MVE045 - Matematisk Analys

Max "Krysset" Hagman

August 30, 2022

Contents

1 Mängder och delmängder **2**

2 Intervall **4**

3 Komplexa tal **7**

4 Övningar **8**

Chapter 1

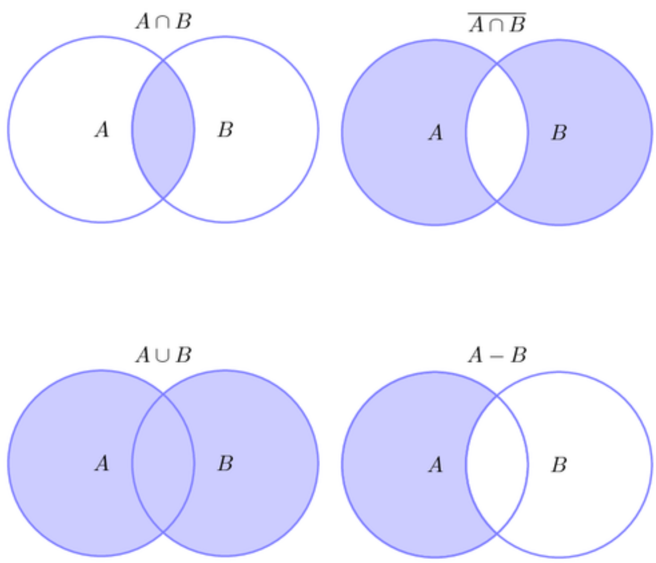
Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentallt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för element.

En mängd A bestående av elementen a_1, a_2, ... , a_n skrivs som $A = [a_1, a_2, ..., a_3]$. Om A och B är två olika mängder så betecknar $A \cup B$ alla element som tillhör A eller B. $A \cap B$ alla element som tillhör A och B. Konstruktionen $A \cup B$ kallas för unionen av A och B och $A \cap B$ kallas för snittet.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade venndiagram:



Ett par saker till

- $\varnothing = \{\}$, den tomma mängden
- A^c alla element som inte finns i A (kallas komplementet)
-

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matetmatik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{..., -2-, -1, 0, 1, 2, ...\}$ heltalen
- $\mathbb{Q} = \{\text{Alla talen på formen } \frac{p}{q}\}$, där $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
- $\mathbb{R} = \{\text{Alla decimaltal}\}$ de reella talen
- $\mathbb{C} = \{\text{alla tal } a + ib\}$, de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ speciellt i fokus.

Chapter 2

Intervall

Ett <u>intervall</u> är en delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och <u>alla</u> tal mellan två av sina element.
Mer konkret:

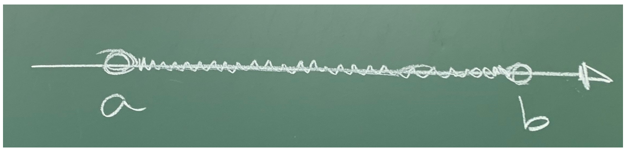


Figure 2.1: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ skrivs (a, b)

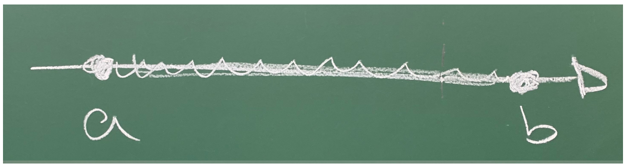


Figure 2.2: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,]$

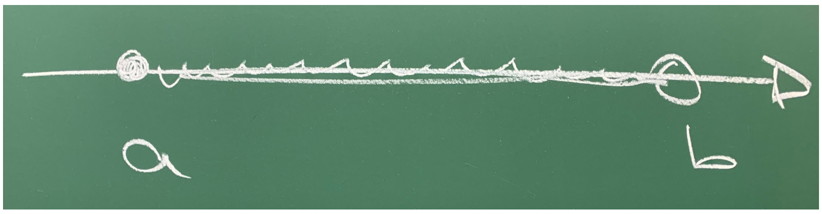


Figure 2.3: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a,)$

Ex Lös olikheten $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$ och uttryck svaret som ett intervall eller en union av flera intervall.

Lösning Måste försöka skriva om olikheten till faktoriserad form!

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4+x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$$

Hitta nollställena till $x^2 - 2x - 8$ genom kvadratkomplettering!

$x^2-2x-8 = 0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot 1\cdot x+1-1-8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-9 = 0 \Leftrightarrow x = 1\pm\sqrt{9} = 1\pm 3 \Leftrightarrow x = 4$ eller $x = -2$

Kan nu skriva om $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ som $\frac{(x-4)(x+2)}{2x} \geq 0$. Härifrån kan man använda metoden med teckenstudium:

		-2		0		4	
$\frac{1}{2}x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Tot	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ser att $\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0$ uppfylls i intervallen $[-2, 0]$ och $[4, \infty)$ och kan skriva lösningen som $[-2, 0) \cup [4, \infty)$.

<u>**Absolutbelopp**</u> Absolutbelopp av ett tal $x \in \mathbb{R}$ definieras som:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x \leq 0 \end{cases}$$

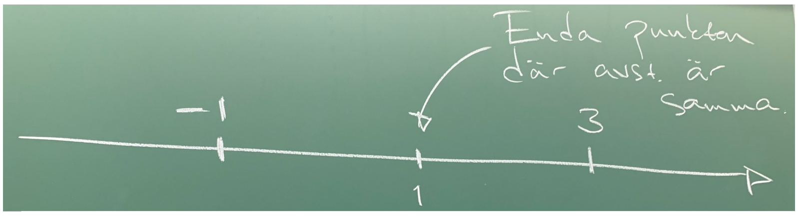
Följande tolkning gäller: Givet ett tal $a \in \mathbb{R}$ så gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $|x-a| =$ avståndet mellan x och a.

