

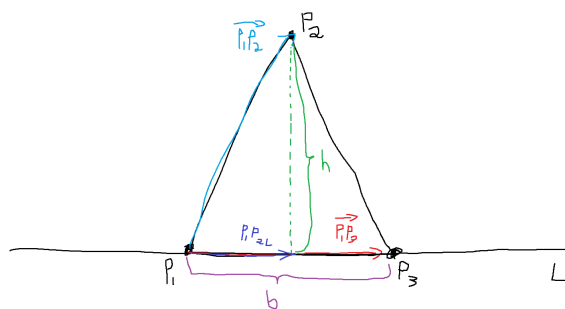
Chapter 1

Teoriövningar

- (a) Formeln för en triangelns area är $\frac{b \cdot h}{2}$. Utgår man ifrån detta så får man att basen kan representeras av $\|\vec{P_1 P_3}\|$ (eller $\vec{P_1 P_2}$). Höjden, däremot, går inte att representera direkt utav någon vektorn baserad på punkterna P_1 , P_2 och P_3 . För att få höjden tar man $\vec{P_1 P_2}$ projektion på den linje som har riktningsvektor $\vec{P_1 P_3}$, som blir basen till en triangel med $\|\vec{P_1 P_2}\|$ som hypotenusan. Enligt Pytagoras sats kan man då få höjden på denna nya triangel genom $\sqrt{\|\vec{P_1 P_2}\|^2 - \left(\frac{|\vec{P_1 P_3} \cdot \vec{P_1 P_2}|}{\|\vec{P_1 P_3}\|}\right)^2}$.

Om man sedan multiplicerar denna höjden, med $\|\vec{P_1 P_3}\|$ så får man formeln för triangelns area enligt följande:

$$\frac{\sqrt{\|\vec{P_1 P_2}\|^2 - \left(\frac{|\vec{P_1 P_3} \cdot \vec{P_1 P_2}|}{\|\vec{P_1 P_3}\|}\right)^2} \cdot \|\vec{P_1 P_3}\|}{2} \quad (1.1)$$



Om vi sedan applicerar denna formel på triangeln med hörnen $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (4, 2)$ och $P_3 = (-1, 7)$, så har vi vektorerna:

$$\mathbf{v} = P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = P_1 - P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Om man sedan kan stoppa in i formeln för att få arean:

$$\frac{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}\right)^2} \cdot \|\mathbf{u}\|}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{50}^2 - \left(\frac{5 \cdot 2 + (-5) \cdot (-6)}{\sqrt{40}}\right)^2} \cdot \sqrt{40}}{2} = 10 \quad (1.2)$$

- (b) Med tre godtyckliga punkter på en linje, P_a , P_b och P_c , kan vi bilda tre st vektorer, \mathbf{v} , \mathbf{u} och \mathbf{w} . Då punkterna ligger på en linje får alla vektorer samma riktning. Alltså är minsta vinkeln, α , blir då 0. Uttrycket i roten ur blir då:

$$\|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(0)}{\|\mathbf{u}\|}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 0$$

Detta leder till att vi får: $\frac{\sqrt{0} \cdot \|\mathbf{u}\|}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Alltså är arean av den triangeln som P_a , P_b och P_c bildar 0.

2. I en rätvinklig triangel ABC med vinkeln vid $B = \frac{\pi}{2}$.

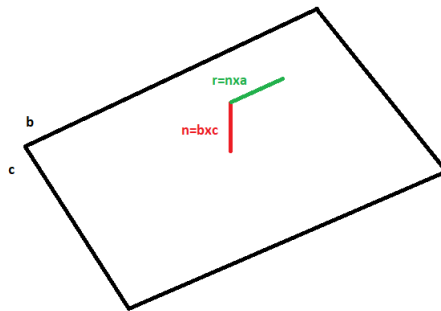
Vi definierar triangelns vektorer som $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

Då $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$ och $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ får vi $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Då \mathbf{u} och \mathbf{v} är ortogonala blir $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ vilket ger oss: $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$ ■

3. (a) Då $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ger normalen, vilket är ortogonal till planet \mathbf{bc} spänner. Detta leder till att vi får $\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ som sedan är ortogonal mot normalen, dvs parallell med planet. Eftersom den är parallell med planet, innebär det att normalens normal vektor kan representeras av någon linjär kombination av \mathbf{b} och \mathbf{c} , dvs $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$.



- (b) Då $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ är parallell med planet är det också ortogonalt mot \mathbf{a} . Skalarprodukten av två vektorer som är ortogonala mot varandra är 0. Sedan kan vi skriva om $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ som:

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c})$$

Och eftersom $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, innebär det att $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$ är ortogonalt mot \mathbf{a} och då blir $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0$.

(c) Då $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix} = 0$

kan vi räkna ut att

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0.$$

Detta innebär att $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$ är ortogonala mot $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix}$ och därför måste de vara parallella.

Vilket implicerar att man kan skriva den ena vektorn som en linjärkombination av den andra vektorn, såsom:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ (-)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

(d) Då vi antar att $s = 1$ ser ekvationen ut som följande:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ (-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Om vi då sätter $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 6 + 3 + 5 = 14 = \lambda \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= -3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = -3 - 4 - 10 = -17 = \mu \end{aligned}$$

Med hjälp av dessa värden kan vi sätta:

$$\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c} = 14 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-17) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Om vi dessutom räknar ut $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ får vi $\begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Chapter 2

Datorövningar

1. Se Span.m för implementation

2. s

Se NormalNormalisedVektor.m för implementation.

Vi börjar med att räkna ut den normalen till planet som spänns av u, v . Detta görs med matlab funktionen `cross()` som räknar ut kryssprodukten. För att normalisera normalen delas den på sin längd, vilket man får från `norm(x,1)`. Sedan returneras normalen.

- (b) Se OrtoProj.m för implementation.

Funktionen använder sig utav formeln:

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \mathbf{n}$$

Med denna beräknar den projektionen av given vector på planet utifrån normalen.

- (c) Se test.m för att testa alla funktioner tillsammans.

Vi använder oss utav NormalNormalisedVektor.m för att få en normal som vi sedan skickar in till OrtoProj.m med våran punkt. Detta

ger oss resultatet $\begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$. Vilket är projektionen av $P = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$ på yz -planet.

3. Se TriangelToPlain.m för implementation.