

幾何学勉強 PDF

K.R.

2025 1/7

Part I

Photon Surface

§1 Connection

ファイバーバンドルの接続は幾何学や物理学において基本的な位置を占める．まず Riemann 接続を用いて一般相対性理論の確立された枠組みを整理するとともに，電磁気学を扱う．その後，ベクトル束の接続と主束の接続を論じた後にゲージ場の古典論を説明する．

1.1 可微分多様体上の接バンドルの接続

- M : C^r 級可微分多様体 ($r \geq 2$) (m 次元)
- TM : M の接バンドル $TM := \coprod_{p \in M} T_p M \equiv \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$
- $\Gamma(TM) \equiv \Gamma(TM)$: C^r 級ベクトル場全体の集合

まずベクトル束の (自明な) 一例である接束のアファイン接続を定義し，よく知られた定理である Riemann (Levi-Civita) 接続の一意的存在を証明する．以下，ベクトル場として大文字の X, Y, Z などを使い，添字に $i, j, k, l(\ell), \mu, \nu$ などの標準的な文字を用いる．特に断らずに Einstein の縮約記法も用いる．

1.1.1 ベクトル場のアファイン接続

Def. 1.1.1 (アファイン接続). 以下を満たす写像 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM); (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ を M 上のアファイン接続 (affine connection) という．これは英語読みだが，単に発音の問題で，アフィン接続とも呼ばれる．

- ∇ は引数 2 つのベクトル場について，加群準同型である．
 - $\nabla(X, Y + Z) = \nabla(X, Y) + \nabla(X, Z)$
 - $\nabla(X + Y, Z) = \nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$
- $\forall f \in C^r(M), \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, i.e. $\nabla(fX, \cdot) = f \nabla(X, \cdot)$ (1 つ目の引数について， $C^r(M)$ -準同型)
- $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$ (Leibniz 則)

Remark. ベクトル場 v に対する通常の Leibniz 則は $v(fg) = v(f)g + f v(g)$ ($f, g \in C^r(M)$) のような形をしている．これはスカラー場の環 $C^r(M)$ の準同型ではなく，積の微分に対応することに注意する． $X(f) =: \nabla_X f$ と決めると， $C^r(M)$ -加群 $\Gamma(TM)$ 上の「スカラー倍の微分」(代数の積に関するいわゆる微分ではない) を各々の ∇_X が定める．

さて，アファイン接続を $(1, 1)$ テンソル場を返す写像として読み替えることができる．つまり， $\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM \otimes T^*M)$ として，

$$\nabla_X Y =: (\nabla Y)(X) \in \Gamma(TM) \iff (\nabla Y)_p(X_p) := (\nabla_X Y)_p \quad \forall p \in M. \quad (1.1.1)$$

この $(1, 1)$ 型テンソル場は， X 方向の共変微分 (アファイン接続) と呼ばれ，以下の性質を満たす．

1. (加法的) $\nabla(Y + Z) = \nabla Y + \nabla Z$
2. (Leibniz 則) $\nabla(fY) = Y \otimes df + f \nabla Y$ ^{*1}

2 つめの Leibniz 則を証明するには，定義から

$$(\nabla(fY))(X) = \nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y = (Y \otimes df + f \nabla Y)(X) \quad (1.1.2)$$

とする．ただし，最後に $(df)_p(X_p) = X_p(f)$ を用いた (ref. Arai, GR). 以上より，物理において通常添字のテンソル記法で書かれる意味での共変微分を定義できる．

Def. 1.1.2 (共変微分). ベクトル場 Y の共変微分 (または単にアファイン接続) ∇Y とは，すべてのベクトル場 X

^{*1} 第 1 項のテンソル積は微分の添字が後ろに来るように $Y \otimes df$ となっているが，一般のベクトル束の共変微分を $df \otimes Y$ の順番で定めても問題ない．

に対して以下を満たす $(1, 1)$ 型テンソル場である：

$$(\nabla Y)(X) := (\nabla_X Y). \quad (1.1.3)$$

Remark. 自然同型 $T_p M \cong (T_p^* M)^*$ を用いて, $(\nabla Y)(\Phi, X) = (\nabla_X Y)(\Phi) \quad \forall \Phi \in \Gamma(T^* M), \forall X \in \Gamma(TM)$ のように定める流儀もある (ref. Arai, GR)

基底で展開すると, テンソル場 $v \in \Gamma(TM \otimes T^* M)$ について, 接空間の基底 $(e_i)_p$ と双対基底 $(\theta^j)_p$ を用いて

$$\nabla v = \nabla_j v^i e_i \otimes \theta^j \quad ((e_i)_p \in T_p M, (\theta^j)_p \in T_p^* M, \forall p \in M). \quad (1.1.4)$$

この時の展開係数 (成分) を $\nabla_j v^i \equiv v^i_{;j}$ のように書く. アファイン接続は, 疑似線型接続 あるいは単に線型接続とも呼ばれる.

これでベクトル場のアファイン接続, つまり可微分多様体上でベクトル場をつなげる方法論が決まったわけである. 次は, 具体的に基底 (動標構) によって計算する方法を定める. 今, M の開集合 U 上の動標構 $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ と 双対動標構 $(\theta^j)_{j=1,\dots,m}$ によって, 動標構の共変微分を展開することができる: (ref. Arai, GR, p. 233)

$$\nabla e_\nu =: \gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda \otimes \theta^\mu \text{ (on } U\text{)}. \quad (1.1.5)$$

この時の展開係数 $\gamma_{\mu\nu}^\lambda$ を 動標構 (e_i) に関する アファイン接続 ∇ の 接続係数 (**connection coefficients**) という. 等価な書法として,

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu \equiv \nabla_\mu e_\nu = \nabla(e_\mu, e_\nu) =: \gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda \quad (1.1.6)$$

と定めることで $(\nabla e_\nu)(e_\mu) = \gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda \otimes \theta^\mu(e_\mu) = \gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda \otimes \delta^\mu_\mu \equiv \gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda$ と示することができる. これによって, 動標構さえあれば, ∇ の具体計算が可能になった.

あるいは, $M \equiv (M, \mathcal{A})$ (記号の濫用) は多様体なので座標近傍が取れる. 今この一つを $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $\phi = (x^\mu)_\mu$ (μ は m この添字), とする. すると, 座標基底 $(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = (\partial_\mu)$ について アファイン接続を以下のように表す.

$$\nabla(\partial_\mu, \partial_\nu) =: \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(U, \phi) \partial_\lambda \in \Gamma(TM), \quad (1.1.7)$$

ここで, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(U, \phi)$ をアファイン接続の チャート (U, ϕ) に関する 接続係数 (**connection coefficients**) という. 後で見るように, 動標構が可換な場合には, 一般相対論の教科書で広く用いられている「計量の偏微分」の表式で定めれば良い.

以上述べてきた意味で, ベクトル場の共変微分がゼロであることを ベクトル場が 平行 であるという.

Ex. 1.1.3. 例えば, Euclid 空間で, 定ベクトル場 $X = c^j \partial_j \quad (c^j \in \mathbb{R}, \partial^j = \frac{\partial}{\partial x^\mu})$ は $\nabla X = 0$ を満たす. また 平行なベクトル場はそれのみに限られる. ■

1.1.2 アファイン接続の一般化

ここで, テンソル場についての アファイン接続の Leibniz 則 $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$ を要求する (ref. Nakahara, p. 270). すなわち, アファイン接続はテンソルの線型構造を保つような, いわゆる微分の構造であると仮定する. 共変微分 ∇ の形に書き直せば, $(\nabla(T_1 \otimes T_2))(X) = \nabla T_1(X) \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla T_2(X)$ が成立する.

最初に, アファイン接続がスカラー場に一般化される. Leibniz 則 $\nabla(fY) = Y \otimes df + f \nabla Y$ に, 上で考えた Euclid 空間の定ベクトル場を代入してみる. 簡単のため 1 次元部分空間 $\text{span}\{e_1\}$ のみ考えればよい. 直ちに $\nabla(fe_1) = e_1 \otimes df$ であるから, テンソル積代数構造に関して $\nabla(e_1 \otimes f) \equiv \nabla(fe_1)$ なる同一視をとれば, $\nabla f := df$ と定義するのが妥当である. この意味で, スカラー場に共変微分を一般化するための, 以下の定義が得られる.

Def. 1.1.4 (スカラー場の共変微分). C^r 級多様体 M 上の スカラー場 $f \in C^r(M)$ の $(X \in \Gamma(TM))$ 方向の共変微分とは,

$$\nabla_X f := df(X), \nabla f = df. \quad (1.1.8)$$

次は、微分形式 (1 階共変テンソル) への拡張を考える。スカラー場とベクトル場の アファイン接続は分かっているから、微分形式とベクトル場のペアリングに関して、Leibniz rule

$$\nabla_X (\phi(v)) := (\nabla_X \phi)(v) + \phi(\nabla_X v); \quad \forall v, X \in \Gamma(TM), \forall \phi \in \Gamma(T^*M), \quad (1.1.9)$$

を満たすように $\nabla_X \phi$ を定める (ref. Arai, GR, p. 250). すなわち, $\phi(v) \equiv \langle \phi, v \rangle$ と書くと

$$\langle \nabla_X \phi, v \rangle := \nabla_X \langle \phi, v \rangle - \langle \phi, \nabla_X v \rangle. \quad (1.1.10)$$

成分で書くと, $\nabla_{e_\mu} \phi = (\nabla_\mu \phi)_\nu \theta^\nu$; $(\nabla_\mu \phi)_\nu := e_\mu(\phi_\nu) - \gamma_{\mu\nu}^\lambda \phi_\lambda$. これは、座標近傍の上では、共変ベクトル $A \equiv (A_\mu)$ の共変微分の公式 $A_{\nu;\mu} := \partial_\mu A_\nu - \gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda$ のような表式をもつ。

Def. 1.1.5 (微分形式の共変微分). C^r 級多様体 M 上の 微分形式 $\phi \in \Gamma^r(T^*M)$ の $(X \in \Gamma^r(TM))$ 方向の共変微分とは、

$$(\nabla_X \phi)(v) := \nabla_X (\phi(v)) - \phi(\nabla_X v); (\nabla \phi)(X, v) := (\nabla_X \phi)(v), \quad \forall v \in \Gamma^r(TM). \quad (1.1.11)$$

ここで、2 階共変テンソル $\nabla \phi$ を X, v からの写像として定めた。

最後に、アファイン接続がテンソル場についての Leibniz 則 $\nabla_X (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$ (純テンソル場の Leibniz 則 から導くこともできる (ref. Arai, GR, p. 254)) に基づいて、同様に $\nabla_X T$ が定義される。したがって、反変なら (+ 接続係数の項)、共変なら (- 接続係数の項) を偏微分に足せば座標近傍での成分がわかる。

Def. 1.1.6 (テンソル場の共変微分). 開集合 $U \subseteq M$ 上の (r, s) 型テンソル場を $T = \sum_{p \in \mathfrak{S}_r, q \in \mathfrak{S}_s} T_{q(\nu)}^{p(\mu)} E_{p(\mu)}^{q(\nu)}$ とし、ただし $\mu = (1, \dots, r), \nu = (1, \dots, s)$ で縮約 (和) は 各順序対に作用するすべての置換 p, q について取るとする。また、展開係数を $T_{q(\nu)}^{p(\mu)} \equiv T_{q(1)\dots q(s)}^{p(1)\dots p(r)} \in C^r(U; \mathbb{R})$, テンソル空間の基底を $E_{p(\mu)}^{q(\nu)} = e_{p(1)} \otimes \dots \otimes e_{p(r)} \otimes \theta^{q(1)} \otimes \dots \otimes \theta^{q(s)}$ と書いた。 T の X 方向の共変微分は Leibniz 則と加法準同型性 $(\nabla_X (T_1 + T_2) = \nabla_X T_1 + \nabla_X T_2)$ によって定義され、

$$\nabla_X (T) = \nabla_X \left(\sum_{p \in \mathfrak{S}_r, q \in \mathfrak{S}_s} T_{q(\nu)}^{p(\mu)} E_{p(\mu)}^{q(\nu)} \right) = \sum_{p \in \mathfrak{S}_r, q \in \mathfrak{S}_s} \left[X \left(T_{q(\nu)}^{p(\mu)} \right) E_{p(\mu)}^{q(\nu)} + T_{q(\nu)}^{p(\mu)} \nabla_X E_{p(\mu)}^{q(\nu)} \right]. \quad (1.1.12)$$

また テンソル場を $T_p: \bigotimes_s T_p M \rightarrow \bigotimes_r T_p M$ なる写像と読み替えることによって、 T の共変微分を、

$$(\nabla T)(X, v_1, \dots, v_s) := (\nabla_X T)(v_1, \dots, v_s) \quad (1.1.13)$$

と定義する。

Remark. 自然同型 $T_p M \cong (T_p^* M)^*$ によって $T_p: \bigotimes_r T_p^* M \otimes \bigotimes_s T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ と読み替えても同様. (ref. Arai, GR, p. 257)

この意味で、 $\nabla T = 0$ を満たす M 上のテンソル場は アファイン接続 ∇ に関して 平行 であるという。

Ex. 1.1.7. 2 階共変テンソル場 S の共変微分を例に取る。双対動標構によって S が $S_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu$ と展開される。この時、 $\nabla_X (S(v, w)) = (\nabla_X S)(v, w) + S(\nabla_X v, w) + S(v, \nabla_X w)$ を証明しよう。Def 1.1.6 から、

$$\nabla_X S = \nabla_X (S_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu) = X(S_{\mu\nu}) \theta^\mu \otimes \theta^\nu + S_{\mu\nu} \nabla_X (\theta^\mu) \otimes \theta^\nu + S_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \nabla_X (\theta^\nu) \quad (1.1.14)$$

だから、これを利用して $(\nabla_X S)(v, w)$ ($v \in \Gamma(TM)$) の値を計算する。 $(\nabla_X \theta^\mu)(v) = -X^\lambda v^\sigma \gamma_{\lambda\sigma}^\mu$ をこれに代入して、スカラー場の微分 $X(S_{\mu\nu} v^\mu w^\nu)$ の Leibniz 則を使うと、 $S(v, w) = S_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$ なので、

$$(\nabla_X S)(v, w) = \nabla_X (S(v, w)) - S(\nabla_X v, w) - S(v, \nabla_X w) \quad (1.1.15)$$

が導かれる。右辺第 2, 第 3 項を移行すれば、2 階共変テンソル場でも ペアリングの Leibniz 則のような公式が成り立つことが分かった。(ただし、関数は十分滑らかなものとした。) ■

1.1.3 Riemann (Levi-Civita) 接続

次に多様体 M が計量を備えている場合を考える．つまり， $g \in \Gamma\left(\overset{2}{\otimes}_S T^*M\right)$ を C^r 級計量とする．計量は，物理的に妥当なレベルの仮定によって，アファイン接続を一意に決定する，という関係がある．

準備として，捩率を定義する．捩率は，可微分多様体がどれくらい捩れていて，微分に対して素直な形をしていないのか，を表す量である．

Def. 1.1.8 (可微分多様体の捩率). C^r 級可微分多様体 M 上のベクトル場を $X, Y \in \Gamma^r(TM)$ とする．

- 捩率: $\tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$
- (1, 2) 型 捩率テンソル場 $T = T_{ij}^\mu e_\mu \otimes \theta^i \otimes \theta^j$: $T_{ij}^\mu = \theta^\mu(\tau(e_j, e_i))$
- 捩率形式 $\tau^\mu := \frac{1}{2} T_{ij}^\mu \theta^i \wedge \theta^j$

このような捩率は，可微分多様体の捩れ方を表している．

以上で準備した捩率と，計量に対して性質の良いアファイン接続を作る．具体的には，計量の共変微分がゼロで，捩率もゼロであるようなものを **Riemann (Levi-Civita) 接続** という．Riemann (Levi-Civita) 接続は計量つき多様体において一意に定まる基本的な量である．

Def. 1.1.9 (一般 Riemann 多様体上の Riemann (Levi-Civita) 接続). C^r 級可微分多様体 M が計量 g と共変微分 ∇ を備えているとする．

1. 計量が平行: $\nabla g = 0 \Leftrightarrow (\nabla g)(X, Y, Z) = 0, \forall X, Y, Z \in \Gamma^r(TM)$
2. 捩率がゼロ (torsion-free): $\tau(X, Y) = 0$

ここで，Ex. 1.1.7 に示したとおり， $(\nabla g)(X, Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$ ．計量が平行であるようなアファイン接続 (疑似線型接続) のことを，計量的 であるともいう．

簡単にこれらを成分表示して，テンソルの足で意味を顕にしてみよう．

Prop. 1.1.10. 計量を動標構 (e_i) の双対動標構 (θ^j) で $g_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu$ のように展開できたとする．このとき，計量が平行ならば，定義から $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ．また， $(g_{\mu\nu})$ の逆行列 $(g^{\lambda\mu})$ について， $g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda$ *2 だから， $\nabla_\mu (g^{\lambda\mu}) = 0$ (計量が平行ならば)．

Prop. 1.1.11. 捩率は接続係数と構造定数で展開でき，

$$\tau(e_i, e_j) = (\gamma_{ij}^l - \gamma_{ji}^l - c_{ij}^l) e_l, T_{ij}^\mu = \gamma_{ij}^\mu - \gamma_{ji}^\mu - c_{ij}^\mu. \quad (1.1.16)$$

さて，この節の主眼である **Riemann 幾何学の基本定理** を証明しよう．

Thm. 1.1.12 (Riemann 幾何学の基本定理). 一般 Riemann 多様体上に Riemann (Levi-Civita) 接続は一意に存在する．これは Riemann 幾何学の基本定理 と呼ばれることもある (ref. Nakahara, Geometry)．

Pf. アファイン接続 $\nabla: (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ が存在するとする． $(\nabla g)(X, Y, Z) = 0$ より，

$$\begin{aligned} (\nabla g)(X, Y, Z) &= \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \cdots (1) \\ (\nabla g)(Y, Z, X) &= \nabla_Y(g(Z, X)) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) = 0 \cdots (2) \\ (\nabla g)(Z, X, Y) &= \nabla_Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0 \cdots (3) \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

*2 $(g^{\lambda\mu}(p)g_{\mu\nu}(p) = \delta_\nu^\lambda)$

(1) + (2) - (3) により, 計量の対称性を用いて

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]). \quad (1.1.18)$$

今, Z は任意, 計量 g は非退化であって, 右辺は X, Y, Z, g のみで決まっているので, 左辺の $\nabla_X Y$ は一意に定まる. すなわち, 写像 ∇ は一意に定まる.

次に, 計量構造があれば右辺が定まるので, これを $2f(X, Y, Z)$ とおく. もし アファイン接続 ∇ が存在すれば, このスカラー場がベクトル場 $\nabla(X, Y)$ と計量テンソル場 g によって $g(\nabla(X, Y), Z)$ と書いていたわけである. まず, f の Z に関する線型性は Eq. (1.1.18) の表式から保証されている (改めて証明しなくてよい). 次に 動標構 $(e_i)_{i=1, \dots, m}$ を使って, Z を展開する. これによって 写像 f と計量 g からベクトル場 V を

$$\underline{V^\ell(p)} := \sum_{k=1}^m g^{k\ell}(p) f(X, Y, e_k)(p), \quad (g^{k\ell}(p))_{k,\ell} := (g_{ij}(p))_{i,j}^{-1}, \quad g_{ij} := g(e_i, e_j), \quad (1.1.19)$$

によって定義する.*4 これを X, Y および g から定まる写像 (f は g と交換子によって定まっている) の値という意味で, $\nabla(X, Y; g) := V$ と書く. ベクトル場を与えるこの写像 ∇ は, 一意性の証明の Eq. (1.1.18) によって顕わになっているように, アファイン接続の公理を満たす. よって, 一般 Riemann 多様体上に Riemann (Levi-Civita) 接続は存在する. 存在すれば一意であるから, 定理は証明された. ■

Remark. 証明について補足をする.

1. f の第 3 引数についての線型性を f から直接証明してみる. Eq. (1.1.18) α をスカラー場とし, 第 6 項で $[X, \alpha Z] = X(\alpha)Z + \alpha[X, Z]$. 第 1 項は $X(g(Y, \alpha Z)) = X(\alpha)g(Y, Z) + X(g(Y, Z))$ なので因子 $X(\alpha)$ がかった項は相殺する. 同様に, 第 5 項と第 2 項でも微分因子 $Y(\alpha)$ のある項は相殺する. よって全体として線型で $f(X, Y, \alpha Z) = \alpha f(X, Y, Z)$.

2. ∇ がアファイン接続の公理を満たすことを f (と g) から直接証明してみる. 1 つめに, f は加群準同型で書かれているので $g(\nabla_X Y, Z)$ は加群準同型. だから, Eq. (1.1.19) によって ∇ は加群準同型.

2 つめに, $\nabla(\alpha X, Y) = \alpha \nabla(X, Y)$ を証明する. Eq. (1.1.18) の第 2 項と第 4 項で $Y(\alpha)g(Z, X)$ の項が相殺する. また, 第 3 項と第 6 項でも因子 $Z(\alpha)$ のある項は相殺する. 今, 左辺の g は双線型なので ∇ は第 1 の引数に関して作用準同型.

3 つめに, Leibniz 則 $\nabla(X, \alpha Y) = X(\alpha)Y + \alpha \nabla(X, Y)$ を証明する. Eq. (1.1.18) の第 1 項と第 4 項から $\frac{1}{2} \times 2X(\alpha)g(Y, Z) = g(X(\alpha)Y, Z)$ の項が出てくる. 第 3 項と第 5 項の $Z(\alpha)g(X, Y)$ は符号が逆なので相殺する. 以上より, $\nabla_X(\alpha Y) - X(\alpha)Y = \alpha \nabla_X Y$. (証明終わり)

これで 計量と アファイン接続が結びつく条件が分かったが, 次は Eq. (1.1.19) を使って基底で展開させた表示を求めてみる. $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ を用いて, $(X, Y, Z) = (X^i e_i, Y^j e_j, e_k)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} V^\ell &\equiv \theta^\ell(\nabla_X Y) = \sum_{i,j=1}^m (X(Y^\ell) + \gamma_{ij}^\ell X^i Y^j) \\ \gamma_{ij}^\ell &:= \frac{1}{2} c_{ij}^\ell + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \left[g^{k\ell} (e_i(g_{jk}) + e_j(g_{ki}) - e_k(g_{ij})) - g^{k\ell} (g_{i\mu} c_{jk}^\mu + g_{j\mu} c_{ik}^\mu) \right] \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

ただし, 接空間の基底に関する構造定数を $[e_i, e_j] = c_{ij}^\mu e_\mu$ ($[e_i, e_j](\alpha) = c_{ij}^\mu e_\mu(\alpha)$, $\forall \alpha \in C^r(M)$) から定めて用いた. ここに 定めた接続係数 γ_{ij}^ℓ は, $\theta^\ell(\nabla_{e_i} e_j) = \gamma_{ij}^\ell$ なる定義の接続係数と同じである. 今, これの第 1 項は構造定数そのもので i, j に関し反対称な項 であり, 第 2 項は対称な項である. 対称な項のうち, 下線部の

$$\Gamma_{ij}^\ell := \frac{1}{2} g^{k\ell} (e_i(g_{jk}) + e_j(g_{ki}) - e_k(g_{ij})) \quad (1.1.21)$$

を第 2 種 Christoffel 記号と呼ぶ.

Remark. 下付き添字の $\Gamma_{ij\ell} := \frac{1}{2} (e_i(g_{jk}) + e_j(g_{ki}) - e_k(g_{ij}))$ のことを第 1 種 Christoffel 記号という.

もし, 座標基底が取られ, (偏微分がすべて可換で) 構造定数が 0 であれば,

$$\gamma_{ij}^\ell = \Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}). \quad (1.1.22)$$

*3 ref. 金井雅彦, 幾何学 XD 講義資料を参考にした.

*4 計量は非退化なので 表現行列 (g_{ij}) は正則になる (ref. Arai, GR).

