

# Anteckningar TMV206 - Linjär Algebra

Krysset

January 27, 2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Geometrisk vektorer</b>	<b>2</b>
1.0.1	Räkneregler . . . . .	3
1.1	Linjärbaser . . . . .	4
1.2	Skalarprodukten . . . . .	4
1.3	Vektorprodukten . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Koordinatsystem (Avs. 1.5)</b>	<b>8</b>
2.1	Koordinatsystem i ett plan . . . . .	8
2.2	Koordinatsystem i ett rum . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Linjer och plan (Avsnitt 1.6)</b>	<b>11</b>
3.0.1	Linjer . . . . .	11
3.1	Linjer i planet . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Plan i rummet</b>	<b>13</b>
4.1	Avstånd från en punkt till en linje . . . . .	14
4.2	Avstånd från en punkt till ett plan . . . . .	14

# Chapter 1

## Geometrisk vektor

När man säger vektor menar man ofta en matris på formeln av en kolonnvektor,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  eller en radvektor,  $(1 \ 2 \ -3)$ .

Så kommer det även vara för oss. Men vi börjar med att diskutera geometriska vektorer.

**Definition:** En geometrisk vektor är ett objekt som har både storlek och riktning. Storleken av vektorn  $\mathbb{V}$  betecknas  $||\mathbb{V}||$  och kallas för vektorns längd. Det finns en vektor, nollvektorn  $\mathbf{0}$ , som har längd 0 men saknar riktning.

Vi tänker på en geometrisk vektor som en pil  $\longrightarrow$

Men en pil har en start- och en slutpunkt. Det har inte vektorer. Vektorer bestäms av deras längd och riktning.

**Definition:** Vi säger att två vektorer är lika om de har samma längd och samma riktning.

**Ex** Vektorerna  $\longrightarrow$  och  $\rightarrow$  är inte lika för de har inte samma längd. De har dock samma riktning.

Vektorerna  $\rightarrow$  och  $\downarrow$  är inte lika. De har samma längd (kanske inte blir det i pdf:en) men inte samma riktning.

Vektorerna  $\nearrow$  och  $\nearrow$  är lika. De har samma längd och samma riktning. Start och slutpunkt spelar ingen roll!

**Ex** Hastighet är en vektor. I detta fall kallas storleken för fart (speed).

Givet två punkter A och B så betecknar  $\overrightarrow{AB}$  vektorn från A till B.  $A \longrightarrow B$   
Vi vill kunna räkna med vektorer, dvs göra vektoralgebra.

**Definition:** Givet en vektor  $\mathbf{v}$  och ett tal  $a \neq 0$  så är vektorn  $a\mathbf{v}$  av den vektorn som uppfyller

1.  $\|a \cdot \mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$
2. om  $a > 0$  då har  $a\mathbf{v}$  och  $\mathbf{v}$  samma riktning
3. om  $a < 0$  då har  $a\mathbf{v}$  och  $\mathbf{v}$  motsatt riktning

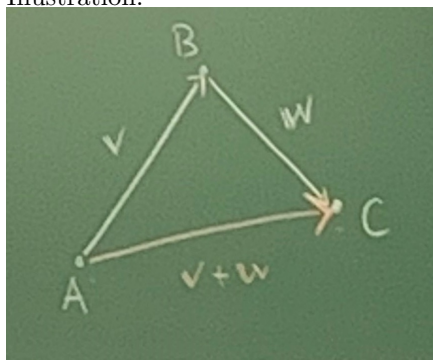
Vi låter  $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Ex** Om vektorn  $\mathbf{v}$  ges av  $\nearrow$  då är  $2\mathbf{v}$ ,  $\frac{1}{2}\mathbf{v}$  och  $(-1)\mathbf{v}$  vektorerna  $\nearrow$  (dubbla längden)  $\nearrow$  (halva längden)  $\nwarrow$

**Ex** Om  $\mathbf{v}$  är en vektor med positiv längd, då är  $\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$  är en vektor med längd 1. Låt oss kolla detta:  $\|\mathbf{w}\| = \|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$ .  
En vektor med längd 1 kallas för en enhetsvektor.

**Definition:** Om  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  och  $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$  då definierar summan av  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  som  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$

Illustration:



Det är ingen inskränkning att anta att  $\mathbf{w}$  börjar där  $\mathbf{v}$  slutar eftersom vi får flytta vektorer.

