MVE045 - Matematisk Analys

Max "Krysset" Hagman

September 27, 2022

Contents

Chapter 1

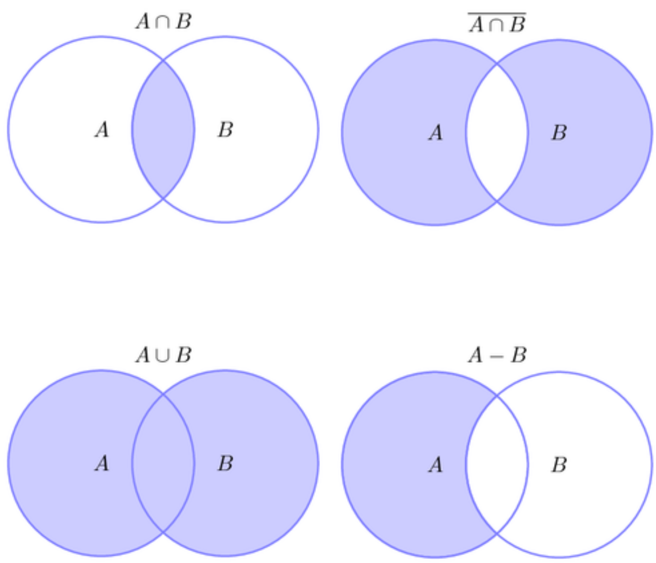
Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentallt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för element.

En mängd A bestående av elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ skrivs som $A = [a_1, a_2, ..., a_3]$. Om A och B är två olika mängder så betecknar $A \cup B$ alla element som tillhör A eller B. $A \cap B$ alla element som tillhör A och B. Konstruktionen $A \cup B$ kallas för unionen av A och B och $A \cap B$ kallas för snittet.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade venndiagram:



Ett par saker till

- $\varnothing = \{\}$, den tomma mängden
- A^c alla element som inte finns i A (kallas komplementet)
-

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matetmatik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{..., -2-, -1, 0, 1, 2, ...\}$ heltalen
- $\mathbb{Q} = \{$Alla talen på formen $\frac{p}{q}\}$, där $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
- $\mathbb{R} = \{$Alla decimaltal$\}$ de reella talen
- $\mathbb{C} = \{$alla tal $a + ib\}$, de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ speciellt i fokus.

Chapter 2

Intervall

Ett intervall är en delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och alla tal mellan två av sina element.
Mer konkret:

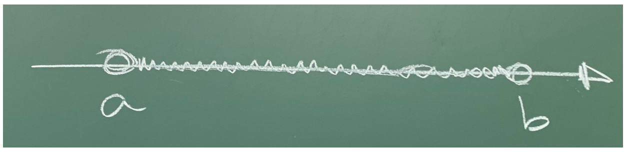


Figure 2.1: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ skrivs (a, b)

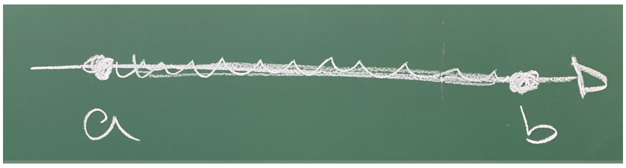


Figure 2.2: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,]$

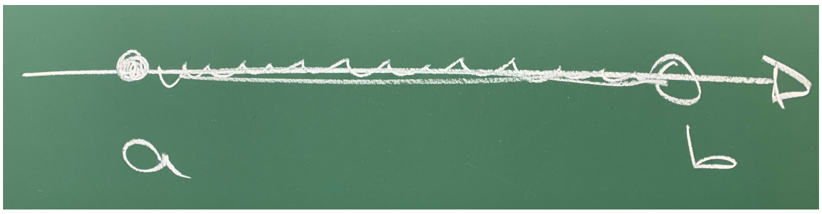


Figure 2.3: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,)$

Ex Lös olikheten $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$ och uttryck svaret som ett intervall eller en union av flera intervall.

Lösning Måste försöka skriva om olikheten till faktoriserad form!

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4+x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$$

Hitta nollställena till $x^2 - 2x - 8$ genom kvadratkomplettering!

$x^2-2x-8 = 0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot 1\cdot x+1-1-8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-9 = 0 \Leftrightarrow x = 1\pm\sqrt{9} = 1\pm 3 \Leftrightarrow x = 4$ eller $x = -2$

Kan nu skriva om $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ som $\frac{(x-4)(x+2)}{2x} \geq 0$. Härifrån kan man använda metoden med teckenstudium:

		-2		0		4	
$\frac{1}{2}x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Tot	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ser att $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ uppfylls i intervallen $[-2,0]$ och $[4,\infty)$ och kan skriva lösningen som $[-2,0) \cup [4,\infty)$.

Absolutbelopp Absolutbelopp av ett tal $x \in \mathbb{R}$ definieras som:

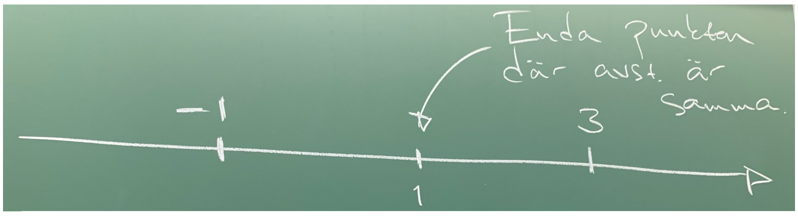
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

Följande tolkning gäller: Givet ett tal $a \in \mathbb{R}$ så gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $|x-a| =$ avståndet mellan x och a.

Vidare gäller också, givet ett fixt tal $D \geq 0$, att $|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow$ mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ vars avst. till a är $\overset{<}{\underset{>}{=}} D$, dvs $|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow \begin{array}{c} a-D < x < a+D \\ x = a-D \\ x < a-D, x > a+D \end{array}$

Ex (P1.41)
Lös olikheten $|x+1| > |x-3|$ genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

Lösning
$|x+1| = |x-(-1)|$ = ”avst mellan x och (-1)”
$|x-3|$ = ”avst. mellan x och 3”
Så ”avst. mellan x och (-1)” > ”avst. mellan x och 3”
Till höger om 1 så kommer x alltid att vara längre från (-1) än 3.



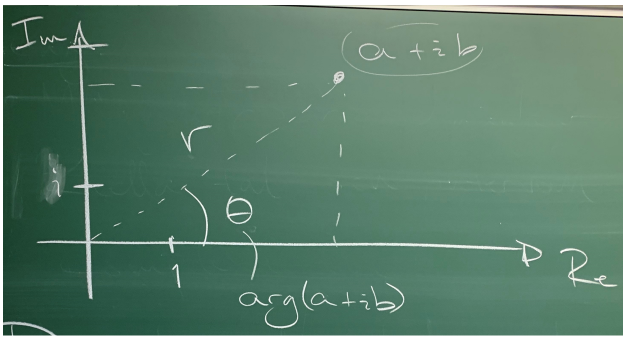
Chapter 3

Komplexa tal

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan alltid skrivas på formen $z = a + i \cdot b$ där

- a kallas för realdelen av z $Re(z)$
- b kallas för imaginärdelen av z $Im(z)$

Den imaginära enheten i löser definitionsmässigt ekv. $x^2+1 = 0$, dvs $i = \sqrt{-1}$. Rent visuellt kan man betrakta ett komplext tal $a + ib$ som en punkt i det komplexa talplanet.
Det gäller att $r^2 = |a + ib|^2 = \vdots = a^2 + b^2$. Givet r och argumentet θ kan alla kompexa tal skrivas $z = r(cos(\theta) + i \cdot sin(\theta))$



Chapter 4

Funktioner

4.1 Funktioner och funktionsgrafer

En funktion beskriver sambandet mellan in- och ut-data och kan bidra till ökad förståelse av hur olika processer hänger ihop. Klassisk machine learning handlar mycket om att just hitta bra funktioner för att relatera in- och ut-data (supervised learning).

I envariabelanalys studeras funktioner som relaterar ett tal till ett annat. Kan tänkas som en "regel" f som avbildar ett givet tal x till ett annat tal y.

Alla de värdena som är tillåtna att mata in i f kallas för funktionens definitionsmängd och betecknas $D(f)$. Mängden av alla y-värden som funktionen kan leverera kallas för värdemängden och skrivs $R(f)$ (range).

Ex Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ har $D(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$.

En funktionsgraf (eller bara en graf) givet en funktion f utgörs av alla punkter $(x,y) = (x, f(x))$. Några viktiga concept:

- En funktion sägs vara jämn om $f(-x) = f(x)$ då $(x \in D(f))$.
  Betyder att f är symmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion sägs vara udda om $f(-x) = -f(x)$.
  Betyder att f är antispegelsymmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion är injektiv om det för varje par $x_1, x_2 \in D(f)$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.
- En funktion f som avbildar en mängd tal $\boldsymbol{x}$ på en annan mängd $\boldsymbol{y}$, dvs $f : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ sägs vara surjektiv om $\boldsymbol{y} = R(f)$.

4.2 Kompositioner

En vanlig konstruktion är att kombinera två separata funktioner till en ny genom komposition. Kan göras på två sätt:

1. $f \circ g(x) := f(g(x))$

2. $g \circ f(x) \coloneqq g(f(x))$

Notera att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet!

Chapter 5

Polynom och rationella funktioner

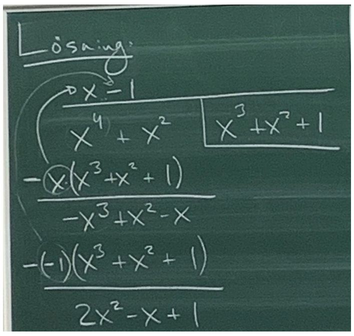
Ett polynom är en funktion som kan skrivas som: $P(x) = a_1 \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + ax + a_0$ där $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}$ kallas för polynomets koefficienter och talet n (positivt heltal) kallas för polynomets grad. En rationell funktion $R(x)$ är en funktion som kan skrivas som en kvot på två polynom $P(x)$ och $Q(x)$, dvs $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Definitionsmängden $D(R)$ begränsas enbart av nollställena till $Q(x)$, dvs. $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

5.1 Polynomdivision

Rationella tal kan alltid skrivas som en heltalsdel + rest:
$\frac{29}{6} = \frac{4*6+5}{6} = \frac{4*6}{6} + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$
Motsv. funkar även för rationella funktioner och metoden för att hita "heltalsdelen" och "resten" kalla polynomdivison.

Ex (P6.18) Uttryck $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$ som summan av ett polynom och en rationell funktion.

Lösning



Eftersom polynomet $2x^2 - x + 1$ har lägre grad än nämnaren $x^3 + x^2 + 1$ tar divisionsalgo. slut. Vi har fått att $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1} = (x-1) + \frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2+1}$ $\square$.