このような物理における議論を念頭に置いて、 $\nabla_X Y = \sum_{i,j,\ell} X^i (e_i(Y^\ell) + \gamma_{ij}^\ell Y^j) e_\ell$ と展開する．これを 1 形式で書き直すために、 $\gamma_{ij}^\ell = \gamma_{i'j}^\ell \theta^{i'}(e_i)$ というペアリングの形を作る．すなわち、

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)_p &= \sum_{i,j,\ell} X^i(p) ((e_i)_p(Y^\ell) + \gamma_{ij}^\ell(p) Y^j(p)) (e_\ell)_p \\ (\nabla_X Y)_p &= \sum_{i,j,\ell} X^i(p) \left((dY^\ell)_p((e_i)_p) + \gamma_{i'j}^\ell(p) \theta_p^{i'}((e_i)_p) Y^j(p) \right) (e_\ell)_p \\ (\nabla_X Y)_p &= \sum_{i,j,\ell} \left((dY^\ell)_p(X_p) + \gamma_{i'j}^\ell(p) \theta_p^{i'}(X_p) Y^j(p) \right) (e_\ell)_p \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

だから、 $(\omega_j^\ell)_p := \gamma_{i'j}^\ell(p) \theta_p^{i'}$ とおくと、

$$(\nabla Y)(X) = \sum_{i,j,\ell} e_\ell (dY^\ell(X) + Y^j \omega_j^\ell(X)). \quad (1.1.24)$$

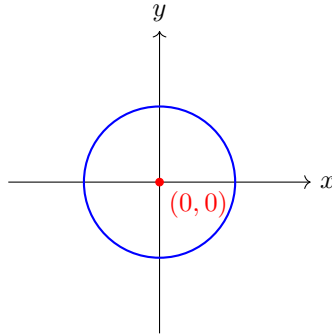
この意味で、次の命題を得る．

Prop. 1.1.13. ベクトル場 Y の共変微分 ∇Y に関して

$$\nabla Y = e_i \otimes (dY^i + \omega_j^i Y^j), \quad (1.1.25)$$

ただし、 $\omega_j^i := \gamma_{m_j}^i \theta^{m_j}$ をアファイン接続 ∇ に関する 接続形式 (connection form) または 接続 1 形式 (connection one-form) という．

Ex. 1.1.14. 円 S^1 の座標近傍系 \mathcal{A} を以下のように取る： $\phi_1 : U_1 \rightarrow (-\pi, \pi) (=: O_1)$, $U_1 = \{p \in S^1 \mid \iota(p) = (\cos \theta, \sin \theta), \theta = \phi_1(p)\}$ (ただし $\iota : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は包含写像)．加えて、 U_2 を 角度変数 $\theta \in (0, 2\pi)$ に変えた、同様の開集合とする ($\phi_1 = \phi_2$ on $U_1 \cap U_2$)．以下 $M = S$ とする．この接空間は 1 次元 (線型空間) であり、座標基底 $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv \partial_\theta$ によって各点 p で $T_p M = \{t(\partial_\theta)_p \mid t \in \mathbb{R}\}$ と書ける．接束 TM は 2 次元多様体で自明束 $S^1 \times \mathbb{R}$ と同型である．変換関数 $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ は $(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(\theta) = \theta \ (\forall (0, \pi)), \theta - 2\pi \ (\forall (\pi, 2\pi))$ 、と書ける．



2 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^2 に埋め込まれた 1 次元球面 S^1 (円)

ここから、円の半径を 1 ではなく $a (> 0)$ に一般化する．計量テンソル場 $g = (ad\theta)^2 = a^2 d\theta^2$ は Euclid 計量 $g = dx^2 + dy^2$ により誘導される．これは Riemann 計量である (a は実数だから)．これにより、次にアファイン接続を考える． S^1 上の任意のスカラー場 $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ に関して、接空間の基底がなすベクトル場 $\partial_\theta \equiv e_1$ の構造定数はゼロである ($[\partial_\theta, \partial_\theta] = 0$)．よって接続係数は第 2 種 Christoffel 記号で計算でき、いま計量は定数テンソル場なのでこれもゼロである．このように円は局所的には 実数直線と似た構造を持っている．(しかし、平面への埋め込まれ方や大域的な位相的性質は全くそれとは異なる．) ■

1.1.4 Riemann 曲率テンソル

このように、円の微分幾何学では内在的量というよりむしろ外在的な法ベクトル場が重要になるが、2 次元以上であれば空間の曲がり方を 今まで述べてきた接続 (ベクトル場の繋がり方) から内在的に測ることができる．1 つの可能な考え方は、ベクトル場の共変微分の交換性によって非平坦性を捉える方法だ (ref. デイラック、一般相対性理論)．アファイン接続から定まる空間の曲がり方を、我々は Riemann 曲率テンソルと呼ぶ．

Def. 1.1.15 (Riemann 曲率テンソル). アフライン接続 ∇ から定まる 写像 $\Gamma(TM)^3 \mapsto \Gamma(TM)$

$$R(X, Y, Z) \equiv R_{X,Y}(Z) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(Z) \quad (1.1.26)$$

を **Riemann 曲率 (- curvature)** (作用素) と呼ぶ (ref. Arai, GR, p. 263).

$R_{jkl}^i := \theta^i(R(e_k, e_l)e_j)$ とすると (添字の順序に注意!)

$$R_{jkl}^i = (e_k(\gamma_{lj}^i) + \gamma_{lj}^\mu \gamma_{k\mu}^i) - (k \leftrightarrow l) - c_{kl}^\mu \gamma_{\mu j}^i, \quad (1.1.27)$$

ただし、共変微分の添字が後ろの 2 つになるように曲率テンソルを定め、 μ については和を取った。記号 $(k \leftrightarrow l)$ は前の項から k, l を入れ替えたものを指している。

よく物理の教科書に書いてあるのは、 X, Y が座標基底による動標構であって、可換な場合である。より一般に X, Y が可換ならば $R_{X,Y}(Z) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)(Z)$ 。あるいは構造定数 c_{kl}^μ が全てゼロならば、

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) Z^i = R_{jkl}^i Z^j. \quad (1.1.28)$$

共変微分の記号は $\nabla_\nu A^\mu \equiv A_{;\nu}^\mu$ としばしば書かれ、この記法では、 $Z_{;k;l}^i - Z_{;l;k}^i = R_{jkl}^i Z^j$ 。物理の教科書ではこれを定義として採用している場合もある (例えば、佐藤勝彦, 相対性理論, p. 83)。

Riemann 曲率テンソルは $(1, 3)$ 型テンソルなので $(\dim M)^4$ の足を持っているが、その実すべてが独立というわけではない。まず、定義から $R(X, Y) = -R(Y, X)$ なので $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$ 。ここから 2 次微分形式

$$\Omega_j^i \equiv \Theta_j^i := \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l \quad (1.1.29)$$

が定義でき、後で見るとこれは主束の **曲率 2 形式** と一致する。

他にも、Riemann 曲率テンソルは対称性を持っている。

Prop. 1.1.16 (Bianchi 恒等式). 対称化作用素 $\mathfrak{S}_{x,y,z}(f(x, y, z)) := f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)$ を用いる。Riemann 曲率テンソルは Riemann (Levi-Civita) 接続について、第 1 Bianchi 恒等式

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}(R(X, Y)Z) = 0 \quad (1.1.30)$$

および 第 2 Bianchi 恒等式

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}((\nabla_X R)(Y, Z)W) = 0 \quad (W \in \Gamma(TM)) \quad (1.1.31)$$

を満たす。(証明は ref. Nakahara, Geometry, p. 288)

Riemann 曲率テンソルの縮約を取ると Ricci 曲率テンソルが決まる。つまり、動標構 (e_i) と 双対動標構 (θ^i) によって 2 階共変テンソルが定まり、

$$\text{Ric}(Y, Z) := \sum_i \theta^i(R(e_i, Y)Z), \quad R_{\mu\nu} = \text{Ric}(e_\mu, e_\nu) = \sum_i R_{\mu i \nu}^i. \quad (1.1.32)$$

Ricci テンソルの定義は $\sum_i R_{\mu\nu}^i$ と定められる場合もあるので注意されたい (ref. Arai, GR, p. 309)。計量テンソル場と縮約を取ると、スカラー曲率を得る：

$$\mathcal{R} := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad g = g_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu, \quad (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}. \quad (1.1.33)$$

Ricci 曲率テンソルと スカラー曲率は 重力の古典論 (一般相対性理論) において本質的な意味を担っている。なぜなら、それらが “運動方程式” を記述するからである。第 2 Bianchi 恒等式から、2 階共変テンソル $G := \text{Ric} - \frac{1}{2} \mathcal{R}g$ は平行になる (ref. Nakahara, Geometry, p. 289)。これを **Einstein テンソル (tensor)** と呼ぶ。Einstein テンソルに加えて、宇宙項 Λg とエネルギー・運動量テンソル \mathcal{T} を結んだ方程式

$$G + \Lambda g = \mathcal{T} \quad (1.1.34)$$

を Einstein 方程式という。

1.2 Cartan の構造方程式

この節では Cartan の第 1 構造方程式 と 第 2 構造方程式を証明し、それを用いて接続と曲率を求める手法を具体例を通じて見る。まず基本的な補題を示す。以下では $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ を動標構の交換関係とする。

1.2.1 Cartan の 第 1 構造方程式

第 1 構造方程式は振率についての恒等式である。

Lemma 1.2.1. 十分滑らかな多様体 M の任意の座標近傍 $(U, (x^j))$ をひとつ取る。 U 上の動標構 $e_j \in \Gamma(M, TM)$ とその双対動標構 $\theta^\mu \in \Gamma(M, T^*M)$ に対して、

$$\theta^\mu([e_i, e_j]) = -d\theta^\mu(e_i, e_j) \Leftrightarrow d\theta^\mu = -c_{ij}^\mu \theta^i \otimes \theta^j = -\frac{1}{2} c_{ij}^\mu \theta^i \wedge \theta^j, \quad (1.2.1)$$

ただし、可換な座標基底の存在と $\{e_j\}, \{\theta^j\}$ の成分が C^1 級であることは仮定する。

Pf. 可換な座標基底に伴う動標構 $\frac{\partial}{\partial x^a} \equiv \partial_a$ によって動標構が $e_i = e_i^a \partial_a$ と展開できるとする。また、 $\theta^\mu = \theta_\nu^\mu dx^\nu$ (いわゆる四脚場) と展開すれば、条件 $\forall p \in U, \theta^\mu(p)(e_i(p)) = \delta_i^\mu$ より $\partial_a(\theta_\nu^\mu e_i^\nu) = 0$ 。今、 $\theta_\nu^\mu, e_i^\nu \in C^1(M)$ とすれば

$$(\partial_a \theta_\nu^\mu) e_i^\nu + \theta_\nu^\mu (\partial_a e_i^\nu) = 0 \Leftrightarrow (\partial_a \theta_\nu^\mu) e_i^\nu = -\theta_\nu^\mu (\partial_a e_i^\nu). \quad (1.2.2)$$

これを用いると、

$$\theta^\mu([e_i, e_j]) = -d\theta^\mu(e_i, e_j) = \theta_\nu^\mu (e_i^a \partial_a (e_j^\nu) - e_j^a \partial_a (e_i^\nu)). \quad (1.2.3)$$

構造定数 $c_{ij}^\mu = \theta^\mu([e_i, e_j])$ は (i, j) に関して反対称なので、補題が示せた。 ■

Thm. 1.2.2 (Cartan の第 1 構造方程式). 振率形式 τ^i と接続形式 ω_j^i は双対動標構 θ^i に関して恒等式

$$\tau^i = d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j \equiv d\theta^i + \sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j \quad (1.2.4)$$

を満たす (ref. Arai, GR). 滑らかさのクラスは前の補題に準じる。

Pf. 前の補題 Lemma 1.2.1 から straightforward に定理を証明できる。振率形式 $\tau^\mu = \frac{1}{2} T_{ij}^\mu \theta^i \wedge \theta^j$ に $T_{ij}^\mu = \gamma_{ij}^\mu - \gamma_{ji}^\mu - c_{ij}^\mu$ を代入し、加えて $\omega_j^\mu = \gamma_{ij}^\mu \theta^i$ を用いると、

$$\tau^\mu - \omega_j^\mu \wedge \theta^j = \tau^\mu - \gamma_{ij}^\mu \theta^i \wedge \theta^j = -\frac{1}{2} c_{ij}^\mu \theta^i \wedge \theta^j = d\theta^\mu. \quad (1.2.5)$$

故に $\tau^i = d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j$. ■

1.2.2 Cartan の 第 2 構造方程式

第 2 構造方程式は曲率形式に関する恒等式である。

Thm. 1.2.3 (Cartan の第 2 構造方程式). 可微分多様体上の曲率形式 Ω_j^i と接続形式 ω_j^i は恒等式

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k \equiv d\omega_j^i + \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k \quad (1.2.6)$$

を満たす。

Pf. 接続 1 形式 $\omega_j^i = \gamma_{\mu j}^i \theta^\mu$ を右辺に代入して、Lemma 1.2.1 を用いると、

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = e_l (\gamma_{kj}^i) \theta^l \wedge \theta^k - \frac{1}{2} c_{kl}^\mu \gamma_{\mu j}^i \theta^k \wedge \theta^l + \gamma_{k\mu}^i \gamma_{lj}^\mu \theta^k \wedge \theta^l. \quad (1.2.7)$$

これが第 1 段階だが、整理しておこう。第 1 項は微分の項、第 2 項は構造定数を含んでおり、第 3 項は接続係数の 2 次の項である。Riemann 曲率テンソル $R_{jkl}^i = (e_k(\gamma_{lj}^i) + \gamma_{lj}^\mu \gamma_{k\mu}^i) - (e_l(\gamma_{kj}^i) + \gamma_{kj}^\mu \gamma_{l\mu}^i) - c_{kl}^\mu \gamma_{\mu j}^i$ と見比べると、外積の反対称性より

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l = \Omega_j^i. \quad (1.2.8)$$

よって Cartan の第 2 構造方程式が示された。 ■

1.2.3 接続 1 形式と曲率 2 形式

Riemann テンソル場があると、曲率 2 形式 $\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l$ (R_{jkl}^i は Riemann 曲率テンソル) が計算できる。この曲率 2 形式と 接続 1 形式は共変微分で結びついている (詳細は割愛):

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k. \quad (1.2.9)$$

もし 動標構が正規直交であったなら、 $\gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} c_{ij}^\ell - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} g^{k\ell} (g_{i\mu} c_{jk}^\mu + g_{j\mu} c_{ik}^\mu)$ が成り立つから、計量が Riemannian であるとき、

$$\gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} c_{ij}^\ell - \frac{1}{2} (c_{j\ell}^i + c_{i\ell}^j) \iff \gamma_{\ell j}^i = \frac{1}{2} (c_{\ell j}^i - c_{\ell i}^j + c_{ij}^\ell). \quad (1.2.10)$$

ただちに $\gamma_{\ell j}^i = -\gamma_{\ell i}^j$ が導け、接続形式が反交換であること $\omega_j^i = -\omega_i^j$ がわかる。このような接続形式は、 m 次元多様体 M 上の 主 $\mathrm{SO}(m)$ 束の接続 1 形式である。この意味で、 ω_i^j は $\mathfrak{o}(m)$ 値微分形式であって、 Ω_i^j は ゲージ群 $G = \mathrm{SO}(m)$ の Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(m)$ に基づく ω_j^i についての 曲率 2 形式 である。

Ex. 1.2.4. 球面 S^2 (半径が a) の座標近傍を通常のように、 $\theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)$;

$$U_1 = \{p \in S^2; \iota(p) = (a \cos \theta, a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi), (\theta, \varphi) = \phi_1(p)\} \quad (1.2.11)$$

と取るが、ただし、今 Euclid 座標 $(x^i)_i$ を用いて $\iota(p) = (x^3(p), x^1(p), x^2(p))$ としたことに注意する。これとは別に座標近傍系を構成するには、立体射影を使用すれば良い (ref. 藤岡, 多様体)。以下 $M = S^2$ とする。接バンドル TM は $S^2 \times \mathbb{R}^2$ と同型であり、誘導計量は $g|_{U_1} = a^2 d\theta^2 + (a \sin \theta)^2 d\varphi^2$ 。接続係数 γ は U_1 上で第 2 種 Christoffel 記号 $\Gamma(U_1, \phi_1)$ と全く同じで

$$[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(U_1, \phi_1)] = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \end{bmatrix}_{\mu,\nu}, \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi & 0 \end{bmatrix}_{\mu,\nu} \right], \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta \quad (1.2.12)$$

今、 TS^2 上の正規直交動標構を考える。接ベクトル $\{\frac{1}{a}(\partial_\theta)_p, \frac{1}{a \sin \theta}(\partial_\varphi)_p\} \subseteq T_p S^2$, $p = \phi_1^{-1}(\theta, \varphi)$ は正規直交基底なので、ベクトル場 $\{\frac{1}{a}\partial_\theta, \frac{1}{a \sin \theta}\partial_\varphi\}$ は U_1 上の正規直交動標構である。これを $(e_1, e_2) := (\frac{1}{a}\partial_\theta, \frac{1}{a \sin \theta}\partial_\varphi)$ とおく。これらは非可換であり、交換子は直接計算の後 $[e_1, e_2] = -a^{-1} \cot \theta e_2$ と求まるから、構造定数は以下の通り:

$$c_{12}^2 = -c_{21}^2 = -a^{-1} \cot \theta. \quad (1.2.13)$$

故に、接続係数は構造定数から

$$\gamma_{22}^1 = c_{12}^2 = -a^{-1} \cot \theta, \gamma_{21}^2 = c_{21}^2 = a^{-1} \cot \theta. \quad (1.2.14)$$

双対動標構 $(f^1, f^2) = (ad\theta, a \sin \theta d\varphi)$ を用いて、接続形式が求まる:

$$\omega_2^1 = \gamma_{22}^1 f^2 = -\cos \theta d\varphi (= -a^{-1} \cot \theta f^2), \omega_1^2 = \gamma_{21}^2 f^2 = -\omega_2^1. \quad (1.2.15)$$

曲率 2 形式 $\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ は、反対称 (2 次微分形式値) 行列

$$(\Omega_j^i)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \\ -\sin \theta d\theta \wedge d\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-2} f^1 \wedge f^2 \\ -a^{-2} f^1 \wedge f^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.16)$$

ここで、Riemann 曲率テンソルの (θ, φ) 成分は、 $R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = 1 = -R_{\theta\theta\varphi}^\varphi$, $R_{\varphi\theta\varphi}^\theta = \sin^2 \theta = -R_{\varphi\varphi\theta}^\theta$ (otherwise 0) なので、基底に関するテンソルの変換則から、正規直交基底に関する成分は

$$R_{121}^2 = a^{-2} = -R_{112}^2, R_{212}^1 = a^{-2} = -R_{221}^1. \quad (1.2.17)$$

したがって、確かに $\sum_{k,l \in \{1,2\}} \frac{1}{2} R_{jkl}^i f^k \wedge f^l = \Omega_j^i$.

次に、Ricci 曲率を計算すると、 $\text{Ric} = a^{-2} f^1 \wedge f^1 + a^{-2} f^2 \wedge f^2$ となるから、スカラー曲率は

$$\mathcal{R} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = 2a^{-2} \quad (1.2.18)$$

と計算できる。2次元可微分多様体に対して、このスカラー曲率の半分は Gauss 曲率に一致し、球面の場合それは a^{-2} と等しい。 ■

Ex. 1.2.5. 引き続き球面 S^2 を考える。今度は Cartan の構造方程式から同じように Riemann (Levi-Civita) 接続 ∇ に関する接続形式と曲率形式を求めてみよう。まず、振率がゼロなので、振率テンソル場はゼロテンソルであり、当然、振率形式もゼロテンソルである。従って、Cartan の第 1 構造方程式 Thm 1.2.2 から

$$\begin{aligned} df^1 &= -\omega_2^1 \wedge f^2 = 0, \\ df^2 &= -\omega_1^2 \wedge f^1 = a \cos \theta d\theta \wedge d\varphi = a^{-1} \cot \theta f^1 \wedge f^2, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

今、動標構が正規直交なので $\omega_1^1 = 0, \omega_2^2 = 0$ を用いた。第 2 式から $\omega_1^2 = a^{-1} \cot \theta f^2$ 接続形式は反対称なので $\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -a^{-1} \cot \theta f^2$ 。残りは同様である。 ■

今までは計量が Riemann 的である場合を考えてきた。一方、一般に計量の符号が (r, s) であるとき、接続係数に計量をかけ合わせると、正規直交動標構について*5

$$g_{i\alpha} \gamma_{\ell j}^\alpha = \frac{1}{2} \left(g_{i\mu} c_{\ell j}^\mu - g_{\ell\mu} c_{ji}^\mu - g_{j\mu} c_{\ell i}^\mu \right) = \frac{1}{2} \left(g_{i\mu} c_{\ell j}^\mu - g_{j\mu} c_{\ell i}^\mu + g_{\ell\mu} c_{ij}^\mu \right). \quad (1.2.20)$$

故に、下付きの接続形式 $\omega_{ij} := g_{i\alpha} \gamma_{\ell j}^\alpha \theta^\ell$ を定めれば、 (i, j) に関して反対称である。すなわち、接続形式のなす行列 $\hat{\omega} = (\omega_j^i)_{i,j}$ は Lie 代数の条件式 $\hat{\omega}^T \hat{g} + \hat{g} \hat{\omega} = (\hat{g} \hat{\omega})^T + \hat{g} \hat{\omega} = 0$ を満たす。言い換えれば、接続形式は Lie 代数 $\mathfrak{so}(r, s) = \mathfrak{o}(r, s)$ 値の 1 次微分形式 (行列) である。この意味で、一般相対性理論は $\text{SO}(r, s)$ ゲージ理論である。

符号 (r, s) の計量テンソル場 g を備えた一般 Riemann 多様体上で、Riemann (Levi-Civita) 接続 ∇ にともなう接続形式 ω_j^i は 1 次微分形式を Lie 代数 $\mathfrak{o}(r, s)$ の形に並べた行列である。

符号が (r, s) の場合に $d\theta^\alpha + \omega_j^\alpha \wedge \theta^j = \tau^\alpha$ の両辺に計量 $g_{i\alpha}$ をかけ合わせて縮約を取ると、

$$g_{i\alpha} d\theta^\alpha + \omega_{ij} \wedge \theta^j = g_{i\alpha} \tau^\alpha \quad (1.2.21)$$

という風に構造方程式の中に ω_{ij} が見える。

Ex. 1.2.6. 2次元 de Sitter 空間 dS_2 の接続形式と曲率形式を求めてみる。 dS_2 は Minkowski 空間 $\mathbb{M}^3 \equiv \mathbb{R}^{2,1}$ への埋め込み $\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{M}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = a^2\}$ であり、以下 $x^3 \equiv x^0$ とする。 dS_2 のパラメータ表示は定数 $A \in \{1, a\}$ を用いて、

$$x^0 = a \sinh(u/A), x^1 = a \cosh(u/A) \cos \varphi, x^2 = a \cosh(u/A) \sin \varphi, u \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\pi, \pi). \quad (1.2.22)$$

この座標系 (u, φ) で貼られる集合を $U \subseteq \text{dS}_2$ とする。この座標近傍は空間部分の $\varphi \rightarrow \pi$ (極) 以外を覆っているの、座標系 (u, φ) は global 座標と呼ばれる。そして、 dS_2 は誘導計量

$$g_U = \frac{a^2}{A^2} (-du^2 + \cosh^2(u/A) d\varphi^2) (-1\eta_{00}), \quad (\eta_{00} \equiv -1) \quad (1.2.23)$$

*5 縮約を取った文字をギリシャ文字にした。

をもつから, $g_U(\partial_u, \partial_u) = -\frac{a^2}{A^2}$, $g_U(\partial_\varphi, \partial_\varphi) = \frac{a^2}{A^2} \cosh^2(u/A)$, $g_U(\partial_u, \partial_\varphi) = 0$. 故に正規直交動標構の双対動標構は

$$f^0 = \frac{a}{A} du, f^1 = \frac{a}{A} \cosh(u/A) d\varphi \quad (1.2.24)$$

という対角型の形を持ち, $df^0 = 0$, $df^1 = \frac{a}{A^2} \sinh(u/A) du \wedge d\varphi = a^{-1} \tanh(u/A) f^0 \wedge f^1$ という連立方程式を解いて, アフィン接続に関する接続形式は

$$\begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1^0 \\ \omega_0^1 & \omega_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \tanh(u/A) f^1 \\ a^{-1} \tanh(u/A) f^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.25)$$

$\omega_1^0 = A^{-1} \sinh(u/A) d\varphi$ なので, この外微分を計算すると

$$(\Omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & a^{-2} f^0 \wedge f^1 \\ a^{-2} f^0 \wedge f^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.26)$$

外積代数の展開係数の部分を見比べて $R_{101}^0 = a^{-2} = -R_{110}^0$, $R_{001}^1 = a^{-2} = -R_{010}^1$ (ほかは 0) だから, Ricci 曲率の定義 $R_{\mu\nu} = R_{\mu i \nu}^i$ から

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} -a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}, \text{Ric} = -a^{-2} f^0 \wedge f^0 + a^{-2} f^1 \wedge f^1, \quad (1.2.27)$$

スカラー曲率は $\mathcal{R} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} = 2a^2$, Gauss 曲率は $K = a^2$. ■

Ex. 1.2.7 (Möbius の帯). 可微分多様体の例として, Möbius の帯を取り上げる. これは向き付け不可能な コンパクト 2 次元多様体で, 接バンドル (接束) が自明でない. 3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた Möbius の帯 のパラメータ表示は,

$$\vec{r}(s, t) = \begin{pmatrix} (1 + t \cos \frac{s}{2}) \cos s \\ (1 + t \cos \frac{s}{2}) \sin s \\ t \sin \frac{s}{2} \end{pmatrix}, \quad s \in (-\pi, \pi), t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (1.2.28)$$

