Anteckningar TMV206 - Linjär Algebra

Krysset

January 31, 2022

Contents

Chapter 1

Geometriska vektorer

När man säger vektor menar man ofta en matris på formeln av en kolonnvektor, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ eller en radvektor, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Så kommer det även vara för oss. Men vi börjar med att diskutera geometriska vektorer.

Definition: En geometrisk vektor är ett objekt som har både storlek och riktning. Storleken av vektorn $\mathbb{V}$ betecknas $||\mathbb{V}||$ och kallas för vektorns längd. Det finns en vektor, nollvektorn $\mathbf{0}$, som har längd 0 men saknar riktining.
Vi tänker på en geometrisk vektor som en pil $\longrightarrow$
Men en pil har en start- och en slut-punkt. Det har inte vektorer. Vektorer vestäms av deras längd och riktning.

Definition: Vi säger att två vektorer är lika om de har samma längd och samma riktning.

Ex Vektorerna $\longrightarrow$ och $\rightarrow$ är inte lika för de har inte samma längd. De har dock samma riktning.
Vektorerna $\rightarrow$ och $\downarrow$ är inte lika. De har samma längd (kanske inte blir det i pdf:en) men inte samma riktning.
Vektorerna $\nearrow$ och $\nearrow$ är lika. De har samma längd och samma riktning. Start och slutpunkt spelar ingen roll!

Ex Hastighet är en vektor. I detta fall kallas storleken för fart (speed).

Givet två punkter A och B så betecknar $\overrightarrow{AB}$ vektron från A till B. $A \longrightarrow B$
Vi vill kunna räkna med vektorer, dvs göra vektoralgebra.

Definition: Givet en vektor $\boldsymbol{v}$ och ett tal $a \neq 0$ så är vektorn av den vektorn som uppfyller

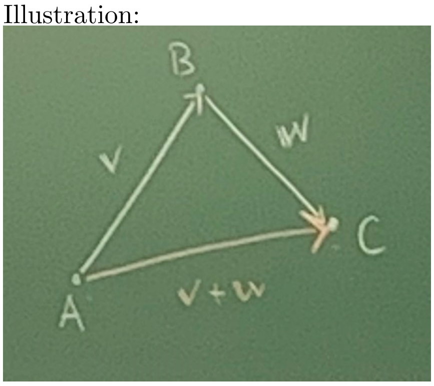
1. $||a \cdot \boldsymbol{v}|| = |a| \cdot ||\boldsymbol{v}||$
2. om $a > 0$ då har $a\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{v}$ samma riktning
3. om $a < 0$ då har $a\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{v}$ motsatt riktning

Vi låter $0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Ex Om vektorn $\boldsymbol{v}$ ges av $\nearrow$ då är $2\boldsymbol{v}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ och $(-1)\boldsymbol{v}$ vektornerna $\nearrow$ (dubbla längden) $\nearrow$ (halva längden) $\swarrow$

Ex Om $\boldsymbol{v}$ är en vektor med positiv längd, då är $\boldsymbol{w} = \frac{1}{||\boldsymbol{v}||}$ är en vektor med längd 1. Låt oss kolla detta: $||\boldsymbol{w}|| = ||\frac{1}{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = |\frac{1}{||\boldsymbol{v}||}| \cdot ||\boldsymbol{v}|| = \frac{1}{||\boldsymbol{v}||}||\boldsymbol{v}|| = 1$.
En vektor med längd 1 kallas för en <u>enhetsvektor</u>.

Definition: Om $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$ och $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{BC}$ då definierar <u>summan av $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$</u> som $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \overrightarrow{AC}$
Illustration:



Det är ingen inskränkning att anta att $\boldsymbol{w}$ börjar där $\boldsymbol{v}$ slutar eftersom vi får flytta vektorer.

