幾何学勉強 PDF

K.R.

2024 12/5

Part I

Photon Surface

§1　曲面論

1.1　埋め込み

部分多様体は埋め込みでなくてはいけないので，埋め込みの定義と例を復習しよう．

1.1.1　定義

Def. 1.1.1 (埋め込み). 位相空間 (X, T) から位相空間 (Y, S) への**埋め込み**とは，X から Y の部分空間への同相写像である．つまり，X から Y への埋め込みとは，写像 $f : X \to Y$ であって $(f[X], S_{f[X]})$ が (X, T) と同相となるものである．

特に，以下の性質を満たす．

1. 埋め込みは連続
2. 埋め込みは単射

1.1.2　例

Ex. 1.1.2. 例. $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ および $T = 2^X = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $S = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 1\}, Y\}$ とする．

$(f(1), f(2)) = (1, 2)$ で定まる写像 f は (X, T) から (Y, S) への埋め込みである．

一方，$(f(1), f(2)) = (2, 1)$ で定まる異なる写像 f は，$f^{-1}[\{1\}] = \{2\}$ を満たし，連続写像ではないので埋め込みでもない． ∎

Ex. 1.1.3. 例. n 次元 実数 空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ は $(n+1)$ 次元 実数 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ において，超平面

$$P = \{(x_j)_{j=1}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \text{ and } \forall j \in \{1, \ldots, n\}, x_j \in \mathbb{R}\}$$

として埋め込まれる．ただし，ここで埋め込みは 包含写像 $\iota \colon P \to \mathbb{R}^{n+1}$. ∎

Ex. 1.1.4. 例. 直前の例で 次元の組 $(n, n+1)$ を 一般に $(m, n)\,(m \leq n)$ としても同様に埋め込みが成り立つ． ∎

1.2　Immersion

可微分多様体の部分多様体ははめ込みでなくてはいけないので，はめ込みとはなにか確認しよう．

> Setup:
>
> - M: m 次元 C^r 級 (可微分) 多様体
> - N: n 次元 C^r 級多様体
> - ϕ: $M \to N$: C^r 級 (可微分) 写像
> - $C_p^r(M)$: 点 $p \in M$ の近傍で定義される C^r 級写像

Def. 1.2.1 (微分). 可微分写像 ϕ の微分 $d\phi \equiv \phi_*$ は以下のように定義される．すなわち，接ベクトル v_p と 可微分写像 ϕ から定まる写像 $\tilde{v}_{\phi(p)}$ を，(F の ϕ による) 引き戻し $\phi^* F \coloneqq F \circ \phi$: $M \to \mathbb{R}$ を用いて

$$\tilde{v}_{\phi(p)}(F) \coloneqq v_p(\phi^* F), \quad \forall v_p \in T_p M, \forall F \in C^r_{\phi(p)}(N) \tag{1.2.1}$$

のように定める．すると $\tilde{v}_{\phi(p)}$ は N の 点 $\phi(p)$ における接ベクトルとなる (参考: Arai, p188)．そこで 以上の対応を $(d\phi)_p(v_p) \coloneqq \tilde{v}_{\phi(p)} \in T_{\phi(p)}N$ と 書き，写像 $(d\phi)_p \equiv (\phi_*)_p$: $T_pM \to T_{\phi(p)}N$ を ϕ の点 p における **微分** または **押し出し** とよぶ.

すべて書き下すと，

$$(d\phi)_p(v_p)(F) = v_p(F \circ \phi), \quad \forall v_p \in T_p M, \forall F \in C^r_{\phi(p)}(N) \tag{1.2.2}$$

のように書ける．

Ex. 1.2.2. C^∞ 級関数 $\phi(x) = (x, x^2)$ (ϕ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (x, x^2)$) の微分を求める．Euclid 空間におけるデカルト座標の偏微分は前提されているとする．任意の点 $x \in \mathbb{R}$ について $F \in C^\infty_{\phi(x)}(\mathbb{R}^2)$ の ϕ による引き戻し をとると $(\phi^* F)(x) = F\left(x, x^2\right)$．次に点 $x \equiv a \in \mathbb{R}$ での接ベクトル $v_a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_x$ の引き戻しに関する値を計算すると，

$$\frac{\partial(\phi^* F)}{\partial x}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F\left(x+h, (x+h)^2\right) - F\left(x, x^2\right)}{h}, \tag{1.2.3}$$