Enligt Aritmetikens fundamentalsats så kan alla positiva heltal alltid skrivas som en unik faktorisering av primtal, t.ex $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Liknande resultat finns för polynom! Algebrans fundementsats säger att varje polynom av grad n har exakt n st. nollställen (ev. komplexa och räknade med multiplicitet). Vidare gäller också faktorsatsen:

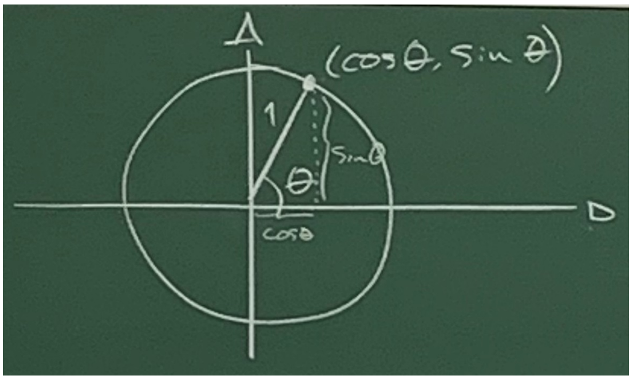
Sats Talet r är en rot (dvs ett nollställe) till ett polynom P av grad minst 1 om och endast om $(x-r)$ är en faktor av $P(x)$.

Eftersom alla polynom P av grad ≥ 1 har precis n st. nollställen säg $r_1, ..., r_n$ kan man alltid faktorisera ett polynom som $P(x) = (x-r_1) \cdot (x-r_2) \cdot ... \cdot (x-r_n)$.

Chapter 6

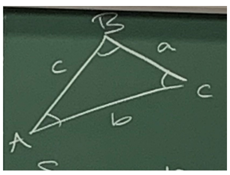
Grundläggande trigonometri

De trigonometriska frunktionererna $\cos\theta$ och $\sin\theta$ def. som x- respektive y-koordinaten på den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln θ. Pythago-



ras sats ger omedelbart att $\cos^2\theta + \sin\theta = 1$, även kallat trigonometriska ettan. Vinkeln θ mäts oftast i radianer men kan också mätas i geader. Det gäller att π radianer motsvarar $180°$ grader.

Utifrån sin och cos definieras vidare funktionen tangens som $tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Två trigonometriska samband som är viktiga är sinus- och cosinus-satsen:

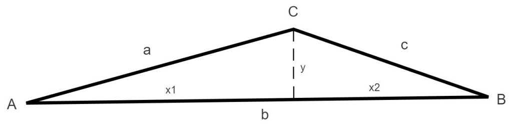


Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos A$

Ex (P6.53) Visa att arean på en godtycklig triangel ABC kan beräknas som $\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$.

Lösning Area= $\frac{x_z \cdot y}{2} + \frac{x_2 \cdot y}{2} = \frac{x_1 \cdot y + x_2 \cdot y}{2}$. Men $\sin A = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot \sin A \Rightarrow$ $Area = \frac{x_1 \cdot c \sin A + x_2 c \sin A}{2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot c \cdot \sin A}{2} = \{x_1 + x_2 = b\} = \frac{1}{2}bc \sin A$. De andra formulerna följer analogt. $\square$



Chapter 7

Talföljder och gränsvärden

Studium av talföljder är ett av matematikens mest klassiska områden. Vi har exempelvis:

- Fibonacci-talföljden, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$, återfinns i olika sammanhang i naturen.
- Primtalssekvensen, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$, finns formel för att beskriva sekvensen? (olöst)

Ska försöka formalisera begreppen i synnerhet för oändligt långa talföljder.
Låt $\{a_1, a_2, a_3, ...\} = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ vara en godtycklig talföljd. Man säger att $\{a_n\}$ är:

- Begränsad ovan-/underifrån om det finns ett tal L sådant att $a_n \leq L/a_n \geq L \ \forall n = 1, 2, 3, ...$
- Begränsad om den är begränsad både ovan- och underifrån.
- Positiv/Negativ om $a_n \geq 0/a_n \leq 0, \forall n = 1, 2, ...$
- Växande/Avtagande om $a_{n+1} \geq a_n/a_{n+1} \leq a_n, \forall n = 1, 2, 3, ...$
- Monoton om talföljden är antingen växande eller avtagande
- Alternerande om $a_{n+1} \cdot a_n < 0, \forall n = 1, 2, 3, ...$

Ett viktigt begrepp för talföljder (och funktioner) är konvergens, dvs. om talföljden "stannar av" och håller sig oförändrad om man bara kollar tillräckligt långt in i följden (dvs. n stort). Måste försöka precisera vad detta betyder ren matematiskt.

Definition Konvergent talföld
Man säger att en talföljd a_n konvergerar mot $L \in \mathbb{R}$ och skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, om det för varhe positivt tal $\varepsilon > 0$ existerar ett positivt heltal N så att det för alla $n \leq N$ gäller att $|a_n - L| \leq \varepsilon$.

Intuitivt $\{a_n\}$ konvergerar mot L om alla tal tillräckligt långt in i följden ligger godtyckligt nära talet L. Av detta följder "enkelt" att:

- om $\{a_n\}$ konvergerar så är den begränsad.
- om $\{a_n\}$ är begränsad ovanifrån och växande så är $\{a_n\}$ konvergent. Motsvarande för begränsad underifrån och avtagande.

Bra räknelagar:

- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, om $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- om $a_n \leq b_n \leq c_n$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ex (9.1.25) Bestäm om möjligt det tal L som $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$ konvergerar mot då $n \to \infty$

Lösning Det gäller att

$$\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2-1} = \sqrt{(n+1)\cdot n} - \sqrt{(n+1)(n-1)} = \sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) =$$

$$\sqrt{n+1}\cdot\frac{(\sqrt{n}\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n+1}\cdot\frac{(n-(n-1))}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$\text{och } \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2(n-1)} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{2(n-1)} =$$

$$\frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{n})}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}$$

så $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2}\square$

Ett av de mest kraftfulla verktygen inom matematisk analys är gränsvärden för funktioner, dvs $\lim_{x\to a} f(x), a \in \mathbb{R}$. Det ger oss derivator, integraler, differentialekvationer, ... Hur ska man definiera gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$? Skulle kunna inspireras av definitionen för talföljder.

Definition (försök) Man säger att $f(x)$ konvergerar mot värdet $L \in \mathbb{R}$ då x går mot $a \in \mathbb{R}$ om det för varje talföljd $\{x_n\}$ s.a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$.

Bättre definition i liknande riktning är dock.

Definition Man säger att $f(x)$ går mot gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ då x går mot $a \in \mathbb{R}$ och skriver $\lim_{x\to a} f(x) = L$, om det för varje tal $\varepsilon > 0$ existerar ett annat tal $\delta > 0$ (som ev. beror av ε) s.a. om $0 < |x-a| < \delta$ så ligger x i fs definitionsmängd och $|f(x)-L| < varepsilon$.

Ex

1. $f \to L_1$, när $x \to a_1$? Ja! Går alltid att hitta $\delta > 0$ s.a. $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ oavsett ε.

2. $f \to L_2$, när $x \to a_1$? Omöjligt att hitta $\delta > 0$ s.a. $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ om ε litet.

Ex (1.5.19) Använd definitionen av gränsvärde för att bevisa att

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$$

Lösning Vill hitta $\delta > 0$ så att $|\sqrt{x}-1| < \varepsilon$ så länge som $0 < |x-1| < \delta$ (givet vilket $\varepsilon > 0$ som helst). Gäller att $|\sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1+\varepsilon$. $\begin{cases} \text{Om } 0 < \varepsilon < \sqrt{x} \leq 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2 \\ \text{Om } \varepsilon > 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < x < (1+\varepsilon)^2 \end{cases}$ Notera att $(1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2$ alltid implicerar att $1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$ dvs $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.

$(1-\varepsilon)^2 < x < (1-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^3 < x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -\varepsilon(2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2+\varepsilon)$

så

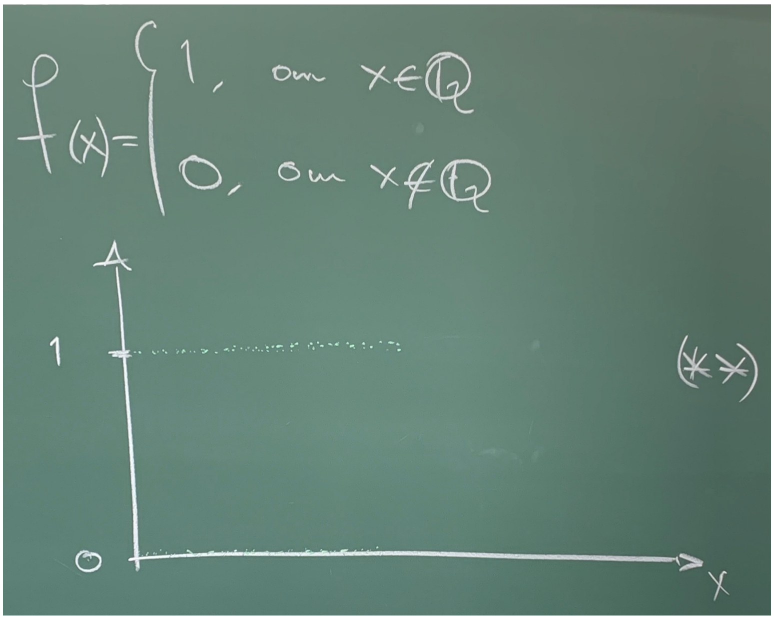
$$-\varepsilon \cdot (2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2-\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon(2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon(2+\varepsilon)$$

om $\varepsilon < 2$. Välj därför $\delta = \varepsilon \cdot (2-\varepsilon)$ om $\varepsilon < 2$. För $\varepsilon \leq 2$, välj t.ex $\delta = 1$ eftersom $|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt{x} - 1 < 2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < 2 \leq \varepsilon\square$

7.1 Kontinuitet

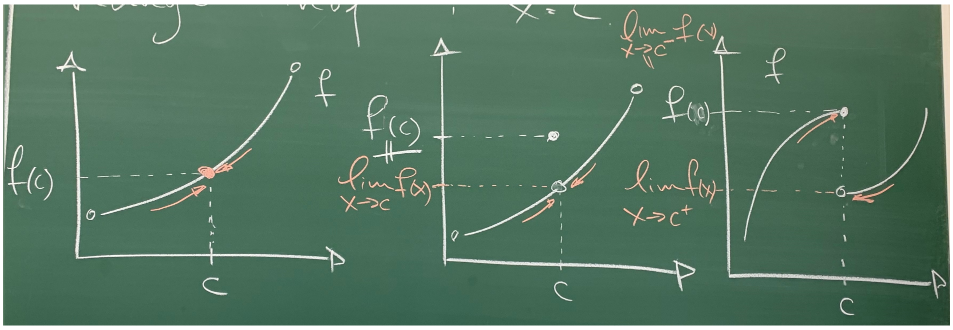
Matematisk analys handlar om studier av funktioner (och ekvationer) definierade på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.
Frågeställningar och intuition för ämnet hämtas ofta från fysik/teknik där funktioner bär på någon form av information.
Vår definition av funktion är att det är "en regel" som avbildar ett tal x i en given definitionsmängd $D(f)$ till ett annat tal y i en värdemängd. Gruppen av sådana regler är enorm, dvs. det finns ett ouppräkneligt antal möjliga funktioner, och de flesta av dom skulle inte vara användabara för modellering av verkliga system.

