Anteckningar TMV206 - Linjär Algebra

Max "Krysset" Hagman

March 4, 2022

Contents

Chapter 1

Geometriska vektorer

När man säger vektor menar man ofta en matris på formeln av en kolonnvektor, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ eller en radvektor, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Så kommer det även vara för oss. Men vi börjar med att diskutera geometriska vektorer.

Definition: En geometrisk vektor är ett objekt som har både storlek och riktning. Storleken av vektorn $\mathbb{V}$ betecknas $||\mathbb{V}||$ och kallas för vektorns längd. Det finns en vektor, nollvektorn $\mathbf{0}$, som har längd 0 men saknar riktining.
Vi tänker på en geometrisk vektor som en pil $\longrightarrow$
Men en pil har en start- och en slut-punkt. Det har inte vektorer. Vektorer vestäms av deras längd och riktning.

Definition: Vi säger att två vektorer är lika om de har samma längd och samma riktning.

Ex Vektorerna $\longrightarrow$ och $\rightarrow$ är inte lika för de har inte samma längd. De har dock samma riktning.
Vektorerna $\rightarrow$ och $\downarrow$ är inte lika. De har samma längd (kanske inte blir det i pdf:en) men inte samma riktning.
Vektorerna $\nearrow$ och $\nearrow$ är lika. De har samma längd och samma riktning. Start och slutpunkt spelar ingen roll!

Ex Hastighet är en vektor. I detta fall kallas storleken för fart (speed).

Givet två punkter A och B så betecknar $\overrightarrow{AB}$ vektron från A till B. $A \longrightarrow B$
Vi vill kunna räkna med vektorer, dvs göra vektoralgebra.

Definition: Givet en vektor $\boldsymbol{v}$ och ett tal $a \neq 0$ så är vektorn av den vektorn som uppfyller

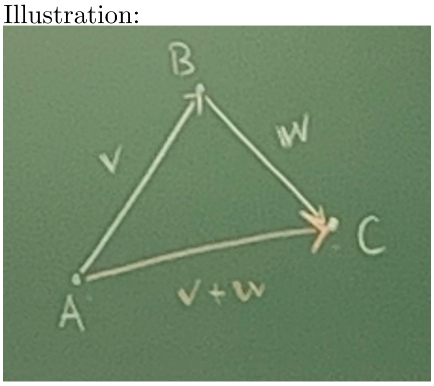
1. $||a \cdot \boldsymbol{v}|| = ||a|| \cdot ||\boldsymbol{v}||$
2. om $a > 0$ då har $a\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{v}$ samma riktning
3. om $a < 0$ då har $a\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{v}$ motsatt riktning

Vi låter $0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Ex Om vektorn $\boldsymbol{v}$ ges av $\nearrow$ då är $2\boldsymbol{v}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ och $(-1)\boldsymbol{v}$ vektornerna $\nearrow$ (dubbla längden) $\nearrow$ (halva längden) $\swarrow$

Ex Om $\boldsymbol{v}$ är en vektor med positiv längd, då är $\boldsymbol{w} = \frac{1}{||\boldsymbol{v}||}$ är en vektor med längd 1. Låt oss kolla detta: $||\boldsymbol{w}|| = ||\frac{1}{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = |\frac{1}{||\boldsymbol{v}||}| \cdot ||\boldsymbol{v}|| = \frac{1}{||\boldsymbol{v}||}||\boldsymbol{v}|| = 1$.
En vektor med längd 1 kallas för en <u>enhetsvektor</u>.

Definition: Om $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$ och $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{BC}$ då definierar <u>summan av $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$</u> som $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \overrightarrow{AC}$
Illustration:



Det är ingen inskränkning att anta att $\boldsymbol{w}$ börjar där $\boldsymbol{v}$ slutar eftersom vi får flytta vektorer.

1.0.1 Räkneregler

1. $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{v}$
2. $(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
3. $a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{w}$
4. $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}$
5. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

Räkneregel 5 gör att vi kan skippa paranteser när vi adderar flera vektorer.
Vi skriver $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

1.1 Linjärkombinationer

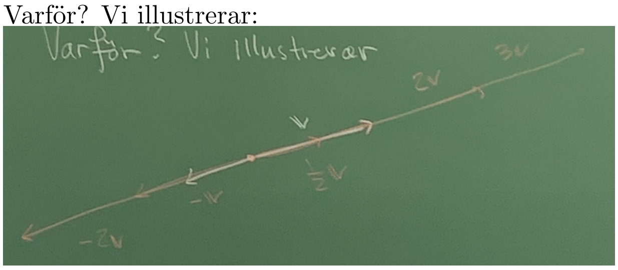
Definition Låt V vara en mängd vektorer och $v_1, ..., v_n \in V$. En vektor på formen $\boldsymbol{v} = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ sägs vara en linjärkombination av $v_1, v_2, ..., v_n$. Mängden av alla linjärkombinationer av vektorer från V kallas spannet av V och betecknas span(V).

Ex Givet $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ så är t.ex $2\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w}$ en linjärkombinationav $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$.

Ex Varje vektor $\boldsymbol{v}$ är en linjärkombination av sig själv, ty $v = 1 \cdot \boldsymbol{v}$

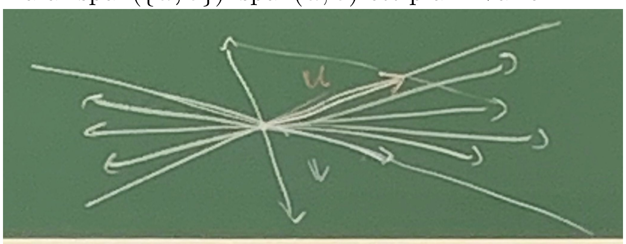
Ex Nollvektorn $\boldsymbol{0}$ är en linjärkombination av varje mängd $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorer, ty $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{v_1} + 0v_2 + ... + 0v_n$.

Ex Låt $\boldsymbol{v}$ vara en noll-skild vektor. Då är span($\boldsymbol{v}$) (=span($\{\boldsymbol{v}\}$)) en linje. Varför? Vi illustrerar:



Varje sådan vektor $\boldsymbol{v}$ kallas för en riktningsvektor för linjen.

Ex Vi säger att två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella om de har samma eller motsatt riktning. Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två nollskilda och icke-parallella vektorer. Då är span($\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$)=span($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$) ett plan. Varför?



1.2 Skalärprodukten

Definition Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer och låt α vara den minsta vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Vi definierar skalärprodukten av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ genom
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha)$.
Observera att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ är ett tal (en skalär).

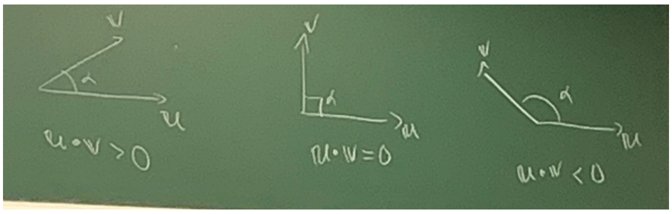
Ex $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = ||\boldsymbol{u}||^2 cos(0) = ||\boldsymbol{u}||^2$

Ex Vi har att (antag att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är nollskilda)
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala (vinkelräta)

Lösning $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow bmu, \boldsymbol{u}$ ortogonala

Proposition 1.16 Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara nollskilda vektorer och låt *alpha* vara vinkeln mellan dem. då gäller att

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha$ spetsig
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha$ rät
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0 \Leftrightarrow \alpha$ trubbig

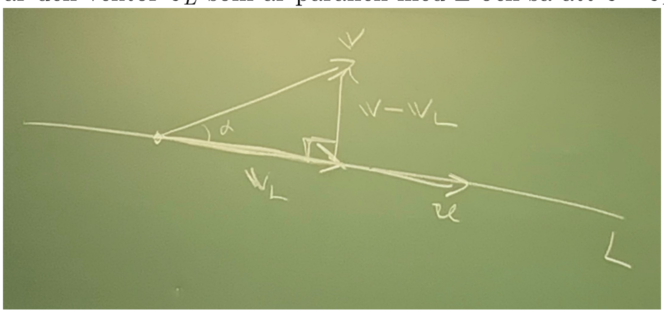


Bevis Eftersom $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha)$ så har $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ samma tecken som $cos(\alpha)$. Så

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) > 0$
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) = 0$
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) < 0$

Påståendet följer av egenskaper för cosinus. $cos(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Definition Låt $\boldsymbol{v}$ vara en vektor och L en linje. Den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på L är den vektor $\boldsymbol{v}_L$ som är parallell med L och så att $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_L$ är ortognal med L.



