状态变权的公理化体系和均衡函数的构造

朱勇珍, 李洪兴

(北京师范大学数学系, 北京 100875)

摘要 改造了原始的状态变权向量公理化定义, 给出了若干变权实例, 构造了两种常用的均衡函数

关键词 常权; 变权; 状态变权; 均衡函数

Axiomatic System of State Variable Weights and Construction of Balance Functions

ZHU Yongzhen, LI Hongxing

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

Abstract A new definiton of state variable weights is given and some properties are discussed. Then some interesting examples are introduced. At last two kinds of useful balance functions are studied.

Keywords constant weights; variable weights; state variable weigths; balance functions

1 问题的提出

汪培庄在文献[4]中提出变权综合思想并给出一种经验公式. 李洪兴在文献[1, 2, 3]中对变权原理进行了深入而又本质性的讨论, 得到许多重要结论. 例如, 变权向量可表示为因素常权向量 $W_0 = (w_1, \cdots, w_m)$ 和状态变权向量 $S(X) = (S_1(X), \cdots, S_m(X))$ 的归一化的 Hadamard 乘积; 状态变权向量 $S(X)$ 是均衡函数(m 维实函数) $B(x_1, \cdots, x_m)$ 的梯度向量, 即 $\mathrm{Grad}B(X) = S(X)$. 在上述工作基础上, 已有一些学者致力于状态变权的性质的研究以及均衡函数的构造问题(比如文献[5]). 正如李洪兴指出的那样, 状态变权的公理化体系还不完善, 有待改造. 本文便对状态变权向量的公理化结构进行了探讨, 考虑了两种常见的均衡函数的构造; 此外, 还给出了一些变权的实例.

2 几个定义和几个例子

定义 1[1] 称 $W_0 = (w_1, \cdots, w_m) \in (0, 1]^m$ 为常权向量(简称常权), 如果满足归一性: $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$.

定义 2[1] 给定映射 $W: [0, 1]^m \to (0, 1]^m$, 称 $W(X) = (w_1(X), \cdots, w_m(X))$ 为变权向量, 如果满足条件:

w. 1) 归一性: $\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m) = 1$;

w. 2) 逐元连续性: $\forall j\ (1 \le j \le m)$, $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于每个变元 $x_k\ (k = 1, \cdots, m)$ 连续;

◦ 收稿日期: 1998-11-03

资助项目: 国家自然科学基金资助项目(69474014)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

w. 3) 惩罚性: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于 x_j 单增, 或者

w. 3′) 激励性: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于 x_j 单降. 若 W 满足 w. 1), w. 2) 及 w. 3), 则称 W 为惩罚型变权向量; 若 W 满足 w. 1)、w. 2) 及 w. 3′), 则称 W 为激励型变权向量.

注: 除定义 2 中两种常见变权以外, 还有其它类型变权, 如混合型变权[2].

定义 3[1]　给定映射 $S: [0, 1]^m \to (0, 1]^m, X \to S(X) \triangleq (S_1(X), \cdots, S_m(X))$, 如果满足条件:

s 1) $S_j(\sigma_{ij}(X)) = S_j(X)$, 这里 $\sigma_{ij}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_m)$;

s 2) $x_i \geq x_j \Rightarrow S_i(X) \leq S_j(X)$;

s 3) $S_j(x_1, \cdots, x_m)$ 对每个变元连续;

s 4) 对任何常权 $W_0 = (w_1, \cdots, w_m)$, 置

$$W(X) = \frac{W_0 \cdot S(X)}{\sum_{j=1}^{m} (w_j S_j(X))} \tag{1}$$

其中 $W(X)$ 满足定义 2 的条件, 则称 S 为状态变权向量; 这时若满足 w. 1)、w. 2)、w. 3), 则称 S 为惩罚型状态变权向量; 若满足 w. 1)、w. 2)、w. 3′), S 便叫做激励型状态变权向量.

