一般相対論で使うアファイン接続って何？

Krypf

2024 12/21

0.1 可微分多様体上の接バンドルの接続

> - M: C^r 級可微分多様体 $(r \geq 2)$ (m 次元)
> - TM: M の接バンドル $TM \coloneqq \coprod_{p \in M} T_pM \equiv \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$
> - $\Gamma^r(TM) \equiv \Gamma(TM)$: C^r 級ベクトル場全体の集合

まずベクトル束の (自明な) 一例である接束のアファイン接続を定義し，よく知られた定理である Riemann (Levi-Civita) 接続の一意的存在を証明する．以下，ベクトル場として大文字の X, Y, Z などを使い，添字に $i, j, k, l(\ell), \mu, \nu$ などの標準的な文字を用いる．特に断らずに Einstein の縮約記法も用いる．

0.1.1 ベクトル場のアファイン接続

Def. 0.1.1 (アファイン接続). 以下を満たす写像 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM); (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ を M 上のアファイン接続 (affine connection) という．これは英語読みだが，単に発音の問題で，アフィン接続とも呼ばれる．

- ∇ は引数 2 つのベクトル場について，加群準同型である．
  - $\nabla(X, Y + Z) = \nabla(X, Y) + \nabla(X, Z)$
  - $\nabla(X + Y, Z) = \nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$
- $\forall f \in C^r(M), \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, i.e. $\nabla(fX, \cdot) = f \nabla(X, \cdot)$ (1 つ目の引数について，$C^r(M)$-準同型)
- $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y$ (Leibniz 則)

Remark. ベクトル場 v に対する通常の Leibniz 則は $v(fg) = v(f) g + f v(g)$ $(f, g \in C^r(M))$ のような形をしている．これはスカラー場の環 $C^r(M)$ の準同型ではなく，積の微分に対応することに注意する．$X(f) =: \nabla_X f$ と決めると，$C^r(M)$-加群 $\Gamma(TM)$ 上の「スカラー倍の微分」(代数の積に関するいわゆる微分ではない) を 各々の ∇_X が定める．

さて，アファイン接続を (1, 1) テンソル場を返す写像として読み替えることができる．つまり，$\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM \otimes T^*M)$ として，

$$\nabla_X Y =: (\nabla Y)(X) \in \Gamma(TM) \Longleftrightarrow (\nabla Y)_p (X_p) \coloneqq (\nabla_X Y)_p \quad \forall p \in M. \tag{0.1.1}$$

この (1, 1) 型テンソル場は，X 方向の共変微分 (アファイン接続) と呼ばれ，以下の性質を満たす．

1. (加法的) $\nabla(Y + Z) = \nabla Y + \nabla Z$
2. (Leibniz 則) $\nabla(fY) = Y \otimes df + f \nabla Y$

2 つめの Leibniz 則を証明するには，定義から

$$(\nabla(fY))(X) = \nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y = (Y \otimes df + f \nabla Y)(X) \tag{0.1.2}$$

とする．ただし，最後に $(df)_p (X_p) = X_p(f)$ を用いた (ref. Arai, GR). 以上より，物理において通常添字のテンソル記法で書かれる意味での共変微分を定義できる．

Def. 0.1.2 (共変微分). ベクトル場 Y の共変微分 (または単にアファイン接続) ∇Y とは，すべてのベクトル場 X に対して以下を満たす (1, 1) 型テンソル場である：

$$(\nabla Y)(X) := (\nabla_X Y). \tag{0.1.3}$$

Remark. 自然同型 $T_pM \cong (T_p^*M)^*$ を用いて, $(\nabla Y)(\Phi, X) = (\nabla_X Y)(\Phi) \quad \forall\Phi \in \Gamma(T^*M), \forall X \in \Gamma(TM)$ のように定める流儀もある (ref. Arai, GR)

基底で展開すると，テンソル場 $v \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ について，接空間の基底 $(e_i)_p$ と双対基底 $\left(\theta^j\right)_p$ を用いて

$$\nabla v = \nabla_j v^i e_i \otimes \theta^j \quad \left((e_i)_p \in T_pM, \left(\theta^j\right)_p \in T_p^*M, \forall p \in M\right). \tag{0.1.4}$$

この時の展開係数 (成分) を $\nabla_j v^i \equiv v^i_{;j}$ のように書く．アファイン接続は，疑似線型接続 あるいは単に線型接続とも呼ばれる．

これでベクトル場のアファイン接続，つまり可微分多様体上でベクトル場をつなげる方法論が決まったわけである．次は，具体的に基底 (動標構) によって計算する方法を定める．今，M の 開集合 U 上の動標構 $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ と 双対動標構 $(\theta^j)_{j=1,\dots,m}$ によって，動標構の共変微分を展開することができる：(ref. Arai, GR, p. 233)

$$\nabla e_\nu =: \gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda \otimes \theta^\mu \,(\text{on } U). \tag{0.1.5}$$

この時の展開係数 $\gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を 動標構 (e_i) に関する アファイン接続 ∇ の **接続係数 (connection coefficients)** という．等価な書法として，

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu \equiv \nabla_\mu e_\nu = \nabla(e_\mu, e_\nu) =: \gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda \tag{0.1.6}$$