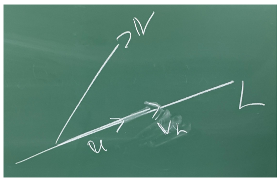
Proposition 1.18 Låt α och $\boldsymbol{v}$ vara vektorer och L en linje med riktningsvektor $\boldsymbol{u}$. Då gäller att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_L$

Bevis Låt α vara vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Antag att α är spetsig. Då $cos(\alpha) = \frac{||\boldsymbol{v}_L||}{||\boldsymbol{v}||}$.
Vi får $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha) = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cdot \frac{||\boldsymbol{v}_L||}{||\boldsymbol{v}||} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}_L|| cos(0) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_L$ v.s.b

Proposition 1.19

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
2. $(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
3. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$

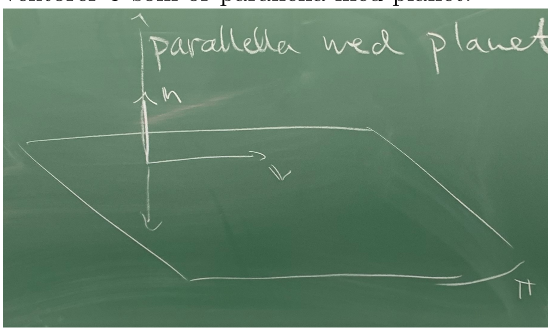
Sats 1.20 Låt $\boldsymbol{u}$ vara en riktningsvektor för linjen L. Då gäller att $\boldsymbol{v}_L = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ och $\|\boldsymbol{v}_L\| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\|}$.



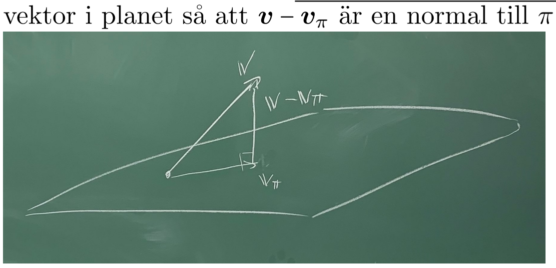
Bevis Vi vet att $\boldsymbol{v}_L$ och $\boldsymbol{u}$ är parallella och därför $\boldsymbol{v}_L = t\boldsymbol{u}$ för något $t \in \mathbb{R}$.
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{u} \cdot (t\boldsymbol{u}) \Rightarrow t = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$.
Alltså $\boldsymbol{v}_L t\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ och $\|\boldsymbol{v}_L\| = \|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot v}{\|\boldsymbol{u}\|u^2}\|\boldsymbol{u}\| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\|}$

Definition

- En nollskild vektor $\boldsymbol{n}$ är en normal till ett plan π om $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ för alla vektorer $\boldsymbol{v}$ som ör parallella med planet.



- Givet en vektor $\boldsymbol{v}$ så är den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på π, $\boldsymbol{v}_\pi$, den vektor i planet så att $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\pi$ är en normal till π.

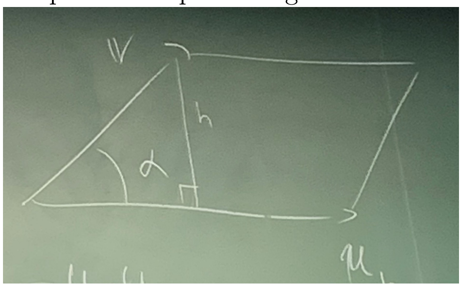


Proposition 1.23 $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})_\pi = \boldsymbol{u}_\pi + \boldsymbol{v}_\pi$ (Inget bevis den här gången)

1.3 Vektorprodukten

När vi studerar vektorprodukter är det viktigt att våra vektorer är i rummet.

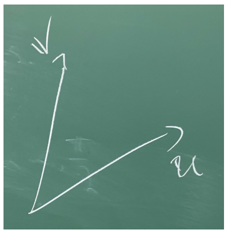
Definition En vektortrippel $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ sägs vara höger-orienterad om vyn från $\boldsymbol{w}$:s spets ger att den minsta vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ get att $\boldsymbol{u}$ vrids moturs mot $\boldsymbol{v}$. Annars sägs trippeln vara vänsterorienterad.
Givet två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ så spänner de ett plan. Vi kan även se det som att de spänner ett parallellogram



Arean av detta parallellogram är $||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| sin(a)$.

Definition Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer.
Vektorprodukten (kryssprodukten) av dem är vektorn $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ så att

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$ om $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ är parallella
2. $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| sin(a)$
3. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ är högerorienterad.



Proposition 1.32

1. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$
2. $(c\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
3. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$

Chapter 2

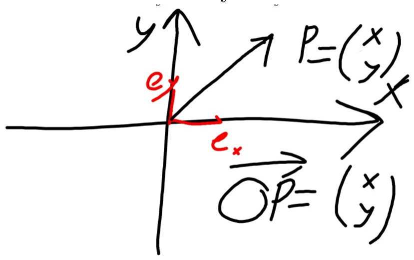
Koordinatsystem (Avs. 1.5)

2.1 Koordinatsystem i ett plan

Vi inför ett koordinatsystem i planet som följer:

1. Vi fixerar en punkt O, som vi kallar origo
2. Vi väljer två vektorer $\boldsymbol{e}_x$ och $\boldsymbol{e}_y$ som är ortogonala mot varann, dvs vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{2}$. Varje vektor $\boldsymbol{v}$ i planet kan skrivas $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$.
3. x och y kallas för $\boldsymbol{v}$:s koordinater med avseende på basen $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$

Givet en bas skriver vi $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Om $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ säger vi att punkten P har koordinatern x och y.



Den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på x-axeln ges av $x\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} x \\ O \end{pmatrix}$.

2.2 Koordinatsystem i ett rum

Vi inför ett koordinatsystem i rummet som följer.

1. Vi fixerar en punkt O, origo
2. Vi väljer tre enhetsvektorer $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ som är parvis ortogonala.

   Vi skriver detta som $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
3. Vi kallar x,y,z för $\boldsymbol{v}$:s koordinater med avseende på basen $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$.

En bas $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ av enhetsvektorer och där vektorerna är parvis ortogonala kallas för en ON-bas (Orto Normal bas).

Om $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ så säger vi att punkten P har koordinaterna x,y,z,
alltså $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$
Vi väljer (nästan alltid) en ON-Bas så att $(\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z)$ är högerorienterad

Proposition 1.37 Följande regler gäller för koordinaterna av vektorer:

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$
2. $c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$

Sats 1.38 Om $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i en ON-bas då är
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
$\|\boldsymbol{u}\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

Bevis Låt $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ vara ON-basen.
Då är $\|\boldsymbol{e}_x\| = 1 = \|\boldsymbol{e}_y\| = \|\boldsymbol{e}_z\|$ och $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0 = \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z$.
Vi har dessutom att

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_x + y_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v} = x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (x_1\boldsymbol{e}_x + y_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_z) \cdot (x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z) =$
$= x_1x_2\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x + y_1y_2\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y + z_1z_2\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = x_1x_2\|\boldsymbol{e}_x\|^2 + y_1y_2\|\boldsymbol{e}_y\|^2 + z_1z_2\|\boldsymbol{e}_z\|^2 =$
$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ v.s.b

Ex Beräkna vinkeln mellan $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning Låt α vara vinkeln. Då är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| cos(\alpha)$
Vi vet att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 6 + 4 + 3 = 13$ $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$ Alltså: $cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||} = \frac{13}{\sqrt{4}\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{2}\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$ Därför är $\alpha = arccos(\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$.

Sats 1.42 Om $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i en högerorienterad ON-bas då är

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Ex Bestäm en vektor som är ortogonal mot både $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösning Vi vet att $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$!

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 4 \\ 9 - 16 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

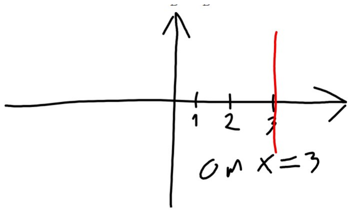
Chapter 3

Linjer och plan (Avs 1.6)

3.0.1 Linjer

Samtliga linjer i planet går att beskriva med en ekvation på $Ax+By+C=0$. Om $B \neq 0$ så är det samma sak som $By = -C - Ax \Leftrightarrow y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x$ så typ $y = kx + m$

Ex Vad är $x = 3$ för linje?
Här är $B = 0$!
Värt att tillägga är att y-axeln beskrivs av ekvationen x=0.



Definition En linje bestäms av en punkt P_0 och en riktningsvektor $\boldsymbol{v}$. Samtliga punkter på linjen går att skriva som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = P_0 + t\boldsymbol{v}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Definition En linje beskriven på formen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_0 + t\boldsymbol{v}$ sägs vara på <u>parameterform</u>.
Alltså är det <u>linjens ekvation på parameterform</u> och t är parametern.

Ex Bestäm en ekvation för den linje som går igenom $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning Vektorn $v = \overrightarrow{QP} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Linjen ges av: $\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$

3.1 Linjer i planet

Vi har Vi har sett att linjer i planet går att beskriva med en ekvation $Ax + By + C = 0$. Detta sägs vara linjens ekvation på normalform.

Vektorn $\begin{pmatrix} 0 \\ -C/B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C/A \\ -C/B \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor.

Men då är även $\frac{AB}{C}\begin{pmatrix} C/A \\ -C/B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor!

Vilket leder till att $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ en normal! Varför? Jo,

$$\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = BA + (-A)B = 0$$

En linje beskriven av ekvationen $Ax + By + C = 0$ har $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ som en normal.

Vektorn $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor.

