

# MVE045 - Matematisk Analys

Max ”Krysset” Hagman

October 19, 2022

# Contents

<b>1 Mängder och delmängder</b>	<b>3</b>
<b>2 Intervall</b>	<b>5</b>
<b>3 Komplexa tal</b>	<b>8</b>
<b>4 Funktioner</b>	<b>9</b>
4.1 Funktioner och funktionsgrafer . . . . .	9
4.2 Kompositioner . . . . .	9
<b>5 Polynom och rationella funktioner</b>	<b>11</b>
5.1 Polynomdivision . . . . .	11
<b>6 Grundläggande trigonometri</b>	<b>13</b>
<b>7 Talföljder och gränsvärden</b>	<b>15</b>
7.1 Kontinuitet . . . . .	18
<b>8 Derivatan</b>	<b>24</b>
8.1 Räkneregler och standard derivator . . . . .	27
8.2 Implicit derivering . . . . .	32
<b>9 Primitiva funktioner och indefinita integraler</b>	<b>33</b>
<b>10 L'Hôpital regler</b>	<b>34</b>
<b>11 Standardgränsvärden</b>	<b>36</b>
<b>12 Funktioner</b>	<b>37</b>
12.1 Exponentialfunktioner . . . . .	37
12.2 Inversa trigonometriska funktioner . . . . .	38
12.3 De hyperboliska funktionerna . . . . .	39
<b>13 Numerisk ekvationslösning</b>	<b>41</b>
<b>14 Extremvärden</b>	<b>43</b>
<b>15 Linjär approximation och Taylorutveckling</b>	<b>45</b>
<b>16 Summationsnotation</b>	<b>50</b>

<b>17 Definita integraler</b>	<b>53</b>
<b>18 Analysens huvudsats</b>	<b>59</b>
<b>19 Att integrera</b>	<b>61</b>
19.1 Partiell integration . . . . .	62
<b>20 Partialbråksuppdelning</b>	<b>64</b>
20.1 Sammanfattande om partialbråksuppdelning . . . . .	65
<b>21 Inverssubstitutioner</b>	<b>66</b>
<b>22 Generaliserade integraler</b>	<b>68</b>
<b>23 Numerisk integration</b>	<b>71</b>
23.1 Mittpunktsmetoden . . . . .	71
23.2 Trapetsmetoden . . . . .	71
23.3 Simpsons regel . . . . .	72
<b>24 Tillämpningar av integraler</b>	<b>73</b>
24.1 Volymberäkning . . . . .	73
24.2 Kurvlängd och mantelarea . . . . .	77
24.3 Praktiska tillämpningar . . . . .	79
24.4 Separabla differentialekvationer . . . . .	84
<b>25 Första ordningens linjära differentialekvation</b>	<b>86</b>
<b>26 Andra ordningens linjära differential ekvationer med konstanta koefficienter</b>	<b>88</b>
<b>27 Serier</b>	<b>92</b>
27.1 Potensserier och Taylorserier . . . . .	93
<b>28 Exempelräkning</b>	<b>95</b>

# Chapter 1

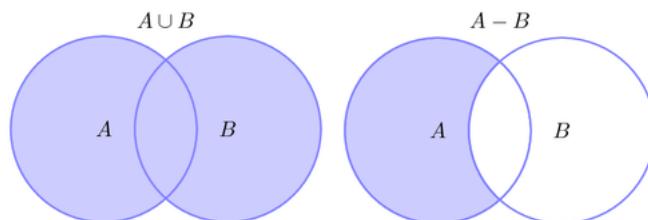
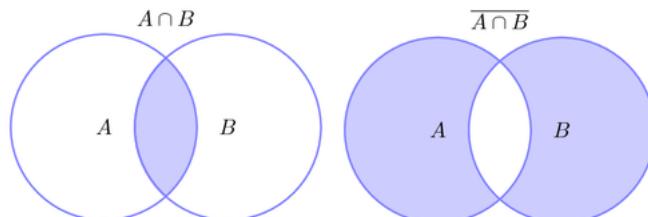
## Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentalt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för element.