と定めることで $(\nabla e_\nu)(e_\mu) = \gamma^\lambda_{\mu'\nu} e_\lambda \otimes \theta^{\mu'}(e_\mu) = \gamma^\lambda_{\mu'\nu} e_\lambda \otimes \delta^{\mu'}{}_\mu \equiv \gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda$ と示すことができる．これによって，動標構さえあれば，∇ の具体計算が可能になった．

あるいは，$M \equiv (M, \mathcal{A})$ (記号の濫用) は多様体なので座標近傍が取れる．今この一つを $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $\phi = (x^\mu)_\mu$ (μ は m この添字), とする．すると，座標基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = (\partial_\mu)$ について アファイン接続を以下のように表す．

$$\nabla(\partial_\mu, \partial_\nu) =: \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(U, \phi)\, \partial_\lambda \in \Gamma(TM), \tag{0.1.7}$$

ここで，$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(U, \phi)$ をアファイン接続の チャート (U, ϕ) に関する **接続係数 (connection coefficients)** という．後で見るように，動標構が可換な場合には，一般相対論の教科書で広く用いられている「計量の偏微分」の表式で定めれば良い．

以上述べてきた意味で，ベクトル場の共変微分がゼロであることを ベクトル場が **平行** であるという．

Ex. 0.1.3. 例えば，Euclid 空間で，定ベクトル場 $X = c^j \partial_j \quad (c^j \in \mathbb{R}, \partial^j = \frac{\partial}{\partial x^\mu})$ は $\nabla X = 0$ を満たす．また 平行なベクトル場はそれのみに限られる． ∎

0.1.2　アファイン接続の一般化

ここで，テンソル場についての アファイン接続の Leibniz 則 $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$ を要求する (ref. Nakahara, p. 270)．すなわち，アファイン接続はテンソルの線型構造を保つような，いわゆる微分の構造であると仮定する．共変微分 ∇ の形に書き直せば，$(\nabla(T_1 \otimes T_2))(X) = \nabla T_1(X) \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla T_2(X)$ が成立する．

最初に，アファイン接続がスカラー場に一般化される．Leibniz 則 $\nabla(fY) = Y \otimes df + f\nabla Y$ に，上で考えた Euclid 空間の定ベクトル場を代入してみる．簡単のため 1 次元部分空間 $\mathrm{span}\{e_1\}$ のみ考えればよい．直ちに $\nabla(fe_1) = e_1 \otimes df$ であるから，テンソル積代数構造に関して $\nabla(e_1 \otimes f) \equiv \nabla(fe_1)$ なる同一視をとれば，$\nabla f := df$ と定義するのが妥当である．この意味で，スカラー場に共変微分を一般化するための，以下の定義が得られる．

Def. 0.1.4 (スカラー場の共変微分). C^r 級多様体 M 上の スカラー場 $f \in C^r(M)$ の $(X \in \Gamma^r(TM))$ 方向の共変微分とは，

$$\nabla_X f := df(X), \nabla f = df. \tag{0.1.8}$$

次は，微分形式 (1 階共変テンソル) への拡張を考える．スカラー場とベクトル場の アファイン接続は分かっているから，微分形式とベクトル場のペアリングに関して，Leibniz rule

$$\nabla_X(\phi(v)) =: (\nabla_X\phi)(v) + \phi(\nabla_X v); \quad \forall v, X \in \Gamma(TM), \forall\phi \in \Gamma(T^*M), \tag{0.1.9}$$

を満たすように $\nabla_X\phi$ を定める (ref. Arai, GR, p. 250)．すなわち，$\phi(v) \equiv \langle\phi, v\rangle$ と書くと

$$\langle\nabla_X\phi, v\rangle \coloneqq \nabla_X\langle\phi, v\rangle - \langle\phi, \nabla_X v\rangle. \tag{0.1.10}$$

成分で書くと，$\nabla_{e_\mu}\phi = (\nabla_\mu\phi)_\nu\,\theta^\mu$; $(\nabla_\mu\phi)_\nu \coloneqq e_\mu(\phi_\nu) - \gamma^\lambda_{\mu\nu}\phi_\lambda$. これは，座標近傍の上では，共変ベクトル $A \equiv (A_\mu)$ の共変微分の公式 $A_{\nu;\mu} \coloneqq \partial_\mu A_\nu - \gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda$ のような表式をもつ．

Def. 0.1.5 (微分形式の共変微分). C^r 級多様体 M 上の 微分形式 $\phi \in \Gamma^r(T^*M)$ の $(X \in \Gamma^r(TM))$ 方向の共変微分とは，

$$(\nabla_X\phi)(v) \coloneqq \nabla_X(\phi(v)) - \phi(\nabla_X v); (\nabla\phi)(X, v) \coloneqq (\nabla_X\phi)(v), \quad \forall v \in \Gamma^r(TM). \tag{0.1.11}$$

ここで，2 階共変テンソル $\nabla\phi$ を X, v からの写像として定めた．

最後に，アファイン接続がテンソル場についての Leibniz 則 $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$ (純テンソル場の Leibniz 則 から導くこともできる (ref. Arai, GR, p. 254)) に基づいて，同様に $\nabla_X T$ が定義される．したがって，反変なら (+ 接続係数の項), 共変なら (− 接続係数の項) を偏微分に足せば座標近傍での成分がわかる．

