultado final.

1.5 Incerteza em medidas indiretas: propagação de erros

Quando uma grandeza z , determinada indiretamente, é uma função de várias grandezas medidas, com suas respectivas incertezas, de maneira direta ($x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$, ...), sua incerteza Δz será determinada a partir das incertezas das grandezas medidas. Por exemplo, o volume V de um cubo de aresta a , cuja medida direta forneceu $a = (10 \pm 1)cm$, terá como valor mais provável $v = (10\ cm)^3 = 1000\ cm^3$. Entretanto, como a tem dispersão, teremos variações prováveis no valor de V entre $V_- = (9\ cm)^3 = 729\ cm^3$ e $V_+ = (11\ cm)^3 = 1331\ cm^3$. Arredondando para uma faixa simétrica, resulta em $V = (1000 \pm 300)cm^3$, ou seja, a incerteza de a “se propagou” para V .

Existe uma forma sistemática de calcular a propagação das incertezas para qualquer operação matemática elementar ou função. Supondo que a grandeza física, medida indiretamente, está determinada por uma função $z = f(x, y, \dots)$, das várias grandezas medidas diretamente com suas respectivas incertezas ($x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$, ...), a incerteza Δz propagada pode ser calculada utilizando ferramentas do cálculo diferencial, conforme mostrado a seguir:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (8)$$

Aplicando a equação (8) para funções simples, obtêm-se os resultados de $z \pm \Delta z$ para várias funções elementares que aparecerão neste curso, mostrados na tabela 1.1. Funções mais complexas podem ser decompostas com ajuda dessas fórmulas básicas e da equação (8).

Tabela 1.1 - Fórmulas de propagação de incertezas para algumas funções elementares.

	$z = f(x, y)$	Δz
Soma	$z = x + y$	$\Delta x + \Delta y$
Subtração	$z = x - y$	$\Delta x + \Delta y$
Produto	$z = xy$	$x\Delta y + y\Delta x$
Produto por uma constante	$z = ax$	$a\Delta x$
Potência	$z = x^n$	$nx^{n-1}\Delta x$
Divisão	$z = \frac{x}{y}$	$\frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$
Cosseno	$z = \cos(x)$	$\sin(x)\Delta x$
Seno	$z = \sin(x)$	$\cos(x)\Delta x$
Logaritmo de base c	$z = \log_c(x)$	$\frac{\log_c(e)}{x}\Delta x$
Exponencial	$z = c^x$	$c^x \ln(c)\Delta x$

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Voltando para o exemplo do volume do cubo, se considerarmos a fórmula de propagação para a potência cúbica, com $x = 10\text{ cm}$ e $\Delta x = 1\text{ cm}$, conferimos que $\Delta V = 3(10\text{ cm})^2(1\text{ cm}) = 300\text{ cm}^3$ é exatamente a estimativa realizada para a incerteza de V .

Nos cálculos de propagação de erros, constantes físicas bem conhecidas, como g , por exemplo, ou números irracionais, como π ou e , são considerados sem erro. Nesse caso, o número de algarismos significativos utilizados deve ser suficiente para que o efeito do truncamento seja desprezível diante das incertezas experimentais.

Questão: Considere um cilindro de raio $a = (2,00 \pm 0,05)\text{ cm}$ e comprimento $L = (10,10 \pm 0,05)\text{ cm}$. Calcule o volume do cilindro e sua incerteza.

1.6 Algarismos significativos e arredondamento

Quando, por meio de um cálculo, obtemos valores de \bar{x} , σ ou Δ , são originados números com vários dígitos. Tendo em conta que são resultados experimentais, medidos com instrumentos de precisão D e afetados por erros aleatórios, é lógico pensar que muitas das casas decimais obtidas são irrelevantes. Qual é, portanto, o critério para decidir quais são os dígitos significativos?

O parâmetro chave é a própria incerteza, seja σ , Δ ou D . Vimos que a incerteza é o *tamanho de um intervalo probabilístico*. Portanto, a extensão desse intervalo fica essencialmente definida quando especificamos a *primeira casa significativa*. Consequentemente, como o resultado \bar{x} do experimento já

está afetado pelo erro nessa casa, seu valor pode ser truncado e arredondado nessa mesma ordem de grandeza.

Consideremos o resultado de uma medida de comprimento como $\bar{x} = 5,34481349\text{ m}$ com desvio padrão $\sigma = 0,03253496\text{ m}$, tal como fornecido pela calculadora. A faixa de dispersão indicada por esse valor de σ pode ser aproximada truncando o resultado considerando o primeiro algarismo significativo: $\sigma = 0,03\text{ m}$. A inclusão da próxima casa representaria um aumento de 2 mm no tamanho do intervalo (que é de 30 mm , ou seja, uma ordem de grandeza maior). Esses 2 mm adicionais não melhoraram nossa compreensão de quanto estavam dispersos os dados (dezenas de centímetros). Considerando agora o valor de \bar{x} , vemos que a segunda casa decimal, das dezenas de cm , já está afetada pelo erro. As casas restantes são, portanto, irrelevantes; são, no máximo, da ordem de alguns cm sendo, que a dispersão dos valores medidos é da ordem de 30 mm . Portanto, é razoável especificar o resultado como

$$\bar{x} = (5,34 \pm 0,03)\text{ m}$$

É importante notar que quando a casa a ser truncada for maior ou igual a 5, na incerteza ou no valor médio, é conveniente adotar o critério de *arredondamento para cima*².

Consideremos, agora, o resultado de uma medida de comprimento como $\bar{x} = 5,34481349\text{ m}$ com desvio padrão dado por $\sigma = 0,00363496\text{ m}$, tal como fornecido pela calculadora. Assim como feito anteriormente, truncamos o desvio na primeira casa diferente de zero. No entanto, como a casa decimal seguinte é maior que 5, é conveniente adotar o critério de arredondamento para

² Muito embora essa regra de arredondamento seja adotada, por simplicidade, nesse curso, no Brasil existe uma norma da ABNT (NBR5891) que estabelece todas as regras de arredondamento na numeração decimal.

cima, resultando em $\sigma = 0,004\text{ m}$. Nesse caso, a medida pode ser representada apropriadamente da seguinte forma:

$$\bar{x} = (5,345 \pm 0,004) \text{ m}$$

Note que o mesmo critério foi utilizado no truncamento do valor médio.

1.7 Comparação de grandezas físicas com incertezas

Suponhamos que se deseje comparar dois resultados com incerteza, $x_1 \pm \sigma_1$ e $x_2 \pm \sigma_2$, relativos a diferentes medidas da mesma grandeza física. Em quais condições podemos afirmar que ambos são equivalentes ou diferentes entre si? A simples comparação dos valores mais prováveis x_1 e x_2 não é suficiente para decidir, pois cada um desses resultados experimentais tem uma faixa de incerteza. A forma correta de proceder é comparar a diferença entre os valores mais prováveis com relação aos erros. Assim, consideramos que os resultados x_1 e x_2 são *equivalentes* entre si quando

$$|x_1 - x_2| < 2(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (9)$$

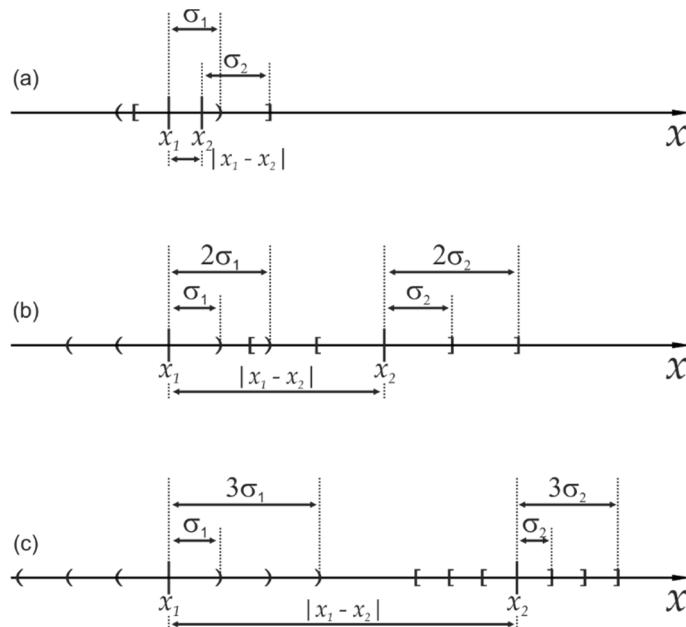
Essa relação indica que a separação entre os valores é, no máximo, duas vezes a combinação das incertezas. Por outro lado, os resultados serão considerados como *não-equivalentes* quando

$$|x_1 - x_2| > 3(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (10)$$

A figura 1.1 ilustra as condições de equivalência e não-equivalência, representando, graficamente sobre um eixo, os valores das grandezas com seu intervalo de incerteza. Quando o valor da diferença $|x_1 - x_2|$ fica entre as condições expressas em (9) e (10), o resultado desses experimentos não é suficientemente conclusivo para afirmar se há equivalência ou não entre as

medidas. Nessa situação, o procedimento correto é repetir cuidadosamente os experimentos tentando excluir a presença de erros sistemáticos ou grosseiros.

Figura 1.1 - Exemplos de comparação de duas grandezas medidas com incerteza $x_1 \pm \sigma_1$ e $x_2 \pm \sigma_2$. (a) e (b): Resultados equivalentes dentro da incerteza, compatíveis com a condição (9). (c) Resultados não-equivalentes de acordo com a condição (10).



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Bibliografia

Helene, O.; Vanin, V.. **Tratamento estatístico de dados em física experimental.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1981.

Vuolo, J. E.. **Fundamentos da teoria de erros.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1993.

Capítulo 2: Tabela de dados e gráficos

Em Ciências Exatas os resultados de testes, análises ou experimentos fornecem conjuntos de resultados numéricos que precisam ser organizados para facilitar sua interpretação, processamento e divulgação. Existem critérios gerais para organizar essa informação. Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais de apresentação e processamento de dados experimentais na forma de tabelas e gráficos.

2.1 Tabelas

Muitos experimentos fornecem resultados numéricos vinculando duas grandezas físicas ou dois parâmetros de relevância para a operação de um dispositivo. O conjunto de pares de dados numéricos (x, y), representando essas grandezas medidas, pode ser apresentado diretamente numa tabela de duas colunas. Cada grandeza tabelada deve ser identificada no cabeçalho de sua respectiva coluna junto com suas unidades. Se a incerteza dos valores for a mesma para todos os elementos, seu valor pode aparecer também no cabeçalho. Caso contrário, cada entrada da tabela deve ter sua incerteza indicada.

A tabela 2.1 é um exemplo de como organizar essa informação. Ela deve ter um número de identificação, que deve ser utilizado no texto para referenciá-la. Também deve ter uma legenda acima, explicando brevemente o conteúdo. Quando for necessário, usa-se notação exponencial científica para simplificar os números. Por exemplo, na segunda coluna da tabela 2.1, o fator exponencial

10^{-4} , comum a todas as entradas, é colocado no cabeçalho junto às unidades para simplificar a leitura.

Tabela 2.1 - Variação ΔL do comprimento de uma barra de alumínio com a temperatura.

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	$\Delta L (10^{-4} \text{ m})$
$\pm 0,2 ^{\circ}\text{C}$	
26,3	0,1
35,7	0,5
46,2	1,0
56,1	1,6
65,8	1,9
73,2	2,4

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Dicas para criar boas tabelas

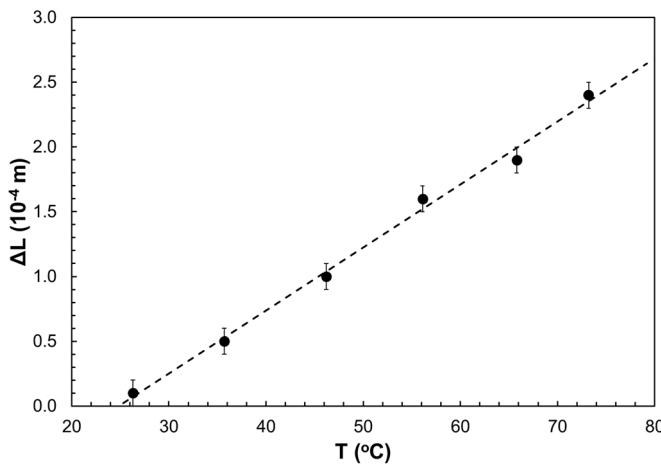
- Identifique a tabela com um número (ex.: Tabela 1), que será usado para citá-la no texto, e coloque no topo uma breve legenda explicativa do conteúdo.
- Indique, no topo de cada coluna, a grandeza física e suas unidades.
- Use notação científica para reduzir a quantidade de dígitos. Se a potência de 10 é a mesma para todos os valores, coloque-a no topo da tabela junto às unidades.
- Indique a incerteza dos dados. Se for a mesma para todos, indique no topo da coluna.

2.2 Gráficos

A representação dos dados através de gráficos tem a vantagem de permitir visualizar a relação entre as grandezas analisadas. Como exemplo, a figura 2.1 mostra o gráfico dos dados listados na tabela 2.1. A simples inspeção

do gráfico permite identificar rapidamente que a relação entre as grandezas representadas é linear.

Figura 2.1 - Variação do comprimento ΔL de uma barra de alumínio em função da temperatura.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Existem regras gerais para a elaboração dos gráficos, que são aceitas pela comunidade técnica e científica:

- O gráfico sempre deve estar numerado e ter uma legenda explicativa, de maneira que o leitor compreenda essencialmente o que se representa sem ter de ler o texto do relatório.
- Os eixos do gráfico devem conter legendas que indiquem claramente a grandeza, as unidades e, se houver, o fator exponencial dos dados representados.
- As escalas de cada eixo devem ser escolhidas para visualizar claramente o comportamento extremo dos dados. Dependendo da

situação, não é obrigatório que a escala abranja a origem (0; 0) das coordenadas dos eixos (veja figura 2.1).

- d) A numeração das escalas deve ser equilibrada, correspondendo a números redondos. *Nunca* se colocam os valores dos dados experimentais sobre os eixos; para isso existe a tabela.
- e) O tamanho dos símbolos deve ser suficientemente claro para identificar o dado experimental. Quando a incerteza σ (ou Δ) do dado é maior que o tamanho do símbolo sobre o gráfico, é conveniente traçar as barras de incerteza de comprimento $\pm\sigma$ (ou $\pm\Delta$). Na figura 2.1, são mostradas as barras de incerteza na variação dos comprimentos. A incerteza na temperatura é menor que o tamanho do círculo e, portanto, não se encontra representada no gráfico.
- f) A grandeza representada no eixo horizontal usualmente é escolhida como aquela que é melhor controlada durante o experimento; o aparelho experimental permite variá-la independentemente e tem menor incerteza relativa que a outra grandeza.
- g) Se o gráfico evidencia uma relação linear entre as grandezas físicas representadas, é possível traçar a reta que mais perfeitamente represente essa relação. Ela deve ser a melhor aproximação aos dados experimentais em média e pode ser traçada graficamente de acordo com o critério do observador. Alternativamente, existem métodos quantitativos para determinar univocamente os coeficientes angular e linear. O método de mínimos quadrados é o mais difundido e será discutido no capítulo 3.

Dicas para criar bons gráficos

- A variável independente deve ser representada, sempre que possível, no eixo horizontal.
- Linearize os dados quando for possível, operando sobre as colunas ou usando escalas logarítmicas.
- Escolha as escalas de forma a aproveitar a maior área possível do gráfico com os dados. Porém, você deve encontrar um compromisso para que isso não resulte em escalas esdrúxulas (por exemplo com divisões fracionárias).
- Identifique as grandezas sobre os eixos e suas unidades.
- Numere as escalas com poucos números redondos. Use notação científica para reduzir os dígitos.
- Desenhe claramente os dados experimentais e, caso haja mais de um conjunto, use símbolos (círculos, quadrados, cruzes etc.) ou cores diferentes.
- Quando a incerteza dos dados for maior que o tamanho do símbolo, coloque bandas de erro.
- Identifique o gráfico com um número (ex.: Figura 1), que será usado para citá-lo no texto. Coloque uma breve legenda no gráfico.

2.3 Linearização e escalas logarítmicas

O exemplo mostrado na figura 2.1 corresponde a um gráfico com ambos os eixos em escalas lineares. Em cada eixo, as divisões mantêm sempre a mesma relação de escala. Existem outras escalas possíveis, cuja relação não se mantém fixa, que podem ser convenientes para evidenciar certos comportamentos dos dados representados. Como a reta é o único traço que pode ser facilmente visualizado sem ambiguidades sobre um gráfico, as transformações de escala mais úteis são aquelas que tendem a linearizar o gráfico dos dados experimentais. A seguir, são discutidos dois exemplos de linearização.

2.3.1 Linearização dos dados

Quando existe uma presunção sobre a relação matemática entre as duas grandezas y e x , representadas em um gráfico, é possível transformar os próprios dados para revelar se essa relação proposta é correta. Consideremos o caso dos dados de y e x listados na tabela 2.2. Esses dados estão representados na figura 2.2.a em um gráfico com escala linear. A relação entre y e x é claramente não linear, mas é impossível determinar se é quadrática, cúbica etc., julgando apenas pela forma do gráfico.