Ex $f(x) = \begin{matrix} 1, \text{ om } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ om } x \notin \mathbb{Q} \end{matrix}$ (Dirichlet-funktionen)



Om man drar en funktion slumpmässigt från mängden av alla funktioner så skulle man nästan säkert dra något i stil med dirichlet funktionen. Måste därför hitta vettig begränsad klass av funktioner för att kunna hitta meningsfulla matematiska resultat. En sådan klass är de kontinuerliga funktionerna.

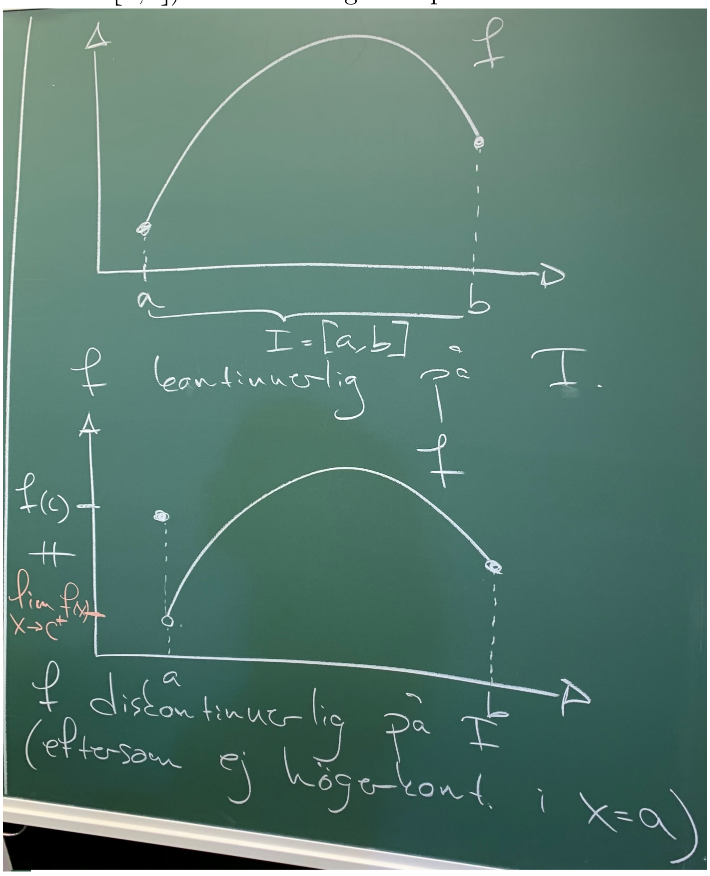
Definition (Kontinuerlig funktion) Man säger att en funktion f är kontinuerlig i punkten $x = c$ (som antas vara en mindre punkt i $D(f)$) om $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Om antingen $\lim_{x\to c} f(x)$ inte existerar eller existerar men inte är lika med $f(c)$ säger man att f är diskontinuerlig i $x = c$. Vad betyder detta? Jo, det betyder att "funktionen hänger ihop" i $x = c$.



Man säger att en funktion f är kontinuerlig på ett helt intervall I om f är kontinuerlig i varje punkt $x \in I$.
Hur hanterar man ändpunkterna i I? Till exempel om $I = [a, b]$, vad ska gäla för $x \to a$ och $x = b$? Jo, f ska vara högerkontinuerlig i $x = a$ och vänsterkontinuerlig i $x = b$.

- Man säger att en funktion f är vänsterkontinuerlig i en punkt $x = c$ om $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$.
- Man säger att en funktion f är högerkontinuerlig i en punkt $x = c$ om $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$.

Så, f benämns som kontinuerlig i randpunkter till ett intervall (till exempel a och b för $[a, b]$) om den är höger- respektive vänsterkontinuerlig.



Ex (1.4.9) Beskriv var i sin definitionsmängd som följande funktion är kontinuerlig, vänster- respektive högerkontinuerlig och diskontinuerlig.

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{1}{x^2}, \text{ om } x \neq 0 \\ 0, \text{ om } x = 0 \end{matrix}$$

Lösning Försök att skissa funktionen.

- funktionen $\frac{1}{x^2}$ är alltid positiv
- Om x är <u>stort</u> (antingen positivt eller negativt) så är $\frac{1}{x^2} \approx 0^+$
- Om x är nära 0 (antingen positivt eller negativt) så är $\frac{1}{x^2} \approx +\infty$
- Uppenbart tt $\frac{1}{x^2}$ är växande på $(-\infty, 0)$ och avtagande på $(0, \infty)$.

Alltså, f är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eftersom $\lim_{x \to a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} = f(x)$ för alla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I $x = 0$ är f diskontinuerlig eftersom $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ och $f(0) = 0$ och $0 \neq \infty\square$

Ex (1.4.16) Hur ska man definiera funktionen $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-4}$ i punkten $x = \sqrt{2}$ för att den ska bli kontinuerlig där?

Lösning Vad händer i $x = \sqrt{2}$?

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}^2 - 2}{\sqrt{2}^4 - 4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}???$$

Vill studera gränsvärdet $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}^2 - 2}{\sqrt{2}^4 - 4} = \frac{x^2 - 2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+2} \xrightarrow{\quad} x \to \sqrt{2} \ \frac{1}{4}$$

Vi ser att f kan naturligt definieras i punkten $x = \sqrt{2}$ även om det inte var uppenbart från början. Genom att sätta $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$ så blir funktionen kontinuerlig i $x = \sqrt{2}$, dvs. $f(x) = \begin{matrix} \frac{x^2-2}{x^4-4}, \text{ om } x \neq \sqrt{2} \\ \frac{1}{4}, \text{ om } x = \sqrt{2} \end{matrix}\square$

Ex (1.5.3) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|}$$

Lösning Måste reda ut hur det olika absolutbeloppen beter sig i en omgivning av $x = 3$.

$$|5-2x| = \begin{array}{c} 5-2x \text{ om } 5-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} = 2,5 \\ -(5-2x) \text{ om } 5-2x < 0 \Leftrightarrow x > 2,5 \end{array}$$

$$|x-2| = \begin{array}{c} x-2 \text{ om } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -(x-2) \text{ om } x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{array}$$

$$|x-5| = \begin{array}{c} x-5 \text{ om } x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \\ -(x-5) \text{ om } x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \end{array}$$

$$|3x-7| = \begin{array}{c} 3x-7 \text{ om } 3x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3} \approx 2,33 \\ -(3x-7) \text{ om } 3x-7 < 0 \Leftrightarrow x < 2,33 \end{array}$$

Vi kan alltså skriva gränsvärdet som:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-5-x+2}{5-x-3x+7} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4x+12} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4(x-3)} = \frac{1}{4} \square$$

Är alla kontinuerliga funktioner "välartade" och alltid lämpliga för att beskriva något slags verklighet?
Nej.

- Finns massa verkliga situationer som kräver diskontinuerliga funktioner för att kunna beskrivas.
- finns väldigt "konstiga" kontinuerliga funktioner.

Lite grundläggande egenskaper för kontinuerliga funktioner.
Om f och g är två kontinuerliga funktioner i $c \in \mathbb{R}$ så gäller att:

- $f+g$, $f-g$ och $f \cdot g$ är kontinuerliga i $x=c$ och $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ om $g(c)$ respektive $f(c) \neq 0$
- $k \cdot f$ är kontinuerlig i $x=c$ för alla konstanter $k \in \mathbb{R}$.
- $(f)^{\frac{1}{n}}$ är kontinuerlig i $x=c, n \in \mathbb{N}$ (givet att $f(c) \geq 0$ om n är jämnt)

vad gäller om man vill kompononera ihop kontinuerliga funktioner?

Sats (Komposition av kont. funktioner)
Om $f \circ g := f(g(x))$ är definierad på ett intervall som innehåller $x=C$ och f är kontinuerlig i $x=L$ och $\lim_{x\to c} g(x) = L$ så gäller att:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

Speciellt om g är kontinuerlig i $x=c$ (dvs. $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$) så är kompositionen $f \circ g$ också kontinuerlig i $x=c$.

Bevis Vill bevisa att om f är kontinuerlig i $x=L$ och $\lim_{x\to c} g(x) = L$ så är $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$ (Resten följer per automatik).
Använd definitionen av grändsvärde!
Vet att f är kontinuerlig i $y=L$, dvs. $\lim_{y\to L} f(y) = f(L)$ vilket definitionsmässigt betyder att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\gamma > 0$ s.a. om $|y-L| < \gamma$ så är $|f(y) - f(L)| < \varepsilon$.
Vidare, eftersom $\lim_{x\to c} g(x) = L$ så finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att om $|x-c| < \delta$ så är $|g(x) - L| < \gamma$ för vilket $\gamma > 0$ som helst. I vårt fall är vi intresserade av fallet där $y = g(x)$ och av tidigare gäller således att om bara $0 < |x-c| < \varepsilon$ så kommer $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$ oavsett hur vi väljer $\varepsilon > 0$.
Men detta betyder att $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$ och vi har därmed visat att $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$ och speciellt att $f \circ g$ är kontinuerlig i $x=c$ om g är kontinuerlig i $x=c$. □

Vi förstätter med lite allmänna egenskaper för kontinuerliga funktioner.

Sats (kontinuerliga funktioner är begränsade) (tenta)
Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ så är f begränsad över samma intervall.

För att bevisa detta ska vi använda Bolzano-Weierstrass sats.

Sats (Bolzano-Weierstrass) (tenta)
Låt $\{a_n\}$ vara en oändlig och begränsad talföljd. Då finns en delföljd av $\{a_n\}$ som är konvergent!
Intuition: Givet att $\{a_n\}$ är begränsad så kan man alltid plocka ihop en ny talföljd med element tagna i ordning från $\{a_n\}$, säg $\{a_{n_k}\}$, så att denna följd konvergerar.