Def. 0.1.6 (テンソル場の共変微分). 開集合 $U \subseteq M$ 上の (r, s) 型テンソル場を $T = \sum_{p\in\mathfrak{S}_r, q\in\mathfrak{S}_s} T^{p(\mu)}_{q(\nu)} E^{q(\nu)}_{p(\mu)}$ とし，ただし $\mu = (1, \dots, r), \nu = (1, \dots, s)$ で縮約 (和) は 各順序対に作用するすべての置換 p, q について取るとする．また，展開係数を $T^{p(\mu)}_{q(\nu)} \equiv T^{p(1)\dots p(r)}_{q(1)\dots q(s)} \in C^r(U; \mathbb{R})$, テンソル空間の基底を $E^{q(\nu)}_{p(\mu)} = e_{p(1)} \otimes \cdots \otimes e_{p(r)} \otimes \theta^{q(1)} \otimes \ldots \otimes \theta^{q(s)}$ と書いた．T の X 方向の共変微分は Leibniz 則と加法準同型性 $(\nabla_X(T_1 + T_2) = \nabla_X T_1 + \nabla_X T_2)$ によって定義され，

$$\nabla_X(T) = \nabla_X\left(\sum_{p\in\mathfrak{S}_r, q\in\mathfrak{S}_s} T^{p(\mu)}_{q(\nu)} E^{q(\nu)}_{p(\mu)}\right) = \sum_{p\in\mathfrak{S}_r, q\in\mathfrak{S}_s}\left[X\left(T^{p(\mu)}_{q(\nu)}\right)E^{q(\nu)}_{p(\mu)} + T^{p(\mu)}_{q(\nu)}\nabla_X E^{q(\nu)}_{p(\mu)}\right]. \tag{0.1.12}$$

また テンソル場を $T_p\colon \bigotimes_s T_pM \to \bigotimes_r T_pM$ なる写像と読み替えることによって，T の共変微分を，

$$(\nabla T)(X, v_1, \dots v_s) \coloneqq (\nabla_X T)(v_1, \dots v_s) \tag{0.1.13}$$

と定義する．

Remark. 自然同型 $T_pM \cong (T^*_pM)^*$ によって $T_p\colon \bigotimes_r T^*_pM \otimes \bigotimes_s T_pM \to \mathbb{R}$ と読み替えても同様. (ref. Arai. GR, p. 257)

この意味で，$\nabla T = 0$ を満たす M 上のテンソル場は アファイン接続 ∇ に関して 平行 であるという．

Ex. 0.1.7. 2 階共変テンソル場 S の共変微分を例に取る．双対動標構によって S が $S_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu$ と展開される．この時，$\nabla_X(S(v, w)) = (\nabla_X S)(v, w) + S(\nabla_X v, w) + S(v, \nabla_X w)$ を証明しよう．Def 0.1.6 から，

$$\nabla_X S = \nabla_X(S_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu) = X(S_{\mu\nu})\theta^\mu \otimes \theta^\nu + S_{\mu\nu}\nabla_X(\theta^\mu) \otimes \theta^\nu + S_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \nabla_X(\theta^\nu) \tag{0.1.14}$$

だから，これを利用して $(\nabla_X S)(v, w)$ $(v \in \Gamma(TM))$ の値を計算する．$(\nabla_X\theta^\mu)(v) = -X^\lambda v^\sigma\gamma^\mu_{\lambda\sigma}$ をこれに代入して，スカラー場の微分 $X(S_{\mu\nu}v^\mu w^\nu)$ の Leibniz 則を使うと，$S(v, w) = S_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$ なので，

$$(\nabla_X S)(v, w) = \nabla_X(S(v, w)) - S(\nabla_X v, w) - S(v, \nabla_X w) \tag{0.1.15}$$

が導かれる．右辺第 2, 第 3 項を移行すれば，2 階共変テンソル場でも ペアリングの Leibniz 則のような公式が成り立つことが分かった．(ただし，関数は十分滑らかなものとした．) ∎

0.1.3 Riemann (Levi-Civita) 接続

次に多様体 M が計量を備えている場合を考える．つまり，$g \in \Gamma\left(\bigotimes_{\mathrm{S}}^{2} T^{*}M\right)$ を C^r 級計量とする．計量は，物理的に妥当なレベルの仮定によって，アファイン接続を一意に決定する，と言う関係がある．

準備として，捩率を定義する．捩率は，可微分多様体がどれくらい捩れていて，微分に対して素直な形をしていないのか，を表す量である．

Def. 0.1.8 (可微分多様体の捩率). C^r 級可微分多様体 M 上の ベクトル場を $X, Y \in \Gamma^r(TM)$ とする．

- 捩率: $\vec{\tau}(X,Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$
- (1, 2) 型 捩率テンソル場 $T = T^{\mu}_{ij} e_{\mu} \otimes \theta^i \otimes \theta^j$: $T^{\mu}_{ij} = \theta^{\mu}\left(\vec{\tau}\left(e_j, e_k\right)\right)$
- 捩率形式 $\tau^{\mu} \coloneqq \dfrac{1}{2} T^{\mu}_{ij} \theta^i \wedge \theta^j$

このような捩率は，可微分多様体の捩れ方を表している．

以上で準備した捩率と，計量に対して性質の良いアファイン接続を作る．具体的には，計量の共変微分がゼロで，捩率もゼロであるようなものを **Riemann (Levi-Civita) 接続** という．Riemann (Levi-Civita) 接続は計量つき多様体において一意に定まる基本的な量である．