1.0.1 Räkneregler

1. $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{v}$
2. $(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
3. $a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{w}$
4. $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}$
5. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

Räkneregel 5 gör att vi kan skippa paranteser när vi adderar flera vektorer.
Vi skriver $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

1.1 Linjärkombinationer

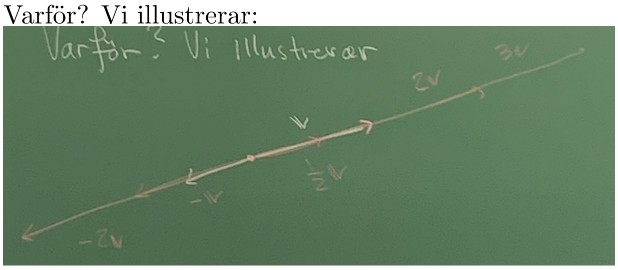
Definition Låt V vara en mängd vektorer och $v_1, ..., v_n \in V$. En vektor på formen $\boldsymbol{v} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$ sägs vara en linjärkombination av $v_1, v_2, ..., v_n$. Mängden av alla linjärkombinationer av vektorer från V kallas spannet av V och betecknas span(V).

Ex Givet $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ så är t.ex $2\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w}$ en linjärkombinationav $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$.

Ex Varje vektor $\boldsymbol{v}$ är en linjärkombination av sig själv, ty $v = 1 \cdot \boldsymbol{v}$

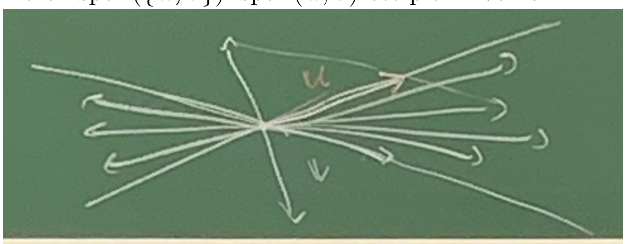
Ex Nollvektorn $\mathbf{0}$ är en linjärkombination av varje mängd $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorer, ty $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v_1} + 0v_2 + ... + 0v_n$.

Ex Låt $\boldsymbol{v}$ vara en noll-skild vektor. Då är span($\boldsymbol{v}$) (=span($\{\boldsymbol{v}\}$)) en linje. Varför? Vi illustrerar:



Varje sådan vektor $\boldsymbol{v}$ kallas för en riktningsvektor för linjen.

Ex Vi säger att två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella om de har samma eller motsatt riktning. Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två nollskilda och icke-parallella vektorer. Då är span($\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$)=span($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$) ett plan. Varför?



1.2 Skalärprodukten

Definition Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer och låt α vara den minsta vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Vi definierar skalärprodukten av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ genom
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha)$.
Observera att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ är ett tal (en skalär).

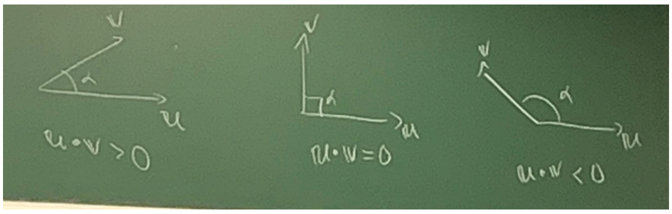
Ex $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = ||\boldsymbol{u}||^2 cos(0) = ||\boldsymbol{u}||^2$

Ex Vi har att (antag att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är nollskilda)
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala (vinkelräta)

Lösning $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow bmu, \boldsymbol{u}$ ortogonala

Proposition 1.16 Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara nollskilda vektorer och låt *alpha* vara vinkeln mellan dem. då gäller att

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha$ spetsig
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha$ rät
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0 \Leftrightarrow \alpha$ trubbig

