Gruppövning 5 - Grupp A19

Max Hagman, Felix Bjerhem Aronsson,
Fabian Forsman, Zoé Opdendries, Daniel Malmgren

March 7, 2022

Teoriövning 1

(a) För att visa att v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende så antar vi att $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$. Detta ger oss den följande matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Den slutgiltiga matrisen visar att alla vektorerna är linjärt oberoende till varandra.

Då $det(A) \neq 0$ så är våra vektorer baser:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + 0(0 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 9 \neq 0$$

Då våra vektorer är baser innebär det att man kan skriva alla 3-vektorer som en linjärkombination av våra vektorer.

(b)

$$A^n\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1^n\boldsymbol{v}_1 = 1^n \cdot \boldsymbol{v}_1$$
$$A^n\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2^n\boldsymbol{v}_2 = 0.8^n \cdot \boldsymbol{v}_2$$
$$A^n\boldsymbol{v}_3 = \lambda_3^n\boldsymbol{v}_3 = 0.6^n \cdot \boldsymbol{v}_3$$
$$A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v}$$

(c) Då $A^n\boldsymbol{v}$, $n \to \infty$ får vi:

$$x_1v_1 1^\infty + x_2v_2 0.8^\infty + x_3v_3 0.6^\infty = x_1v_1$$

Då $\lambda_2, \lambda_3 < 1$ innebär det att termenerna går mot 0.
λ_1 är 1 oavsett n vilket gör att det som påverkar den termen är x_1.

(d)

Fall $\lambda > 1$:

$$A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v} = \infty \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\infty}$$

Fall $\lambda = 1$:

$$A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v} = 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

Fall $0 < \lambda < 1$:

$$A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{v}$$

Fall $\lambda < 0$: Tyvärr odefinierat

(e) Vi låter $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ och $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$.
För att beräkna 3×3-matrisen A så använder vi formeln $A = PDP^{-1}$

Datorövning 2

(a) Se upg2.m

(b) Se upg2.m