必要に応じて パラメータの定義域を変更するが, 今 境界や開被覆が必要ないので (定義域を) \mathbb{R}^2 の開集合とした. 座標基底は以下のように求められる.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}(s, t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \sin \frac{s}{2} \cos s - (1 + t \cos \frac{s}{2}) \sin s \\ -\frac{t}{2} \sin \frac{s}{2} \sin s + (1 + t \cos \frac{s}{2}) \cos s \\ \frac{t}{2} \cos \frac{s}{2} \end{pmatrix} \equiv e_s, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{2} \cos s \\ \cos \frac{s}{2} \sin s \\ \sin \frac{s}{2} \end{pmatrix} \equiv e_t \quad (1.2.29)$$

t 方向の接ベクトル e_t には s の周期 4π のファクターが掛かっている. ここで, $(\cos \frac{\pm\pi}{2}, \sin \frac{\pm\pi}{2}) = (0, \pm 1)$ だから 枠 (frame) が $(-\pi, \pi) \ni s$ 上を 1 周して戻って来る時に,

$$\lim_{s \rightarrow \pi} (e_s, e_t) = \left(\left(-\frac{t}{2}, -1, 0 \right), (0, 0, -1) \right), \lim_{s \rightarrow -\pi} \left(\left(\frac{t}{2}, -1, 0 \right), (0, 0, 1) \right), \quad (1.2.30)$$

と異なる枠になっている (特に, $t = 0$ の時に e_t だけが反対向きになる). 局所近傍における誘導計量を計算すると,

$$\hat{g}_{(s,t)} = \begin{pmatrix} g_{ss} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_{ss} = 1 + 2t \cos \frac{s}{2} + \frac{3t^2}{4} + \frac{1}{2} t^2 \cos s. \quad (1.2.31)$$

計量があればその成分によって Christoffel 記号が計算できる. また今 C^∞ 級座標近傍が取れているので, その Christoffel 記号が接続係数と一致する. このように局所的には幾何構造が考えられるが, しかし大域的には不可能であって, 自明な接バンドルの意味でのアファイン接続は考えられない. この点はベクトル束の接続を論じる際に顧みることとする. ■

1.3 次元解析と計量と接続

この節では、一般相対性理論への展開を目指して、次元解析を通じて計量と接続の関係を調べていく。まず幾何学量の次元を調べてみよう。Euclid 空間で長さを測ろうという人がいたとする。この時 Euclid アフィン空間の 2 点 $P, Q (\in \mathbb{R}^n)$ の距離を長さとするのが普通だ。任意の 2 点 P, Q は $P = Q + x$ なる基準ベクトル空間の元 $x \in \mathbb{R}^n$ は自然な距離 $d(x, y) = \|x - y\| (y \in \mathbb{R}^n)$ を持っているゆえに、このような距離・ノルム・Euclid 内積で長さを測る。つまり、

$$d(x, 0) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n}}, \quad (1.3.1)$$

ここで、 $\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n} \equiv \langle x, x \rangle_E$ などとも書かれる。この時、Newton 力学で 3 次元空間上の長さには L という次元が付与されているものとみなし、 $\dim \|x\| \equiv [\|x\|] = L$ と書くのだった。以下ではこれに単位系を付与したものを unit で表すものとし、専ら SI 単位系 $\text{unit } x = \text{m}$ を用いるものとする。

1.3.1 単位系の歴史

以上で見たように、物理学では、Euclid 距離の戻り値には $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cdot L$ なる次元がついているものとする。標準ノルム・標準内積についても同様である。

一方で、Newton 力学における時間には違った次元が付与される。我々はこれを T とかく。すなわち、絶対時間 (absolute time) $\mathbb{R} \ni t_1, t_2$ について、 $d(t_1, t_2) = |t_1 - t_2| \cdot T$ なる戻り値の次元を与えるのだった。

古今東西、長さや時間の単位には国や地域で様々決まりがあったが、SI 単位系では、長さの基本単位を m (メートル) とした。これはフランス革命以後 メートル法から引き続き用いられている。初めは地球の子午線の長さを西ヨーロッパで測り、それを基準とした。一方、時間の基本単位は、紆余曲折の後、地球の自転を基準に定められ、長く 1 日が 86400 秒と言う基準が用いられた。

そして、フランス革命の理念により使われた地球 (上の物理量) も、結局 場所に依存してしまっていて望ましくない事がわかったわけで、いつしか原器や物理定数に取って代わった。更にとうとうメートル原器もキログラム原器も廃止され、現在ではセシウムの原子振動から 秒 s (second) が決まり、光速で メートル m (meter) が決まっている。加えて、質量の kg の定義はプランク定数 h から決まった。

工学的にはこれで全く問題ない。しかし、相対論の確立により、絶対時間と絶対空間 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ という描像は変更を迫られた。相対論から帰結するのは、そもそも長さや時間に異なる「次元」や「単位」を与えるのが望ましくないと言う立場である。なぜなら、原理的な自然定数 c が光の速さとして実在的意義を持っているからである。つまり、光の球面波は、到達時間と到達距離について、

$$cd(t_1, t_2) = d(x_1, x_2) \quad (1.3.2)$$

を原理的に常に満たしてしまう。この距離関数を座標系 (t, x, y, z) で局所的に書いたのが

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \iff (cdt) \otimes (cdt) - (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) = 0 \quad (1.3.3)$$

であり、Minkowski 空間の 2 次の対称な微分形式が特殊相対性理論の本質であることが分かった。そういうわけで、物理学では自然単位系が広く用いられ、特に光速を 1 とする単位 $c \equiv 1$ を共通してもつ。この時、長さや時間の次元は等しくなる: $L = T$ 。SI 単位系では、時間に 光秒 (light second) を用いていることに相当する。一見奇妙かもしれないが、天文学では光年を普通に用いているから、光秒を使っても物理としてはなんの問題もない。

1.3.2 次元と特殊相対論

特殊相対論においては時空は Minkowski 時空として整理された。普通 4 次元だが一般に n 次元としておくと、Minkowski 時空 (\mathbb{M}^n, η) には正規直交基底 $\{e_0, e_1, \dots, e_{n'}\} (n' = n - 1)$ が存在して $(\eta(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\langle e_0, e_0 \rangle = -1; \forall i \in \{1, \dots, n'\}, \langle e_i, e_i \rangle = 1. \quad (1.3.4)$$

時間的ベクトル v_t の直交補空間 $\{v_t\}^\perp$ は空間的超平面となる (ref. Arai, GR. p. 106) ので、そこで距離 $d(x, y) = \sqrt{\langle x, y \rangle}$ が定義できる。この次元を Newton 力学と同様 L とする。

ついで、時間に関して、相対論的な物理量は固有時である。なぜなら、Lorentz 変換に関して固有時は不変だからである。Lorentz 変換に関して不変ということは、どの慣性系から見ても共通して論じることのできる物理量だというわけである。

固有時を考える準備として、Einstein が 1905 年に論文に書いた^{*6} 時計合わせを考察してみよう。等速直線運動している A 系とまた等速直線運動運動している B 系の間で時計を合わせるには、A の静止系から B の静止系に光でメッセージを送れば良い、と Einstein は考えた。A が 2 次元 Minkowski 空間上の直線

$$\gamma_A(t) = \{(t, 0) \mid t \in [0, T] \subseteq \mathbb{R}\}, \dot{\gamma}_A(t) = e_0 \quad (1.3.5)$$

上にいるとしよう。これは Minkowski 空間上の測地線であって、A は自由運動、つまり他の慣性系からは一般に等速直線運動をしているのである。次に B 系に観測者がいて、こちらは

$$\gamma_B(t) = \{(t, b) \mid t \in [0, T] \subseteq \mathbb{R}\}, \dot{\gamma}_B(t) = e_0 \quad (1.3.6)$$

という運動をしているとしよう。こちらも同様に慣性系 (自由運動) である。時計合わせをするために、A から B へ光を送り、時間 δ だけ後に光で返信でする状況を想像しよう。ここで、静止系での時間が必要になるから、最も自明な固有時

$$\tau = \sqrt{\langle t_1 e_0 - t_2 e_0, t_1 e_0 - t_2 e_0 \rangle / \eta_{00}} = |t_1 - t_2| \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \quad (1.3.7)$$

を時間に採用した。ただし、Einstein の議論のように情報の送受信は限りなく短い時間でできるものとし、あわせて普通 $\delta \rightarrow 0$ と取っても良いのである。なお、 $\delta \rightarrow 0$ と取るために、Einstein は (理想的な) 鏡を置けば良いとした。

さて、分かったように A さんと B さんの運動を書いてみたが、彼らは互いにどんな時計を持っているのだろうか。初期時間 $t = 0, T$ で A さんの時計が $\tau_A(0), \tau_A(T)$, B さんの時計が $\tau_B(0), \tau_B(T)$ を指し示しているとしよう。静止系での時間は先ほど定めたばかりであるから、これを使えば良いとする。実験は以下のように進む：

1. 全時空の時間 $t = 0$ に A から B に光で時刻 $\tau_A(0)$ の値を送信する。
2. B はそれを受け取り、時間 δ 後に 光が届いた時刻 $t_\ell = \tau_B(b/c)$ を自分の時計を見て A に送信する。
3. A は 時刻 $\tau_A(T)$ に光を受信し、B がいつ光を受け取ったか観測して書き留める。

$\delta > 0$ ならば B は δ も送信するが今、簡単のため $\delta = 0$ とする。光速不変の原理を採用すれば、則ち情報伝達にかかる時間 b/c も常に一定の値をもつ。2 人の時計があっている必要十分条件は、特殊相対論の範疇では $\tau_A(0) = \tau_B(0), \tau_A(T) = \tau_B(T)$ と表せる。つまり、慣性系では時間の流れ方は一定なので、この間の時刻も合っていると推認する。時計があっていれば、Einstein が書いたように

$$\tau_A(T) + \tau_A(0) = 2\tau_B\left(\frac{b}{c}\right) \quad (1.3.8)$$

が成立する。 $\delta > 0$ なら式を $\tau_A(T) - \tau_A(0) - \delta = 2(\tau_B(b/c) - \tau_A(0))$ と修正すれば良い。もしずれていれば、時刻の情報を多く持っている A が時計を

$$\tau_A(T) = 2\tau_B(b/c) - \tau_A(0) + \delta \quad (1.3.9)$$

となるように調整する^{*7}。

さて、これで空間の各点にいる観測者は、静止系で固有時を共有することができる。このように時計が Minkowski 時空という時間の流れを「監視」している時、時間的曲線上で固有時

$$\tau(t) = \frac{1}{c} \int_{t_0}^t \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t'), \dot{\gamma}(t') \rangle / \eta_{00}} dt', \quad t_0 = \text{const.} \quad (1.3.10)$$

^{*6} 岩波文庫から出版されている。

^{*7} 昔はねじ巻き時計だっただろうが、今は原子時計や光格子時計の設定をコンピュータで変えれば周波数帯程度の精度では調整できる。また、現在の光学の周波数精度はピコ秒からフェムト秒に至るまで発展している。これに比べて、古典論で必要な時間間隔を考えると、典型的には SI の光速の精度 9 桁があればよい。以上をまとめると、古典的に人間の知覚で区別できないレベル (ミリ秒～マイクロ秒) には時計を合わせられる。大雑把にそのように仮定して論を進める。

が定まるから、この次元を Newton 力学と同じように T とする。曲線上の時間は $d\tau$ という刻みで進んでいく。係数 c^{-1} がついている理由は、Minkowski 時空がすでに 自然単位系 $c = 1$ で見やすいように定義されているからである。

Minkowski 時空は自明なアトラス $\{(M, (x^\mu))\}$ をもつ C^∞ 級多様体である。上に述べてきたように、1 次元的な距離の次元から、座標系 (x^μ) は長さの次元 L をもつ。次はベクトルに関係する次元である。どこの点で考えても同じなので簡単のためベクトル場で議論しよう。ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$ は L^{-1} の次元を持つから、他にも、

$$\dim x^\mu = L, \dim \frac{\partial}{\partial x^\mu} = L^{-1}, \dim dx^\mu = L, \dim (x^\mu \partial_\mu) = 1. \quad (1.3.11)$$

Minkowski 計量 $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ は長さの 2 乗の次元を持つ：

$$\dim \eta = L^2, \dim \eta_{\mu\nu} = 1, \dim \eta^{\mu\nu} = 1. \quad (1.3.12)$$

Minkowski で Riemann (Levi-Civita) 接続は $\nabla_X Y = X(Y^i) \partial_i$ ($Y = Y^i \partial_i$) と表せる。なぜなら、動標構 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ に関して接続係数は $\gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ だからである。当然 接続形式は $\omega_\nu^\mu = \gamma_{\lambda\nu}^\mu dx^\lambda = 0$ だが³、このような幾何学量の次元は後で議論する。さて、力学的な量の次元をまとめてみよう。展開係数は 自明なアトラスから座標基底をとったときのものとする。

- 4 元速度: $u = dx/d\tau$, $\dim u = T^{-1}$, $\dim u^\mu = LT^{-1}$,
- 4 元加速度: $a = du/d\tau$, $\dim a = T^{-2}$, $\dim a^\mu = LT^{-2}$,
- 質点の 4 元運動量: $p = mu$, $\dim p = MT^{-1}$, $\dim p^\mu = MLT^{-1}$,
- 4 元力: $ma = F$, $\dim F = MT^{-2}$, $\dim F^\mu = MLT^{-2}$,
- エネルギー: $E = \sqrt{mc^2 + (\vec{p}c)^2}$, $\dim E = \dim p \equiv E$,
- 自由な質点のラグランジアン: $L(\tau) = \frac{1}{2}m\eta \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau} \right)$, $\dim L(\tau) = E$
- 自由な質点の作用: $S = \int L(\tau)d\tau$, $\dim S = ET = ML^2T^{-1}$

エネルギーの次元 E は便利なので後でも使う。

1.3.3 質量次元

距離の物理量の次元は普通 L だと思われているが、**質量次元 (mass dimension)** というもう 1 段階を踏むことも物理学では一般的である。ここではまず 質量 m の物質の静止エネルギー $E_{\text{static}} = mc^2$ に着目する。質量の次元は $\dim m = M$ と書かれ、 E_{static} の自然単位系での次元は $\dim E_{\text{static}} = M$ 。これを質量次元 が 1 であるという。ここで、Planck 定数の 2π 分の 1, Dirac 定数を $\hbar \equiv 1$ とおくと、 $\text{unit } \hbar = \text{Js}$ ($\dim \hbar = ML^2T^{-1}$) なので、

$$\dim_M \hbar := 1, T = M^{-1}. \quad (1.3.13)$$

これに従って、角運動量の質量次元は 0 になり、量子力学の運動量演算子 $p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ の質量次元は $L^{-1} = M$ だとわかる。計量テンソル η の質量次元は $L^2 = M^{-2}$ となる。

1.3.4 電磁気学と次元

次に電磁気学の諸量について述べる。まず、電流の SI 基本単位は A (アンペア) で、2020 年から電気素量 e と秒を用いて定義された。電流の次元は I と表されるが、本文では便宜的に 電荷の次元 $Q = IT$ も用いる。電気素量は次元 $\dim e = Q$ をもつ。電磁気学には単位系が乱立していたが、その理由の一つが誘電率と透磁率だ。自然単位系でも何を 1 にとるかは一定していない。真空の誘電率 ϵ_0 は Coulomb 定数と $k_e \equiv k_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ のような反比例の関係をもつ。もっとも単純には Coulomb 定数の次元は 定義式である (だった) Coulomb の逆 2 乗の法則 $F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$ からわかる。値を求めるには $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ という関係を使う。ここに用いられた透磁率は、歴史的には、平行電流と力を元に電流を定義していた名残で、 $4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ に非常に近い値を持っている ^{*8}。

現代的には、電磁気現象を電荷と電流で整理するのが見通しが良い。ここに、特殊相対論における電磁気的量の次元をまとめる。この時、エネルギーの次元 E を使うのが便利である。

^{*8} 磁気モノポールが存在しないことが確立されているので、磁気について逆 2 乗の法則を使うことは望ましくない。

- 電荷と電束密度: $Q = \int_S D$, $\dim Q = \dim D = Q$ (S は 3 次元 Euclid 空間の曲面) ^{*9},
- 電流と磁場: $I = \int_\gamma H$, $\dim I = \dim H = I$ (γ は 空間的曲線) ^{*10},
- 電圧と電場: $V = \int_\gamma E$, $\dim V = \dim E = E/Q$, $\text{unit } V = V$ (volt),
- 磁束と磁束密度: $\Phi = \int_S B$, $\dim \Phi = \dim B = E/I$, $\text{unit } \Phi = \text{Wb} = \text{Vs}$ (weber),
- 誘電率 (テンソル) ϵ : 真空中で $D = \epsilon_0 E$, $\dim \epsilon = \dim D / \dim E = Q^2/E$, $\text{unit } \epsilon = C/V \equiv F$ (farad), ^{*11}
- 透磁率 (テンソル) μ : 真空中で $B = \mu_0 H$, $\dim \mu = \dim B / \dim H = E/I^2$, $\text{unit } \mu = \text{Wb/A} \equiv H$ (henry), ^{*12}
- 電磁場テンソル: $F = c^{-1} E \wedge dx^0 + B$, $\dim F = \dim B$,
- Excitation tensor (^{*13}): $\tilde{F} = -c^{-1} H \wedge dx^0 + D$, $\dim \tilde{F} = \dim D$,
- 3 階共変電流密度: $J = \rho - c^{-1} j \wedge dx^0$, $\dim J = Q$, ^{*14}

実用的には $\text{Wb} = \text{Vs}$ を覚えておくとう便利だ。外微分は次元を変えないので Maxwell 方程式 $dF = 0$, $d\tilde{F} = J$ の両辺で次元は整合している。次いで、関連する重要な場を書いていこう。

- 4 元ポテンシャル: A s.t. $F = dA$ ($A = A_\mu dx^\mu$), $\dim A = \dim F = \dim B$,
 - スカラーポテンシャル: $A_0 = -\phi/c$ ($\eta_{00} = -1$), $\text{unit } A_0 = V/(\text{m s}^{-1}) = \text{Wb/m}$,
 - ベクトルポテンシャル: $\vec{A} = (A_j) = (A^j)$, $\text{unit } A_j = \text{Wb/m}$ (ref. 河合, 特殊相対論),
- Poynting ベクトル (2 形式): $s = E \wedge H$, $\dim s = E T^{-1}$, $\text{unit } s = A V = W$,
- 電磁場のエネルギー密度: $u = \frac{1}{2} (D \wedge E + B \wedge H)$, $\dim u = E$,
- Lorentz 力: $(f_L)_\mu = q F_{\mu\nu} u^\nu$, $\text{unit}(f_L)_\mu = C (\text{Wb/m}^2)(\text{m/s}) = \text{J/m} = \text{N}$,
- 真空のインピーダンス: $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, $\text{unit } Z_0 = \Omega = V/A$,

代数の意味で特に重要なのは 4 元ポテンシャルである。微分形式としての A の単位は $\text{unit } A = \text{Wb}$ であり、磁束と同じである。磁束は電荷をかければ作用と同じ次元になるので eA/\hbar は無次元量である (より一般には 電荷を q にする)。この意味で、ゲージ場 eA/\hbar を Lie 代数 $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$ (のエルミートな基底) に関数としての値を持つ双対接束 $T^*\mathbb{M}^4$ の局所切断と解し、この局所的な $U(1)$ 変換を続けて行ってみよう。 γ を \mathbb{M}^4 上のループ (閉じた道) とし、区分的に滑らかで特に C^1 級であるとする。正則であればなお良いが、とにかく積分ができるような十分性質の良い連続写像 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}^4$, $\gamma(0) = \gamma(1)$ を考える。この時、理解のため座標系 (x^μ) と座標基底 $(\partial_\mu)_{\gamma(t)}$ ($t \in [0, 1]$) を取ってみよう (これは Minkowski 時空では常に可能である)。各点 $p = \gamma(t)$ で C^1 曲線 γ は連続な接ベクトル $\frac{d\gamma}{dt}(t) \equiv \dot{\gamma}(t)$ をもつのであるから、これを $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^\mu(t)(\partial_\mu)_p$ と分解しておく。すると、

$$A(p) = A_\mu(p) (dx^\mu)_p = A_\mu(p) \dot{\gamma}^\mu(t) dt. \quad (1.3.14)$$

$$\text{P exp} \left(\int_\gamma ieA/\hbar \right) \quad (1.3.15)$$

1.3.5 幾何学量の次元

幾何学量の次元を見ていく。以下では座標系 (x^μ) , 動標構 (e_μ) , 双対動標構 (θ^μ) を使って整理する。また、線型空間や可換環上の加群のテンソル積の議論から、

$$v \otimes w \quad (v \in V, w \in W, v \otimes w \in V \otimes W), \dim v \otimes w = (\dim v) (\dim w) \quad (1.3.16)$$

であることは有用である。スカラー倍についての構造から v, w のテンソル積の次元は v の次元と w の次元の積だ。

^{*9} D は Euclid 空間の 2 次微分形式

^{*10} H は Euclid 空間の 1 次微分形式

^{*11} ϵ は電場から電束密度を作る 3 階共変テンソル。物理定数としての普通の真空の誘電率 (テンソルの成分) ϵ_0 の単位は F/m 。

^{*12} μ は磁場から磁束密度を作る 3 階共変テンソル。真空の透磁率 μ_0 (テンソルの成分) の単位は普通 H/m 。

^{*13} Hehl, Obukhov の呼び名

^{*14} ρ は Euclid 空間の電荷密度 3 次微分形式, j は Euclid 空間の電流密度 2 次微分形式

まず、手がかりになるのは外微分が次元を変えないことである。スカラー場 f に関して $df = \theta^i e_i(f)$ であり、これは f の次元を変えない。単純に言えば、 $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ の場合 $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ 。Leibniz 則 $d(w_1 \wedge w_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$ から一般の微分形式に対しても再帰的に次元を変えない。故に外微分が物理量の次元を変えることはない。

- 座標基底: $\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu$, $\dim \partial_\mu = (\dim x^\mu)^{-1}$,
- 座標系の微分形式: dx^μ , $\dim dx^\mu = \dim x^\mu$,
- ベクトル場による微分: $X(f) = x^\mu e_\mu(f)$, $\dim X(f) = (\dim X)(\dim f)$,
- 微分形式による写像: $\omega(v) = \omega_\mu v^\mu$, $\dim \omega(v) = (\dim \omega)(\dim v)$,
- アファイン接続: $\nabla_X Y = \nabla(X, Y)$, $\dim \nabla(X, Y) = (\dim X)(\dim Y)$,
- 接続係数: $\gamma_{\mu\nu}^\lambda = \theta^\lambda(\nabla(e_\mu, e_\nu))$, $\dim \gamma_{\mu\nu}^\lambda = (\dim \theta^\lambda)(\dim e_\mu)(\dim e_\nu) = (\dim e_\mu)(\dim e_\nu)/\dim e_\lambda$
- 接続形式: $\omega_j^i = \gamma_{\mu j}^i \theta^\mu$, $\dim \omega_j^i = \dim e_j / \dim e_i$
- 曲率形式: $\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l$, $\dim \Omega_j^i = \dim \omega_j^i$
- 計量テンソル: $g = g_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu$, $\dim g = L^2$, $\dim g_{\mu\nu} = L^2(\dim e_\mu \dim e_\nu)$,

(e_μ) が正規直交動標構の時には、 $\dim g_{\mu\nu} = 1$ から $\dim e_\mu = L^{-1}$ のように整理できたところで、曲率についてまとめていこう。

- Riemann 曲率テンソル: $R = R_{jkl}^i e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l$, $\dim R = 1$, $\dim R_{jkl}^i = (\dim e_j \dim e_k \dim e_l)/\dim e_i$,
- Ricci 曲率テンソル: $\text{Ric} = R_{\mu i \nu}^i \theta^\mu \otimes \theta^\nu$, $R_{\mu i \nu}^i \equiv R_{\mu\nu}$, $\dim \text{Ric} = 1$, $\dim R_{\mu\nu} = \dim e_\mu \dim e_\nu$
- スカラー曲率: $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $\dim R = L^{-2}$,
- 宇宙項: Λ , $\dim \Lambda = L^{-2}$

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z$$

1.3.6 次元と一般相対論

1.4 $\text{SO}(r, s)$ 群とその Lie 代数

1.4.1 正規直交基底変換群

Lie 群 $\text{SO}(r, s)$ の構造を考えよう。 $G = \text{SO}(r, s)$ (特に $(r, s) = (3, 1)$) に関する主 G 束は、計量付き空間 $\mathbb{R}^{r,s} (\equiv (M, g))$ の正規直交基底の変換 (の逆変換の) 群である。以下、 $n = r + s$ とし、標準的正規直交基底を

$$e_\mu = (\delta_\mu^\nu)_{\nu,1}, e_i^+ = e_\mu \quad (i = 1, \dots, r), e_j^- = e_{r+j} \quad (j = 1, \dots, s) \quad (1.4.1)$$

と定める。例えば、 $e_1 = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1) \text{ times}}) = e_1^+$, $e_1^- = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r \text{ times}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(s-1) \text{ times}})$ 。今、 $\mathcal{V} = \Lambda^{-1} \in \text{SO}(r, s)$ とし、行列表現 \hat{L} を標準的正規直交基底について与える。Plus の基底に関し $g(e_i^+, e_j^+) = \delta_{ij}$, また minus の基底に関し $g(e_i^-, e_j^-) = -\delta_{ij}$, 当然 符号が違えば、 $g(e_i^+, e_j^-) = 0$ 。このような意味で、 $g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}$ と書く。しばしば $s = 1$ の基底に対しては $e_1^- = e_0$ とかく。正規直交基底の変換 \mathcal{V} が標準基底に右作用して

$$(e'_1 \quad \dots \quad e'_\mu) = (e_1 \quad \dots \quad e_\mu) \hat{\mathcal{V}} \quad (1.4.2)$$

を作るとしよう。ベクトルの表式では $e'_\mu = e_\lambda \mathcal{V}_\mu^\lambda$ (しばしば $e_\mu = \Lambda_\mu^\lambda e_\lambda$ と添字によって逆行列を示して書かれる)。計量の保存から基底変換が意味するのは

$$g(e_\lambda \mathcal{V}_\mu^\lambda, e_\rho \mathcal{V}_\nu^\rho) = \mathcal{V}_\mu^\lambda \mathcal{V}_\nu^\rho g_{\lambda\rho} = g_{\mu\nu}. \quad (1.4.3)$$

行列の表式では $\hat{\mathcal{V}}^T \hat{g} \hat{\mathcal{V}} = \hat{g}$ 。

1.4.2 $\text{SO}(r, s)$ の Lie 代数の具体例

次は Lie 代数 $\mathfrak{so}(r, s)$ の構造を、以上の議論から考えよう。(Lie 代数の定義は前提とする。) まず、 $\exp(t\hat{A}) = \hat{\mathcal{V}}, t \in \mathbb{R}$ とおくと $\exp(t\hat{A}^T) \hat{g} \exp(t\hat{A}) = \hat{g}$ から $\hat{A}^T \hat{g} + \hat{g} \hat{A} = 0$ 。もし $s = 0$ ならば、これは $\hat{A}^T + \hat{A} = 0$ とな

り, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ は反対称行列全体の集合である ($\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ は $\hat{A}^T + \hat{A} = 0 \Rightarrow \text{tr}(A) = 0$ より). この線型 Lie 代数の基底を $J_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu}^{\mu'} \delta_{\nu}^{\nu'} - \delta_{\nu}^{\mu'} \delta_{\mu}^{\nu'} \right)_{\mu', \nu'}$ と定めることができる. 以降これを $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ の標準基底 ないしは標準的生成子 と呼ぶ.