### 1.0.1 Räkneregler

1.  $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$
2.  $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
3.  $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$
4.  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
5.  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

Räkneregeln 5 gör att vi kan skippa paranteser när vi adderar flera vektorer. Vi skriver  $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$

## 1.1 Linjärkombinationer

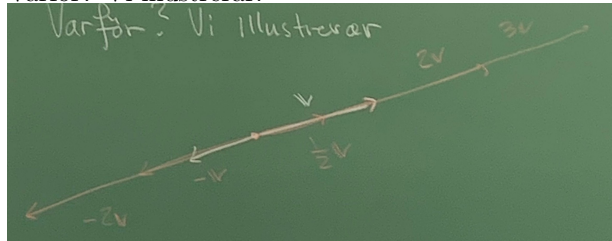
**Definition** Låt  $V$  vara en mängd vektorer och  $v_1, \dots, v_n \in V$ . En vektor på formen  $\mathbf{v} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$  sägs vara en linjärkombination av  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Mängden av alla linjärkombinationer av vektorer från  $V$  kallas spannet av  $V$  och betecknas  $\text{span}(V)$ .

**Ex** Givet  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  så är t.ex  $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$  en linjärkombination av  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ .

**Ex** Varje vektor  $\mathbf{v}$  är en linjärkombination av sig själv, ty  $\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$

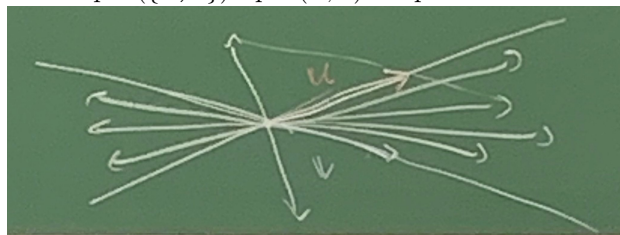
**Ex** Nollvektorn  $\mathbf{0}$  är en linjärkombination av varje mängd  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vektorer, ty  $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_n$ .

**Ex** Låt  $\mathbf{v}$  vara en noll-skild vektor. Då är  $\text{span}(\mathbf{v})$  ( $=\text{span}(\{\mathbf{v}\})$ ) en linje. Varför? Vi illustrerar:



Varje sådan vektor  $\mathbf{v}$  kallas för en riktningsvektor för linjen.

**Ex** Vi säger att två vektorer  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är parallella om de har samma eller motsatt riktning. Låt  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  vara två nollskilda och icke-parallella vektorer. Då är  $\text{span}(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}) = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ett plan. Varför?



## 1.2 Skalarprodukten

**Definition** Låt  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  vara två vektorer och låt  $\alpha$  vara den minsta vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ . Vi definierar skalarprodukten av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  genom

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha).$$

Observera att  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  är ett tal (en skalär).

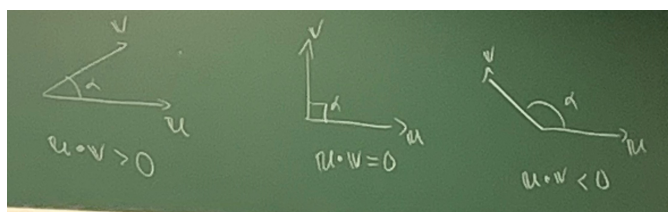
**Ex**  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \cos(0) = \|\mathbf{u}\|^2$

**Ex** Vi har att (antag att  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är nollskilda)  
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är ortogonala (vinkelräta)

**Lösning**  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}$  ortogonala

**Proposition 1.16** Låt  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  vara nollskilda vektorer och låt  $\alpha$  vara vinkeln mellan dem. då gäller att

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha$  spetsig
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha$  rät
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \alpha$  trubbig

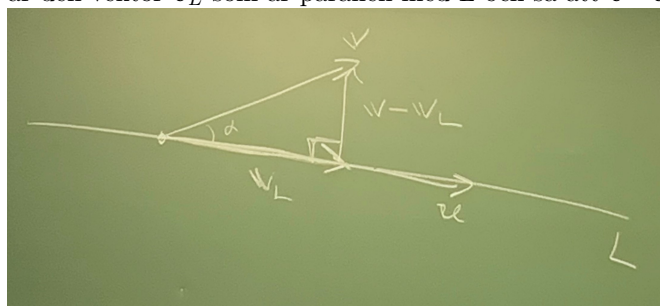


**Bevis** Eftersom  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$  så har  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  samma tecken som  $\cos(\alpha)$ . Så

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) > 0$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) < 0$

Påståendet följer av egenskaper för cosinus.  $\cos(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

**Definition** Låt  $\mathbf{v}$  vara en vektor och L en linje. Den ortogonala projektionen av  $\mathbf{v}$  på L är den vektor  $\mathbf{v}_L$  som är parallell med L och så att  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_L$  är ortogonal med L.