Def. 0.1.9 (一般 Riemann 多様体上の Riemann (Levi-Civita) 接続). C^r 級可微分多様体 M が計量 g と共変微分 ∇ を備えているとする．

1. 計量が平行: $\nabla g = 0 \Leftrightarrow (\nabla g)(X,Y,Z) = 0, \forall X, Y, Z \in \Gamma^r(TM)$
2. 捩率がゼロ (torsion-free): $\vec{\tau}(X,Y) = 0$

ここで，Ex. 0.1.7 に示したとおり，$(\nabla g)(X,Y,Z) = (\nabla_X g)(Y,Z) = \nabla_X\left(g(Y,Z)\right) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$. 計量が平行であるようなアファイン接続 ((疑似) 線型接続) のことを，**計量的** であるともいう．

簡単にこれらを成分表示して，テンソルの足で意味を顕にしてみよう．

Prop. 0.1.10. 計量を動標構 (e_i) の双対動標構 (θ^j) で $g_{\mu\nu}\theta^{\mu} \otimes \theta^{\nu}$ のように展開できたとする．このとき，計量が平行ならば，定義から $\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$. また，$(g_{\mu\nu})$ の逆行列 $(g^{\lambda\mu})$ について，$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}$ [*1] だから，$\nabla_{\mu}\left(g^{\lambda\nu}\right) = 0$ (計量が平行ならば).

Prop. 0.1.11. 捩率は接続係数と構造定数で展開でき，

$$\vec{\tau}\left(e_i, e_j\right) = \left(\gamma^{l}_{ij} - \gamma^{l}_{ji} - c^{l}_{ij}\right) e_l,\ T^{\mu}_{ij} = \gamma^{\mu}_{ij} - \gamma^{\mu}_{ji} - c^{\mu}_{ij}. \tag{0.1.16}$$

さて，この節の主眼である **Riemann 幾何学の基本定理** を証明しよう．

Thm. 0.1.12 (Riemann 幾何学の基本定理). 一般 Riemann 多様体上に Riemann (Levi-Civita) 接続は一意に存在する．これは Riemann 幾何学の基本定理 と呼ばれることもある (ref. Nakahara, Geometry).

Pf. アファイン接続 $\nabla\colon (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ が存在するとする．$(\nabla g)(X,Y,Z) = 0$ より，

$$\begin{aligned}
&(\nabla g)(X,Y,Z) = \nabla_X\left(g(Y,Z)\right) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \cdots (1) \\
&(\nabla g)(Y,Z,X) = \nabla_Y\left(g(Z,X)\right) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) = 0 \cdots (2) \\
&(\nabla g)(Z,X,Y) = \nabla_Z\left(g(X,Y)\right) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0 \cdots (3)\ ^{*2}
\end{aligned} \tag{0.1.17}$$

[*1] $(g^{\lambda\mu}(p) g_{\mu\nu}(p) = \delta^{\lambda}_{\nu})$

(1) + (2) − (3) により，計量の対称性を用いて

$$2g\left(\nabla_X Y, Z\right) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]). \quad (0.1.18)$$

今，Z は任意，計量 g は非退化であって，右辺は X, Y, Z, g のみで決まっているので，左辺の $\nabla_X Y$ は一意に定まる．すなわち，写像 ∇ は一意に定まる．

次に，計量構造があれば 右辺が定まるので，これを $\underline{2f(X,Y,Z)}$ とおく．もし アファイン接続 ∇ が存在すれば，このスカラー場が ベクトル場 $\nabla(X,Y)$ と計量テンソル場 g によって $g(\nabla(X,Y),Z)$ と書けていたわけである．まず，f の Z に関する線型性は Eq. (0.1.18) の表式から保証されている (改めて証明しなくてよい)．次に 動標構 $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ を使って，Z を展開する．これによって 写像 f と計量 g から ベクトル場 V を

$$\underline{V^\ell(p)} \coloneqq \sum_{k=1}^{m} g^{k\ell}(p) f\left(X, Y, e_k\right)(p),\ \left(g^{k\ell}(p)\right)_{k,l} \coloneqq \left(g_{ij}\left(p\right)\right)^{-1}_{i,j},\ g_{ij} \coloneqq g\left(e_i, e_j\right), \quad (0.1.19)$$

によって定義する．[*3] これを X, Y および g から定まる写像 (f は g と交換子によって定まっている) の値という意味で，$\nabla(X,Y;g) \coloneqq V$ と書く．ベクトル場を与えるこの写像 ∇ は，一意性の証明の Eq. (0.1.18) によって顕わになっているように，アファイン接続の公理を満たす．よって，一般 Riemann 多様体上に Riemann (Levi-Civita) 接続は存在する．存在すれば一意であるから，定理は証明された． ∎