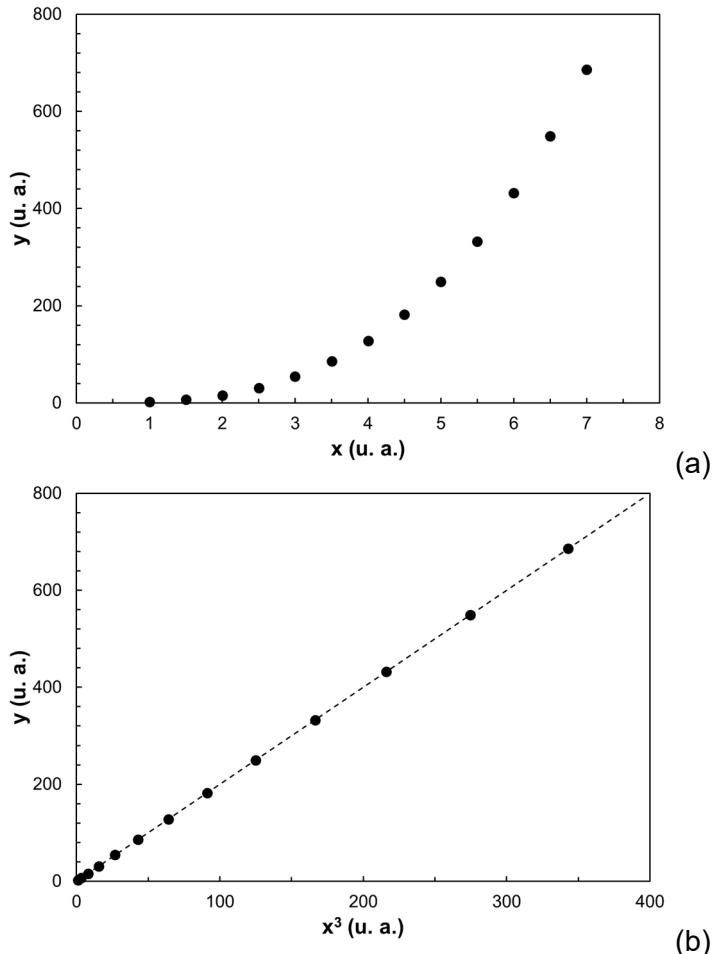
Tabela 2.2 - Variação da variável y , medida em unidades arbitrárias (u. a.), com a variável x , também em unidades arbitrárias.

x (u. a.)	y (u. a.)	$X = x^3$ (u. a.)
1,0	2,00	1,00
1,5	6,75	3,38
2,0	16,00	8,00
2,5	31,25	15,63
3,0	54,00	27,00
3,5	85,75	42,88
4,0	128,00	64,00
4,5	182,25	91,13
5,0	250,00	125,00
5,5	332,75	166,38
6,0	432,00	216,00
6,5	549,25	274,63
7,0	686,00	343,00

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Supondo que se deseje testar se a relação é de tipo cúbica, ou seja, $y = ax^3$, pode-se criar uma nova coluna na tabela 2.2, conforme feito, com os valores de uma variável auxiliar $X = x^3$ e representar graficamente a relação entre y e X .

Figura 2.2 - (a) Relação não linear desconhecida entre duas variáveis y e x . (b) Gráfico de y em função de x^3 , demonstrando a existência de uma relação cúbica entre as variáveis.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

A figura 2.2.b mostra esse gráfico, no qual é possível verificar claramente que a relação entre essas quantidades é linear, com uma reta passando pela origem, ou seja, $y = aX$. Desta forma, fica demonstrado que $y = ax^3$ e o valor

do coeficiente angular α pode ser calculado diretamente da inclinação da reta na figura 2.2.b.

2.3.2 Escalas logarítmicas

Um método alternativo de linearização consiste em manter os dados y e x originais da tabela e transformar as escalas do gráfico de maneira *logarítmica*. Esse gráfico, com eixos “distorcidos” logarítmicamente, pode ser feito de duas formas: usando papéis especiais, cujas escalas já estão transformadas em logaritmo, ou no computador, usando programas que aplicam essa transformação.

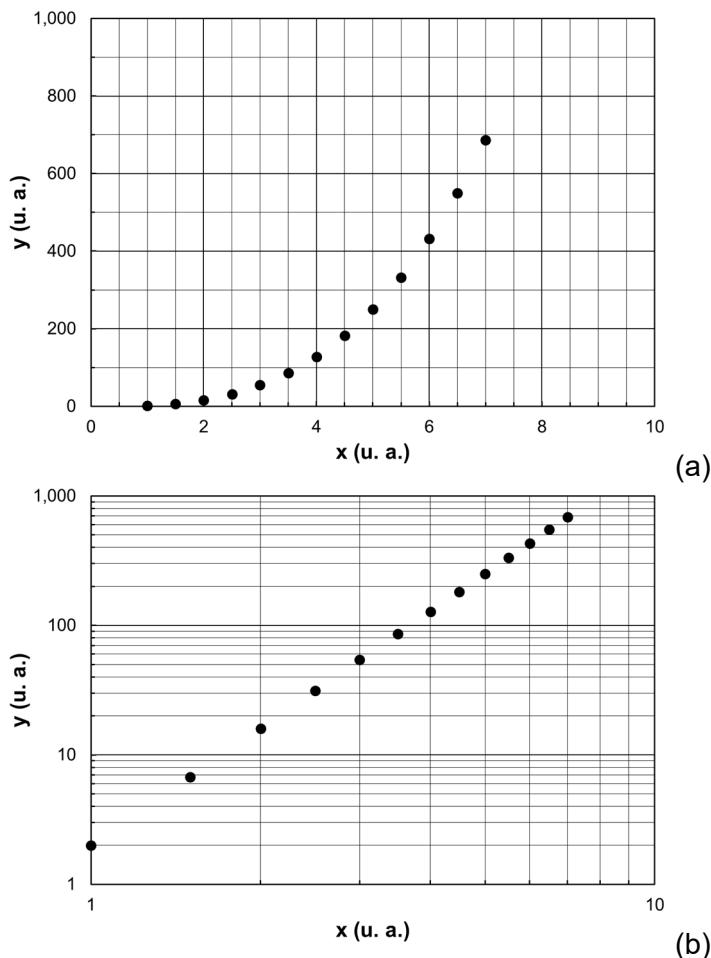
A figura 2.3 mostra novamente um gráfico do conjunto de dados da tabela 2.2 na escala linear convencional (figura 2.3.a) e em escala logarítmica ou “*log-log*” (figura 2.3.b), ou seja, os dois eixos em escala logarítmica. Os números e divisões mostrados sobre os eixos logarítmicos correspondem às mesmas unidades que na figura 2.3.a. Essa convenção facilita a identificação dos dados na hora de construir ou ler o gráfico. No entanto, quando forem extraídos valores numéricos do gráfico, deve-se lembrar que as coordenadas representam os valores logarítmicos das grandezas. Por exemplo, o valor identificado como “10” nos eixos logarítmicos da figura 2.3.b corresponde ao valor numérico $\log(10)$.

Observe que no eixo vertical da figura 2.3.b, a distância medida no papel entre os valores $\log(1)$ e $\log(10)$ é a mesma que entre $\log(10)$ e $\log(100)$, ou entre $\log(100)$ e $\log(1000)$. Esse comportamento resulta diretamente das propriedades dos logaritmos. A distância, por exemplo, entre $\log(100)$ e $\log(1000)$ é:

$$\log(1000) - \log(100) = \log\left(\frac{1000}{100}\right) = \log(10) = 1 \quad (1)$$

que é o mesmo valor que resulta para as outras diferenças. Essa distância é chamada de ciclo ou década e corresponde a um incremento em um fator 10 na grandeza representada. O gráfico da figura 2.3.b expande 3 ciclos no eixo vertical e um ciclo no horizontal.

Figura 2.3 - Relação não linear desconhecida entre duas variáveis y e x . (a) Gráfico em escalas lineares e (b) em escalas logarítmicas (“di-log” ou “log-log”).



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Observe, ainda, que, diferentemente do que ocorre na escala linear, a escala logarítmica é progressivamente comprimida para valores mais altos dentro de uma mesma década.

2.3.2.1 Linearização da função potência

Uma aplicação muito importante das escalas logarítmicas é na linearização de dados. Suponhamos o caso de uma relação de potência entre duas grandezas:

$$y = ax^n \quad (2)$$

sendo a e n constantes. Aplicando logaritmo a ambos os lados da igualdade, temos:

$$\log(y) = \log(a) + n \log(x) \quad (3)$$

Portanto, um gráfico das grandezas (x, y), em escalas logarítmicas, resultará em uma reta de inclinação n . O valor de n é obtido tomando as coordenadas, de dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ quaisquer, pertencentes à reta traçada. A partir dessas coordenadas, calcula-se a inclinação da forma usual, lembrando que as coordenadas extraídas correspondem aos logaritmos dos valores lidos:

$$n = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} \quad (4)$$

Dessa forma, é possível calcular o expoente n sem a necessidade de operar sobre os dados. Essa é a principal vantagem com relação à linearização descrita na seção 2.3.1. Além disso, se n não é conhecido, essa é a única forma de determiná-lo sem ter que “chutar” valores prováveis.

Questão: A relação linear, observada na representação dos dados da tabela 2.2 em escala log-log (figura 2.3.b), demonstra a existência de uma relação de potência do tipo representado pela equação (2). A partir da reta traçada na figura, e usando a equação (4), calcule o valor do expoente n . Mostre que $n = 3$, em concordância com o resultado obtido com a linearização da seção 2.3.1.

2.3.2.2 Linearização da função exponencial

Outro exemplo de linearização importante é o caso de uma relação exponencial:

$$y = ab^{cx} \quad (5)$$

sendo a , b e c constantes. Aplicando logaritmo em ambos os lados dessa equação, encontramos:

$$\log(y) = \log(a) + c \log(b) x \quad (6)$$

A equação (6) mostra que existe uma relação linear entre $\log(y)$ e x . Portanto, um gráfico mono-log, com o eixo vertical em escala logarítmica e o eixo horizontal em escala linear, mostrará uma reta. A inclinação da reta é o coeficiente $B = c \log(b)$, que pode ser calculado como:

$$B = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{x_2 - x_1} \quad (7)$$

Para o caso especial de uma função exponencial com $b = 10$, a inclinação B resulta simplesmente no parâmetro c do expoente.

A tabela 2.3 mostra os valores de amplitude de oscilação de um sistema amortecido em função do tempo. Sabe-se que a resposta do sistema é dada pela função exponencial decrescente no tempo:

$$y(t) = ae^{-ct} \quad (8)$$

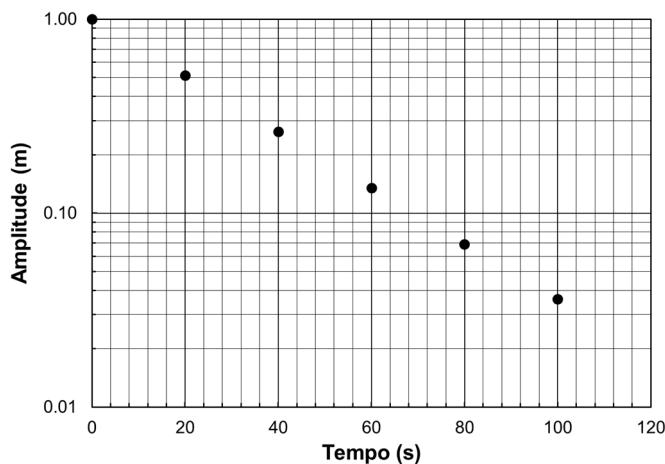
Tabela 2.3 - Variação da amplitude de oscilação de um sistema amortecido em função do tempo.

Tempo (s)	Amplitude (m)
0	1,000
20	0,513
40	0,264
60	0,135
80	0,069
100	0,036

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Nesse problema, os valores de amplitude (y) variam numa faixa maior que um fator 10 e menor que 100 (de 0,036 a 1,000). Então, a escolha mais conveniente para o eixo logarítmico é de duas décadas. A figura 2.4 mostra o gráfico resultante. Observe que a escala logarítmica não permite liberdade na escolha das divisões; cada década deve expandir exatamente um fator de 10 na grandeza física. Por isso, o eixo começa em 0,01 e as próximas décadas são 0,1 e 1. O comportamento linear, observado para os dados experimentais, confirma que a dependência de y com t é exponencial e decrescente. Traçando uma reta sobre os dados experimentais, pode-se calcular os valores dos parâmetros.

Figura 2.4 - Amplitude de oscilação em função do tempo em escala mono-log de duas décadas.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Exercício: Determine os valores das constantes a e c a partir do gráfico mostrado na figura 2.4.

Resposta: $a = 1\text{m}$ e $c = 0,033 \text{ s}^{-1}$.

Capítulo 3: Relações lineares entre dados experimentais

Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear ou pode ser linearizada. Isso significa que a mesma pode ser representada da seguinte forma:

$$y = ax + b \quad (1)$$

Nessa situação, deve-se determinar a melhor reta que representa os dados experimentais e calcular o valor dos parâmetros a , a inclinação ou coeficiente angular, e b , ordenada na origem ou coeficiente linear. Existem duas formas de realizar essa determinação: o método gráfico e o método analítico. No segundo caso, uma opção é utilizar o método dos mínimos quadrados. Neste capítulo são apresentados ambos os procedimentos.

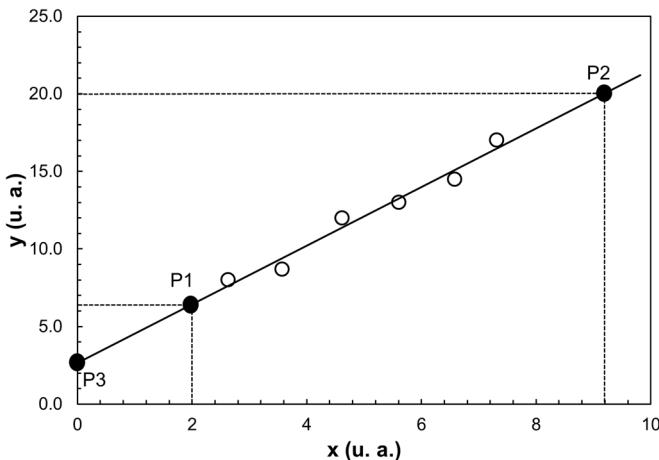
3.1 Método gráfico

Esse método já foi aplicado nos exemplos do capítulo 2. Consiste simplesmente em representar os dados experimentais (x, y) em um gráfico e traçar, manualmente, a reta que passe mais perto da maioria deles. Isto é válido para qualquer combinação de escalas nos eixos: lineares ou logarítmicas.

A figura 3.1 mostra o exemplo de um conjunto de dados experimentais (círculos abertos) que aparentam seguir uma relação linear. Como os dados medidos estão sujeitos a erros experimentais aleatórios, existe uma dispersão. A melhor reta traçada deve tentar se aproximar equilibradamente a todos eles.

O defeito desse método é que a reta resultante depende do critério do observador.

Figura 3.1 - Duas grandezas físicas x e y , medidas experimentalmente (círculos abertos), com relação possivelmente linear. Linha contínua: melhor reta traçada graficamente representando a relação entre as grandezas. P1, P2 e P3: pontos escolhidos sobre a reta para o cálculo dos parâmetros.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Havendo determinado a melhor reta, os coeficientes que melhor expressam a relação entre as grandezas y e x podem ser calculados analiticamente a partir das coordenadas de dois pontos arbitrários da reta, P1 e P2, com coordenadas $(X_1; Y_1)$ e $(X_2; Y_2)$, respectivamente, como mostrado na figura 3.1. Para minimizar erro de cálculo dos coeficientes, preferencialmente, deve-se escolher pontos bem separados entre si, cuja leitura das coordenadas seja simples. Os coeficientes, então, podem ser determinados da seguinte forma:

$$\text{coeficiente angular: } a = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad (2)$$

$$\text{coeficiente linear: } b = \frac{Y_1 X_2 - Y_2 X_1}{X_2 - X_1} \quad (3)$$

Alternativamente, quando a escala do gráfico permite visualizar a interseção da reta com o eixo vertical em $x = 0$ (ponto P3 na figura 3.1), o coeficiente b é simplesmente

$$b = Y_3 \quad (4)$$

Quando um ou os dois eixos forem logarítmicos, deve-se ter o cuidado de usar o logaritmo da grandeza física correspondente, como discutido no capítulo 2. Assim, por exemplo, para o cálculo da inclinação

$$\text{escala di-log: } a = \frac{\log(Y_2) - \log(Y_1)}{\log(X_2) - \log(X_1)} \quad (5)$$

$$\text{escala mono-log (eixo vertical): } a = \frac{\log(Y_2) - \log(Y_1)}{X_2 - X_1} \quad (6)$$

3.2 Método dos mínimos quadrados

Esse é um método analítico geral para encontrar a melhor reta que represente o conjunto de N pares de dados experimentais (x_i, y_i) com $i = 1, 2, \dots, N$, independente de critérios do observador. A ideia fundamental é definir a melhor reta como aquela que minimiza as distâncias verticais em relação aos dados experimentais. O método dos mínimos quadrados, ou regressão linear, considera a soma dos quadrados das distâncias:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_{ci} - y_i)^2 \quad (7)$$

em que y_{ci} é o valor calculado para o i -ésimo dado com a equação da melhor reta $y_{ci} = ax_i + b$. O processo de minimização de S , como função dos parâmetros da reta, fornece as seguintes expressões:

$$\text{coeficiente angular: } a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad (8)$$

$$\text{coeficiente linear: } b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (9)$$

em que todos os somatórios correm com $i = 1, 2, \dots, N$, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ e $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$.

O método fornece também as *incertezas* destes parâmetros, Δa e Δb , que estão diretamente relacionadas com a dispersão média Δy dos dados experimentais em relação à reta.

$$\text{dispersão média do ajuste: } \Delta y = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{N-2}} \quad (10)$$

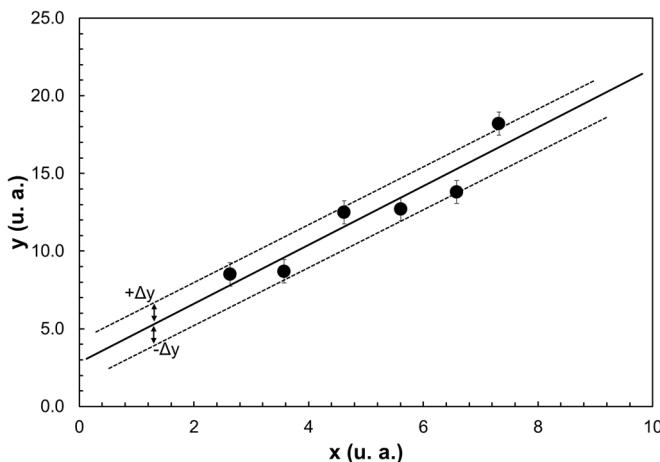
$$\text{incerteza do coeficiente angular: } \Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (11)$$

$$\text{incerteza do coeficiente linear: } \Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum (x_i - \bar{x})^2}} \Delta y \quad (12)$$

A figura 3.2 mostra um exemplo de ajuste de uma reta a um conjunto de dados experimentais. No gráfico são também mostradas as *bandas de incerteza do ajuste*, traçadas como retas paralelas separadas em distâncias $\pm \Delta y$ na vertical. Essas bandas constituem uma ferramenta aproximada para qualificar a dispersão do ajuste. Supondo que a dispersão é de natureza puramente aleatória, existe uma probabilidade de 32% de um dado experimental ficar fora da banda, ou seja, aproximadamente um de cada três dados. Podemos observar que isso realmente ocorre com os dados da figura 3.2. Caso contrário, podem ter ocorrido erros sistemáticos ou grosseiros durante o experimento ou a suposição de uma relação linear não é correta. Numa banda de $\pm 3\Delta y$, a probabilidade de um dado ficar de fora é de um em quatrocentos. Consequentemente, quando isso ocorre em um conjunto pequeno de dados é bastante provável que se deva a um erro sistemático ou grosso durante a medida.