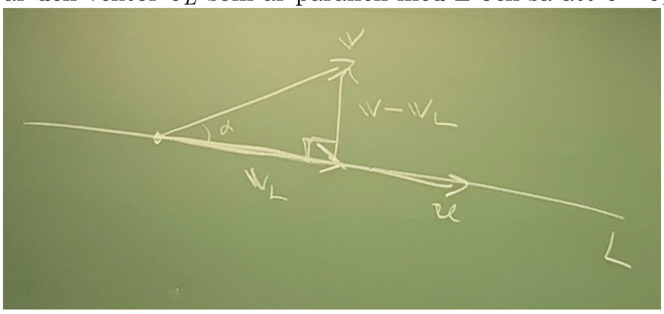


Bevis Eftersom $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha)$ så har $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ samma tecken som $cos(\alpha)$. Så

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) > 0$
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) = 0$
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) < 0$

Påståendet följer av egenskaper för cosinus. $cos(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Definition Låt $\boldsymbol{v}$ vara en vektor och L en linje. Den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på L är den vektor $\boldsymbol{v}_L$ som är parallell med L och så att $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_L$ är ortognal med L.



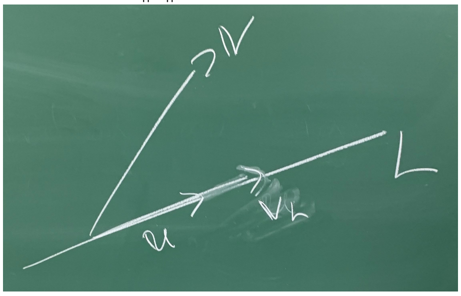
Proposition 1.18 Låt α och $\boldsymbol{v}$ vara vektorer och L en linje med riktningsvektor $\boldsymbol{u}$. Då gäller att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_L$

Bevis Låt α vara vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Antag att α är spetsig. Då $cos(\alpha) = \frac{||\boldsymbol{v}_L||}{||\boldsymbol{v}||}$.
Vi får $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha) = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cdot \frac{||\boldsymbol{v}_L||}{||\boldsymbol{v}||} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}_L|| cos(0) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_L$ v.s.b

Proposition 1.19

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
2. $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
3. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$

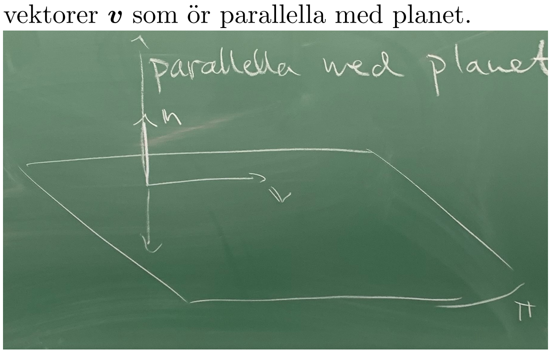
Sats 1.20 Låt $\boldsymbol{u}$ vara en riktningsvektor för linjen L. Då gäller att $\boldsymbol{v}_L = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ och $\|\boldsymbol{v}_L\| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\|}$. Illustration:



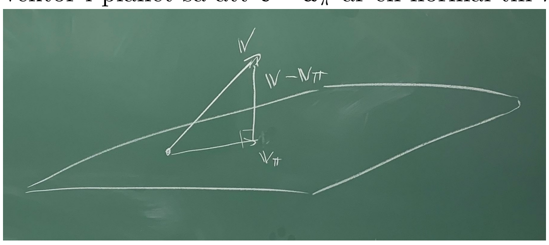
Bevis Vi vet att $\boldsymbol{v}_L$ och $\boldsymbol{u}$ är parallella och därför $\boldsymbol{v}_L = t\boldsymbol{u}$ för något $t \in \mathbb{R}$. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{u} \cdot (t\boldsymbol{u}) \Rightarrow t = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$.
Alltså $\boldsymbol{v}_L t\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ och $\|\boldsymbol{v}_L\| = \|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot v}{\|\boldsymbol{u}\| u^2}\|\boldsymbol{u}\| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\|}$

Definition

- En nollskild vektor $\boldsymbol{n}$ är en normal till ett plan π om $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ för alla vektorer $\boldsymbol{v}$ som ör parallella med planet.