Remark. 証明について補足をする．

1. f の第 3 引数についての線型性を f から直接証明してみる．Eq. (0.1.18) α をスカラー場とし，第 6 項 で $[X, \alpha Z] = X(\alpha) Z + \alpha [X, Z]$. 第 1 項 は $X\left(g\left(Y, \alpha Z\right)\right) = X\left(\alpha\right) g\left(Y, Z\right) + X(g(Y,Z))$ なので因子 $X(\alpha)$ がかかった項は相殺する．同様に，第 5 項と第 2 項でも微分因子 $Y(\alpha)$ のある項は相殺する．よって全体として 線型で $f\left(X, Y, \alpha Z\right) = \alpha f\left(X, Y, Z\right)$.
2. ∇ がアファイン接続の公理を満たすことを f (と g) から直接証明してみる．1 つめに，f は加群準同型で書かれているので $g\left(\nabla_X Y, Z\right)$ は加群準同型．だから，Eq. (0.1.19) によって ∇ は加群準同型．

2 つめに，$\nabla\left(\alpha X, Y\right) = \alpha \nabla\left(X, Y\right)$ を証明する．Eq. (0.1.18) の第 2 項と第 4 項で $Y\left(\alpha\right) g\left(Z, X\right)$ の項が相殺する．また，第 3 項と第 6 項でも因子 $Z(\alpha)$ のある項は相殺する．今，左辺の g は双線型なので ∇ は第 1 の引数に関して作用準同型．

3 つめに，Leibniz 則 $\nabla\left(X, \alpha Y\right) = X\left(\alpha\right) Y + \alpha \nabla\left(X, Y\right)$ を証明する．Eq. (0.1.18) の 第 1 項と第 4 項から $\frac{1}{2} \times 2X\left(\alpha\right) g\left(Y, Z\right) = g\left(X\left(\alpha\right) Y, Z\right)$ の項が出てくる．第 3 項と第 5 項の $Z\left(\alpha\right) g\left(X, Y\right)$ は符号が逆なので相殺する．以上より，$\nabla_X\left(\alpha Y\right) - X\left(\alpha\right) Y = \alpha \nabla_X Y$. (証明終わり)

これで 計量と アファイン接続が結びつく条件が分かったが，次は Eq. (0.1.19) を使って基底で展開させた表示を求めてみる．$g_{ij} = g\left(e_i, e_j\right)$ を用いて，$(X, Y, Z) = \left(X^i e_i, Y^j e_j, e_k\right)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} V^\ell &\equiv \theta^\ell(\nabla_X Y) = \sum_{i,j=1}^{m} \left(X\left(Y^\ell\right) + \gamma^\ell_{ij} X^i Y^j\right) \\ \gamma^\ell_{ij} &\coloneqq \frac{1}{2} c^\ell_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\left[\underline{g^{k\ell}\left(e_i\left(g_{jk}\right) + e_j\left(g_{ki}\right) - e_k\left(g_{ij}\right)\right)} - g^{k\ell}\left(g_{i\mu} c^\mu_{jk} + g_{j\mu} c^\mu_{ik}\right)\right] \end{aligned} \quad (0.1.20)$$

ただし，接空間の基底に関する構造定数を $[e_i, e_j] \eqqcolon c^\mu_{ij} e_\mu$ ($[e_i, e_j](\alpha) \eqqcolon c^\mu_{ij} e_\mu(\alpha), \forall \alpha \in C^r(M)$) から定めて用いた．ここに 定めた接続係数 γ^ℓ_{ij} は，$\theta^\ell\left(\nabla_{e_i} e_j\right) \eqqcolon \gamma^\ell_{ij}$ なる定義の接続係数と同じである．今，これの第 1 項は構造定数そのもので i, j に関し反対称な項 であり，第 2 項は対称な項である．対称な項のうち，下線部の

$$\Gamma^\ell_{ij} \coloneqq \frac{1}{2} g^{k\ell}\left(e_i\left(g_{jk}\right) + e_j\left(g_{ki}\right) - e_k\left(g_{ij}\right)\right) \quad (0.1.21)$$

を第 2 種 Christoffel 記号と呼ぶ．

Remark. 下付き添字の $\Gamma_{ij\ell} \coloneqq \frac{1}{2}\left(e_i\left(g_{jk}\right) + e_j\left(g_{ki}\right) - e_k\left(g_{ij}\right)\right)$ のことを第 1 種 Christoffel 記号という．

もし，座標基底が取られ，(偏微分がすべて可換で) 構造定数が 0 であれば，

$$\gamma^\ell_{ij} = \Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right). \quad (0.1.22)$$

[*2] ref. 金井雅彦，幾何学 XD 講義資料を参考にした．

[*3] 計量は非退化なので 表現行列 (g_{ij}) は正則になる (ref. Arai, GR).

このような物理における議論を念頭に置いて，$\nabla_X Y = \sum_{i,j,\ell} X^i \left(e_i \left(Y^\ell\right) + \gamma^\ell_{ij} Y^j\right) e_\ell$ と展開する．これを 1 形式で書き直すために，$\gamma^\ell_{ij} = \gamma^\ell_{i'j}\theta^{i'}(e_i)$ というペアリングの形を作る．すなわち，

$$(\nabla_X Y)_p = \sum_{i,j,\ell} X^i(p) \left((e_i)_p \left(Y^\ell\right) + \gamma^\ell_{ij}(p) Y^j(p)\right)(e_\ell)_p$$

$$(\nabla_X Y)_p = \sum_{i,j,\ell} X^i(p) \left(\left(dY^\ell\right)_p((e_i)_p) + \gamma^\ell_{i'j}(p)\theta^{i'}_p\left((e_i)_p\right) Y^j(p)\right)(e_\ell)_p$$

$$(\nabla_X Y)_p = \sum_{i,j,\ell} \left(\left(dY^\ell\right)_p(X_p) + \gamma^\ell_{i'j}(p)\theta^{i'}_p(X_p) Y^j(p)\right)(e_\ell)_p \tag{0.1.23}$$

