MVE045 - Matematisk Analys

Max "Krysset" Hagman

September 1, 2022

Contents

1 Mängder och delmängder **2**

2 Intervall **4**

3 Komplexa tal **7**

4 Funktioner **8**
4.1 Funktioner och funktionsgrafer 8
4.2 Kompositioner 8

5 Polynom och rationella funktioner **10**
5.1 Polynomdivision 10

6 Grundläggande trigonometri **12**

7 Talföljder och gränsvärden **14**

Chapter 1

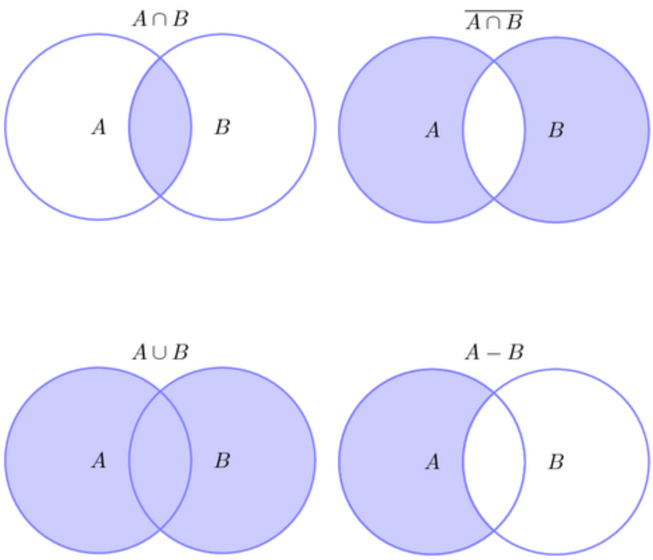
Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentallt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för element.

En mängd A bestående av elementen a_1, a_2, ... , a_n skrivs som $A = [a_1, a_2, ..., a_3]$. Om A och B är två olika mängder så betecknar $A \cup B$ alla element som tillhör A eller B. $A \cap B$ alla element som tillhör A och B. Konstruktionen $A \cup B$ kallas för unionen av A och B och $A \cap B$ kallas för snittet.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade venndiagram:



Ett par saker till

- $\varnothing = \{\}$, den tomma mängden
- A^c alla element som inte finns i A (kallas komplementet)
-

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matetmatik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{..., -2-, -1, 0, 1, 2, ...\}$ heltalen
- $\mathbb{Q} = \{\text{Alla talen på formen } \frac{p}{q}\}$, där $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
- $\mathbb{R} = \{\text{Alla decimaltal}\}$ de reella talen
- $\mathbb{C} = \{\text{alla tal } a + ib\}$, de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ speciellt i fokus.

Chapter 2

Intervall

Ett <u>intervall</u> är en delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och <u>alla</u> tal mellan två av sina element.
Mer konkret:

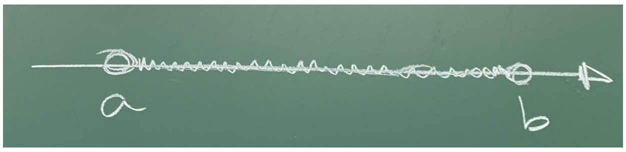


Figure 2.1: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ skrivs (a, b)

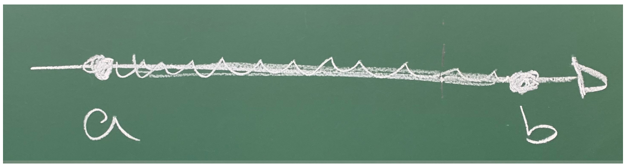


Figure 2.2: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,]$

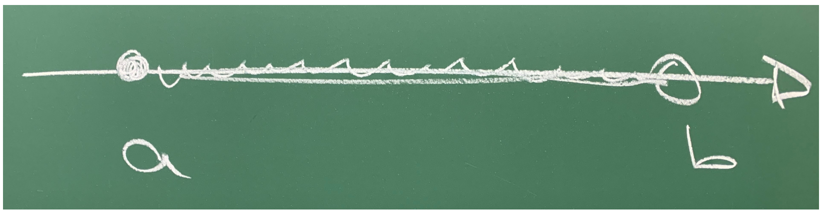


Figure 2.3: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,)$

Ex Lös olikheten $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$ och uttryck svaret som ett intervall eller en union av flera intervall.