En mängd  $A$  bestående av elementen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  skrivs som  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Om  $A$  och  $B$  är två olika mängder så betecknar  $A \cup B$  alla element som tillhör  $A$  eller  $B$ .  $A \cap B$  alla element som tillhör  $A$  och  $B$ . Konstruktionen  $A \cup B$  kallas för unionen av  $A$  och  $B$  och  $A \cap B$  kallas för snyttet.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade venndiagram:



Ett par saker till

- $\emptyset = \{\}$ , den tomma mängden
- $A^c$  alla element som inte finns i  $A$  (kallas komplementet)
- 

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matematik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2-, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  heltalen
- $\mathbb{Q} = \{\text{Alla talen på formen } \frac{p}{q}\}$ , där  $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
- $\mathbb{R} = \{\text{Alla decimaltal}\}$  de reella talen
- $\mathbb{C} = \{\text{alla tal } a + ib\}$ , de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna  $\mathbb{R}$  och  $\mathbb{C}$  speciellt i fokus.

# Chapter 2

## Intervall

Ett intervall är en delmängd av  $\mathbb{R}$  som innehåller minst två tal och alla tal mellan två av sina element.

Mer konkret:



Figure 2.1:  $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  skrivs  $(a, b)$

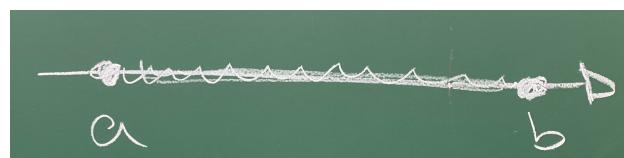


Figure 2.2:  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  skrivs  $[a, ]$



Figure 2.3:  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  skrivs  $[a, )$

**Ex** Lös olikheten  $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$  och uttryck svaret som ett intervall eller en union av flera intervall.

**Lösning** Måste försöka skriva om olikheten till faktorisering!

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4+x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{2x} \geq 0$$

Hitta nollställena till  $x^2 - 2x - 8$  genom kvadratkomplettering!

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ eller } x = -2$$

Kan nu skriva om  $\frac{x^2 - 2x - 8}{2x} \geq 0$  som  $\frac{(x-4)(x+2)}{2x} \geq 0$ . Härifrån kan man använda metoden med teckenstudium:

	-2	0	4
$\frac{1}{2}x$	-	+	+
$x - 4$	-	-	0
$x + 2$	+	+	+
Tot	0	0	+

Ser att  $\frac{x^2 - 2x - 8}{2x} \geq 0$  uppfylls i intervallen  $[-2, 0]$  och  $[4, \infty)$  och kan skriva lösningen som  $[-2, 0] \cup [4, \infty)$ .

**Absolutbelopp** Absolutbelopp av ett tal  $x \in \mathbb{R}$  definieras som:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

Följande tolkning gäller: Givet ett tal  $a \in \mathbb{R}$  så gäller för alla  $x \in \mathbb{R}$  att  $|x - a| =$  avståndet mellan  $x$  och  $a$ .

Vidare gäller också, givet ett fixt tal  $D \geq 0$ , att  $|x - a| = D \Leftrightarrow$  mängden av alla  $x \in \mathbb{R}$  vars avst. till  $a$  är  $= D$ , dvs  $|x - a| = D \Leftrightarrow$

$<$	$<$	$a - D < x < a + D$
$x \in \mathbb{R}$ vars avst. till $a$ är $= D$ , dvs $ x - a  = D \Leftrightarrow$	$x = a - D$	
$>$	$>$	$x < a - D, x > a + D$

**Ex** (P1.41)

Lös olikheten  $|x + 1| > |x - 3|$  genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

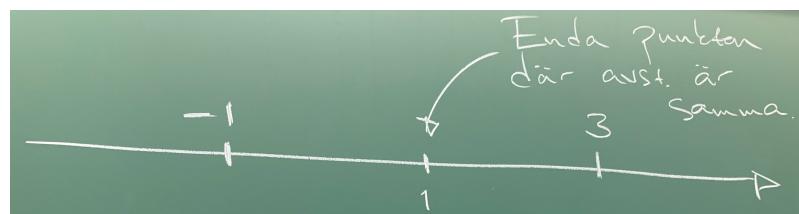
**Lösning**

$|x + 1| = |x - (-1)|$  = "avst mellan  $x$  och  $(-1)$ "

$|x - 3|$  = "avst. mellan  $x$  och  $3$ "

Så "avst. mellan  $x$  och  $(-1)$ " > "avst. mellan  $x$  och  $3$ "

Till höger om  $1$  så kommer  $x$  alltid att vara längre från  $(-1)$  än  $3$ .