**Proposition 1.18** Låt  $\alpha$  och  $\mathbf{v}$  vara vektorer och L en linje med riktningsvektor  $\mathbf{u}$ . Då gäller att  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_L$

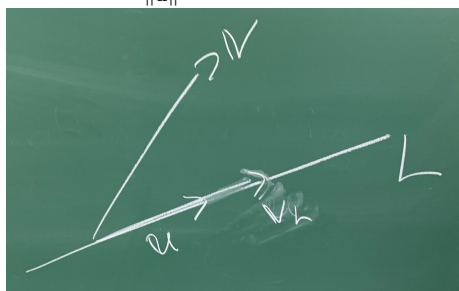
**Bevis** Låt  $\alpha$  vara vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ . Antag att  $\alpha$  är spetsig. Då  $\cos(\alpha) = \frac{\|\mathbf{v}_L\|}{\|\mathbf{v}\|}$ .

Vi får  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha) = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \frac{\|\mathbf{v}_L\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}_L\| \cos(0) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_L$  v.s.b

**Proposition 1.19**

1.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2.  $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
3.  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

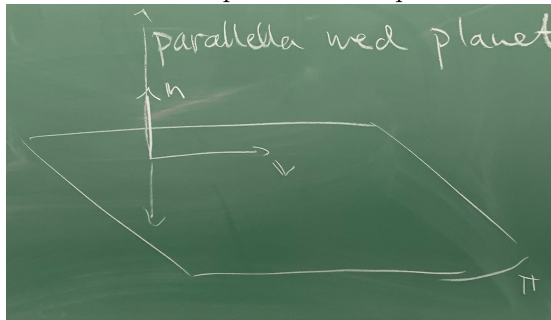
**Sats 1.20** Låt  $\mathbf{u}$  vara en riktningsvektor för linjen  $L$ . Då gäller att  $\mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$  och  $\|\mathbf{v}_L\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|^2}$ . Illustration:



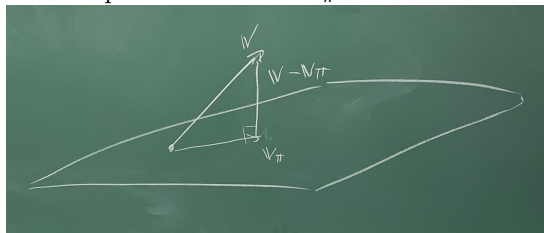
**Bevis** Vi vet att  $\mathbf{v}_L$  och  $\mathbf{u}$  är parallella och därför  $\mathbf{v}_L = t\mathbf{u}$  för något  $t \in \mathbb{R}$ .  
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_L = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{u}) \Rightarrow t = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ .  
 Alltså  $\mathbf{v}_L t\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$  och  $\|\mathbf{v}_L\| = \left\| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} \right\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|^2} \|\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}$

**Definition**

- En nollskild vektor  $\mathbf{n}$  är en normal till ett plan  $\pi$  om  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$  för alla vektorer  $\mathbf{v}$  som är parallella med planet.



- Givet en vektor  $\mathbf{v}$  så är den ortogonala projektionen av  $\mathbf{v}$  på  $\pi$ ,  $\mathbf{v}_\pi$ , den vektor i planet så att  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\pi$  är en normal till  $\pi$ .



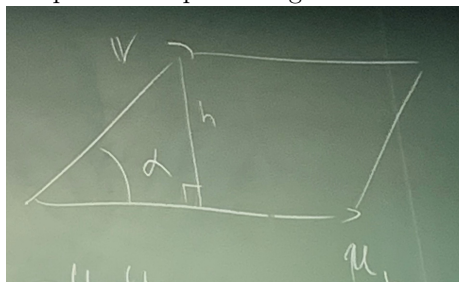
**Proposition 1.23**  $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_\pi = \mathbf{u}_\pi + \mathbf{v}_\pi$  (Inget bevis den här gången)

## 1.3 Vektorprodukten

När vi studerar vektorprodukter är det viktigt att våra vektorer är i rummet.

**Definition** En vektortrippel  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  sägs vara höger-orienterad om vyn från  $\mathbf{w}$ 's spets ger att den minsta vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  gett att  $\mathbf{u}$  vrids moturs mot  $\mathbf{v}$ . Annars sägs trippeln vara vänsterorienterad.