Lösning Måste försöka skriva om olikheten till faktoriserad form!

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4+x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{2x} \geq 0$$

Hitta nollställena till $x^2 - 2x - 8$ genom kvadratkomplettering!

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \Leftrightarrow x = 4$ eller $x = -2$

Kan nu skriva om $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ som $\frac{(x-4)(x+2)}{2x} \geq 0$. Härifrån kan man använda metoden med teckenstudium:

		-2		0		4	
$\frac{1}{2}x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Tot	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ser att $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ uppfylls i intervallen $[-2, 0]$ och $[4, \infty)$ och kan skriva lösningen som $[-2, 0) \cup [4, \infty)$.

Absolutbelopp Absolutbelopp av ett tal $x \in \mathbb{R}$ definieras som:

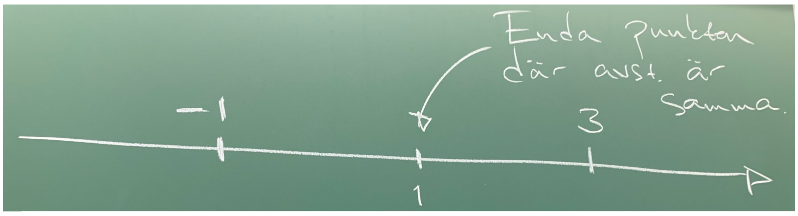
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

Följande tolkning gäller: Givet ett tal $a \in \mathbb{R}$ så gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $|x - a| =$ avståndet mellan x och a.

Vidare gäller också, givet ett fixt tal $D \geq 0$, att $|x - a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow$ mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ vars avst. till a är $\overset{<}{\underset{>}{=}} D$, dvs $|x - a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow \begin{matrix} a - D < x < a + D \\ x = a - D \\ x < a - D, x > a + D \end{matrix}$

Ex (P1.41)
Lös olikheten $|x+1| > |x-3|$ genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

Lösning
$|x+1| = |x-(-1)| =$ "avst mellan x och (-1)"
$|x-3| =$ "avst. mellan x och 3"
Så "avst. mellan x och (-1)" > "avst. mellan x och 3"
Till höger om 1 så kommer x alltid att vara längre från (-1) än 3.



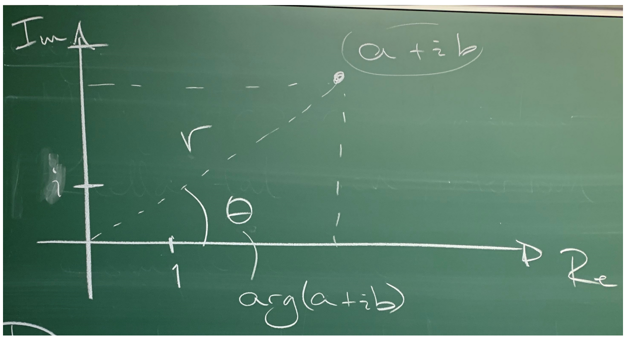
Chapter 3

Komplexa tal

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan alltid skrivas på formen $z = a + i \cdot b$ där

- a kallas för realdelen av z $Re(z)$
- b kallas för imaginärdelen av z $Im(z)$

Den imaginära enheten i löser definitionsmässigt ekv. $x^2+1 = 0$, dvs $i = \sqrt{-1}$. Rent visuellt kan man betrakta ett komplext tal $a + ib$ som en punkt i det komplexa talplanet.
Det gäller att $r^2 = |a + ib|^2 = \vdots = a^2 + b^2$. Givet r och argumentet θ kan alla kompexa tal skrivas $z = r(cos(\theta) + i \cdot sin(\theta))$



Chapter 4

Funktioner

4.1 Funktioner och funktionsgrafer

En funktion beskriver sambandet mellan in- och ut-data och kan bidra till ökad förståelse av hur olika processer hänger ihop. Klassisk machine learning handlar mycket om att just hitta bra funktioner för att relatera in- och ut-data (supervised learning).