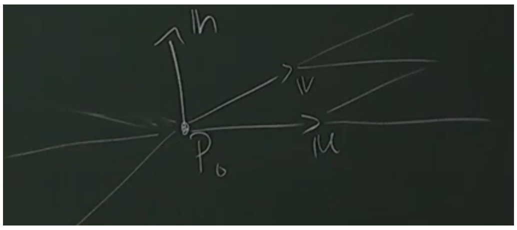
Ex En linje ges av $\begin{Bmatrix} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{Bmatrix}$. Skriv linjen på normalform.

Lösning Vi vill bli av med t!
$t = 1 - x$ och $2t = y - 3 \Leftrightarrow t = \frac{y-3}{2}$
Alltså: $1 - x = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$
Vi ser att $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en normal!

Chapter 4

Plan i rummet

Ett plan bestäms av en punkt och två icke-parallella vektorer som ligger i planet. Ett plan kan dessutom bestämmas av en punkt samt en normalvektor. Vi kan exempelvis välja $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ som normal.

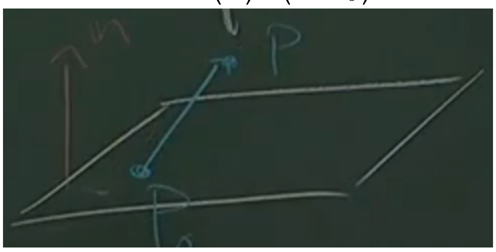


Planets ekvation på parameterform: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

Här är s, t parametrar.

Antag att $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ är en normal till planet. Då är (x, y, z) en punkt planet

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$



Alltså: Planet ges av $Ax + By + Cz + D = 0$ där $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ är en normal till planet!/? Detta är planets ekvation på normalform!

Ex Punkterna $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ligger på ett plan. Skriv ner planets ekvation på parameterform och på normalform.

Lösning

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$$

Planet på parameterform: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 1 - s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 3 + 2d + 5t \end{Bmatrix}$

En normal ges ava $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\cdot 5 - 2\cdot 1\\ 2\cdot 2 - (-1)\cdot 5\\ (-1)\cdot 1 - 2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\9\\5\end{pmatrix}$

Planet ges av $8x = 9y - 5z + D = 0$. Punkten $p = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ liggger på planet!

$8\cdot 1 + 9\cdot 2 - 5\cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow 26 - 15 + D = 0 \Leftrightarrow D = 15 - 26 = -11$

Planets ekvation på normalform: $8x + 9y - 5z - 11 = 0$

4.1 Avstånd från en punkt till en linje

Antag att vi har en linje L och en punkt P. Tag R på linjen och låt Q vara den punkt på L som är närmast P.

Då är $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP_L}$. $d = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RQ}|| = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}||$

Ex Beräkna avståndet från $P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ till linjen L som ges av $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Lösning Låt $R = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ En riktningsvektor för linjen ör $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ Då är $\overrightarrow{RP_L} = \frac{\overrightarrow{RP}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1+2}{1+4}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$d = ||\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP_L}|| = ||\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{5} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{5}\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}|| = \sqrt{0^2 + \frac{2}{5}^2 + (-\frac{1}{5})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{4+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

4.2 Avstånd från en punkt till ett plan

Låt π vara ett plan givet av $Ax + By + Cz + D = 0$ och $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ någon punkt.

Tag $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ i planet.

N är en linje som är normal till π. $d = ||\overrightarrow{P_0 P_N}|| = \frac{||\overrightarrow{P_0 P_N} \cdot \boldsymbol{n}||}{||\boldsymbol{n}||} = \frac{||\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}||}{||\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}||}$

Chapter 5

Matrisoperationer

Definition En matris är ett tvådimensionellt fält av reella tal. Om matrisen har m rader och n kolumner sägs det vara en $(m \times n)$-matris, eller en matris av typ $m \times n$. $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \vdots & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$ Matriser av samma typ adderas komponentvis. Exempelvis:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+8 \\ 4+6 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ Matriser av olika typ adderas inte! Vi har sett exempel på matriser i kolonnvektorer. En matris på formen $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ är en radvektor.

Produkten av en matris med ett reellt tal definieras också ”komponentvis”. Exempelvis:
$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$

Definition Givet en 3×3-matris $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ och en (kolumn)vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ definierar vi deras produkt som

Proposition 2.11

1. $A + B = B + A$
2. $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) =$
3. $(A + B)\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{v}$
4. $A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v}) = (cA)\boldsymbol{v}$

5.1 Produkter av matriser

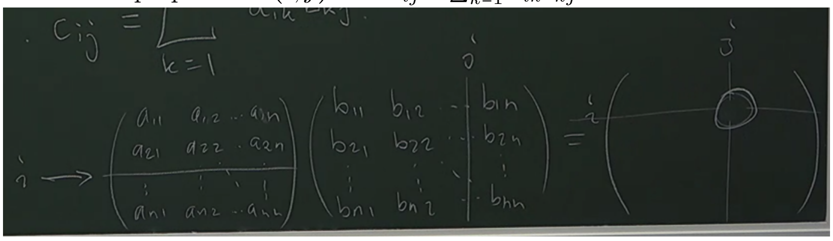
Definition Låt A och B vara 3×3-matriser och $B = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$.

Vi definierar produkten av A och B genom $AB = A \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & A\boldsymbol{b}_3 \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$

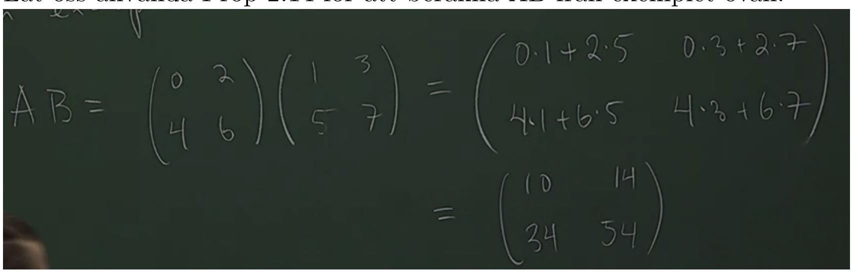
Ex Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Beräkna AB och BA.

Lösning $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 34 & 54 \end{pmatrix}$

Proposition 2.14 Låt A och B vara $n \times n$-matriser där A på position (i, j) har talet a_{ij} och B på position (i, j) har talet b_{ij}. Låt $C = AB$ och låt c_{ij} vara talet för C på position (i, j). Då $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.



Låt oss använda Prop 2.14 för att beräkna AB från exemplet ovan:



Propostion 2.16 Låt A, B, C vara $n \times n$-matriser.

1. $A(cB) = c(AB) = (cA)B$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $A(B\boldsymbol{v}) = (AB)\boldsymbol{v}$
5. $A(BC) = (AB)C$

Kom ihåg att $AB \neq BA$!

Definition Givet en $m \times n$-matris A så ges dess transponat,A^t, av den $n \times m$-matris av att $a^t_{ij} = a_{ji}$.

Ex Om $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ då $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

Definition En $n \times n$-matris A sägs vara symmetrisk om $A^t = A$.

Ex Matriserna $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \\ -1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ är symmetriska.

Proposition 2.21 Låt A,B vara $n \times n$-matriser.

1. $(a^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(cA)^t = cA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

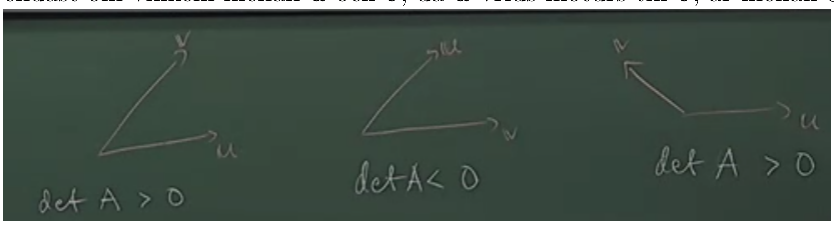
Chapter 6

Determinanter (Avs. 2.2)

Definition Givet en 2×2-matris $a = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ låter vi dess <u>determinant</u> vara $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Ex Om $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ då är $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2$. Om vi låter $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ då är arean av parallellogramet som $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ spänner 2.

Sats 2.24 Låt $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$och låte D vara parallellogramet som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Då är $|det(A)| = area(D)$. Dessutom är $det(A) > 0$ om och endast om vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, då $\boldsymbol{u}$ vrids moturs till $\boldsymbol{v}$, är mellan 0 och π.



Bevis Vad är $area(D)$? Låt L vara en linje som är ortogonal mot $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$. Då är $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$ en riktningsvektor för L ty $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

$area(D) = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}_L|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot \frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{||\boldsymbol{r}^2||} \cdot ||\boldsymbol{r}|| = \frac{||\boldsymbol{u}||}{||\boldsymbol{r}||}|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{c^2+(-a)^2}}|\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}| = bc - da| = |ad - bc = |det(A)|$

Observera att Sats 2.24 speciellt ger att $det(A) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ parallella

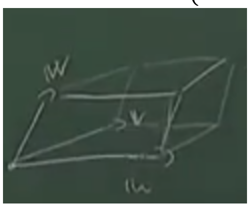
Definition Låt $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$. Då ges dess determinant av $det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)$

En minnesregel för kryssprodukt:
$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ i e_x, e_y, e_z. Då ges $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_x(u_2v_3 - v_2u_3) - e_y(u_1v_3 - v_1u_3) + e_z(u_1v_2 - v_1u_2)$

Proposition 2.28 Låt $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ vara kolumnvektorer i rummet och låt $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$

Då är $det(A) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$.

