فصل ششم

حل عددی
معادلات دیفرانسیل

در این قسمت می خواهیم به حل عددی معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه بپردازیم که معادله به صورت:

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

می باشد.

در این قسمت سه روش تیلور، اویلرورونگه کوتا را توضیح می دهیم.

1 -**روش تیلور(Taylor method)**:

فرض کنید شرایط اولیه تابع را در یک نقطه مشخص مثلا $x = a$ داده باشند در این صورت با استفاده ازبسط تیلور، جواب معادله را پیدا می کنیم.

$$y(a+h) = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2!}y''(a) + \frac{h^3}{3!}y''(a) + \ldots$$

مثال: معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x - y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ را به روش تیلور حل نماید.

و تقریبی از $y(1/2)$ را بیابید. (چهار جمله از سری کافیست)

$$y(1+h) = y(1) + hy'(1) + \frac{h^2}{2!}y''(1) + \ldots$$
$$y'(1) = 1 - y^2(1) = 1 - 1 = 0$$
$$y'' = 1 - 2y'y \Rightarrow y''(1) = 1 - 2y'(1)y(1) = 1$$
$$y'' = 0 - 2y''y - 2(y')^2 \Rightarrow y''(1) = -2y''(1)y(1) - 2(y'(1))^2 = -2$$
$$y^{(4)} = -2y''y - 2y''y' - 4y''(y') \Rightarrow y^{(4)} = -2(-2)1 - 0 - 0 = 4$$
$$y(1+h) = 1 + h \times 0 + \frac{h^2}{2!}(1) + \frac{h^3}{3!}(-2) + \frac{h^4}{4!} \times 4 + \ldots$$
$$y(1+h) = 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{6} + \ldots$$
$$y(1.2) = y(1+0.2) \cong 1 + \frac{(0.2)^2}{2} - \frac{(0.2)^3}{3} + \frac{(0.2)^4}{6}$$

2- روش اویلر (Euler method):

فرض کنید $y' = f(x,y)$ در این صورت روش تکراری اویلر به صورت زیر است:

$$y_{n=1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hy_n$$

که اگر $x_{n+1} = x_n + h$ داریم

$$y_{x+1} = y(x_n + h) = y_n(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

مثال: با استفاده از روش اویلر تقریبی از $y(0,2)$ را از معادله $\frac{dy}{dx} = 2x + \cos 2y$ با فرض $y(0) = 0$ و به ازای $h = 0.1$ به دست آورید.

$$y(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0$$
$$y_{n+1} = y_h + hf(x_n, h_n)$$
$$n = 0 \Rightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_0 = y(0) = 0 \Rightarrow y(0+h) = y(0+0.1) = y(0) + h(2\times 0 + \cos 2y(0)) = 0 + 0.1(1) = 0.1$$
$$n = 1 \Rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \Rightarrow$$
$$y(x_1 + h) = y(x_1) + h(2x_1 + \cos 2y_1) \Rightarrow$$
$$y(0.1 + 0.1) = y(0.2) = 0.1 + 0.1(2\times 0.1 + \cos(0.2))$$
$$= 0.1 + 0.1(0.2 + 0.98)$$

مثال: با استفاده از روش تیلور مقدار y را از معادله $\frac{dy}{dx} = 3x + y^2$ با فرض $y(0) = 1$ وبه ازای $x = 0.1$ به دست آورید.

$$y(h) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2!}y''(0) + \frac{h^3}{3!}y'''(0) + \ldots$$
$$y' = 3x + y^2 \Rightarrow y'(0) = 3\times 0 + y'(0) = 1$$
$$y'' = 3 + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 3 + 2y(0)y'(0) = 5$$
$$y''' = 2(y')^2 + 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = 2(1) + 2y(0)y'''(0) = 12$$
$$y^{(4)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2y'y''' = 4\times 1\times 5 + 2\times 1\times 12 = 54$$
$$y(h) = 1 + h + 5\frac{h^2}{2!} + \frac{12h^3}{3!} + \frac{54h^4}{4!} + \ldots$$
$$y(h) = 1 + h\frac{5}{2}h^2 + 2h^3 + \frac{9}{4}h^4 + \ldots$$
$$y(0.1) \cong 1 + (0.8) + \frac{5}{2}(0.1)^2 + 2(0.1)^3 + \frac{9}{4}(0.1)^4$$

مثال: با استفاده از روش اویلر مقدار $y(0.3)$ را به ازای $h=0.1$ برای معادله $\frac{dy}{dx}=2y-xy^2$ با شرط $y(0)=1$ بـه دسـت آورید .

$$y(x_n+h)=y(x_n)+hf(x_n,y_n)$$
$$y(x_n+h)=y(x_n)+h(2y_n-x_n{y_n}^2)$$
$$n=0\Rightarrow y(x_0+h)=y(x_0)+h(2y-x_0{y_0}^2)$$
$$y(0.1)=1+0.1(2\times1-0)=1.2$$
$$y(0.2)=y(0.1)+0.1(2y(0.1)-0.1y^2(0.1))$$
$$y(0.2)=1.2+0.1(2.4)-0.1(1.2)^2)=1.4256$$
$$y(0.3)=y(0.2)+0.1(2y(0.2)-0.2y^2(0.2))=$$
$$1.4256+0.1(2\times1.4256-0.2(1.4256)^2)\cong1.67.12$$

3- روش رونگه-کوتا(Runge-Kutta):

روش تیلور مراتب بالا به علت نیاز به مشتق در عمل چندان مفید نیست،همچنین برای روش اویلر h را باید خیلی کوچک در نظر گرفت.

الف: **روش رونگه-کوتای مرتبه دو**

با فرض $x_n=x_0+nh$ قرار می دهیم:

$$\begin{cases}k_1=hf(x_n,y_n)\\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1)\\ y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2)\end{cases}\qquad n=0,1,2,\ldots$$

مثال:فرض کنید $\begin{cases}y'=1-y\\ y(0)=0\end{cases}$ با فرض $h=0.05$ تقریبی از $y(0.05)$ را به دست آورید.

$$x_0=0\ ,\ y_0=0\ ,\ f(x,y)=1-y$$
$$k_1=0.05(1-0)=0.05$$
$$k_2=0.05f(0.05,0.05)=0.05(1-0.05)=0.0475$$
$$y_1=y_0+\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0.04875$$

ب: **روش رونگه-کوتای مرتبه چهار**

در این روش داریم:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

مثال:فرض کنید $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ با فرض $h = 0.1$ تقریبی از $y(0.1)$ را به دست آورید.

$x_0 = 0 \ , \ \ y_0 = 1 \ \ , \ \ f(x,y) = x + y$

$k_1 = 0.1(0+1) = 0.1$

$k_2 = 0.1(0.05 + 1.05) = 0.11$

$k_3 = 0.1(0.05 + 1.055) = 0.11050$

$k_4 = 0.1(0.1 + 1.11050) = 0.12105$

$y_1 = 1 + 0.11034 = 1.11034$