- Givet en vektor $\boldsymbol{v}$ så är den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på π, $\boldsymbol{v}_\pi$, den vektor i planet så att $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\pi$ är en normal till π.

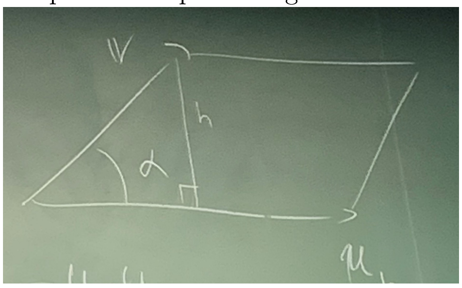


Proposition 1.23 $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})_\pi = \boldsymbol{u}_\pi + \boldsymbol{v}_\pi$ (Inget bevis den här gången)

1.3 Vektorprodukten

När vi studerar vektorprodukter är det viktigt att våra vektorer är i rummet.

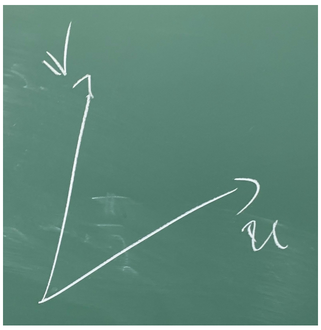
Definition En vektortrippel $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ sägs vara höger-orienterad om vyn från $\boldsymbol{w}$:s spets ger att den minsta vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ get att $\boldsymbol{u}$ vrids moturs mot $\boldsymbol{v}$. Annars sägs trippeln vara vänsterorienterad.
Givet två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ så spänner de ett plan. Vi kan även se det som att de spänner ett parallellogram



Arean av detta parallellogram är $||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| sin(a)$.

Definition Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer. Vektorprodukten (kryssprodukten) av dem är vektorn $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ så att

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$ om $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ är parallella
2. $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| sin(a)$
3. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ är högerorienterad.



Proposition 1.32

1. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$
2. $(c\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
3. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$

Chapter 2

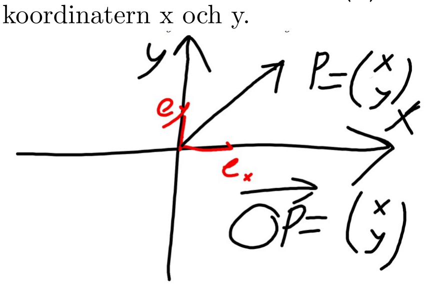
Koordinatsystem (Avs. 1.5)

2.1 Koordinatsystem i ett plan

Vi inför ett koordinatsystem i planet som följer:

1. Vi fixerar en punkt O, som vi kallar origo
2. Vi väljer två vektorer $\boldsymbol{e}_x$ och $\boldsymbol{e}_y$ som är ortogonala mot varann, dvs vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{2}$. Varje vektor $\boldsymbol{v}$ i planet kan skrivas $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$.
3. x och y kallas för $\boldsymbol{v}$:s koordinater med avseende på basen $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$

Givet en bas skriver vi $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Om $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ säger vi att punkten P har koordinatern x och y.



Den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på x-axeln ges av $x\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} x \\ O \end{pmatrix}$.

2.2 Koordinatsystem i ett rum

Vi inför ett koordinatsystem i rummet som följer.

1. Vi fixerar en punkt O, origo
2. Vi väljer tre enhetsvektorer $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ som är parvis ortogonala.

   Vi skriver detta som $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
3. Vi kallar x,y,z för $\boldsymbol{v}$:s koordinater med avseende på basen $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$.

En bas $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ av enhetsvektorer och där vektorerna är parvis ortogonala kallas för en ON-bas (Orto Normal bas).