Ex. 1.4.1 (Riemann 計量). $\text{SO}(1) = \{1\}$ はゼロ次元なので Lie 代数もゼロ次元である. $(r, s) = (2, 0)$ の場合, $\text{SO}(2) \cong \text{U}(1) \cong S^1$ は可換群で, Lie 代数は $\mathfrak{so}(2) = \mathfrak{o}(2) = \{tJ_{12} \mid t \in \mathbb{R}\}$, ここで

$$J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \exp(\theta(-J_{12})) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 \cos \theta + (-J_{12}) \sin \theta. \quad (1.4.4)$$

この生成子 (Lie 代数の基底) は $(-J_{12})^2 = -\mathbb{1}_2$ を満たし, 代数同型の意味で $\mathfrak{o}(2) \cong i\mathbb{R} = \mathfrak{u}(1)$ である. 複素数の代数 \mathbb{C} とのテンソル積 (複素数倍) を許すようにすれば, より幾何的に意味がわかりやすくなる. 今, $J_{12} =: i\tilde{J}_{12}$ と新しい基底を用意すれば, $\exp(-\theta J_{12}) = \exp(-i\theta \tilde{J}_{12})$ のように, あたかも実回転角 $\theta \tilde{J}_{12}$ があるかのように書ける.*15

同様に $\text{SO}(3)$ の Lie 代数 $\mathfrak{o}(3)$ の標準基底 $\{J_{\mu\nu}\}$ は

$$J_{12} \equiv -J^3 = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{23} \equiv -J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{31} \equiv -J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.5)$$

交換子に関する 構造定数 $[J^j, J^k] =: C_l^{jk} J^l$ は $C_l^{jk} = \varepsilon_{jkl}$ を満たし, 完全反対称である. つまり, $\mathfrak{o}(3)$ は四元数の虚数部分の代数 $\{q \in H; \text{Re } q = 0\} \cong \mathfrak{su}(2)$ と同型である.

次に, $(r, s) = (4, 0)$ のとき, つまり $\mathfrak{so}(4)$ を考えよう. 2, 3 次元と異なり, 標準基底 (標準的生成子) に可換な組が出てくる. 実際, 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して $J_{\sigma(1)\sigma(2)} J_{\sigma(3)\sigma(4)} = 0$ だから $[J_{\sigma(1)\sigma(2)}, J_{\sigma(3)\sigma(4)}] = 0$. そこで 3 次巡回置換 $C \in C_3$ によって 添字 $(2, 3, 4)$ を 1 周回して

$$J_{1C(2)C(3)C(4)}^+ := (-1) \times (J_{1C(2)} + J_{C(3)C(4)})/2, \quad J_{1C(2)C(3)C(4)}^- := (+1) \times (J_{1C(2)} - J_{C(3)C(4)})/2, \quad (1.4.6)$$

とすると, まず, 3 つのベクトル $(J_{1234}^+, J_{1342}^+, J_{1423}^+)$ は $\mathfrak{so}(3)$ Lie 代数の交換関係を満たす. 同様に, 3 ベクトル $(J_{1234}^-, J_{1342}^-, J_{1423}^-)$ も同じ部分代数をなす. また, plus の方のベクトルから 1 つ, minus の方のベクトルから 1 つ 選べば, 2 つは互いにすべて可換である. この意味で,

$$\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{o}(4) = \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3) (= \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)) \quad (1.4.7)$$

が成立する.*16

$\text{SO}(3)$ が角運動量代数と対応することに注目し, 古典的な角運動量のような作用素 (演算子) $L_l^k = x^k \partial_l - x^l \partial_k$ による表現を考える. ここで, x^μ, ∂_ν は Weyl 代数

$$[x^\mu, x^\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, [x^\mu, \partial_\nu] = -\delta_\nu^\mu \quad (1.4.8)$$

を満たす. 共変成分を $\sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu =: x_\mu$ を定めれば $J_{kl} := x_k \partial_l - x_l \partial_k$ が以下の交換関係を満たす:

$$[J_{kl}, J_{mn}] = g_{lm} J_{kn} + g_{kn} J_{lm} + g_{nl} J_{mk} + g_{mk} J_{nl} = g_{lm} J_{kn} + g_{kn} J_{lm} - g_{ln} J_{km} - g_{km} J_{ln}. \quad (1.4.9)$$

ここで, 実際 $l = m$ とすれば, $[J_{kl}, J_{ln}] = J_{kn}$ だから, 次元が 3 である時 前述の $[J^j, J^k] = C_l^{jk} J^l$ を再現する. 量子力学では角運動量演算子に $\hat{L}_{jk} = x_j p_k - x_k p_j = -i(x_j \partial_k - x_k \partial_j)$ ($\hbar \equiv 1$) と係数 $-i$ が掛かっている. だから $(\hat{L}_{12}, \hat{L}_{23}, \hat{L}_{31}) \equiv (\hat{L}_3, \hat{L}_1, \hat{L}_2)$ とすると, $[\hat{L}^j, \hat{L}^k] = i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \hat{L}^l$ という構造定数 $C_l^{jk} = i\varepsilon_{jkl}$ を持った (自然なエルミート演算子の) 交換関係を満たす. このような事情はスピン角運動量の代数でも同様である.

Riemann 計量について構造群 $\text{SO}(r, 0)$ の Lie 代数の構造が分かってきたところで, Lorentz 計量についても考察してみたい.

*15 物理学ではむしろこれを Lie 代数の定義に採用する流儀もある. しかし, すでに述べたように, この流儀で扱っているのは $\mathfrak{o}(2)$ ではなく $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{o}(2)$ (あるいはその部分代数 $(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{o}(2)$) という別の (等価な) 対象になってしまっているため, ここでは採用しない. もしこれらの流儀で学びたい場合には, 例えば 坂本, 場の量子論 (1 巻), p. 123 などが参考になる. 筆者の流儀は, そうではなく $-J_{12}$ を虚数単位 i とみなす方 (同型) の流儀を採った.

*16 代数同型だけでなく, 群のレベルで 直積群との同型 $\text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ という事実が知られている.

Ex. 1.4.2 (Lorentz 計量). 次に Lorentz 計量に関する大域的変換群 $\mathrm{SO}(r, 1)$ の構造を計算しよう．最初に, $r = 1$ のとき, 計量は $\hat{g} \equiv \hat{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ で与えられる．2次元 (本義) Lorentz 変換は, Einstein, Poincaré, Minkowski の示したように 光速不変な 2次元慣性系の基底変換として $\gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ ($\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$) と書ける．これに対応する座標変換は逆行列 $\beta \mapsto -\beta$ を使えばよい．そして, Lie 代数の条件式 $\hat{A}^T \hat{g} + \hat{g} \hat{A} = 0$ を直接計算すると,

$$K_{12} \equiv K_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{so}(1, 1) = \{\rho J_{10}; \rho \in \mathbb{R}\} = \mathfrak{o}(1, 1). \quad (1.4.10)$$

ただし, 最後の等号は, $\mathrm{tr} \hat{A} + \mathrm{tr} (\hat{g}^{-1} \hat{A}^T \hat{g}) = 2 \mathrm{tr} \hat{A} = 0$ から示せる．この代数 $\mathfrak{o}(1, 1)$ は 双曲数 (**hyperbolic numbers**) と呼ばれる代数 $\{a + b\varepsilon \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon^2 = 1\}$ と同型である．Lie 代数 $\mathfrak{o}(1, 1)$ のベクトルの行列積に関する指数写像は $\exp(\rho J_{10}) = \begin{pmatrix} \cosh \rho & \sinh \rho \\ \sinh \rho & \cosh \rho \end{pmatrix}$ であり, 本義 Lorentz 変換全体 $\mathrm{SO}^+(1, 1)$ をなす． $\mathrm{SO}(1, 1)$ 全体は非連結であり, 連結成分 4 つは互いに剰余群 $\mathrm{SO}(1, 1)/\mathrm{SO}^+(1, 1)$ を通じて Klein の四元群をなす．

2次元の場合には Lorentz ブーストという等速直線運動を表す生成子しかないが, 3次元になると空間回転も生じてくる． $\mathrm{SO}(2, 1)$ の Lie 代数 $\mathfrak{o}(2, 1)$ の標準基底は^{*17}

$$K_{13} \equiv K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{23} \equiv K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{12} \equiv -J^3 = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.11)$$

であるが, 時間軸を 0 番とし空間軸より前に持ってきたノーテーションでは, 基底は

$$K_{10} \equiv K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{20} \equiv K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{12} \equiv -J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.12)$$

となる．3次元 本義 Lorentz 変換 (基底変換) は $\exp(\rho_1 K^1 + \rho_2 K^2 + \theta J^3)$ ($\rho_1, \rho_2, \theta \in \mathbb{R}$) で求められる． ■

以下 $n = r + s$ とする． $s = 1$ の時, 交換子 $[\cdot, \cdot]$ を備えた \mathbb{R} -加群 である, 代数 $\mathfrak{o}(r, 1)$ の基底を (Lorentz ブースト) $K_{jn} \equiv K_j$ (あるいは $K_{j0} \equiv K_j$), (空間回転) $J_{\mu\nu} = \left(\delta_\mu^{\mu'} \delta_\nu^{\nu'} - \delta_\nu^{\mu'} \delta_\mu^{\nu'} \right)_{\mu', \nu'}$ と書いてきた．これらを統一的にするためには, Minkowski 計量を利用して, 時間成分の Lorentz ブーストだけ対称行列になるように調整すればよい．言い換えれば, 一般に Lorentz 群の Lie 代数 $\mathfrak{so}(r, s)$ は基底 $M_{\mu\nu}$ をもつ:

$$\rho(M_{\mu\nu}) \equiv \widehat{M}_{\mu\nu} \equiv M_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\mu'} \delta_\nu^{\nu'} - g_{\nu\mu'} \delta_\mu^{\nu'} \right)_{\mu', \nu'}. \quad (1.4.13)$$

これは $M_{\mu\nu} := x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu = \sum_{\bar{\mu}} g_{\mu\bar{\mu}} x^{\bar{\mu}} \partial_\nu - \sum_{\bar{\nu}} g_{\nu\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}} \partial_\mu$ とおいた後 $(\partial_{\mu'} M_{\mu\nu} x^{\nu'})_{\mu', \nu'}$ を計算したものと等しくなっている．基底の交換関係は

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho} \widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \widehat{M}_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} \widehat{M}_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} \widehat{M}_{\nu\sigma}. \quad (1.4.14)$$

Prop. 1.4.3. この交換関係に従って, Weyl 代数の部分代数 $(\{M_{\mu\nu}\}, [\cdot, \cdot])$ と 行列の交換子に関する部分代数 $(\{\widehat{M}_{\mu\nu}\}, [\cdot, \cdot])$ は同型である．そして, 次元はどちらも $n(n-1)$ 次元 ($n = r + s$) になる．

Pf. 証明の方針だけ記す．まず, μ, ν, ρ, σ を n の下添え字, I を添字集合とすれば, $\{\mu, \nu\} \times \{\rho, \sigma\}$ が対角線 $D_I = \{(x, x) \mid x \in I\}$ と交わりをもつ場合だけ示せば十分である (なぜなら他の場合行列積は可換だから)．また, 添字に関する反対称性 $\widehat{M}_{\mu\nu} = -\widehat{M}_{\nu\mu}$ から, 更に $(\nu, \rho) \in D_I$ である場合のみ証明すれば十分である．言い換えれば, 左辺の交換子は具体的に行列計算によって

$$\nu = \rho \Rightarrow [\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho} \widehat{M}_{\mu\sigma} \quad (1.4.15)$$

なることが確かめられるので, 他の 3 通りの場合も合わせて, 全体の交換関係が言える．加えて, 定義から全単射で反対称性から次元がわかるので, 命題が言えた． ■

^{*17} 添字が一つの基底 K^1 などは, 計算の時紛らわしさを避けるために上付きにしたが, 下付きでも全く問題なく, 意味としてはそちらのほうがむしろ似つかわしい．つまり, $K_j \equiv K^j$, $J_3 \equiv J^3$ ．以下では混同のおそれがないときには下付きで書く．

Cor. 1.4.4. 証明の中で示したように、特に、

$$[\widehat{M}_{jk}, \widehat{M}_{kl}] = g_{kk} \widehat{M}_{jl} \quad \forall j, k, l \in I. \quad (1.4.16)$$

Cor. 1.4.5. この交換関係の形から、交換子 $[\cdot, \cdot]$ は Jacobi の恒等式を満たすこともわかる。

1.4.3 Lie 代数 $\mathfrak{o}(2, 1)$

Cor. 1.4.4 を用いると、 $\mathfrak{so}(2, 1) = \mathfrak{o}(2, 1)$ の基底の交換関係は次のようになる：

$$[K^1, K^2] = -J^3, [J^3, K^1] = K^2, [J^3, K^2] = -K^1 \quad (1.4.17)$$

$e_1 = K_1 (\equiv K^1), e_2 = K_2 (\equiv K^2), e_3 = J_3 (\equiv J^3)$ とおくと

$$[e_1, e_2] = -e_3 (c_{12}^3 = -1), [e_3, e_1] = e_2 (c_{31}^2 = 1), [e_2, e_3] = e_1 (c_{23}^1 = 1) \quad (1.4.18)$$

という構造定数が求まる。これは完全反対称ではないので、 $\mathfrak{o}(2, 1)$ は $\mathfrak{o}(3)$ とは明確に異なっている。構造定数から、(非自明なイデアルが存在しないことを確かめられるため) $\mathfrak{o}(2, 1)$ は単純 Lie 代数である (特に半単純)。

構造定数が求まったので、ここから Killing 形式 B を導出することもできる。Killing 形式 $B_{jk} = \sum_{m,n} c_{jm}^n c_{kn}^m$ (Dinkin 指数を除いて) は $(B_{jk}) = \text{diag}(2, 2, -2)$ となるため、その符号数は $(2, 1)$ だ。Killing 形式が非退化なので、Cartan の判定条件より $\mathfrak{o}(2, 1)$ は半単純 Lie 代数 であることがわかる。

さて、Lie 代数 $\mathfrak{o}(2, 1)$ は 特殊線型群の Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ と同型であることが知られている。これを説明しよう。 n 次元 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R}) = \{X \in M(n; \mathbb{R}) \mid \text{tr } X = 0\}$ の標準基底は

$$\hat{\delta}_{jk} = (\delta_{jk})_{j,k} \quad (j, k \in \{1, \dots, n\}), \hat{d}_a = \left(\delta_k^j \delta_{aj} - \delta_k^j \delta_{a+1,j} \right)_{j,k} \quad (a = 1, \dots, n-1). \quad (1.4.19)$$

つまり、 $\hat{\delta}_{jk}$ は (j, k) 成分が 1 でほかは 0 であるような $n \times n$ 行列、 \hat{d}_a は (a, a) 成分が 1 で $(a+1, a+1)$ 成分が -1 であるような $n \times n$ 対角行列である。なお次元は $n^2 - 1$ であり、 $n = 2$ のとき線型空間 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ は 3 次元である。今、

$$e_1 = \hat{d}_1/2, e_2 = (\hat{d}_{12} + \hat{d}_{21})/2, e_3 = -(\hat{d}_{12} - \hat{d}_{21})/2, \quad (1.4.20)$$

とすると、この基底は $\mathfrak{o}(2, 1)$ と同じ構造定数を持つ。よってこれら 2 つの 代数は同型である。

次に、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の Cartan 部分代数は 3 つの 1 次元部分空間 であり、例えば、その一つは $\text{span}\{e_1\} = \text{span}\{\hat{d}_1\}$ (トレースがゼロの対角行列)。翻って $\mathfrak{o}(2, 1)$ の Cartan 部分代数は $\text{span}\{K^1\} \cong \text{span}\{K^2\} \cong \mathfrak{o}(1, 1)$ と、それから $\text{span}\{J^3\} \cong \mathfrak{o}(2)$ 。ただし、1 次元 Lie 代数 $\mathfrak{o}(1, 1)$ と $\mathfrak{o}(2)$ は同型であることに注意されたい。

$\mathfrak{so}(3, 1) = \mathfrak{o}(3, 1)$ についても $\mathfrak{so}(2, 1)$ と似た議論が展開でき、特殊相対性理論の基礎となっている。

1.4.4 Lie 代数 $\mathfrak{o}(3, 1) \sim 4$ 次元 Lorentz 群

ここまでで、 $(r, s) = (1, 0), (2, 0), (1, 1), (3, 0), (2, 1)$ について見てきた。4 次元 Lorentz 群 $\text{SO}(3, 1)$ の Lie 代数について詳しく見ていこう。今までと同様に、Lie 代数 $\mathfrak{o}(3, 1)$ の標準基底 (Lorentz 群の生成子) を $M_{jn} := K_j, M_{jk} := -\sum_{\ell} \varepsilon_{jkl} J_{\ell}$ と定義する。標準基底は、すでに証明したように、以下の交換関係を満たす。

$$[J_j, J_k] = \sum_{\ell} \varepsilon_{jkl} J_{\ell}, [K_j, K_k] = -\sum_{\ell} \varepsilon_{jkl} J_{\ell}, [J_j, K_k] = \sum_{\ell} \varepsilon_{jkl} K_{\ell}. \quad (1.4.21)$$

この部分代数を求める過程で、 $\mathfrak{o}(3, 1)$ は自然に複素化される。言い換えれば、括弧積に関して閉じているベクトル $aJ_j + bK_j$ ($j = 1, 2, 3; a, b \in \mathbb{C}$) の代数 $\text{span}\{aJ_j + bK_j\}_j$ は一意に決まる。虚数単位 i を用いて $J_j^{\pm} := \frac{1}{2}(J_j \pm iK_j)$ と表すと、直和分解が成立して、

$$[J_j^{\pm}, J_k^{\pm}] = \sum_{\ell} \varepsilon_{jkl} J_{\ell}^{\pm}, [v, w] = 0 \quad \forall v \in V^+, \forall w \in V^-; \\ V^+ := \text{span}_{\mathbb{C}}\{J_j^+\}_j, V^- := \text{span}_{\mathbb{C}}\{J_j^-\}_j, \mathbb{C} \otimes \mathfrak{o}(3, 1) = V^+ \oplus V^-. \quad (1.4.22)$$

さて、 V^+ または V^- は $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ と同型であることが知られているので、これを説明しよう。これは複素 3 次元線型空間で、手がかりは $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の基底と交換関係である。実線型空間では $e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ だけが反対称だが、複素化されれば虚数単位をかけて $e_3 \mapsto ie_3$ のようにエルミート演算子 (自己共役でもある) にできる。すなわち、3 つの Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用いて、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ が

$$\underbrace{e_1 = \frac{\sigma_3}{2}, e_2 = \frac{\sigma_1}{2}, e_3 = \frac{\sigma_2}{2}}_{\text{基底}}, [e_j, e_k] = i \sum_{\ell} \varepsilon_{jkl} e_{\ell} \quad (j, k, \ell \in \{1, 2, 3\}) \quad (1.4.23)$$

なる代数 $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_j\}_j$ として表せる。今、構造定数が完全反対称だから、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の基底 e_j と順序を変えることは自由にして良い。

ここに、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) = \{X \in M(2; \mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0\}$ の部分空間 $\mathfrak{su}(2) = \{X \in M(2; \mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0; X^H \equiv X^\dagger = -X\}$ も Pauli の純虚数倍で展開できる。すなわち、実数体上の線型空間 $\text{span}_{\mathbb{R}}\{i\sigma_j\}_j$ が行列積に関してなす代数は四元数体 \mathbb{H} の虚数部分 $\{q \in H \mid \text{Re } q = 0\}$ と同型であり、基底の対応は $(i, j, k) \mapsto (-i\sigma_2, i\sigma_3, i\sigma_1)$ などと取ればよい。ただし、代数の積を Lie ブラケットに変更する際には各々基底を $1/2$ 倍しなければならない。以上の事実は、標語的に以下のようにまとめられる：

$$\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} + \mathfrak{su}(2) = i\mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2). \quad (1.4.24)$$

このようにまとめてきた $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ の代数を使って、Lorentz 群の Lie 代数を表現することができる。量子力学では自己共役作用素をもつば物理量として考えるので、Lorentz 群の Lie 代数でもエルミート基底を取ることが多い。

Remark. 複素化する前に複素数体の線形結合を取ってはいけない。仮にすべての要素 (ベクトル) を i 倍するだけであっても、 $i^2 = -1$ の計算をすると代数の (線型空間としての) 次元が 2 倍合わなくなるので、普通行われているように勝手に複素化してはいけない。

複素 6 次元代数 $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{o}(3, 1) (\equiv \mathfrak{o}(3, 1)^{\mathbb{C}})$ のエルミート基底を、 i 倍された J_j^\pm によって定めよう：

$$\tilde{J}_j := iJ_j, \tilde{K}_j := iK_j, \tilde{J}_j^\pm := iJ_j^\pm = \frac{1}{2} (\tilde{J}_j \pm i\tilde{K}_j), \quad (1.4.25)$$

ここで、ベクトル $K_j, \tilde{J}_j, \tilde{J}_j^\pm$ はエルミート、 $J_j, J_j^\pm, \tilde{K}_j$ は反エルミートである。チルダのついたベクトルは普通物理の教科書で扱われることの多いベクトルである (ref. Mark Srednicki, section 33)。

エルミート	反エルミート
$K_j, \tilde{J}_j, \tilde{J}_j^\pm, \sigma_j$	$J_j, J_j^\pm, \tilde{K}_j, \sigma_j/i$

Table 1: エルミート性による分類

これらは交換関係 $[\tilde{J}_j^\pm, \tilde{J}_k^\pm] = \sum i\varepsilon_{jkl} \tilde{J}_\ell^\pm$ を満たし、互いに直交した複素 3 次元代数 $V^+, V^- \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ をなしているのである。この意味で、Lie 代数の間に同型が成り立ち、

$$\mathbb{C} \otimes \mathfrak{o}(3, 1) \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}). \quad (1.4.26)$$

Lorentz 群の同型はこのような局所的な記述にとどまらない。スピン群の節で Lorentz 群がどのような同型を持っているかを詳細に論じてみたい。

1.4.5 SO (3) と SU (2)

この節では Lorentz 群の部分である SO (3) とその普遍被覆群の SU(2) を扱う。物理学では、SO (3) は量子力学の角運動量演算子の対称性として、SU(2) はスピン角運動量演算子の対称性として、重要である。SU(2) は電弱相互作用の部分対称性としても使われる。まずそれらの Lie 群としての多様体次元を論じるが、SO (3) には \mathbb{R}^9 から誘導される自然な位相が入っているので、独立変数の個数を数えればよい。消える自由度は上三角行列の 6 成分である。行列式が 1 という条件は、この場合実多様体としての次元を変えない。なぜなら、それは連結成分の選択にのみ寄与するからで、詳しくは Lie 環によって論じる。