分母に $-F\left(x+h, x^2\right) + F\left(x+h, x^2\right)$ を足すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi^* F)}{\partial x}(x) &= \lim_{h \to 0} \left[\tfrac{F\left(x+h,(x+h)^2\right) - F\left(x+h,x^2\right)}{(x+h)^2 - x^2} \tfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \tfrac{F\left(x+h,x^2\right) - F\left(x,x^2\right)}{h} \right] \\ &= 2x \, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\bigg|_{(y=x^2)} + \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\bigg|_{(y=x^2)}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

よって，ϕ の微分は $(d\phi)_a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(a,a^2)} + 2x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(a,a^2)}$ によって定まる． ∎

Remark. 1 次微分形式 $d\phi = dx + 2xdy$ とは似て非なるものである．

このように，押し出し (微分) は，写像を取った後の点で接ベクトルを求めるために，合成関数の微分 (chain rule) を適用しているような，自然な定義になっている．

Def. 1.2.3 (はめ込み). M 上のすべての点で ϕ の微分が単射であるとき，写像 ϕ を M から N への **はめ込み** という．すなわち，はめ込み ϕ について，

$$\forall p \in M, \forall v_1, v_2 \in T_p M, (d\phi)_p(v_1) = (d\phi)_p(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2. \tag{1.2.5}$$

Ex. 1.2.4. 前の例の $\phi(x) = \left(x, x^2\right)$ ははめ込みである．(グラフを書けばわかる) ∎

Ex. 1.2.5. 直線から円への写像 $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ ははめ込みである．なぜなら $(d\phi)_t(\partial_t)_t = \cos t\,(\partial_x)_{\phi(t)} + \sin t\,(\partial_y)_{\phi(t)}$ は接空間の間の同型を定めているから，特に単射である．(参考: 藤岡 幾何学 4, p. 1) ∎

Ex. 1.2.6. 曲線 $\phi(x) = \left(x^2, x^3\right)$ ははめ込みではない．なぜなら，微分 $(d\phi)_a(\partial_x)_a = 2a(\partial_x)_{\phi(a)} + 3a^2(\partial_y)_{\phi(a)}$ は 点 $a = 0$ 上で $(d\phi)_a[T_a\mathbb{R}] = \{0\}$ を満たし，単射ではないからである． ∎

Ex. 1.2.7. 上の例を一般化すると，正則な曲線 $\gamma(t)$ s.t. $(\gamma'(t) \neq 0)$ ははめ込みである． ∎

はめ込みは局所的な埋め込みと解釈できる．可微分多様体では，埋め込みといったら はめ込みである条件を付け加える．

Def. 1.2.8 (可微分多様体への埋め込み). はめ込みであり，かつ位相空間の間の (微分同相な) 埋め込みでもある写像を，(可微分多様体の間の) **埋め込み** と呼ぶ．

ただし，埋め込みを単に単射なはめ込みと定義することもある．

Def. 1.2.9 (部分多様体). 包含写像 $\iota\colon M \to N$ が埋め込みであるとき，M は N の **部分多様体** であるという．

Ex. 1.2.10. $(M, N) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (ただし $M \subsetneq N$ とみなす) について，包含写像 $\iota\colon M \to N$ は 接空間の間の包含写像 $\partial_1 \mapsto \partial_1, \ldots, \partial_m \mapsto \partial_m$ を定め，これは単射なので M は N の部分多様体といえる． ∎

1.3 第 1 基本形式と第 2 基本形式

Gauss 幾何学における 2 つの基本形式を定め，それらを計量付き多様体に一般化したものを説明する．構図をまとめておくと，

第 1 基本形式 = 曲面上の “長さ”,　　第 2 基本形式 = 曲面上の “2 次微分”

第 1 基本形式は曲面上の “長さ” を表しており，計量の符号が不定である場合にも計量を用いて 同じように拡張される．(よって Riemann 幾何学以降では 第 1 基本形式ではなく単に計量と呼ぶことが多い)

Def. 1.3.1 (第 1 基本形式). Gauss 幾何学における第 1 基本形式は接平面上のベクトルの計量の値と等しい．C^r 級多様体 M 上のベクトル $\partial_\mu := \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_pM$ を使って，計量 g によって第 1 基本形式 が

$$f^{(1)}_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) :\Leftrightarrow f_{\mu\nu}(p) = g_p\left((\partial_\mu)_p, (\partial_\nu)_p\right) \quad (p \in M) \tag{1.3.1}$$