Bevis (kontinuerliga funktioner är begränsade)
Använder ett så kallad "motsägelsebevis", dvs. antag att satsen inte stämmer och visar att detta leder till något orimligt eller omöjligt.
Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$ men <u>inte</u> begränsad ovanifrån på $[a,b]$. I så fall gäller att det för varje heltal $k > 0$ finns ett $x_k \in [a,b]$ så att $f(x_k) > k$ (eftersom f växer obegränsat på $[a,b]$ enligt antagande). Alltså kan vi konstruera en talföljd $\{x_n\}$ där <u>alla</u> $x_n \in [a,b]$ och $f(x_n) > n$. Men om alla $x_n \in [a,b]$ så måste talföljden $\{x_n\}$ vara begränsad (eftersom $a \leq x_{\leq} b$). Av Bolzano-Weierstrass stats finns därför en delföljd till $\{x_n\}$ säg $\{x_{n_k}\}$ som är konvergent. Beteckna denna delföljds gränsvärde med x, dvs $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Eftersom $x \in [a,b]$ och f är kontinuerlig i x (eftersom f kontinuerlig på hela $[a,b]$ enligt förutsättning) så gäller per definition att $\lim_{h\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Men eftersom $f(x_n) > n$ så måste $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Detta motsäger att f är kontinuerlig på $[a,b]$!
Slutsats: f måste vara begränsad ovanifrån.
Liknande resonemang gäller för att visa att f även är måste vara begränsad underifrån och därmed begränsad. □

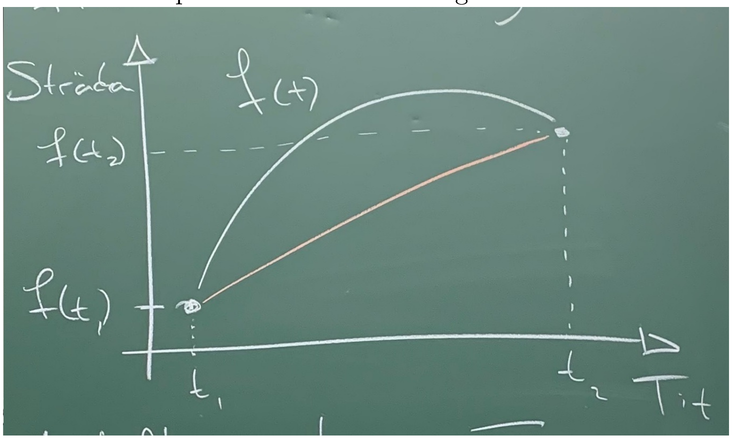
Sats (min-max-satsen)
Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ (där $|a|,|b| < \infty$). Då existerar <u>alltid</u> tal $p,q \in [a,b]$ sådana att för alla $x \in [a,b]$, $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ dvs. f har ett minimum $m = f(p)$ och ett maximum $M = f(q)$.

Sats (satsen om mellanliggande värden)
Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och låt s vara ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$. Då existerar det alltid ett tal $c \in [a,b]$ så att $f(c) = s$.

Chapter 8

Derivatan

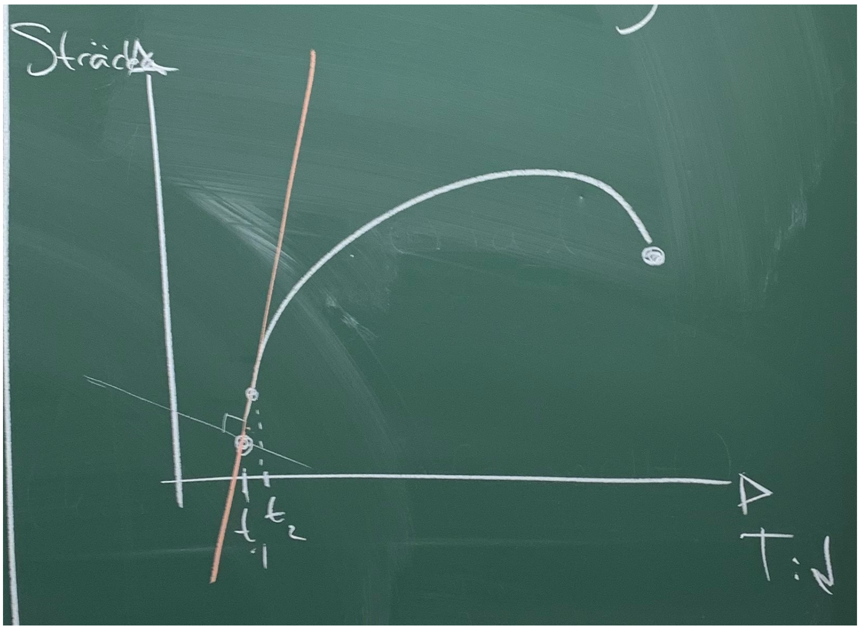
Ett av de mest fundamentala koncepten inom matematisk analys är derivata. Handlar om hur snabbt en given funktion förändras i närheten av en punkt x. Kan hämta inspiration från medelhastigheter.



Medelhastigheten $\overline{v}$ mellan t_1 och t_2 är $\overline{v} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$. Just $\overline{v}$ är dessutom lutningen på den linje som går från $(t_1, f(t_1))$ till $t_2, f(t_2)$.

$$\overline{v} = \frac{y - f(t_1)}{x - t_1} \Leftrightarrow y = \overline{v}(x - t_1) + f(t_1)$$

Uppenbart att ju närmre t_2 är t_1 desto mer kan $\overline{v}$ tolkas som den momentana hastigheten i t_1 och "snittlinjen" övergår till att bli en tangent.



Naturligt att definiera den momentana hastigheten i en punkt x_0 för en given funktion f som

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Om detta gränsvärde existerar så kallas det för <u>derivatan</u> av f i $x=x_0$ och betecknas som $f'(x_0)$. Geometriskt så kan $f'(x_0)$ tolkas som tangentlinjens lutning i $x=x_0$ för grafen till f.

Precis som för gränsvärden kan man definiera höger- och vänsterderivatan som:

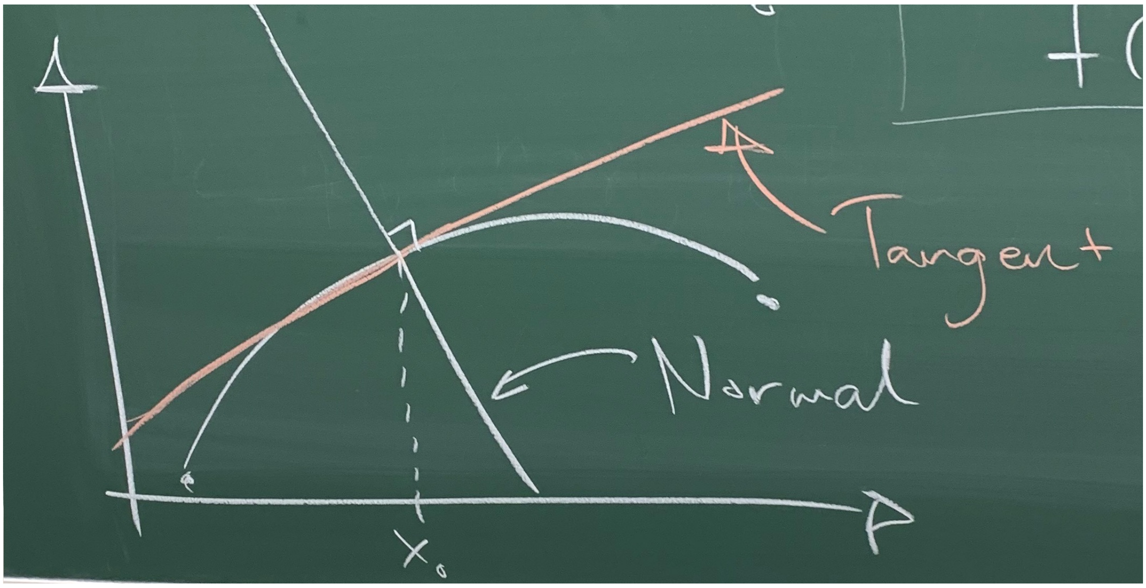
$$f'_+(x_0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0^-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En funktion f sägs vara deriverbar på ett intervall $[a,b]$ om den är deriverbar i varje punkt $x\in[a,b]$ och höger- respektive vänsterderiverbar i a respektive b.

från derivatan kan man enkelt beräkna lutningen för <u>normalen</u>, dvs. den linjen som är vinkelrät mot tangenten som:

$$\text{Normalens lutning i } x_0=-\frac{1}{f'(x_0)}$$



Ex (2.2.21)
Använd derivatans definition och beräkna $f'(x)$ givet funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Lösning Vi måste beräkna följande gränsvärde då $h \to 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(h)}{h} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{h} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(x+h)^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}}{h} =$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(x+h)^2}}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2}} =$$

$$\frac{(1+x^2)-(1+(x+h)^2)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\frac{1+x^2-(1+x^2+2xh+h^2)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\frac{-h(2x+h)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\frac{-2x-h}{\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})}$$

Då $h \to 0$ får vi:

$$-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2})} = -\frac{2x}{2(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^{(\frac{3}{2})}}$$

8.1 Räkneregler och standard derivator

Några standard derivator:

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Genom derivatans definition visar amn enkelt att

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

Två andra <u>extremt</u> viktiga räkneregler för derivator är produktregeln och kedjeregeln.

Produktregeln

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(Ur denna får man öven "kvotregeln" genom att sätta $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot g^{-1}(x)$)

Kedjeregeln

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Kedjregeln ligger till grund för alla implementationer av träningssteget för neurala nätverk (typ av AI agloritm) nämligen genom så kallad "backwards propogation".

Intuitivt motsvarar derivatan $f'(x)$ tangentlinjens lutning för f i x. Borde betyda att f "hänger ihop" i x, dvs att f är kontinuerlig i x?

Sats Deriverbarhet ger kontinuitet (tenta)
Om f är deriverbar i x så är f också kontinuerlig i x.

Bevis Att f är deriverbar i x betyder att gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar. Men det betyder att $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)\frac{h}{h}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)\cdot h}{h} = 0$ så $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Låt $x + h = y \Rightarrow \lim_{y\to x} f(y) = f(x)$, dvs. f är kontinuerlig i x. $\square$

Gäller det motsatta, dvs. att om f är kontinuerlig i x så är f deriverbar i x? Nej! Till exempel är så kallade

Browask rörelse B(t) (slumpfunktion) Kontinuerlig i alla punkter men ej deriverbar någonstans. 

Browask rörelse används bland annat inom signalbehandling och inom matematisk finans (för att modellera aktieprisutveckling).

Derivatan av trigonometriska funktioner

- $\frac{d}{dx}sin(x) = cos(x)$
- $\frac{d}{dx}cos(x) = -sin(x)$
- $\frac{d}{dx}tan(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = \frac{1}{1-sin^2(x)} = \{\frac{cos^2(x)+sin^2(^x)}{cos^2(x)}\} = 1 + tan^2(x)$

Alla dessa bygger på beviset att $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

Ex (2.4.12) Beräkna derivatan av $f(x) = (2+|x|^3)^{\frac{1}{3}}$.

Lösning Tänk på $2+|x|^3$ som en inre funktion och använd kedjeregeln!