I envariabelanalys studeras funktioner som relaterar ett tal till ett annat. Kan tänkas som en "regel" f som avbildar ett givet tal x till ett annat tal y.

Alla de värdena som är tillåtna att mata in i f kallas för funktionens definitionsmängd och betecknas $D(f)$. Mängden av alla y-värden som funktionen kan leverera kallas för värdemängden och skrivs $R(f)$ (range).

Ex Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ har $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

En funktionsgraf (eller bara en graf) givet en funktion f utgörs av alla punkter $(x, y) = (x, f(x))$. Några viktiga concept:

- En funktion sägs vara jämn om $f(-x) = f(x)$ då $(x \in D(f))$.
  Betyder att f är symmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion sägs vara udda om $f(-x) = -f(x)$.
  Betyder att f är antispegelsymmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion är injektiv om det för varje par $x_1, x_2 \in D(f)$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.
- En funktion f som avbildar en mängd tal $\boldsymbol{x}$ på en annan mängd $\boldsymbol{y}$, dvs $f : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ sägs vara surjektiv om $\boldsymbol{y} = R(f)$.

4.2 Kompositioner

En vanlig konstruktion är att kombinera två separata funktioner till en ny genom komposition. Kan göras på två sätt:

1. $f \circ g(x) := f(g(x))$

2. $g \circ f(x) := g(f(x))$

Notera att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet!

Chapter 5

Polynom och rationella funktioner

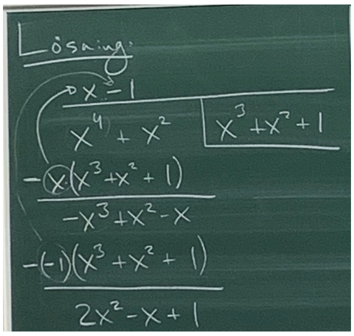
Ett polynom är en funktion som kan skrivas som: $P(x) = a_1 \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + ax + a_0$ där $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}$ kallas för polynomets koefficienter och talet n (positivt heltal) kallas för polynomets grad. En rationell funktion $R(x)$ är en funktion som kan skrivas som en kvot på två polynom $P(x)$ och $Q(x)$, dvs $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Definitionsmängden $D(R)$ begränsas enbart av nollställena till $Q(x)$, dvs. $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

5.1 Polynomdivision

Rationella tal kan alltid skrivas som en heltalsdel + rest:
$\frac{29}{6} = \frac{4*6+5}{6} = \frac{4*6}{6} + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$
Motsv. funkar även för rationella funktioner och metoden för att hita "heltalsdelen" och "resten" kalla polynomdivison.

Ex (P6.18) Uttryck $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$ som summan av ett polynom och en rationell funktion.

Lösning



Eftersom polynomet $2x^2 - x + 1$ har lägre grad än nämnaren $x^3 + x^2 + 1$ tar divisionsalgo. slut. Vi har fått att $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1} = (x-1) + \frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2+1}$$\square$.