# Chapter 3

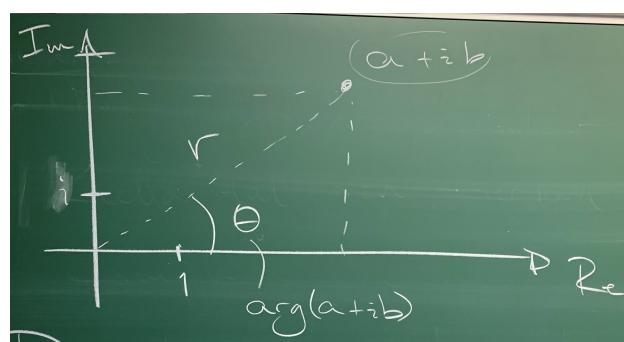
## Komplexa tal

Ett komplexa tal  $z \in \mathbb{C}$  kan alltid skrivas på formen  $z = a + i \cdot b$  där

- $a$  kallas för realdelen av  $z$   $Re(z)$
- $b$  kallas för imaginärdelen av  $z$   $Im(z)$

Den imaginära enheten  $i$  löser definitionsmässigt ekv.  $x^2 + 1 = 0$ , dvs  $i = \sqrt{-1}$ . Rent visuellt kan man betrakta ett komplexa tal  $a + ib$  som en punkt i det komplexa talplanet.

Det gäller att  $r^2 = |a + ib|^2 = a^2 + b^2$ . Givet  $r$  och argumentet  $\theta$  kan alla komplexa tal skrivas  $z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$



# Chapter 4

## Funktioner

### 4.1 Funktioner och funktionsgrafer

En funktion beskriver sambandet mellan in- och ut-data och kan bidra till ökad förståelse av hur olika processer hänger ihop. Klassisk machine learning handlar mycket om att just hitta bra funktioner för att relatera in- och ut-data (supervised learning).

I envariabelanalys studeras funktioner som relaterar ett tal till ett annat. Kan tänkas som en ”regel”  $f$  som avbildar ett givet tal  $x$  till ett annat tal  $y$ .

Alla de värdena som är tillåtna att mata in i  $f$  kallas för funktionens definitionsängd och betecknas  $D(f)$ . Mängden av alla  $y$ -värden som funktionen kan leverera kallas för värdemängden och skrivs  $R(f)$  (range).

**Ex** Funktionen  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  har  $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ .

En funktionsgraf (eller bara en graf) givet en funktion  $f$  utgörs av alla punkter  $(x, y) = (x, f(x))$ . Några viktiga concept:

- En funktion sägs vara jämn om  $f(-x) = f(x)$  då  $(x \in D(f))$ .  
Betyder att  $f$  är symmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion sägs vara udda om  $f(-x) = -f(x)$ .  
Betyder att  $f$  är antispegelsymmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion är injektiv om det för varje par  $x_1, x_2 \in D(f)$  gäller att om  $f(x_1) = f(x_2)$  så är  $x_1 = x_2$ .
- En funktion  $f$  som avbildar en mängd tal  $\mathbf{x}$  på en annan mängd  $\mathbf{y}$ , dvs  $f : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  sägs vara surjektiv om  $\mathbf{y} = R(f)$ .

### 4.2 Kompositioner

En vanlig konstruktion är att kombinera två separata funktioner till en ny genom komposition. Kan göras på två sätt:

1.  $f \circ g(x) := f(g(x))$

$$2. \ g \circ f(x) := g(f(x))$$

Notera att  $f \circ g \neq g \circ f$  i allmänhet!

## Chapter 5

# Polynom och rationella funktioner

Ett polynom är en funktion som kan skrivas som:  $P(x) = a_1 \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + ax + a_0$  där  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  kallas för polynomets koefficienter och talet  $n$  (positivt heltal) kallas för polynomets grad. En rationell funktion  $R(x)$  är en funktion som kan skrivas som en kvot på två polynom  $P(x)$  och  $Q(x)$ , dvs  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Definitionsängden  $D(R)$  begränsas enbart av nollställena till  $Q(x)$ , dvs.  $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ .

### 5.1 Polynomdivision

Rationella tal kan alltid skrivas som en heltalsdel + rest:

$$\frac{29}{6} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{4 \cdot 6}{6} + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$$

Motsv. funkar även för rationella funktioner och metoden för att hita ”heltalsdelen” och ”resten” kalla polynomdivision.