だから，$(\omega^\ell_j)_p \coloneqq \gamma^\ell_{i'j}(p)\theta^{i'}_p$ とおくと，

$$(\nabla Y)(X) = \sum_{i,j,\ell} e_\ell \left(dY^\ell(X) + Y^j \omega^\ell_j(X)\right). \tag{0.1.24}$$

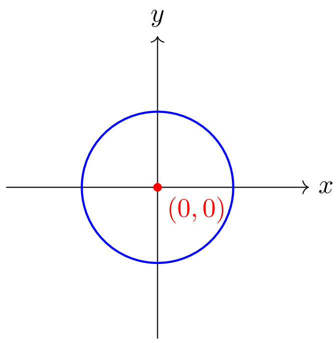
この意味で，次の命題を得る．

Prop. 0.1.13. ベクトル場 Y の共変微分 Y に関して

$$\nabla Y = e_i \otimes \left(dY^i + \omega^i_j Y^j\right), \tag{0.1.25}$$

ただし,$\omega^i_j \coloneqq \gamma^i_{mj}\theta^m$ をアファイン接続 ∇ に関する **接続形式 (connection form)** または **接続 1 形式 (connection one-form)** という．

Ex. 0.1.14. 円 S^1 の座標近傍系 $\mathcal{A}$ を以下のように取る：$\phi_1 : U_1 \to (-\pi, \pi)\,(\eqqcolon O_1)$, $U_1 = \{p \in S^1 \mid \iota(p) = (\cos\theta, \sin\theta), \theta = \phi_1(p)\}$ (ただし $\iota \colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ は包含写像). 加えて，U_2 を 角度変数 $\theta \in (0, 2\pi)$ に変えた，同様の開集合とする ($\phi_1 = \phi_2$ on $U_1 \cap U_2$)．以下 $M = S$ とする．この接空間は 1 次元 (線型空間) であり，座標基底 $\dfrac{\partial}{\partial\theta} \equiv \partial_\theta$ によって各点 p で $T_pM = \{t(\partial_\theta)_p | t \in \mathbb{R}\}$ と書ける．接束 TM は 2 次元多様体で自明束 $S^1 \times \mathbb{R}$ と同型である．変換関数 $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ は $(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(\theta) = \theta\,(\forall\,(0, \pi))$, $\theta - 2\pi\,(\forall\,(\pi, 2\pi))$, と書ける．



2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^2$ に埋め込まれた 1 次元球面 S^1 (円)

ここから，円の半径を 1 ではなく $a\,(> 0)$ に一般化する．計量テンソル場 $g = (ad\theta)^2 = a^2 d\theta^2$ は Euclid 計量 $g = dx^2 + dy^2$ により誘導される．これは Riemann 計量である (a は実数だから)．これにより，次にアファイン接続を考える．S^1 上の任意のスカラー場 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ に関して，接空間の基底がなすベクトル場 $\partial_\theta \equiv e_1$ の構造定数はゼロである ($[\partial_\theta, \partial_\theta] = 0$)．よって接続係数は第 2 種 Christoffel 記号で計算でき，いま計量は定数テンソル場なのでこれもゼロである．このように円は局所的には 実数直線と似た構造を持っている．(しかし，平面への埋め込まれ方や大域的な位相的性質は全くそれとは異なる．) ∎

0.1.4 Riemann 曲率テンソル

このように，円の微分幾何学では内在的量というよりむしろ外在的な法ベクトル場が重要になるが，2 次元以上であれば空間の曲がり方を 今まで述べてきた接続 (ベクトル場の繋がり方) から内在的に測ることができる．1 つの可能な考え方は，ベクトル場の共変微分の交換性によって非平坦性を捉える方法だ (ref. ディラック，一般相対性理論)．アファイン接続から定まる空間の曲がり方を，我々は Riemann 曲率テンソルと呼ぶ．

Def. 0.1.15 (Riemann 曲率テンソル). アファイン接続 ∇ から定まる 写像 $\Gamma(TM)^3 \mapsto \Gamma(TM)$

$$R\left(X,Y,Z\right) \equiv R_{X,Y}\left(Z\right) = \left(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(Z) \tag{0.1.26}$$

を **Riemann 曲率テンソル (- curvature tensor)** と呼ぶ.

$R^i_{jkl} \coloneqq \theta^i\left(R\left(e_i, e_j, e_k\right)\right)$ とすると

$$R^i_{jkl} = \left(e_j\left(\gamma^i_{kl}\right) + \gamma^\mu_{kl}\gamma^i_{j\mu}\right) - \left(e_k\left(\gamma^i_{jl}\right) + \gamma^\mu_{jl}\gamma^i_{k\mu}\right) - c^\rho_{jk}\gamma^i_{\rho l}. \tag{0.1.27}$$

定義から $R^i_{jkl} = -R^i_{kjl}$. 他にも，Riemann 曲率テンソルは対称性を持っている.