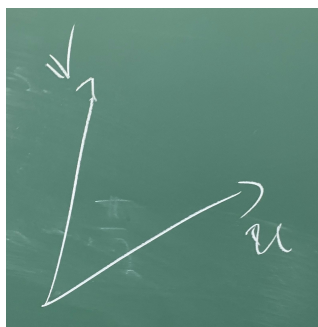
Givet två vektorer  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  så spänner de ett plan. Vi kan även se det som att de spänner ett parallelogram



Arean av detta parallelogram är  $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \sin(a)$ .

**Definition** Låt  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  vara två vektorer. Vektorprodukten (kryssprodukten) av dem är vektorn  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  så att

1.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$  om  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  är parallella
2.  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \sin(a)$
3.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  är ortogonal mot  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$
4.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$  är högerorienterad.



**Proposition 1.32**

1.  $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
2.  $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
3.  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$



## Chapter 2

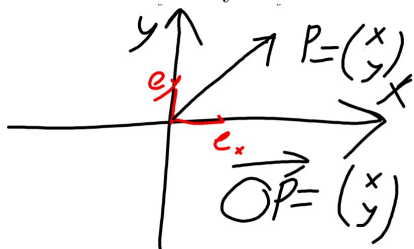
# Koordinatsystem (Avs. 1.5)

### 2.1 Koordinatsystem i ett plan

Vi inför ett koordinatsystem i planet som följer:

1. Vi fixerar en punkt O, som vi kallar origo
2. Vi väljer två vektorer  $e_x$  och  $e_y$  som är ortogonala mot varann, dvs vinkeln mellan dem är  $\frac{\pi}{2}$ . Varje vektor  $v$  i planet kan skrivas  $v = xe_x + ye_y$ .
3.  $x$  och  $y$  kallas för  $v$ 's koordinater med avseende på basen  $e_x, e_y$

Givet en bas skriver vi  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Om  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  säger vi att punkten P har koordinaterna  $x$  och  $y$ .



Den ortogonala projektionen av  $v$  på x-axeln ges av  $xe_x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 2.2 Koordinatsystem i ett rum

Vi inför ett koordinatsystem i rummet som följer.

1. Vi fixerar en punkt O, origo
2. Vi väljer tre enhetsvektorer  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  som är parvis ortogonala.

Vi skriver detta som  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. Vi kallar x,y,z för  $\mathbf{v}$ :s koordinater med avseende på basen  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ .

En bas  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  av enhetsvektorer och där vektorerna är parvis ortogonala kallas för en ON-bas (Orto Normal bas).

Om  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  så säger vi att punkten P har koordinaterna x,y,z,

alltså  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

Vi väljer (nästan alltid) en ON-Bas så att  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  är högerorienterad

**Proposition 1.37** Följande regler gäller för koordinaterna av vektorer:

1.  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$
2.  $c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$

**Sats 1.38** Om  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  i en ON-bas då är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

**Bevis**

standard

dab

Låt  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  vara ON-basen.

Då är  $\|\mathbf{e}_x\| = 1 = \|\mathbf{e}_y\| = \|\mathbf{e}_z\|$  och  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z$ .

Vi har dessutom att  $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{v} = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z) \cdot (x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z) = \\ &= x_1x_2\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x + y_1y_2\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y + z_1z_2\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = x_1x_2\|\mathbf{e}_x\|^2 + y_1y_2\|\mathbf{e}_y\|^2 + z_1z_2\|\mathbf{e}_z\|^2 = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \text{ v.s.b} \end{aligned}$$

**Ex** Beräkna vinkeln mellan  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Lösning** Låt  $\alpha$  vara vinkeln. Då är  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$

$$\begin{aligned} \text{Vi vet att } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 6 + 4 + 3 = 13 \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \\ &= \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26} \quad \text{Alltså: } \cos(\alpha) = \\ \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} &= \frac{13}{\sqrt{4} \sqrt{26}} = \frac{13 \sqrt{13}}{\sqrt{2} \sqrt{7} \sqrt{2} \sqrt{13} \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}} \quad \text{Därför är } \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}\right). \end{aligned}$$

**Sats 1.42** Om  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  i en högerorienterad ON-bas då är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

**Ex** Bestäm en vektor som är ortogonal mot både  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Lösning** Vi vet att  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  är ortogonal mot  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ !

