第 36 卷第 3 期 系统工程理论与实践 Vol.36, No.3
2016 年 3 月 Systems Engineering — Theory & Practice Mar., 2016

doi: 10.12011/1000-6788(2016)03-0712-07 中图分类号: O159 文献标志码: A

# 变权决策中均衡函数均衡效果

李德清 [1,2], 曾文艺 [2]

(1. 军械工程学院 基础部, 石家庄 050003; 2. 北京师范大学 信息科学与技术学院, 北京 100875)

**摘 要** 讨论和型与积型可分解均衡函数的均衡效果. 首先引入惩罚力度和激励力度两个概念, 它们分别反映可分解惩罚式均衡函数和激励式均衡函数在变权决策过程中的均衡能力. 然后从三个角度分析均衡函数在不同惩罚力度或激励力度下的均衡效果: 一是对变权向量的 orness 测度值的均衡效果; 二是对因素权重的均衡效果; 三是对综合决策值的均衡效果. 结果表明, 从可分解均衡函数的惩罚力度和激励力度出发, 能很好地掌握均衡函数在变权决策中的作用规律, 并且能为变权决策过程中如何选择合适的均衡函数从多方面提供考量准则.

**关键词** 变权综合; 可分解均衡函数; 惩罚力度; 激励力度; 本原函数

# The effectiveness of balance function in variable weights decision making

LI Deqing[1,2], ZENG Wenyi[2]

(1. Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China; 2. College of Information Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

**Abstract** The effectiveness of two classes of balance function, summing and multiplying decomposable balance function, in variable weights decision making is discussed. Two concepts of penalty capability and stimulation capability of decomposable balance function are defined, which reflect the balance ability of the penalty balance function and stimulation balance function respectively. The balance effectiveness of the balance function is analyzed in three aspects. The first one is the influence of the balance function on the orness measure of variable weight vector. The second aspect is the influence on the factor weights transferring. In the third aspect, the influence of the balance on the synthesis value is discussed. The results manifest that the law of the operation of the decomposable balance function can be grasped easily by considering the capability of the penalty and stimulation. It also shows that the general principle of selection an appropriate balance function in decision making is presented theoretically by applying the capability of the balance function.

**Keywords** variable weights synthesis; decomposable balance function; penalty capability; stimulation capability; original function

## 1 引言

在多因素决策问题中, 加权综合 (亦称常权综合) 决策模型是应用最为广泛的模型之一. 针对该决策模型权重保持不变的问题, 李洪兴教授在文献 [1] 中以一个经典实例说明这种处理方法在某些决策问题中容易作出不科学的决策. 为此, 在汪培庄教授提出的变权理论的基础上 [2], 李洪兴教授系统研究了与变权综合相关的各种公理化体系, 分别给出了变权向量、状态变权向量和均衡函数的公理化定义, 并根据权重的不同变

**收稿日期:** 2012-09-24
**作者简介:** 李德清 (1965–), 男, 江西萍乡人, 副教授, 研究方向: 模糊系统与模糊决策; 通信作者: 曾文艺 (1966–), 男, 江西临川人, 教授, 博士; 研究方向: 模糊信息处理与人工智能、近似推理与模糊控制, E-mail: zengwy@bnu.edu.cn.
**基金项目:** 国家自然科学基金 (10971243)
**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (10971243)
**中文引用格式:** 李德清, 曾文艺. 变权决策中均衡函数均衡效果 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 712–718.
**英文引用格式:** Li D Q, Zeng W Y. The effectiveness of balance function in variable weights decision making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(3): 712–718.