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(2+|x|^3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2+|x|^3)' = \frac{1}{3}(2+|x|^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2+|x|^3)'$$

Vad är derivatan av $2+|x|^3$?

$$(2+|x|^3)' = 0 + (|x|^3)' = 3\cdot|x|^2\cdot(|x|)'$$

Vad är $(|x|)'$?

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om} x < 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(|x|)' = \begin{cases} \{\begin{matrix} 1, \text{ om } > 0 \\ -1, \text{ om } < 0 \end{matrix} \end{cases}}$$

$= sgn(x)$(sign function)

så $f'(x) = \frac{1}{3}(2+|x|^3)^{\frac{-2}{3}}\cdot 3\cdot|x|^3\cdot sgn(x) = \frac{x^2}{(2+|x|^3)^{\frac{2}{3}}}\cdot sgn(x), x \neq 0$

Om en funktion f beskriver hur värdet y av någon typ av process beror av en inparameter x, dvs. $y = f(x)$ så beskriver derivatan $f'(x)$ hur snabbt eller långsamt motsvarande process förändras givet indata x. $f^prime(x)$ kan tolkas som förändringshastigheten av f i punkten x.

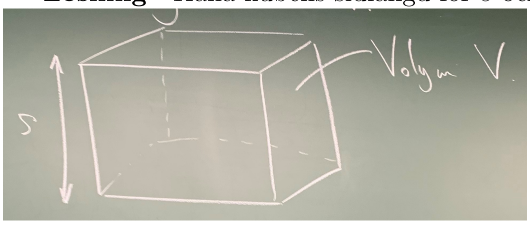
Ex
x =”Framlednings temperatur för radiatorvatten”
$f(x)$ =”Inomhus temperatur givet framlednings temperatur x”
$\Rightarrow f'(x) =$ ”Förändringshastighet i inomhustemperetaur givet förändring i framledningstemperatur x”.

Derivator används och tolkas på liknande sätt i en mängd olika sammanhang för ekonomi/samhällsvetenskap till fysik/teknik/naturvetenskap.

Måste förstå möjligheter, begränsningar och egenskaper för f'.

Ex (2.7.20) Bestäm förändringshastigheten för sidorna av en kub som funktion av kubens volym.

Lösning Kalla kubens sidlängd för s och dess volym för V.



Vi villa hitta ett explicit uttryck för $s'(V)$. Vet att $V = s^3 \Leftrightarrow s = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$. Alltså är $s'(V) = \frac{1}{3} \cdot V^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot V = \frac{1}{3 \cdot V^{\frac{2}{3}}}$ □

Ex (2.7.29) Om det kostar en fabrikör $C(x)$ kr att tillverka x enheter av något så innebär detta en snittkostnad per enhet av $\frac{C(x)}{x}$ (Kr/enhet). Visa att det antal enheter x som minimerar snittkostnaden gör snitt- och marginalkostnad lika (dvs $C'(x)$).

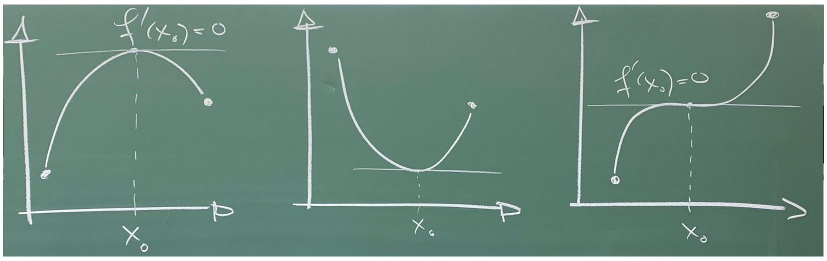
Lösning Låt $A(x)$ beteckna snittkostnad. Dvs. $A(x) = \frac{C(x)}{x}$.
Då gäller att:

$$A'(x) = \frac{d}{dx}[\frac{C(x)}{x}] = \{\text{prod.reg.}\} = C'(x) \cdot x^{-1} + C(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

Vi ser att

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow C'(x) \cdot x - C(x) = 0 \Leftrightarrow \text{marginalkost.} = C'(x) = \frac{C(x)}{x} = \text{snittkost.} \ \square$$

Varför sattes $A'(x) = 0$ som en garant för att minimum? Rent generellt så betyder $f'(x_0) = 0$ att en given funktion f har horizontell tangent i $x = x_0$. Sådana punkter $x = x_0$ kallas för <u>kritiska punkter</u> och man säger att f är <u>stationär</u> för sådana x. Geometriskt kan detta bara betyda något av följande:



Hur visste man att $A'(x) = 0$ skulle motsvara en kritisk punkt flr ett minvärde av $A(x)$? Rimligt att anta att $C(x) = K + c(x)$ där K är en konstant, fast kostand, och $c(x)$ är enhetskostnaden

- $A(x) \approx \frac{K}{x}$, om x litet $\Rightarrow$ avtagande.
- $A(x) \approx \frac{c(x)}{x}$, om x stort $\Rightarrow$ konstant eller växande.

$\Rightarrow A(x)$ har ett minimimum?
Smidigt att kika på högre ordning av derivator!
Givet en funktion f kan man definiera andraderivatan f'' som $'' = (f')'$. På liknande sätt definieras tredje, fjärde och högre ordnings derivator som $f^{(n)} = ((...(f')'...))'$. andraderivatan bär precis som förstaderivatan både på teknisk- och geometrisk information om f. Om x =tid och $f(x)$ =tillryggalagd sträcka så motsvarar $f'(x)$ momentanhastighet och $f''(x)$ momentanacceleration. Geometriskt så kan $f''(x_0)$ tolkas som krökningen av grafen till f i punkten $x = x_0$. Det gäller att om

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ konvex i x_0
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ konkav i x_0
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow f$ kan vara konvex, konkav eller inget (och kan vara en så kallad inflektionspunkt.)

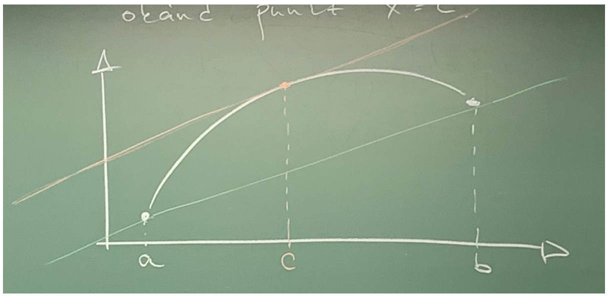
Speciellt gäller för stationära punkter där $f'(x_0) = 0$ att:

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ har ett lokalt minimum i x_0
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ har ett lokalt maximum i x_0

Sats (Rolles sats)
Antag att g är konstinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Om $g(a) = g(b)$ så finns en punkt $c \in (a, b)$ sådan att $g'(c) = 0$.

Notera Rolles sats är ett specialfall av medelvärdessatsen för derivator.

Sats (Medelvärdessatsen för derivator) (tenta)
Antag att f är en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Då existerar minst en punkt $c \in (a, b)$ sådan att $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.



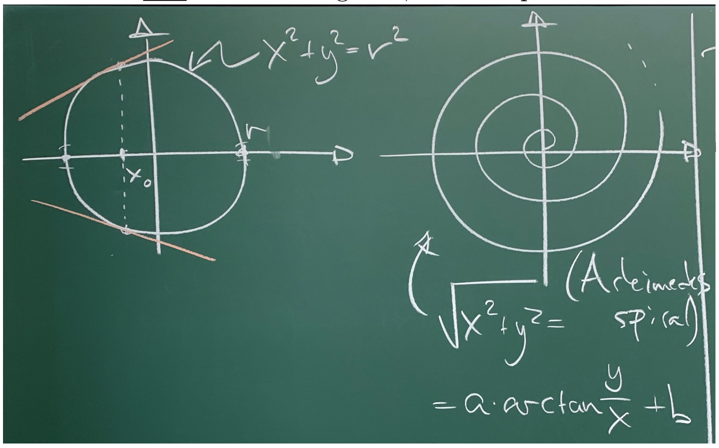
Bevis Givet en funktion f som uppfyller villkoren för satsen så kan vi konstruera funktionen g som $g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}) \cdot (x-a)$. Uppenbart att g är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) då f är det. Alltså är $g(a) = g(b)$ och $g'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Enligt Rolles sats finns då en punkt $c \in (a,b)$ så att $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Sats Låt J vara ett öppet intervall och I vara J med eller utan ändpunkter. Om f är kontinuerlig på I och deriverbar på J gäller att:

- $f'(x) \substack{> \\ <} 0,\ \forall x \in J \Rightarrow f \substack{\text{strängt växande} \\ \text{strängt avtagande}}$ på I
- $f'(x) \substack{\geq \\ \leq} 0,\ \forall x \in J \Rightarrow f \substack{\text{växande} \\ \text{avtagande}}$ på I

8.2 Implicit derivering

Att derivera en given funktion $f(x)$ är lätt med hjälå av regler som till exempel produktregeln och kedjeregeln. Ibland vill man dock beräkna derivator för kurvor som <u>inte</u> är funktionsgrafer, till exempel



Denna typ av kurvor kan inte skrivas på formen $y = f(x)$, men däremot som $F(x,y) = 0$.

Ex Archimedes spiral kan skrivas $F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^{"}} - a \cdot \arctan\frac{y}{x} - b$

Hur beräknar man kurvan $F(x,y) = 0$ i punkten $x = x_0$? Notera att det mycket väl kan finnas <u>flera</u> derivator tillhörande en given punkt $x = x_0$. Man kan använda kedjeregeln för att beräkna $F'(x,y)$.

Ex (2.9.5) Givet kurvan $x^2y^3 = 2x - y$, bestäm y' uttryckt i termer av x och y.

Lösning

$$x^2y^3 = 2x - y \Leftrightarrow F(x,y) = x^2y^3 - 2x + y = 0$$

$$F'(x,y) = \frac{d}{dx}[F(x,y)] = \frac{d}{dx}[x^2y^3 - 2x + y] = \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(y) =$$

$$\{\frac{d}{dx}(2x) = 2, \frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} = y'\} = \frac{d}{dx}(x^2x^3) - 2 + y' = \{\text{produktregeln}\} =$$

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(y^3) - 2 + y' = \{\text{kedjeregeln}\} = 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot y' - 2 + y'$$

För kurvan gäller att:

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y) = 0 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2y' - 2 + y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2 - 2xy^3}{1 + 3x^2y^2} \quad \square$$

Vid implicit derivering måste man vara noga med att ha koll på punkter där derivatan eventuellt inte existerar.

Chapter 9

Primitiva funktioner och indefinita integraler

Med en primitiv funktion (antiderivata) till en funktion f definierad på ett intervall I menas <u>en</u> funktion F sådan att

$$F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$$

Eftersom derivatan av alla konstantfunktioner är $g(x) = c$ är 0 ($g'(x) = 0$) så finns oändligt många primitiva funktioner till f eftersom alla $G(x) = F(x) + C$ funkar. Den <u>indefinita integralen</u> av f innefattar alla dessa!