As calculadoras científicas possuem as equações (8) a (12) dentro do módulo de estatística, bastando apenas ingressar o conjunto de dados (x_i, y_i) e selecionar o parâmetro desejado. Consulte o manual de sua calculadora para aprender a usar essas funcionalidades, pois terá um ganho de tempo considerável durante as práticas e as provas!

Figura 3.2 - Exemplo de duas grandes físicas x e y medidas experimentalmente (círculos), com relação possivelmente linear. Linha contínua: melhor reta determinada pelo método de mínimos quadrados. Linhas tracejadas: banda de incerteza média do ajuste.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Caso opte por calcular esses parâmetros explicitamente a partir das equações (8) a (12), é muito conveniente construir uma tabela, como a indicada a seguir (tabela 3.1), contendo as quantidades fundamentais necessárias, e preencher as colunas. Desse modo, eventuais erros ficam isolados e são mais fáceis de identificar. A última linha da tabela, identificada com o símbolo de somatório, está reservada para as somas de cada uma das colunas. Essas somas são as quantidades necessárias para avaliar as expressões (8) a (12).

Tabela 3.1 - Modelo de organização dos dados para os cálculos de mínimos quadrados de acordo com as equações (8) a (12).

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	x_i^2	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_{ci}	$(y_{ci} - y_i)^2$
1								
2								
...								
...								
N								
$\sum_{i=1}^N$								

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Exercício: A tabela 3.2 mostra os valores de duas grandezas medidas, entre as quais é esperada uma relação linear. Usando o método de mínimos quadrados, calcule os parâmetros da reta que melhor representa a relação entre essas grandezas. Calcule as incertezas de cada um dos parâmetros e a dispersão do ajuste.

Tabela 3.2 - Dados experimentais de duas grandezas com relação possivelmente linear.

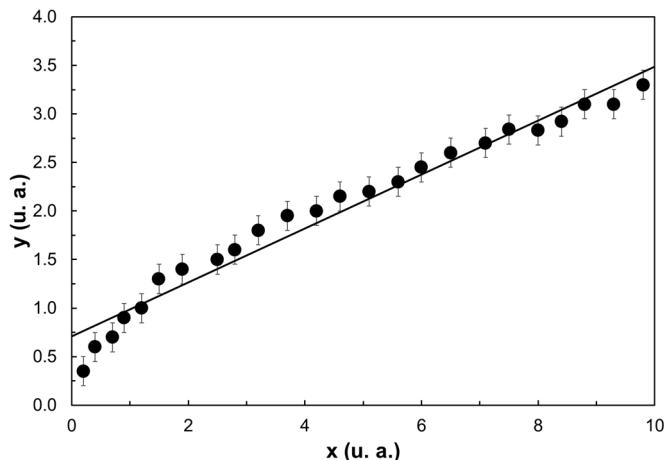
x (u. a.)	y (u. a.)
3	9,2
4	10,5
5	14,8
6	15,6
7	19,6
8	20,2

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Resposta: $a = (2,4 \pm 0,2)$, $b = (2 \pm 1)$, $\Delta y = 0,98$.

Quando os dados estão afetados apenas por erros aleatórios, significa que sua dispersão, em relação à melhor reta ajustada, deve ser também aleatória; as distâncias dos dados, em relação à reta, variam de maneira descorrelacionada. Isso pode ser observado nos dados da figura 3.2. Considere agora o conjunto de dados exibidos na figura 3.3, em que é mostrada a reta ajustada com o método de mínimos quadrados.

Figura 3.3 - Exemplo de ajuste linear insatisfatório (linha contínua) de um conjunto de dados experimentais (círculos), devido à existência de uma relação não linear entre x e y , ou a erros não aleatórios durante o experimento.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

É possível observar que a dispersão dos dados não é aleatória; há uma variação sistemática em função de x . Qualquer outra reta traçada graficamente terá esse problema para alguma região de valores de x . Esse comportamento pode indicar que existiu um erro sistemático durante o experimento ou que a suposição de uma relação linear entre y e x está errada. Para testar a primeira possibilidade, o mais recomendável é revisar as condições da montagem

experimental e eventualmente repetir algumas das medidas em diferentes regiões de variação de x .

Bibliografia

Helene, O.; Vanin, V.. **Tratamento estatístico de dados em física experimental.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1981.

Hughes, I.; HASE, T.. **Measurements and their uncertainty.** Oxford: Oxford University Press, 2010.

Vuolo, J. E.. **Fundamentos da teoria de erros.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1993.

Seção II: Apostila de Práticas

Prática 1: Instrumentos, medidas e incertezas

1.1 Objetivos

Nesta prática serão realizadas medidas diretas de comprimentos, massas e volumes de peças metálicas, assim como medidas indiretas de volume e densidade dos materiais. Serão determinadas as incertezas de medidas com os métodos apropriados para cada caso, descritos no capítulo 1.

1.2 Introdução

A densidade das peças será determinada indiretamente a partir da medida do volume V e da massa m , usando a expressão:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

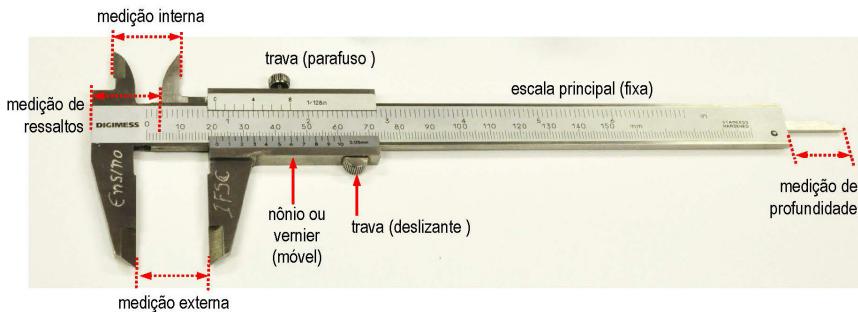
A massa será determinada diretamente com uma balança. O volume pode ser medido indiretamente, mensurando as dimensões das peças, ou diretamente usando o princípio de Arquimedes. As *incertezas de todas as grandezas medidas devem ser determinadas e os valores arredondados de maneira consistente, de acordo com os métodos e critérios descritos no capítulo 1*. Portanto, o conteúdo desse capítulo deverá ser cuidadosamente estudado antes de realizar a prática.

1.3 Paquímetro

A figura 1.1 mostra um paquímetro universal. Consta de uma régua, a escala principal, com precisão $D = 1$ mm (separação entre as divisões) e

comprimento de 150 mm. O paquímetro dispõe de vários pares de encostos para realizar medições externas, internas e de profundidade.

Figura 1.1 - Paquímetro universal com vernier.



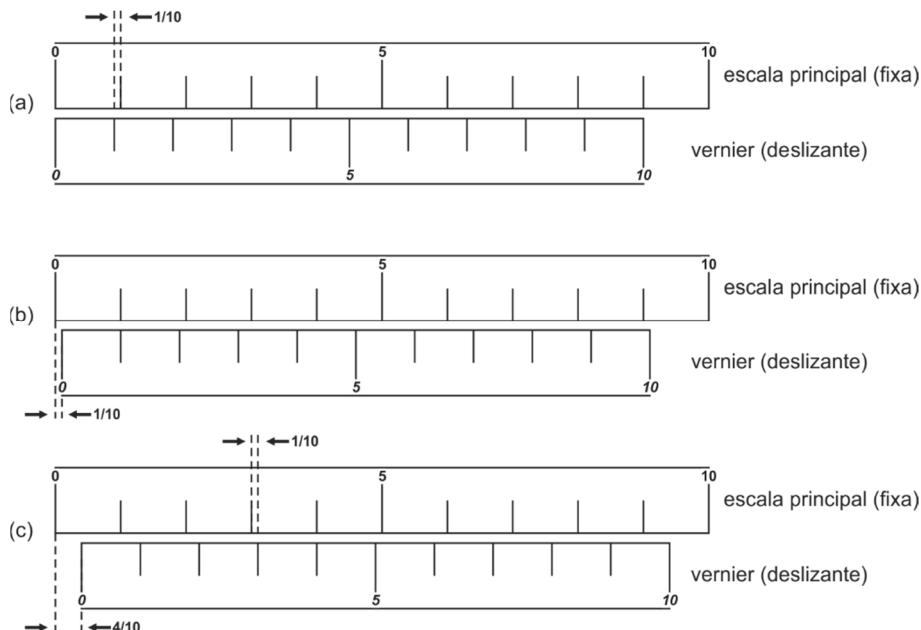
Fonte: Elaborada pelo compilador.

A capacidade de realizar medidas mais precisas do que uma régua convencional se deve ao uso do nônio ou vernier, uma régua deslizante que subdivide as unidades da escala principal. A escala do vernier possui N divisões, cuja separação está “encolhida” 10% em relação às divisões da escala principal, como mostrado na figura 1.2.a.

O vernier representado tem 10 divisões, que equivalem a 9 divisões da régua principal. Na figura podemos notar claramente que a primeira divisão do vernier é um $1/10$ mais curta que a mínima divisão da régua e, portanto, somente há coincidência das divisões das réguas nas posições 0 e 9 da escala principal.

Note que as divisões da escala principal têm unidades, mas as divisões do vernier não. Se as divisões da escala principal correspondessem a 1 mm, então a defasagem entre as divisões “1”, de ambas as escalas na figura 1.2.a, seria de 0,1 mm.

Figura 1.2 - Princípio de funcionamento do vernier. (a) Zeros do vernier e da escala principal alinhados. Observe que as divisões do vernier são 10% mais curtas que as da régua principal. (b) Alinhamento na divisão 1 do vernier. O deslocamento do vernier com relação ao zero da escala principal é de $1/10$ de unidade da escala principal. (c) Alinhamento na divisão 4 do vernier. O deslocamento do vernier corresponde, agora, a $4/10$ de unidade da escala principal.



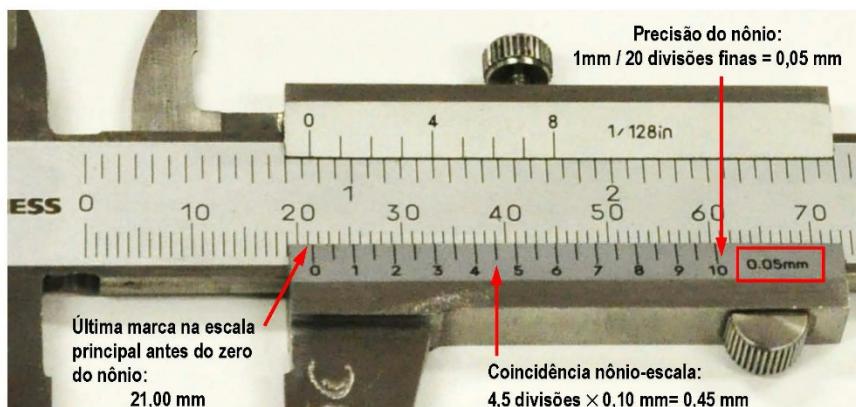
Fonte: Elaborada pelo compilador.

Suponha, agora, que o vernier é deslocado para direita de maneira que coincidam as divisões “1” de ambas as escalas, como mostrado na figura 1.2.b. Que distância deveria ter se deslocado o vernier desde a posição inicial? Claramente é $1/10$ em unidades da escala principal. Consideremos neste momento um deslocamento maior, como na figura 1.2.c, de maneira que a coincidência das divisões ocorra, por exemplo, para a divisão 4 do nônio. O deslocamento total atual deve ser $4 \times 1/10$ nas unidades da escala principal. Então, podemos concluir que a coincidência das divisões das escalas permite

mensurar o deslocamento do vernier em frações da mínima divisão da escala principal. Esse princípio pode ser aplicado para aumentar a precisão da medida de comprimento sobre escala principal.

Na figura 1.3 está representado o detalhe da leitura do paquímetro, para o caso de um vernier de 20 divisões. A precisão máxima desse paquímetro é, então, $1\text{ mm} / 20 = 0,05\text{ mm}$.

Figura 1.3 - Detalhe da leitura do paquímetro, para o caso de um vernier de 20 divisões (precisão 0,05 mm).



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Consideremos a leitura mostrada na figura sobre a escala principal. Podemos notar que o resultado da medida é maior que 21 mm. A fração de mm, que deve ser acrescentada a esse valor, pode ser medida com o vernier, utilizando o método descrito acima, com a única diferença de contabilizar o deslocamento do vernier a partir da divisão 21 mm, em vez de 0 da escala principal. Na figura 1.3, a coincidência ocorre para a divisão 4,5. Portanto, a

fração deslocada é $4,5 \times 0,10 \text{ mm} = 0,45 \text{ mm}$ e, assim, a leitura completa é $21,00 \text{ mm} + 0,45 \text{ mm} = 21,45 \text{ mm}$.

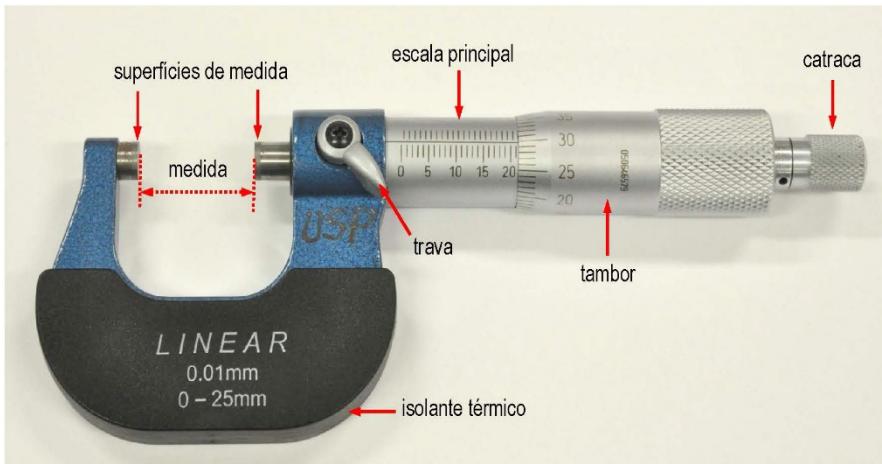
Os paquímetros podem ter verniers de até 50 divisões, resultando em uma precisão de 0,02 mm. Verifique sempre qual é a precisão do paquímetro utilizado para, assim, poder avaliar a incerteza das medidas.

1.4 Micrômetro

A figura 1.4 mostra um micrômetro típico, consistindo de um parafuso axial com rosca calibrada. A forma de medida é sempre externa à peça e o limite está determinado pelo máximo afastamento das superfícies, usualmente 25 mm. O instrumento deve ser segurado pela parte coberta pelo isolante térmico, para evitar eventuais distorções de medida, causadas pela dilatação térmica das partes metálicas em contato com a mão. As superfícies de medida devem fazer contato com as superfícies da peça, avançando suavemente o parafuso usando a catraca.

O micrômetro possui uma escala principal fixa, com precisão de 0,5 mm e uma escala rotatória no tambor com 50 divisões. Uma volta completa do tambor equivale a um avanço de 0,5 mm na escala principal. Logo, a precisão é $0,5 \text{ mm} / 50 \text{ divisões} = 0,01 \text{ mm}$.

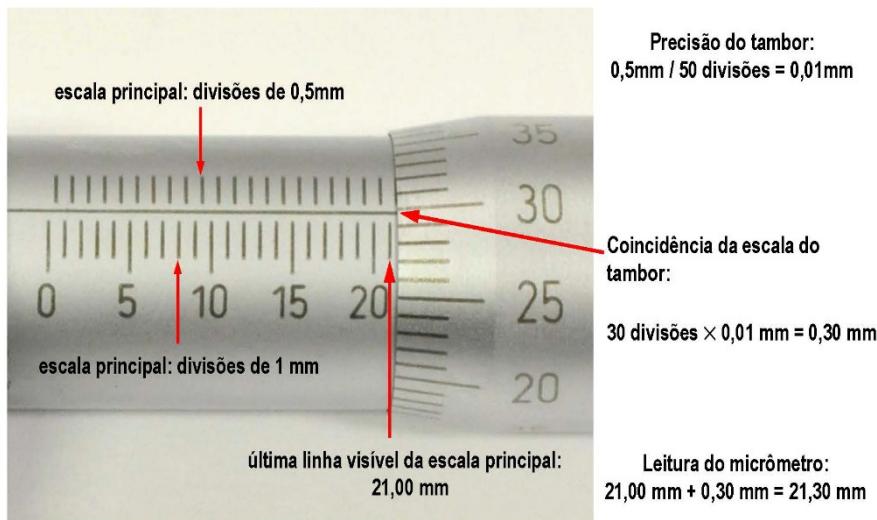
Figura 1.4 - Micrômetro de parafuso (precisão de 0,01 mm).



Fonte: Elaborada pelo compilador.

A figura 1.5 mostra o detalhe de uma leitura sobre a escala do micrômetro. Até a borda do tambor, a última divisão, claramente visível na escala principal, é 21,00 mm. A fração restante é medida sobre a escala do tambor. A coincidência da linha horizontal ocorre aproximadamente na divisão 30, representando um comprimento de $30 \text{ divisões} \times 0,01 \text{ mm} = 0,30 \text{ mm}$. Portanto, a leitura é $21,00 \text{ mm} + 0,30 \text{ mm} = 21,30 \text{ mm}$.

Figura 1.5 - Detalhe da leitura do micrômetro, para um tambor de 50 divisões (precisão 0,01 mm).



Fonte: Elaborada pelo compilador.

