a

a

2024 11/29

0.1 Rindler spacetime

0.2 相対論的な等加速度運動

Minkowski 時空における (相対論的) 等加速度運動を考える．相対論的運動方程式は，Lorentz (直交) 座標系 $(ct, \vec{x})$ で空間成分と時間成分に分解される (F^j は力)：

$$\begin{aligned} p\left(t\right) &= \left(mc\gamma(t), m\vec{v}(t)\gamma(t)\right) \\ \frac{dp^j}{dt}\left(t\right) &= F^j\left(t\right) \quad (j=1,2,3) \\ \frac{dp^0}{dt}\left(t\right)\cdot c &= \langle \vec{F}\left(t\right), \vec{v}(t)\rangle_{\mathbb{R}^3} \quad (\vec{F} \coloneqq (F^j)_j) \end{aligned} \tag{0.2.1}$$

$(\|\vec{v}(t)\|/c)^2 \sim 0$ と近似した時に Newton 力学における 等加速度運動と等価になる運動は，$\vec{F} = m\vec{a}$ を代入した

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}(t)\gamma(t)\right) = m\vec{a} \tag{0.2.2}$$

であり，以下ではこれについて 空間 1 次元の場合を考える．初速度 0 で正方向に運動する $(a > 0)$ とする．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = a \iff \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = at \iff v = \frac{at}{\sqrt{1+\left(at/c\right)^2}} \tag{0.2.3}$$

したがって $t = 0$ のとき $x = x(0)$ であるから，

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{at'}{\sqrt{1+\left(at'/c\right)^2}}dt' = x(0) + \left(\left(1+\left(at/c\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\frac{c^2}{a} \tag{0.2.4}$$

両辺を二乗すると

$$\left(a\left(x\left(t\right)-x\left(0\right)\right)/c^2+1\right)^2 = 1+\left(at/c\right)^2 \tag{0.2.5}$$

という双曲線の方程式になるので，媒介変数表示

$$t = \frac{c}{a}\sinh u, \, x\left(t\right) = x\left(0\right) + \frac{c^2}{a}\left(\cosh u - 1\right) \quad (u > 0) \tag{0.2.6}$$

がわかる．最後に，固有時を求める．v に t を代入すると $\dfrac{v}{c} = \tanh u$ だから

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v\left(t\right)^2}{c^2}}dt = \frac{c}{a}du. \tag{0.2.7}$$

つまり，τ と u は互いに線型なので，原点を合わせると $\tau = \frac{c}{a}u$. ゆえに，等加速度運動の解は $\tau > 0$ に対して，

$$t = \frac{c}{a}\sinh\left(a\tau/c\right), \, x\left(t\right) = x\left(0\right) + \frac{c^2}{a}\left(\cosh\left(a\tau/c\right) - 1\right) \tag{0.2.8}$$

であり，$\tau < 0$ にもこれは拡張可能である．

解として $(t, x(t))$ は適しているのかを確かめる．まず，$\gamma(t) = \cosh u$ なので

$$\frac{d}{dt}\left(v(t)\gamma(t)\right) = c\frac{d}{dt}\left(\sinh u\right) = c\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{c}t\right) = a \tag{0.2.9}$$

なので，Eq. (0.2.2) の左辺は右辺と等しい．次に Eq. (0.2.1) を確かめると，

$$\text{L.H.S.} = \frac{d}{dt}mc^2\gamma\left(t\right) = mc^2\frac{d}{dt}\sqrt{1 + \left(at/c\right)^2} = mc^2 v(t)a/c^2 = mav(t) = \text{R.H.S.} \tag{0.2.10}$$

等加速度運動では 局所 Lorentz 系はどのように計算 (観測) されるだろうか．$\gamma(v\left(t\right)) \equiv \gamma(t) = \cosh u$ なので $\beta(t) = v(t)/c$ とおくと 速度 $\beta(t)$ についての「基底の」Lorentz 変換 は

$$L = \left({L_\mu}^\nu\right)_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \tag{0.2.11}$$

である (成分の Lorentz は L の逆行列)．4 元速度 (次元付き) を $U^\mu \left(\mu = 0, 1\right)$ とすると

$$\left(U^\mu(t)\right)_\mu = \left(c\gamma\left(t\right), v\left(t\right)\gamma\left(t\right)\right) = c\left(\cosh u, \sinh u\right). \tag{0.2.12}$$