Definition Givet en funktion f definieras den indefinita integralen som $\int f(x), dx := F(x) + C, x \in I$ där C är en godtycklig konstant och F är en primitivv funktion till f, dvs $F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

Integraler är en hörnsten inom matematisk analys och används i en mängd olika sammanhang.

Ex (2.10.30) Lös begynnelseproblemet $\begin{cases} y' = x^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 5 \end{cases}$

Lösning Att lösa begynnelseproblemet innebär att bestämma $y(x)$.
Om $y' = \frac{1}{3}$ så måste $y = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \{\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$. Vidare så vet vi att $y(0) = 5$ så $\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 0 + c = 5 \Leftrightarrow C = 5$ och vi får att $y = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 5$ $\square$

Chapter 10

L'Hôpital regler

L'Hôpitals regeler är en strategi som ibland kan användas för att lösa icketriviala gränsvärdesproblem, dvs gränsvärden av typen

$$\lim_{x\to\dots} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0}, \frac{\text{"}\pm\infty\text{"}}{\pm\infty}, \text{"}0\cdot\infty\text{"}, \text{"}\infty-\infty\text{"}$$

L'Hôpitals regler kan funka för gränsvärden för de två första typerna. Reglerna använder derivator!

L'Hôpitals första regel
Antag att f och g är deriverbara på (a,b) och att $g'(x) \neq 0$. Antag också att

1. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, c \in (a,b)$
2. $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (där L kan vara ändligt eller oändligt)

Då är $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
(Funkar även för $\lim_{x\to a^+}, \lim_{x\to b^-}$ och om $a, b = \pm\infty$)

L'Hôpitals andra regel
Antag att f och g är deriverbara på (a,b) ohc att $g'(x) \neq 0$. Antag också att

- $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty, c \in (a,b)$
- $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L är ändlig)

Då är gränsvärdet $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ex (4.3.6) Bestäm $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$

Lösning Gränsvärde av typen "$\frac{0}{0}$". Om $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$ och $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$ så är $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ och därmed $g'(x) \neq 0$ i en omgivning av $x = 1$, dvs $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ för $\varepsilon > 0$. Gäller också att $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$ och att

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{2}$$

och enligt L'Hôpitals första regel gäller att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1} = \frac{1}{2} \quad \square$$

Chapter 11

Standardgränsvärden

Förutom L'Hôpitals regeler finns en samling Standardgränsvärden som man alltid kan ta för givna (om inte annat anges) när man löser gränsvärdesproblem.

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$, om $a > 1$ och $b \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, om $a > 0$
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Chapter 12

Funktioner

För ala reella tall $a \neq 0$ gäller att $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Talet $1/a$ kallas för den *multiplikativa inversen* till a. Den multiplikativa inversen definieras med hjälp av det speciellt talet 1 (ettan) som har den *unika* egenskapen att $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ \forall a \in \mathbb{R}$. Om vi istället för de reella talen nu tänker oss funktioner och istället för multiplikation tänker oss komposition, alltså $f \circ g$, finns det då en "etta"? Ja! Funktionen $e(x) = x$ blir en etta eftersom $f \circ e(x) = f(e(x)) = f(x)$ och $e \circ f(x) = e(f(x)) = f(x)$ så alltså gäller att $f \circ e = e \circ f = f$ för alla funktioner f. Med $e(x) = x$ som "etta" är det naturligt att fråga sig; givet en funktion f, finns det då en annan funktion g så att $f \circ g = g \circ f = e$? Ja! Funktionen $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ blir en sådan funktion eftersom $f \circ g(x) = f(\frac{1}{f(x)}) = \frac{1}{f(x)}$ och $g \circ f(x) = \frac{1}{f(f(x))} = \frac{1}{f(x)}$ så alltså gäller att $f \circ g = g \circ f = e$. Detta gäller dock endast om f är injektiv, alltså om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen g kallas då för *inversen* till f och skrivs f^{-1}. Geometriskt så representeras f^{-1} som en spegelbild av f i linjen $y = x$. Lite grundläggande egenskaper för inverser:

- $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Man kan också beräkna derivata av inversfunktionen som $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ eftersom vi vet att $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x) = 1$ och $\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \{\text{kedjeregeln}\} = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}x \Rightarrow \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(x^{-1}(x))}$. *Behöver inte bevisas på tentan.*

12.1 Exponentialfunktioner

En exponentialfunktion är en funktion på formen $f(x) = a^x$ där $a > 0$. Det gäller att $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ och $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$. Vidare är funktionen $f(x) = a^x$ en *injektiv* funktion, och därmed finns alltid en invers. Denna invers kallas för *a-logaritmen* och skrivs $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. För alla a-logaritmer gäller att

- $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$

- $\log(1) = 0$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$, om $a > 0$ och $b > 0$

Derivatan av $f(x) = a^x$ är $f'(x) = a^x \cdot \log_a(x)$. Finns det ett tall a så att $C = 1$? Ja, och det kallas $e \approx 2,718281828\ldots$. Motsvarande e-logaritmen kallas för den *naturliga logaritmen* och betecknas $\ln(x)$. Genom detta fås att $\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{\ln(a^x)} = \frac{d}{dx}e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$. På motsvarande sätt gäller att $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$, och $\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$. Exponentialfunktioner och logaritmer är oumbärliga för att modellera en mängd olika processer. I synnerhet tillväxt-/avtagande-modellering. Jämfört med potensfunktionen x^n, $n >$

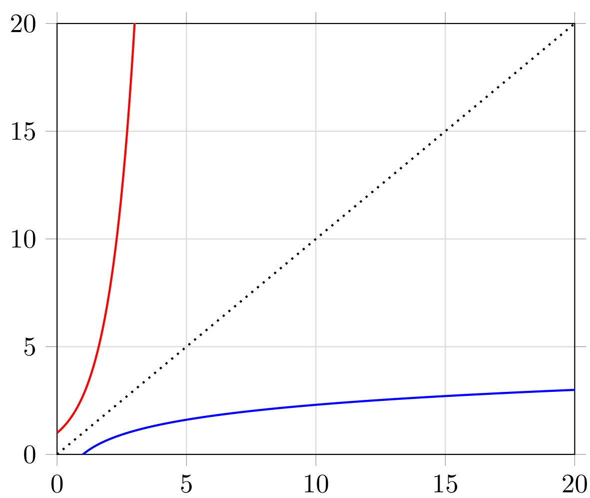


Figure 12.1: Kurvorna $y = e^x$ och $y = \ln(x)$

0, så växer/avtar e^x alltid snabbare och tvärtom för $\ln(x)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} |x^n| e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$. Vad gäller för de primitiva funktionerna (indefinita integralerna) av e^x och $\ln(x)$? $\int e^x dx = e^x + C$, $\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x + C$ (primitiv av $\ln(x)$ kan vi egentligen inte än). För $\ln|x|$ gäller att $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \cdot sgn(x) = \frac{1}{x}$, så $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$. Talet e är intressant i sig, och omgärdas än idag av flera olösta matimatiska problem. Det kan formuleras som följande kända gränsvärde: $e = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ och således gäller att $e^x = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$.

12.2 Inversa trigonometriska funktioner

Funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$ är periodiska och därmed inte injektiva på $\mathbb{R}$. Av den anledningen saknas inversfunktioner. Det går dock att begränsa dem så att de blir injektiva på ett kortare intervall. $\arcsin x$, $\arccos x$ och $\arctan x$ har följande definitions- och värdemängder:

- $\arcsin x$ $\mathcal{D} = [-1, 1]$, $\mathcal{R} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos x$ $\mathcal{D} = [-1, 1]$, $\mathcal{R} = [0, \pi]$
- $\arctan x$ $\mathcal{D} = [-\infty, \infty]$, $\mathcal{R} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Man har följande derivator:

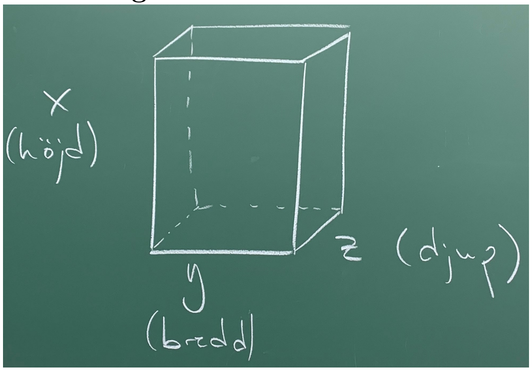
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^e}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

12.3 De hyperboliska funktionerna

Släktingar till de trigonometriska funktionerna med många liknande egenskaper. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Precis som för sin och cos, så är sinh en udda funktion och cosh en jämn funktion. Den trigonometriska ettan gäller nästan (hyperboliska ettan!): $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. För derivatorna gäller att $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$, $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$. Man definierar $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$och får att $\frac{d}{dx}$

Ex (4.1.11) Hur snabbt förändras volymen av en rektangulär låda då höjden är 6 cm, bredden är 5 cm och djupet är 4 cm om både höjd och djup ökar med 1 cm/s och bredden minskar med 2 cm/s?

Lösning Rita!



Lådans dimensioner beror av tiden så $x = x(t)$, $y = y(t)$ och $z = z(t)$. Det gäller för volymen $V(t)$ att $V(t) = x(t) \cdot y(t) \cdot z(t)$ och vid tiden $t = t_0$ vet vi att $x(t_0) = 6, y(t_0) = 5, z(t_0) = 4, x'(t_0) =<' (t_0) = 1$ och $y'(t_0) = -2$. Vad blir $V'(t_0)$?

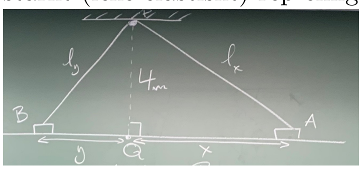
$$V'(t) = \frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t) \cdot z(t)) = \{\text{prod.regeln}\} =$$

$$x'(t) \cdot y(t) \cdot z(t) + x(t) \cdot y'(t) \cdot z(t) + x(t) \cdot y(t) \cdot z'(t) \Rightarrow V'(t_0) =$$

$$1 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 1 = 20 - 48 + 30 = 2 \text{ cm}^3/\text{s}$$

så lådans volym <u>ökar</u> med 2 cm^3/s □

Ex (4.1.38) Två tunga lådor är sammankopplade med ett 15 m långt och starkt (icke-elastiskt) rep enligt figur



Hur snabbt rör sig låda B mot punkten Q då låda A befinner sig 3 m från Q och rör sig bort från denna punkt med en fart av 0.5 m/s?