化特点将其分为惩罚、激励和混合三种情形, 为变权综合的理论研究和实际应用构建了理论框架 [1,3]. 随后, 众多学者围绕变权原理作了大量的工作. 文献 [4] 研究了状态变权向量的性质与构造方法; 文献 [5] 研究了变权综合的应用; 文献 [6] 分析了状态变权向量的变权效果; 文献 [7–8] 则重点探讨了在实际应用时变权综合的工作机理和状态变权向量的选取原则; 文献 [9] 将变权综合推广至因素状态值为区间数的情形, 拓广了变权综合模型的适用范围; 文献 [10] 将变权综合与语言值模糊决策联系在一起, 并将变权综合与 OWA 算子在表示语言变量所包含的模糊信息的作用进行了比较, 指出变权综合有时比 OWA 算子能更准确地反映语言变量的语义, 在模糊决策中能更好地处理语言变量所包含的模糊信息. 另外, 文献 [3–4, 11] 讨论了均衡函数的性质和构造方法, 得到了两类最常用的均衡函数, 即和型与积型均衡函数. 文献 [12] 将变权综合推广至因素状态值为语言值的情形, 研究了语言值变权综合决策方法及其在群决策中的应用. 上述研究成果为变权综合的应用奠定了必要的 "物质" 基础. 但正如李洪兴教授在文献 [2] 中所指出的: "在现实生活中权重随状态水平变化的规律是千变万化的, 应当根据具体情况确定具体的变权公式". 虽然文献 [7–8] 从因素权重的变化率出发分析状态变权向量的变权效果, 探讨了状态变权向量的作用机理, 但以上结果都没有涉及均衡函数的变权作用. 事实上, 从因素空间的角度来看, 均衡函数是从宏观层面来审视和处理变权综合问题, 对权重变化起着高屋建瓴的作用, 在应用时更便于从整体出发研究权重的作用和变化规律 [13]. 而状态变权向量是以更为具体的方式来解决变权综合问题. 因此, 如果能从均衡函数的层面分析研究变权原理, 则能更全面地把握好权重的变化规律, 能更科学地使用好变权综合这一决策模型. 文献 [3–4, 11] 的研究均指出, 均衡函数主要有和型与积型两种类型, 把握好它们的变权效果则基本上就能实现各种变权决策的变权目的. 为此, 本文重点研究这两类均衡函数的均衡作用. 根据这两类均衡函数生成元在变权公式中的作用, 分别引入惩罚力度和激励力度两个概念来反映可分解惩罚式均衡函数和激励式均衡函数的均衡效果. 并据此分析均衡函数与决策者决策态度之间的内在联系、均衡函数对因素权重和综合决策值的影响等, 力求通过全方位、多维度地分析均衡函数的变权效果, 进一步揭示变权综合的工作机理.

## 2 基本概念

为行文方便, 在后面的讨论中, 均由 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示因素状态向量, $w=(w_1,w_2\cdots,w_n)$ 表示因素常权向量, $B(x)$ 表示均衡函数, $w^B(x)=(w_1(x),w_2(x),\cdots,w_n(x))$ 表示由 $B(x)$ 得到的变权向量.

**定义 1** 若均衡函数 $B(x)=\sum_{j=1}^n g(x_j)$, 则称 $B(x)$ 为和型可分解均衡函数; 若 $B(x)=\prod_{j=1}^n h(x_j)$, 则称其为积型可分解均衡函数, 函数 $g(t)$ 和 $h(t)$ 称为均衡函数的本原函数.

由 $B(x)=\sum_{j=1}^n g(x_j)$ 得到的变权为 $w_i^B(x)=w_ig'(x_i)/\sum_{j=1}^n w_jg'(x_j)$, 而由 $B(x)=\prod_{j=1}^n h(x_j)$ 得到的变权为 $w_i^B(x)=w_ih'(x_i)/h(x_i)/\sum_{j=1}^n w_jh'(x_j)/h(x_j)$. 可以看出, 变权的结果与函数 $y=g'(t)$ 和 $y=h'(t)/h(t)$ 的变化率有关. 设 $B(x)$ 为可分解惩罚式均衡函数, 若 $B(x)=\sum_{j=1}^n g(x_j)$, 令 $\Delta=g'(0)/g'(1)$; 若 $B(x)=\prod_{j=1}^n h(x_j)$, 则令 $\Delta=\frac{h'(0)/h(0)}{h'(1)/h(1)}$. 对可分解激励式均衡函数, 若 $B(x)=\sum_{j=1}^n g(x_j)$, 令 $\Delta=g'(1)/g'(0)$; 若 $B(x)=\prod_{j=1}^n h(x_j)$, 则令 $\Delta=\frac{h'(1)/h(1)}{h'(0)/h(0)}$.

**定义 2** 设 $B(x)$ 为可分解惩罚式均衡函数, 称 $p_B=1-\frac{1}{\Delta}$ 为 $B(x)$ 的惩罚度.

**定义 3** 设 $B(x)$ 为可分解激励式均衡函数, 称 $s_B=1-\frac{1}{\Delta}$ 为 $B(x)$ 的激励度.

说明: 对和型可分解惩罚式均衡函数, 若本原函数的导函数 $g'(t)$ 严格单调减且 $g'(1)=0$, 则取任意小的 $\delta\in[0,1]$, 令 $\Delta=g'(0)/g'(1-\delta)$, 此时称 $p_B=\lim\limits_{\delta\to 0}(1-\frac{1}{\Delta})$ 为 $B(x)$ 的惩罚度. 其它情形可类似处理.