定义 4[1]　映射 $B: [0, 1]^m \to R$ 叫做均衡函数, 如果它的梯度向量 $\mathrm{grad}B = \left(\frac{\partial B}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial B}{\partial x_m}\right)$ 为一个状态变权向量; 当 $\mathrm{grad}B$ 为惩罚(激励)型时, B 亦叫做惩罚(激励)型均衡函数.

例 1[1]　$B_1(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j$ 和 $B_2(X) = \prod_{j=1}^{m} x_j$ 都是均衡函数, 若置 $B_3(X) = \frac{1}{\alpha}\prod_{j=1}^{m} x_j^{\alpha}(\alpha > 0$ 且 $\alpha \neq 1)$, 易知它也是均衡函数.

例 2　取 $B_4(X) = \sum_{j=1}^{m} (e - e^{-x_j})$, 不难验证它亦为均衡函数.

3　状态变权向量公理体系的修正

由于定义 3 中的公理 s 1) 过于苛刻, 故会导致某种平凡性, 因此我们将对该定义进行修改(见下述的定义 5).

定义 5　称映射 $S: [0, 1]^m \to (0, 1]^m, S(X) \triangleq (S_1(X), \cdots, S_m(X))$ 为一个 m 维惩罚型状态变权向量, 如果满足条件:

S1) 惩罚性: $x_i \geq x_j \Rightarrow S_i(X) \leq S_j(X)$;

S2) 转移性: $S_i(X)$ 关于 x_i 单减, 但凸组合 $\sum_{k \neq i} w_k S_k(X)$ 关于 x_i 不减, 即对任何 $X^{(1)} = (x_1, \cdots, x_i^{(1)}, \cdots, x_m)$ 和 $X^{(2)} = (x_1, \cdots, x_i^{(2)}, \cdots, x_m)$, 有

$$x_i^{(1)} \geq x_i^{(2)} \Rightarrow S_i(X^{(1)}) \leq S_i(X^{(2)}) \text{ 且 } \sum_{k \neq i} w_k S_k(X^{(1)}) \geq \sum_{k \neq i} w_k S_k(X^{(2)}) \tag{2}$$

其中 $w_k(k = 1, \cdots, m)$ 为常权.

注 1　S1 反映不同因素之间状态值与其权值的反变关系; S2 则体现某一因素状态值变化时, 通过权值的增减呈现权重从该因素向其余因素转移. S1 与 S2 从不同侧面刻画变权的本质属性.

注 2　若 $S(X)$ 的每个分量 $S_i(X)$ 关于任一变元连续, 则称 S 为连续的状态变权向量. 以下总假定 S 为连续的. 此外, 凡提到变权, 均指在定义 5 意义下的变权.

定理 1　设 S 为 m 维惩罚型状态变权向量, $W_0 = (w_1, \cdots, w_m)$ 为一常权向量, 按(1)式构作 $W(X)$, 则 $W(X)$ 为惩罚型变权向量(即满足定义 2).

证明　按定义 2, 不难看出 w. 1 与 w. 2 成立. 往证 w. 3 亦成立. 任取 $X^{(1)} = (x_1, \cdots, x_j^{(1)}, \cdots, x_m), X^{(2)} = (x_1, \cdots, x_j^{(2)}, \cdots, x_m)$, 其中 $x_j^{(1)} \geq x_j^{(2)}$, 记

$A(x) \triangleq w_j S_j(X) \triangleq w_j S_j(x_1, \cdots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \cdots, x_m)$