Enligt Aritmetikens fundamentalsats så kan alla positiva heltal alltid skrivas som en unik faktorisering av primtal, t.ex $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Liknande resultat finns för polynom! Algebrans fundementsats säger att varje polynom av grad n har exakt n st. nollställen (ev. komplexa och räknade med multiplicitet). Vidare gäller också faktorsatsen:

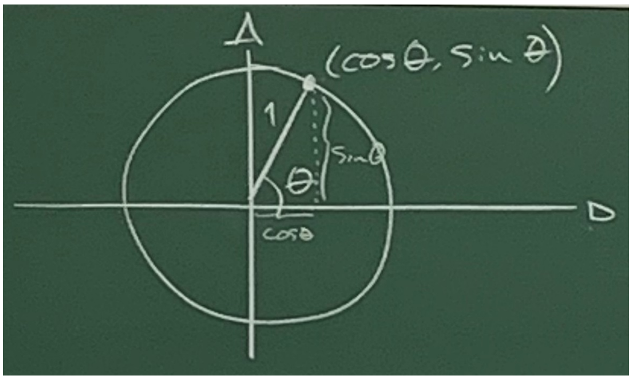
Sats Talet r är en rot (dvs ett nollställe) till ett polynom P av grad minst 1 om och endast om $(x - r)$ är en faktor av $P(x)$.

Eftersom alla polynom P av grad ≥ 1 har precis n st. nollställen säg $r_1, ..., r_n$ kan man alltid faktorisera ett polynom som $P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$.

Chapter 6

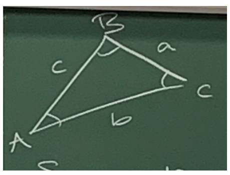
Grundläggande trigonometri

De trigonometriska frunktionererna $\cos\theta$ och $\sin\theta$ def. som x- respektive y-koordinaten på den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln θ. Pythago-



ras sats ger omedelbart att $\cos^2\theta + \sin\theta = 1$, även kallat trigonometriska ettan. Vinkeln θ mäts oftast i radianer men kan också mätas i geader. Det gäller att π radianer motsvarar 180° grader.

Utifrån sin och cos definieras vidare funktionen tangens som $tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Två trigonometriska samband som är viktiga är sinus- och cosinus-satsen:

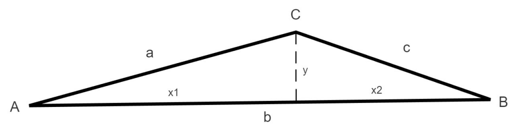


Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos A$

Ex (P6.53) Visa att arean på en godtycklig triangel ABC kan beräknas som $\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$.

Lösning Area= $\frac{x_z \cdot y}{2} + \frac{x_2 \cdot y}{2} = \frac{x_1 \cdot y + x_2 \cdot y}{2}$. Men $\sin A = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot \sin A \Rightarrow$ $Area = \frac{x_1 \cdot c \sin A + x_2 c \sin A}{2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot c \cdot \sin A}{2} = \{x_1 + x_2 = b\} = \frac{1}{2}bc \sin A$. De andra formulerna följer analogt. □



Chapter 7

Talföljder och gränsvärden

Studium av talföljder är ett av matematikens mest klassiska områden. Vi har exempelvis:

- Fibonacci-talföljden, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$, återfinns i olika sammanhang i naturen.
- Primtalssekvensen, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$, finns formel för att beskriva sekvensen? (olöst)

Ska försöka formalisera begreppen i synnerhet för oändligt långa talföljder.
Låt $\{a_1, a_2, a_3, ...\} = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ vara en godtycklig talföljd. Man säger att $\{a_n\}$ är:

- Begränsad ovan-/underifrån om det finns ett tal L sådant att $a_n \leq L / a_n \geq L\ \forall n = 1, 2, 3, ...$
- Begränsad om den är begränsad <u>både</u> ovan- och underifrån.
- Positiv/Negativ om $a_n \geq 0 / a_n \leq 0, \forall n = 1, 2, ...$
- Växande/Avtagande om $a_{n+1} \geq a_n / a_{n+1} \leq a_n, \forall n = 1, 2, 3, ...$
- Monoton om talföljden är antingen växande eller avtagande
- Alternerande om $a_{n+1} \cdot a_n < 0, \forall n = 1, 2, 3, ...$

Ett viktigt begrepp för talföljder (och funktioner) är <u>konvergens</u>, dvs. om talföljden "stannar av" och håller sig oförändrad om man bara kollar tillräckligt långt in i följden (dvs. n stort). Måste försöka precisera vad detta betyder ren matematiskt.