と定義される．または M 上のベクトル場 X, Y に対して一般に，

$$f^{(1)}(X, Y) = g(X, Y). \tag{1.3.2}$$

Ex. 1.3.2. 2 次元 Euclid 空間に埋め込まれた C^1 級曲線 (グラフ)

$$M = \{(x, f(x)) | x \subseteq U \in O(\mathbb{R})\} \tag{1.3.3}$$

(ただし $O(\cdot)$ は自然な位相) を例に取る．点 $p = (x, f(x)) \in M$ における $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル $(1, f'(x)) \in T_p\mathbb{R}^2$ は M 上の接ベクトルでもある．つまり，実数のパラメータ u を $\mathbb{R}^2$ における x 座標とすると，$\partial_u = \partial_x + f'(x)\partial_y$ が得られる．この時 M 上の誘導計量は $(h_{ij}(p))_{i,j} = \left(1 + f'(x)^2\right)$. つまり，

$$h_p(\partial_u, \partial_u) = g_{\iota(p)}(\partial_x + f'(x)\partial_y, \partial_x + f'(x)\partial_y) = g_{\iota(p)}(\partial_x, \partial_x) + f'(x)^2 g_{\iota(p)}(\partial_y, \partial_y) \tag{1.3.4}$$

(ベクトルがどの点にあるかは省略した).

さらに，弧長パラメータ s をもちいると，$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ だから，誘導計量の成分は 1 となり $h = ds \otimes ds$ ∎

Ex. 1.3.3. 同じように，3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた (簡単のため C^2 とする) 曲面

$$M = \left\{(u, v, f(u, v)) \mid (u, y) \in U \subseteq O\left(\mathbb{R}^2\right)\right\} \tag{1.3.5}$$

を考えよう．曲線と同じようにパラメータ u を設定し，次元を上げてもうひとつのパラメータ $v\,(=y)$ を用意した．この時 M 上の誘導計量は，

$$(h_{ij}\,(p))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_v f_u & 1+f_v^2 \end{pmatrix} \tag{1.3.6}$$

であって，これが曲面 M の第 1 基本形式と等しい．ここで，接ベクトル場は $\partial_u = \partial_x + f_u \partial_z$ (ただし $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}\,(u,v)$)，$\partial_v = \partial_y + f_v \partial_z$ (ただし $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}\,(u,v)$) を用いた．添字 $i=1$ が u 座標，また $i=2$ が v 座標 を表している．この第 1 基本形式 は固有値・固有ベクトルとして

$$(\lambda, v) = (1, (-f_v, f_u)^\mathsf{T}), (\lambda, v) = (1+f_u^2+f_v^2, (f_u, f_v)^\mathsf{T}) \tag{1.3.7}$$

をもっている． ∎

第 2 基本形式は曲面が接平面がどれだけ曲がっているかを示す主要項で，2 次微分によって定義される．

Def. 1.3.4 (第 2 基本形式). Gauss 幾何学における 第 2 基本形式は，曲面上の点と接平面の距離に関する主要項で，M が N に埋め込まれた超曲面とし，

- X, Y を N 上のベクトル場，
- n を超曲面の単位法線ベクトル

とすると，

$$f^{(2)}(X,Y) := g\,(\nabla_X Y, n)\,n \tag{1.3.8}$$

で定義される．[*1] ただし，$\nabla_X Y$ は X 方向の Y の共変微分で，N の局所座標系 $(x^\mu)_\mu$ と Christoffel 記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ によって以下で定義される：

$$(\nabla_X Y)_p = \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu}\,(p) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,(p)\,Y^\nu\,(p)\right) X^\mu\,(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p. \tag{1.3.9}$$

Ex. 1.3.5. 再び曲線を考える．ここでは f は 2 階微分可能とする．曲線 M 上の接ベクトル場 $X = \partial_u = \partial_x + f'\,(x)\,\partial_y$ について，第 2 基本形式 $f_{uu}^{(2)} = f^{(2)}\,(\partial_u, \partial_u)$ を求めたい．まず，グラフ上の法線ベクトルは接ベクトルを 90° 回転させ，$n = (-f'\,(x), +1)\,/\ell\,(x)\,, \ell\,(x) = \sqrt{1+f'\,(x)^2}$ ととる．接ベクトルと法ベクトルは左手系をつくる．次に，接ベクトルを曲線上に沿って微分 (共変微分) すると

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u|_{(u,f(u))} = \frac{\partial f'}{\partial x}\,(x)\cdot 1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(x,f(x))} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(x,f(x))} \tag{1.3.10}$$

と共変微分が表せる (ただし，$(u, f(u))$ は M が $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれたときの点の位置)．よって，

$$f_{uu}^{(2)} = \langle \nabla_{\partial_u}\partial_u, n\rangle_{\mathbb{R}^2} n = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x)\,\frac{1}{\ell\,(x)}\cdot n \tag{1.3.11}$$