1.5 Parte experimental

1.5.1 Medidas direta e indireta do volume

Nesta parte do experimento, será determinado o volume de uma peça metálica.

- Confira o estado do paquímetro e do micrômetro! Verifique qual é a precisão desses instrumentos e confirme que o zero esteja calibrado! Essas conferências são necessárias para atribuir as incertezas das medidas e evitar erros sistemáticos.
- Meça diretamente todas as dimensões das peças, necessárias para calcular o volume. Tente usar o instrumento mais preciso que for

possível em cada dimensão da peça. No relatório, faça esquemas das peças e os parâmetros medidos, e compile claramente os resultados com suas respectivas incertezas.

- c) Calcule para cada peça o volume e sua incerteza.
- d) Meça diretamente o volume das peças utilizando uma proveta graduada contendo água. Determine a incerteza dessas medidas.
- e) Organize os resultados das medidas de volume numa tabela (veja tabela 1.1). Compare e discuta os valores obtidos com ambos os métodos. Indique, por exemplo, se os resultados são equivalentes entre si ou se um dos métodos é mais preciso que o outro.

Tabela 1.1 - Volumes das peças metálicas medidos direta e indiretamente e as respectivas densidades resultantes.

Peça	V_{direto} (cm ³)	$V_{indireto}$ (cm ³)	ρ (g/cm ³)	Material identificado / ρ (g/cm ³)

Fonte: Elaborada pelo compilador.

1.5.2 Medida indireta da densidade

- a) Meça diretamente a massa das peças com uma balança, determinando a incerteza. Certifique que não existam fontes de erros sistemáticos (calibração do zero da balança, nivelação do prato, etc.).

- b) Usando o volume medido indiretamente, calcule as densidades dos materiais das peças, junto com suas incertezas.
- c) De acordo com o valor de densidade e o aspecto da peça, proponha uma identificação para o material, comparando com dados de referência. Indique na tabela o valor de densidade usado para justificar sua identificação. Leve em consideração os critérios de comparação de grandezas com incerteza (capítulo 1, seção 1.7).

1.5.3 Medida direta com dispersão

Nesta parte da prática, será analisado o caso da medida direta de uma grandeza com dispersão dos resultados maior que a precisão do instrumento. Será medido o diâmetro médio de um segmento de fio de cobre, grosso e irregular, utilizando um micrômetro.

- a) Construa uma tabela, como a sugerida na tabela 1.2, incluindo, no mínimo, 10 medidas do diâmetro d do fio realizadas em pontos diferentes do mesmo. Existe dispersão dos dados?
- b) Calcule o valor médio do diâmetro.
- c) Calcule os desvios dos valores com relação à media ($d_i - \bar{d}$) e o desvio absoluto médio $\Delta d = \frac{\sum_{i=1}^N |d_i - \bar{d}|}{N}$.
- d) Compare o desvio absoluto médio com a precisão D do micrômetro. Qual é a incerteza que deve ser atribuída ao diâmetro médio? Expresse o resultado final com a quantidade de casas significativas consistente com a incerteza.
- e) Qual é a diferença entre o procedimento de medir o diâmetro sempre no mesmo ponto ou em pontos diferentes do fio? Qual é o significado

ou a validade desses procedimentos do ponto de vista do *controle de tolerância dimensional* das características de uma peça?

Tabela 1.2 - Determinação do diâmetro d de um fio de cobre medido com um micrômetro.

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Bibliografia

Helene, O.; Vanin, V.. **Tratamento estatístico de dados em física experimental.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1981.

Vuolo, J. E.. **Fundamentos da teoria de erros**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1993.

Prática 2: Módulo de elasticidade

2.1 Objetivos

Nesta prática será estudado o comportamento de deflexão elástica de uma barra metálica, fixada em um extremo, em função do comprimento e da força de carga aplicada no extremo oposto. Será determinado, também, o módulo de elasticidade do material na tração (módulo de Young). Para o processamento dos dados, serão utilizadas metodologias descritas no capítulo 2 (escalas logarítmicas, linearização e cálculo de coeficiente angular de uma reta), *que deverão ser cuidadosamente estudadas antes de realizar essa prática.*

2.2 Introdução

Todos os materiais apresentam deformação quando sujeitos a esforços, como, por exemplo, forças de compressão, tração ou cisalhamento. A resposta do material pode ser caracterizada através de um coeficiente, o *módulo de elasticidade*, que indica a resistência do material à deformação frente a um tipo particular de esforço aplicado:

$$\text{módulo de elasticidade} = \frac{\text{esforço}}{\text{deformação}} \quad (1)$$

Elasticidade é a propriedade que o corpo tem de recuperar sua forma inicial depois de uma deformação. No entanto, esforços acima de certo valor limite causam deformações permanentes. O *comportamento elástico* de um material está determinado para esforços abaixo desse valor. Nesse regime, a deformação é diretamente proporcional ao esforço externo aplicado. Para o

caso particular de uma força de tração F produzindo um alongamento x do corpo na mesma direção da força, se define o módulo de Young E do material de acordo a equação (1).

$$E = \frac{F/A}{x/l} \quad (2)$$

sendo A a área de aplicação da força no corpo, perpendicular à força e l , o comprimento inicial do corpo. No limite elástico, como E é uma constante, a relação entre x e F é linear:

$$F = \frac{EA}{l}x \quad (3)$$

O fator constante, que multiplica x na equação (3), define a rigidez do corpo frente às forças de tração e constitui a *constante de força* ou *constante elástica* da peça. Claramente, pode-se notar em (3) que a constante elástica depende da geometria da peça, assim como do material.

Questão: De acordo com a equação (3), determine as unidades, no sistema internacional, do módulo de Young e da constante de força.

Analogamente, é possível definir módulos de compressão B e de cisalhamento S caracterizando a resposta do material diante de forças de compressão e tangencial, respectivamente. Na tabela 2.1 são mostrados valores de módulos elásticos para diferentes materiais. Observe que a resposta elástica na tração e na compressão podem ser diferentes. O concreto é um exemplo extremo desse comportamento, apresentando alta resistência à compressão e baixíssima resistência à tração.

Tabela 2.1 - Valores de referência para módulos de elasticidade na tração E (módulo de Young), na compressão B e no cisalhamento S para diferentes materiais.

Material	Módulo de Young E (10^{10} Pa)	Módulo de compressão B (10^{10} Pa)	Módulo de cisalhamento S (10^{10} Pa)
Alumínio	7,0	7,5	2,5
Cobre	11,0	14,0	4,4
Bronze	9,0	6,0	3,5
Aço	20,0	16,0	7,5
Ferro	21,0	16,0	7,7
Chumbo	1,6	4,1	0,6
Concreto	----	3,0	2,1
Vidro Crown	6,0	5,0	2,5

Fonte: Elaborada pelo compilador.

2.2.1 Deflexão de uma barra

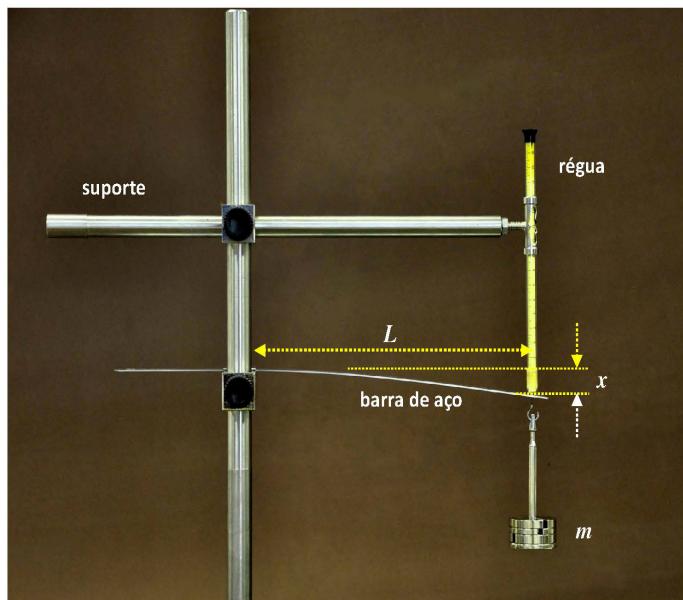
Um caso de deformação muito importante em engenharia é a deflexão de uma barra ou uma viga sofrendo cargas de forças externas. A deflexão resulta da combinação de tração e compressão atuando, respectivamente, sobre a parte convexa e côncava da barra deformada. Nessa prática será considerada uma barra de aço de seção retangular fixada em uma extremidade, como mostrado na figura 2.1. A barra será carregada no extremo oposto com uma força F , que causará uma deflexão. A deformação, nesse caso, será quantificada mediante a variação da posição vertical x do ponto extremo. Dentro do regime elástico, a relação entre a força e a deformação de flexão é:

$$F = \overbrace{\left(E \frac{d^3 b}{4L^3} \right)}^k x \quad (4)$$

em que E é o módulo de Young do material da barra, b é a largura, d a espessura e L o comprimento medido entre o ponto de suspensão e o ponto de

aplicação da força. A equação (4) é válida unicamente para as condições de carga indicadas: um extremo fixo e o oposto sujeito à carga. Para barras com outros pontos de fixação e carga, o coeficiente que relaciona F e x dependerá de forma diferente da geometria da barra. No entanto, dentro do limite elástico, a relação entre a deformação e a força será sempre linear.

Figura 2.1 - Dispositivo para a medida da deflexão x de uma barra de aço de comprimento L fixa em um extremo e carregada no extremo livre.

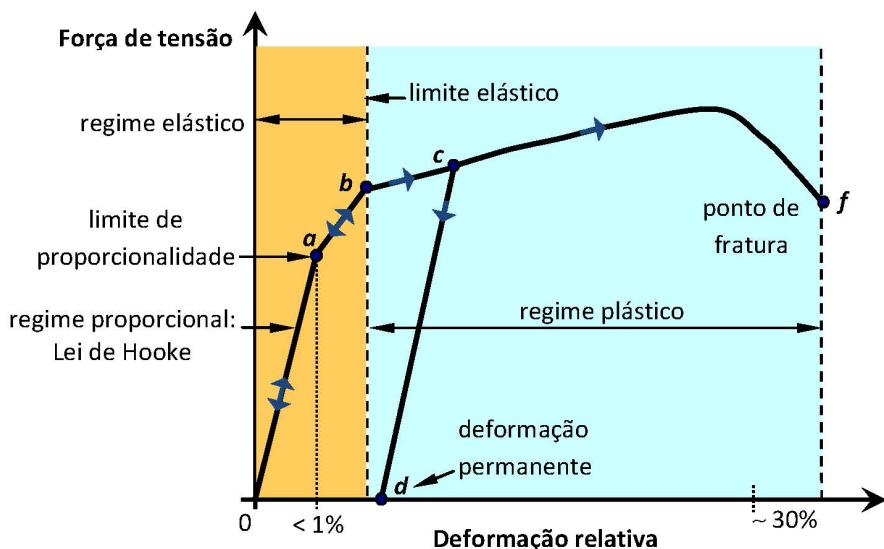


Fonte: Elaborada pelo compilador.

Questão: De acordo com a relação (4), para aumentar a rigidez de uma barra de comprimento L fixo, quais parâmetros geométricos devem ser aumentados? Qual parâmetro tem mais efeito sobre a rigidez?

A Física e a Engenharia: materiais dúcteis e frágeis

A relação de proporcionalidade entre a força de tensão (tração), aplicada a um material e sua deformação (alongamento), é conhecida como Lei de Hooke. No entanto, esse comportamento é válido apenas para deformações relativamente pequenas, tipicamente menores que 1%. Para forças que causam deformações maiores, o comportamento do material é radicalmente diferente. Na figura está representado o diagrama de esforço-deformação para um material típico sujeito a uma força de tração. A região de **resposta elástica** do material corresponde à parte inicial do gráfico, até o ponto b. Nesse regime, as deformações são **reversíveis**: quando a força é retirada, o corpo recupera sua forma inicial. A região de **deformação proporcional**, para qual a Lei de Hooke é válida, estende-se desde a origem do gráfico até o ponto a. O coeficiente de inclinação dessa reta é o **módulo de Young** do material. A proporcionalidade deixa de ser válida para deformações maiores na região entre a e b, porém, o material ainda se comporta elasticamente. O ponto b, na curva, corresponde ao **limite de ruptura**; deformações acima desse valor não são reversíveis quando se retira a força. A região de deformações acima do ponto de ruptura corresponde ao regime de **deformação plástica** do material. Por exemplo, se o material fosse deformado até o ponto c, ao retirar a força, o retorno ocorreria ao longo da reta c-d. O ponto d corresponde a uma deformação com força nula, indicando que o corpo sofreu uma **deformação permanente**. Esse fenômeno é usado para moldar materiais metálicos a frio. Se a força aplicada for mais intensa, eventualmente se atinge o **limite da fratura** do material, no ponto f. Um material é **dúctil** quando os pontos b e f estão muito separados no diagrama, indicando uma região extensa de deformação plástica. Em contraste, o material é **frágil** quando a ruptura ocorre próximo ao limite elástico, determinando um regime plástico estreito ou inexistente.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

2.3 Parte experimental

Será estudado o fenômeno de deflexão de uma barra de aço inox, de perfil retangular, disposta horizontalmente com um extremo fixo. Para isso, será utilizada a montagem mostrada na figura 2.1. Sobre o extremo livre, um gancho permite pendurar massas, que determinam a força de deformação atuante. As deflexões verticais x do extremo livre da barra serão medidas com uma régua milimetrada encapsulada em um tubo de plástico, cuja ponta encosta no extremo da barra. A régua acompanha livremente a deflexão da barra quando carregada. O ponto de fixação da barra pode ser escolhido, de forma a controlar o comprimento L .

Para a realização da prática é *imprescindível* ter estudado o uso de escalas logarítmicas e a determinação do coeficiente angular de retas traçadas graficamente, discutidos no capítulo 2.

2.3.1 Determinação do módulo de Young

Nesse experimento, será analisada a variação da deformação em função da força de deflexão aplicada sobre a barra, com a finalidade de determinar o módulo de Young do material. Durante a execução dos experimentos, verifique periodicamente se a barra retorna ao seu estado inicial quando não for adicionado peso.

- a) Determine os parâmetros geométricos da barra (largura e espessura).
- b) Fixe a barra por uma de suas extremidades, deixando um comprimento da ordem de 27 cm. Verifique o correto alinhamento horizontal. Escolha um ponto de medida sobre a barra e encoste o extremo da régua deslizante. Verifique que o percurso de medida é apropriado,

pendurando a maior massa de carga que será aplicada durante o experimento. Meça o valor do comprimento L correspondente.

- c) Aplique diferentes cargas, entre zero e o valor máximo, e meça a deformação x da barra. Construa uma tabela de dados da deformação x em função da força peso F .
- d) Faça um gráfico em papel milimetrado, ambos os eixos em escalas lineares, de F contra x . Observe se a relação observada é linear ou não. Caso seja linear, trace a melhor reta que represente o conjunto de dados experimentais.
- e) Escolha dois pontos da melhor reta (distantes entre si) e determine seu coeficiente angular.
- f) Usando o coeficiente angular medido e a equação (4), determine o valor do módulo de Young do material. Compare com o valor tabelado para o aço. Discuta os resultados do seu experimento em função dos valores obtidos.

2.3.2 Análise da relação comprimento-deformação

Nesse experimento, será analisada a dependência da deformação em função do comprimento da barra, para uma força de carga fixa.

- a) Escolha uma massa de carga, que será mantida constante durante o experimento, e meça a deformação x para diferentes valores de comprimento L , variando, para isso, o ponto de fixação da barra.
- b) Com os valores registrados, construa uma tabela contendo colunas para L , x e L^3 .

- c) Faça um gráfico em papel log-log de x contra L . Em função da dependência observada nesse gráfico, identifique que tipo de relação vincula estas grandezas (linear ou não linear). Esse resultado é coerente com a equação (4)?
- d) Se a relação observada no gráfico log-log for linear, trace a melhor reta que represente esses dados experimentais. Escolha dois pontos da reta (distantes entre si) e calcule sua inclinação.
- e) Analise se o valor obtido para esse coeficiente é consistente com a relação esperada a partir da equação (4).
- f) Faça um gráfico em papel milimetrado, com ambos os eixos em escalas lineares, de x em função de L^3 e trace a melhor reta que represente o conjunto de dados.
- g) Escolha dois pontos da reta (distantes entre si) e determine o coeficiente angular.
- h) Usando o coeficiente angular obtido no item (g), determine o valor do módulo de Young. Compare com o valor tabelado para o aço. Discuta os resultados! Os métodos para determinar E forneceram resultados compatíveis? Algum dos métodos é mais confiável?

Bibliografia

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 1. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

Young, H. D.; Freedman, R. A.. **Sears and Zemanski Física I**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Prática 3: Movimento unidimensional

3.1 Objetivos

Nesta prática serão analisados quantitativamente dois tipos de sistemas cujo movimento de uma massa acelerada pode ser descrito em função de uma única coordenada: o pêndulo simples e o plano inclinado. Em ambos os experimentos será determinado o valor da aceleração da gravidade, processando os dados de acordo com o método de mínimos quadrados. *Portanto, é imprescindível dominar os conceitos do capítulo 3 antes de realizar a prática.*

3.2 Introdução

3.2.1 Pêndulo simples: movimento oscilatório harmônico

A figura 3.1 mostra o esquema do pêndulo simples, consistindo de uma massa m (considerada pontual) suspensa por um fio inextensível de comprimento L . Em certo instante, que podemos escolher como $t = 0$, a massa é solta desde um ângulo de afastamento máximo θ_m com relação à posição de equilíbrio (vertical). O movimento subsequente é uma oscilação periódica. A posição da massa pode ser determinada especificando simplesmente o ângulo $\theta(t)$. Se o ângulo de afastamento inicial θ_m não for muito grande, tipicamente menor que 15° , o movimento subsequente é uma oscilação harmônica descrita pela equação horária:

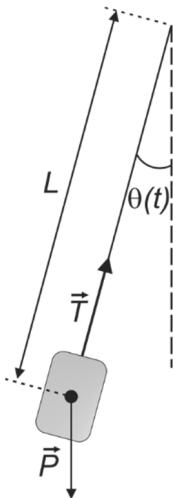
$$\theta(t) = \theta_m \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{t}{T} + \delta \right) \quad (1)$$

em que δ é a fase (definida pelo o ângulo do pêndulo em $t = 0$) e T é o período de oscilação, dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

Podemos observar na expressão (2) que o período de oscilação depende do comprimento do pêndulo e da aceleração da gravidade, através da raiz quadrada, e é independente da amplitude de oscilação ou da massa suspensa.