4 元加速度 a^μ をまず Lorentz 因子によって求めると，Eq. (0.2.1) に従って

$$\left(a^\mu\right)_\mu = \left(\gamma\left(t\right)\cdot av\left(t\right)/c, \gamma\left(t\right)\cdot a\right) = \left(a\sinh u, a\cosh u\right) \tag{0.2.13}$$

であって，これは 4 元速度の 固有時微分とたしかに等しい． :

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{du}{d\tau}\frac{dU^\mu}{du} = \left(\mu\text{-th component of}\right)\ \frac{a}{c}c\left(\sinh u, \cosh u\right) = a^\mu. \tag{0.2.14}$$

このように，固有時刻 τ における局所 Lorentz 系では，標構 $\partial'_\mu = {L_\mu}^\nu\partial_\nu$ を用いて 時間方向 $(\partial'_0)_\tau$ に 4 元速度 U^μ が伸びており，1 軸方向 $(\partial'_1)_\tau$ に 4 元加速度 a^μ が伸びている格好になる．

0.3 4 元形式で解く等加速度運動

この解を，今度は 4 元形式で求める．質量を $m > 0$, 曲線を X^μ, 4 元速度を U^μ, 4 元加速度を a^μ として，

$$m\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2}\left(\tau\right) = ma^\mu\left(\tau\right), \quad \left(X^\mu\left(0\right)\right) = \left(0, \overrightarrow{X}\left(0\right)\right), \quad \left(U^\mu(0)\right) = \left(c \equiv 1\right)\left(1, \overrightarrow{0}\right), \quad \left(a^\mu(0)\right) = \left(0, \overrightarrow{a}\right). \tag{0.3.1}$$

ここで，4 元加速度は一定ではない．もし一定とすると，4 元速度の規格化条件と 加速度・速度の直交条件 から $a^\mu a_\mu = 0$ が導かれるので．加速度 a^μ がヌルとなり初期条件と矛盾する．以下 1 次元運動として一般性を失わないので，1 次元的加速度 $\overrightarrow{a} = (a) \in \mathbb{R}_{>0}$ を用いる．局所慣性系のもとでベクトルの成分を求めるために $\Lambda\left(\tau\right) \coloneqq c^{-1}\left(\begin{smallmatrix} U^0(\tau) & -U^1(\tau) \\ -U^1(\tau) & U^0(\tau) \end{smallmatrix}\right)$ を用いる．局所慣性系 ($\overrightarrow{a}$ で加速されて動く観測者) のもとで 4 元加速度は

$$c\left({\Lambda^\mu}_\nu a^\nu\right)^\mathsf{T}_\mu = \begin{pmatrix} U^0 & -U^1 \\ -U^1 & U^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^0a^0 - U^1a^1 \\ -U^1a^0 + U^0a^1 \end{pmatrix}. \tag{0.3.2}$$

のように観測され，第 1 成分は直交条件より $-U^\mu a_\mu = 0$ と求められる．ここで，$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, +1)$ で，これは相対論的に自明な関係である．一方，第 2 成分 (空間方向) は 等加速度という要請から

$$\underline{-U^1a^0 + U^0a^1 = ca} \Longleftrightarrow U^0\frac{dU^1}{d\tau} - U^1\frac{dU^0}{d\tau} = ca. \tag{0.3.3}$$

4 元速度は $-\left(U^0\right)^2 + \left(U^1\right)^2 = c^2$ のように双曲線を描くので媒介変数 (rapidity) 表示をすることができる．パラメータ $u \in \mathbb{R}$ を用いると，$\left(U^0, U^1\right) = c\left(\cosh u, \sinh u\right)$, $\left(\frac{dU^0}{d\tau}, \frac{dU^1}{d\tau}\right) = c\frac{du}{d\tau}\left(\sinh u, \cosh u\right)$ なので，

$$c^2\frac{du}{d\tau} = ca \Longleftrightarrow u = a\tau/c \tag{0.3.4}$$

というように 初期条件から固有時が求まる．あとは前節と同様で，曲線 X^μ が求まる．これが “$(\|\vec{v}(t)\|/c)^2 \sim 0$ と近似した時に Newton 力学における 等加速度運動と等価になる” ことに対する厳密な定式化を与える．このような現象は，物理的には，ロケットが一定の力で加速されて高速になる状況に対応している．質量の減少を無視できると仮定したとき，一定出力で噴射するエンジンで飛ぶロケットでは，中にいる人（観測者）は Newton 的に（局所慣性系として）一定加速度 ${\Lambda^\mu}_\nu a^\nu$ で加速されているように感じる．しかし，慣性系の観測者からは 4 元加速度は a^μ という成分のもとに観測されるのである．