$B(x) \triangleq \sum_{i \neq j} w_i' S_i(X) \triangleq \sum_{i \neq j} w_i' S_i(x_1, \cdots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \cdots, x_m)$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 $w_i' \triangleq w_i / \sum_{i \neq j} w_i > 0$ 且 $\sum_{i \neq j} w_i' = 1$. 显然 $B(X)$ 是 $\{S_i(X) \mid i \neq j\}$ 的正的凸组合. 由(1)式可知

$$w_j(x) = A(x) / (A(x) + B(x) \sum_{i \neq j} w_i) \tag{3}$$

从 S_2 知, $A(x)$ 关于 x 单减, 但 $B(x)$ 关于 x 不减; 从而对于 $x_j^{(1)} \geq x_j^{(2)}$ 来说, 我们有 $B(x_j^{(2)})A(x_j^{(1)}) \leq B(x_j^{(1)}) A(x_j^{(2)})$, 因此

$$A(x_j^{(1)}) / (A(x_j^{(1)}) + B(x_j^{(1)}) \sum_{i \neq j} w_i) \leq A(x_j^{(2)}) / (A(x_j^{(2)}) + B(x_j^{(2)}) \sum_{i \neq j} w_i)$$

由此可知 $w_j(X) = w_j S_j(X) / \sum_{i=1}^{m} w_i S_i(X)$ 关于 x_j 单减; 这说明 w.3 成立. 证毕

4　均衡函数的构造

这里只讨论与惩罚型变权相关的惩罚型均衡函数, 其它情形(激励型或混合型亦可类似研究).

定理 2　设 $g(t)$ 是 $[0, 1]$ 上可微实值函数, 置 $B_1(x_1, \cdots, x_m) \triangleq \sum_{j=1}^{m} g(x_j)$, 则 $B_1(X)$ 为 $[0, 1]^m$ 上均衡函数的充分必要条件为: $g'(t)$ 单调递减且 $g'(1) > 0$.

证明　必要性: 设 $B_1(X)$ 为均衡函数(按本节约定, 它是惩罚型的), 取 $S_i(X) = g'(x_i)$, 则 $S(X) \triangleq \mathrm{grad} B_1$ 是(连续的)惩罚型状态变权向量; 显然有 $g'(1) > 0$. 往证 $g'(t)$ 单减. 事实上, $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 > t_2$, 置 $X_0 \triangleq (t_1, t_2, 0, \cdots, 0) \in [0, 1]^m$, 由 S_1 知 $S_1(X_0) \leq S_2(X_0)$, 此即 $g'(t_1) \leq g'(t_2)$. 由 t_1, t_2 的任意性便知 $g'(t)$ 在 $[0, 1]$ 中单减.

充分性: 设 $S(X) = (g'(x_1), \cdots, g'(x_m))$ 满足定理中的条件, 即 $g'(t)$ 单减且 $g'(1) > 0$, 往证它满足 S_1 与 S_2. 首先, 任给 x_i, x_j, $x_i \geq x_j$, 由条件知 $S_i(X) = g'(x_i) \leq g'(x_j) = S_j(X)$, 即 S_1 成立. 此外, 由 $S(X) = \mathrm{grad} B_1$ 知, $S_i(X)$ 关于 x_i 单减, 并且 $\sum_{j \neq i} w_j S_j(X) = \sum_{j \neq i} g'(x_j)$ 与 x_i 无关, 故它关于 x_i 不增, 从而 S_2 为真. 最后, $\forall x_i$, 因 $0 < g'(1) \leq g'(x_i)$, 故 $g'(x_i) \in (0, +\infty)$, 即 $S(X) \in (0, +\infty)^m$, 因此 $S(X)$ 为连续惩罚型变权.

推论　若 $g(t)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可微, 则 $B_1(X) \triangleq \sum_{j=1}^{m} g(x_j)$ 为均衡函数当且仅当 $g'(1) > 0$ 且 $g''(t) \leq 0$.

定理 3　设 $h(t)$ 为 $[0, 1]$ 上可微正值函数, 置 $B_2(X) \triangleq \prod_{j=1}^{m} h(x_j)$, 则 $B_2(X)$ 为均衡函数当且仅当 $h'(t)$ 单减且 $h'(t) > 0$.