Sats 2.29 Låt $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ där $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ är kolumnvektorer i rummet och låt V vara volymen av parallellepipeden som spänns av $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.
Då är $det(A) = \begin{cases} V \text{ om } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ högerorienterat} \\ -V \text{ om } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ vänterorienterat} \end{cases}$



Ex Låt $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Avgör om $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ är högerorienterat.

Lösning

$$det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(3\cdot1-1\cdot1)-2(0\cdot1-2\cdot1)+2(0\cdot1-2\cdot3) = 2+4-12 = -6$$

Determinanten är negativ, alltså är $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ vänsterorienterat.

Proposition 2.31 Låt $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ vara vektorer i rummet.

1. $\begin{vmatrix} | & | & | \\ e_x & e_y & e_z \\ | & | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} c\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{w} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}_2 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} = 0$
6. $det(A^t) = det(A)$

Chapter 7

Matris Invers Avs 2.3

Definition En $n \times n$-matris I kallas för en matrisidentitet om $AI = A = IA$ för alla $n \times n$-matriser A. En $n \times n$-matris B sägs vara en invers till A om $AB = I = BA$.

För tal är 1 identiteten och inversen av $a \neq 0$ är $\frac{1}{a}$.
För 2×2-matriser är $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
För 3×3-matriser är $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Dessa är de enda identiteterna.
Om en matris A har en invers då är den unik. Vi betecknar den A^{-1}.

Sats 2.36 En $2{\times}2$-matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har en invers om och endast om $det(A) \neq 0$. Om A har en invers då är den $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Bevis Antag att $det(A) \neq 0$. Då är

$$A(\frac{1}{det(A)}) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} ad - bc & a(-b) + ba \\ cd + d(-c) & c(-b) + da \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} det(A) & 0 \\ 0 & det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Att $(\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix})A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ visas på samma sätt.
Då är alltså $\frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ inversen till A. Antag att $det(A) = 0$.
Eftersom determinanten är arean som spänns av kolumnvektorerna så är kolumnvektorerna i detta fall parallella.

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & k\boldsymbol{u} \end{pmatrix}$ Då är $BA =) (\begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{u} & k\boldsymbol{u} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{u} & k\boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{u} & k\boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$ men också $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Speciellt är $\boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{u} = 0$ men $k\boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{u} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{k}$ vilket är omöjligt! Därför finns det ingen invers! ■

Chapter 8

Geometrisk och linjära avbildningar

8.1 Linjära avbildningar

Definition Låt V och W vara mängder av vektorer. En funktion $f : V \to W$ sägs vara en linjär avbildning om
$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2), \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$
$f(c\boldsymbol{v}) = c \cdot f(\boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{v} \in V, c \in \mathbb{R}$

Ex Låt V vara någon mängd av vektorer (en linje, ett plan eller ett rum) och låt $a \in \mathbb{R}$. Vi definierar en funktion $f : V \to V$ genom $f(\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v}$. Då är f linjär! Varför? Jo:

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = a(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = a\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$$

$$f(c\boldsymbol{v}) = a(c\boldsymbol{v}) = (ac)\boldsymbol{v} = c(a\boldsymbol{v}) = c(a\boldsymbol{v}) - c \cdot f(\boldsymbol{v})$$

Ex Låt $V = \mathbb{R}$ och $f(x) = x^2$. Då är f inte linjär! Varför? Jo:

$$f(cx) = (cx)^2 = c^2x^2 \neq cx^2 = c \cdot f(x) \text{ så länge } c \neq 0 \text{ och } c \neq 1$$

Alltså $f(cx) \neq cf(x)$ och därför är f inte linjär.

Ex Låt V vara planet eller rummet och säg att vi har fixerat ett koordinatsystem så att vektorer kan skrivas som $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_x \\ \boldsymbol{v}_y \\ \boldsymbol{v}_z \end{pmatrix}$. Låt A vvara en matris. Då är funktionen $f : V \to V$ given av $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ av en linjär avbildning. Varför? Jo:

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v_2}) = A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$$

$$f(c\boldsymbol{v}) = A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v} = c \cdot f(\boldsymbol{v})$$

Ex Om $f : V \to W$ är linjär då är $f(\boldsymbol{O}) = 0$.

Lösning Vi har att $f(c\boldsymbol{v}) = c \cdot f(\boldsymbol{v}), \forall c \in \mathbb{R}$. Låt $c = 0$ så får $f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0f(\boldsymbol{v}) \Leftrightarrow f(0) = \mathbf{0}$

Sats 3.11 (Bassatsen) Låt V vara planet eller rummet. Om $f : V \to V$ är en linjär avbildning då är $f = f_A$, där $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_x) & ff(e_y) & f(e_z) \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

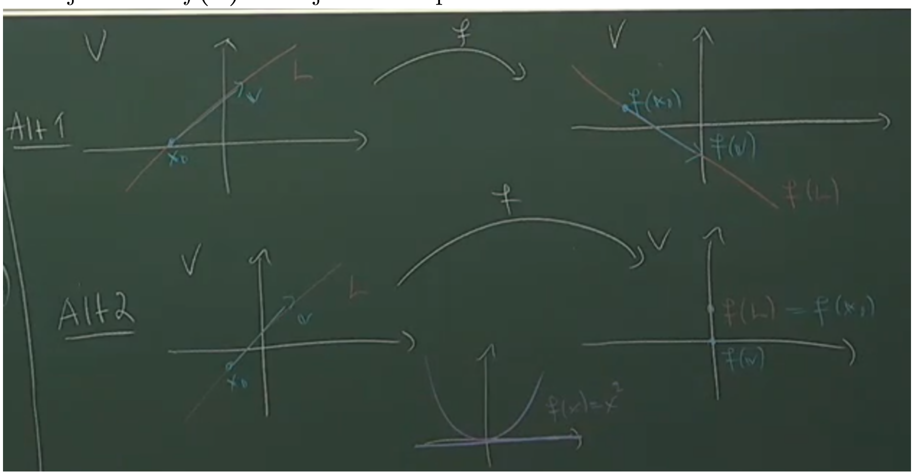
Bevis Låt $\boldsymbol{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$. Eftersom f är linjär så får vi

$$f(\boldsymbol{v}) = f(v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z) = v_x f(e_x) + v_y f(e_y) + v_z + f(e_z) =$$
$$\begin{pmatrix} f(e_x) & f(e) & f(e_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = A\boldsymbol{v} \blacksquare$$

Sats 3.12 Varje linjär avbildning är en matrisavbildning och varje matrisavbildning är en linjär avbildning.

8.2 Geometri hos linjära avbildningar (Avs 3.4)

Proposition 3.14 Låt $f : V \to V$ vara en linjär avbildning och låt $L \subseteq V$ vara en linje. Då är $f(L)$ en linje eller en punkt.



Bevis Skriv linjen på formen $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$. Då ges $f(L)$ av alla punkter (vektorer) av $f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}_0) + tf(\boldsymbol{v})$ vilket beskriver en linje om $f(\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0})$. Om $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ då är $f(L) = f(\boldsymbol{x}_0)$ $\blacksquare$

Proposition 3.16 Ortogonal projektion på en linje är en linjär avbildning.

Bevis Låt $\boldsymbol{r}$ vara en riktningsvektor för linjen. För en allmän vektor $\boldsymbol{v}$ ges den ortogonala projektionen på L av $f(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}$. Visa nu att $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ och $f(c\boldsymbol{v}) > cf(\boldsymbol{v})$ $\blacksquare$

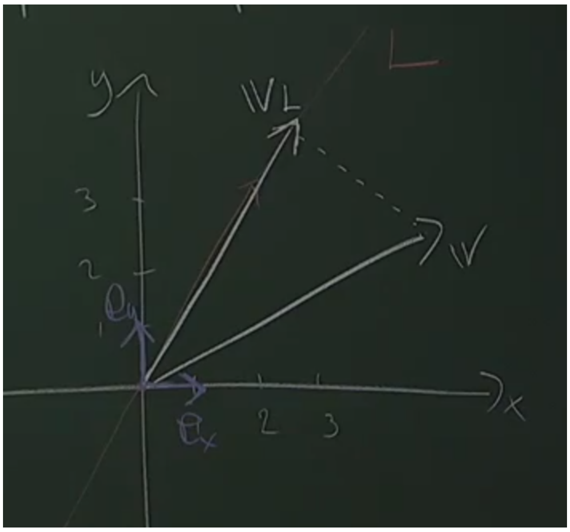
Ex Låt L vara en linje med riktningsvektor $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen för ortogonal projektion på L.