群	定義	多様体次元
SO(3)	$A \in M(3; \mathbb{R}), A^T A = I, \det A = 1$	3 (= 9 - 6)
SU(2)	$A \in M(2; \mathbb{C}), A^H A = I, \det A = 1$	3 (= 8 - 4 - 1)

Table 2: 群の定義と多様体次元

$\mathfrak{o}(3)$ の基底は Eq. (1.4.5) ですでに与えた。今までの議論を経て、分かりやすいように下付きに変えておくと $J_1 = -J_{23}, J_2 = -J_{31}, J_3 = -J_{12}$ という基底が交換関係 $[J_1, J_2] = J_3, [J_2, J_3] = J_1, [J_3, J_1] = J_2$ を満たしている。これをまとめると

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_k \quad (\text{not } J_i J_j \neq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_k). \quad (1.4.27)$$

Remark. この交換関係は標準基底の実数倍だけで書けたことに注意する。代数は実線型空間だから、それが望ましい。反対に、Lie 代数が実 3 次元線型空間であることを示すために勝手に複素化してはいけない。なぜなら虚数単位 i 倍したとたんに複素数の代数が全体の次元を 2 倍にするからである。これは Lie 代数の定義に i 倍の修正因子をかけても解決されない。

この基底で $\mathfrak{o}(3)$ は

$$\theta^1 J_1 + \theta^2 J_2 + \theta^3 J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\theta^1, \theta^2, \theta^3 \in \mathbb{R}) \quad (1.4.28)$$

と生成され、それぞれのベクトルに関して指数写像が次のようになる：

$$\begin{aligned} \exp(\theta^1 J_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^1 & \sin \theta^1 \\ 0 & \sin \theta^1 & \cos \theta^1 \end{pmatrix}, \quad \exp(\theta^2 J_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta^2 & 0 & \sin \theta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta^2 & 0 & \cos \theta^2 \end{pmatrix}, \\ \exp(\theta^3 J_3) &= \begin{pmatrix} \cos \theta^3 & -\sin \theta^3 & 0 \\ \sin \theta^3 & \cos \theta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

一方、 $\mathfrak{su}(2)$ は Pauli 行列を反エルミートに変換することによって張られる。交換関係は

$$\left[\frac{\sigma_j}{2i}, \frac{\sigma_k}{2i} \right] = \sum_{\ell} \varepsilon_{j k \ell} \frac{\sigma_{\ell}}{2i}. \quad (1.4.30)$$

$\mathfrak{su}(2)$ の生成元 $T_j = \frac{\sigma_j}{2i}; T_1 = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ で代数は

$$\theta^1 T_1 + \theta^2 T_2 + \theta^3 T_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{i\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2} \\ -\frac{i\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \quad (1.4.31)$$

のように生成され、各々の指数写像は、

$$\begin{aligned} \exp(\theta^1 T_1) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta^1}{2} & -i \sin \frac{\theta^1}{2} \\ -i \sin \frac{\theta^1}{2} & \cos \frac{\theta^1}{2} \end{pmatrix}, \quad \exp(\theta^2 T_2) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta^2}{2} & -\sin \frac{\theta^2}{2} \\ \sin \frac{\theta^2}{2} & \cos \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix}, \\ \exp(\theta^3 T_3) &= \begin{pmatrix} \exp(-\frac{i\theta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{i\theta}{2}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

代数	定義	次元
$\mathfrak{o}(3)$	3×3 反対称行列: $A^T + A = 0$	基底の数: 3
$\mathfrak{su}(2)$	2×2 反エルミート行列でトレース 0: $A^H + A = 0, \text{tr} A = 0$	実 3 次元

Table 3: リー代数とその定義および次元

このように、SO (3) と SU(2) の Lie 代数は同型である: $\mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$.

1.4.6 スピン群と Lorentz 群

1.4.7 Lie 代数から見る特殊相対論

特殊相対論では Lorentz 変換で慣性系の座標変換がなされる。速度を $\beta = v/c \in \mathbb{R}$, Lorentz 因子を $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ として, 2 次元 Minkowski 空間で

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.4.33)$$

という具合である。この 120 年前の表式は確かに Lorentz や Poincaré を引き継ぐ物理学上のイノベーションだった。しかしながら, この式は空間の局所的対称性を正確に, 十分に書き表しているとは言えない。Minkowski 時空は並進対称性をもつために, そのことが見えにくくなっているのである。局所的対称性を顕わにするためには, $\text{SO}(1,1)$ の言葉から $\mathfrak{o}(1,1)$ の形に書き直すことが望ましい。また, ラピディティ $\beta =: \tanh \rho^1$ は Lie 代数の意味で物理的実像を得る。まず手始めに, Lie 代数の標準基底 $K_1 = K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を取る。このベクトルは未だ対称性の意味を備えていない。指数写像の値 $\exp(\rho^1 K_1) = \begin{pmatrix} \cosh \rho^1 & \sinh \rho^1 \\ \sinh \rho^1 & \cosh \rho^1 \end{pmatrix}$ は正規直交基底を同じ向きの正規直交基底に変換する。

$$(e'_1 \ e'_2) = (e_1 \ e_2) \exp(\rho^1 K_1), \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \exp(-\rho^1 K_1) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (1.4.34)$$

ここで, 質点の運動学にうつる。運動学の起源である Newton がプリンキピアにおいてまとめた慣性の法則を思い出す。その前半「慣性系で静止している物体は, その系で静止し続ける」をここでも採用する。変換前の系を e 系, 変換後の系を e' 系と呼ぶと, e 系で静止している物体は, 定義から曲線

$$\gamma_e(t) = \{p \in \mathbb{M}^2 \mid x^1(p) = \text{const.}, x^2(p) = ct\} \quad (1.4.35)$$

上にある。これは e 系の測地線であり, e 系の時間は 4 元 (2 元) 速度 $\dot{\gamma}(t) = ce_0$ 方向に流れている。この質点は e' 系から曲線 $\gamma_{e'}(t)$ をたどるとしよう。先ほど求めた座標変換から,

$$\begin{pmatrix} x'^1(\gamma_{e'}(t)) \\ x'^2(\gamma_{e'}(t)) \end{pmatrix} = \exp(-\rho^1 K_1) \begin{pmatrix} x^1(\gamma_e(t)) \\ x^2(\gamma_e(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cosh \rho^1) x^1 - (\sinh \rho^1) ct \\ -(\sinh \rho^1) x^1 + (\cosh \rho^1) ct \end{pmatrix}. \quad (1.4.36)$$

Lorentz 因子 $\cosh \rho^1$ でくくり出すと,

$$\text{LHS.} = \cosh \rho^1 \begin{pmatrix} x^1 - ct \tanh \rho^1 \\ ct - x^1 \tanh \rho^1 \end{pmatrix}, \quad (1.4.37)$$

これが特殊相対性理論における等速直線運動 (測地線) である。次に固有時を求めよう。 $\dot{\gamma}_{e'}(t) = \begin{pmatrix} -c \sinh \rho^1 \\ c \cosh \rho^1 \end{pmatrix}$ なの
で, $\eta_{\gamma_{e'}(t)}(\dot{\gamma}_{e'}(t), \dot{\gamma}_{e'}(t)) / (-1) = c^2$ から

$$\tau(t) = \frac{1}{c} \sqrt{c^2} \cdot t = t. \quad (1.4.38)$$

当然, 質点の静止系の時間パラメータを t と取っているのだから, 固有時は t そのものとなる。一方, 運動物体を観測する場合にはこのような立場を逆にすればよい。等速度で動いている物差しである e' 系で静止している物体は e 系から見て等速度で動いている。ここでも「慣性系で静止している物体はその系で静止し続ける」ので,

$$\gamma_{e'}(t') = \{p \in \mathbb{M}^2 \mid x'^1(p) = \text{const.}, x'^2(p) = ct'\}. \quad (1.4.39)$$

この運動は, 先ほどと逆向きの変換で, 同様の計算をすればよいのである。なぜなら, 相対性原理から自由運動の方程式はベクトル方程式だからである。すなわち, 構造群 $\text{SO}(1,1)_e$ (単位群の連結成分) が逆向きの立場を保証している。従って, $\gamma_{e'}$ 上の固有時 $\tau(t'; \gamma_{e'})$ は

$$\tau(t'; \gamma_{e'}) = t' \quad (1.4.40)$$

もちろん, 固有時は e' 系のパラメータ t' である。先ほどと立場を逆にただけだからである。しかし, e 系の時間, すなわち e_2 方向で測った時間座標 $x^2(\gamma_{e'}(t'))$ は一定の x'^1 に対して時間間隔 $dx^2/c = \cosh \rho^1 dt'$ で時間を測る。

今, Alice がもつものさし e 系 に比べて, ラピディティ ρ^1 で等速運動している Bob がもつ e' 系における「静止粒子」(古典的に!) があった. この寿命 T は固有時で定義することができる. Bob が T で崩壊したと思った粒子は, Alice から見れば時間 $T \cosh \rho^1$ で崩壊したように計測される.*18 これが通例 時間の遅れ (time dilation) と呼ばれている現象である.

ここまでくれば, 慣性系の数学的な定義は Minkowski 空間の正規直交基底であることがわかる.

*18 数学的に表現するには, $t'/T \in [0, 1]$ というパラメータで曲線を描き, その前後で何も描かなければ良い.

§2 曲面論

2.1 埋め込み

部分多様体は埋め込みでなくてはいけないので、埋め込みの定義と例を復習しよう。

2.1.1 定義

Def. 2.1.1 (埋め込み). 位相空間 (X, T) から位相空間 (Y, S) への埋め込みとは、 X から Y の部分空間への同相写像である。つまり、 X から Y への埋め込みとは、写像 $f: X \rightarrow Y$ であって $(f[X], S_{f[X]})$ が (X, T) と同相となるものである。

特に、以下の性質を満たす。

1. 埋め込みは連続
2. 埋め込みは単射

2.1.2 例

Ex. 2.1.2. 例. $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ および $T = 2^X = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $S = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 1\}, Y\}$ とする。

$(f(1), f(2)) = (1, 2)$ で定まる写像 f は (X, T) から (Y, S) への埋め込みである。

一方、 $(f(1), f(2)) = (2, 1)$ で定まる異なる写像 f は、 $f^{-1}[\{1\}] = \{2\}$ を満たし、連続写像ではないので埋め込みでもない。 ■

Ex. 2.1.3. 例. n 次元実数空間 \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) は $(n+1)$ 次元実数空間 \mathbb{R}^{n+1} において、超平面

$$P = \{(x_j)_{j=1}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \text{ and } \forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j \in \mathbb{R}\}$$

として埋め込まれる。ただし、ここで埋め込みは包含写像 $\iota: P \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 。 ■

Ex. 2.1.4. 例. 直前の例で次元の組 $(n, n+1)$ を一般に (m, n) ($m \leq n$) としても同様に埋め込みが成り立つ。 ■

2.2 Immersion

可微分多様体の部分多様体ははめ込みでなくてはいけないので、はめ込みとはなにか確認しよう。

Setup:

- M : m 次元 C^r 級 (可微分) 多様体
- N : n 次元 C^r 級多様体
- $\phi: M \rightarrow N$: C^r 級 (可微分) 写像
- $C_p^r(M)$: 点 $p \in M$ の近傍で定義される C^r 級写像

Def. 2.2.1 (微分). 可微分写像 ϕ の微分 $d\phi \equiv \phi_*$ は以下のように定義される。すなわち、接ベクトル v_p と可微分写像 ϕ から定まる写像 $\tilde{v}_{\phi(p)}$ を、 $(F$ の ϕ による) 引き戻し $\phi^*F := F \circ \phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\tilde{v}_{\phi(p)}(F) := v_p(\phi^*F), \quad \forall v_p \in T_pM, \forall F \in C_{\phi(p)}^r(N) \quad (2.2.1)$$

のように定める。すると $\tilde{v}_{\phi(p)}$ は N の点 $\phi(p)$ における接ベクトルとなる (参考: Arai, p188)。そこで以上の対応を $(d\phi)_p(v_p) := \tilde{v}_{\phi(p)} \in T_{\phi(p)}N$ と書き、写像 $(d\phi)_p \equiv (\phi_*)_p: T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ を ϕ の点 p における微分 または 押し出し とよぶ。

すべて書き下すと、

$$(d\phi)_p(v_p)(F) = v_p(F \circ \phi), \quad \forall v_p \in T_pM, \forall F \in C_{\phi(p)}^r(N) \quad (2.2.2)$$

のように書ける.

Ex. 2.2.2. C^∞ 級関数 $\phi(x) = (x, x^2)$ ($\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto (x, x^2)$) の微分を求める. Euclid 空間におけるデカルト座標の偏微分は前提されているとする. 任意の点 $x \in \mathbb{R}$ について $F \in C^\infty_{\phi(x)}(\mathbb{R}^2)$ の ϕ による引き戻しをとると $(\phi^*F)(x) = F(x, x^2)$. 次に点 $x \equiv a \in \mathbb{R}$ での接ベクトル $v_a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_x$ の引き戻しに関する値を計算すると,

$$\frac{\partial(\phi^*F)}{\partial x}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, (x+h)^2) - F(x, x^2)}{h}, \quad (2.2.3)$$

分母に $-F(x+h, x^2) + F(x+h, x^2)$ を足すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi^*F)}{\partial x}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x+h, (x+h)^2) - F(x+h, x^2)}{(x+h)^2 - x^2} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{F(x+h, x^2) - F(x, x^2)}{h} \right] \\ &= 2x \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \Big|_{(y=x^2)} + \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \Big|_{(y=x^2)}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

よって, ϕ の微分は $(d\phi)_a \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(a, a^2)} + 2x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(a, a^2)}$ によって定まる. ■

Remark. 1 次微分形式 $d\phi = dx + 2xdy$ とは似て非なるものである.

このように, 押し出し (微分) は, 写像を取った後の点で接ベクトルを求めるために, 合成関数の微分 (chain rule) を適用しているような, 自然な定義になっている.

Def. 2.2.3 (はめ込み). M 上のすべての点で ϕ の微分が単射であるとき, 写像 ϕ を M から N への **はめ込み** という. すなわち, はめ込み ϕ について,

$$\forall p \in M, \forall v_1, v_2 \in T_p M, (d\phi)_p(v_1) = (d\phi)_p(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2. \quad (2.2.5)$$

Ex. 2.2.4. 前の例の $\phi(x) = (x, x^2)$ ははめ込みである. (グラフを書けばわかる) ■

Ex. 2.2.5. 直線から円への写像 $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ ははめ込みである. なぜなら $(d\phi)_t (\partial_t)_t = \cos t (\partial_x)_{\phi(t)} + \sin t (\partial_y)_{\phi(t)}$ は接空間の間の同型を定めているから, 特に単射である. (参考: 藤岡 幾何学 4, p. 1) ■

Ex. 2.2.6. 曲線 $\phi(x) = (x^2, x^3)$ ははめ込みではない. なぜなら, 微分 $(d\phi)_a (\partial_x)_a = 2a (\partial_x)_{\phi(a)} + 3a^2 (\partial_y)_{\phi(a)}$ は点 $a = 0$ 上で $(d\phi)_a [T_a \mathbb{R}] = \{0\}$ を満たし, 単射ではないからである. ■

Ex. 2.2.7. 上の例を一般化すると, 正則な曲線 $\gamma(t)$ s.t. $(\gamma'(t) \neq 0)$ ははめ込みである. ■

はめ込みは局所的な埋め込みと解釈できる. 可微分多様体では, 埋め込みといったら はめ込みである条件を付け加える.

Def. 2.2.8 (可微分多様体への埋め込み). はめ込みであり, かつ位相空間の間の (微分同相な) 埋め込みでもある写像を, (可微分多様体の間の) **埋め込み** と呼ぶ.

ただし, 埋め込みを単に単射なはめ込みと定義することもある.

Def. 2.2.9 (部分多様体). 包含写像 $\iota: M \rightarrow N$ が埋め込みであるとき, M は N の **部分多様体** であるという.

Ex. 2.2.10. $(M, N) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (ただし $M \subsetneq N$ とみなす) について, 包含写像 $\iota: M \rightarrow N$ は 接空間の間の包含写像 $\partial_1 \mapsto \partial_1, \dots, \partial_m \mapsto \partial_m$ を定め, これは単射なので M は N の部分多様体といえる. ■

2.3 射影

第 2 基本形式を定めるための, 射影の議論を展開する. まず, 線型空間における射影を思い出す. ここでは主として有限次元のものを考える.

2.3.1 有限次元線型空間における射影

Def. 2.3.1 (射影). 有限次元線型空間における **射影 (projection)** とは、平方とそれ自身が等しい線型作用素である。すなわち、線型空間 V の自己準同型 $P \in \text{End}(V)$ が $P^2 = P$ を満たす時、 P を射影または **射影作用素 (projection operator)** という。

Ex. 2.3.2. 有限次元内積空間 (V, g) において、射影 (作用素) でありかつ 対称 (作用素) である、すなわち $P^2 = P$ かつ $g(Px, y) = g(x, Py) \forall x, y \in V$ を満たす P を **直交射影 orthogonal projection** または **正射影** と呼ぶ。 ■

Remark. 集合論ではこれとは別に射影と呼ばれる写像がある。添字集合 Λ に関する直積集合 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ において、写像 $p_i : X \rightarrow A_i, i \in \Lambda; (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto a_i$ のことを i 番目の要素への **標準射影 (canonical)** という。(選択公理は仮定する。) もちろん、語用論的に線型空間での射影とも重なっている。しかし、線型空間ではある写像が射影かどうかは基底の選択によらないで、幾何学的に決まっている。また、Hilbert 空間における射影作用素には (無限次元の場合) 有界性を課す。

Def. 2.3.3 (有限次元線型空間の直和分解). V を線型空間とする。有限部分集合族 $V_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ が

- V_λ は任意の $\lambda \in \Lambda$ について V の部分空間、
- $V = \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \iff \forall v \in V, \forall \lambda \in \Lambda, \exists v_\lambda \in V_\lambda; v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda,$
- $\forall \lambda \in \Lambda, V_\lambda \cap \left(\sum_{\alpha \neq \lambda \in \Lambda} V_\alpha \right) = \{0_V\}$

を満たす時、 $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ と書き、これを V の **直和分解 (direct sum decomposition)** という。

Prop. 2.3.4. 直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ において、定義における v_λ の存在は一意的である。

Prop. 2.3.5. V が有限次元のとき、次元を $d = \dim V$ とすると、 V はただだか d この部分空間で直和分解できる。加えて、 $\dim V = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim V_\lambda$ 。

Ex. 2.3.6. 線型空間 V について、 $\Lambda = \{1, 2\}$ とし、直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$ が成り立つということは、すなわち、

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \forall \lambda \in \Lambda, \exists v_\lambda \in V_\lambda; v = v_1 + v_2, \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} (\neq \emptyset). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

この時、 $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ 。 ■

次に、直和分解と射影の関係を見るために、剰余空間 (商空間) を説明しておく。線型空間 $(V; \mathbb{K})$ について V の部分群 W があったとき、 V は加群であるから W は正規部分群になる。よって剰余群 V/W が定まる。

Remark. 同値関係を $x \sim y \iff x - y \in W$ によって定めることができるから、 V を \sim で割った 剰余群 (商群) V/\sim が、同値類全体によって定まる。

この剰余群 V/W は $(V; \mathbb{K})$ から定まる自然な加法とスカラー倍によって \mathbb{K} -加群になる。従って線型空間 $(V/W; \mathbb{K})$ を **剰余空間 (coset space)** または **商空間 (quotient space)** という。

この意味で、線型空間 A, B に対して $f \in \text{Hom}(A, B)$ の余核 (cokernel) を $\text{Coker } f := B/\text{Im } f$ とすると、直和分解と射影との関係がわかる。まず、 $\text{Coker } f \cong \text{Ker } f = f^{-1}[\{0_B\}]$ が言える。これは次元を数えれば同型がわかる。

Prop. 2.3.7. 有限次元線型空間 $(V; \mathbb{K})$ において、射影 P は自己準同型だからその像 $\text{Im}(P)$ は V の部分空間である。この時、有限次元線型空間 V における射影はその直和分解 $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$ を導く。

Pf. $W := \text{Im } P$ とおく。まず、 W と $\text{Ker } P$ が V を生成することを示す。任意のベクトル $v \in V$ に対して、 $w = P(v)$ とすると、 $P^2 = P$ だから、

$$v = w + (v - w), w \in W, v - w \in \text{Ker } P, \quad (2.3.2)$$

ここで、 $v - w = (1 - P)(v)$ (ただし、 $1 \equiv \text{id}_{\text{End}(V)}$) とも書けることに留意する。次に、 $\text{Im } P \cap \text{Ker } P = \{0\}$ を証明する。もし、ある核上のベクトル $k \in \text{Ker } P$ が存在して、同時に W の元だったとする。この時、あるベクトル $v \in V$ が存在して $k = P(v) \in W$ 。 P は射影だから $P^2(v) = P(v)$ 。また $k \in \text{Ker } P$ だから $P(k) = 0$ 。故に等式

$P(v) = P(k) = 0$ すなわち $v \in \text{Ker } P$ が成立し, $k = 0$. よって

$$W \cap \text{Ker } P = \{0\}. \quad (2.3.3)$$

従って, $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$. ■

Remark. $i := \dim W = \text{rank } P$ とおくと, $\dim \text{Ker } P = \dim V - i$.

この命題を整理してみよう. まず $Q := 1 - P$ とおくと P は射影だから, $PQ = QP = 0_{\text{End}(V)}$. 従って, $\text{Im } P = \text{Ker } Q$ かつ $\text{Im } Q = \text{Ker } P$. 加えて $Q^2 = Q$ だから Q も射影である. 要するに, 射影作用素 P があったら, それと相補的な射影 $Q = 1 - P$ があって

$$V = \text{Im } P \oplus \text{Im } Q = \text{Ker } Q \oplus \text{Ker } P. \quad (2.3.4)$$

逆に, 自己準同型が射影になる十分条件はなんだろうか. 証明を (論理的に) 逆に辿っていけば, 不動点 (固定点) (fixed points) 全体のなす部分空間 $\text{Fix } f = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ を用いれば良いことがわかる.

Prop. 2.3.8. 線型空間の自己準同型 $f \in \text{End}(V)$ が不動点全体のなす部分空間 $\text{Fix } f$ について,

$$\text{Fix } f \oplus \text{Ker } f = V \quad (2.3.5)$$

を満たすならば $f^2 = f$.

Pf. $\forall v \in V, \exists! \phi \in \text{Fix } f; \exists! k \in \text{Ker } f, v = \phi + k$. 従って,

$$f(v) = f(\phi) = \phi \quad (2.3.6)$$

かつ $f^2(v) = f(\phi) = f(v)$. 故に $f^2 = f$. ■

Remark. 参考に, 必要十分条件であることを示す説明, 環上の加群への拡張のモチベーションが ref. 環論: 射影と直和分解 - YouTube <https://www.youtube.com/watch?v=ADJXiv5IFP4> (龍孫江の数学日誌 in YouTube) にある.

以上の命題をまとめると, 射影と直和分解の関係が得られる. ただし, 射影 P に関して $\text{Im } P = \text{Fix } P$ を使っている. 線型空間の次元はここでも有限次元に限るものとする.

Prop. 2.3.9. 有限次元線型空間 V における自己準同型 $f \in \text{End}(V)$ に伴う 部分空間

- (核) $K_f = \text{Ker } f$ と
- (固定点集合) $F_f = \text{Fix } f$

について, 直和分解 $V = F_f \oplus K_f$ の成立と, f の射影性 $f^2 = f$ は同値 である.

Ex. 2.3.10 (計量空間での射影). d 次元 不定計量空間 $(V, g; \mathbb{K})$ が与えられたとする. いま, 体 \mathbb{K} は \mathbb{C} または \mathbb{R} であるとする. 不定計量 $g \equiv \langle, \rangle$ に伴う rank 1 の射影作用素 $\text{pr}_g(u, v) \equiv P_u(v; g) \equiv P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ for $\langle u, u \rangle \neq 0$ は u 方向へ v を射影する. すなわち, $P_u^2 = P_u$. 加えて, 第 2 引数に関して線型: $\text{pr}_g(u, bv) = b \text{pr}_g(u, v) \forall b \in \mathbb{K}$. 一方, 第 1 引数に関してはスカラー倍に関して不変: $\text{pr}_g(au, v) = \text{pr}_g(u, v) \forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

さて, 計量空間 V の任意の部分集合 $A \neq \emptyset$ に対して 直交補空間 (orthogonal complement) $A^\perp := \{v \in V; \forall a \in A, g(a, v) = 0\}$ が定まる (ref. Arai, GR. p. 70). これは g の双線型性から V の部分線型空間であるが, 後で見るように一般には g で計量空間になるとは限らない. だが, 部分空間 (B, g) は, 直交補空間 (B^\perp, g) と V を直和 $V = B \oplus B^\perp$ に分解する (ref. Arai, GR. p. 71).