证明　必要性: 置 $S(X) = \mathrm{grad}\, B_2(X)$, 由条件知 $S(X)$ 为(连续的)惩罚型状态变权向量, 因 $S(X)$ 取正值, 故 $h'(t) > 0$; 注意到 $S_i(X) = h'(x_i) \prod_{j \neq i} h(x_j)$, 从 $S_i(X)$ 关于 x_i 单减推知 $h'(x_i)$ 关于 x_i 在 $[0, 1]$ 中单减.

充分性: 由于 $S(X) = (h'(x_1) \prod_{i \neq 1} h(x_i), \cdots, h'(x_m) \prod_{i \neq m} h(x_m))$, 对于任何 $X = (x_1, \cdots, x_m)$, 当 $x_i \geq x_j$ 时, 由条件易知 $h(t)$ 在 $[0, 1]$ 中单增, 从而 $h(x_i) \geq h(x_j)$; 但 $h'(x_i) \leq h'(x_j)$, 即 $h'(x_i)h(x_j) \leq h'(x_j)h(x_i)$, 因此

$$S_i(X) = h'(x_i)h(x_j) \prod_{k \neq i, j} h(x_k) \leq h'(x_j)h(x_i) \prod_{k \neq i, j} h(x_k) = S_j(X)$$

从而 S_1 得证. 此外, 由 $h'(x_i)$ 的单减性并注意 $S_i(X) = h'(x_i) \prod_{j \neq i} h(x_j)$, 得知 $S_i(X)$ 关于 x_i 单减. 最后, 注意

$$\sum_{j \neq i} w_j S_j(X) = h(x_i) (\sum_{j \neq i} w_j h'(x_j) \prod_{k \neq i, j} h(x_k))$$

(下转第 131 页)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

[1] 并行工程文集(IDAR- 338报告). CMS情报研究课题组, 1992
[2] Hubele N F el. Automation: the challenge for SPC. Quality, 1987, 26(3): 14～22
[3] Dovich R A. Small-lot SPC … really! Machine and Tool Blue Book, Dec. 1988: 12～14
[4] Salti M M, Statham A. A Review of the Literature on the Use of SPC in Batch Production. Quality and Reliability Engineering International, 1994, 10: 49～61
[5] 卢秉恒等. 单件、小批加工质量的统计分析方法——加权统计分析方法. 第二届全国《CMS会议论文集》, 北京: 1992
[6] Alexander S M and Jagannathan V. Advisory system for control chart selection. Computer and Industrial Engineering, 1986, 10(3): 171～177
[7] Tsuang Kuo and Anil Mital. Quality control expert systems: a review of pertinent literature. Journal of Intelligent Manufacturing, 1993, (4)
[8] 余忠华, 吴昭同. 基于贝叶斯预测的动态质量控制技术研究. 浙江大学学报, 1997, 增刊(1): 133～137
[9] AT&T. Statistical Quality Control Handbook, Delmar Printing Company, Charlotte N. C, 1985
[10] Jill A Swift and Joe H Mize. Out-of-control Pattern Recognition and Analysis for Quality Control Charts Using Lisp-based Systems. Computers Ind. Engng., 1995, 28(1): 81～91

(上接第118页)

由于 $h(t)$ 关于 t 单增而 $\sum_{j\neq i} w_i h(x_j) \prod_{k\neq i,j} h(x_k)$ 与 x_i 无关, 因此 $\sum_{j\neq i} w_j S_j(X)$ 关于 x_i 不减, 即 S_2 满足　　证毕

参 考 文 献

[1] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(Ⅷ)——变权综合原理. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1～9
[2] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(Ⅸ)——均衡函数的构造和Weber-Fechner特性. 模糊系统与数学, 1996, 10(3): 12～19
[3] 汪培庄, 李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机. 北京: 科学出版社, 1996
[4] 汪培庄. 模糊集与随机集落影. 北京: 北京师范大学出版社, 1985
[5] 刘文奇. 均衡函数及其在变权综合中的应用. 系统工程理论与实践, 1997, 17(4): 58～74

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.