Lösning Matrisen ges av $A = \begin{pmatrix} f(e_x) & f(e_y) \end{pmatrix}$ där f är den otro. proj.p på L.

$$f(e_x) = \frac{e_x \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} \boldsymbol{r} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_y) = \frac{e_y \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} \boldsymbol{r} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

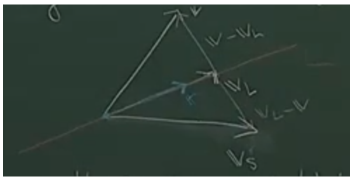
Alltså är $A = \begin{pmatrix} | & | \\ f(e_x) & f(e_y) \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$



Ex Beskriv geometriskt vad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är för linjär avbildning.

Lösning Låt f vara den linjära avbildningen. Då är $f(e_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_x$ och $f(e_y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. Detta är ortogonal projektion på x-axeln.

På sätt är $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonal projektion på y-axeln och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är ortogonal projektion på z-axeln (i rummet).



Ex Beskriv vilken linjär avbildning $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bestämmer.

Lösning Om f är den linjära avbildningen så $f(e_x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_y$ och $f(e_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_x$. Så f byter plats på basvektorerna.

Ex (Spegling) Låt L vara en linje med riktningsvektor $\boldsymbol{r}$ och genom origo. [h] $\boldsymbol{v}_s$ är speglingen av $\boldsymbol{v}$ i linjen L. $\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_L + \boldsymbol{v}_L - \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}_L - \boldsymbol{v} = 2\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}$. Låt $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Då är

$$(e_x)_s = 2\frac{e_x \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} - e_x = 2\frac{4}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}(\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

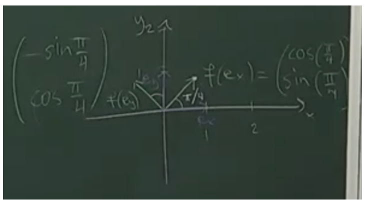
$$(e_y) = 2\frac{e_y \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} - e_y = 2\frac{3}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}(\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matrisen för speglingen är $A_s = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

Proposition 3.18 Rotation β radianer moturs runt origo är en linjär avbildning vars matris ges av $A = \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$

Beviset använder additionsformlerna för de trigonometriska funktionerna.

Ex Låt f vara rotation $\frac{\pi}{4}$ moturs runt origo. Beräkna matrisen till f.



Lösning Matrisen ges av $\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{4}) & -sin(\frac{\pi}{4}) \\ sin(\frac{\pi}{4}) & cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$

Chapter 9

Sammansatta avbildningar (Avs 3.5)

Proposition 3.22 Låt $f : V \to W$ och $g : W \to V$ vara linjära avbildningar som ges A respektive B. Då är $fog : W \to W$ och $gof : V \to V$ linjära avbildningar med matriser AB respektive BA.
Eftersom vi vet att i allmänhet så är $AB \neq BA$ och därför är $fog \neq gof$.
Till exempel är resultatet inte samma om vi roterar och sen projicerar som om vi projicerar och sedan roterar.

Proposition 3.26 Låt $f : V \to V$ vara en linjär avbildning med matris A.
Då är f inverterbar om och endast om A är inverterbar.
Om f är inverterbar då är f^{-1} linjär och dess matris är A^{-1}.

Ex Rotation är en inverterbar linjär avbildning.

Bevis Rotation β radianer moturs ges av $A = \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$.

$$det(A) = cos^2\beta + sin^2\beta = 1 \neq 0$$

Därför är A inverterbar och alltså är rotation inverterbar.

$$a^1 = \begin{pmatrix} cos\beta & sin\beta \\ -sin\beta & cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(-\beta) & -sin(-\beta) \\ sin(-\beta) & cos(-\beta) \end{pmatrix}$$

Ex Låt f vara först ortogonal projektion på $2x + y + 3z = 0$ och sedan rotation av yz-planet $\pi/3$ radianer moturs runt origo. Hitta matrisen till f.

Lösning Projektionen Låt P vara matrisen till projektionen.

$\boldsymbol{v}_\pi = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}???} = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}$ Vi kan välja $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Vi tar reda på $(\boldsymbol{e}_x)_{pi}$, $(\boldsymbol{e}_y)_{pi}$, $(\boldsymbol{e}_z)_{pi}$

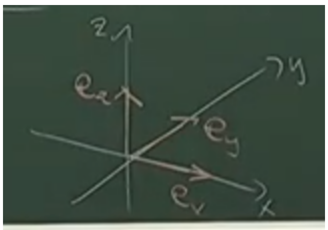
$$(\boldsymbol{e}_x)_{pi} = \boldsymbol{e}_x - \frac{\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{2}{14}\begin{pmatrix}10\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{e}_y)_{pi} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\-14\\-3\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{e}_z)_{pi} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-6\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Matrisen ges av $p = \begin{pmatrix}(\boldsymbol{e}_x)_{pi} & (\boldsymbol{e}_y)_{pi} & (\boldsymbol{e}_z)_{pi}\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}10 & -2 & -6\\ -2 & -14 & -3\\ -6 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

Relationen Låt R vara matrisen till rotationen.



$$R = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\frac{\pi}{3} & -sin\frac{\pi}{3}\\ 0 & sin\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & cos\frac{\pi}{3} & -sin\frac{\pi}{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

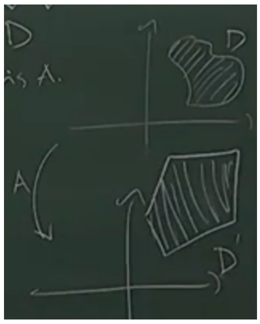
Matrisen till f ges av RP.

$$RP = \frac{1}{28}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & -2 & -6\\ -2 & -13 & -3\\ -6 & -3 & 5\end{pmatrix} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix}20 & -4 & -12\\ -2+6\sqrt{3} & -13+3\sqrt{3} & -3-5\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3}-6 & -13\sqrt{3}-3 & -3\sqrt{3}+5\end{pmatrix}$$

Chapter 10

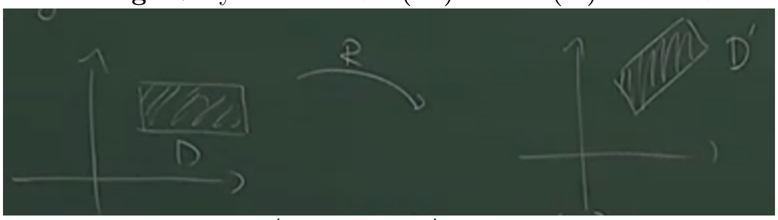
Area- och Volymförändringar (Avs 3.6)

Sats 3.29 Antag att D är ett godtyckligt område i planet. Låt D' vara bilden av D under den linjära avbildningen med matris A.
Då är $\frac{area(d')}{area(d)} = |det(A)|$.



Ex Låt D vara en rektangel i planet och R vara en rotation.
Vad är arean av $R(D)$ eller då bilden av $D = D'$?

Lösning Vi tycker att $arean(D') = arean(D)$. Hur visar vi det?



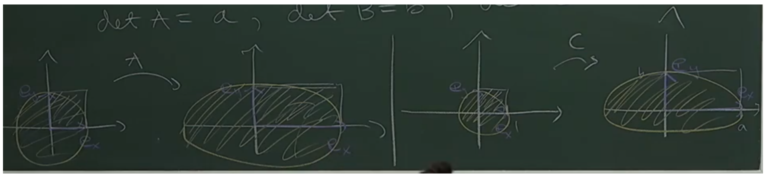
Rotationer ges av $R = \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$ och $det(R) = cos^2\beta + sin^2\beta = 1$ så enligt sats 3.29 är $\frac{area(D')}{area(D)} = 1$

Ex Hur förändras arean av ett område under följande avbildningarna?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Lösning Engligt sats 3.29 så ges areaförändringen av determinanten:

$$det(A) = a, \; det(B) = b, \; det(C) = ab$$



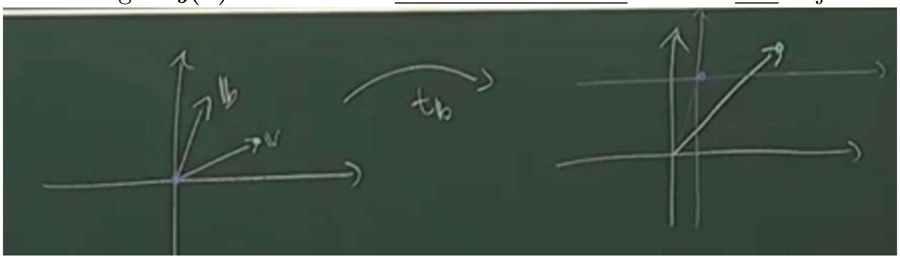
Sats 3.31 Antag att D är ett godtyckligt område i rummet och låt D' vara bilden av D under en linjär avbildning med matris A. Då är

$$\frac{Volym(D')}{Volym(D)} = |det(A)|$$

Chapter 11

Affina avbildningar (Avs 3.7)

Låt V vara planet eller rummet och låt $\boldsymbol{b}$ vara en vektor i V.
Avbildningen $t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}$ kallas translationen med $\boldsymbol{b}$. Den är inte linjär!