§1　埋め込み

1.1　定義

Def. 1.1.1. 定義. 位相空間 (X,T) から位相空間 (Y,S) への**埋め込み**とは，X **から** Y **の部分空間への同相写像**である．つまり，X から Y への埋め込みとは，写像 $f: X \to Y$ であって $(f[X], S_{f[X]})$ が (X,T) と同相となるものである．

特に，以下の性質を満たす．

1. 埋め込みは連続
2. 埋め込みは単射

1.2　例

Ex. 1.2.1. 例. $X=\{1,2\}$, $Y=\{1,2,3\}$ および $T=2^X=\{\{\},\{1\},\{1,2\}\}$, $S=\{\{\},\{1\},\{1,2\},\{3,1\},Y\}$ とする．

$(f(1),f(2))=(1,2)$ で定まる写像 f は (X,T) から (Y,S) への埋め込みである．

一方，$(f(1),f(2))=(2,1)$ で定まる異なる写像 f は，$f^{-1}[\{1\}]=\{2\}$ を満たし，連続写像ではないので埋め込みでもない．∎

Ex. 1.2.2. 例. n 次元 実数 空間 $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ は $(n+1)$ 次元 実数 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ において，超平面

$$P=\{(x_j)_{j=1}^{n+1} \mid x_{n+1}=0 \text{ and } \forall j\in\{1,\dots,n\}, x_j\in\mathbb{R}\}$$

として埋め込まれる．ただし，ここで埋め込みは 包含写像 $\iota\colon P\to\mathbb{R}^{n+1}$．∎

Ex. 1.2.3. 例. 直前の例で 次元の組 $(n,n+1)$ を 一般に $(m,n)\,(m\le n)$ としても同様に埋め込みが成り立つ．∎

1.3　第 1 基本形式と第 2 基本形式

Def. 1.3.1 (第 1 基本形式). Gauss 幾何学における第 1 基本形式は接平面上のベクトルの計量の値と等しい．C^r 級多様体 M 上のベクトル $\partial_\mu := \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_pM$ を使って，計量 g によって第 1 基本形式 が

$$f^{(1)}_{\mu\nu}=g\left(\partial_\mu,\partial_\nu\right) :\Leftrightarrow f_{\mu\nu}\left(p\right)=g_p\left(\left(\partial_\mu\right)_p,\left(\partial_\nu\right)_p\right)\quad(p\in M) \tag{1.3.1}$$

と定義される．または M 上のベクトル場 X,Y に対して一般に，

$$f^{(1)}\left(X,Y\right)=g\left(X,Y\right). \tag{1.3.2}$$

Ex. 1.3.2. 2 次元 Euclid 空間に埋め込まれた C^1 級曲線 (グラフ)

$$M=\{(x,f\left(x\right))\,|x\subseteq U\in O\left(\mathbb{R}\right)\} \tag{1.3.3}$$

(ただし $O(\cdot)$ は自然な位相) を例に取る．点 $p=(x,f\left(x\right))\in M$ における $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル $(1,f'\left(x\right))\in T_p\mathbb{R}^2$ は M 上の接ベクトルでもある．つまり，実数のパラメータ u を $\mathbb{R}^2$ における x 座標とすると，$\partial_u=\partial_x+f'\left(x\right)\partial_y$ が得られる．この時 M 上の誘導計量は $\left(h_{ij}\left(p\right)\right)_{i,j}=\left(1+f'\left(x\right)^2\right)$．つまり，

$$h_p\left(\partial_u,\partial_u\right)=g_{\iota(p)}\left(\partial_x+f'\left(x\right)\partial_y,\partial_x+f'\left(x\right)\partial_y\right)=g_{\iota(p)}\left(\partial_x,\partial_x\right)+f'\left(x\right)^2 g_{\iota(p)}\left(\partial_y,\partial_y\right) \tag{1.3.4}$$

(ベクトルがどの点にあるかは省略した)．

さらに，弧長パラメータ s をもちいると，$ds=\sqrt{1+f'\left(x\right)^2}dx$ だから，誘導計量の成分は 1 となり $h=ds\otimes ds$ ∎

Ex. 1.3.3. 同じように，3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた (簡単のため C^2 とする) 曲面

$$M = \left\{(u, v, f(u, v)) \mid (u, y) \in U \subseteq O\left(\mathbb{R}^2\right)\right\} \tag{1.3.5}$$