以上より, ノルムでないベクトル $n \in V$ を $(\langle n, n \rangle \neq 0)$ (normal の頭文字) を使って, 1 次元部分空間 $P_n[V] = \text{span}\{n\}$ を作ると, 線型空間 V は直和分解される: $V = P_n[V] \oplus P_n[V]^\perp$ が成立し,

$$\forall v \in V, \exists! v^\perp \in P_n[V]^\perp; v = v^n + v^\perp, v^n := \frac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n; \langle n, v^\perp \rangle = 0. \quad (2.3.7)$$

■

Remark. g が正定値内積の場合には Gram-Schmidt の直交化法が成立する :

$$\begin{aligned} u_1 &= t_1, u_2 = t_2 - \text{pr}_g(u_1, t_2), u_3 = t_3 - \text{pr}_g(u_1, t_3) - \text{pr}_g(u_2, t_3); \\ u_j &= t_j - \sum_{i=1}^{j-1} \text{pr}_g(u_i, t_j) \quad (j \in \{1, \dots, d'\}). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

正規化すると正規直交基底がとれる.

射影作用素 P_n は計量 g に関する直交射影である: $\langle P_n(v), w \rangle = \langle v, P_n(w) \rangle$. 一般に, (複素) 計量空間における直交射影の条件を理解するには, 射影 P の相補的な射影 $Q = 1 - P$ を見ればよい. もともと $\langle Px, Qy \rangle = 0$ ($x, y \in V$) から出発し, 単に x, y を入れ替えた $\langle Py, Qx \rangle = 0$ を使うと $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ と同値になる.

ブラケット記法を使うと更に分かりやすい. 1 次元射影演算子 $P_u = \langle u|u \rangle^{-1} |u \rangle \langle u|$ によって,

$$P_u |v \rangle = \langle u|u \rangle^{-1} |u \rangle \langle u|v \rangle = (\langle u|v \rangle / \langle u|u \rangle) |u \rangle. \quad (2.3.9)$$

次に具体的に Minkowski 空間での直交補空間を考えてみる.

Ex. 2.3.11. 例えば, \mathbb{M}^2 の正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ (2 軸が時間) をとり, ヌルベクトル $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ の直交補空間 $A^\perp = \{a\}^\perp$ を考える. 計算の結果 直交補空間は $A^\perp = \text{span}\{a\}$ となり, \mathbb{M}^2 の部分線型空間ではある. しかし, 計量が A^\perp で非退化ではないので, A^\perp は計量空間として部分空間にはなっていない. 故に 二重直交補空間 $(A^\perp)^\perp = A^\perp$ が存在しても, これは \mathbb{M}^2 の直和分解をなさない: $M \neq A^\perp + (A^\perp)^\perp = A^\perp$ (+ は線型包としての和).

他の線形独立なヌルベクトル $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2)$ に関しても同様である. ここで, $\text{span}\{a, b\} = \mathbb{M}^2$ かつ $\{a, b\}^\perp = \{0\}$ なので, こちらの方は (自明な) 直和分解 $M = A^\perp + (A^\perp)^\perp$ が成立する. ■

Ex. 2.3.12. 次に, n 次元 Minkowski 空間 \mathbb{M}^n で時間的ベクトル e_t を取る: $g(e_t, e_t)/\eta_{00} > 0; \eta_{00} = \mp 1$. この時, 直交補空間 $\{e_t\}^\perp$ は空間的超平面となる (ref. Arai, GR. p. 106). ■

線型空間での射影を思い出すのはこれくらいにして, これを環上の加群に一般化することを考える.

2.3.2 有限生成自由加群における射影

そういうわけで, 有限次元線型空間における射影を, 近しい状況が成り立つ 有限生成自由加群にも一般化してみよう. 有限生成は先ほどの有限次元に似ていて, 自由加群というのは基底が存在する環上の加群である.

- $(R, +, \times)$: 環 (スカラー場の可換環を念頭に置く)
- $\mathfrak{M} = (G, +; R)$: R -左加群 (ベクトル場の加群を念頭に置く)
- $\text{End}(\mathfrak{M}) \equiv \text{End}(G; R)$: 環上の加群 $(G; R)$ の自己準同型環
- \mathfrak{B} : \mathfrak{M} の基底

生成・1 次独立・基底の定義は線型空間と同様なので省略する (ref. 松田茂樹, 加群について).

Def. 2.3.13 (自由加群). 基底をもつ環上の加群を **自由加群 (free module)** という.

Ex. 2.3.14. すべての線型空間は自由加群の一例である. また, 可換環上の多項式環 $R[x]$ は基底 $\{1, x, x^2, \dots\} = \{x^j\}_j$ をもつ自由加群である. ■

Def. 2.3.15. 有限生成 (**finitely generated**) 加群とは, 有限個の元で生成される環上の加群である.

Ex. 2.3.16. 有限次元線型空間は有限生成自由加群の一例である. また有限次の多項式の環 $\{p \in R[x] \mid \deg p \leq m\} (m \in \mathbb{N}_0)$ は有限生成自由加群. ■

有限次元線型空間の中で, 特に接空間を復習し, 次の例の準備とする. (M, \mathcal{A}) を C^r ($r \geq 2$) 級実 m 次元 可微分多様体 とする. 上の座標近傍 $(U, (x^i)) \in \mathcal{A}$ の上で接空間を定義したい (ref. Arai, GR. p. 175). そのために, p 付近の十分滑らかな関数を考える. ただし, 簡単のためこれらの関数は座標近傍全体で定義されているものとする. 座標

系の意味で C^r 級になっているこれらの関数全体を $C^r(U, \mathbb{R})$ と表記する。^{*19} このとき、写像 $\vec{t}, \vec{u}: C^r(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ が線型で Leibniz 則を満たすとき、それらを C^r 級の **接ベクトル (tangent vector)** と呼ぶ。

- 線型性: $\vec{t}(f+g) = \vec{t}(f) + \vec{t}(g)$, $\vec{t}(af) = a\vec{t}(f)$; $f, g \in C^r(U, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$;
- Leibniz 則: $\vec{t}(fg) = \vec{t}(f)g(p) + f(p)\vec{t}(g)$; $f, g \in C^r(U, \mathbb{R})$.

この時、例えば座標による偏微分 $(\partial/\partial x^i)_p$ s.t. $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ は接ベクトルである (ref. Arai, GR). これは $(U$ 上の) C^r 級関数の定義から C^r 級である. p 上の接ベクトル全体を **接空間 (tangent space)** といい, $T_p M \equiv T_p(M)$ とかく. 接空間の次元は多様体次元と同じ m になる. 基底 $\{(\partial/\partial x^i)_p\}_i$ は **座標基底 (coordinate basis)** あるいは **自然基底 (natural basis)** と呼ばれている.

また、すべての点と接ベクトルの組を集めた集合 $TM = \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_p M\}$ を **接バンドル** または **接束 (tangent bundle)** という.

接束はそれ自体が C^r ($r \geq 2$) 級 $2m$ 次元可微分多様体^{*20} であるが、ベクトル部分の繋がり方に何か連続性を限定したものではない. だから、標準射影 $\pi: (p, v_p) \mapsto p$ によって、接ベクトルたちが滑らかにつらなった対象 $v: M \rightarrow TM$ を考える.

$$\pi \circ v = \text{id}_M \quad (2.3.10)$$

を満たす C^r 級可微分写像を C^r 級 **ベクトル場 (vector field)** と呼び、その全体を $\Gamma^r(M, TM) \equiv \Gamma^r(TM)$ とかく.

組 (TM, π, M) は $T_p M$ をファイバーとするファイバー束であり、ファイバーが線型空間なので、特にベクトル束である. ベクトル場は、言い換えると、ベクトル束 TM の滑らかな切断である. これは M 全体を定義域とするという意味で、大域的切断と呼ばれる. 加えて、 TM がベクトル束であることにしたがって、ベクトル束の局所切断も考えられる. これで準備ができたので、このベクトル場を例に加群を論じてみよう.

Ex. 2.3.17. M 上の座標近傍 $(U, (x^j))$ の上で局所的なベクトル場 (局所切断) を考える. これは有限生成自由加群になる. 順を追って説明しよう. 任意の点 $p \in U$ で $(p, v_p) \in U \times T_p M$ を取ってくる. $T_p M$ は実線型空間なので局所切断に加法と実数倍を次のように定義できる:

$$v(p) = (p, v_p), w(p) = (p, w_p), (v+w)(p) := (p, v_p + w_p), (av)(p) := (p, av_p), \quad (2.3.11)$$

ただし、 $w_p \in T_p M$, $a \in \mathbb{R}$. ここから進んで、 U 上のスカラー場 $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ を使って

$$(fv)(p) := (p, f(p)v_p) \quad (2.3.12)$$

と定めると、局所的ベクトル場全体は可換環 $C^r(U, \mathbb{R})$ 上の加群となる. これを $\Gamma^r(U, TM)$ とかき、大域的ベクトル場とは区別する. 今、 $(U, (x^j))$ は C^r 級チャートだった. 局所的ベクトル場

$$\sigma_j(p) := \left(p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right), \quad (2.3.13)$$

座標表示 $(x^1(p), \dots, x^m(p), 0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 は j 番目の係数) をもつから、全体として C^r 級である. これを座標系 x^j による (あるいは座標基底 $\partial/\partial x^j$ に伴う) **動標構 (moving frame)** という. 動標構の概念は一般相対論で本質的である. ■

この動標構によって局所的ベクトル場を生成 (展開) する. 普通、混同のおそれがないときには σ_j の代わりに以下の $\frac{\partial}{\partial x^j}$ という記号を使う:

$$\sigma_j(p)(f) := \left(p, \frac{\partial}{\partial x^j}(f)(p) \right), \quad \frac{\partial}{\partial x^j}(f)(p) := \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p f, \quad (2.3.14)$$

^{*19} もし座標近傍全体で定義されない関数を考えたいときには、ある p の近傍を 2 つ取ってその積集合の中でのみ演算を定義すると、接ベクトルを論じることができる (ref. Arai, GR. p. 176). もしくは、 U の十分狭い部分集合を取れば良い.

^{*20} 標準射影が連続になる最も弱い位相が誘導される. 接ベクトル部分の座標を、ベクトルの座標基底による展開係数で取ると、滑らかさも示せる.

より一般には $v(p)(f) := (p, \tilde{v}(f)(p))$, $\tilde{v}(f)(p) := v_p f$ ということにしておいた後, \tilde{v} を使うが, 接束 TM に関しては応用上これで問題ない.*21 可換環 $C^r(U, \mathbb{R})$ 上の局所的ベクトル場全体の加群 $\Gamma^r(U, TM)$ は有限生成自由加群である. なぜなら, 動標構 $(\partial/\partial x^j)_j$ が $\Gamma^r(U, TM)$ の基底であり, その基数は m だからである.

Ex. 2.3.18. M 上のベクトル場の Lie 微分 (交換子) は $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ はスカラー場 f に対して

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.3.15)$$

のように作用する. これにより $\Gamma(TM)$ (特に必要のない時 $\Gamma \equiv \Gamma^r$) は Lie 代数になる. ■

ベクトル場が有限生成自由加群であることが分かった. これを適用対象の主眼として, 射影を有限生成自由加群に拡大しよう.

Def. 2.3.19 (射影). 有限生成自由加群における 射影 (projection) とは, 平方とそれ自身が等しい線型作用素である. すなわち, 有限生成自由加群 \mathfrak{M} の自己準同型 $P \in \text{End}(\mathfrak{M})$ が $P^2 = P$ を満たす時, P を射影または射影作用素という.

有限生成自由加群についても, 線型空間のもの (Def 2.3.3) と同様に直和分解を定め, 射影による直和分解を示す.

Prop. 2.3.20. 有限生成自由加群 $\mathfrak{M} = (G; R)$ において, 射影 P は自己準同型だからその像 $\text{Im}(P)$ は V の部分空間である. この時, 有限生成自由加群 \mathfrak{M} における射影はその直和分解 $\mathfrak{M} = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$ を導く.

Pf. 相補的な作用素を $Q := 1 - P$ とおく. これは射影である. あとは線型空間の場合と同様に,

1. 加群 G の任意の元 (ベクトル) $v \in G$ について $v = Pv + Qv$.
2. $P(Qv) = 0$ なので $\mathfrak{M} = \text{Im } P + \text{Ker } P$.
3. $\exists k \in \text{Ker } P, \exists v \in G, k = P(v) \Rightarrow 0 = P(k) = P^2(v) = P(v) = k$.

ゆえに $\mathfrak{M} = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$. ■

Remark. この命題を無限次元空間, 特に無限次元 Hilbert 空間や 無限次元 Banach 空間に一般化するならば, 部分空間の構造が必要になるので位相 (収束) の条件をつけることが望ましい.

この命題は証明のシンプルさに従って一般化できる. 構造を減らす場合には, 冪等な群自己準同型 $P \in \text{End}(G); P^2 = P$ に適用できる. 相補的な「射影」 $Qg = gP(g)^{-1}$ は確かに冪等性を満たす:

$$Q^2(g) = Q(g)P(Q(g))^{-1} = gP(g)^{-1} \left[P \left(gP(g)^{-1} \right) \right]^{-1} = gP(g)^{-1} = Qg. \quad (2.3.16)$$

準同型性には重大な制限がかかり,

$$Q(gh) = ghP(gh)^{-1} = ghP(h)^{-1}P(g)^{-1} = Q(g)P(g)Q(h)P(g)^{-1} \quad (2.3.17)$$

なので, これが準同型になる必要十分条件は $P(g)Q(h) = Q(h)P(g)$. つまり, $\text{Im } P$ と $\text{Im } Q$ が可換にならなければ Q は群準同型ではないし, 可換ならば準同型になるので, 群上の射影と呼んで良い.

また, $PQg = QPg = 1_G$. ゆえに $\text{Im } Q \subseteq \text{Ker } P \cdots (1a)$ かつ $\text{Im } P \subseteq \text{Ker } Q \cdots (1b)$. 加えて, $g \in \text{Ker } Q \Rightarrow g = P(g) \in \text{Im } P \cdots (2b)$. 同様に $g \in \text{Ker } P \Rightarrow g = Q(g) \in \text{Im } Q \cdots (2a)$. 従って (1a), (2a) より

$$\text{Im } Q = \text{Ker } P, \quad (2.3.18)$$

(1b), (2b) より

$$\text{Im } P = \text{Ker } Q (= \text{Fix } P). \quad (2.3.19)$$

*21 物理学ではベクトルとベクトル場を記号で区別しない事も多いし, 大域的ベクトル場と局所的ベクトル場を区別しないことも多い. 当然切断の概念を断ってあることも少ない. TM の元である $\sigma_j(p)$ でなく $\partial/\partial x^j$ を使ったほうが視認性が高いので普通こちらを用いる.

加えて、証明中 3. と同様に $\text{Im } P \cap \text{Ker } P = \{1_G\}$. この相補関係は準同型定理 (第 1 同型定理) の現れである. 自然同型 $G/\text{Ker } P \cong \text{Im } P$ より $P^2 = P$ ならば $\text{Im } P/\text{Ker } P \cong \text{Im } P$ ($\text{Im } P \cap \text{Ker } P = \{1_G\}$ からわかる).

射影とその相補的射影は群のすべての元を $g = gP(g)^{-1}P(g) = Q(g)P(g)$ のようにして分解する. 分解という意味は, $\text{Im } P$ と $\text{Im } Q$ が可換であればこそ強い意味を持ってくる. 射影 P が群準同型として consistent になる条件が以上によって示された.

射影は集合と写像 (A, f) に一般化できる. 固定点集合 $\text{Fix } f = \{a \in A \mid f(a) = a\}$ に制限された写像 $\tilde{f} = f|_{\text{Fix } f}$ は $\tilde{f} \circ \tilde{f} = \tilde{f}$ を満たす. 核 $\text{Ker } f = \{(a, b) \mid f(a) = f(b)\}$ $B = f[A]$

Ex. 2.3.21. ■

2.4 第 1 基本形式と第 2 基本形式

Gauss 幾何学における 2 つの基本形式を定め, それらを計量付き多様体に一般化したものを説明する. 構図をまとめておくと, このようになる.

第 1 基本形式 = 曲面上の “長さ”, 第 2 基本形式 = 曲面上の “2 次微分”

2.4.1 第 1 基本形式

第 1 基本形式は曲面上の “長さ” を表しており, 計量の符号が不定である場合にも, 計量によって定義され同じように拡張される. (よって Riemann 幾何学以降では 第 1 基本形式ではなく単に計量と呼ぶことが多い)

Def. 2.4.1 (第 1 基本形式). Gauss 幾何学における第 1 基本形式は接平面上のベクトルの計量の値と等しい. C^r 級多様体 M 上のベクトル $\partial_\mu := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \in T_p M$ を使って, 計量 g によって第 1 基本形式が

$$f_{\mu\nu}^{(1)} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) := f_{\mu\nu}(p) = g_p((\partial_\mu)_p, (\partial_\nu)_p) \quad (p \in M) \quad (2.4.1)$$

と定義される. または M 上のベクトル場 X, Y に対して一般に,

$$f^{(1)}(X, Y) = g(X, Y). \quad (2.4.2)$$

Ex. 2.4.2. 2 次元 Euclid 空間に埋め込まれた C^1 級曲線 (グラフ)

$$M = \{(x, f(x)) \mid x \in U \subseteq O(\mathbb{R})\} \quad (2.4.3)$$

(ただし $O(\cdot)$ は自然な位相) を例に取る. 点 $p = (x, f(x)) \in M$ における \mathbb{R}^2 上のベクトル $(1, f'(x)) \in T_p \mathbb{R}^2$ は M 上の接ベクトルでもある. つまり, 実数のパラメータ u を \mathbb{R}^2 における x 座標とすると, $\partial_u = \partial_x + f'(x)\partial_y$ が得られる. この時 M 上の誘導計量は $(h_{ij}(p))_{i,j} = (1 + f'(x)^2)$. つまり,

$$h_p(\partial_u, \partial_u) = g_{i(p)}(\partial_x + f'(x)\partial_y, \partial_x + f'(x)\partial_y) = g_{i(p)}(\partial_x, \partial_x) + f'(x)^2 g_{i(p)}(\partial_y, \partial_y) \quad (2.4.4)$$

(ベクトルがどの点にあるかは省略した).

さらに, 弧長パラメータ s をもちいると, $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ だから, 誘導計量の成分は 1 となり $h = ds \otimes ds$ ■

Ex. 2.4.3. 同じように, 3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた (簡単のため C^2 とする) 曲面

$$M = \{(u, v, f(u, v)) \mid (u, v) \in U \subseteq O(\mathbb{R}^2)\} \quad (2.4.5)$$

を考えよう. 曲線と同じようにパラメータ u を設定し, 次元を上げてもうひとつのパラメータ $v (= y)$ を用意した. この時 M 上の誘導計量は,

$$(h_{ij}(p))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_v f_u & 1 + f_v^2 \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

であって、これが曲面 M の第 1 基本形式と等しい。ここで、接ベクトル場は $\partial_u = \partial_x + f_u \partial_z$ (ただし $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$), $\partial_v = \partial_y + f_v \partial_z$ (ただし $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$) を用いた。添字 $i = 1$ が u 座標、また $i = 2$ が v 座標を表している。この第 1 基本形式は固有値・固有ベクトルとして

$$(\lambda, v) = (1, (-f_v, f_u)^T), (\lambda, v) = (1 + f_u^2 + f_v^2, (f_u, f_v)^T) \quad (2.4.7)$$

をもっている。 ■

このように、第 1 基本形式は曲面上の計量の値である。Gauss が研究していた 18 世紀後半から 19 世紀前半には、地球の測量が西ヨーロッパにおける喫緊の課題となっており、Gauss 自身も測地学を研究していた。フランス革命以後メートル法の確立の過程で、子午線の一部 (緯度) を測定することが至上命題となったことから、第 1 基本形式を含む曲面の幾何学は、工学・政治上も求められる最先端の研究課題だった。時を同じくして日本では、伊能忠敬が緯度 1 度の地球上の距離を測る目的意識を持っていた。最初は自費で測量を行い、江戸時代の北方地域の政治・経済上の重要性も相まって、伊能は次第に幕命によって全国の日本地図を作成していくこととなる (ref. 東京大学博物館展示)。その精巧さによって、彼とそのグループが作った地図は長きにわたって使われた。

2.4.2 第 2 基本形式

次に、第 2 基本形式は、曲面が接平面からどれだけ曲がっているかを示す主要項で、2 次微分によって定義される。第 1 基本形式とは異なり、第 2 基本形式には埋め込みという外側の多様体が前提されている。

Remark. これは、18 世紀の曲面論であれば \mathbb{R}^3 に埋め込まれた曲面を専ら考えていれば十分だったからである。その場合には第 1 基本形式も専ら Euclid 計量からの誘導計量のみ考えればよかったというのが Gauss の時代の事情である。

Gauss 幾何学における第 2 基本形式は、曲面上の点と接平面の距離に関する主要項で、現代的には Riemann (Levi-Civita) 接続の値を法バンドルの部分に射影したものに相当する。射影は線型空間で定まっているのでそれを使って順次法バンドルへの射影を決めていけばよい。

Def. 2.4.4 (第 2 基本形式). 十分滑らかな可微分多様体 M_1 が一般 Riemann 多様体 (M_2, g_2) に埋め込まれた部分多様体である時、

- X, Y を M_1 上のベクトル場
- $\nabla: \Gamma(TM_1)^2 \rightarrow \Gamma(TM_1)$ を (M_2, g_2) 上のアファイン接続
- $\perp: \Gamma(TM_2) = \Gamma(TM_1 \oplus NM_1) \rightarrow \Gamma(NM_1)$ を、 M_2 のベクトル場の M_1 の法 (線) 方向への射影

とする。写像 $f^{(2)}: \Gamma(TM_1)^2 \rightarrow \Gamma(NM_1)$ を $f^{(2)}(X, Y) := (\nabla_X Y)^\perp$ で定める。次に、

- M_1 上の動標構 $(e_i) \subseteq \Gamma(TM_1)$ と
- (M_1) の法線方向の M_2 上の動標構 $(n_i) \subseteq \Gamma(NM_1)$

に関して

$$f^{(2)}(e_i, e_j) =: K_{ij}^k n_k, K_{ij}^k \equiv K_{ij}^{\cdot k} =: K(e_i, e_j; n_k) \quad (2.4.8)$$

とすると、 $f^{(2)}$ に伴う $(1, 2)$ 型テンソル K が定まる。これを M_2 に関する M_1 上の第 2 基本形式 (second fundamental form) という。

Ex. 2.4.5. 例えば、 M が N に埋め込まれた超曲面である時、 n を超曲面の法ベクトル場とすると、

$$K(X, Y; n) \equiv K(X, Y) = g(\nabla_X Y, n), \quad (2.4.9)$$

さらに、 n が単位法線ベクトルならば

$$K(X, Y; n) \equiv K(X, Y) := g(\nabla_X Y, n), f^{(2)}(X, Y; n) \equiv f^{(2)}(X, Y) := K(X, Y; n)n \quad (2.4.10)$$

で定義される。^{*22} ただし、 $\nabla_X Y$ は X 方向の Y の共変微分である。 ■

^{*22} Gauss の曲面論では単に係数部分を行列にして第 2 基本形式と呼ぶ。

$\nabla_X Y$ は滑らかな多様体上では座標系によらず定まっているが、 N の局所座標系 $(x^\mu)_\mu$ と Christoffel 記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ に よって以下で表される：

$$(\nabla_X Y)_p = \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu}(p) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(p) Y^\nu(p) \right) X^\mu(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right)_p. \quad (2.4.11)$$

この時、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right)_p$ は N 上の接ベクトルであっても M 上の接ベクトルであるとは限らないが、第 2 基本形式がその 差異 (射影) を表している。この射影には方向の情報が必要だが、 M が超曲面の場合には直交補空間 $(T_p M)^\perp$ は 1 次元であるから、 $f^{(2)}$ ではなく 単に K を区別なく第 2 基本形式と呼ぶことが多い。

Ex. 2.4.6. 再び曲線を考える。ここでは f は 2 階微分可能とする。曲線 M 上の接ベクトル場 $X = \partial_u = \partial_x + f'(x) \partial_y$ について、第 2 基本形式 $K_{uu} = K(\partial_u, \partial_u)$ を求めたい。まず、グラフ上の法線ベクトルは接ベクトルを 90° 回転させ、 $n = (-f'(x), +1)/\ell(x)$, $\ell(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ ととる。接ベクトルと法ベクトルは左手系をつくる。次に、接ベクトルを曲線上に沿って微分 (共変微分) すると

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u|_{(u, f(u))} = \frac{\partial f'}{\partial x}(x) \cdot 1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{(x, f(x))} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{(x, f(x))} \quad (2.4.12)$$

と共変微分が表せる (ただし、 $(u, f(u))$ は M が \mathbb{R}^2 に埋め込まれたときの点の位置)。よって、

$$K_{uu} = \langle \nabla_{\partial_u} \partial_u, n \rangle_{\mathbb{R}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \frac{1}{\ell(x)} = \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}. \quad (2.4.13)$$

このように曲線上の第 2 基本形式が得られる。これは曲率 $\frac{f''(u)}{(1 + f'(u)^2)^{3/2}}$ とは異なる量である。 ■

Ex. 2.4.7. 同様に曲面についても考える。 $\partial_u = \partial_x + \frac{\partial f}{\partial x} \partial_z$ および $\partial_v = \partial_y + \frac{\partial f}{\partial y} \partial_z$ だから

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u|_{(u, v, f(u, v))} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))}, \quad \nabla_{\partial_v} \partial_v|_{(u, v, f(u, v))} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))}. \quad (2.4.14)$$

加えて、

$$\nabla_{\partial_u} \partial_v|_{(u, v, f(u, v))} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))}, \quad \nabla_{\partial_v} \partial_u|_{(u, v, f(u, v))} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))}. \quad (2.4.15)$$

今、 \mathbb{R}^3 の外積を用いると法ベクトル場が

$$\partial_u \times \partial_v = -\frac{\partial f}{\partial x} \partial_x - \frac{\partial f}{\partial y} \partial_y + \partial_z \quad (2.4.16)$$

だから、その長さ $\ell(u, v) = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right]^2}$ によって第 2 基本形式が

$$\begin{pmatrix} K_{uu} & K_{uv} \\ K_{vu} & K_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell(n, v)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

と求まる。 ■

このように、第 2 基本形式は 2 次微分に関する基本量であり、接平面および法ベクトルと曲面の関係を主要項の意味で特徴づけている。そういう意味で、法ベクトルの変化量でこの特徴づけが記述できないか考えるのは自然なことであり、この法ベクトルの変化を **形状作用素 (shape operator)** という。上で考えた方向微分は、アフライン接続 ∇ によって定式化することができる。もし、 ∇ が計量的であれば、上の定義はもう一つの shape operator を用いた定義と等価になる (Riemann (Levi-Civita) 接続の定義は Def 1.1.9 を参照のこと)。

Prop. 2.4.8. もし、計量がアファイン接続 ∇ に関して 平行, つまり $\nabla g = 0$ ならば, 第 2 基本形式の定義 $K(X, Y) = g(\nabla_X Y, n)$ は shape operator を用いた定義 $-g(Y, \nabla_X n)$ と等価である.