となり，曲面上の量に関しては $f_{uu}^{(2)} \cdot n = \dfrac{f''\,(u)}{\sqrt{1+f'\,(u)^2}}$. ∎

Ex. 1.3.6. 同様に曲面についても 考える．$\partial_u = \partial_x + \dfrac{\partial f}{\partial x}\partial_z$ および $\partial_v = \partial_y + \dfrac{\partial f}{\partial y}\partial_z$ だから

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u|_{(u,v,f(u,v))} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y)\,\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,f(x,y))}, \quad \nabla_{\partial_v}\partial_v|_{(u,v,f(u,v))} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y)\,\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,f(x,y))}. \tag{1.3.12}$$

加えて，

$$\nabla_{\partial_u}\partial_v|_{(u,v,f(u,v))} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,f(x,y))}, \quad \nabla_{\partial_u}\partial_v|_{(u,v,f(u,v))} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,f(x,y))}. \tag{1.3.13}$$

[*1] Gauss の曲面論では単に係数部分を行列にして第 2 基本形式と呼ぶ．

今，$\mathbb{R}^3$ の外積を用いると法ベクトル場が

$$\partial_u \times \partial_v = -\frac{\partial f}{\partial x}\partial_x - \frac{\partial f}{\partial y}\partial_y + \partial_z \tag{1.3.14}$$

だから，長さ $\ell(u,v) = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right]^2 + \left[\frac{\partial t}{\partial v}(n,v)\right]^2}$ によって第 2 基本形式が

$$\begin{pmatrix} f^{(2)}_{uu} & f^{(2)}_{uv} \\ f^{(2)}_{vu} & f^{(2)}_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell(n,v)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} \tag{1.3.15}$$

と求まる． ∎

以下 ベクトル n を定義からなくして，第 2 基本形式を単に $f^{(2)}(X,Y) := g(\nabla_X Y, n)$ とする．$n_p = n^\sigma(p)(\partial_\sigma)_p$

$$\begin{aligned}(f_{\mu\nu})_p &= g_p\left(\left(\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu\right)_p, n_p\right) \\ &= g_p\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(p)(\partial_\lambda)_p, n_p\right) \\ &= g_{\lambda\sigma}(p)\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(p)n^\sigma(p)\end{aligned} \tag{1.3.16}$$

§2 ADM formalism

R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner によって与えられた 3+1 次元分解の基礎を概観する．

- $(\mathcal{M}, g)$: C^r 級 Lorentz 多様体 $(r \in \mathbb{N})$ で，d 次元とする．
- $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$: ($C^r$ 級の) 多様体を作る 位相空間とアトラス
- $\Sigma \subsetneq M$: M 上の C^r 級超曲面で, Σ がもつ (C^r 級の) アトラスを $\mathcal{A}_\Sigma$ とおく．
- $h \equiv g_\Sigma \in \Gamma(T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma)$: Σ 上の g による誘導計量テンソル場で (Σ, h) は空間的だとする．

2.1 時間と空間で分解された計量

時空 M の座標近傍 $(x, U) \in \mathcal{A}$ と，空間 Σ の座標近傍 $(\psi, V) \in \mathcal{A}_\Sigma$ をとる．包含写像 $\iota : \Sigma \to M$ によって $U \cap \iota[V] =: W$ とし，これは空でないとする．この時，M の時間座標 $x^0 \equiv ct$ は Σ 上で一定であり，座標系 x と ψ の空間部分は，一致しているとする．つまり，

$$x^0(p) = \text{const. on } W \tag{2.1.1}$$

かつ

$$x^j(p) = \psi^j(\iota(p)) \quad \forall p \in W, \quad \forall j \in \{1, \dots, d'\} \quad (d' := d-1). \tag{2.1.2}$$

この意味で，もし全域ですべての 点 $p \in M$ について同様の座標近傍が取れるとき，新しく 1 パラメータ t によって超曲面 の列 $\Sigma_t \equiv \Sigma(t)$ が同様に作れるので，$\{\Sigma_t\}$ は M の C^r 級葉層構造 (foliation) をなす．

話を座標近傍 W における局所的なものに戻す．包含写像 $\iota\colon \Sigma \to M$ の微分 $\iota_*\colon T_p\Sigma \to T_pM$ によって超曲面の誘導計量が求められるが，今 Eq. (2.1.2) によって接平面の間の単なる包含写像と捉えられる．簡単のため

$$h(\partial_j, \partial_k) = g(\iota_*(\partial_j), \iota_*(\partial_k)) = g(\partial_j, \partial_k) =: h_{jk} \equiv \gamma_{jk}, \tag{2.1.3}$$

