

# Gruppövning 1 - Grupp A19

Max Hagman, Felix Bjerhem Aronsson

February 4, 2022

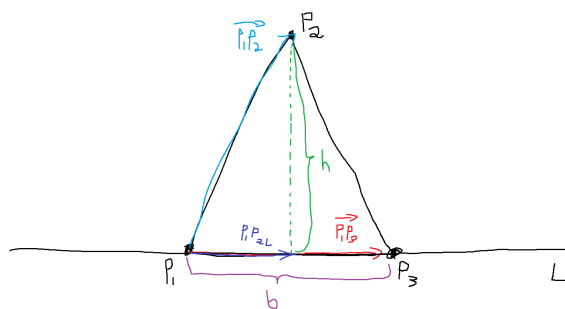
# Chapter 1

## Teoriövningar

- (a) Formeln för en triangelns area är  $\frac{b \cdot h}{2}$ . Utgår man ifrån detta så får man att basen kan representeras av  $\|\vec{P_1 P_3}\|$  (eller  $\vec{P_1 P_2}$ ). Höjden, däremot, går inte att representera direkt utav någon vektorn baserad på punkterna  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_3$ . För att få höjden tar man  $\vec{P_1 P_2}$  projektion på den linje som har riktningsvektor  $\vec{P_1 P_3}$ , som blir basen till en triangel med  $\|\vec{P_1 P_2}\|$  som hypotenusan. Enligt Pytagoras sats kan man då få höjden på denna nya triangel genom  $\sqrt{\|\vec{P_1 P_2}\|^2 - \left(\frac{|\vec{P_1 P_3} \cdot \vec{P_1 P_2}|}{\|\vec{P_1 P_3}\|}\right)^2}$ .

Om man sedan multiplicerar denna höjden, med  $\|\vec{P_1 P_3}\|$  så får man formeln för triangelns area enligt följande:

$$\frac{\sqrt{\|\vec{P_1 P_2}\|^2 - \left(\frac{|\vec{P_1 P_3} \cdot \vec{P_1 P_2}|}{\|\vec{P_1 P_3}\|}\right)^2} \cdot \|\vec{P_1 P_3}\|}{2} \quad (1.1)$$



Om vi sedan applicerar denna formel på triangeln med hörnen  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (4, 2)$  och  $P_3 = (-1, 7)$ , så har vi vektorerna:

$$\mathbf{v} = P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = P_1 - P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Om man sedan kan stoppa in i formeln för att få arean:

$$\frac{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}\right)^2} \cdot \|\mathbf{u}\|}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{50}^2 - \left(\frac{5 \cdot 2 + (-5) \cdot (-6)}{\sqrt{40}}\right)^2} \cdot \sqrt{40}}{2} = 10 \quad (1.2)$$

- (b) Med tre godtyckliga punkter på en linje,  $P_a$ ,  $P_b$  och  $P_c$ , kan vi bilda tre st vektorer,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{w}$ . Då punkterna ligger på en linje får alla vektorer samma riktning. Alltså är minsta vinkeln,  $\alpha$ , blir då 0. Uttrycket i roten ur blir då:

$$\|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(0)}{\|\mathbf{u}\|}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 0$$

Detta leder till att vi får:  $\frac{\sqrt{0} \cdot \|\mathbf{u}\|}{2} = \frac{0}{2} = 0$ . Alltså är arean av den triangeln som  $P_a$ ,  $P_b$  och  $P_c$  bildar 0.

2. I en rätvinklig triangel  $ABC$  med vinkeln vid  $B = \frac{\pi}{2}$ .

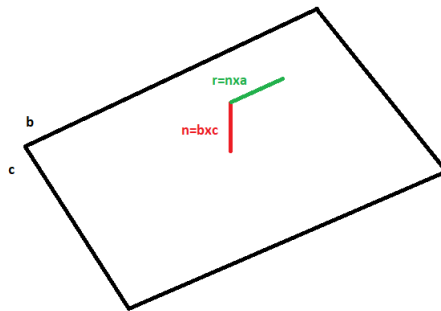
Vi definierar triangelns vektorer som  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$  och  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ .

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

Då  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$  och  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$  får vi  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

Då  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är ortogonala blir  $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  vilket ger oss:  $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$  v.s.b.

3. (a) Då  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  ger normalen, vilket är ortogonal till planet  $\mathbf{bc}$  spänner. Detta leder till att vi får  $\mathbf{a} \times \mathbf{n}$  som sedan är ortogonal mot normalen, dvs parallell med planet. Eftersom den är parallell med planet, innebär det att normalens normal vektor kan representeras av någon linjär kombination av  $\mathbf{b}$  och  $\mathbf{c}$ , dvs  $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$ .



- (b) Då  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  är parallell med planet är det också ortogonalt mot  $\mathbf{a}$ . Skalarprodukten av två vektorer som är ortogonala mot varandra är 0. Sedan kan vi skriva om  $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$  som:

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c})$$

Och eftersom  $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , innebär det att  $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$  är ortogonalt mot  $\mathbf{a}$  och då blir  $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0$ .

(c)  $\mu$  och  $\lambda$  är skalärer

$$\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = -\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (-1) \cdot \lambda((- \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b})$$

$$\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \lambda((- \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b})$$

$$\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \lambda((- \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) = 0$$

(d) Då vi antar att  $s = 1$  så ser ekvationen ut som följande:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ (- \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Om vi då sätter  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  och  $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 6 + 3 + 5 = 14$$

$$- \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = -3 - 3 - 10 = -16$$

## Chapter 2

# Datorövningar

1. Se Span.m för implementation

2. (a) Se NormalNormalisedVektor.m för implementation.

Vi börjar med att räkna ut den normalen till planet som spänns av  $u, v$ . Detta görs med matlab funktionen `cross()` som räknar ut kryssprodukten. För att normalisera normalen delas den på sin längd, vilket man får från `norm(x,1)`. Sedan returneras normalen.

- (b) Se OrtoProj.m för implementation.

Funktionen använder sig utav formeln:

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \mathbf{n}$$

Med denna beräknar den projektionen av given vector på planet utifrån normalen.

- (c) Se test.m för att testa alla funktioner tillsammans.

Vi använder oss utav NormalNormalisedVektor.m för att få en normal som vi sedan skickar in till OrtoProj.m med våran punkt. Detta ger oss resultatet  $\begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$ . Vilket är projektionen av  $P = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$  på  $xy$ -planet.

3. Se TriangelToPlain.m för implementation.