Lösning Beteckna repets längd l och de båda dellängderna l_x och l_y. Då gäller att: $l(t) = l_x(t) + l_y(t) = \sqrt{x^2(t) + 4^2} + \sqrt{y^2(t) + 4^2}$ och

$$0 = l'(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x(t) \cdot x'(t) + \frac{1}{2}(y^2(t) + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y(t) \cdot y'(t) =$$

$$\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 16}} + \frac{y(t) \cdot y'(t)}{\sqrt{y^2(t) + 16}}$$

Vi vet att vid $t = t_0$ så är $x(t_0) = 3, x'(t_0) = 0.5$ och
$y(t_0) = \sqrt{l_y^2 - 16} = \sqrt{(l - l_x)^2 - 16} = \sqrt{(15 - \sqrt{16 - 9})^2 - 16} = \sqrt{84}$så
$0 = \frac{3 \cdot 0.5}{\sqrt{9+16}} + \frac{\sqrt{84} \cdot y'(t_0)}{\sqrt{84+16}} \Rightarrow y'(t_0) = -\frac{3}{\sqrt{84}} \approx -0.327\text{m/s}$ □

Chapter 13

Numerisk ekvationslösning

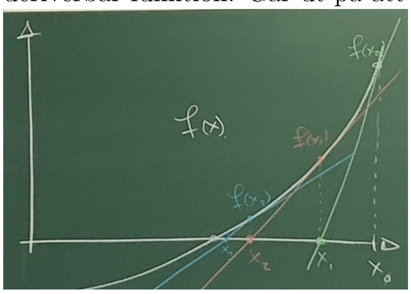
Handlar om att på numerisk väg lösa ekvationen $f(x) = 0$. Om till exempel f är kontinuerlig kan man anvönda bisektionsalgoritmen, dvs. hitta två tal a och b så att $f(a) < 0$ och $f(b) > 0$ (eller tvärt om!). Då ligger åtminstone ett nollställe mellan a och b. Beräkna $f(\frac{a+b}{2})$, dvs. värdet i mittpunkten och avgör sedan om nollställe ligger i antingen intervallet $[a, \frac{a+b}{2}]$ eller i $[\frac{a+b}{2}, b]$. Fortsätt på samma vis i delintervallen…

Fixpunktsiteration Formulera om $f(x) = 0$ som $g(x) = x$ (om möjligt). Till exempel $f(x) = 3\sin^2(x) + x^2 - x = 0$ blir då $g(x) = 3\sin^2(x) + x^2 = x$. Tag sedan ett tal $x = x_0$ som troligtvis ligger nära det x som löser ekvationen och sätt in i $g(x)$. $x_0 \to g(x_0) = x_1 \to g(x_1) = x_2 \to g(x_2)...$ dvs. beräkna $x_0, x_1, x_2, ...$ enligt $g(x_n) = x_{n+1}$. Under vissa förutsättningar konvergerar talföljden $\lim_{n\to\infty} x_n$ och man hittar en lösning till $g(x) = x$ dvs. $f(x) = 0$. Gränsvärdet $lim_{n\to\infty} x_n = x$ kallas fixpunkt till $g(x)$.

Sats Antag att g är definierad på intervallet $I = [a, b]$ och uppfyllet att:

1. $f(x) \in I$ om $x \in I$
2. Det finns en konstant $0 < k < 1$ så att för att $u, v \in I$ gäller att $|f(u) - f(v)| \leq k \cdot |u - v|$ (lipschitz-kontinuitet). Då har g en unik fixpunkt $r \in I$, dvs. $g(r) = r$, och oavsett val av $x_0 \in I$ så är $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

Newtons metod Funkar bra om man söker nollställen $f(x) = 0$ där f är en deriverbar funktion. Går ut på att iterativt hitta nollställen till tangentlinjer!



För $x = x_n$ har man tangentlinjen $\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = f^{p}rime(x_n)$ och nollstället till denna ges av $\frac{0-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} = f'(x_n)$ dvs $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Newtons metod kan fallera om f inte ör överallt deriverbar eller om det finns horizontella/vertikala tangenter.

Chapter 14

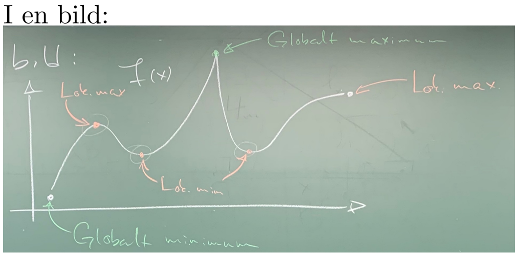
Extremvärden

Ett extremvärde av en funktion f är en punkt där värdet av f är maximalt/minimalt, antingen globalt eller lokalt.

Definition (globalt extremvärde) En funktion f har ett eller flera globalt maximum/minimum i $x = x_0$ (där $x_0 \in D(f)$) om $f(x) \underset{\leq}{\overset{\geq}{}} f(x_0)$ för alla $x \in D(f)$.

Definition (lokalt extremvärde) En funktion f har ett lokalt maximum/minimum i $x = x_0$ (där $x_0 \in D(f)$) om det finns ett tal $h > 0$ så att $f(x) \underset{\leq}{\overset{\geq}{}} f(x_0)$ för att $x \in D(f)$ så att $|x - x_0| < h$.

I en bild:



Lokala (och globala) extrempunkter kan hittas i tre olika typer av fall:

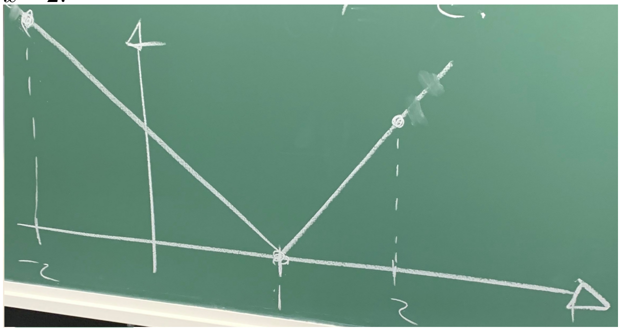
1. Kritiska punkter, dvs. i x sådana att $f'(x) = 0$.
2. Singulär punkter, dvs i x sådana att $f'(x)$ ej existerar.
3. Ändpunkter av $D(f)$

Ex (4.4.13) Hitta alla globala och lokala extrempunkter till $f(x) = |x - 1|$, $x \in [-2, 2]$

Lösning f saknar kritiska punkter (eftersom $f'(x) = sgn(x - 1)$). Har singulär punkt i $x = 1$ där $f(1) = 0$ och i ändpunkterna gäller att:

- $f(-2) = |-2 - 1| = |-3| = 3$
- $f(2) = |2 - 1| = |1| = 1$

så globalt minimum i $x = 1$, globalt maximum i $x = -2$ och lokalt maximum i $x = 2$.



Chapter 15

Linjär approximation och Taylorutveckling

Det är vanligt att funktioner modellerar de globala egenskaperna av olika system när teori för tillämpningar utvecklas. Detta leder ofta till hög komplexitet. Ibland är man dock bara intresserad av hur systemet beter sig av en viss punkt, säg $x = a$. Vi kan då använda oss av linjär approximation för att underlätta beräkningar. Vi vet att den linjära approximationen av f i $x = a$, alltså tangentlinjen, går igenom punkten $(a, f(a))$ och har lutning $f'(a)$. Detta innebär att $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Alltså, givet en deriverbar funktion f så gäller för x-värden "nära" a att $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Hur stort fel innebär denna approximation? Vi behöver den generaliserande medelvärdessatsen för derivator för att besvara detta.

Sats Om f och g är kontinuerliga på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) samt att $g'(x) \neq 0$ i (a, b) så finns ett tal så att $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Felet av att approximationen $f(b)$ genom linjen approx L i $x = a$ ges av:

$$E = f(b) - L(b) = f(f) - f(a) - f'(a) \cdot (b - a)$$

Tänk på E som en funktion av b och notera att $E(a) = 0$ (dvs $b = a$). Använd den genom medelvärdessatsen för $E(b)$ och $(b - a)^2$ genom kvoten:

$$\frac{E(b)}{(b-a)^2} = \{E(a) = 0\} = \frac{E(b) - E(a)}{(b-a)^2 - (a-a)^2} \Rightarrow E(b) = \frac{f''(s)}{2} \cdot (b - a)^2$$

Alltså, felet i att approximera $f(x)$ med $L(x)$ kan beräknas som $E(x) = \frac{f''(x)}{2}(x-a)^2$ för något tal s mellan a och x ($a < s < x$ eller $x < s < a$).

Ex 4.9.12 En kub har sidlängden 20cm. Ungefär hur mycket måste denna minska om volymen ska minska med 12 cm^3?

Lösning: Vi vet att x = 20 cm och vill att $\Delta V = -12$ cm^3. Vi använder linjär approximation av V kring x = 20 cm. $L(x) = V(20) + V'(20) \cdot (x + 20)$, $\Delta V = V(20) - L(x) = V'(20) \cdot (x - 20) = V'(20) \cdot \Delta x$. (...) Kubens sidlängd ska alltså minska ed cirka $1/100 = 0.01$ cm.

Går det att approximera en funktion f i omgivningen av en punkt $x = a$ på ett bättre sätt än linjärisering? Vilka egenskaper hos linjäriseringen $L(x)$ gör den till en bra approximation? $L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \Rightarrow L(a) = f(a)$ och $L'(a) = f'(a)$. Kan man hitta en approximation där även andraderivatan stämmer? Ja! $P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \Rightarrow P(a) = f(a)$, $P(a) = f'(a)$
$P''(a) = 0 + 0 + \frac{f''(a)}{2} \cdot 2 = f''(a)$ På liknande sätt kan man fortsätta att bygga på med högre ordningens termer. Det gäller att $\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n] = \{\text{kedjeregeln}\} = n \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x - a)^{n-a}] = \cdots = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Talet $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ för $n \in \mathbb{N}$ kallas för n-fakultet och skrivs enklare som $n!$. Man definierar $0! = 1$. Detta gör att man enkelt hittar en approximation P_n till f nära vilken punkt $x = a$ som helst (givet att f är n gånger deriverbar där) där alla derivator upp till ordning n överensstämmer som $P_n(x) = f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$. $(=\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i)$. Approximation P_n kallas för Taylorpolynomet av grad n runt punkten $x = a$ (eller n:te gradens Taylorutveckling). I specialfallet då $a = 0$ kallar man ibland Taylorutvecklingen för Maclaurinutveckling. Högre ordningens Taylorutvecklingar innebär bättre ock bättre approximationer av f runt $x = a$ som också funkar längre och längre från $x = a$. Givet n:te gradens Taylorpolynom runt $x = a$, alltså $P(x)$, hur bra är approximationen $P(x) \approx f(x)$? Vi kan visa att feltermer $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$ för något tal tal s mellan a och x. $E_n(x)$ kallas för Lagranges restterm.

Ex 4.10.10 Använd andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ för att approximera $\sqrt{61}$. Uppskatta även storleken av felet och ge ett intervall där det sanna värdet ligger.