Allting förflyttas med $\boldsymbol{b}$!
En funktion på formen $f(\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$ sägs vara en affin avbildning. Affina avbildnigar liknar linjära avbildningar. De avbildar linjer på linjer eller på punkter. Sammansättningen av affina avbildningar är affin.
Varje linjär avbildning är också en affin avbildning (låt $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$).

Ex $f(x) = kx$ är en affin och linjär avbildning. $g(x) = kx + m$ är inte linjär utan endast affin!

Chapter 12

Rummet $\mathbb{R}^n$

12.1 Vektorer av allmän dimension (Avs 4.1)

Definition En vektor av dimension n, n-vektor, $\boldsymbol{v}$är en n-tupel av reella tal och vi skriver $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Mängden av alla n-vektorer är $\mathbb{R}^n$.

Vi låter

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

$$c\boldsymbol{v} = c \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

$$||\boldsymbol{u}|| = || \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} || = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

Definition

Två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella om $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$ för något $c \neq 0$.

Två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala om $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är det unika tal så att $cos\alpha = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||}$ där $0 \leq \alpha \leq \pi$

12.2 Räkneregler

Vi får räkneregler såsom

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

och så vidare... (Proposition 4.5)

Pythagoras sats gäller: $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala $\Leftrightarrow \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$

En vektor på formeln $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_m\boldsymbol{v}_m$ är en $\underline{\text{linjärkombination av } \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_m}$. Standardbasen för $\mathbb{R}^n$ ges av $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ där

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sats 4.11 Varje vektor i $\mathbb{R}^n$ går att skriva som en unik linjärkombination av $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

12.3 Matriser av godtycklig storlek (Avs 4.2)

Definition En $\underline{m \times n\text{-matris}}$ är ett tvådimensionellt fält med reella tal som har m rader och n kolumner.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

Addition av matriser går till som tidigare och det gör även multiplikation med ett tal. Om A är en matris med talet $a_{i,j}$ på plats (i, j) då är A^t, transponatet av A, matrisen med tal $a_{j,i}$ på plats (i, j).

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Om A är $m \times n$-matris sår är A^t $n \times m$-matris.

Definition Om A är en $m \times n$-matris och $\boldsymbol{v}$ är en n-vektor så låter vi

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

Observera att $A\boldsymbol{v}$ är en m-vektor!

Definition Om A är en $m \times n$-matris och B är en $n \times p$-matris då låter vi

$$AB - A\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \dots & A\boldsymbol{b}_p\end{pmatrix}$$

Observera att AB är en $m \times p$-matris.

Proposition 4.21 Låt A vara $m \times n$-matris och B en $n \times p$-matris och låt $C = AB$. Då ges $c_{i,j}$, elementet på plats (i, j) för C, av

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{kj}$$

Proposition 4.23 Om $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^t \\ \boldsymbol{r}_2^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m^t\end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_p\end{pmatrix}$ då är

$$AB = \begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^t\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{r}_1^t\boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_1^t\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{r}_2^t\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{r}_2^t\boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_2^t\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{r}_m^t\boldsymbol{b}_1 & & & \end{pmatrix}$$

Det finns flera naturliga räkneregler för addition och multiplikation av matriser men fortfarande är $AB \neq BA$ i allmänhet.

Proposition 4.25 Matrisen $I_n = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$ är en identitetsmatris (för $n \times n$-matriser). Dvs om A är en $n \times n$ matris så är $AI_n = A = I_nA$. En $n \times n$-matris B är en invers till $n \times n$-matrisen A om $AB = I_n = BA$. Om det finns en invers så är den unik, så vi kan prata om inversen till A (om den finns).

Proposition 4.27 Om A_1, A_2, ..., A_m är inverterbara då är $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ inverterbar och $(A_1A_2 \ldots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$

12.4 Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ (Avs 4.2)

En funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara linjär om

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v}) \ \forall c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$$

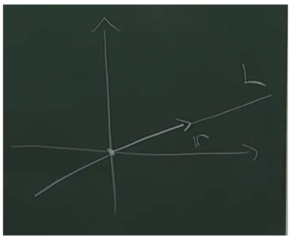
Givet en $m \times n$-matris A så får vi en linjär avbildning $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Genom $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$. Vi tänker ofta på matrisen som avbildningen och struntar då i notationen f_A.

Sats (Bassatsen) Om $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning då är f en matrisavbildning med matrisen

$$A = \begin{pmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \dots & f(\boldsymbol{e}_m)\end{pmatrix}$$

Ex Ortogonal projektion på en linje

I $\mathbb{R}^n$ ges en linje fortfarande av två punkter eller en punkt och en riktningsvektor $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$. Om linjen går genom irgo $\mathbf{0}$ så kan vi välja punkten att vara origo och då behöver vi bara en riktningsvektor. Den ortogonala projektionen av en vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ på en linje L, riktningsvektor $\boldsymbol{r}$ ges av $f_L(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r}$. Funktionen F_L är linjär! Matrisen till f_L ges av:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} & \frac{\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} & \dots & \frac{\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$$

Avbildningen A är alltså en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ men $A\boldsymbol{v}$ ligger på linjen L för varje $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Chapter 13

Linjära Ekvationnssytem

13.1 Linjära ekvationer och matriser (Avs 5.1, 5.2)

En ekvation på formen $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$ där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ och b är reella tal och vi letar efter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kallas för en linjär ekvation med n variabler (n okända).

Ex Lös ekvationen $3x = 2$.

Lösning $3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

När har ekvationen $ax = b$ lösningar?
Om $a \neq 0$ så är $x = \frac{b}{a}$ den enda lösningen.
Om $a = 0$ då är ekvationen $0 = b$ så då gäller

$b \neq 0$ då finns inga lösningar

$b = 0$ då är alla reela tal x lösningar

Om $a \neq 0$ så beskriver $ax = b$ en punkt!
Ekvationen $a_1x + a_2y = b$ beskriver en linje (i planet).
Ekvationen $a_1x + a_2y + a_3z = b$ beskriver ett plan (i rummet).

Om vi har flera linjära ekvationer som ska vara uppfyllda

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

har vi ett ekvationssystem med linjära ekvationer. Vi har m ekvationer och n variabler. Om vi sätter koefficienterna $a_{i,j}$ i en matris A och låter $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ så är ekvationssystemet ekvivalen med $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Ex Lös $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

Lösning $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Ex Lös $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + by = 5 \end{cases}$

Lösning $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$

Ekvationssystemet saknar lösningar!

Ex $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \\ -3x - y = 1 \end{cases}$

Lösning $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \\ -3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Låt $z = t \begin{cases} 3x + 2y = -t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x = 2y - t = -2(1-t) - t = -2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

Lösningarna ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lösningarna är en linje!

Proposition 5.2 Antag att A är en inverterbar $n \times n$-matris. Då har det linjära ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ den unika lösningen $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

13.2 Gausselimination

Definition Givet ett ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ så kallar vi matrisen $T = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ för totalmatrisen.

Definition Givet ett ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eller en totalmatris T kallas följande för elementära radoperationer:

1. att byta plats på två rader
2. multiplicera en rad med ett nollskilt tal
3. adderar en multipel av en rad på en annan

Ex Lös $\begin{cases} -x + z = 3 \\ -2x - y + 5z = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Lösning Totalmatrisen ges av

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 0 \end{cases}$$

Proposition 5.9 Om T är totalmatrisen till ett linjärt ekvationssystem och S fås från T med en elementär radoperation, då har S och T samma lösningar.

Ex Lös $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$

Lösning Totalmatris:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3z = -17 \Leftrightarrow z = -\frac{17}{3} \\ y - z = 12 \Leftrightarrow y = 12 + z = 12\frac{17}{3} \\ x + y + z = 6 \Leftrightarrow x = 6 - y - z = 6 - (12 - \frac{17}{3}) + \frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 - \frac{2\cdot 17}{3} \\ y = 12 - \frac{17}{3} \\ z = -\frac{17}{3} \end{cases}$$

Definition

- En matris sådan att varje rad har fler inledande nollor än raden ovan är på trappstegsform
- Det första nollskilda elementet på en rad kallas för ett pivotelement
- En kolumn som inte innehåller ett pivotelement kallas för en fri kolumn (Inte den sista i kolumnen i en totalmatris)

Ex Skriv $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -9 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 12 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 15 & 14 & 2 \end{pmatrix}$ på trappstegsform.

Lösning

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & -9 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 15 & 14 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Propostion 5.13 Varje matris kan reduceras till trappstegsform med hjälp av elementära radoperationer

Ex Lös $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

Lösning Totalmatris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5z = 5 \\ y - 3z = -2 \end{cases}$$

Låt $z = t$, dvs. vilket reelt tal t som helst, en parameter.

Då får vi $\begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 3t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 5.16 Antag att ett ekvationssystem har reducerats till en totalmatris T på trappstegform m.h.a elementära radoperationer. För lösningarna gäller:

1. Om det finns ett pivotelement i den sista kolumnen saknas lösningar
2. Om det inte finns ett pivotelement i sista kolumnen då finns det lösningar och man får den genom att
   (a) sätta alla variabler som svarar mot fria kolumner till paramterar
   (b) Börja i sista raden och gå uppåt och successivt lösa ut variablerna som svarar mot pivotkolumner.