**定义 4** 称均衡函数 $B_1(x)$ 的惩罚力度 (或激励力度) 大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度 (或激励力度), 若 $B_1(x)$ 和 $B_2(x)$ 满足以下条件中的一个:

1) $B_1(x)=\sum_{j=1}^n g_1(x_j)$, $B_2(x)=\sum_{j=1}^n g_2(x_j)$ 为和型可分解惩罚 (或激励) 式均衡函数, 且本原函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 满足: 对任意 $t_1<t_2$, 有 $\frac{g_1'(t_1)}{g_1'(t_2)}\geq\frac{g_2'(t_1)}{g_2'(t_2)}$(或 $\frac{g_1'(t_2)}{g_1'(t_1)}\geq\frac{g_2'(t_2)}{g_2'(t_1)}$).

2) $B_1(x)=\prod_{j=1}^n h_1(x_j)$, $B_2(x)=\prod_{j=1}^n h_2(x_j)$ 为积型可分解惩罚 (或激励) 式均衡函数, 且本原函数 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 满足: 对任意 $t_1<t_2$, 有 $\frac{h_1'(t_1)/h_1(t_1)}{h_1'(t_2)/h_1(t_2)}\geq\frac{h_2'(t_1)/h_2(t_1)}{h_2'(t_2)/h_2(t_2)}$ (或 $\frac{h_1'(t_2)/h_1(t_2)}{h_1'(t_1)/h_1(t_1)}\geq\frac{h_2'(t_2)/h_2(t_2)}{h_2'(t_1)/h_2(t_1)}$).

惩罚力度和激励力度反映了均衡函数的均衡能力, 统称为均衡函数的均衡力度. 如果均衡函数的本原函数二阶可导, 则有下面更简单的结果:

**定理 1** 1) 设 $B_1(x)=\sum_{j=1}^n g_1(x_j)$, $B_2(x)=\sum_{j=1}^n g_2(x_j)$ 为和型可分解惩罚 (或激励) 式均衡函数, 且

本原函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 二阶可导, 且对任意 $t\in(0,1)$, 有 $\frac{g_1''(t)}{g_1'(t)}\le\frac{g_2''(t)}{g_2'(t)}$(或 $\frac{g_1''(t)}{g_1'(t)}\ge\frac{g_2''(t)}{g_2'(t)}$), 则 $B_1(x)$ 的惩罚力度 (或激励力度) 大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度 (或激励力度).

2) 设 $B_1(x)=\prod_{j=1}^n h_1(x_j)$ 和 $B_2(x)=\prod_{j=1}^n h_2(x_j)$ 为积型可分解惩罚 (或激励) 式均衡函数, 且本原函数 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 二阶可导, 且对任意 $t\in(0,1)$, 有 $h_1''(t)/h_1'(t)-h_1'(t)/h_1(t)\le h_2''(t)/h_2'(t)-h_2'(t)/h_2(t)$ (或 $h_1''(t)/h_1'(t)-h_1'(t)/h_1(t)\ge h_2''(t)/h_2'(t)-h_2'(t)/h_2(t)$), 则 $B_1(x)$ 的惩罚力度 (或激励力度) 大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度 (或激励力度).

**证明** 只证 1) 中的惩罚型情形, 其它情形可同理证明. 设 $q(t)=g_1'(t)/g_2'(t)$, 则只需证 $q(t)$ 单调减. 事实上, $q'(t)=(g_1''(t)g_2'(t)-g_1'(t)g_2''(t))/(g_2'(t))^2$, 因为 $\frac{g_1''(t)}{g_1'(t)}\le\frac{g_2''(t)}{g_2'(t)}$, 可知 $q'(t)=(g_1''(t)g_2'(t)-g_1'(t)g_2''(t))/(g_2''(t))^2\le 0$, 因而 $q(t)$ 单调减.

**定义 5**[14] 设 $0\le w_i\le 1(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^n w_i=1$, 则称映射

$$F:R^n\to R,\quad F(x)=\sum_{i=1}^n w_iy_i$$

为一个 OWA 算子, 其中 $y_i$ 为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 由大到小排序时排在第 $i$ 个位置的元素.

Yager 在给出 OWA 算子的同时, 引入了一个重要测度 orness: 对给定的权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$, $orness(w)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(n-i)w_i$. orness 测度值反映出决策者的决策态度, 其值越小, 则决策者越 "保守"; 其值越大, 则决策者越 "乐观". 考虑到 OWA 算子是变权综合的特例, 我们可按如下方式将此概念推广至更一般的变权决策中: 对给定的因素状态向量 $x$ 和变权向量 $w(x)$, 定义 orness 为

$$orness(w(x))=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(n-i)w_{k_i}(x)\tag{1}$$

其中 $w_{k_i}(x)$ 表示从大到小排序时位于第 $i$ 个位置的状态值所对应的因素的变权.

显然, 推广的 orness 测度仍然包含原有的含义.