とおく．ただし，$\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ とおいた．まだ時間成分がわからないので，簡単のため

$$\boxed{N_j \equiv \beta_j := g_{0j} := g(\partial_0, \partial_j)} \tag{2.1.4}$$

とおく．すなわち，時空 M は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} (g_{00}) & (N_k) \\ (N_j) & (h_{jk}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{00} & N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1 & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ N_2 & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ N_3 & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} (\text{if } d' = 3) \tag{2.1.5}$$

という表現行列を持つ計量テンソル

$$\boxed{g = g_{00} dx^0 \otimes dx^0 + dx^0 \otimes N_k dx^k + N_j dx^j \otimes dx^0 + h_{jk} dx^j \otimes dx^k} \tag{2.1.6}$$

をもつ．次に $(g_{\mu\nu}) =: \hat{g}$ の逆行列を求める．簡単のため ブロック行列を以下のようにおく：

$$\vec{N} = (N_j)_{j=1}^{d'},\ \hat{\gamma} := (\gamma_{jk})_{j,k} \equiv (h_{jk})_{j,k}. \tag{2.1.7}$$

行列 $\hat{g} = \begin{pmatrix} g_{00} & \vec{N}^{\intercal} \\ \vec{N} & \hat{\gamma} \end{pmatrix}$ の 逆行列を $\hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} A & \vec{B}^{\intercal} \\ \vec{C} & D \end{pmatrix}$ ($\vec{B} = \vec{C} \equiv (C^j)$, $D \equiv (D^{jk})_{j,k}$) とおけば，$\hat{g}^{-1}\hat{g} = \mathbb{1}_d$ より $\hat{g}^{-1}$ が求まる．今，γ は部分多様体 (空間的超曲面 Σ の計量なので，$\hat{\gamma}$ には逆行列が存在するから，これを (γ^{jk}) と表す．上付きの “ベクトル” $N_j \gamma^{jk} =: N^k$ を用いて解が以下で求まる：

$$A = \frac{1}{g_{00} - N^k N_k}, \quad C^j = -\frac{N^j}{g_{00} - N^k N_k}, \quad D^{jl} = \gamma^{jl} + \frac{N^j N^l}{g_{00} - N^k N_k}, \tag{2.1.8}$$

ただし，$g_{00} \neq 0$, $A \neq 0$. 次に，計算に便利なように $A \equiv g^{00}$ を基本として

$$\boxed{N^0 \equiv \alpha := \left(\mp g^{00}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\mp g^{00} > 0) \quad (-: \text{Lorentzian}, + : \text{Euclidean})^{*2} \tag{2.1.9}$$

と変数を変換する．すると $g^{00} = \mp\alpha^{-2}$ かつ $g_{00} = \mp\left(N^0\right)^2 + \vec{N}^2 \equiv \mp\alpha^2 + \beta^j\beta_j$ であるから，

$$\hat{g} = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mp\alpha^2 + \beta^j\beta_j & (\beta_k) \\ (\beta_j) & (\gamma_{jk}) \end{pmatrix}, \quad \hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} \mp\alpha^{-2} & (\pm\alpha^{-2}\beta^k) \\ (\pm\alpha^{-2}\beta^j) & (\gamma^{jk} \mp \alpha^{-2}\beta^j\beta^k) \end{pmatrix}. \tag{2.1.10}$$

さらに g を変形するために基底で展開すると，

$$g = (\mp\alpha^2 + \gamma_{jk}\beta^j\beta^k) dx^0 \otimes dx^0 + \gamma_{jk} dx^j \otimes dx^k + \gamma_{jk}\beta^j dx^0 \otimes dx^k + \gamma_{jk}\beta^k dx^j \otimes dx^0 \tag{2.1.11}$$

であるため，γ_{jk} の因子でくくりだすと，

$$ds^2 = \mp\left(\alpha dx^0\right)^2 + \gamma_{jk}(dx^j + \beta^j dx^0)(dx^k + \beta^k dx^0). \tag{2.1.12}$$

この意味で，$\alpha \equiv N^0$ を **time lapse (function)** (ラプス関数), $\vec{\beta} \equiv \vec{N}$ を **shift vector (functions)** (シフトベクトル) と呼ぶ．ラプス関数 α は 固有時がどれくらい時間 x^0 方向に関して伸び縮みするかを表し，シフトベクトル $\vec{\beta}$ は空間 Σ_t と “次の瞬間の空間 Σ_{t+dt}” の間においてどのように点が動いたかを表している，と幾何的に解釈できる．