Figura 3.1 - Pêndulo simples de comprimento L . \vec{T} : tensão da corda. \vec{P} : força peso.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

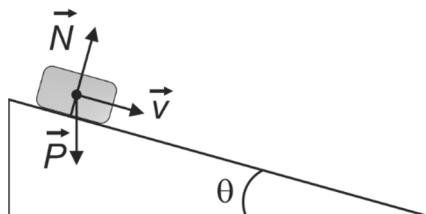
Questão: Durante o intervalo de tempo T , de uma oscilação, quantas vezes a partícula passa pela posição de equilíbrio $\theta = 0$? Quantas vezes ela passa pela posição de afastamento extremo $\theta = \theta_m$?

Questão: O movimento pendular ocorre em um plano, portanto, é bidimensional e requereria duas coordenadas para identificar a posição da partícula. No entanto, a equação horária (1) representa uma única coordenada angular θ . Por que podemos descrever esse movimento como unidimensional?

3.2.2 Plano inclinado: movimento retilíneo uniformemente acelerado

A figura 3.2 mostra o esquema de uma massa deslizando sobre um plano inclinado sem atrito, formando um ângulo θ com a horizontal. Existem duas forças atuando: o peso e a reação do plano. Como essas forças não se cancelam, existe uma força resultante e, portanto, aceleração.

Figura 3.2 - Objeto se deslocando sobre um plano inclinado sem atrito. \vec{N} : força normal. \vec{P} : força peso. \vec{v} : velocidade do objeto.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

O movimento pode ser descrito como unidimensional, escolhendo um referencial que meça a coordenada na direção paralela ao plano inclinado. Definindo o instante $t = 0$, como aquele cujo objeto está na posição $y = 0$, com velocidade v_0 , a equação horária resulta em:

$$y(t) = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \quad (3)$$

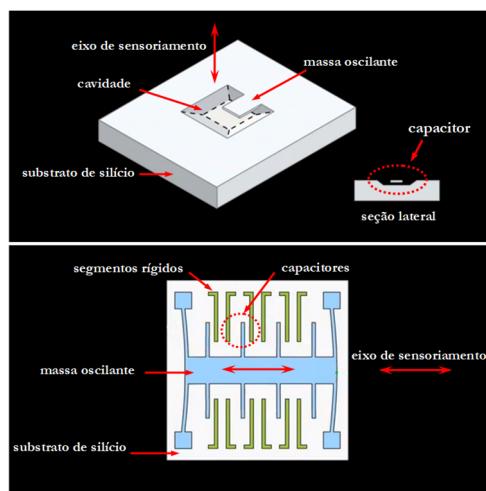
sendo a aceleração dada por:

$$a = g \operatorname{sen}(\theta) \quad (4)$$

A Física e a Engenharia: acelerômetros

Os **acelerômetros** são dispositivos que registram a **magnitude** da aceleração atuante sobre eles, ao longo de um eixo definido, quando se encontram em movimento. Combinando dois ou três acelerômetros, com eixos mutuamente perpendiculares, é possível determinar **direção** e **sentido** da aceleração total. Os acelerômetros são fundamentais para aplicações em navegação de veículos e robôs, e em sistemas de monitoramento de vibrações. Outros acelerômetros determinam a direção da gravidade, determinando, assim, a orientação de um objeto em relação à vertical, permitindo, por exemplo, orientar a tela de telefones, câmeras ou computadores.

Para medir a aceleração de um objeto, o princípio mais comum é usar a deformação que a aceleração causa sobre uma mola ou algum elemento com propriedades elásticas. Os **cristais piezelétricos** são bons como sensores, pois, quando deformados, aparece uma diferença de potencial elétrico entre suas faces proporcional à deformação, que é facilmente medida. Outro método consiste em analisar a oscilação de pequenas estruturas causada pela aceleração. Na figura é mostrada uma pastilha de silício, na qual foram escavadas estruturas de dimensões nanométricas capazes de oscilar (massa oscilante ou “sísmica”) e segmentos fixos ao substrato¹. Essas estruturas formam parte de um circuito elétrico. A separação entre as partes móveis e rígidas determina a **capacitância elétrica** do circuito. Quando existe aceleração, essas separações mudam e alteram a capacitância do circuito, mudando as correntes circulantes. Isso permite medir a aceleração de forma muito rápida e com grande sensibilidade.



Fonte: Engineerguy.com¹.

1 - Disponível em: <<http://www.engineerguy.com/>> Acesso em 15 jan. 2013

3.3 Parte experimental

O pêndulo simples a ser utilizado nos experimentos é composto por um cilindro metálico extenso preso a um barbante. Para as equações (1) e (2) serem válidas, o máximo afastamento do pêndulo com relação ao equilíbrio deve ser menor que 15°. Para conferir essa condição, existe um transferidor colocado no plano paralelo ao movimento. O período será determinado com um cronômetro e o erro associado a medida pode ser calculado considerando o seu tempo de resposta.

Nesta prática, será analisada a relação entre o período de oscilação T e o comprimento L , com a finalidade de determinar o valor da aceleração da gravidade g . De acordo com a discussão sobre linearização no capítulo 2, a equação (2) pode ser transformada numa relação linear elevando ao quadrado ambos os membros.

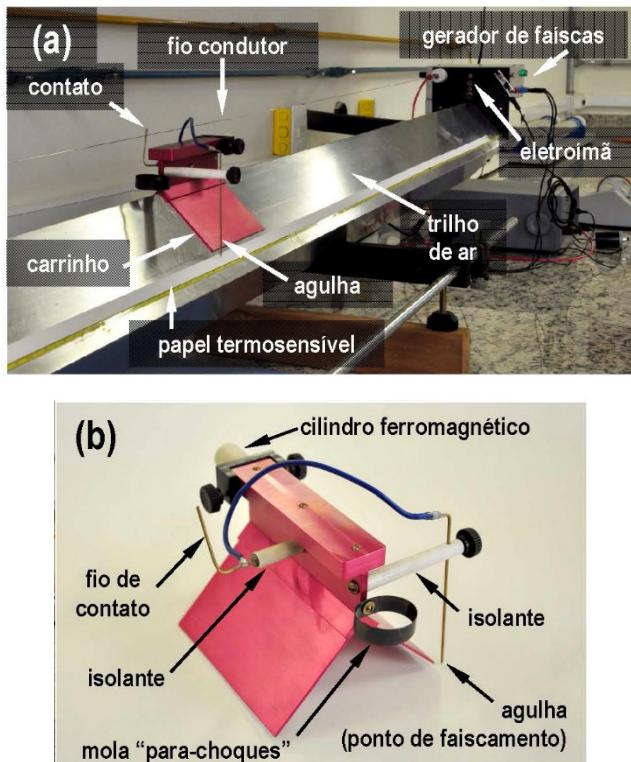
$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} L \quad (5)$$

A equação (5) é uma relação linear entre T^2 e L , com coeficiente linear nulo e inclinação $\frac{(2\pi)^2}{g}$. Portanto, determinando a inclinação dessa reta, é possível calcular o valor de g . Nessa prática, será usado o *método dos mínimos quadrados* para calcular esse coeficiente e, portanto, é *fundamental o estudo dos conceitos do capítulo 3 ou no livro texto que achar mais adequado*.

A figura 3.3 mostra o dispositivo que será utilizado para analisar o movimento uniformemente acelerado. Um trilho de ar será utilizado como plano inclinado para um carrinho deslizante. O trilho é formado por um tubo no qual é injetado um fluxo de ar comprimido. A superfície do tubo tem um conjunto de pequenos furos uniformemente distribuídos para saída do ar, gerando um colchão de ar que mantém suspenso o carrinho e minimiza o efeito do atrito. A

posição do carrinho é registrada durante o movimento, utilizando uma fita de papel termossensível e um sistema de faiscamento em intervalos de tempo constantes. As faíscas, sobre o papel, são geradas pela ponta de uma agulha fixada ao carrinho e suspensa a aproximadamente 2 mm da superfície da fita. O circuito elétrico é fechado através de um segundo pino de cobre fixado ao carrinho, em contato elétrico com um fio ligado a um gerador de alta tensão. As faíscas são geradas com frequência de 5Hz.

Figura 3.3 - (a) Trilho de ar para análise do movimento uniformemente acelerado no plano inclinado. (b) Detalhe do carrinho suspenso, mostrando o segmento de circuito com a agulha de faiscamento.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Nessa prática, serão medidos os valores da coordenada y para certos instantes de tempo t , com o objetivo de analisar o movimento e determinar o valor da aceleração da gravidade. O carrinho é inicialmente segurado no extremo do trilho com um eletroímã. Quando o pulsador é acionado, o eletroímã é desligado, liberando o carrinho e ativando o gerador de voltagem do faiscador. O resultado do experimento é uma série de marcas sobre a fita, cujos valores da coordenada são medidos com uma trena. Para as inclinações tipicamente usadas no laboratório, haverá uma dúzia de pontos registrados sobre uma fita de aproximadamente 1,5 m de comprimento.

Para facilitar a análise, é conveniente linearizar a relação (3) dividindo ambos os membros pelo tempo:

$$\frac{y}{t} = v_0 + \frac{a}{2} t \quad (6)$$

Portanto, a relação entre $\frac{y}{t}$ e t é linear, com coeficiente linear v_0 e coeficiente angular $\frac{a}{2}$. Usando o método de mínimos quadrados, é possível determinar ambos os coeficientes e calcular a aceleração a do corpo. Da equação (4), é possível obter a aceleração da gravidade g , pois o ângulo θ pode ser medido no experimento.

3.3.1 Pêndulo simples

- a) Neste experimento o período de oscilação T será medido para diferentes comprimentos L do pêndulo, mantendo o resto dos parâmetros invariantes. Considere, no mínimo, 6 comprimentos diferentes.
- b) Suspenda o pêndulo verticalmente e meça L entre o ponto de suspensão e o centro de massa do corpo.

- c) Para minimizar o erro, será medido o tempo t_N de N oscilações (por exemplo, $N = 10$). Essa medida deve ser repetida, para calcular uma média $\overline{t_N}$ e, assim, minimizar os erros aleatórios. Calcule o valor do período T resultante: $T = \frac{\overline{t_N}}{N}$.
- d) Repita o processo para outros valores de comprimento. Organize os resultados numa tabela, formatada como sugerido na tabela 3.1.
- e) Faça um gráfico linearizado, em papel milimetrado, de T^2 em função de L . Confira se os dados seguem uma relação linear. Se houver dados que se desviam consideravelmente, revise os cálculos ou meça novamente o dado duvidoso.
- f) Usando o método de mínimos quadrados, calcule a inclinação da reta correspondente à relação (5), junto com seu respectivo erro. Confira as dicas do capítulo 3 para fazer esses cálculos. Trace esta reta no mesmo gráfico dos dados experimentais e ateste que represente efetivamente a relação linear observada.
- g) A partir de (5), e usando o coeficiente angular calculado em (f), determine o valor de g e sua incerteza. Compare com o valor esperado.

Tabela 3.1 - Comprimento do pêndulo L , tempo de N oscilações t_N , período de oscilação T e valores de T^2 para linearização dos dados.

Fonte: Elaborada pelo compilador.

3.3.2 Plano inclinado

- a) O trilho de ar é levemente inclinado com um calço para deslizar o carrinho. Através da medida do comprimento e da altura de desnível do trilho, determine indiretamente o ângulo θ de inclinação, com seu respectivo erro.
 - b) Prepare o carrinho no extremo do trilho, com o eletroímã ativado e a fita termossensível colada e alinhada sobre o trilho. Ative o pulsador para liberar o carrinho sobre o trilho.
 - c) Sabendo o intervalo de tempo entre as marcas de posição da fita, construa a tabela de tempo t e posição y , de acordo com a formatação sugerida na tabela 3.2.

- d) Calcule as quantidades $\frac{y}{t}$ e faça um gráfico linear, em papel milimetrado, de $\frac{y}{t}$ em função de t . Confira se a relação entre essas quantidades é linear, tal como a equação (6) indica.
 - e) Usando o método dos mínimos quadrados, calcule a inclinação e o coeficiente linear da reta correspondente à relação (6), junto com seus respectivos erros. Trace esta reta no mesmo gráfico dos dados experimentais e verifique que representa efetivamente a relação linear observada.
 - f) Avalie e discuta se o valor obtido para a velocidade inicial do carrinho é compatível com o experimento realizado.
 - g) Considerando a equação (4), calcule a aceleração da gravidade, com seu respectivo erro. Compare com o valor de referência e com o método do pêndulo simples.

Tabela 3.2 - Posição y em função do tempo t para movimento do carrinho sobre o trilho de ar inclinado.

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Bibliografia

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física.** Vol. 1. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros.** Vol. 1. LTC.

Young, H. D.; Freedman, R. A.. **Sears and Zemanski Física I.** 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Prática 4: Estática

4.1 Objetivos

Nesta prática serão estudadas as condições de equilíbrio estático em três sistemas mecânicos: três massas suspensas em um conjunto de polias, um fio sujeito a forças de tração e um corpo na iminência de deslizar sobre um plano inclinado. No primeiro sistema, será analisada a condição de equilíbrio para um ponto material. No segundo, será determinada a força de ruptura do fio. No plano inclinado, será medido o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies.

4.2 Introdução

4.2.1 Equilíbrio estático

A *Estática* é a área da Física que estuda o equilíbrio de corpos rígidos. Equilíbrio significa ausência de aceleração e, portanto, velocidades de translação e rotação constantes. Nos problemas de equilíbrio *estático* é considerado também que as *velocidades são nulas*. As condições de equilíbrio de um sistema estão determinadas pelas Leis de Newton da Mecânica:

$$\text{somatória das forças externas nula: } \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (1)$$

$$\text{somatória dos torques externos nula: } \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \quad (2)$$

Nessas equações, \vec{F}_i são as *forças externas* atuando sobre o sistema e \vec{r}_i , os pontos de aplicação de cada uma, quando o sistema é extenso, como, por exemplo, um corpo rígido. A condição (1) garante que o centro de massa do sistema tem aceleração nula; se inicialmente está em repouso, então se manterá nesse estado e não haverá *translação*. A condição (2) é necessária para garantir que o sistema não vai se acelerar angularmente e, portanto, não vai *rotar*. A condição (2) é imprescindível para determinar o equilíbrio de corpos rígidos, por exemplo, em projetos de construções civis, motores ou aeronaves. Em problemas de estática mais simples, para garantir o equilíbrio translacional do centro de massa do corpo, muitas vezes é suficiente que somente a condição (1) seja satisfeita.

Nesta prática serão mostradas três situações, nas quais o problema se reduz à estática de um ponto material, e poderemos considerar apenas a condição (1) de equilíbrio translacional. Deve ser lembrado que as equações (1) e (2) são *vectoriais*. Para operar com essas equações é necessário decompô-las em três direções perpendiculares, resultando, assim, em três equações escalares. Nos problemas considerados nessa prática, as forças se encontram atuando sobre um plano e, portanto, é suficiente decompô-las em duas direções perpendiculares, identificadas como x e y , resultando, por exemplo, para (1):

$$\sum_i \vec{F}_{ix} = 0 \quad (3a)$$

$$\sum_i \vec{F}_{iy} = 0 \quad (3a)$$

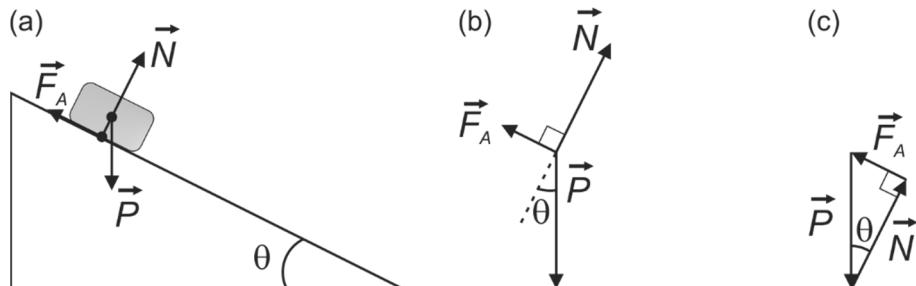
4.2.2 Diagramas de forças

Ao analisar a condição de equilíbrio, as forças externas sobre o sistema podem ser representadas atuando sobre um ponto: a posição de uma massa

pontual ou, no caso de um corpo extenso, seu centro de massa. O diagrama vetorial de forças é conhecido como diagrama de forças de corpo isolado. Como a força resultante da soma de forças é nula, é possível também representar o diagrama na forma do triângulo de forças.

Como exemplo, na figura 4.1 é mostrado o caso de um corpo extenso em equilíbrio sobre um plano inclinado. Existem três forças atuantes sobre o corpo: o peso (representado no centro de massa), a força de reação do plano (aplicada perpendicularmente sobre a face do corpo) e a força de atrito (aplicada paralelamente à face do corpo). Na figura estão representados os dois tipos de diagramas de forças. No diagrama de corpo isolado, o ponto de aplicação das forças é o centro de massa do corpo rígido.

Figura 4.1 - Exemplo de diagramas de equilíbrio de forças para um corpo em equilíbrio apoiado sobre um plano inclinado: (a) sistema real, (b) diagrama de corpo isolado para o centro de massa, (c) triângulo de forças.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Questão: Verifique que os ângulos entre pares de forças, indicados no triângulo de força, são compatíveis com a definição de ângulos no diagrama de corpo isolado.

No triângulo de forças é possível aplicar as relações de semelhança e obter a Lei dos Senos, vinculando a magnitude dos vetores com os ângulos. Para o triângulo de figura 4.1 tem-se:

$$\frac{F_A}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{P}{\operatorname{sen}(90^\circ)} = \frac{N}{\operatorname{sen}(\beta)} \quad (4)$$

sendo $\beta = 90^\circ - \theta$. Essa equação é equivalente ao par de equações escalares (3). Dependendo do problema e dos dados disponíveis, pode-se escolher entre (3) ou (4) para analisar as forças na condição de equilíbrio.