Prop. 0.1.16 (Bianchi 恒等式). 対称化作用素 $\mathfrak{S}_{x,y,z}\left(f(x,y,z)\right) \coloneqq f(x,y,z) + f(y,z,x) + f(z,x,y)$ を用いる. Riemann 曲率テンソルは Riemann (Levi-Civita) 接続について，第 1 Bianchi 恒等式

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}(R\left(X,Y\right)Z) = 0 \tag{0.1.28}$$

および 第 2 Bianchi 恒等式

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}(\left(\nabla_X R\right)\left(Y,Z\right)W) = 0 \quad (W \in \Gamma(TM)) \tag{0.1.29}$$

を満たす. (証明は ref. Nakahara, Geometry, p. 288)

Riemann 曲率テンソルの縮約を取ると Ricci 曲率テンソルが決まる. つまり，動標構 (e_i) と 双対動標構 (θ^i) によって 2 階共変テンソルが定まり，

$$\mathrm{Ric}(X,Z) \coloneqq \sum_i \theta^i\left(R\left(X, e_i, Z\right)\right). \tag{0.1.30}$$

計量テンソル場と縮約を取ると，スカラー曲率を得る：

$$\mathscr{R} \coloneqq g^{\mu\nu}\,\mathrm{Ric}\left(e_\mu, e_\nu\right), \tag{0.1.31}$$

ただし，$g = g_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu$, $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$. Ricci 曲率テンソルと スカラー曲率は 重力の古典論 (一般相対性理論) において本質的な意味を担っている. なぜなら，それらが "運動方程式" を記述するからである. 第 2 Bianchi 恒等式から，2 階共変テンソル $G \coloneqq \mathrm{Ric} - \dfrac{1}{2}\mathscr{R}g$ は平行になる (ref. Nakahara, Geometry, p. 289). これを **Einstein テンソル (tensor)** と呼ぶ. Einstein テンソルに加えて，宇宙項 Λg とエネルギー・運動量テンソル $\mathscr{T}$ を結んだ方程式

$$G + \Lambda g = \mathscr{T} \tag{0.1.32}$$

を Einstein 方程式という.

0.1.5　接続 1 形式と曲率 2 形式

Riemann テンソル場があると，曲率 2 形式 $\Omega^i_j = \dfrac{1}{2}R^i_{jk\ell}\theta^k \wedge \theta^\ell$ ($R^i_{jk\ell}$ は Riemann 曲率テンソル) が計算できる. この曲率 2 形式と 接続 1 形式は共変微分で結びついている (詳細は割愛):

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j. \tag{0.1.33}$$

もし 動標構が正規直交であったなら，$\gamma^\ell_{ij} = \frac{1}{2}c^\ell_{ij} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2}g^{k\ell}\left(g_{i\mu}c^\mu_{jk} + g_{j\mu}c^\mu_{ik}\right)$ が成り立つから，計量が Riemannian であるとき，

$$\gamma^\ell_{ij} = \frac{1}{2}c^\ell_{ij} - \frac{1}{2}\left(c^i_{j\ell} + c^j_{i\ell}\right). \tag{0.1.34}$$

ただちに $\gamma^i_{\ell j} = -\gamma^j_{\ell i}$ が導け，接続形式が反交換であること $\omega^i_j = -\omega^j_i$ がわかる. このような接続形式は，m 次元多様体 M 上の 主 $\mathrm{SO}(m)$ 束の接続 1 形式である. この意味で，ω^j_i は $\mathfrak{o}(m)$ 値微分形式であって，Ω^i_j は ゲージ群 $\mathfrak{o}(m)$ に基づく曲率 2 形式 である.

Ex. 0.1.17. 球面 S^2 (半径が a) の座標近傍を通常のように, $\theta \in (0,\pi), \varphi \in (0,2\pi)$;

$$U_1 = \{p \in S^2; \iota(p) = (a\cos\theta, a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi), (\theta,\varphi) = \phi_1(p)\} \tag{0.1.35}$$

と取るが，ただし，今 Euclid 座標 $\left(x^i\right)_i$ を用いて $\iota(p) = \left(x^3(p), x^1(p), x^2(p)\right)$ としたことに注意する．これとは別に座標近傍系を構成するには，立体射影を使用すれば良い (ref. 藤岡，多様体). 以下 $M = S^2$ とする．接バンドル TM は $S^2 \times \mathbb{R}^2$ と同型であり，誘導計量は $g|_{U_1} = a^2 d\theta^2 + (a\sin\theta)^2 d\varphi^2$. 接続係数 γ は U_1 上で第 2 種 Christoffel 記号 $\Gamma(U_1,\phi_1)$ と全く同じで

$$\left[\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(U_1,\phi_1)\right] = \left[\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}_{\mu,\nu} \quad \begin{bmatrix}0 & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\\ \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} & 0\end{bmatrix}_{\mu,\nu}\right]_\lambda, \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta \tag{0.1.36}$$