## 3 均衡函数对 orness 测度的均衡效果

在后面的讨论中, 均假定 $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n$. 由文献 [8] 可知, 惩罚式变权模型偏向保守, 而激励式变权模型偏向乐观. 这提醒我们, 当作用在同一个状态向量 $x$ 上时, 惩罚力度越大的均衡函数得到的变权向量的 orness 值应该越小, 激励力度越大的均衡函数得到的变权向量的 orness 值应当越大. 下面的定理对此给出了肯定的回答.

**定理 2** 1) 设 $B_1(x),B_2(x)$ 同为和型或同为积型可分解惩罚式均衡函数, 且 $B_1(x)$ 的惩罚力度大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度, 则 $orness(w^{B_1}(x))\le orness(w^{B_2}(x))$.

2) 设 $B_1(x),B_2(x)$ 同为和型或同为积型可分解激励式均衡函数, 且 $B_1(x)$ 的激励力度大于 $B_2(x)$ 的激励力度, 则 $orness(w^{B_1}(x))\ge orness(w^{B_2}(x))$.

**证明** 只证明 1) 中的和型可分解惩罚式均衡函数的情形, 其它情形可类似证明. 设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 为因素常权向量, 因为

$$orness(w^{B_1}(x))=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(n-i)\frac{w_ig_1'(x_i)}{\sum_{j=1}^n w_jg_1'(x_j)}\tag{2}$$

$$orness(w^{B_2}(x))=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(n-i)\frac{w_ig_2'(x_i)}{\sum_{j=1}^n w_jg_2'(x_j)}\tag{3}$$

则需证明

$$\frac{orness(w^{B_1}(x))}{orness(w^{B_2}(x))}=\frac{\sum_{i=1}^n(n-i)w_ig_1'(x_i)/g_1'(x_1)}{\sum_{j=1}^n w_jg_1'(x_j)/g_1'(x_1)}\Bigg/\frac{\sum_{i=1}^n(n-i)w_ig_2'(x_i)/g_2'(x_1)}{\sum_{j=1}^n w_jg_2'(x_j)/g_2'(x_1)}\le 1\tag{4}$$

令 $a_i=g_1'(x_i)/g_1'(x_1)$, $b_i=g_2'(x_i)/g_2'(x_1)$, 上式可整理为

$$\sum_{i=1}^n(n-i)w_ia_i\sum_{j=1}^n w_jb_j\le\sum_{j=1}^n w_ja_j\sum_{i=1}^n(n-i)w_ib_i\tag{5}$$

由条件知 $a_i\ge b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 下面用数学归纳法证明 (5) 式成立.

$n=2$ 时, 左端 $=w_1^2+w_1w_2b_2$, 右端 $=w_1^2+w_1w_2a_2$. 因为 $a_2\ge b_2$, 故结论显然成立.

假定 $n=k-1$ 时 (5) 式成立, 则 $n=k$ 时

左端 $=\sum_{i=1}^{k-1}(k-1-i)w_ia_i\sum_{j=1}^{k-1}w_jb_j+\sum_{i=1}^{k-1}w_ia_i\sum_{j=1}^{k-1}w_jb_j+w_kb_k\sum_{i=1}^{k-1}(k-1-i)w_ia_i+w_kb_k\sum_{i=1}^{k-1}w_ia_i$,

右端 $=\sum_{i=1}^{k-1}w_ia_i\sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j)w_jb_j+\sum_{i=1}^{k-1}w_ia_i\sum_{j=1}^{k-1}w_jb_j+w_ka_k\sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j)w_jb_j+w_ka_k\sum_{j=1}^{k-1}w_jb_j$.

由归纳假设知

$$\sum_{i=1}^{k-1}(k-1-i)w_ia_i\sum_{j=1}^{k-1}w_jb_j\le\sum_{i=1}^{k-1}w_ia_i\sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j)w_jb_j \tag{6}$$

又

$$w_kb_k\sum_{i=1}^{k-1}(k-1-i)w_ia_i-w_ka_k\sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j)w_jb_j=w_k\sum_{i=1}^{k-1}(k-1-i)w_i(a_ib_k-a_kb_i) \tag{7}$$

$$w_kb_k\sum_{i=1}^{k-1}w_ia_i-w_ka_k\sum_{j=1}^{k-1}w_jb_j=w_k\sum_{i=1}^{k-1}w_i(a_ib_k-a_kb_i) \tag{8}$$

因为 $a_i/a_k\le b_i/b_k$, 所以 $a_ib_k-a_kb_i\le 0$. 故 $n=k$ 时不等式 (5) 也成立.

综上, 知 $\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_ia_i\sum_{j=1}^{n}w_jb_j\le\sum_{j=1}^{n}w_ja_j\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_ib_i$ 成立.