2.2 法ベクトル場

Σ の法ベクトル場 n を求める．$n = n^0\partial_0 + n^j\partial_j$ とすると $\underline{g(n, \partial_k) = 0}$ より $\left(n^0, n^j\right) \propto \left(-1, N^j\right)$. [*3] 次に規格化条件 $g(n,n) = -1$ より 比例係数のスカラー場が $\pm\alpha^{-1}(> 0)$ と求まる．今は時間座標と同じ方向にするためにマイナスの符号を取って，$\left(n^0, n^j\right) = \left(1, -N^j\right)/\alpha$. つまり，$\alpha n = \partial_0 - N^j\partial_j$ であるから ∂_0 について解くと，$\partial_0 = \alpha n + N^j\partial_j$. [*4] ちなみに，この表式からは $g(n, \partial_0) = \mp\alpha$ ($+$ は Euclidean) であることが明瞭にわかる．

次に 法ベクトル場の共変成分を $n_\mu := g_{\mu\nu}n^\nu$ と定義する．行列計算の後，$(n_0, n_j) = (\mp\alpha, 0)$ とわかる．共変法ベクトル場 n_μ を用いると空間 Σ への射影が成分表示できる．

[*2] Take the minus sign for the Lorentzian metric but adopt the plus one if the metric is Euclidean.

[*3] 式の意味は $\left(n^0, (n^j)_{j=1}^{d'}\right) \propto \left(-1, (N^j)_{j=1}^{d'}\right)$ であるが，以下本文のように省略する．

[*4] $\partial_0 \equiv t$ と 書くとすると，$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu$ と表せる．

Def. 2.2.1 (射影). 1 階反変 1 階共変 (とみなせる) テンソル $P_p \colon T_pM(=T_p\Sigma\oplus(T_p\Sigma)^\perp) \to T_p\Sigma$ を $P\,(v) =: v - v^\perp$ (ただし $v^\perp$ は v の $(T_p\Sigma)^\perp$ への射影) のように定義する．今，$v^\perp = g\,(v,n)\,n$ なので，

$$P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \pm n^\mu n_\nu \quad (-\colon \text{Lorentzian}, + : \text{Euclidean}). \tag{2.2.1}$$

ADM formalism において具体的に書き下すと，

$$(P^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0} \\ \vec{N} & \mathbb{1}_{d'} \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

のように，時間[*5] 成分の行がすべてゼロになる．重要な性質を挙げると，

1. $P^2 = P$ (射影作用素)
2. $P^\mu_\nu n^\nu = 0$ (法ベクトル場の射影はゼロ)
3. $P_{\mu\nu} \coloneqq g_{\mu\lambda} P^\lambda_\nu = g_{\mu\nu} \pm n_\mu n_\nu$.

3 つめの行列表示は Eq. (2.1.10) より

$$(P_{\mu\nu}) = \left((g_{\mu\lambda})(P^\lambda_\nu)\right)_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \vec{\beta}^2 & \vec{\beta}^T \\ \vec{\beta} & \hat{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

$K_{\mu\nu} = P^\lambda_\mu \nabla_\lambda n_\nu$

§3 ブラックホールの情報喪失問題

3.1 相対論的な等加速度運動

Minkowski 時空における (相対論的) 等加速度運動を考える．相対論的運動方程式は，Lorentz (直交) 座標系 $(ct, \vec{x})$ で空間成分と時間成分に分解される (F^j は力) :

$$\begin{aligned} p\,(t) &= (mc\gamma(t), m\vec{v}(t)\gamma(t)) \\ \frac{dp^j}{dt}\,(t) &= F^j\,(t) \quad (j = 1,2,3) \\ \frac{dp^0}{dt}\,(t)\cdot c &= \langle \vec{F}\,(t)\,, \vec{v}\,(t)\rangle_{\mathbb{R}^3} \quad (\vec{F} \coloneqq (F^j)_j) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$(\|\vec{v}(t)\|/c)^2 \sim 0$ と近似した時に Newton 力学における 等加速度運動と等価になる運動は，$\vec{F} = m\vec{a}$ を代入した

$$\frac{d}{dt}\,(m\vec{v}(t)\gamma(t)) = m\vec{a} \tag{3.1.2}$$

であり，以下ではこれについて 空間 1 次元の場合を考える．初速度 0 で正方向に運動する $(a > 0)$ とする．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = a \Longleftrightarrow \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = at \Longleftrightarrow v = \frac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}} \tag{3.1.3}$$