   Det finns oändligt många lösningar om det finns fria kolumner. Annars finns en unik lösning.

Ex Lös $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=4 \\ 3x+2y=-3 \end{cases}$

Lösning

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Det finns pivotelement i sista kolumnen $\Rightarrow$ det saknas lösningar.

Ex Lös $\begin{cases} 2y+z=4 \\ x-z=1 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

Lösning

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \Leftrightarrow x=1 \\ y-2z=2 \leftrightarrow y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

13.3 Kvadratiska system (Avs 5.4)

Sats 5.20 Låt T vara den totalmatrisen reducerad till trappstegsform för $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Följande är ekvivalent:

1. Det finns en unik lösning till $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ för alla $\boldsymbol{b}$
2. T saknar fria kolumner

Om 1 och 2 inte gäller då har $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ inga eller oändligt många lösnignar.

Sats 5.28 Om A är en Kvadratisk matris så är föjande ekvivalent:

1. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ har en unik lösning för ala$\boldsymbol{b}$
2. Man kan reducera A till identitetsmatrisen m.h.a elementära radoperationer
3. A är inverterbar

Om A är inverterbar så är lösningen till $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$

Om vi sätter A och identitetsmatrisen I_n i en stor matris $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ och reducerar den till $\begin{pmatrix} I_n & B \end{pmatrix}$ m.h.a elementära radoperationer, då är $B=A^{-1}$.
Om vi misslyckas är inte A inverterbar.

Ex Hitta inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{3} & \frac{24}{3} & -\frac{9}{3} & 0 & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{3} - \frac{15\cdot 5}{9} & -\frac{9\cdot 3}{3\cdot 3} + \frac{30}{9} & -\frac{15}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{15}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 15 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 30 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{25\cdot 3}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 30 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{74}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 15 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 30 - \frac{2\cdot 74}{3} & -2 + \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{74}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 15 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{58}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & \frac{74}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 15 & -1 \end{pmatrix}$$

13.4 Homogena ekvationssystem (Avs 5.5)

Ett ekvationssystem där högerledet är $\mathbf{0}$ kallas homogent. Vi tittar på ekvationssystem som ser ut typ $\begin{cases} x + y + = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ En lösning ges av x=y=z=0. Men vi vill hitta alla lösningar.

Proposition 5.31 Ekvationssytemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har alltid lösningen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Det finns fler lösningar om och endast om totalmatrisen är har fria kolumner efter reducering.

Proposition 5.33 Om $\boldsymbol{x}_p$ löser $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ då ges alla lösningar till $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ av $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p$ där $\boldsymbol{x}_n$ är en lösning till $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Bevis Om $\boldsymbol{x}_p$ och $\boldsymbol{x}$ löser $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ då gäller att $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ och alltså löser $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$ ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Ex Systemet $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$ har en lösning $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Hitta alla!

Lösning Engligt Prop 5.33 kan vi lösa det homogena systemet: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$

Totalmatrisen: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

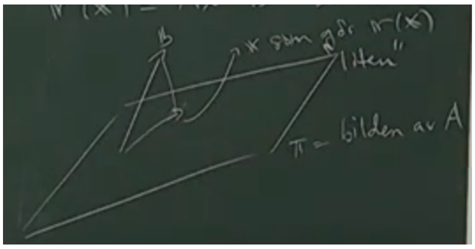
Vi sätter $z=t$.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

Detta är lösningarna till det homogena systemet. Samtliga lösningar till det ursprungliga systemet ges av $\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=0+t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13.5 Överbestämda ekvationssystem (Avs 5.6)

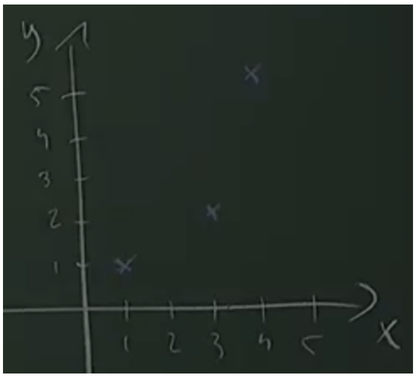
Vi tittar nu på ekvationssytem med fler ekvationer än variabler. Vi förväntar oss i allmänhet att dessa saknar lösningar. Vi vill alltså lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ men det kanske inte går. Då vill vi istället göra $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ så litet som möjligt.



Proposition 5.36 Lösningen till $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$ gör att $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ är "så liten som möjligt". "minsta kvadratmetoden". Observera att om A är en $m \times n$-matris då är A^t en $n \times m$-matris och $A^t A$ är en $n \times n$-matris.
Det finns en unik lösning till $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b} \Leftrightarrow det(A^t A) \neq 0$.

Ex Hitta den linje $y = kx + m$ som närmast passar punkterna $(1,1)$, $(1,2)$, $(4,5)$.

Lösning Vi vill att $\begin{cases} k + m = 1 \\ 3k + m = 2 \\ 4k + m = 5 \end{cases}$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Men $A\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$ saknar lösningar så vi tittar istället på $A^tA\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = A^t\boldsymbol{b}$.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vi löser $A^tA\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 26 & 8 & 27 \\ 8 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 26\cdot 4 & 8\cdot 4 & 27\cdot 4 \\ 8\cdot 13 & 3\cdot 13 & 8\cdot 13 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 26 & 8 & 27 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 26k + 8m- = 27 \\ 7m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{27 + \frac{8\cdot 4}{7}}{26} \\ m = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

Chapter 14

Determinanter

För 2×2- och 3×3-matriser har vi sett att

1. $det(I_n) = 1$
2. determinanten är linjär i varje kolumn:

$$det(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ b\boldsymbol{a}_k + c\widehat{\boldsymbol{a}}_k \ \dots \ \boldsymbol{a}_n = bdet(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \boldsymbol{a}_k \ \dots \ \boldsymbol{a}_n + cdet(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \widehat{\boldsymbol{a}}_k \ \dots \ \boldsymbol{a}_n)$$

3. om två kolumner är likadana då är determinanten noll

Definition För $n \times n$-matriser är determinanten den unika funktion ådan att:

1. $det(I_n)$
2. determinanten är linjär i varje kolumn
3. om två kolumner är likadana så är determinanten noll

Proposition 6.4 Antag att vi gör en elementär radoperation på 1×1-matris A och får matrisen B. Då gäller:

a Om vi bytt plats på två rader då är $det(B) = -det(A)$

b Om vi har multiplicerat en rad med ett tal c då är $det(B) = cdet(A)$

c Om vi har adderat en multipel av en rad på en annan då är $det(B) = det(A)$

Sats 6.5 Antag att A är över- eller undertriangulär (dvs bara nollor ovan/under diagonalen). Då är $det(A) = a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}$

Ex Beräkna determinanten av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Lösning $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & 4 + \frac{\cdot 16}{6} & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{208}{6} & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot 8 \cdot 13}{208} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) \cdot \frac{208}{6} \cdot \frac{6 \cdot 8 \cdot 13}{208} = -8 \cdot 13^2$$

14.1 Konstruktion av determinanten (Avs 6.2)

En bijektiv funktion från $\{1, 2, \dots, n\}$ till $\{1, 2, \dots, n\}$ kallas för en <u>permutation</u>. Till exempel är π som ges av $\pi(k) = \varphi$, $\pi(\varphi) = k$, $\pi(i) = i$ för alla $i + k, i \neq \varphi$ en permutation. En sådan permutation kallas för en <u>omkastning</u>. Varje permutation går att skriva som en serie av omkastningar. Vi definierar signaturen av en permutation π som $\varepsilon(\pi) = (-1)^k$ $(sgn(\pi))$ där k är antalet omkastningar som π går att skriva som. Signaturen är -1 eller 1 (man behöver visa att signaturen är väldefinierad).

Signaturen av omkastning är -1.

Signaturen av identitetspermutation är 1.

Determinanten av $n \times n$-matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ges av

$$det(A) \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

där S_n är mängden av alla permutationer.

Proposition 6.17 Om A är en $n \times n$-matris då är $det(A^t) = det(A)$.

Proposition 6.19 $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar. Detta följer av vad vi har gjort för ekvationssystem.

Sats 6.22 Om A, B är $n \times n$-matriser då är $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

Proposition 6.23 $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Bevis $1 = det(I_n) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1})$ ∎

Med hjälp av permutationer kan vi beräkna $n \times n$-determinanter som en summa av $(n-1) \times (n-1)$-determinanter. Givet en $n \times n$-matris A betecknar vi med A_{ij} $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som fås av A genom att ta bort rad i och kolumn j. Determinanten av A kan beräknas genom att expandera längs en rad eller längs en kolumn:

Längs en rad:

$$det(A) = (-1)^{k+1} a_{k,1} det(A_{k,1}) + (-1)^{k+2} a_{k,2} det(A_{k,2}) + \ldots + (-1)^{k+n} det(A_{k,n})$$

Längs en kol:

$$det(A) = (-1)^{1+k} a_{1,k} det(A_{1,k}) + (-1)^{2+k} a_{2,k} det(A_{2,k}) + \ldots + (-1)^{n+k} a_{n,k} det(A_{n,k})$$

Chapter 15

Baser

Vi har kallat $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ för standardbasen för $\mathbb{R}^n$. Vi ska nu se vad en bas är.