を考えよう．曲線と同じようにパラメータ u を設定し，次元を上げてもうひとつのパラメータ $v\,(=y)$ を用意した．この時 M 上の誘導計量は，

$$(h_{ij}(p))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_v f_u & 1+f_v^2 \end{pmatrix} \tag{1.3.6}$$

であって，これが曲面 M の第 1 基本形式と等しい．ここで，接ベクトル場は $\partial_u = \partial_x + f_u \partial_z$ (ただし $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$), $\partial_v = \partial_y + f_v \partial_z$ (ただし $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$) を用いた．添字 $i=1$ が u 座標，また $i=2$ が v 座標 を表している．この第 1 基本形式 は固有値・固有ベクトルとして

$$(\lambda, v) = (1, (-f_v, f_u)^{\mathsf{T}}), (\lambda, v) = (1 + f_u^2 + f_v^2, (f_u, f_v)^{\mathsf{T}}) \tag{1.3.7}$$

をもっている． ∎

Def. 1.3.4 (第 2 基本形式). Gauss 幾何学における 第 2 基本形式は，曲面上の点と接平面の距離に関する主要項で，M が N に埋め込まれた超曲面とし，

- X, Y を N 上のベクトル場，
- n を超曲面の単位法線ベクトル

とすると，

$$f^{(2)}(X, Y) := g\left(\nabla_X Y, n\right) n \tag{1.3.8}$$

で定義される．[*1] ただし，$\nabla_X Y$ は X 方向の Y の共変微分で，N の局所座標系 $(x^\mu)_\mu$ と Christoffel 記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ によって以下で定義される：

$$\left(\nabla_X Y\right)_p = \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu}(p) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(p)\, Y^\nu(p)\right) X^\mu(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p. \tag{1.3.9}$$

Ex. 1.3.5. 再び曲線を考える．ここでは f は 2 階微分可能とする．曲線 M 上の接ベクトル場 $X = \partial_u = \partial_x + f'(x)\, \partial_y$ について，第 2 基本形式 $f^{(2)}_{uu} = f^{(2)}(\partial_u, \partial_u)$ を求めたい．まず，グラフ上の法線ベクトルは接ベクトルを 90° 回転させ，$n = (-f'(x), +1)/\ell(x)$, $\ell(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ ととる．接ベクトルと法ベクトルは左手系をつくる．次に，接ベクトルを曲線上に沿って微分 (共変微分) すると

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u |_{(u, f(u))} = \frac{\partial f'}{\partial x}(x) \cdot 1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(x, f(x))} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(x, f(x))} \tag{1.3.10}$$

と共変微分が表せる (ただし，$(u, f(u))$ は M が $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれたときの点の位置)．よって，

$$f^{(2)}_{uu} = \langle \nabla_{\partial_u} \partial_u, n \rangle_{\mathbb{R}^2} n = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \frac{1}{\ell(x)} \cdot n \tag{1.3.11}$$

となり，曲面上の量に関しては $f^{(2)}_{uu} \cdot n = \dfrac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$. ∎

Ex. 1.3.6. 同様に曲面についても 考える．$\partial_u = \partial_x + \dfrac{\partial f}{\partial x} \partial_z$ および $\partial_v = \partial_y + \dfrac{\partial f}{\partial y} \partial_z$ だから

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u |_{(u, v, f(u, v))} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{(x, y, f(x, y))}, \quad \nabla_{\partial_v} \partial_v |_{(u, v, f(u, v))} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{(x, y, f(x, y))}. \tag{1.3.12}$$

[*1] Gauss の曲面論では単に係数部分を行列にして第 2 基本形式と呼ぶ.

加えて，

$$\nabla_{\partial_u}\partial_v|_{(u,v,f(u,v))} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,f(x,y))}, \quad \nabla_{\partial_u}\partial_v|_{(u,v,f(u,v))} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,f(x,y))}. \tag{1.3.13}$$

今，$\mathbb{R}^3$ の外積を用いると法ベクトル場が

$$\partial_u \times \partial_v = -\frac{\partial f}{\partial x}\partial_x - \frac{\partial f}{\partial y}\partial_y + \partial_z \tag{1.3.14}$$

だから，長さ $\ell(u,v) = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right]^2 + \left[\frac{\partial t}{\partial v}(n,v)\right]^2}$ によって第 2 基本形式が

$$\begin{pmatrix} f^{(2)}_{uu} & f^{(2)}_{uv} \\ f^{(2)}_{vu} & f^{(2)}_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell(n,v)}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} \tag{1.3.15}$$

と求まる． ∎