Om $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ så säger vi att punkten P har koordinaterna x,y,z,

alltså $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$

Vi väljer (nästan alltid) en ON-Bas så att $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ är högerorienterad

Proposition 1.37 Följande regler gäller för koordinaterna av vektorer:

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$
2. $c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$

Sats 1.38 Om $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i en ON-bas då är

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$||\boldsymbol{u}||^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

Bevis

standard

dab

Låt $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ vara ON-basen.

Då är $||\boldsymbol{e}_x|| = 1 = ||\boldsymbol{e}_y|| = ||\boldsymbol{e}_z||$ och $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0 = \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z$.

Vi har dessutom att $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_x + y_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_z$

$\boldsymbol{v} = x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (x_1\boldsymbol{e}_x + y_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_z) \cdot (x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z) =$

$= x_1x_2\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x + y_1y_2\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y + z_1z_2\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = x_1x_2||\boldsymbol{e}_x||^2 + y_1y_2||\boldsymbol{e}_y||^2 + z_1z_2||\boldsymbol{e}_z||^2 =$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ v.s.b

Ex Beräkna vinkeln mellan $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning Låt α vara vinkeln. Då är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha)$
Vi vet att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 6 + 4 + 3 = 13$ $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$ Alltså: $cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||} = \frac{13}{\sqrt{4}\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{2}\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$ Därför är $\alpha = arccos(\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$.

Sats 1.42 Om $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i en högerorienterad ON-bas då är
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

Ex Bestäm en vektor som är ortogonal mot både $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösning Vi vet att $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$!
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 4 \\ 9 - 16 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

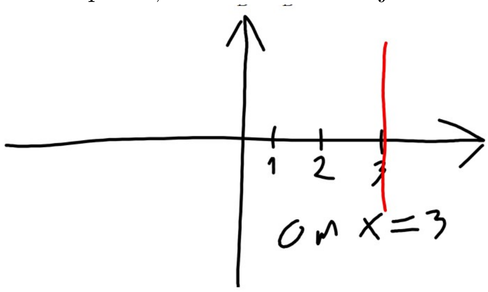
Chapter 3

Linjer och plan (Avsnitt 1.6)

3.0.1 Linjer

Samtliga linjer i planet går att beskriva med en ekvation på $Ax + By + C = 0$. Om $B \neq 0$ så är det samma sak som $By = -C - Ax \Leftrightarrow y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x$ så typ $y = kx + m$

Exempelvis, vad är x=3 för linje? Här är $B = 0$!



Y-axeln beskrivs av ekvationen x=0.

Hur bestäms en linje? Jo, en linje bestäms av en punkt P_0 tillsammans med en riktningsvektor $\boldsymbol{v}$. Linjen ges då av alla $x_1 y$ så att $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_0 + t\boldsymbol{v}$

Om vi har en linje given av $Ax + By + C = 0$, hur hittar vi en riktningsvektor?

Ex Bestäm en ekvation för den linje som går igenom $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning Vektorn $v = \overrightarrow{QP} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Linjen ges av: $\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$

3.1 Linjer i planet

Vi har sett att linjer i planet går att beskriva med en ekvation $Ax + By + C = 0$. Detta sägs vara <u>linjens ekvation på normalform</u>. Vektorn $\begin{pmatrix} 0 \\ -C/B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C/A \\ -C/B \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor. Men då är även $\frac{AB}{C}\begin{pmatrix} C/A \\ -C/B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor! Men då är $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ en normal! Varför? Jo, $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = BA + (-A)B = 0$ En linje beskriven av ekvationen $Ax + By + C = 0$ har $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ som en normal. Vektorn $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor.

Ex En linje ges av $\begin{Bmatrix} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{Bmatrix}$. Skriv linjen på normalform.