Definition Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara linjärt oberoende om

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{v}_m \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$$

Ex Låt $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$ någon vektor och $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$. Då är $0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ så är $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ inte linjärt oberoende utom linjärt beroende.

Proposition 7.4 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{0}$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ parallella.

Bevis Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ är parallella då finns $c \neq 0$ så att $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. Alltså är $1 \cdot \boldsymbol{v}_1 - c \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ så $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ är linjärt beroende. Å andra sidan, om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ är linjärt beroende så finns $c_1, c_2 \neq 0$ så att $c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ Vi kan anta att $c_1 \neq 0$ och alltså är $\boldsymbol{v}_1 = -\frac{c_2}{c_2}\boldsymbol{v}_2$ vilket ger att $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{2}$ är parallella. ■

Ex Ta reda på om $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende.

Lösning Antag att $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. Måste $x_1 = x_2 = x_3 = 0$? Vi vill lösa detta ekvationssystem. Totalmatrisen ges av:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det finns oändligt många lösningar. Speciellt finns det lösningar x_1, x_2, x_3 inte alla är noll. Det betyder att $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ är linjärt beroende.
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ linjärt beroende ty $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3 \Leftrightarrow 1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + (-1)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$

Proposition 7.4 Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ En av vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ går att skriva som en linjärkombination av de andra.

Proposition 7.6 Låt $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ ekvationssystem $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \ldots & \boldsymbol{v}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har bara lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Ex Visa att $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\3\end{pmatrix}$ är linjärt oberoende.

Lösning

$$det\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 8 & 3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}5 & 8\\8 & 3\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}2 & 8\\3 & 3\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 8\end{vmatrix} = (15-64)-4(6-24)+7(16-15) = 34 \neq 0$$

$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ Varje ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en unik lösning ($\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$). Speciellt har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ en unik lösning vilket är $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Om vi använder detta på $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}$ så får vi att $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ är linjärt oberoende.

Definition Låt $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vara vektorer o $\mathbb{R}^n$. $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ sägs vara en <u>bas för $\mathbb{R}^n$</u> om varje vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ går att på ett unikt sätt skriva som en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$:

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_m\boldsymbol{v}_m$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ kallas för $\boldsymbol{v}$'s <u>koordinater i basen</u>.

Proposition 7.11 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ är en bas $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ linjärt oberoende Varje vektor går att skriva som en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$

Ex Standardbasen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

Bevis

1. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ är linjärt oberoende ty ekvationssytemet $\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \ldots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har bara lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

2. En allmän vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ går att skriva som en linjärkombination av $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ alltså $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + v_n\boldsymbol{e}_n$

Sats 7.13 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_r\end{pmatrix}$. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en unik lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Sats 7.14 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ utgör en bas $\Leftrightarrow$ $r = n$ och $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ är linjärt oberoende.

Definition En mängd vektorer V sägs ha dimension h om varje bas för V innehåller n vektorer.

Sats 7.16 Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta:

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en unik lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$
2. Varje reduktion av A till en trappstegsmatris saknar vi fria kolumner
3. Det går att reducera A till identitetsmatrisen
4. A är inverterbar
5. $det(A) \neq 0$
6. kolumnerna i A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$
7. $det(A^t) = 0$
8. raderna i A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$

15.1 Baser i $\mathbb{R}^n$ (Avs 7.2)

Vi ska nu skriva vektorer med koordinater i olika baser. Vi är i $\mathbb{R}^n$. Låt $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ vara standardbasen. Antag att $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ är ytterligare en bas. En vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ går att skriva

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{f}_n = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1 & \dots & \boldsymbol{f}_n\end{pmatrix}}_{\text{Låt detta vara } F} \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{f}}}$$

Alltså: $\boldsymbol{x} = F\boldsymbol{x}_f$
Vad är koordinaterna i basen $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$?
Jo: $\boldsymbol{x}_F = F^{-1}\boldsymbol{x}$

Ex Låt $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ (i standardbasen). Skriv koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Lösning Kontrollera att $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ är en bas:

$$det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 0) = 1\cdot(2\cdot 2 - 1\cdot 1) = 2 - 3 = 1 \neq 0$$

$det \neq 0 \Leftrightarrow$ Kolumnerna utgör en bas.
Vi vill hitta x_1, x_2, och x_3 så att $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ där $F = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{f}_3\end{pmatrix}$.

Vi löser detta ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&1&1&2\\1&0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&0\\0&-1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=-1\end{cases}$$

Alltså: $\boldsymbol{v}_F=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Kontroll: $2\boldsymbol{f}_1-1\boldsymbol{f}_2-1\boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

7.19 Antag att $\begin{matrix}F=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1&\boldsymbol{f}_2&\dots&\boldsymbol{f}_n\end{pmatrix}\\G=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1&\boldsymbol{g}_2&\dots&\boldsymbol{g}_n\end{pmatrix}\end{matrix}$ där $\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_2$ och $\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_2$ är baser för $\mathbb{R}^n$. Då gäller att

- $G\boldsymbol{x}_G=F\boldsymbol{x}_F$
- $\boldsymbol{x}_G=G^{-1}F\boldsymbol{x}_F$
- $\boldsymbol{x}_F=F^{-1}G\boldsymbol{x}_G$

15.2 Linjära avbildningar och basbyten (Avs 7.3)

Hur ser matrisen ut för en linjär avbildning om vi väljer andra baser än standardbasen?

Sats 7.22 Låt $\begin{matrix}G=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1&\dots&\boldsymbol{g}_m\end{pmatrix}\text{ där }\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_m\text{ är en bas}\\H=\begin{pmatrix}\boldsymbol{h}_1&\dots&\boldsymbol{h}_m\end{pmatrix}\text{ där }\boldsymbol{h}_1,\dots,\boldsymbol{h}_m\text{ är en bas}\end{matrix}$ Antag att $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning. Då är matrisen till f relativt baserna G och H av

$$A_{H\to G}=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{h}_1)_G&f(\boldsymbol{h}_2)_G&\dots&f(\boldsymbol{h}_n)_G\end{pmatrix}$$

Ett specialfall av satsen ges av att $m=n$ och $G=H$. Det vill säga att vi har en linjär avbildning $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ och vi vill uttrycka den i basen H.

Sats 7.25 Om $G=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1&\dots&\boldsymbol{g}_n\end{pmatrix}$ där $\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_n$ är en bas och $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning. Då är matrisen till relativt G given av $A_G=G^{-1}A_EG$ där A_E är matrsien relativt standardbasen.

Ex Skriv ner matrisen för projektion i $y=x$ i basen $\boldsymbol{g}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{g}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Lösning $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$ är en bas ty $det\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1&\boldsymbol{g}_2\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=1$. Vad är matrisen för projektionen i standardbasen? Låt P vara projektionen. Då är matrisen

$$A_E=\begin{pmatrix}P(\boldsymbol{e}_1)&P(\boldsymbol{e}_2)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$P(\boldsymbol{e}_1) = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{(1,0)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$P(\boldsymbol{e}_2) = P(\boldsymbol{e}_1)$$

$$G = \begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \frac{1}{det(G)}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A_G = G^{-1}A_E G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\3 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 2\end{pmatrix}$$

15.3 ON-matriser och ON-baser (Avs 7.4)

Definition En bas sägs vara en <u>ON-bas</u> om basvektorerna är ortogonala och av längd 1.

Definition En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för en <u>isometri</u> om

$$||f(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}|| \text{ för alla } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

Proposition 7.34 Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en isometri då $f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Alltså bevara isometrier vinklar mellan vektorer!

Definition Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en isometri då kallas matrisen f för en ON-matris.

Sats 7.35 A är en ON-matris $\Leftrightarrow$ Kolumnerna i A utgör en ON-bas.

Ex $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$. Vi kan kontrollera att kolumnerna i A är parvis ortogonala och av längd l. Alltså är kolumnerna en ON-bas. Det betyder att A är en isometri!

Sats 7.37 A är en ON-matris $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.

Ex Inversen till A ovan är $A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$.

Chapter 16

Egenvektorer och egenvärden

Definition Låt A vara en $n \times n$-matris. En vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, kallas för en egenvektor till A om det finns ett tal λ så att $A\lambda = \lambda\boldsymbol{v}$. Talet λ kallas för egenvärdet till egenvektorn $\boldsymbol{v}$.

Ex LÅt A vara I_n. Varje vektor är en egenvektor med egenvärde 1. Varför? Jo för att för alla $\boldsymbol{v}$ gäller att $A\boldsymbol{v} = I_n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = 1 \cdot \boldsymbol{v}$

Ex Låt A vara en diagonal matris $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Då är $\boldsymbol{e}_k$ en egenvektor med egenvärde λ_k.

Varför? Jo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k \boldsymbol{e}_k$