今，TS^2 上の正規直交動標構を考える．接ベクトル $\{\frac{1}{a}(\partial_\theta)_p, \frac{1}{a\sin\theta}(\partial_\varphi)_p\} \subseteq T_pS^2$, $p = \phi_1^{-1}(\theta,\varphi)$ は正規直交基底なので，ベクトル場 $\left\{\frac{1}{a}\partial_\theta, \frac{1}{a\sin\theta}\partial_\varphi\right\}$ は U_1 上の正規直交動標構である．これを $(e_1,e_2) \coloneqq \left(\frac{1}{a}\partial_\theta, \frac{1}{a\sin\theta}\partial_\varphi\right)$ とおく．これらは非可換であり，交換子は直接計算の後 $[e_1,e_2] = -a^{-1}\cot\theta\, e_2$ と求まるから，構造定数は以下の通り：

$$c^2_{12} = -c^2_{21} = -a^{-1}\cot\theta. \tag{0.1.37}$$

故に，接続係数は構造定数から

$$\gamma^1_{22} = c^2_{12} = -a^{-1}\cot\theta, \gamma^2_{21} = c^2_{21} = a^{-1}\cot\theta. \tag{0.1.38}$$

<u>双対動標構 $\left(f^1,f^2\right) = (ad\theta, a\sin\theta d\varphi)$</u> を用いて，接続形式が求まる：

$$\omega^1_2 = \gamma^1_{22}f^2 = -\cos\theta d\varphi (= -a^{-1}\cot\theta f^2), \omega^2_1 = \gamma^2_{21}f^2 = -\omega^1_2. \tag{0.1.39}$$

曲率 2 形式 $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$

$$(\Omega^i_j)_{i,j} = \begin{pmatrix}0 & \sin\theta d\theta\wedge d\varphi\\ -\sin\theta d\theta\wedge d\varphi & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a^{-2}f^1\wedge f^2\\ -a^{-2}f^1\wedge f^2 & 0\end{pmatrix}. \tag{0.1.40}$$

ここで，Riemann 曲率テンソルの (θ,φ) 成分は,

$$R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = 1 = -R^\varphi_{\theta\theta\varphi}, R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta = -R^\theta_{\varphi\varphi\theta} \tag{0.1.41}$$

なので，基底に関するテンソルの変換則から，正規直交基底に関する成分は

$$R^2_{121} = a^{-2} = -R^2_{112}, R^1_{212} = a^{-2} = -R^1_{221}. \tag{0.1.42}$$

したがって $\sum_{k,l\in\{1,2\}} \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}f^k\wedge f^\ell = \Omega^i_j$.

次に，Ricci 曲率を計算すると，$\mathrm{Ric} = a^{-2}f^1\wedge f^1 + a^{-2}f^2\wedge f^2$ となるから，スカラー曲率は

$$\mathscr{R} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = 2a^{-2} \tag{0.1.43}$$

∎

Ex. 0.1.18 (Möbius の帯). 可微分多様体の例として，Möbius の帯を取り上げる．これは向き付け不可能な コンパクト 2 次元多様体で，接バンドル (接束) が自明でない．3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた Möbius の帯 のパラメータ表示は,

$$\vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix}\left(1+t\cos\frac{s}{2}\right)\cos s\\ \left(1+t\cos\frac{s}{2}\right)\sin s\\ t\sin\frac{s}{2}\end{pmatrix}, \quad s\in(-\pi,\pi), t\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{0.1.44}$$

必要に応じて パラメータの定義域を変更するが，今 境界や開被覆が必要ないので (定義域を) $\mathbb{R}^2$ の開集合とした．座標基底は以下のように求められる．

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}(s,t) = \begin{pmatrix}-\frac{t}{2}\sin\frac{s}{2}\cos s - \left(1+t\cos\frac{s}{2}\right)\sin s\\ -\frac{t}{2}\sin\frac{s}{2}\sin s + \left(1+t\cos\frac{s}{2}\right)\cos s\\ \dfrac{t}{2}\cos\dfrac{s}{2}\end{pmatrix} \equiv e_s, \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(s,t) = \begin{pmatrix}\cos\frac{s}{2}\cos s\\ \cos\frac{s}{2}\sin s\\ \sin\frac{s}{2}\end{pmatrix} \equiv e_t \tag{0.1.45}$$

t 方向の接ベクトル e_t には s の周期 4π のファクターが掛かっている．ここで，$\left(\cos\frac{\pm\pi}{2}, \sin\frac{\pm\pi}{2}\right) = (0, \pm 1)$ だから枠 (frame) が $(-\pi, \pi) \ni s$ 上を 1 周して戻って来る時に，

$$\lim_{s\to\pi}(e_s, e_t) = \left(\left(-\frac{t}{2}, -1, 0\right), (0, 0, -1)\right), \lim_{s\to-\pi}\left(\left(\frac{t}{2}, -1, 0\right), (0, 0, 1)\right), \tag{0.1.46}$$

と異なる枠になっている (特に，$t = 0$ の時に e_t だけが反対向きになる)．局所近傍における誘導計量を計算すると，

$$\hat{g}_{(s,t)} = \begin{pmatrix} g_{ss} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_{ss} = 1 + 2t\cos\frac{s}{2} + \frac{3t^2}{4} + \frac{1}{2}t^2\cos s. \tag{0.1.47}$$

計量があればその成分によって Christoffel 記号が計算できる．また今 C^∞ 級座標近傍が取れているので，その Christoffel 記号が接続係数と一致する．このように局所的には幾何構造が考えられるが，しかし大域的には不可能であって，自明な接バンドルの意味でのアファイン接続は考えられない．この点はベクトル束の接続を論じる際に顧みることとする． ∎