Definition Konvergent talföld
Man säger att en talföljd a_n konvergerar mot $L \in \mathbb{R}$ och skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, om det för varhe positivt tal $\varepsilon > 0$ existerar ett positivt heltal N så att det för alla $n \leq N$ gäller att $|a_n - L| \leq \varepsilon$.

Intuitivt $\{a_n\}$ konvergerar mot L om alla tal tillräckligt långt in i följden ligger godtyckligt nära talet L. Av detta följder "enkelt" att:

- om $\{a_n\}$ konvergerar så är den begränsad.
- om $\{a_n\}$ är begränsad ovanifrån och växande så är $\{a_n\}$ konvergent. Motsvarande för begränsad underifrån och avtagande.

Bra räknelagar:

- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, om $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- om $a_n \leq b_n \leq c_n$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ex (9.1.25) Bestäm om möjligt det tal L som $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$ konvergerar mot då $n \to \infty$

Lösning Det gäller att

$$\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2-1} = \sqrt{(n+1)\cdot n} - \sqrt{(n+1)(n-1)} = \sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) =$$

$$\sqrt{n+1}\cdot\frac{(\sqrt{n}\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n+1}\cdot\frac{(n-(n-1))}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$\text{och } \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2(n-1)} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{2(n-1)} =$$

$$\frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{n})}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}$$

så $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2}\square$

Ett av de mest kraftfulla verktygen inom matematisk analys är gränsvärden för funktioner, dvs $\lim_{x\to a} f(x), a \in \mathbb{R}$. Det ger oss derivator, integraler, differentialekvationer, ... Hur ska man definiera gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$? Skulle kunna inspireras av definitionen för talföljder.

Definition (försök) Man säger att $f(x)$ konvergerar mot värdet $L \in \mathbb{R}$ då x går mot $a \in \mathbb{R}$ om det för varje talföljd $\{x_n\}$ s.a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$.

Bättre definition i liknande riktning är dock.

Definition Man säger att $f(x)$ går mot gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ då x går mot $a \in \mathbb{R}$ och skriver $\lim_{x\to a} f(x) = L$, om det för varje tal $\varepsilon > 0$ existerar ett annat tal $\delta > 0$ (som ev. beror av ε) s.a. om $0 < |x-a| < \delta$ så ligger x i fs definitionsmängd och $|f(x) - L| < varepsilon$.

Ex

1. $f \to L_1$, när $x \to a_1$? Ja! Går alltid att hitta $\delta > 0$ s.a. $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ oavsett ε.

2. $f \to L_2$, när $x \to a_1$? Omöjligt att hitta $\delta > 0$ s.a. $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ om ε litet.

Ex (1.5.19) Använd definitionen av gränsvärde för att bevisa att

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$$

Lösning Vill hitta $\delta > 0$ så att $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$ så länge som $0 < |x - 1| < \delta$ (givet vilket $\varepsilon > 0$ som helst). Gäller att $|\sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$. $\begin{cases} \text{Om } 0 < \varepsilon < \sqrt{x} \leq 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2 \\ \text{Om } \varepsilon > 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < x < (1+\varepsilon)^2 \end{cases}$ Notera att $(1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2$ <u>alltid</u> implicerar att $1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$ dvs $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.

$(1-\varepsilon)^2 < x < (1-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^3 < x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -\varepsilon(2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2+\varepsilon)$

så

$$-\varepsilon \cdot (2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon \cdot (2-\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon(2-\varepsilon) < x - 1 < \varepsilon(2+\varepsilon)$$

om $\varepsilon < 2$. Välj därför $\delta = \varepsilon \cdot (2-\varepsilon)$ om $\varepsilon < 2$. För $\varepsilon \leq 2$, välj t.ex $\delta = 1$ eftersom $|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt{x} - 1 < 2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < 2 \leq \varepsilon\square$