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 4 \\ 9 - 10 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

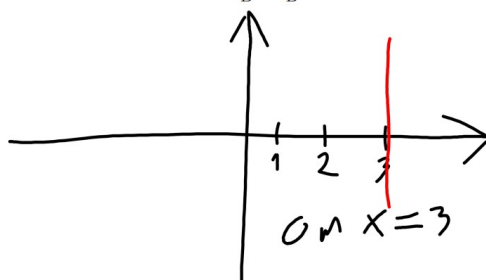
## Chapter 3

# Linjer och plan (Avsnitt 1.6)

### 3.0.1 Linjer

Samtliga linjer i planet går att beskriva med en ekvation på  $Ax + By + C = 0$ . Om  $B \neq 0$  så är det samma sak som  $By = -C - Ax \Leftrightarrow y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x$  så typ  $y = kx + m$

Exempelvis, vad är  $x=3$  för linje? Här är  $B = 0$ !



Y-axeln beskrivs av ekvationen  $x=0$ .

Hur bestäms en linje? Jo, en linje bestäms av en punkt  $P_0$  tillsammans med en riktningsvektor  $\mathbf{v}$ . Linjen ges då av alla  $x, y$  så att  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_0 + t\mathbf{v}$

Om vi har en linje given av  $Ax + By + C = 0$ , hur hittar vi en riktningsvektor?

**Ex** Bestäm en ekvation för den linje som går igenom  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Lösning** Vektorn  $\mathbf{v} = \overrightarrow{QP} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Linjen ges av:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$

### 3.1 Linjer i planet

Vi har sett att linjer i planet går att beskriva med en ekvation  $Ax + By + C = 0$ . Detta sägs vara linjens ekvation på normalform. Vektorn  $\begin{pmatrix} 0 \\ -C/B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C/A \\ -C/B \end{pmatrix}$  är en riktningsvektor. Men då är även  $\frac{AB}{C} \begin{pmatrix} C/A \\ -C/B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$  är en riktningsvektor! Men då är  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  en normal! Varför? Jo,  $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = BA + (-A)B = 0$ . En linje beskriven av ekvationen  $Ax + By + C = 0$  har  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  som en normal. Vektorn  $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$  är en riktningsvektor.

**Ex** En linje ges av  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ . Skriv linjen på normalform.

**Lösning** Vi vill bli av med  $t$ !

$$t = 1 - x \text{ och } 2t = y - 3 \Leftrightarrow t = \frac{y-3}{2}$$

$$\text{Alltså: } 1 - x = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{MISSADE LITE}$$

## Chapter 4

# Plan i rummet

Ett plan bestäms av en punkt och två icke-parallella vektorer som ligger i planet. Men ett plan bestäms också av en punkt samt en normalvektor. Vi kan exempelvis välja  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  som normal. Planets ekvation på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Här är  $s, t$  parametrar.

Antag att  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  är en normal till planet. Då är  $(x, y, z)$  en punkt planet

$$\Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

Alltså: Planet ges av  $Ax + By + Cz + D = 0$  där  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  är en normal till planet!/? Detta är planets ekvation på normalform!

**Ex** Punkterna  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  och  $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$  ligger på ett plan. Skriv ner planets ekvation på parameterform och på normalform.

### Lösning

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Planet på parameterform: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 3 + 2s + 5t \end{cases}$$

$$\text{En normal ges av } \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Planet ges av  $8x = 9y - 5z + D = 0$ . Punkten  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  ligger på planet!

$$8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow 26 - 15 + D = 0 \Leftrightarrow D = 15 - 26 = -11$$

Planets ekvation på normalform:  $8x + 9y - 5z - 11 = 0$

## 4.1 Avstånd från en punkt till en linje

Antag att vi har en linje L och en punkt P. Tag R på linjen och låt Q vara den punkt på L som är närmast P.

$$\text{Då är } \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP_L}. \quad d = \|\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RQ}\| = \|\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}\|$$

**Ex** Beräkna avståndet från  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  till linjen L som ges av  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Lösning** Låt  $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  En riktningsvek-

tor för linjen är  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  Då är  $\overrightarrow{RP_L} = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1+2}{1+4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d = \|\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + \frac{2^2}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{4+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

## 4.2 Avstånd från en punkt till ett plan

Låt  $\pi$  vara ett plan givet av  $Ax + By + Cz + D = 0$  och  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  någon punkt.

Tag  $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  i planet.

$$\text{N är en linje som är normal till } \pi. \quad d = \|\overrightarrow{P_0 P_N}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0 P_N} \cdot \mathbf{n}\|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \right\|}$$