Givet en funktion f och en punkt $x = a$, där f är tillräckligt många gånger deriverbar, lärde vi oss att:

$$f(x) = p_n(x)+E_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något tal s mellan a och x. Polynomet $P_n(x)$ approx. funktionen f i närheten av $x = a$. Ofta är man inte intresserad av det exakta uttrycket för felet $E_n(x)$, utan bara "hur snabbt det växer" i takt med att x rör sig från a. Smidigt att använda så kallad O-notation (dvs. ordo-notation eller stora O-notation).

Man skriver att $f(x) = O(u(x))$ då $x \to a$ om det finns tal $K > 0$ och $\delta > 0$ sådana att $|f(x)| \le K \cdot |u(x)|$ då $0 < |x-a| < \delta$. På liknande sätt, om $f(x) = g(x)+O(u(x))$ då $x \to a$ så betyder det att $f(x)-g(x) = O(u(x))$. För Taylor-utv. gäller alltså att $f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$.

Några räkneregler för O:

- $C \cdot O(u(x)) = O(u(x)), \forall C > 0$
- $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$
- $O(x^m) + O(x^n) = O(x^n)$ om $n \ge m$ och $x \to \infty$
- $O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$ om $n \ge m$ och $x \to 0$
- Om $f(x) = O((x-a)^k \cdot u(x))$ då $x \to a$ så är $\frac{f(x)}{(x-a)^k} = O(u(x))$ då $x \to a$.

Sats (Om taylor-polynom och O) Om $f(x) = Q_n(x + O((x-a)^{n+1}))$ då $x \to a$ och Q_n är ett polynom av grad n så är Q_n =Taylorpolynomet av f runt $x = a$.

Kan förstå l'hopitals regel bättre med hjälp av taylor-polynom och O-notation! Vi har lärt oss att om gränsvärdet $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ är av typen $\frac{0}{0}$ och $g' \neq 0$ i en omgivning av $x = a$ så kan man istället föröska beräkna $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Om det senare gränsvärdet konvergerar och <u>inte</u> är av typen $\frac{0}{0}$ så konvergerar det förra mot samma sak.

Varför?
Betrakta första ordningens Taylorutveckling av f och g runt $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)}{g(a) + g'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)} =$$

$$= \{f(a) = g(a) = 0 \text{ enl. förutsättning}\} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)}{g'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)} =$$

$$= \{\text{Bryt ut } (x-a) \text{ ur täljare och nämnare}\} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a) + O(x-a)}{g'(a) + O(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Och om l'Hopital inte funkar, dvs. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ är av typen $\frac{0}{0}$? Texta då istället $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Om det gränsvärdet inte är av typen $\frac{0}{0}$ så kommer $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Varför?
Taylorutveckling till andra ordningen runt $x = a$ ger:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

Samma räkning som innan ger att $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = ... = \frac{f''(a)}{g''(a)}$

Ex (kompendie övn. 9.5) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2})$

Lösning Gränsvärdet är icke-trivialt då direkt insättning av $x = 0$ ger $\infty - \infty$. Börja med lite omskrivningar.

$$\frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 sin^2(x)} - \frac{sin^2(x)}{x^2 sin^2(x)} = \frac{x^2 - sin^2(x)}{x^2 sin^2(x)} =$$

$$\{cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = (1 - sin^2(x)) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x)$$

$$\text{så } sin^2(x) = \frac{1 - cos^2(x)}{2}\} = \frac{x^2 - \frac{1-cos(2x)}{2}}{x^2\frac{1-cos(2x)}{2}} = \frac{2x^2 - 1 + cos(2x)}{x^2 - x^2 cos(2x)}$$

Från standardutvecklingar vet vi att

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + O(x^{2n+2})$$

$$\Rightarrow cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ...$$

Använd denna utveckling till ordning 4 i täljaren och ordning 2 i nämnaren!

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2 - 1 + cos(2x)}{x^2 - x^2 cos(2x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2 - 1 + (1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + O(x^6))}{x^2 - x^2(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + O(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2 - 1 + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{x^2 - x^2 + 2x^4 + O(x^6)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{2x^4 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}\cdot\frac{\frac{2}{3} + O(x^2)}{2 + O(x^2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \quad \square$$

Ex Använd Maclaurinutveckling för $sin(x)$ för att beräkna Maclaurinpolynomet av ordning 4 till funktionen $arcsin(x)$.

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + O(x^{2n+1})$$

Lösning Eftersom att $arcsin$ är invers funktion till sin (på intervallet $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) så gäller per definition att: $arcsin(sin(x)) = sin(arcsin(x)) = x$ och $arcsin(-sin(x)) = arcsin(sin(-x)) = -x = \{arcsin(sin(x)) = x\} = -arcsin(sin(x))$ så $arcsin(-sin(x)) = arcsin(sin(x)) = \{sin(x) = z\}$ dvs. $arcsin(-z) = arcsin(z)$. Detta betyder att $arcsin$ är en udda funktion och utvecklingen vi söker måste därför vara på formeln $a_1x + a_3x^3 + O(x^5)$ för några tal a_1 och a_3. Vi vet att $sin(arcsin(x)) = x$ eftersom (åter igen) $arcsin$ är invers till sin, och vi vet att $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ vilket leder till att

$$x = sin(arcsin(x)) = (a_1x + a_3x^3 + O(x^5)) - \frac{(a_1x + a_3x^3 + O(x^5))}{6} + O((a_1 + a_3x^3 + O(x^5))^5)$$

$$= (a_1x + a_3x^3 + O(x^5)) - (\frac{a_1^3}{6}x^3 + O(x^5)) + O(x^5) = a_1x + (a_3 - \frac{a_1^3}{6})x^3 + O(x^5)$$

Vilket bara kan vara sant om $a_1 = 1$ och $a_3 - \frac{a_1^3}{6} = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$ och vi får att $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)\Box$

Chapter 16

Summationsnotation

En summa av tal $a_1 + a_2 + ... + a_n$ skrivs smidigare med summationsnotation:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Indexet i kallas för <u>summationsindex</u> och existerar bara i själva summationen. Summering är en linjär operation, dvs superpositionsprincipen gäller:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_1$$

Några viktiga standard summor är:

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ ggr}} = n$
- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (aritmetisk)
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}, r \neq 1$ (geometriskt)

Vill kunna beräkna arean under funktionsgrafer. Strategin är att dela upp ytan i mindre bitar för vilka arean är lätt att beräkna och sedan summera alla bidrag.
Dela upp intervallet $[a, b]$ i mindre delintervall med ändpunkter i $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Varje delintervall är av bredden $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1$, osv. Beräkna (t.ex) areorna av alla rektanglar med bred Δx_i och höjd $\frac{f(x_i)+f(x_i+1)}{2}$ (medelvärdet). Då borde $A \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_1)+f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$. Approximationen <u>borde</u> bli bättre och bättre i takt med att delintervallen blir mindre och mindre och det borde gälla att

$$A = \begin{matrix} lim \\ n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0 \end{matrix} \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

Detta måste dock preciseras för att bli matematiskt relevant.

Ex (5.2.5) Beräkna areorna under grafen till $y = x^2$ mellan $x = 1$ och $x = 3$.

Lösning Dela upp intervallet $[1,3]$ i n stycken lika stora delar. Delintervallets bredd blir då $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ med ändpunkter i $1, 1+\frac{2}{n}, 1+2\frac{2}{n}, ..., 1+(n-2)\frac{2}{n}, 3$. Om vi använder funktionens medelvärde i varje delintervall som höjd för att approximerande rektanglar får vi att:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 + i \cdot \frac{2}{n})^2 + (1 + (i-1)\frac{2}{n})^2}{2} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1 + \frac{4i}{n^2} + \frac{4i^2}{n^2} + 1 + \frac{4i}{n} - \frac{4}{n} + \frac{4i^2}{n^2} - \frac{8i}{n^2} + \frac{4}{n^2}}{2} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} + \frac{8i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3} - \frac{4}{n^2} - \frac{8i}{n^3} + \frac{4}{n^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{n} \cdot n + \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n^2} \cdot n - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{n} + \frac{4}{n^3} \cdot n =$$

$$2 + 4 + \frac{16}{6} = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3} \text{ a.e } \square$$

För att areaberäkning genom approx. med staplar ska vara "vettig" mpste det gälla att resultatet är oberoende av:

1. hur x-axeln styckas upp
2. vilken stapelhöjd som väljes i varje delintervall (dvs overoende av $f(s)$ där $s \in [x_i, x_{i+1}]$)

En uppdelning av ett intervall $[a,b]$ i disjunkta delintervall $[x_0, x_1], (x_1, x_2], ..., (x_{n-1}, x_n]$ kallas för en <u>partition</u> av $[a,b]$ och kan refereras till som mängden av ändpunkter:

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

Varje delintervall i P har en längd $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ och man definierar <u>normen</u> som längden av det längsta delintervallet:

$$||P|| := \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

Om f är en kontinuerlig funktion så antas både ett maximalt och ett minimalt värde någonstans i varje delintervall, säg i $x = u_i$ och $x = l_i$ för delintervallet $[x_i, x_{i+1}]$. Dvs. om $x \in [x_i, x_{i+1}]$ så gäller att $f(l_i) \le f(x) \le f(u_i)$. Det betyder att en godtycklig stapel över intervallet $[x_i, x_{x+i}]$ <u>alltid</u> kommer att ha en area A_i så att

$$f(l_i) \cdot \Delta x_i \le A_i \le f(u_i) \cdot \Delta x_i$$

Givet en partition P kan vi definiera den nedåt begränsande Riemann-summan $L(f,P)$ och den övre begränsande $U(f,P)$ som:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i) \cdot \Delta x$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \cdot \Delta x$$

Om f beter sig "vettigt" och P blir en finare och finare partion av intervallet $[a,b]$ där $||P|| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ så <u>borde</u> $\lim_{n\to\infty} L(f,P) = \lim_{n\to\infty} U(f,P)$ oavsett val av partition P. I så fall är det ett rimligt mått av arean under funktionsgrafen. Detta definierar den <u>definita intergralen</u> av f mellan a och b.

Definition (definit integral) (tenta) Antag att det finns precis ett enda tal I så att det för varje partition P av $[a, b]$ gäller att: $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$ I så fall säger man att f är intergrerbar över $[a, b]$ och vi kallar talet I för den definita integralen av f över $[a, b]$. Detta skrivs symboliskt som

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Notera att $\int_a^b f(x)\, dx$ är ett tal och inte en funktion. "Variabeln" x existerar endast inuti integralen och kallas för integrationsvariabel. Talen a och b kallas nedre- och övre-integransgräns. Funktionen f kallas för integrand och dx för differntialen.

Definierade utifrån Riemann-summor är en hörnsten inom matematisk analys tillsammans med definitionen av derivatan och definitionen av gränsvärde. Räcker gott och väl för praktiska tillämpningar men ej för vidare teoretiskt arbete (då används Lebesque integralen).