Lösning Vi vill bli av med t!
$t = 1 - x$ och $2t = y - 3 \Leftrightarrow t = \frac{y-3}{2}$
Alltså: $1 - x = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow x + \frac{y}{x} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$ MISSADE LITE

Chapter 4

Plan i rummet

Ett plan bestäms av en punkt och två icke-parallella vektorer som ligger i planet. Men ett plan bestäms också av en punkt samt en normalvektor. Vi kan exempelvis välja $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ som normal. Planets ekvation på parameterform:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$
Här är s,t parametrar.
Antag att $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ är en normal till planet. Då är (x, y, z) en punkt planet
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$
Alltså: Planet ges av $Ax + By + Cz + D = 0$ där $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ är en normal till planet!/? Detta är planets ekvation på normalform!

Ex Punkterna $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ligger på ett plan. Skriv ner planets ekvation på parameterform och på normalform.

Lösning

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$
Planet på parameterform: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 - s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 3 + 2d + 5t \end{array} \right\}$

En normal ges ava $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

Planet ges av $8x = 9y - 5z + D = 0$. Punkten $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ liggger på planet!

$8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow 26 - 15 + D = 0 \Leftrightarrow D = 15 - 26 = -11$
Planets ekvation på normalform: $8x + 9y - 5z - 11 = 0$

4.1 Avstånd från en punkt till en linje

Antag att vi har en linje L och en punkt P. Tag R på linjen och låt Q vara den punkt på L som är närmast P.

Då är $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP_L}$. $d = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RQ}|| = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}||$

Ex Beräkna avståndet från $P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ till linjen L som ges av $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Lösning Låt $R = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ En riktningsvektor för linjen ör $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ Då är $\overrightarrow{RP_L} = \frac{\overrightarrow{RP}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1+2}{1+4}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$d = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}|| = ||\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{5} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{5}\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}|| = \sqrt{0^2 + \frac{2}{5}^2 + (-\frac{1}{5})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{4+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

4.2 Avstånd från en punkt till ett plan

Låt π vara ett plan givet av $Ax + By + Cz + D = 0$ och $P = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ någon punkt.

Tag $P_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ i planet.

N är en linje som är normal till π. $d = ||\overrightarrow{P_0P_N}|| = \frac{||\overrightarrow{P_0P_N}\cdot\boldsymbol{n}||}{||\boldsymbol{n}||} = \frac{||\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}||}{||\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}||}$

Chapter 5

Matrisoperationer

Definition En matris är ett tvådimensionellt fält av reella tal. Om matrisen har m rader och n kolumner sägs det vara en $(m \times n)$-matris, eller en matris av typ $m \times n$. $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \vdots & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$ Matriser av samma typ adderas komponentvis. Exempelvis:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+8 \\ 4+6 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ Matriser av olika typ adderas inte! Vi har sett exempel på matriser i kolonnvektorer. En matris på formen $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ är en radvektor.

Produkten av en matris med ett reellt tal definieras också ”komponentvis”. Exempelvis:
$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$

Definition Givet en 3×3-matris $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ och en (kolumn)vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ definierar vi deras produkt som

Proposition 2.11

1. $A + B = B + A$
2. $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) =$
3. $(A + B)\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{v}$
4. $A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v}) = (cA)\boldsymbol{v}$

5.1 Produkter av matriser

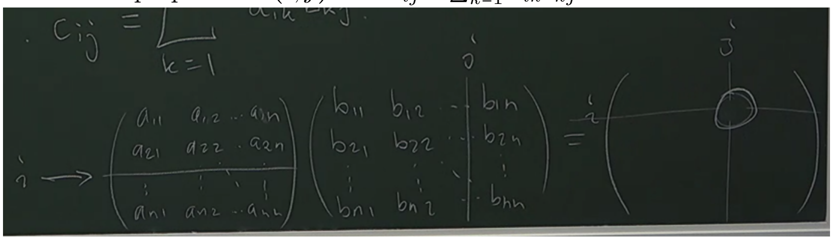
Definition Låt A och B vara 3×3-matriser och $B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

Vi definierar produkten av A och B genom $AB = A \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & A\boldsymbol{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