Pf. 証明中, 計量を三角括弧でかく: $g(x, y) \equiv \langle x, y \rangle \forall x, y$ は N 上のベクトル場. X, Y を M 上の任意の (十分滑らかな) ベクトル場とする. $0 = \nabla g = \nabla_X (\langle Y, Z \rangle) - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ に $Z = n$ を代入すると,

$$\nabla_X (\langle Y, n \rangle) = \langle \nabla_X Y, n \rangle + \langle Y, \nabla_X n \rangle. \quad (2.4.18)$$

n は M の法ベクトル場なので, $\forall p \in M, \langle Y(p), n(p) \rangle = 0$. 従って $\langle \nabla_X Y, n \rangle = -\langle Y, \nabla_X n \rangle$. ■

Prop. 2.4.9. ∇ が捩れをもたない, つまり $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ ならば, 第 2 基本形式は対称テンソルとなる. ただし, M 上の可換な座標基底の存在は仮定する.

Pf. ひとつめに, $K(X, Y) - K(Y, X) = \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, n \rangle$. ふたつめに, M 上のベクトル場 X, Y の交換子 $[X, Y]$ は, X, Y が可換な座標基底 (動標構) で展開できればまた M 上のベクトル場となることが示せる. 故に $\langle [X, Y], n \rangle = 0$. 最後に, $\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, n \rangle = \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], n \rangle = 0$ ■

Cor. 2.4.10. Riemann 接続 (Levi-Civita 接続) ∇ に関する第 2 基本形式 $K(X, Y) = g(\nabla_X Y, n) = -g(Y, \nabla_X n)$ は, 上の 2 つの命題から, 2 階共変 対称テンソル である.

2.4.3 展開係数

改めて, 第 1 基本形式と第 2 基本形式を $T_p M$ ($p \in M$) の基底で展開したときの記法を説明する (わかりきっている読者は飛ばしてもらっても構わない). 実線型空間 $T_p M$ が $m = \dim M$ この基底で生成されるから, それを $\{e_\alpha(p)\}_{\alpha \in A}$ とし, ここで A はアルファベットや数字などの添字集合とした. ただし, e_α は十分滑らかな動標構になるようにする. さて, 計量の展開係数を, 普通行われているように $g_p(e_\alpha(p), e_\beta(p)) = g_{\alpha\beta}(p)$ と書く. このとき, 計量テンソル $g_p \equiv g(p)$ は $(e_\alpha(p))_\alpha$ の双対基底 $(f^\alpha(p))_\alpha$ を用いて

$$g_p = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(p) f^\alpha(p) \otimes f^\beta(p) \equiv \sum_{\alpha} g_{\alpha\alpha}(p) (f^\alpha(p))^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} 2g_{\alpha\beta}(p) f^\alpha(p) f^\beta(p). \quad (2.4.19)$$

Remark. 省略して書いている 第 2 項の展開係数は $g_{\alpha\beta}$ それ自身でなくて $2g_{\alpha\beta}$ に変わっていることに注意したい. この記法が正当化される理由は, 計量が対称テンソルだからである.

続いて場 (切断) としての計量は, 上に述べたような意味で $g = g_{\alpha\beta} f^\alpha \otimes f^\beta$, $g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta)$ とかく. ただし, $f^\alpha(p)(e_\beta(p)) = \delta_\beta^\alpha$. p の近傍 U 上の座標系 $(x^\alpha)_\alpha$ で展開すれば, $g|_U = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$, $g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$.

第 2 基本形式も同様に $K = K_{ij} f^i \otimes f^j$, $K_{ij} = K(e_i, e_j)$ などと書く. 前節で書いたように, 座標系の記号を使って $K_{x^i x^j} = K(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ などと書くことも多い (計量も同様).

§3 ADM formalism

R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner によって与えられた 3+1 次元分解の基礎を概観する. (ref. 0405109v1.pdf, Gravitation. 柴田, 数値相対論)

- (\mathcal{M}, g) : C^r 級 Lorentz 多様体 ($r \in \mathbb{N}$) で, d 次元とする.
- $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$: (C^r 級の) 多様体を作る 位相空間とアトラス
- $\Sigma \subsetneq M$: M 上の C^r 級超曲面で, Σ がもつ (C^r 級の) アトラスを \mathcal{A}_Σ とおく.
- $h \equiv g_\Sigma \in \Gamma(T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma)$: Σ 上の g による誘導計量テンソル場で (Σ, h) は空間的だとする.

3.1 時間と空間で分解された計量

時空 M の座標近傍 $(x, U) \in \mathcal{A}$ と, 空間 Σ の座標近傍 $(\psi, V) \in \mathcal{A}_\Sigma$ をとる. 包含写像 $\iota: \Sigma \rightarrow M$ によって $U \cap \iota[V] =: W$ とし, これは空でないとする. この時, M の時間座標 $x^0 \equiv ct$ は Σ 上で一定であり, 座標系 x と ψ の空間部分は, 一致しているとする. つまり,

$$x^0(p) = \text{const. on } W \quad (3.1.1)$$

かつ

$$x^j(p) = \psi^j(\iota(p)) \quad \forall p \in W, \quad \forall j \in \{1, \dots, d'\} \quad (d' := d - 1). \quad (3.1.2)$$

この意味で, もし全域ですべての点 $p \in M$ について同様の座標近傍が取れるとき, 新しく 1 パラメータ t によって超曲面の列 $\Sigma_t \equiv \Sigma(t)$ が同様に作れるので, $\{\Sigma_t\}$ は M の C^r 級葉層構造 (foliation) をなす (厳密な葉層構造の定義は ref. 小林昭七, 微分幾何).

話を座標近傍 W における局所的なものに戻す. 包含写像 $\iota: \Sigma \rightarrow M$ の微分 $\iota_*: T_p\Sigma \rightarrow T_pM$ によって超曲面の誘導計量が求められるが, 今 Eq. (3.1.2) によって接平面の間の単なる包含写像と捉えられる. 簡単のため

$$h(\partial_j, \partial_k) = g(\iota_*(\partial_j), \iota_*(\partial_k)) = g(\partial_j, \partial_k) =: h_{jk} \equiv \gamma_{jk}, \quad (3.1.3)$$

とおく. ただし, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ とおいた. まだ時間成分がわからないので, 簡単のため

$$\boxed{N_j \equiv \beta_j := g_{0j} := g(\partial_0, \partial_j)} \quad (3.1.4)$$

とおく. すなわち, 時空 M は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} (g_{00}) & (N_k) \\ (N_j) & (h_{jk}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{00} & N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1 & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ N_2 & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ N_3 & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{if } d' = 3) \quad (3.1.5)$$

という表現行列を持つ計量テンソル

$$\boxed{g = g_{00}dx^0 \otimes dx^0 + dx^0 \otimes N_k dx^k + N_j dx^j \otimes dx^0 + h_{jk}dx^j \otimes dx^k} \quad (3.1.6)$$

をもつ. 次に $(g_{\mu\nu}) =: \hat{g}$ の逆行列を求める. 簡単のため ブロック行列を以下のようにおく:

$$\vec{N} = (N_j)_{j=1}^{d'}, \quad \hat{\gamma} := (\gamma_{jk})_{j,k} \equiv (h_{jk})_{j,k}. \quad (3.1.7)$$

行列 $\hat{g} = \begin{pmatrix} g_{00} & \vec{N}^T \\ \vec{N} & \hat{\gamma} \end{pmatrix}$ の逆行列を $\hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} A & \vec{B}^T \\ \vec{C} & D \end{pmatrix}$ ($\vec{B} = \vec{C} \equiv (C^j)$, $D \equiv (D^{jk})_{j,k}$) とおけば, $\hat{g}^{-1}\hat{g} = \mathbb{1}_d$ より \hat{g}^{-1} が求まる. 今, γ は部分多様体 (空間的超曲面 Σ の計量なので, $\hat{\gamma}$ には逆行列が存在するから, これを (γ^{jk}) と表す. 上付きの “ベクトル” $N_j \gamma^{jk} =: N^k$ を用いて解が以下で求まる:

$$A = \frac{1}{g_{00} - N^k N_k}, \quad C^j = -\frac{N^j}{g_{00} - N^k N_k}, \quad D^{jl} = \gamma^{jl} + \frac{N^j N^l}{g_{00} - N^k N_k}, \quad (3.1.8)$$

ただし, $g_{00} \neq 0, A \neq 0$. 次に, 計算に便利のように $A \equiv g^{00}$ を基本として

$$\boxed{N^0 \equiv \alpha := (\mp g^{00})^{\frac{1}{2}} \quad (\mp g^{00} > 0) \quad (-: \text{Lorentzian}, +: \text{Euclidean})^{*23}} \quad (3.1.9)$$

と変数を変換する. すると $g^{00} = \mp \alpha^{-2}$ かつ $g_{00} = \mp (N^0)^2 + \vec{N}^2 \equiv \mp \alpha^2 + \beta^j \beta_j$ であるから,

$$\hat{g} = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mp \alpha^2 + \beta^j \beta_j & (\beta_k) \\ (\beta_j) & (\gamma_{jk}) \end{pmatrix}, \quad \hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} \mp \alpha^{-2} & (\pm \alpha^{-2} \beta^k) \\ (\pm \alpha^{-2} \beta^j) & (\gamma^{jk} \mp \alpha^{-2} \beta^j \beta^k) \end{pmatrix}. \quad (3.1.10)$$

さらに g を変形するために基底で展開すると,

$$g = (\mp \alpha^2 + \gamma_{jk} \beta^j \beta^k) dx^0 \otimes dx^0 + \gamma_{jk} dx^j \otimes dx^k + \gamma_{jk} \beta^j dx^0 \otimes dx^k + \gamma_{jk} \beta^k dx^j \otimes dx^0 \quad (3.1.11)$$

であるため, γ_{jk} の因子でくくりだすと,

$$ds^2 = \mp (\alpha dx^0)^2 + \gamma_{jk} (dx^j + \beta^j dx^0)(dx^k + \beta^k dx^0). \quad (3.1.12)$$

この意味で, $\alpha \equiv N^0$ を **time lapse (function)** (ラプス関数), $\vec{\beta} \equiv \vec{N}$ を **shift vector (functions)** (シフトベクトル) と呼ぶ. ラプス関数 α は 固有時間がどれくらい時間 x^0 方向に関して伸び縮みするかを表し, シフトベクトル $\vec{\beta}$ は空間 Σ_t と “次の瞬間の空間 Σ_{t+dt} ” の間においてどのように点が動いたかを表している, と幾何的に解釈できる.

3.2 法ベクトル場

3.2.1 超曲面の法ベクトル場

Σ の法ベクトル場 n を求める. $n = n^0 \partial_0 + n^j \partial_j$ とすると $g(n, \partial_k) = 0$ より $(n^0, n^j) \propto (-1, N^j)$. ^{*24} 次に, Lorentz 計量 (or Riemann 計量) について規格化条件 $g(n, n) = \mp 1$ より 比例係数のスカラー場 f が $f^2 = 1/\alpha^2$ と求まる. 今, 時間座標と同じ方向にするために符号 $f = -\alpha^{-1}$ をとり, $(n^0, n^j) = (1, -N^j)/\alpha$.

つまり, $\alpha n = \partial_0 - N^j \partial_j$ であるから ∂_0 について解くと, $\partial_0 = \alpha n + N^j \partial_j$. ^{*25} ちなみに, この表式からは $g(n, \partial_0) = g(\partial_0, n) = \mp \alpha$ ($-$ は Lorentzian, $+$ は Euclidean) であることが明瞭にわかる. 次に 法ベクトル場の共変成分を $n_\mu := g_{\mu\nu} n^\nu$ と定義する. 行列計算の後, $(n_0, n_j) = (\mp \alpha, 0)$ とわかる. まとめると,

$$\boxed{n = \frac{1}{\alpha} (\partial_0 - N^j \partial_j), \partial_0 = \alpha n + N^j \partial_j, n^\flat = \mp \alpha dx^0.} \quad (3.2.1)$$

3.2.2 射影

共変法ベクトル場 n_μ を用いると空間 Σ への射影が成分表示できる. そのために, 法線方向への射影を使う.

今, 各点で法ベクトル場がベクトル $n(p) \equiv n_p$ であるとする. 法線方向への射影を法ベクトル場と計量から

$$v_p^\perp := \frac{\langle v_p, n_p \rangle}{\langle n_p, n_p \rangle} n_p \quad (g_p(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle); v^\perp := \frac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n; \quad (g(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle) \quad (3.2.2)$$

n が単位 法ベクトル場の場合には,

$$v_p^\perp := \mp g_p(v_p, n_p) n_p; v^\perp := \mp g(v, n) n; \quad (-: \text{Lorentzian}, +: \text{Euclidean}). \quad (3.2.3)$$

以下同様に複合の上が Lorentzian, 下が Riemann 計量の場合とする (ref. Misner, et al. Gravitation).

Def. 3.2.1 (超曲面への射影). 写像 $P_p: T_p M (= T_p \Sigma \oplus (T_p \Sigma)^\perp) \rightarrow T_p \Sigma$ を

$$P_p(v_p) := v_p - v_p^\perp; P(v)(p) := P_p(v_p); \quad (3.2.4)$$

(ただし v_p^\perp は v_p の $(T_p \Sigma)^\perp$ への射影) のように定義する.

^{*23} Take the minus sign for the Lorentzian metric but adopt the plus one if the metric is Euclidean.

^{*24} 式の意味は $(n^0, (n^j)_{j=1}^{d'}) \propto (-1, (N^j)_{j=1}^{d'})$ であるが, 以下本文のように省略する.

^{*25} $\partial_0 \equiv t$ と書くとなると, $t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu$ と表せる.

線型写像としての射影は法ベクトル場で $(P_p)^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \pm (n_p)^\mu (n_p)_\nu$ と具体的に書き下せる。この意味で、

$$P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu 1 \pm n^\mu n_\nu \quad (+: \text{Lorentzian}, -: \text{Euclidean}). \quad (3.2.5)$$

Remark. 引き算をしたので、Lorentzian の場合にプラスの符号を取ることに注意したい。

ADM formalism において、法ベクトル場は計量で書けているから、射影を具体的に書き下すと、

$$(P^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0} \\ \vec{N} & \mathbb{1}_{d'} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

のように、時間^{*26} 成分の行がすべてゼロになる。重要な性質を挙げると、

1. $P^2 = P$ (射影作用素) (Σ 上のベクトル場に対しては恒等作用素)
2. $P^\mu_\nu n^\nu = 0$ (法ベクトル場の射影はゼロ)
3. $P_{\mu\nu} := g_{\mu\lambda} P^\lambda_\nu = g_{\mu\nu} \pm n_\mu n_\nu$.

3 つめの下付きの射影作用素の行列表示は Eq. (3.1.10) より

$$(P_{\mu\nu}) = ((g_{\mu\lambda})(P^\lambda_\nu))_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \vec{\beta}^2 & \vec{\beta}^T \\ \vec{\beta} & \hat{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Remark. この量は、誘導計量 $h \equiv \gamma$ ではない。ただし、空間成分である右下のブロック行列はこれと等しい。

ベクトルだけでなく一般の r 階反変テンソル場 $T = T^{\mu_1 \dots \mu_r} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r}$ ($e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r}$ は動標構) を $P^\mu_{\nu_1} \dots P^\mu_{\nu_r} T^{\nu_1 \dots \nu_r}$ のように $\Gamma(\otimes^r T\Sigma)$ 上に射影できる。

次は、共変ベクトルの射影を考えてみよう。 M 上の微分形式 ω が点 p で $\omega(p) \equiv \omega_p \in T_p^* M$ なるベクトルだとすると、これが超曲面上の空間に射影されるとはどういうことか。手がかりに、 ω で接 (反変) ベクトル場の直和分解 $v = v^\top + v^\perp$ ($v^\top \in \Gamma(T\Sigma)$) を写すと解答はクリアになる。 ω は線型であるから $\omega(v^\top + v^\perp) = \omega(v^\top) + \omega(v^\perp)$ 、この時、 ω が第 1 項にだけ作用しているのであれば ω_p は $T_p^* M$ に属する。従って、

$$\omega_p|_{T_p^* \Sigma} \equiv \omega_p|_\Sigma; \quad (\omega_p|_\Sigma)(v_p) := \omega_p(P_p(v_p)), (\omega|_\Sigma)(v) = \omega(P(v)). \quad (3.2.8)$$

成分表示では $(\omega|_\Sigma)_\nu = \omega_\mu P^\mu_\nu$ となり、 $(3+1)$ 次元の座標系では $((\omega|_\Sigma)_\nu)_{\nu=0}^3 = (0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 。同様に s 階共変テンソル $T = T_{\nu_1 \dots \nu_s} f^{\nu_1} \otimes \dots \otimes f^{\nu_s}$ ($f^{\nu_1} \otimes \dots \otimes f^{\nu_s}$ は動標構) を $T_{\mu_1 \dots \mu_s} P^{\mu_1}_{\nu_1} \dots P^{\mu_s}_{\nu_s}$ のように $\Gamma(\otimes^s T^* \Sigma)$ 上に射影することができる。

一般に、 (r, s) 型テンソル $T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r} \otimes f^{\nu_1} \otimes \dots \otimes f^{\nu_s}$ の Σ 上の空間への射影 P は

$$(P(T))^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = P^{\bar{\nu}_1}_{\nu_1} \dots P^{\bar{\nu}_s}_{\nu_s} \times T^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r}_{\bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} \times P^{\mu_1}_{\bar{\mu}_1} \dots P^{\mu_r}_{\bar{\mu}_r} \quad (3.2.9)$$

なる線型写像で定義される。

3.3 アファイン接続の分解と第 2 基本形式

この節では、アファイン接続といえば断りのない場合 Riemann (Levi-Civita) 接続を指す ものとする。また、接続係数との混同を避けるため、誘導計量に γ ではなく h の記号を用いる。超曲面 Σ は Riemann 多様体なので、(Riemann 的とは限らない) アファイン接続が定められ、Riemann (Levi-Civita) 接続が一意に存在する。問題は、この h から定まる Riemann (Levi-Civita) 接続 $\tilde{\nabla} \equiv {}^\Sigma \nabla$ と時空 M の g から定まる Riemann (Levi-Civita) 接続 $\nabla \equiv {}^M \nabla$ との関係である。

引き続き、多様体 M には時間パラメータによる C^r 級 Foliation (葉層構造) が成立しているとする。

^{*26} Lorentzian の場合

- $d \equiv m = \dim M$: 時空 M の次元
- $d' \equiv m' = m - 1$: 超曲面 Σ の次元
- $I = \{0, 1, \dots, d'\}$: M の座標系の添字集合 (可能な限りこの元をギリシャ文字で書く)
- $J = \{1, \dots, d'\}$: Σ の座標系の添字集合; $I = \{0\} \cup J$. ((可能な限りこの元をラテン文字で書く))

3.3.1 超曲面上の Riemann (Levi-Civita) 接続

Σ 上の任意のベクトル場 $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j$ について, 接続係数の定義式 $\nabla(e_i, e_j) = \gamma_{ij}^\mu e_\mu$ を使って,

$$\nabla_X Y = \sum_{j \in J} X(Y^j) e_j + \sum_{i, j \in J} \sum_{\mu \in I} X^i Y^j \gamma_{ij}^\mu e_\mu. \quad (3.3.1)$$

一般に, $\gamma_{ij}^\mu e_\mu = \gamma_{ij}^0 e_0 + \sum_{k \in J} \gamma_{ij}^k e_k$ を含む第 2 項のせいで, $\nabla_X Y$ は Σ 上のベクトル場になっているとは限らない. つまり, n 方向の成分を持っている可能性がある. 左辺 $\nabla_X Y$ (Y の X 方向の方向微分) は M 上のベクトル場であるから, 直和分解が一意に存在する. これを $\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^\top + (\nabla_X Y)^\perp$ とすると, この時, 定義から

$$(\nabla_X Y)^\perp = \mp g(\nabla_X Y, n) n = \mp f^{(2)}(X, Y). \quad (3.3.2)$$

物理学 (ADM formalism) でのノーテーションにそぐうように書き換えると, 最右辺は $\mp K(X, Y) n$ だから

第 2 基本形式 (“外的曲率”) を考える. $K(X, Y) = g(\nabla_X Y, n) = -g(Y, \nabla_X n)$

一方, Σ 上のアファイン接続は $\tilde{\nabla}(e_i, e_j) = \tilde{\gamma}_{ij}^k e_k$ なる接続係数を使って,

$$\Sigma \nabla_X Y \equiv \tilde{\nabla}_X Y = \sum_{j \in J} X(Y^j) e_j + \sum_{i, j \in J} \sum_{k \in J} X^i Y^j \tilde{\gamma}_{ij}^k e_k. \quad (3.3.3)$$

この時, 超曲面 Σ の座標系 $(x^j)_{j \in J}$ だけで, Σ 上の第 2 種 Christoffel 記号が計算できる. すなわち, $\forall(i, j, \ell) \in J^3$,

$$\Gamma_{ij}^\ell|_M = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) = \frac{1}{2} h^{k\ell} (\partial_i h_{jk} + \partial_j h_{ki} - \partial_k h_{ij}) \equiv \Gamma_{ij}^\ell|_\Sigma. \quad (3.3.4)$$

この第 2 種 Christoffel 記号は, 可換な座標動標構 (座標基底によるベクトル場) に関しては, 接続係数そのものであり, i.e., $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla(\partial_i, \partial_j) = \Gamma_{ij}^\ell \partial_\ell$. Eq. (3.3.1) に代入すると, ^{*27}

$$\nabla_X Y = \sum_{j \in J} X(Y^j) \partial_j + \sum_{i, j \in J} \sum_{\mu \in I} X^i Y^j \Gamma_{ij}^\mu \partial_\mu = \tilde{\nabla}_X Y + X^i Y^j \Gamma_{ij}^0 \partial_0. \quad (3.3.5)$$

アファイン接続の一般論からこれはベクトル場として well-defined である. すなわち, 動標構の変換 (行列) に関して展開係数はその逆変換 (行列) で線型変換して互いに移り合うのだった.

3.3.2 第 2 基本形式の具体例

Ex. 3.3.1. 円 (Ex. 1.1.14) の第 2 基本形式を求める. $\Sigma = S^1, M = \mathbb{R}^2$ として, TS^1 上の滑らかなベクトル場 $v(p) = (p, (\partial_\theta)_p)$ に対して法ベクトル場 $n(p) = (p, (\partial_r)_p)$ が一意に存在する. すなわち,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Euclid 空間はどこでも平坦で $\nabla(\partial_x, \partial_x) = \nabla(\partial_y, \partial_y) = 0$ だからベクトル場 ∂_θ について $\nabla(\partial_\theta, \partial_\theta) = -\partial_r$ と計算できる. つまり,

$$(\nabla_\theta \partial_\theta)^\top = 0; (\nabla_\theta \partial_\theta)^\perp = -\partial_r = f^{(2)}(\partial_\theta, \partial_\theta) \Leftrightarrow K(\partial_\theta, \partial_\theta; \partial_r) = -1. \quad (3.3.7)$$

この時確かに $(\nabla_\theta \partial_\theta)^\top = 0 = \tilde{\nabla}_\theta \partial_\theta$ だから Σ 上のアファイン接続と整合している. ■

^{*27} ベクトル場の形で議論しているが, ベクトル場の各点における共変微分 Eq. (2.4.11) を改めて思い起こすと理解の助けになる.