**推论 1** 1) 设 $B(x)$ 为可分解惩罚式均衡函数, 则 $orness(w^B(x))\le orness(w)$.

2) 若 $B(x)$ 为可分解激励式均衡函数, 则 $orness(w^B(x))\ge orness(w)$.

其中 $w$ 为对应的常权向量.

定理 2 说明由可分解惩罚式均衡函数得到的变权综合决策模型比常权综合决策模型更偏于 "保守", 而由可分解激励式均衡函数得到的变权综合决策模型比常权综合决策模型更偏于 "乐观", 这正是 "惩罚" 和 "激励" 所要达到的均衡效果. 这一结论与文献 [7] 中的结论是一致的.

**定理 3** 设 $B_1(x)=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+(1-\alpha)x_i)$, $B_2(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}$, $B_3(x)=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{\alpha-1}\mathrm{e}^{(\alpha-1)x_i})(0<\alpha<1)$, 则 $B_2(x)$ 的惩罚力度最大而 $B_1(x)$ 的惩罚力度最小. 特别, 有 $p_{B_1}\le p_{B_3}\le p_{B_2}$.

**证明** 易证上述函数都是惩罚式均衡函数, 下面证明 $B_2(x)$ 的惩罚力度大于 $B_3(x)$ 的惩罚力度, 其它结论可类似证明. 已知 $B_2(x)$ 的本原函数 $g_2(t)=t^{\alpha}$, $B_3(x)$ 的本原函数 $g_3(t)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}$, 任取 $t_1<t_2$, 则需证 $\frac{g_2'(t_1)}{g_2'(t_2)}=\frac{t_1^{\alpha-1}}{t_2^{\alpha-1}}\ge\frac{g_3'(t_1)}{g_3'(t_2)}=\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-1)t_1}}{\mathrm{e}^{(\alpha-1)t_2}}$, 即 $(\frac{\mathrm{e}^{t_1}}{t_1})^{1-\alpha}\ge(\frac{\mathrm{e}^{t_2}}{t_2})^{1-\alpha}$. 令 $f(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{t}(0<t\le 1)$, 因 $f'(t)=\frac{(t-1)\mathrm{e}^t}{t^2}\le 0$, 故上述不等式成立.

定理 3 说明, 在和型可分解惩罚式均衡函数中, 当本原函数分别为对数函数、幂函数和指数函数时, 对数函数构造的均衡函数的惩罚力度最小, 而幂函数构造的均衡函数的惩罚力度最大. 我们在实际应用时可酌情选择.

## 4 均衡函数对因素权重的均衡效果

均衡函数的均衡效果主要是通过调整因素的权重来实现. 定理 2 说明均衡函数均衡能力的大小对权重的整体分配有很大的影响. 下面讨论均衡函数对因素状态值取最小或最大的因素的权重的影响.

**定理 4** 1) 设 $B_1(x),B_2(x)$ 同为和型或同为积型可分解惩罚式均衡函数, 且 $B_1(x)$ 的惩罚力度大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度, 则 $w_1^{B_1}(x)\le w_1^{B_2}(x)$, $w_n^{B_1}(x)\ge w_n^{B_2}(x)$.

2) 设 $B_1(x),B_2(x)$ 同为和型或同为积型可分解激励式均衡函数, 且 $B_1(x)$ 的激励力度大于 $B_2(x)$ 的激励力度, 则 $w_1^{B_1}(x)\ge w_1^{B_2}(x)$, $w_n^{B_1}(x)\le w_n^{B_2}(x)$.

**证明** 只证明 1) 中的和型可分解惩罚式均衡函数的情形, 其它情形可类似证明. 设 $B_1(x)=\sum_{j=1}^{n}g_1(x_j)$, $B_2(x)=\sum_{j=1}^{n}g_2(x_j)$, $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$, 那么

$$w_1^{B_1}(x)=w_1\Big/\sum_{i=1}^{n}w_ig_1'(x_i)/g_1'(x_1)\,,\quad w_1^{B_2}(x)=w_1\Big/\sum_{i=1}^{n}w_ig_2'(x_i)/g_2'(x_1) \tag{9}$$

于是

$$\begin{aligned}w_1^{B_1}(x)\le w_1^{B_2}(x)&\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}w_ig_2'(x_i)/g_2'(x_1)\le\sum_{i=1}^{n}w_ig_1'(x_i)/g_1'(x_1)\\&\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}w_i(g_2'(x_i)/g_2'(x_1)-g_1'(x_i)/g_1'(x_1))\le 0\end{aligned} \tag{10}$$

因为 $B_1(x)$ 的惩罚力度大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度, 故上述不等式成立. 同理可证 $w_n^{B_1}(X) \geq w_n^{B_2}(X)$.