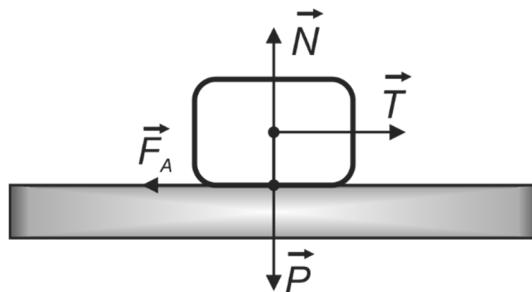
4.2.3 Forças de atrito

Quando dois corpos são colocados em contato, forças em escala molecular são mutuamente exercidas entre as superfícies. As forças de reação de contato que aparecem quando um objeto exerce pressão sobre outro são o exemplo mais direto desse fenômeno. Essas forças têm origem na repulsão entre os elétrons nas duas superfícies. Existem também forças atrativas na escala molecular, como as forças de van der Waals, que tendem a dificultar o deslizamento das superfícies e constituem a origem das forças de atrito. De acordo com a experiência cotidiana, duas superfícies aparentemente planas em escala macroscópica, mas rugosas, apresentam maior atrito que duas superfícies polidas dos mesmos materiais. No entanto, quando as superfícies são extremamente planas, em escala nanométrica, observa-se que o atrito aumenta devido à ação das forças atrativas de origem molecular. Isso pode ser verificado com duas placas planas de vidro; quanto menos rugosas e mais limpas se encontrarem, mais difícil será deslizar uma sobre a outra. No modelo de atrito que analisaremos aqui, estaremos considerando sempre o limite de superfícies planas e polidas.

Na figura 4.2 é mostrado um bloco, apoiado sobre um plano horizontal, sujeito a uma força de tração horizontal \vec{T} . Como o bloco se mantém em repouso, deve existir uma força líquida de atrito estático \vec{F}_A atuando na direção horizontal, compensando a tração. Experimentalmente, observa-se que:

- A condição de repouso, quando $F_A = T$, satisfaz-se até certo limite máximo $F_{A\max}$.
- O limite máximo da força de atrito $F_{A\max}$ depende da natureza das duas superfícies e é diretamente proporcional ao módulo da força normal.

Figura 4.2 - Corpo em repouso submetido a uma força de tração compensada pela força de atrito estática entre as superfícies.



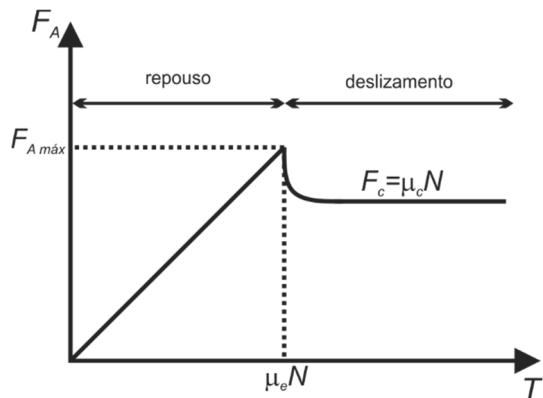
Fonte: Elaborada pelo compilador.

Essas observações podem ser resumidas quantitativamente como:

$$F_A \leq F_{A\max} \text{ com } F_{A\max} = \mu_e N \quad (5)$$

em que μ_e é o *coeficiente de atrito estático*, que depende das duas superfícies em contato. A resposta do atrito, diante da intensidade da força de tração T , está representada graficamente na figura 4.3.

Figura 4.3 - Variação do módulo da força de atrito em função da intensidade da força de tração atuando sobre o corpo.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Acima do limite máximo, quando $T > F_{A\max}$, as forças atrativas intermoleculares são vencidas e as superfícies começam a deslizar. Nessas condições, o atrito decaí bruscamente e assume um valor aproximadamente constante $F_c = \mu_c N$: esse é o regime de atrito cinético, sendo que μ_c é o coeficiente de atrito cinético ou dinâmico entre as superfícies. Na tabela 4.1 são mostrados valores típicos de coeficientes de atrito estático e dinâmico para diferentes pares de superfícies polidas.

Tabela 4.1 - Valores de referência de coeficientes de atrito estático e dinâmico para diferentes pares de superfícies.

Superfícies	Coeficiente de atrito estático μ_e	Coeficiente de atrito cinético μ_c
Aço / aço	0,74	0,57
Alumínio / aço	0,61	0,47
Cobre / aço	0,53	0,36
Cobre / ferro doce	1,05	0,29
Vidro / vidro	0,94	0,40
Cobre / vidro	0,68	0,53
Teflon / Teflon	0,04	0,04
Teflon / aço	0,04	0,04
Borracha / concreto seco	1,00	0,80
Borracha / concreto úmido	0,30	0,25
Par de fitas Velcro	> 6,00	> 6,00

Fonte: Elaborada pelo compilador.

Nesta prática será determinado o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies de revestimento melamínico. O experimento consiste em apoiar um bloco de massa conhecida sobre um plano inclinado em um ângulo θ , que pode ser variado gradualmente. Aumentando o ângulo, a força de atrito, necessária para manter o bloco em repouso, aumenta. Acima de certo valor crítico θ_M , o bloco desliza, indicando que, para esse ângulo, foi atingida a máxima força de atrito que pode ocorrer nesse sistema, de acordo com a relação (5). Analisando a condição de equilíbrio sobre o bloco, na iminência de deslizar, é possível calcular $F_{A\max}$ e N e, assim, determinar μ_e . Na direção paralela ao plano, $F_{A\max}$ deve ser igual à componente do peso:

$$F_{A\max} = mg \operatorname{sen}(\theta_M) \quad (6)$$

Analogamente, na direção vertical, a reação do plano deve compensar a componente do peso:

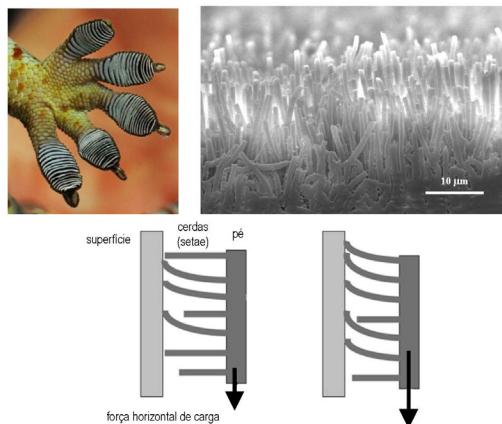
$$N = mg \operatorname{cos}(\theta_M) \quad (7)$$

Combinando essas relações com (5), é possível obter o coeficiente de atrito estático

$$\mu_e = \tan(\theta_M) \quad (8)$$

A Física e a Engenharia: adesivos inteligentes

Os adesivos mais eficientes, por exemplo, as colas ou a fita prateada, podem ser extremamente difíceis de remover ou deixam restos de material na superfície. Em contraste, os adesivos que podem ser removidos facilmente são os mais fracos, como por exemplo, fita durex sobre o vidro. No entanto, existe, na natureza, um modelo de adesão que combina alta resistência e remoção rápida e limpa: os pés das lagartixas da família gekkonidae. O tecido dos dedos possui uma camada de cerdas secas, de comprimento micrométrico, compostas de queratina, chamadas de *setae*, que se aderem às superfícies através de forças de **van Der Waals**, mas não entre elas. Quando a lagartixa se encontra numa superfície inclinada, a adesão é provida pelas cerdas apoiadas **paralelamente** à superfície, maximizando a área de contato. Quando a superfície é mais inclinada, a componente do peso, paralela ao plano, cresce e a tendência a deslizar é maior, mas também será maior a quantidade de *setae* que ficam deitadas sobre a superfície, aumentando a área de interação. Um pé de lagartixa, com área de 100 mm^2 , é capaz de suportar uma força máxima de 10N puxando paralela à superfície de contato, o que equivale a segurar verticalmente uma massa de mais de 1 Kg , da ordem de dez vezes a massa típica dessas lagartixas. No entanto, ela também deve ser capaz de se descolar rapidamente. Quando uma cerda é puxada **verticalmente** à superfície, a força requerida, para separar os elementos de área em contato, é mínima. O processo de descolamento do pé leva algumas dezenas de milissegundos, o que a permite se locomover com rapidez e pouco esforço.

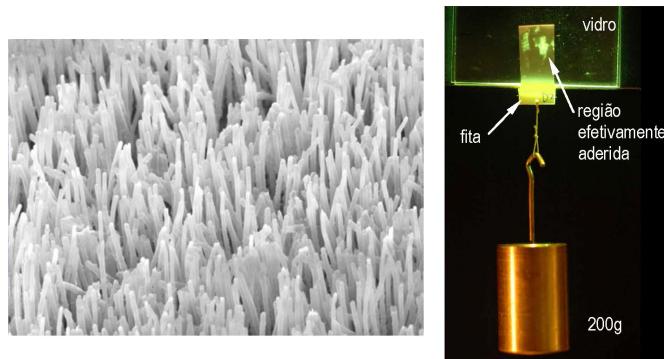


Fonte: Gecko project¹.

(continua)

A Física e a Engenharia: adesivos inteligentes (continuação)

A **Biomimética** é uma área multidisciplinar, envolvendo Ciências Biológicas, Exatas e Engenharia, que analisa estruturas presentes em organismos biológicos e tem a finalidade de replicá-las para resolver problemas em aplicações tecnológicas. Assim, os princípios do mecanismo de adesão das lagartixas estão sendo utilizados para desenhar fitas adesivas inteligentes, de grande capacidade de carga e rápida remoção. Esses produtos terão aplicação imediata nas indústrias aeroespacial, automotiva, robótica, defesa e inúmeros produtos de uso doméstico. A microfotografia mostra a superfície de uma dessas fitas, formada por fibras micrométricas de polipropileno, um polímero de baixo custo e alta estabilidade. A fita reproduz a estrutura e propriedades das *setae*. Um segmento de alguns centímetros quadrados dessa fita é capaz de fornecer adesão de massas da ordem de 1 Kg sobre superfícies lisas.



Fonte: Gecko project¹.

A fotografia à direita mostra uma fita de polipropileno, adherida a uma placa de vidro, segurando uma carga. Nela, as manchas brilhantes correspondem às regiões em que existe efetivamente adesão, com fibras orientadas, paralelas ao vidro. Pode-se observar que só uma fração da fita é necessária para segurar o peso, havendo, ainda, área de fibras disponíveis para fornecer mais adesão, caso a carga seja aumentada.

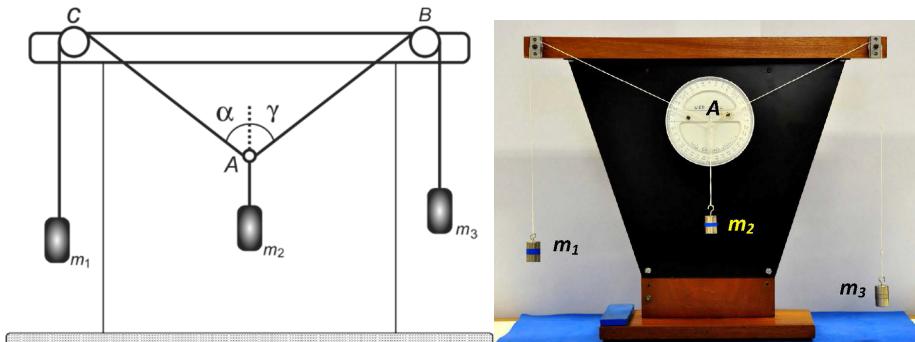
1 - Disponível em: <<https://robotics.eecs.berkeley.edu/~ronf/Gecko/>> Acesso em 09 mai. 2013

4.3 Parte experimental

Na figura 4.4 é mostrado o dispositivo para analisar a condição de equilíbrio de um sistema de três massas. Sobre o ponto A atuam três forças de tração das cordas e, aqui, pode ser aplicada a condição de equilíbrio (1). Se as polias podem girar livremente, as cordas simplesmente transmitem a tensão,

que deve ser igual ao peso da correspondente massa suspensa. Os ângulos α e γ podem ser medidos diretamente com um transferidor. Dispondo dos valores das massas e os ângulos, é possível verificar se a condição (1) é satisfeita sobre o ponto A, decompondo as forças em duas direções perpendiculares, por exemplo, a vertical e a horizontal.

Figura 4.4 - Sistema de duas polias equilibrando três massas suspensas. A condição de equilíbrio do sistema é aplicada ao ponto A.



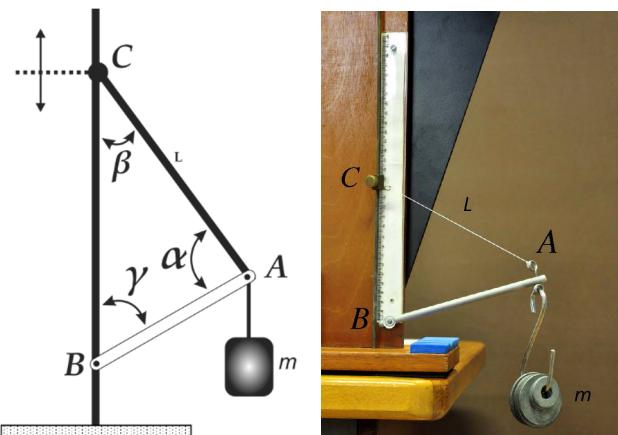
Fonte: Elaborada pelo compilador.

Na figura 4.5 é mostrado o dispositivo para medir a tensão de ruptura de um barbante de comprimento L . O barbante está tenso entre dois pontos: C, móvel sobre a haste vertical e A, no extremo de uma haste rígida. O ponto de fixação C pode se deslocar verticalmente sobre a haste vertical. A barra rígida BA pode girar ao redor do ponto B (fixo). Uma massa m fixa é suspensa no ponto A. Aplicando a condição de equilíbrio sobre o ponto A, é possível calcular a tensão T aplicada sobre o barbante. Usando a Lei dos Senos, aplicada ao triângulo de forças e ao triângulo geométrico formado pelo barbante e as hastes, obtém-se:

$$T = \frac{mgL}{CB} \quad (9)$$

Deslocando o ponto C para baixo, de forma de encurtar a distância \overline{CB} , a tensão sobre o barbante aumenta até, eventualmente, atingir o ponto de ruptura. Medindo o valor de \overline{CB} imediatamente antes da ruptura, é possível calcular o valor da tensão máxima suportada pelo barbante. Como o barbante tem certa elasticidade, o comprimento L varia com a tensão aplicada ao longo do experimento e, portanto, também deve ser medido antes da ruptura.

Figura 4.5 - Sistema para a medida da tensão de ruptura de um fio.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Questão: Demonstre a equação (9), considerando que a haste BA exerce forças ao longo de seu eixo longitudinal. Essa condição é válida quando a massa da haste é bem menor que a massa suspensa. Observe que o ângulo α , em geral, não é de 90° .

No terceiro experimento será medido o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies de revestimento melamínico, mediante a determinação da força de atrito máxima. Colocando um corpo sobre um plano inclinado, o ângulo

θ do plano com a horizontal será aumentado gradualmente, até atingir a condição de deslizamento.

4.3.1 Sistema de polias

- a) Suspenda três massas de valores conhecidos, com diferença de, pelo menos, 10g entre elas, usando o sistema mostrado na figura 4.4. Encontre a configuração estável afastando várias vezes o sistema do equilíbrio e observando o ponto de retorno. O sistema volta exatamente à mesma posição? Por quê?
- b) Na posição de equilíbrio mais provável, meça os ângulos α e γ .
- c) Desenhe quantitativamente (em escala), em papel milimetrado, os diagramas de corpo livre para o ponto A e o triângulo de forças nessa configuração, respeitando ângulos e módulos das forças.
- d) Supondo conhecer o valor da massa m_2 , calcule as tensões nas cordas T_{AB} e T_{AC} e os valores de m_1 e m_3 . Compare com os valores medidos diretamente para essas massas.
- e) Discuta cuidadosamente os resultados obtidos. Indique de que forma influenciaria, na determinação de m_1 e m_3 , a eventual ação de forças entre a corda e as polias. Resultariam em valores maiores, menores ou iguais, com relação à situação de ausência de forças?

4.3.2 Tensão de ruptura de uma corda

- a) Utilizando a montagem mostrada na figura 4.5, escolha uma massa m e fixe um comprimento L para o fio.

- b) No início, deverão ser feitos alguns testes preliminares para conferir se esses valores são adequados para atingir o rompimento do fio. Diminua gradativamente a altura do anel, inclinando a haste cada vez mais perto da horizontal, e verifique se o fio se rompe em algum ponto. Caso não ocorra a ruptura, volte à posição inicial, aumente a massa e repita o processo. Alternativamente, pode diminuir o comprimento do fio e testar novamente o processo.
- c) Havendo determinado condições apropriadas de massa m e comprimento L para o fio, realize agora o processo de medida definitivo. Determine a condição de ruptura pelo menos 5 vezes, registrando os valores de \overline{CB} e L imediatamente antes de cada ruptura.
- d) Calcule o valor médio de tensão de ruptura e determine a incerteza do conjunto de medidas.
- e) Para obter um valor de comparação para a tensão de ruptura da corda de forma independente, prenda o fio na vertical e aumente gradativamente a massa suspensa na extremidade inferior até o rompimento do fio. Repita várias vezes o procedimento e determine a tensão de ruptura e sua incerteza.
- f) Compare os resultados de ambos os processos. Os métodos são equivalentes? O valor da tensão de ruptura pode depender do método de determinação?

4.3.3 Coeficiente de atrito estático

- a) Escolha uma das faces do bloco de madeira e uma posição de apoio sobre o plano inclinado para colocar o corpo; mantenha ambas as

condições durante todo o experimento. Limpe cuidadosamente com álcool ambas as superfícies.

- b) Aumente lentamente a inclinação do plano e determine o valor crítico θ_M do ângulo de inclinação para o qual o bloco começa a deslizar. Repita o experimento pelo menos 20 vezes. Calcule o coeficiente de atrito estático utilizando a equação (8) para cada valor de θ_M .
- c) Calcule o valor médio de μ_e e determine sua respectiva incerteza.
- d) Mude o tipo de superfície de contato do bloco mantendo a mesma área. Isso pode ser feito, por exemplo, colando fita crepe sobre uma face do bloco. Repita os itens (b) e (c) e determine o novo valor de μ_e .
- e) Discuta os resultados obtidos em termos do tipo de superfície analisada.