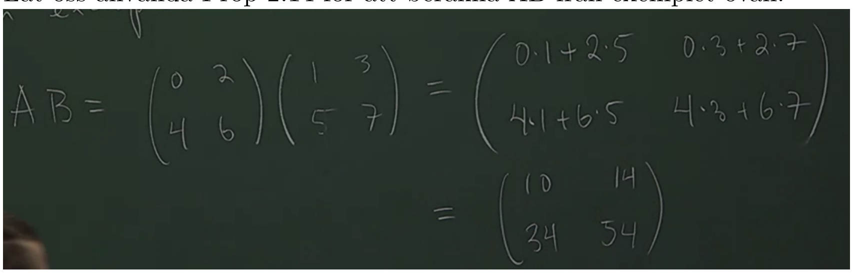
Ex Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Beräkna AB och BA.

Lösning $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 34 & 54 \end{pmatrix}$

Proposition 2.14 Låt A och B vara $n \times n$-matriser där A på position (i,j) har talet a_{ij} och B på position (i,j) har talet b_{ij}. Låt $C = AB$ och låt c_{ij} vara talet för C på position (i,j). Då $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.



Låt oss använda Prop 2.14 för att beräkna AB från exemplet ovan:



Propostion 2.16 Låt A, B, C vara $n \times n$-matriser.

1. $A(cB) = c(AB) = (cA)B$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $A(B\boldsymbol{v}) = (AB)\boldsymbol{v}$
5. $A(BC) = (AB)C$

Kom ihåg att $AB \neq BA$!

Definition Givet en $m \times n$-matris A så ges dess transponat,A^t, av den $n \times m$-matris av att $a_{ij}^t = a_{ji}$.

Ex Om $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ då $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

Definition En $n \times n$-matris A sägs vara symmetrisk om $A^t = A$.

Ex Matriserna $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \\ -1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ är symmetriska.

Proposition 2.21 Låt A,B vara $n \times n$-matriser.

1. $(a^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(cA)^t = cA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

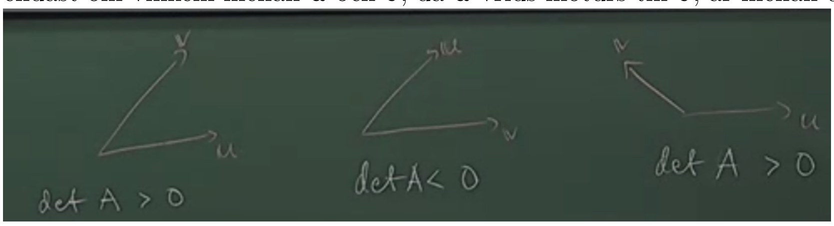
Chapter 6

Determinanter (Avs. 2.2)

Definition Givet en 2×2-matris $a = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ låter vi dess <u>determinant</u> vara $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Ex Om $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ då är $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2$. Om vi låter $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ då är arean av parallellogramet som $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ spänner 2.

Sats 2.24 Låt $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och låte D vara parallellogramet som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Då är $|det(A)| = area(D)$. Dessutom är $det(A) > 0$ om och endast om vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, då $\boldsymbol{u}$ vrids moturs till $\boldsymbol{v}$, är mellan 0 och π.



Bevis Vad är $area(D)$? Låt L vara en linje som är ortogonal mot $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.
Då är $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$ en riktningsvektor för L ty $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

$area(D) = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}_L|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot \frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{||\boldsymbol{r}^2||} \cdot ||\boldsymbol{r}|| = \frac{||\boldsymbol{u}||}{||\boldsymbol{r}||}|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{c^2+(-a)^2}}|\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}| = bc - da| = |ad - bc = |det(A)|$

Observera att Sats 2.24 speciellt ger att $det(A) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ parallella

Definition Låt $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$. Då ges dess determinant av $det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)$

En minnesregel för kryssprodukt:
$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ i e_x, e_y, e_z. Då ges $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_x(u_2v_3 - v_2u_3) - e_y(u_1v_3 - v_1u_3) + e_z(u_1v_2 - v_1u_2)$