**定理 5** 1) 设 $B(x)$ 为可分解惩罚式均衡函数, 则 $w_n^B(x)-w_n \geq w_i^B(x)-w_i \geq w_1^B(x)-w_1 (i=1,2,\cdots,n)$.

2) 设 $B(x)$ 可分解激励式均衡函数, 则 $w_1^B(x)-w_1 \geq w_i^B(x)-w_i \geq w_n^B(x)-w_n (i=1,2,\cdots,n)$.
其中 $w$ 为对应的常权向量.

**证明** 只证明 2), 并以和型可分解惩罚式均衡函数为例, 其它情形可类似证明. 设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$, $B(x)=\sum_{i=1}^n g(x_i)$, 其中 $g'(t)$ 单调增. 那么

$$w_1^B(x)-w_1 \geq w_i^B(x)-w_i \Leftrightarrow \frac{w_1 g'(x_1)}{\sum_{j=1}^n w_j g'(x_j)} - \frac{w_i g'(x_i)}{\sum_{j=1}^n w_j g'(x_j)} \geq w_1 - w_i \tag{11}$$

因为 $\sum_{j=1}^n w_j g'(x_j) \leq g'(x_1)$, 于是有

$$\frac{w_1 g'(x_1)}{\sum_{j=1}^n w_j g'(x_j)} - \frac{w_i g'(x_i)}{\sum_{j=1}^n w_j g'(x_j)} \geq w_1 - w_i \frac{g'(x_i)}{g'(x_1)} \geq w_1 - w_i \tag{12}$$

这表明 $w_1^B(x)-w_1 \geq w_i^B(x)-w_i (i=1,2,\cdots,n)$ 成立. 同理可证 $w_i^B(x)-w_i \geq w_n^B(x)-w_n (i=1,2,\cdots,n)$.

## 5 均衡函数对综合决策值的均衡效果

设 $B(x)$ 为可分解均衡函数, $w^B(x)$ 为由 $B(x)$ 得到的变权向量, 记 $M_B(x)=\sum_{i=1}^n w_i^B(x)x_i$.

**定理 6** 1) 设 $B_1(x), B_2(x)$ 为可分解惩罚式均衡函数, 且 $B_1(x)$ 的惩罚力度大于 $B_2(x)$ 的惩罚力度, 则 $M_{B_1}(x) \leq M_{B_2}(x)$.

2) 设 $B_1(x), B_2(x)$ 同为可分解激励式均衡函数, 且 $B_1(x)$ 的激励力度大于 $B_2(x)$ 的激励力度, 则 $M_{B_1}(x) \geq M_{B_2}(x)$.

**证明** 只证明 2) 中和型可分解激励式均衡函数的情形, 其它情形可类似证明. 设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$, $B_1(x)=\sum_{j=1}^n g_1(x_j)$, $B_2(x)=\sum_{j=1}^n g_2(x_j)$, 其中 $g_1'(t)$ 和 $g_2'(t)$ 单调增, 且对任意 $t_1<t_2$, 有 $\frac{g_1'(t_2)}{g_1'(t_1)} \geq \frac{g_2'(t_2)}{g_2'(t_1)}$. 那么

$$M_{B_1}(x)=\sum_{i=1}^n \frac{w_i g_1'(x_i)}{\sum_{j=1}^n w_j g_1'(x_j)} x_i = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i g_1'(x_i)/g_1'(x_1)}{\sum_{j=1}^n w_j g_1'(x_j)/g_1'(x_1)} \tag{13}$$

$$M_{B_2}(x)=\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i g_2'(x_i)/g_2'(x_1)}{\sum_{j=1}^n w_j g_2'(x_j)/g_2'(x_1)} \tag{14}$$

令 $a_i=\frac{g_1'(x_i)}{g_1'(x_1)}$, $b_i=\frac{g_2'(x_i)}{g_2'(x_1)}$. 因为 $B_1(x)$ 的激励力度大于 $B_2(x)$ 的激励力度, 则有 $a_i \leq b_i$. 这样, 证明 $M_{B_1}(x) \geq M_{B_2}(x)$, 转化为证明

$$\sum_{i=1}^n w_i a_i x_i \sum_{j=1}^n w_j b_j \geq \sum_{i=1}^n w_i b_i x_i \sum_{j=1}^n w_j a_j \tag{15}$$

下面用数学归纳法证明 (15) 式结论成立.