Bibliografia

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física.** Vol. 1. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros.** Vol. 1. LTC.

Young, H. D.; Freedman, R. A.. **Sears and Zemanski Física I.** 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Prática 5: Conservação da energia mecânica

5.1 Objetivos

Nesta prática será estudada a energia mecânica (cinética, potencial elástica e potencial gravitacional) de um sistema massa-mola oscilando na direção vertical. Os comportamentos observados serão discutidos no contexto do teorema de conservação da energia mecânica.

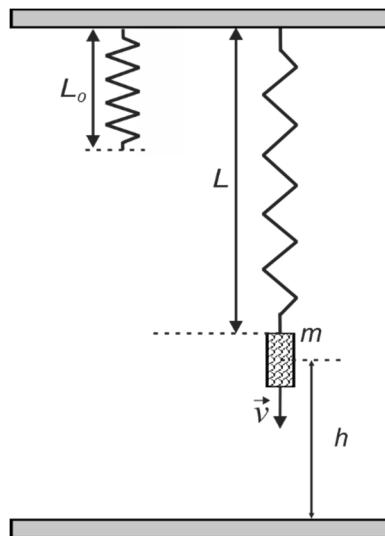
5.2 Introdução

A energia mecânica de uma partícula de massa m , sujeita a forças conservativas, pode ser descrita como a soma de duas contribuições: a energia cinética, $E_C = \frac{1}{2}mv^2$, e a energia potencial, E_P . Essa última está associada ao trabalho feito sobre a massa pelas forças conservativas atuantes no sistema.

Para um sistema massa-mola suspenso verticalmente, como mostrado na figura 5.1, atuam duas forças conservativas: a força peso e a força elástica produzida pela mola. Para o trabalho de cada uma dessas forças é possível associar um termo de energia potencial da partícula. A energia potencial gravitacional pode ser escrita como $E_G = mgh$, na qual h é a posição vertical da partícula medida desde uma altura de referência escolhida arbitrariamente, por exemplo, o solo do laboratório. A energia potencial elástica, associada à compressão/expansão da mola, é dada por $E_E = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$, em que k é a constante elástica da mola e $L - L_0$ é sua elongação, medida com relação ao seu comprimento L_0 sem carga. Portanto, a energia mecânica total da partícula para uma posição qualquer é dada por:

$$E = E_C + E_G + E_E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 \quad (1)$$

Figura 5.1 - Sistema massa-mola vertical. L_0 : Comprimento natural da mola sem carga. L : Comprimento da mola com o corpo suspenso. h : Altura do centro de massa do corpo.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Para calcular a energia é necessário adotar um referencial e determinar os valores das distâncias h e $L - L_0$, e da velocidade v . Na figura 5.1, é mostrado um referencial de coordenadas fixo com relação ao laboratório, com origem no solo e sentido positivo para cima. Na prática trabalharemos com um corpo rígido, em lugar de uma massa pontual. A altura e a velocidade v que devem ser utilizadas correspondem ao centro de massa do corpo.

Questão: Os referenciais recomendados para descrever problemas simples de mecânica são referenciais inerciais: aqueles que não estão acelerados. Seria conveniente nessa prática adotar um referencial fixo ao centro de massa do corpo suspenso da mola? Qual seria o problema?

5.2.1 Energia mecânica durante o movimento

Se a massa suspensa é afastada da posição de equilíbrio, por exemplo, sendo puxada para baixo, de forma a esticar a mola, e solta desde o repouso, o sistema realizará oscilações verticalmente. Nessa prática será medida a energia mecânica total do sistema massa-mola em duas posições diferentes durante a oscilação. A figura 5.2.a mostra uma configuração inicial com a mola esticada e a massa em repouso no solo, que pode ser atingida segurando a massa para compensar a força da mola. A energia mecânica total E_a do sistema nessa configuração é:

$$E_a = mgh_a + \frac{1}{2}k(L_a - L_0)^2 \quad (2)$$

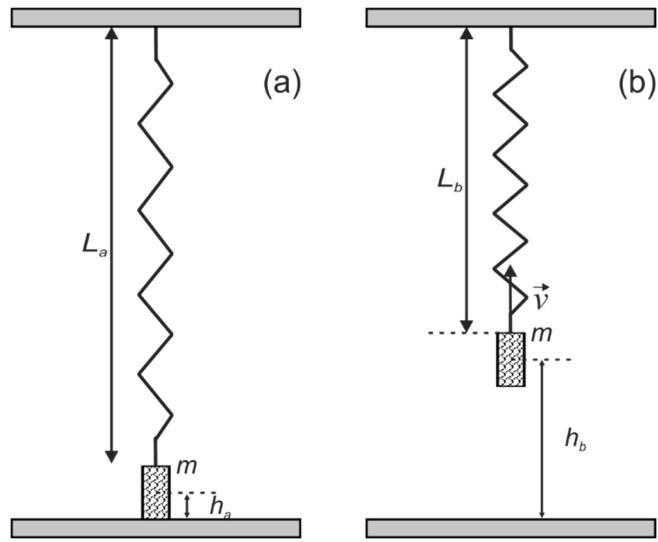
Se a massa for solta, a força da mola causará uma aceleração vertical. Em certo instante, para o estado mostrado na figura 5.2.b, a energia total será:

$$E_b = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_b + \frac{1}{2}k(L_b - L_0)^2 \quad (3)$$

em que v é a velocidade nesse instante. Caso não atuem outras forças sobre o sistema, a energia mecânica total deve se conservar, ou seja, $E_a = E_b$.

As energias, em ambas as configurações, podem ser determinadas em função da medida dos alongamentos da mola, das coordenadas e das velocidades do centro de massa do corpo e do valor da constante k da mola.

Figura 5.2 - Configurações para análise da energia mecânica do sistema massa-mola.
(a) Massa em repouso em contato com o solo. (b) Massa acelerada, após ser solta a partir da configuração mostrada em (a).



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Questão: Como seria possível determinar, pela simples observação do sistema, se a energia mecânica se conservou durante um período da oscilação? Poderia quantificar essa perda?

A Física e a Engenharia: armazenamento de energia mecânica

O armazenamento direto de energia mecânica é conhecido desde a Antiguidade. Um dos dispositivos de armazenamento mais simples é a compressão de uma mola. Nos relógios mecânicos, a operação de dar corda tensiona a mola principal (uma fita fina de metal enrolada em espiral) armazenando energia potencial elástica. Essa energia é liberada gradualmente sobre o sistema de engrenagens do relógio, convertendo-se em energia cinética de rotação das peças. Esse princípio está sendo considerado para projetar dispositivos concorrentes às baterias elétricas, usando conjuntos de nanotubos de carbono tensos para armazenar diretamente energia mecânica¹. Os nanotubos têm várias vantagens sobre os fios de metal: são imunes a ambientes corrosivos, não apresentam variação significativa das constantes elásticas com a temperatura e têm alto módulo de Young, da ordem de TPa. Para uma mesma massa, os nanotubos conseguem armazenar 1.000 vezes mais energia mecânica que molas de aço.



Fonte: seamasterreferencepage.com².

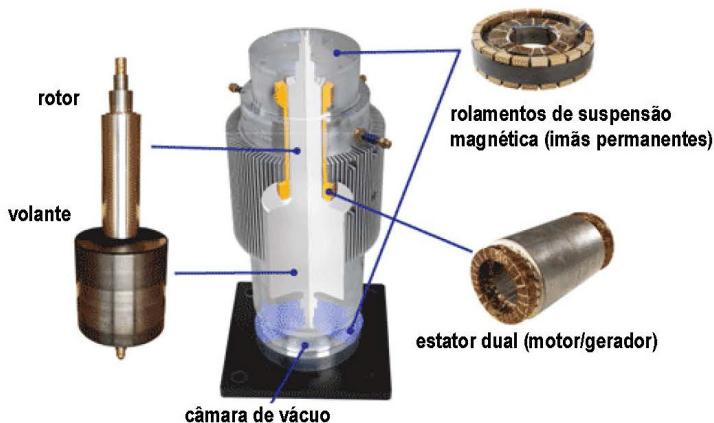
Outro dispositivo de armazenamento é o volante, um disco ou cilindro capaz de girar ao redor do seu eixo com alta velocidade. Os volantes são feitos de materiais de alta resistência mecânica (aço ou fibra de carbono), para suportar as altas forças de tensão na rotação e com rolamentos de baixo atrito (suspenção magnética). O agente de trabalho, por exemplo, o motor de um veículo fornece, ao volante, **energia cinética de rotação** durante períodos de operação de baixo consumo de potência. Quando for necessário, essa energia pode ser liberada, por exemplo, em um período no qual o motor não trabalha ou quando se deseja acelerar com potência acima da capacidade do motor. Assim, o volante funciona como um **capacitor de energia mecânica**.

(continua)

A Física e a Engenharia: armazenamento de energia mecânica (continuação)

Uma aplicação de enorme importância dos volantes é nos **freios regenerativos**, usados para aumentar a eficiência energética em veículos. Os freios convencionais dissipam energia: convertem a energia cinética do veículo em calor, por meio do atrito com a superfície do freio. Em contraste, nos veículos com freio regenerativo, a energia cinética das rodas é parcialmente transferida a um volante ficando, assim, disponível para ser devolvida quando for necessário acelerar. Esse princípio é usado rotineiramente em trens e, recentemente, aplicado em carros de competição e até bicicletas.

Sistema comercial de backup de potência elétrica usando um volante de aço (Vycom Energy)



Fonte: Critical Power Group³.

Os volantes podem ser usados, também, em sistemas de backup elétrico. Um motor ligado à rede elétrica coloca um volante maciço a girar. Quando o fornecimento de energia é cortado, o movimento do volante pode ser usado para gerar energia elétrica, usando o próprio motor, operando agora como gerador. Dessa forma, a energia cinética armazenada é reconverteada em energia elétrica. Para um volante comercial, com massa da ordem de 600 Kg, girando a 30.000 rpm, a energia armazenada é da ordem de 25 KW hora.

1 - Chandler, D. L.. **Small springs could provide big power.** Disponível em: <<http://www.web.mit.edu/newsoffice/2009/super-springs-0921.html>>. Acesso em: 15 jan. 2013.

2 - Disponível em: <<http://seamasterreferencepage.com/srp/featured/comparative-review-of-the-rolex-sea-dweller-vs-omega-planet-ocean/>> Acesso em 06 jan. 2016.

3 - Disponível em: <<http://criticalpowergroup.com/vycon-flywheel/>> Acesso em 15 jan. 2013.

5.3 Parte experimental

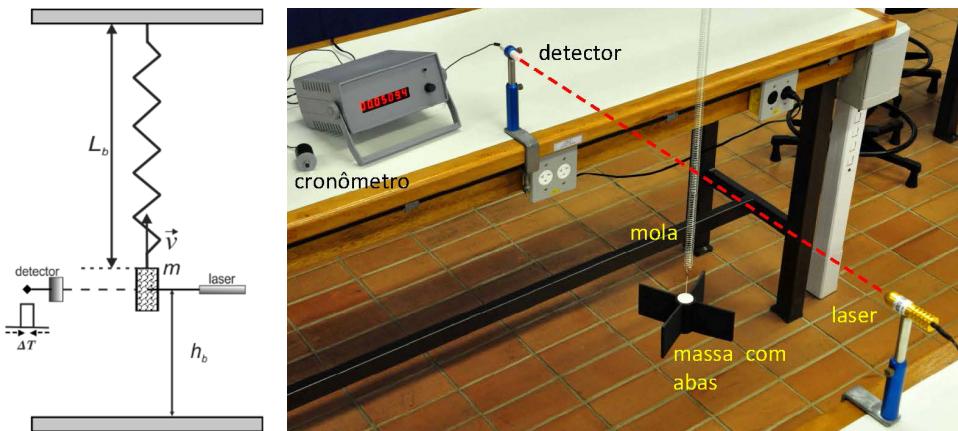
Para calcular a energia potencial elástica em um sistema massa-mola, é preciso conhecer a constante de força k da mola e seu comprimento natural L_0 . Esses parâmetros podem ser determinados experimentalmente, medindo o comprimento da mola L para diferentes valores de pesos suspensos a partir de sua extremidade livre. Dentro do limite de resposta elástica da mola, a relação observada deve ser de tipo linear:

$$P = k(L - L_0) \quad (4)$$

Do gráfico de P por L é possível determinar os parâmetros desejados: a inclinação é a constante k , e o ponto onde a reta corta o eixo horizontal ($P = 0$) corresponde a $L = L_0$.

Além disso, em uma das configurações que será utilizada no experimento (figura 5.2.b), será necessário medir a velocidade v do corpo, para poder calcular a contribuição da energia cinética. A figura 5.3 mostra a montagem do sistema massa-mola que será utilizado na prática. O corpo suspenso é um cilindro de comprimento D , com abas de borracha. A certa altura h_b , em relação ao solo, é posicionado um feixe laser, que incide sobre um sensor óptico acoplado a um cronômetro digital. Quando o corpo interrompe o feixe de luz, o cronômetro se ativa e mede a duração Δt da interrupção. A velocidade média durante esse intervalo pode ser calculada como $\bar{v} = \frac{D}{\Delta t}$. Se D e Δt são suficientemente curtos, considera-se que a velocidade média é uma boa aproximação da velocidade instantânea, ou seja, $\bar{v} \cong v$.

Figura 5.3 - Dispositivo para a medida de velocidade média da massa na configuração mostrada na figura 5.2.b.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

5.3.1 Parâmetros da mola

- É conveniente começar aplicando a máxima deformação que a mola experimentará durante toda a prática. Depois disso, não ultrapasse esse limite!
- Determine quais serão os extremos de referência para medir os comprimentos da mola e mantenha esse critério em todas as medidas. Use pontos que não dependam do comprimento do objeto pendurado, que pode ser diferente na parte 4.2. Mantenha a trena aprumada durante as medidas. Decida se o gancho será parte da mola ou da carga e mantenha essa escolha durante todo o experimento.
- Carregue a mola com pesos P diferentes e registre os respectivos alongamentos L . Não deixe a mola carregada com peso mais tempo do

que o necessário para registrar o comprimento. Colete uma dezena de pares de valores ($L; P$).

- d) Faça um gráfico de P , em função de L , e trace a melhor reta que represente o conjunto de dados. Dos coeficientes da reta, determine a constante de força k da mola e seu comprimento natural L_0 . Use unidades do sistema internacional para todas as grandezas.

5.3.2 Medida da energia mecânica

- a) Determine cuidadosamente a direção da vertical, a partir do ponto de suspensão da mola até o chão. Utilize uma marca de fita crepe para marcar esse ponto no chão; isto servirá de referência para posicionar a massa na configuração *a* (figura 5.2.a).
- b) Meça os parâmetros geométricos relevantes para calcular L e h nas duas configurações *a* (figura 5.2.a) e *b* (figura 5.2.b), supondo que a referência da energia potencial gravitacional está no nível do solo.
- c) Soltando o corpo, em repouso, a partir do chão, meça o tempo de obstrução quando o mesmo passa pelo laser e determine a velocidade v .
- d) Para avaliar a incerteza de v , repita o experimento partindo sempre das mesmas condições iniciais e faça uma estatística com seus resultados.
- e) Calcule as energias com seus respectivos erros.
- f) Determine se há conservação da energia mecânica entre as configurações *a* e *b*. Existe uma diferença mensurável acima dos erros experimentais? Lembre dos critérios de comparação de grandezas com erros apresentados no capítulo 1.

- g) Repita os itens (e) e (f) supondo, agora, que a referência de energia potencial gravitacional está no nível do laser. O que é que muda nos resultados pela troca de referência? Quais resultados e conclusões não mudam?

Bibliografia

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física.** Vol. 1. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros.** Vol. 1. LTC.

Young, H. D.; Freedman, R. A.. **Sears and Zemanski Física I.** 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Prática 6: Colisões unidimensionais

6.1 Objetivos

Serão estudadas as quantidades de movimento e a energia cinética de corpos em colisão para movimento unidimensional, utilizando um trilho de ar para minimizar o efeito do atrito.

6.2 Introdução

O *momento linear* ou *quantidade de movimento* de uma partícula é um vetor \vec{p} definido como o produto de sua massa m pela sua velocidade \vec{v} :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1)$$

Mas a 2^a Lei de Newton diz que:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (2)$$

e, portanto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3)$$

em que \vec{F} é a resultante das forças externas que atuam sobre a partícula. Quando $\vec{F} = 0$, o momento linear da partícula permanece constante

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante} \quad (4)$$

Essa última condição corresponde à *conservação da quantidade de movimento*.

Para sistemas compostos de várias partículas, a quantidade de movimento total é simplesmente a soma dos momentos de cada uma. Assim, para o experimento realizado nessa prática, no qual haverá duas partículas colidindo, o momento linear total é:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (5)$$

e a equação fundamental para momento do sistema resulta em:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (6)$$

Nesse caso, \vec{F} é a resultante das forças externas atuando sobre as partículas.

6.2.1 Colisões entre duas partículas: impulso e força média

No caso do choque entre duas partículas, elas exercem mutuamente forças de contato de intensidade idêntica e sentidos opostos, pois formam um par de forças de reação, tal como mostrado na figura 6.1. De acordo com a equação (3) cada uma dessas forças vai mudar a quantidade de movimento de cada partícula:

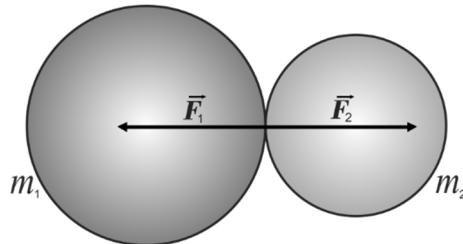
$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad (7a)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (7b)$$

Portanto, a quantidade de movimento de cada partícula não se conserva como resultado da colisão. Porém, se considerarmos o sistema formado pelas *duas* partículas, as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são internas e, se a resultante de eventuais forças externas for nula, a quantidade de movimento total será conservada

durante a colisão: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}$. O valor de \vec{P} será sempre o mesmo, calculado antes ou depois do choque.