したがって $t = 0$ のとき $x = x(0)$ であるから，

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{at'}{\sqrt{1+(at'/c)^2}} dt' = x(0) + \left(\left(1+(at/c)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\frac{c^2}{a} \tag{3.1.4}$$

両辺を二乗すると

$$\left(a\,(x\,(t) - x\,(0))\,/c^2 + 1\right)^2 = 1 + (at/c)^2 \tag{3.1.5}$$

[*5] Lorentzian の場合

という双曲線の方程式になるので，媒介変数表示

$$t=\frac{c}{a}\sinh u,\, x\left(t\right)=x\left(0\right)+\frac{c^{2}}{a}\left(\cosh u-1\right)\quad \left(u>0\right) \tag{3.1.6}$$

がわかる．最後に，固有時を求める．v に t を代入すると $\dfrac{v}{c}=\tanh u$ だから

$$d\tau=\sqrt{1-\frac{v\left(t\right)^{2}}{c^{2}}}dt=\frac{c}{a}du. \tag{3.1.7}$$

つまり，τ と u は互いに線型なので，原点を合わせると $\tau=\frac{c}{a}u$. ゆえに，等加速度運動の解は $\tau>0$ に対して，

$$t=\frac{c}{a}\sinh\left(a\tau/c\right),\, x\left(t\right)=x\left(0\right)+\frac{c^{2}}{a}\left(\cosh\left(a\tau/c\right)-1\right) \tag{3.1.8}$$

であり，$\tau<0$ にもこれは拡張可能である．

解として $(t,x(t))$ は適しているのかを確かめる．まず，$\gamma(t)=\cosh u$ なので

$$\frac{d}{dt}\left(v(t)\gamma(t)\right)=c\frac{d}{dt}\left(\sinh u\right)=c\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{c}t\right)=a \tag{3.1.9}$$

なので，Eq. (3.1.2) の左辺は右辺と等しい．次に Eq. (3.1.1) を確かめると，

$$\text{L.H.S.}=\frac{d}{dt}mc^{2}\gamma\left(t\right)=mc^{2}\frac{d}{dt}\sqrt{1+\left(at/c\right)^{2}}=mc^{2}v(t)a/c^{2}=mav(t)=\text{R.H.S.} \tag{3.1.10}$$

等加速度運動では 局所 Lorentz 系はどのように計算 (観測) されるだろうか．$\gamma(v\left(t\right))\equiv\gamma(t)=\cosh u$ なので $\beta(t)=v(t)/c$ とおくと 速度 $\beta(t)$ についての「基底の」Lorentz 変換 は

$$L=\left({L_{\mu}}^{\nu}\right)_{\mu,\nu}=\begin{pmatrix}\cosh u & \sinh u\\ \sinh u & \cosh u\end{pmatrix} \tag{3.1.11}$$

である (成分の Lorentz は L の逆行列)．4 元速度 (次元付き) を $U^{\mu}\,(\mu=0,1)$ とすると

$$\left(U^{\mu}(t)\right)_{\mu}=\left(c\gamma\left(t\right),v\left(t\right)\gamma\left(t\right)\right)=c\left(\cosh u,\sinh u\right). \tag{3.1.12}$$

4 元加速度 a^{μ} をまず Lorentz 因子によって求めると，Eq. (3.1.1) に従って

$$\left(a^{\mu}\right)_{\mu}=\left(\gamma\left(t\right)\cdot av\left(t\right)/c,\gamma\left(t\right)\cdot a\right)=\left(a\sinh u,a\cosh u\right) \tag{3.1.13}$$

であって，これは 4 元速度の 固有時微分とたしかに等しい．：

$$\frac{dU^{\mu}}{d\tau}=\frac{du}{d\tau}\frac{dU^{\mu}}{du}=(\mu\text{-th component of})\;\frac{a}{c}c\left(\sinh u,\cosh u\right)=a^{\mu}. \tag{3.1.14}$$

このように，固有時刻 τ における局所 Lorentz 系では，動標構 $\partial'_{\mu}={L_{\mu}}^{\nu}\partial_{\nu}$ を用いて 時間方向 $(\partial'_{0})_{\tau}$ に 4 元速度 U^{μ} が伸びており，1 軸方向 $(\partial'_{1})_{\tau}$ に 4 元加速度 a^{μ} が伸びている格好になる．