$n=2$ 时, 我们有

$$\sum_{i=1}^2 w_i a_i x_i \sum_{j=1}^2 w_j b_j = w_1^2 x_1 + w_1 w_2 b_2 x_1 + w_1 w_2 a_2 x_2 + w_2^2 a_2 b_2 x_2 \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^2 w_i b_i x_i \sum_{j=1}^2 w_j a_j = w_1^2 x_1 + w_1 w_2 a_2 x_1 + w_1 w_2 b_2 x_2 + w_2^2 a_2 b_2 x_2 \tag{17}$$

由于 $a_2 \leq b_2$, 故此时结论成立.

假定 $n=k-1$ 时 (15) 式结论成立, 则 $n=k$ 时,

$$\sum_{i=1}^k w_i a_i x_i \sum_{j=1}^k w_j b_j = \sum_{i=1}^{k-1} w_i a_i x_i \sum_{j=1}^{k-1} w_j b_j + w_k b_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i a_i x_i + w_k a_k x_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i b_i + w_k^2 a_k b_k x_k \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^k w_i b_i x_i \sum_{j=1}^k w_j a_j = \sum_{i=1}^{k-1} w_i b_i x_i \sum_{j=1}^{k-1} w_j a_j + w_k a_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i b_i x_i + w_k b_k x_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i a_i + w_k^2 a_k b_k x_k \tag{19}$$

由归纳假设知

$$\sum_{i=1}^{k-1} w_i a_i x_i \sum_{j=1}^{k-1} w_j b_j \geq \sum_{i=1}^{k-1} w_i b_i x_i \sum_{j=1}^{k-1} w_j a_j \tag{20}$$

此外, 对应第二项的差与对应第三项的差之和为

$$\begin{aligned} & w_k b_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i a_i x_i + w_k a_k x_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i b_i - \left( w_k a_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i b_i x_i + w_k b_k x_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i a_i \right) \\ = & w_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i (a_i b_k - a_k b_i)(x_i - x_k) \end{aligned} \tag{21}$$

因为 $a_i/a_k \geq b_i/b_k$, 则知 $w_k \sum_{i=1}^{k-1} w_i(a_ib_k - a_kb_i)(x_i - x_k) \geq 0$. 故 $n = k$ 时, 不等式 $\sum_{i=1}^{k} w_i a_i x_i \sum_{j=1}^{k} w_j b_j \geq \sum_{i=1}^{n} w_i b_i x_i \sum_{j=1}^{n} w_j a_j$ 也成立.

综上, 知定理结论成立.

下面讨论可分解惩罚式均衡函数的惩罚度与调权水平之间的关系.

**定理 7** 1) 设 $B_1(x), B_2(x)$ 为同种类型的可分解惩罚式均衡函数, 则 $p_{B_1} \leq p_{B_2} \Leftrightarrow A_{B_1} \leq A_{B_2}$.

2) 设 $B(x)$ 可分解惩罚式均衡函数, 则 $p_B = 0 \Leftrightarrow A_B = 1/n$, $p_B = 1 \Leftrightarrow A_B = 1$.

**证明** 1) 以 $B_1(x), B_2(x)$ 同为和型可分解惩罚式均衡函数为例进行证明, 其它情形可同理讨论. 设 $B_1(x) = \sum_{j=1}^{n} g_1(x_j)$, $B_2(x) = \sum_{j=1}^{n} g_2(x_j)$, $X_j = (1, \cdots, 1, x_j, 1, \cdots, 1)$, 其中 $x_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$w_j^{B_1}(X_j) = \frac{w_j}{w_j + \sum\limits_{i \neq j} w_i g_1'(1)/g_1'(0)} \tag{22}$$

$$w_j^{B_2}(X_j) = \frac{w_j}{w_j + \sum\limits_{i \neq j} w_i g_2'(1)/g_2'(0)} \tag{23}$$

$$A_{B_1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j^{B_1}(X_j), \quad A_{B_2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j^{B_2}(X_j) \tag{24}$$

由惩罚度的定义, 有

$$\begin{aligned} & p_{B_1} \leq p_{B_2} \Leftrightarrow \frac{g_2'(1)}{g_2'(0)} \leq \frac{g_1'(1)}{g_1'(0)} \\ & \Leftrightarrow \frac{w_j}{w_j + \sum\limits_{i \neq j} w_i g_1'(1)/g_1'(0)} \leq \frac{w_j}{w_j + \sum\limits_{i \neq j} w_i g_2'(1)/g_2'(0)} \\ & \Leftrightarrow w_j^{B_1}(X_j) \leq w_j^{B_2}(X_j) \Leftrightarrow A_{B_1} \leq A_{B_2} \end{aligned} \tag{25}$$

2) $p_B = 0 \Leftrightarrow g'(0)/g'(1) = 1 \Leftrightarrow g'(t) = c$(c 为常数)$\Leftrightarrow w_j^B(X_j) = w_j \Leftrightarrow A_B = 1/n$.