Figura 6.1 - Duas massas em colisão experimentam a ação de forças de contato \vec{F}_1 e \vec{F}_2 iguais e opostas, atuando respectivamente sobre as massas m_1 e m_2 .



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Para caracterizar o quanto mudou a quantidade de movimento de cada partícula no processo de colisão, define-se o impulso \vec{I} como a diferença entre as quantidades de movimento antes e depois da colisão:

$$\vec{I}_1 = \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1_FINAL} - \vec{p}_{1_INICIAL} \quad (8a)$$

$$\vec{I}_2 = \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2_FINAL} - \vec{p}_{2_INICIAL} \quad (8b)$$

Para o sistema total não há variação de momento e, portanto, o impulso recebido deve ser nulo: $\vec{I} = 0$. Portanto, em um colisão, o momento ganho por uma partícula está associado à perda de momento pela outra: $\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$.

Os impulsos também podem ser calculados de uma forma diferente, usando a operação de integração aplicada às equações (6) ou (7). Tomando qualquer uma dessas equações, é possível integrar ambos os lados em relação à variável tempo:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt \quad (9)$$

em que os tempos extremos na integração são os instantes de início t_i e fim t_f da colisão. Assim:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \vec{p}_{FINAL} - \vec{p}_{INICIAL} \quad (10)$$

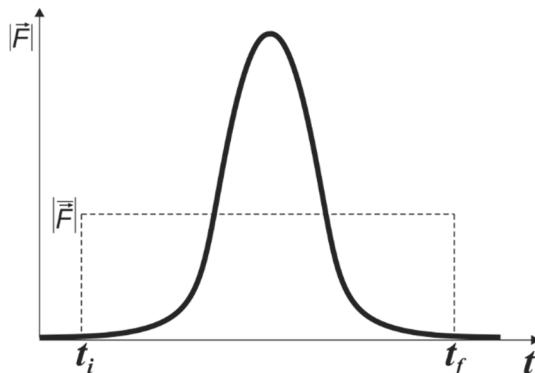
De acordo com a definição de impulso, essa última equação mostra que:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \quad (11)$$

É útil lembrar, aqui, que a integral de uma função pode ser interpretada graficamente como a área embaixo da curva integrada. Assim, se considerarmos a força atuante sobre um corpo durante uma colisão, que têm uma variação temporal como mostrada na figura 6.2, o impulso associado será a área embaixo do gráfico.

Do ponto de vista prático, conhecer a variação da força de contato durante uma colisão é um assunto de interesse nos projetos de objetos resistentes a impactos, por exemplo, automóveis, aeronaves, ou equipamentos de proteção pessoal (capacetes, coletes balísticos, protetores esportivos, tênis de corrida, etc.), mas que pode ser complicado de se determinar experimentalmente.

Figura 6.2 - Representação esquemática da variação da força de contato, em função do tempo, durante uma colisão de duração $\Delta t = t_f - t_i$. Linha tracejada: força média equivalente.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

Para certos projetos, entretanto, é suficientemente útil considerar uma força média \bar{F} , definida como uma força constante capaz de entregar o mesmo impulso sobre o corpo durante o tempo $\Delta t = t_f - t_i$ que dura a colisão:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \bar{F} \int_{t_i}^{t_f} dt = \bar{F} \Delta t \quad (12)$$

Dessa equação é possível obter a força média, caso se conheça a duração do choque.

$$\bar{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} \quad (13)$$

No gráfico da figura 6.2, a força média corresponde ao retângulo que possui a mesma área que a curva de força.

Questão: Para o mesmo valor de impulso, transmitido no choque, em que há maiores forças sobre o corpo, quando a colisão dura pouco ou muito tempo?

6.2.2 Velocidades e referenciais

O momento linear, sendo proporcional à velocidade, depende do referencial a partir do qual o observador descreve o movimento. A escolha mais simples, do ponto de vista experimental, é um referencial em repouso com relação ao laboratório. Os dados de velocidade que serão coletados nessa prática serão medidos nesse referencial, simplesmente observando a distância percorrida pelo objeto e medindo o tempo.

No entanto, outro referencial importante para se analisar a conservação da quantidade de movimento é o referencial do *centro de massa do sistema* de partículas. A velocidade do centro de massa de um sistema de duas partículas é definida como:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (14)$$

Essa velocidade corresponde a um ponto imaginário que concentra toda a massa do sistema e se desloca com a mesma quantidade de movimento total:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm} \quad (15)$$

Se a resultante das forças externas é nula, o centro de massa possui velocidade constante.

Para um observador viajando junto com o centro de massa do sistema, as velocidades medidas para as partículas 1 e 2, \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , respectivamente, seriam diferentes das observadas a partir do referencial do laboratório. A relação entre as velocidades medidas, nesses referenciais, está dada pela transformação de Galileu:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} \quad (16a)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} \quad (16b)$$

Uma questão fundamental com relação aos referenciais é que, ainda que os *valores* de algumas grandezas físicas (velocidade, quantidade de movimento, impulso, energia cinética) sejam diferentes, *as leis físicas devem ser as mesmas* (por exemplo, a equação de movimento (3), o princípio de conservação da energia, etc.). A Física não faria sentido nenhum se as leis mudassem de acordo com o referencial.

6.2.3 Energia cinética para um sistema de partículas em colisão

A conservação da quantidade de movimento, na colisão, é um comportamento geral que depende, apenas, do fato das forças externas terem resultante nula. Outra propriedade de interesse, durante a colisão, é a energia cinética total do sistema de partículas. Seria importante saber se essa grandeza também se conserva nessas condições. No entanto, o princípio de conservação da energia mecânica, discutido na Prática 4, estabelece que, na ausência de forças externas que exerçam trabalho sobre o sistema, o que se conserva é a energia mecânica total:

$$E_{\text{Cinética}} + E_{\text{Potencial}} = \text{constante} \quad (17)$$

Em uma colisão de corpos livres, que se movimentem sempre na mesma altura em relação ao chão, não há variação de energia potencial e, de acordo com a equação (17), a energia cinética total também deverá se conservar. No entanto, se na colisão ocorre deformação permanente de um dos corpos ou aquecimento, então, haverá uma diminuição da energia cinética total; parte da energia mecânica é transformada em trabalho de deformação e em energia térmica. *Portanto, em geral, a energia cinética não se conserva em uma colisão;* dependerá da natureza dos corpos.

De acordo com esse comportamento, os choques podem ser classificados nas categorias indicadas na tabela 6.1. Exclusivamente nas colisões perfeitamente elásticas, não existe deformação nem aumento de temperatura dos corpos. Para quantificar a perda de energia cinética, define-se o *coeficiente de restituição* e , que relaciona as *velocidades relativas entre os corpos*, antes e depois do choque:

$$e = \frac{v_{R\text{final}}}{v_{R\text{inicial}}} \quad (18)$$

definindo a velocidade relativa (do corpo 2 com relação ao 1) como:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (19)$$

Na Tabela 6.1 é mostrado o comportamento do coeficiente de restituição nos três tipos de colisão.

Tabela 6.1 - Classificação dos tipos de colisão em função da variação da energia cinética total e comportamentos do coeficiente de restituição e da quantidade de movimento total.

Colisão	Energia cinética	Coeficiente de restituição	Quantidade de movimento
Perfeitamente elástica	Conserva	$e = 1$	Conserva
Parcialmente elástica	Diminui	$0 < e < 1$	Conserva
Perfeitamente plástica	Máxima diminuição	$e = 0$	Conserva

Fonte: Elaborada pelo compilador.

A Física e as Engenharias Mecânica, Computacional e de Produção: forças de impacto em colisões de veículos

Um veículo colidindo com um obstáculo recebe forças intensas de reação que transferem impulso e causam sua desaceleração. Conhecer a grandeza dessas forças de impacto é fundamental no projeto de segurança do veículo. Supondo uma colisão frontal contra um obstáculo rígido e que o veículo fica em repouso após o choque, o trabalho W_F feito pelas forças externas deve ser igual à variação da energia cinética: $W_F = -\frac{mv_0^2}{2}$, sendo v_0 a velocidade inicial.

Em um **modelo simplificado da colisão**, o carro sofrerá uma deformação de comprimento D na direção de movimento. O trabalho da força de impacto pode ser calculado supondo que durante a colisão atua uma força média F constante: $W_F = -FD$. Pela Lei de Newton, a aceleração média experimentada pelo carro resulta em $a = \frac{F}{m}$, e a duração da colisão pode ser calculada da variação da quantidade de movimento: $\Delta t = \frac{mv_0}{F}$. Como exemplo, para um carro de 2000 Kg se deslocando a 50 Km/h que experimentou uma deformação média de 30 cm, a energia entregue ao carro na colisão foi de 193 KJ, a força média foi 640 KN, a desaceleração foi 33 g (33 vezes a aceleração da gravidade g), e a colisão durou um tempo 43 ms.

O projeto dos carros modernos prevê que essa energia seja dispersada na deformação das partes do veículo, preservando um perímetro rígido de proteção ao redor dos passageiros. Esse é o conceito de **crumple zone**, patenteado em 1952 pelo engenheiro Béla Barényi da Daimler-Benz. Usando os conceitos de mecânica mostrados acima, é possível avaliar a força que atua sobre um passageiro do carro. A estratégia para minimizar o dano corporal é reduzir a força média, o que equivale a uma desaceleração mais lenta e uma maior distância de freado para o corpo. Se o passageiro está usando um cinto de segurança que possua uma certa elasticidade, durante a colisão avançará uma distância d até ficar em repouso. Supondo $d = 50$ cm e uma massa corporal de 60 Kg, calcula-se que $F = 12$ N, $a = 20$ g , e $\Delta t = 72$ ms. Caso a pessoa não esteja usando cinto de segurança, a desaceleração acontecerá através do impacto com alguma parte do carro (volante, painel, para-brisas, banco, outros passageiros), ou com um objeto externo. Se assumirmos uma distância de freado no processo de impacto $d = 5$ cm, resulta $F = 116$ KN, $a = 200$ g e $\Delta t = 7$ ms. Nesse caso, a força sofrida é 10 vezes maior, o que aumenta as chances de ferimentos graves.



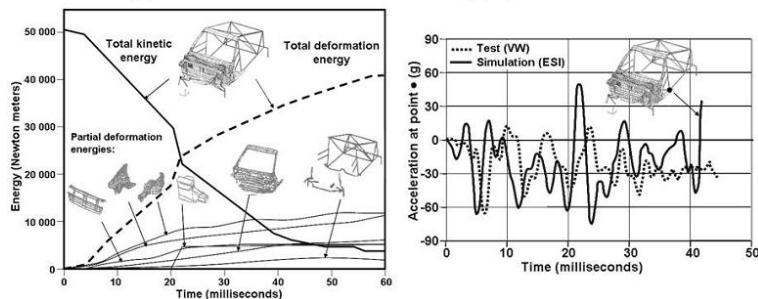
Fonte: LATIN NCAP¹.

1 - Disponível em: <<http://www.latinncap.com>>. Acesso em 06 jan. 2016.

(continua)

A Física e as Engenharias Mecânica, Computacional e de Produção: forças de impacto em colisões de veículos (continuação)

Nas figuras são mostrados resultados de uma **simulação computacional** da colisão de um carro (VW Polo) incidindo com velocidade de 50 Km/h contra uma barreira de concreto rígida. O modelo computacional aplica as equações da mecânica para elementos finitos do veículo, levando em consideração as propriedades dos materiais que compõem as peças (**densidade, módulos de elasticidade, resistência, ruptura**). A figura à esquerda mostra o decréscimo da energia cinética (linha cheia) e o aumento da energia transferida para deformação das partes (linha tracejada). Os traços de linhas contínuas finas mostram as energias de deformação por segmentos do carro (para-choque, laterais, motor, chassi e estrutura). Observe que esta última parte mostra a menor absorção de energia, o que é desejado para manter a integridade do compartimento de passageiros. Na figura à direita é mostrada também a aceleração de um ponto da cabine do carro (círculo preto) durante o choque. A curva contínua é o resultado da simulação e a curva tracejada é a medida experimental em um teste destrutivo. Ambos os resultados revelam um comportamento oscilante, com valor médio da ordem de 30 g, coerente com o valor médio calculado através do modelo simplificado.



Fonte: Wikipedia¹.

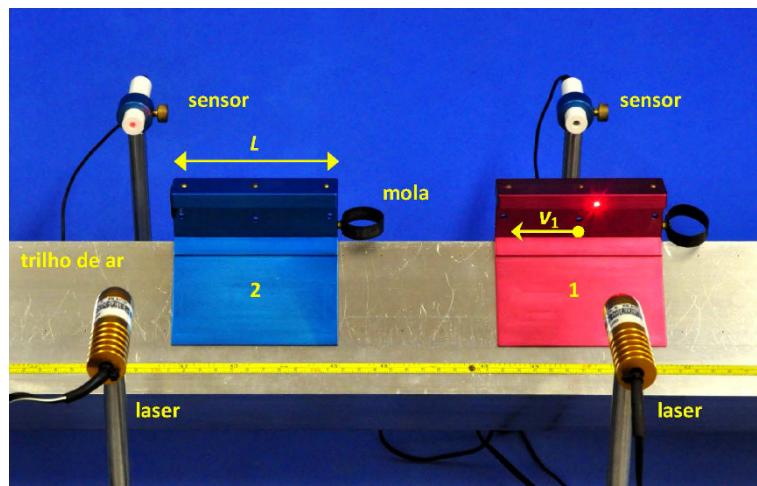
- De acordo com o gráfico de absorção de energia, quais são as peças com maior deformação? Por quê?
- A quarta curva assinalada, desde a esquerda, mostra a absorção de energia pelo conjunto do motor. O comportamento em função do tempo é bem diferente das outras. Explique qualitativamente o porquê.
- Considerando os dados de aceleração, em função do tempo mostrado na figura, como poderia ser calculada rigorosamente a força média atuando durante a colisão?

1 - Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Crash_simulation>. Acesso em 15 jan. 2013.

6.3 Parte experimental

As colisões serão realizadas utilizando um trilho de ar e carrinhos deslizantes para minimizar o efeito da força de atrito entre as superfícies, garantindo a conservação da quantidade de movimento. O trilho de ar, mostrado na figura 6.3, é formado por um tubo de perfil quadrado com pequenas furações na superfície. Um compressor injeta ar desde um extremo do tubo. Os carrinhos deslizantes possuem duas chapas de aço em V para receber o empuxo do ar desde a parte inferior, ficando suspensos sobre um colchão de ar.

Figura 6.3 - Trilho de ar para estudar colisões unidimensionais. Carrinho 1: incidente com massa m_1 velocidade inicial v_1 . Carrinho 2: massa m_2 inicialmente em repouso. A posição da mola no carrinho 2, enfrentando o carrinho 1, indica que a colisão será aproximadamente elástica.



Fonte: Elaborada pelo compilador.

As velocidades são calculadas a partir da medida do tempo de obstrução t de um feixe de laser pela passagem do carrinho de comprimento L . Um sensor

óptico acoplado a um cronômetro digital mede esse tempo. Dois sensores e cronômetros idênticos estão fixados, a fim de medir os tempos de ocultamento de um carrinho antes e depois da colisão.

Os carrinhos possuem, em um dos extremos, um anel feito com fita de aço, atuando como uma mola. Se a mola bater suavemente contra o extremo rígido do outro carro, a colisão resultante é muito próxima da situação elástica. Colando um fragmento de massa de calafetar, é possível obter uma colisão perfeitamente plástica, ficando ambos os carrinhos grudados após o choque.

6.3.1 Choque elástico entre dois corpos de massas iguais

- a) Identifique dois carros como 1 e 2, e meça suas respectivas massas e comprimentos.
- b) Verifique o alinhamento dos lasers com os sensores ópticos e prepare os cronômetros para registro dos tempos.
- c) Coloque um carrinho (2) em repouso numa posição entre os dois feixes laser.
- d) Sobre o trilho de ar, dê um impulso suave sobre o carrinho 1 para bater contra o carrinho 2, de maneira que a mola do 1 bata com a parte rígida do 2.
- e) Registre os tempos de passagem, pelo feixe de laser, de cada carro, antes e depois do choque.
- f) Calcule as velocidades e quantidades de movimento dos carros, antes e depois do choque, considerando o referencial do laboratório.

- g) Calcule a variação percentual da quantidade de movimento do sistema com relação ao valor antes da colisão: $\Delta P(\%) = 100 \frac{|P_i - P_f|}{P_i}$. Discuta se essa variação é significativa comparada com a incerteza percentual provável desse experimento (faça as estimativas que considerar razoável). Determine se ocorre conservação da quantidade de movimento.
- h) Determine o impulso sofrido por cada carro e o impulso total sofrido pelo conjunto, do ponto de vista de um observador situado no referencial do laboratório. Discuta esse resultado.
- i) Calcule as energias cinéticas do sistema, antes e depois do choque, e o coeficiente de restituição e . Calcule a variação percentual da energia e compare com a incerteza percentual provável nesse experimento. Determine se a energia cinética se conserva e classifique o tipo de choque.
- j) Considerando que o choque ocorre em um intervalo de tempo $\Delta t = 1\text{ ms}$, determine, com a equação (13), a força média que atua em cada carro durante a colisão.
- k) Calcule a velocidade do centro de massa antes e depois do choque. Os resultados são compatíveis com a conservação da quantidade de movimento?
- l) Recalcule as grandezas dos itens (f) até (i) para um observador situado no referencial do centro de massa do sistema. Os resultados são compatíveis com os obtidos no referencial de laboratório?

6.3.2 Choque plástico entre dois corpos de massas iguais

- a) Cole um fragmento pequeno de massa de calafetar no extremo rígido do carrinho 2, inicialmente em repouso. Dê um impulso suave sobre o carrinho 1 para bater contra o carrinho 2, de maneira que o extremo rígido do 1 bata com a parte rígida do 2. Verifique que ambos fiquem grudados após a colisão.
- b) Verifique cuidadosamente qual é o comprimento de passagem que efetivamente bloqueia o feixe laser (L , $2L$ ou outro).
- c) Repita o processamento e analise o indicado nos itens (a) até (i) do experimento anterior.

Bibliografia

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física.** Vol. 1. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros.** Vol. 1. LTC.

Young, H. D.; Freedman, R. A.. **Sears and Zemanski Física I.** 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.