3.2 4 元形式で解く等加速度運動

この解を，今度は 4 元形式で求める．質量を $m>0$, 曲線を X^{μ}, 4 元速度を U^{μ}, 4 元加速度を a^{μ} として，

$$m\frac{d^{2}X^{\mu}}{d\tau^{2}}\left(\tau\right)=ma^{\mu}\left(\tau\right),\quad\left(X^{\mu}\left(0\right)\right)=\left(0,\vec{X}\left(0\right)\right),\quad\left(U^{\mu}(0)\right)=\left(c\equiv1\right)\left(1,\vec{0}\right),\quad\left(a^{\mu}(0)\right)=\left(0,\vec{a}\right). \tag{3.2.1}$$

ここで，4 元加速度は一定ではない．もし一定とすると，4 元速度の規格化条件と 加速度・速度の直交条件 から $a^{\mu}a_{\mu}=0$ が導かれるので．加速度 a^{μ} がヌルとなり初期条件と矛盾する．以下 1 次元運動として一般性を失わないので，1 次元的加速度 $\vec{a}=(a)\in\mathbb{R}_{>0}$ を用いる．“局所静止系” (速度 U^{μ} で動く観測者) のもとでベクトルの成分を求めるために $\Lambda\left(\tau\right)\coloneqq c^{-1}\begin{pmatrix}U^{0}(\tau) & -U^{1}(\tau)\\ -U^{1}(\tau) & U^{0}(\tau)\end{pmatrix}$ を用いる．“局所静止系” のもとで 4 元加速度は

$$c\left({\Lambda^{\mu}}_{\nu}a^{\nu}\right)_{\mu}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}U^{0} & -U^{1}\\ -U^{1} & U^{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{0}\\ a^{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U^{0}a^{0}-U^{1}a^{1}\\ -U^{1}a^{0}+U^{0}a^{1}\end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

のように観測され，第 1 成分は直交条件より $-U^\mu a_\mu = 0$ と求められる．ここで，$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, +1)$ で，これは相対論的に自明な関係である．一方，第 2 成分 (空間方向) は 等加速度という要請から

$$\underline{-U^1 a^0 + U^0 a^1 = ca} \Longleftrightarrow U^0 \frac{dU^1}{d\tau} - U^1 \frac{dU^0}{d\tau} = ca. \tag{3.2.3}$$

4 元速度は $-\left(U^0\right)^2 + \left(U^1\right)^2 = c^2$ のように双曲線を描くので媒介変数 (rapidity) 表示をすることができる．パラメータ $u \in \mathbb{R}$ を用いると，$\left(U^0, U^1\right) = c\,(\cosh u, \sinh u)$, $\left(\frac{dU^0}{d\tau}, \frac{dU^1}{d\tau}\right) = c\frac{du}{d\tau}\,(\sinh u, \cosh u)$ なので，

$$c^2 \frac{du}{d\tau} = ca \Longleftrightarrow u = a\tau/c \tag{3.2.4}$$

というように 初期条件から固有時が求まる．あとは前節と同様で，曲線 X^μ が求まる．これが "$(\|\vec{v}(t)\|/c)^2 \sim 0$ と近似した時に Newton 力学における 等加速度運動と等価になる" ことに対する 4 元形式における定式化を与える．このような現象は，物理的には，ロケットが一定の力で加速されて高速になる状況に対応している．質量の減少を無視できると仮定したとき，一定出力で噴射するエンジンで飛ぶロケットでは，中にいる人（観測者）は Newton 的に一定加速度 $\Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ で加速されているように感じる．しかし，慣性系の観測者からは 4 元加速度は a^μ という成分のもとに観測されるのである．

3.3 Light-cone coordinates

まず，式（位置）が綺麗になるように $x\,(0) = \dfrac{c^2}{a}$ と調節すると，Eq. (3.1.8) は $t(\tau) = \dfrac{c}{a}\sinh\left(a\tau/c\right)$，$x\,(\tau) = \dfrac{c^2}{a}\cosh\left(a\tau/c\right)$ となるので，

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{c^2}{a}\begin{pmatrix} \sinh\left(a\tau/c\right) \\ \cosh\left(a\tau/c\right) \end{pmatrix} = x(0)\begin{pmatrix} \sinh\left(a\tau/c\right) \\ \cosh\left(a\tau/c\right) \end{pmatrix}. \tag{3.3.1}$$

$(ct, x) \equiv (x^0, x^1)$, $c \equiv 1$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x^0 - x^1 \\ x^0 + x^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\exp\left(a\tau\right) \\ \exp\left(a\tau\right) \end{pmatrix}. \tag{3.3.2}$$

これは Light-cone coordinates における位置 $\frac{1}{a}(-1, +1)$ を通る等加速度運動を表している．

3.4 Rindler coordinates

等加速度系の世界線上で，固有時を時間軸とする座標近傍 が考えられる．