時空の $(d' + 1)$ 分解において, アファイン接続は foliation を通じて自然に分解される. つまり, x^0 以外の座標 (x^j) を Eq. (3.3.5) にただ代入すればよいだけである. 具体的には,

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \Gamma(\Sigma, T\Sigma), \quad & d' \nabla(X, Y) \equiv (d') \nabla(X, Y) := (d) \nabla(X, Y); \\ \forall (i, j, \ell) \in J^3, \quad & m' \Gamma_{ij}^\ell \equiv (d') \Gamma_{ij}^\ell = d \Gamma_{ij}^\ell. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\nabla(X, Y) = \nabla_X Y \tag{3.3.9}$$

$$K_{\mu\nu} = P_\mu^\lambda \nabla_\lambda n_\nu$$

3.4 電磁場

この節では電磁場を広く論じる．まず，3 次元的な Euclid 空間の微分形式

- 電束密度 D , 電場 E , 電荷密度 ρ ,
- 磁束密度 B , 磁場 H , 電流密度 j ,
- 誘電率 ϵ , 透磁率 μ (物質中では等方的でない),

によって Maxwell 方程式とその歴史を振り返ろう．

- $dD = \rho$: Coulomb の法則 (1785-1789), 電束密度に関する Gauss の法則,
- $dH - \partial D/\partial t = j$: 電流の磁気作用 (Ørsted 1820) Ampère の法則 (1820), Maxwell の変位電流,
- $dB + \partial E/\partial t = 0$: Faraday の電磁誘導の法則 (1831),
- $dB = 0$: 磁気単極子の非存在, 磁束密度に関する Gauss の法則.

さて，一般相対論で本質的役割を果たすエネルギー運動量テンソルを書いてみよう．添字がついているとき，それらは動標構 e_i と双対動標構 θ^i による展開係数であるとする．例えば，計量テンソルは $g = g_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu$ で，ラテン文字を Euclid 部分空間の添字に使い，ギリシャ文字を Minkowski 空間での添字に使う．

以下では ref. 河合，特殊相対論 のノテーションを一部変えて用いる．上付きから下付きテンソルを作る写像 ζ (p. 42) は他の一般的な記法 \flat , 逆写像で下付きから上付きテンソルを作る κ を \sharp で書くこととする．Hodge star (p. 48) はそのまま使う．

電場 1 形式 $E = E_i\theta^i$ と磁場 1 形式は $H = H_i\theta^i$ は学部レベルの電磁気学では通例 $\vec{E} = E^\sharp, \vec{H} = H^\sharp$ として扱われる．また，より本質的な変換として，磁束密度 2 形式 $B = \frac{1}{2!}B_{ab}\theta^a \wedge \theta^b$ と電束密度 2 形式 $D = \frac{1}{2!}D_{ab}\theta^a \wedge \theta^b$ は背景が 3 次元なのでベクトルとしても扱う事ができ，

$$\vec{B} = (\star B)^\sharp, \vec{D} = (\star D)^\sharp, \quad (3.4.1)$$

という変換が節を通じて重要である．他に， $D_{ab} = \epsilon_{abc}E^c = \epsilon_{abc}g^{cc'}E_{c'}$, $B_{ab} = \mu_{abc}H^c = \mu_{abc}g^{cc'}H_{c'}$ という関係も基本的である．

手がかりは 荷電粒子に働く力 $\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ，すなわち Lorentz 力である．^{*28} これが 電磁場と“自由”電流密度の相互作用を表しているのだから，局所的な“運動方程式”もここから導かれるはずだ．基底に依存しない表式の議論は ref. 河合，特殊相対論 に譲り，本節ではエッセンスを残したままそれを成分で扱うこととする．

3.4.1 電磁場のエネルギー・運動量密度

Lorentz force を基底で展開してみる．この時，Minkowski 時空は平坦なので正規直交基底 e_i で展開して一般性を失わない (ただし 欠陥がある特異点，例えば原点に局在する磁束があるなど，いらぬ場所を適宜除いてよい)．この時，磁束密度は $\vec{B}^1 = B_{23}, \vec{B}^2 = B_{31}, \vec{B}^3 = B_{12}$ を満たす．

$$\vec{v} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} e_i \vec{v}^j \vec{B}^k = \begin{pmatrix} v^2 B^3 - v^3 B^2 \\ v^3 B^1 - v^1 B^3 \\ v^1 B^2 - v^2 B^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B_{21}v^2 + B_{31}v^3 \\ B_{32}v^3 + B_{21}v^1 \\ B_{31}v^1 + B_{32}v^2 \end{pmatrix} = -(i(\vec{v})B)^\sharp, \quad (3.4.2)$$

ただし，途中から矢印を省き，また内部積 (ref. 河合, p. 107) を使った．

荷電粒子の古典的な電荷密度は $\rho = q\delta^3(x - x')$ のような分布で，これを念頭に電荷密度 ρ_{abc} を考える．速度場を v^a とすると，電流密度は内部積を用いて $j = i(\vec{v})\rho; j_{ab} = \rho_{abc}v^c$ で計算できる．電磁場による Lorentz force は微小体積に存在する電荷に対して \vec{f}_L の向きと大きさに働くと考えられる．これを 反変ベクトル場値 3 形式とみなし，

$$\vec{f}_L = (E^\sharp - (i(\vec{v})B)^\sharp) \otimes \rho \quad (3.4.3)$$

^{*28} 河合はこれを磁束密度の定義としている．

$$V \times B$$

$$T_{ijk} = E_i D_{jk}$$

自由電流密度が

3.5 Connections on principal bundles

Ref. Nahakara, Chapter 10

- (P, π, M, G) : Principal bundle
- Let p be a point on M such that $p = \pi(u)$ for a point $u \in P$
- Suppose that G is a Lie group that has the Lie algebra \mathfrak{g}
- R_g is the right action by $g \in G$ and L_g is the left action.
- $\text{ad}_g(h) := ghg^{-1}$ is the adjoint (or conjugate) action on G ($g, h \in G$).
- The tangent map of ad_g is called the adjoint map denoted by $\text{Ad}_g: T_h G \rightarrow T_{\text{ad}_g(h)} G$

Other quantities:

- Local trivializations (ϕ_j, U_j)
- Projection $\pi: P \rightarrow M$

Def. 3.5.1 (Fundamental vector field). Let \sharp be a map $\sharp: \mathfrak{g} \rightarrow T_u P$ and define a derivative with respect to one real parameter t of a smooth function $f: P \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(A^\sharp f)(u) = \left. \frac{d}{dt} f(ug(t)) \right|_{t=0}, \quad (3.5.1)$$

where $g = \exp(tA) \in G$.

The parameter t defines a curve $\gamma(t) = R_{g(t)}u = ug(t)$. This curve always lies on a fiber G_p because $\pi(\gamma(t)) = p$, in other words, $ug(t) = \phi_j(p, g_j g(t))$ for $u = \phi_j(p, g_j)$ ($p \in U_j, g_j \in G_p$). In this sense, a vector $A^\sharp f$ is also tangent to G_p . We call such subspace of $T_u P$ which is tangent to G_p at u the vertical subspace. It is denoted by $V_u P$ and the collection of A^\sharp on P is called **the fundamental vector field**.

Def. 3.5.2 (Connection one-form). $\omega(A^\sharp) = A$ and $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$, where R_g^* is the pullback of R_g .

$$R_g^* \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*} X) = g^{-1} \omega_u(X) g \quad (3.5.2)$$

$$A_j := \sigma_j^* \omega$$

$$\omega_j = g_j^{-1} \pi^* A_j g_j + g_j^{-1} d_P g_j$$

$$(\pi \circ \sigma_j)(p) = p$$

Def. 3.5.3 (Covariant derivative).

$$(D\phi)(X_1, \dots, X_{r+1}) := (d_P \phi)(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H) \quad (3.5.3)$$

Def. 3.5.4 (Curvature two-form).

$$\Omega := D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} \quad (3.5.4)$$

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega$$

Thm. 3.5.5 (Cartan's structure equation).

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (3.5.5)$$

$$F := \sigma^* \Omega$$

$$F = \sigma^*(d_P \omega + \omega \wedge \omega) = d_P(\sigma^* \omega) + (\sigma^* \omega) \wedge (\sigma^* \omega) = dA + A \wedge A$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

3.6 U(1) bundle

多様体 M 上の $U(1)$ principal bundle (主 $U(1)$ 束) P を考える. 以下 $G \equiv U(1)$ とおく.

- P の局所自明化近傍 $(U_j, \phi_j), (U_k, \phi_k)$ に関して, $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ であるとする. 以下交わりにおいて $p \in U_j \cap U_k$ を任意の点とする.
- 変換関数を $t_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow G$ とする, すなわち, $\phi_j^{-1}(\phi_k(p, f)) = (p, t_{jk}(p)f)$.

この時, ある実関数 $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $t_{jk}(p) = \exp(i\Lambda(p))$ と書ける.

$$A_k = t_{jk}(p)^{-1} A_j t_{jk}(p) + t_{jk}(p)^{-1} dt_{jk}(p) = A_j(p) + i(d\Lambda)(p) \quad (3.6.1)$$

3.7 Frame bundle

- Smooth manifold M (m -dimensional)
- TM : Tangent bundle
- $\mathcal{L}_p M \cong \text{GL}(n; \mathbb{R})$: All frames at $p \in M$ (bases of $T_p M$)
- $\text{Aut}(T_p M) \cong \text{GL}(n; \mathbb{R})$: Structure group, Fiber
- $E = \mathcal{F}(M) = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times \mathcal{L}_p M) \equiv \bigcup_{p \in M} \mathcal{L}_p M$: Frame bundle

$$\nabla : E \rightarrow E \otimes E^*$$

$$A_i \equiv \omega_\beta^\alpha = \overset{S}{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha dx^\mu$$

$$\nabla_{\partial_\mu} e_\beta = \left[(\sigma_i(0), \Gamma_\mu e_\beta^0) \right] = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha e_\alpha$$

$$\nabla_{\partial_\mu} s = \left(\partial_\mu X_i^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha X_i^\beta \right) e_\alpha$$

$$\text{GL}(n; \mathbb{R}) = \{g \in \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

任意の $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ に対して $\exp(\text{tr } A) = \det(\exp A) \neq 0$ が成り立つので, $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) = \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ といえる.

Ex. 3.7.1. S^2 (半径 a) が 3 次元 Euclid 空間 に埋め込まれた時, 接続と曲率の言葉で書き表してみる. つまり, $M = S^2, N = \mathbb{R}^3$ であって,

$$\iota[M] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \subsetneq N$$

なる ι は同相写像である. 北極 $\text{NP} = (0, 0, a)$ の南極 $\text{SP} = (0, 0, -a)$ を S^2 から除いた開集合 $\bar{S}^2 := S^2 \setminus \text{NP} \setminus \text{SP}$ に通常の座標系 $(\psi^1, \psi^2) = (\theta, \phi)$ を張る.

$$\text{誘導計量は } g = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \in \Gamma \left(\overset{2}{\underset{S}{\otimes}} T^* M \right)$$

S^2 は向きづけ可能であって, 全域で滑らかなベクトル場は存在しないが, 局所的には正規直交動標構が存在する. 構造群は $G = \text{SO}(2)$ であってその Lie 代数は $\mathfrak{so}(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}); A^\top = -A, \text{tr } A = 0\}$. ■

§4 Maxwell field

4.1 Maxwell field on Minkowski space

以下では Minkowski 空間の電磁場を微分形式で記述する. (ref. A gentle introduction to the foundations of classical electrodynamics: The meaning of the excitations (D,H) and the field strengths (E, B). <https://arxiv.org/abs/physics/0005084>)

部分空間である 3 次元 Euclid 空間 \mathbb{E}^3 上で電荷密度 ρ があって, V 上に分布しているとする.

- 電荷密度 $\rho \in \bigwedge^3 \mathbb{E}^3$: \mathbb{E}^3 上の 3 形式で $d_E \rho = 0$ を満たす (d_E は \mathbb{E}^3 の外微分). SI 単位は電荷: unit $\rho = \text{C}$.
 – 電束密度 $D \in \bigwedge^2 \mathbb{E}^3$: $d\rho = 0$ から $\rho = dD$ を満たす 2 形式が存在する. 単位は電荷: unit $D = \text{C}$
- 電流密度 $\vec{j} \in \bigwedge^2 \mathbb{E}^3$: \mathbb{E}^3 上の 2 形式

- 4 元電流密度 $j := \rho - \frac{1}{c} \vec{j} \wedge dx^0 \in \bigwedge^3 \mathbb{M}^4$

相対論的電磁場

- $F = \frac{E}{c} \wedge dx^0 + B$: 電磁場テンソル (場の強さ), $dF = 0$ を満たす. 1 形式 A を用いて $F = dA$ と書ける.
- $\tilde{F} = -\frac{1}{c} H \wedge dx^0 + D$: Electric excitation, $d\tilde{F} = j$ を満たす. $d^2 = 0$ より $dj = 0$ (電荷保存則) が言える.

エネルギー・運動量テンソル

- $u = \frac{1}{2} (D \wedge E + B \wedge H) \in \bigwedge^3 \mathbb{E}^3$: 電磁場のエネルギー密度
- $s = E \wedge H$: Poynting ベクトル (2 形式) (ref. 河合. 特殊相対論, p. 162)w

4.2 等加速度運動

Minkowski 空間で電磁場が存在する場合の粒子の運動を考える. Minkowski 計量 $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ のもとで, $x \equiv x^1$ 軸方向の 一様静電場 $\vec{E}(x) = (E_1, 0, 0)$ が慣性系で働いているとする. 電磁場テンソル F は 電場 $E \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$ と 磁束密度 $B \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ を用いて $F = \frac{E}{c} \wedge dx^0 + B$ と表せる. (参考: 河合, 特殊相対性理論) $E = E_1 dx^1, B = 0$ を 右辺に代入すると $F = \frac{1}{c} (E_1 dx^1 \wedge dx^0)$. 次に, $F \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ とおくと $F_{10} dx^1 \wedge dx^0$ の係数を比較して $F_{10} = E_1/c$.

荷電粒子 (質量 m , 電荷 q) の運動方程式は $\frac{dp_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} u^\nu$, $p_\mu = m \eta_{\mu\nu} u^\nu = m \eta_{\mu\nu} \frac{dX^\nu}{d\tau}$ である. まず, はじめは粒子が慣性系で静止しているとして, 右辺の初期条件を計算すると,

$$(F_{\mu\nu} u^\nu)_{1,\nu}|_{t=0,\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

故に, (E は一様静電場だから) これは 初期加速度 qE_1/m の等加速度運動を導く. 4 元ポテンシャルは $A = -(E_1 x^1/c) dx^0$ なので 接続 1 形式は $\alpha = iA + id\Lambda = i(A + d\Lambda)$ ($\Lambda \in C^r(\mathbb{M}^4), r \in \mathbb{N}$).

Part II

ブラックホールの情報喪失問題

4.3 相対論的な等加速度運動

Minkowski 時空における (相対論的) 等加速度運動を考える。相対論的運動方程式は, Lorentz (直交) 座標系 (ct, \vec{x}) で空間成分と時間成分に分解される (F^j は力) :

$$\begin{aligned} p(t) &= (mc\gamma(t), m\vec{v}(t)\gamma(t)) \\ \frac{dp^j}{dt}(t) &= F^j(t) \quad (j = 1, 2, 3) \\ \frac{dp^0}{dt}(t) \cdot c &= \langle \vec{F}(t), \vec{v}(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad (\vec{F} := (F^j)_j) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

($\|\vec{v}(t)\|/c)^2 \sim 0$ と近似した時に Newton 力学における 等加速度運動と等価になる運動は, $\vec{F} = m\vec{a}$ を代入した

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}(t)\gamma(t)) = m\vec{a} \quad (4.3.2)$$

であり, 以下ではこれについて 空間 1 次元の場合を考える。初速度 0 で正方向に運動する ($a > 0$) とする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = a \iff \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = at \iff v = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}} \quad (4.3.3)$$

したがって $t = 0$ のとき $x = x(0)$ であるから,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{at'}{\sqrt{1 + (at'/c)^2}} dt' = x(0) + \left(\left(1 + (at/c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \frac{c^2}{a} \quad (4.3.4)$$

両辺を二乗すると

$$(a(x(t) - x(0))/c^2 + 1)^2 = 1 + (at/c)^2 \quad (4.3.5)$$

という双曲線の方程式になるので, 媒介変数表示

$$t = \frac{c}{a} \sinh u, \quad x(t) = x(0) + \frac{c^2}{a} (\cosh u - 1) \quad (u > 0) \quad (4.3.6)$$

がわかる。最後に, 固有時を求める。 v に t を代入すると $\frac{v}{c} = \tanh u$ だから

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = \frac{c}{a} du. \quad (4.3.7)$$

つまり, τ と u は互いに線型なので, 原点を合わせると $\tau = \frac{c}{a}u$ 。ゆえに, 等加速度運動の解は $\tau > 0$ に対して,

$$t = \frac{c}{a} \sinh(a\tau/c), \quad x(t) = x(0) + \frac{c^2}{a} (\cosh(a\tau/c) - 1) \quad (4.3.8)$$

であり, $\tau < 0$ にもこれは拡張可能である。

解として $(t, x(t))$ は適しているのかを確かめる。まず, $\gamma(t) = \cosh u$ なので

$$\frac{d}{dt}(v(t)\gamma(t)) = c \frac{d}{dt}(\sinh u) = c \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{c} t \right) = a \quad (4.3.9)$$

なので, Eq. (4.3.2) の左辺は右辺と等しい。次に Eq. (4.3.1) を確かめると,

$$\text{L.H.S.} = \frac{d}{dt} mc^2 \gamma(t) = mc^2 \frac{d}{dt} \sqrt{1 + (at/c)^2} = mc^2 v(t) a / c^2 = mav(t) = \text{R.H.S.} \quad (4.3.10)$$

等加速度運動では 局所 Lorentz 系はどのように計算 (観測) されるだろうか。 $\gamma(v(t)) \equiv \gamma(t) = \cosh u$ なので $\beta(t) = v(t)/c$ とおくと 速度 $\beta(t)$ についての「基底の」Lorentz 変換は

$$L = (L_\mu^\nu)_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \quad (4.3.11)$$

である (成分の Lorentz は L の逆行列). 4 元速度 (次元付き) を U^μ ($\mu = 0, 1$) とすると

$$(U^\mu(t))_\mu = (c\gamma(t), v(t)\gamma(t)) = c(\cosh u, \sinh u). \quad (4.3.12)$$

4 元加速度 a^μ をまず Lorentz 因子によって求めると, Eq. (4.3.1) に従って

$$(a^\mu)_\mu = (\gamma(t) \cdot av(t)/c, \gamma(t) \cdot a) = (a \sinh u, a \cosh u) \quad (4.3.13)$$

であって, これは 4 元速度の 固有時微分とたしかに等しい. :

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \frac{dU^\mu}{du} = (\mu\text{-th component of}) \frac{a}{c} (\sinh u, \cosh u) = a^\mu. \quad (4.3.14)$$

このように, 固有時刻 τ における局所 Lorentz 系では, 動標構 $\partial'_\mu = L_\mu{}^\nu \partial_\nu$ を用いて 時間方向 $(\partial'_0)_\tau$ に 4 元速度 U^μ が伸びており, 1 軸方向 $(\partial'_1)_\tau$ に 4 元加速度 a^μ が伸びている格好になる.

4.4 4 元形式で解く等加速度運動

この解を, 今度は 4 元形式で求める. 質量を $m > 0$, 曲線を X^μ , 4 元速度を U^μ , 4 元加速度を a^μ として,

$$m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2}(\tau) = ma^\mu(\tau), \quad (X^\mu(0)) = (0, \vec{X}(0)), \quad (U^\mu(0)) = (c \equiv 1)(1, \vec{0}), \quad (a^\mu(0)) = (0, \vec{a}). \quad (4.4.1)$$

ここで, 4 元加速度は一定ではない. もし一定とすると, 4 元速度の規格化条件と 加速度・速度の直交条件 から $a^\mu a_\mu = 0$ が導かれるので, 加速度 a^μ がヌルとなり初期条件と矛盾する. 以下 1 次元運動として一般性を失わないので, 1 次元加速度 $\vec{a} = (a) \in \mathbb{R}_{>0}$ を用いる. “局所静止系” (速度 U^μ で動く観測者) のもとでベクトルの成分を求めるために $\Lambda(\tau) := c^{-1} \begin{pmatrix} U^0(\tau) & -U^1(\tau) \\ -U^1(\tau) & U^0(\tau) \end{pmatrix}$ を用いる. “局所静止系” のもとで 4 元加速度は

$$c(\Lambda^\mu{}_\nu a^\nu)_\mu^\top = \begin{pmatrix} U^0 & -U^1 \\ -U^1 & U^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^0 a^0 - U^1 a^1 \\ -U^1 a^0 + U^0 a^1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.2)$$

のように観測され, 第 1 成分は直交条件より $-U^\mu a_\mu = 0$ と求められる. ここで, $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, +1)$ で, これは相対論的に自明な関係である. 一方, 第 2 成分 (空間方向) は等加速度という要請から

$$-U^1 a^0 + U^0 a^1 = ca \iff U^0 \frac{dU^1}{d\tau} - U^1 \frac{dU^0}{d\tau} = ca. \quad (4.4.3)$$

4 元速度は $-(U^0)^2 + (U^1)^2 = c^2$ のように双曲線を描くので媒介変数 (rapidity) 表示をすることができる. パラメータ $u \in \mathbb{R}$ を用いると, $(U^0, U^1) = c(\cosh u, \sinh u)$, $\left(\frac{dU^0}{d\tau}, \frac{dU^1}{d\tau}\right) = c \frac{du}{d\tau} (\sinh u, \cosh u)$ なので,

$$c^2 \frac{du}{d\tau} = ca \iff u = a\tau/c \quad (4.4.4)$$

というように 初期条件から固有時が求まる. あとは前節と同様で, 曲線 X^μ が求まる. これが “ $(\|\vec{v}(t)\|/c)^2 \sim 0$ と近似した時に Newton 力学における 等加速度運動と等価になる” ことに対する 4 元形式における定式化を与える. このような現象は, 物理的には, ロケットが一定の力で加速されて高速になる状況に対応している. 質量の減少を無視できると仮定したとき, 一定出力で噴射するエンジンで飛ぶロケットでは, 中にいる人 (観測者) は Newton 的に一定加速度 $\Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ で加速されているように感じる. しかし, 慣性系の観測者からは 4 元加速度が a^μ という成分のもとに観測されるのである. (参考: Mukhanov, p.97)

4.5 Light-cone coordinates

まず, 式 (位置) が綺麗になるように $x(0) = \frac{c^2}{a}$ と調節すると, Eq. (4.3.8) は $t(\tau) = \frac{c}{a} \sinh(a\tau/c)$, $x(\tau) = \frac{c^2}{a} \cosh(a\tau/c)$ となるので,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{c^2}{a} \begin{pmatrix} \sinh(a\tau/c) \\ \cosh(a\tau/c) \end{pmatrix} = x(0) \begin{pmatrix} \sinh(a\tau/c) \\ \cosh(a\tau/c) \end{pmatrix}. \quad (4.5.1)$$

$(ct, x) \equiv (x^0, x^1)$, $c \equiv 1$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x^0 - x^1 \\ x^0 + x^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -\exp(-a\tau) \\ \exp(a\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.5.2)$$

これは light-cone coordinates (座標) (u, v) における位置 $\frac{1}{a}(-1, +1)$ を通る等加速度運動を表している.

今, 等加速度運動を離れると, light-cone 座標は Minkowski 空間全域を覆っており, 計量の形は

$$g_M = \eta_{00}(dt \otimes dt - dx \otimes dx) = \frac{1}{2}(du \otimes dv + dv \otimes du) \equiv du \otimes_S dv \quad (4.5.3)$$

のように変形できる (\otimes_S はテンソル積の対称化を表す). 次の節では light-cone 座標系を共形変換して 得られるような, 等加速度運動における light-cone 座標系を導入する.

4.6 Rindler coordinates

等加速度系の世界線上で, 固有時を時間軸とする座標近傍 が考えられる. 座標系 (ξ^0, ξ^1) および世界線を覆う近傍 $U_R = \{(t, x) \in \mathbb{M}^2 \mid |t| < x \Leftrightarrow -t < x < t\}$ (R は Right の略で, t 軸 e_t からみて x 軸 e_x (と領域 U_R) が右にあるため) をとる.