Vidare gäller också, givet ett fixt tal $D \geq 0$, att $|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow$ mängden av alla

$x \in \mathbb{R}$ vars avst. till a är $\overset{<}{\underset{>}{=}} D$, dvs $|x-a| \overset{<}{\underset{>}{=}} D \Leftrightarrow \begin{array}{c} a-D < x < a+D \\ x = a-D \\ x < a-D, x > a+D \end{array}$

Ex (P1.41)
Lös olikheten $|x+1| > |x-3|$ genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

Lösning
$|x+1| = |x-(-1)|$ = "avst mellan x och (-1)"
$|x-3|$ = "avst. mellan x och 3"
Så "avst. mellan x och (-1)" > "avst. mellan x och 3"
Till höger om 1 så kommer x <u>alltid</u> att vara längre från (-1) än 3.



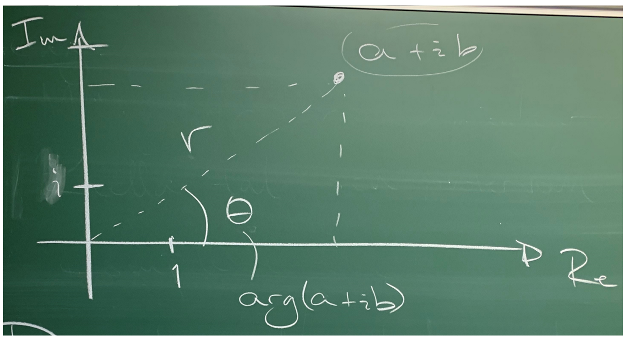
Chapter 3

Komplexa tal

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan alltid skrivas på formen $z = a + i \cdot b$ där

- a kallas för <u>realdelen</u> av z $Re(z)$
- b kallas för <u>imaginärdelen</u> av z $Im(z)$

Den imaginära enheten i löser definitionsmässigt ekv. $x^2+1=0$, dvs $i = \sqrt{-1}$. Rent visuellt kan man betrakta ett komplext tal $a+ib$ som en punkt i det komplexa talplanet.
Det gäller att $r^2 = |a+ib|^2 = \vdots = a^2+b^2$. Givet r och argumentet θ kan <u>alla</u> kompexa tal skrivas $z = r(cos(\theta) + i \cdot sin(\theta))$



Chapter 4

Övningar

Här är kommer uppgifter med lösningar från övningspassen

P1

21
Lös olikheten $x^2 - 2x \leq 0$. Svara i termer av intervall.
Notera: $f(x) = x^2 - 2x$ är kontinuerlig på hela reella linjen.

Lösning:
Först löser vi nollställen till vänsterledet, alltså $x^2 - 2x$. Vi ställer upp följande:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

Då är våra lösningar $x = 0$ och $x = 2$. Med denna information gör vi en tabell.

		0		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Tot	$+$	0	$-$	0	$+$

Då x ska vara mindre än 0 letar vi efter intervallet i tabellen som uppfyller det kravet. I denna uppgiften var det $[0, 2]$ Svar: $[0, 2]$

P2

29
Finn intercept och lutning till linjen $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 2$. Skissa grafen till linjen.

Lösning
Linjen korsar x och y axeln då y respektive x är 0. Alltså:

- $x = 0$ ger: $0 - \sqrt{3}y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $y = 0$ ger: $\sqrt{2}x - 0 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Nu har vi två punkter där linjen korsar x- och y-axeln, $(0, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ och $(\sqrt{2}, 0)$. Med $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kan vi räkna ut lutningen.

$$\frac{-(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + 0}{0 - \sqrt{2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Svar: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

33
Finn skärningspunkterna till linjerna $3x + 4y = -6$ och $2x - 3y = 13$.

Lösning:
Vi ställer upp de båda linjerna i ett ekvationssystem. Man kan lösa detta genom gausselimination men vi gör det genom substitution.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -6 \\ 2x - 3y &= 13 \end{aligned}$$

Vi separerar x: $3x + 4y = -6 \Leftrightarrow 3x = -6 - 4y \Leftrightarrow x = -2 - \frac{4}{3}y$
Vi substituerar x med det vi fick:

$$2x - 3y = 13 \Leftrightarrow 2 \cdot (2 - \frac{4}{3}y) - 3y = 13 \Leftrightarrow -4 - \frac{8}{3}y - \frac{9}{3} = 13 \Leftrightarrow -\frac{17}{3}y = 17 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}y = 1 \Leftrightarrow y = -3$$

Då vi vet vad y är kan vi räkna ut punktens x värde med ytterliggare en substitution. $4x + 4(-3) = -6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$
Svar: $(2, -3)$

A1

13
Bestäm absolutbeloppet och argument för $z = \sqrt{3} - i$

Lösning
Absolutbeloppet av ett komplext tal räknas ut genom att betrakta talet som en punkt i det komplexa talplanet och räkna ut avståndet från origo till punkten. Alltså använder vi pythagoras sats: $|z|^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{4} = 2$. Nu ska vi räkna ut $arg(z)$. Vi får en triangel som har sidorna $\sqrt{3}, 1, 2$. Vinkeln kan man då räkna ut med $tan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°$. Svar: $|z| = 2$ och $arg(z) = 30^{circ}$