$p_B = 1 \Leftrightarrow g'(1)/g'(0) = 0 \Leftrightarrow g'(1) = 0 \Leftrightarrow w_j^B(X_j) = 1 \Leftrightarrow A_B = 1$.

由文献 [7] 知, 惩罚式变权综合的决策值小于对应的常权综合的决策值, 而激励式变权综合的决策值大于对应的常权综合的决策值, 以此达到惩罚和激励的目的. 定理 6 则进一步说明惩罚力度大的均衡函数导致决策值更小, 激励力度更大的均衡函数导致决策值更大. 这正是变权综合决策中均衡函数要达到的目的. 另外, 由定理 7 可以得到可分解惩罚式均衡函数如下的选取原则: 如果有一些因素极其重要以至于当其状态值严重偏小时就可以否决整个决策方案, 则可以选用惩罚度为 1 的均衡函数, 否则, 则选用惩罚度不为 1 的均衡函数. 利用这一结论比用文献 [8] 中的调权水平更为方便.

## 6 结束语

均衡函数是变权综合理论中的核心内容, 与状态变权向量相比, 它对变权综合起着高屋建瓴的作用. 掌握均衡函数在变权综合中的作用规律, 对科学应用变权综合决策模型至关重要. 本文在文献 [7–8] 工作的基础上, 将研究范围从分析状态变权的工作机理这一层面提升到研究均衡函数的工作机理. 将以往单一分析均衡函数对因素状态值组态水平的均衡辐射到分析均衡函数对决策态度、权重转移和综合决策值等多个方面

的均衡, 多维度、全方位地揭示了均衡函数的均衡效果, 这些结果可为科学选用均衡函数从多方面提供衡量标准.

## 参考文献


[1] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架 (VIII)[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1–9.
Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (VIII)[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1995, 9(3): 1–9.

[2] 汪培庄. 模糊集与随机集落影 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
Wang P Z. Shadow of fuzzy sets and random sets[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1985.

[3] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架 (IX)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 12–19.
Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (IX)[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1996, 10(2): 12–19.

[4] 朱勇珍, 李洪兴. 状态变权的公理化体系和均衡函数的构造 [J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 116–118.
Zhu Y Z, Li H X. Axiomatic system of state variable weights and construction of balance functions[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1999, 19(7): 116–118.

[5] 李德清, 李洪兴. 基于层次变权的多因素决策 [J]. 系统工程学报, 2004, 19(3): 258–263.
Li D Q, Li H X. Multifactor decision making based on hierarchical variable weights[J]. Journal of Systems Engineering, 2004, 19(3): 258–263.

[6] 刘文奇. 变权综合中的惩罚 - 激励效用 [J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(4): 41–47.
Liu W Q. The penalty-incentive utility in variable weight synthesizing[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1998, 18(4): 41–47.

[7] 李德清, 郝飞龙. 状态变权向量的变权效果 [J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 127–131.
Li D Q, Hao F L. Weights transferring effect of state variable weights vector[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(6): 127–131.

[8] 李德清, 李洪兴. 变权决策中变权效果分析与状态变权向量的确定 [J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1241–1245.
Li D Q, Li H X. Analysis of variable weights effect and selection of appropriate state variable weights vectors in decision making[J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1241–1245.

[9] 王庆东, 侯海军. 基于区间数的变权与状态变权 [J]. 系统工程学报, 2008, 23(4): 493–497.
Wang Q D, Hou H J. Interval number based variable weight and state variable weight[J]. Journal of Systems Engineering, 2008, 23(4): 493–497.

[10] 李德清, 王加银. 基于语言量词的变权综合决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(11): 1998–2002.
Li D Q, Wang J Y. Variable weight average based on linguistic quantifier[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2010, 30(11): 1998–2002.

[11] 李德清, 赵彩霞, 谷云东. 等效均衡函数的性质及均衡函数的构造 [J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(1): 87–92.
Li D Q, Zhao C X, Gu Y D. Properties of equivalent balance function and construction approaches of balance function[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005, 19(1): 87–92.

[12] 李德清, 郝飞龙. 因素状态值为语言标度的变权综合决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(1): 176–181.
Li D Q, Hao F L. Variable weights multifactor decision making based on linguistic factor state values[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(1): 176–181.

[13] 曹可劲, 江汉, 赵宗贵. 一种基于变权理论的空中目标威胁估计方法 [J]. 解放军理工大学学报 (自然科学版), 2006, 7(1): 32–35.
Cao K J, Jiang H, Zhao Z G. Air threat assessment based on variable weight theory[J]. Journal of PLA University of Science and Technology (Natural Science), 2006, 7(1): 32–35.

[14] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multiciteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988(18): 183–190.