**Ex (P6.18)** Uttryck  $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$  som summan av ett polynom och en rationell funktion.

#### Lösning

The image shows a handwritten polynomial division on a chalkboard. The divisor is  $x - 1$ . The dividend is  $x^4 + x^2$ . The quotient is  $x^3 + x^2 + 1$ . The remainder is  $2x^2 - x + 1$ .

Eftersom polynomet  $2x^2 - x + 1$  har lägre grad än nämnaren  $x^3 + x^2 + 1$  tar divisionsalgo. slut. Vi har fått att  $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1} = (x - 1) + \frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2+1} \square$ .

Enligt Aritmetikens fundamentalsats så kan alla positiva heltal alltid skrivas som en unik faktorisering av primtal, t.ex  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . Liknande resultat finns för polynom! Algebraens fundementsats säger att varje polynom av grad  $n$  har exakt  $n$  st. nollställen (ev. komplexa och räknade med multiplicitet). Vidare gäller också faktorsatsen:

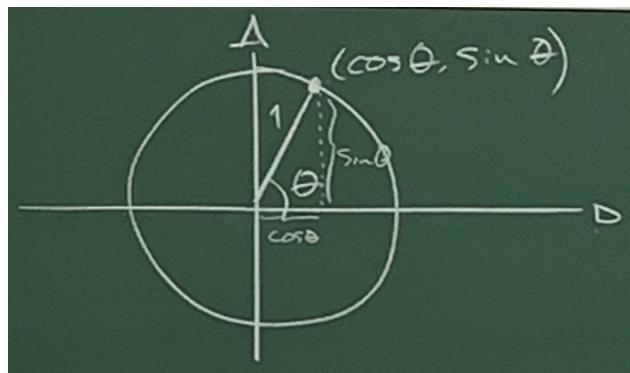
**Sats** Talet  $r$  är en rot (dvs ett nollställe) till ett polynom  $P$  av grad minst 1 om och endast om  $(x - r)$  är en faktor av  $P(x)$ .

Eftersom alla polynom  $P$  av grad  $\geq 1$  har precis  $n$  st. nollställen säg  $r_1, \dots, r_n$  kan man alltid faktorisera ett polynom som  $P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$ .

## Chapter 6

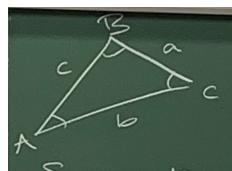
# Grundläggande trigonometri

De trigonometriska funktionerna  $\cos \theta$  och  $\sin \theta$  def. som  $x$ - respektive  $y$ -koordinaten på den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln  $\theta$ . Pythagoras sats ger omedelbart att  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , även kallat trigonometriska ettan.



Vinkeln  $\theta$  mäts oftast i radianer men kan också mätas i grader. Det gäller att  $\pi$  radianer motsvarar  $180^\circ$  grader.

Utifrån sin och cos definieras vidare funktionen tangens som  $\tan \theta := \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ . Två trigonometriska samband som är viktiga är sinus- och cosinus-satsen:

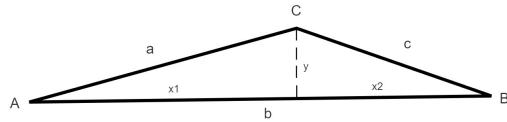


$$\text{Sinussatsen} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\text{Cosinussatsen} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

**Ex (P6.53)** Visa att arean på en godtycklig triangel  $ABC$  kan beräknas som  $\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$ .

**Lösning** Area =  $\frac{x_1 \cdot y}{2} + \frac{x_2 \cdot y}{2} = \frac{x_1 \cdot y + x_2 \cdot y}{2}$ . Men  $\sin A = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot \sin A \Rightarrow$   
 $Area = \frac{x_1 \cdot c \sin A + x_2 \cdot c \sin A}{2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot c \cdot \sin A}{2} = \{x_1 + x_2 = b\} = \frac{1}{2}bc \sin A$ . De andra formulerna följer analogt.  $\square$



## Chapter 7

# Talföljder och gränsvärden

Studium av talföljder är ett av matematikens mest klassiska områden. Vi har exempelvis:

- Fibonacci-talföljden,  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ , återfinns i olika sammanhang i naturen.
- Primalssekvensen,  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ , finns formel för att beskriva sekvensen?  
(olöst)

Ska försöka formalisera begreppen i synnerhet för oändligt långa talföljder.

Låt  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$  vara en godtycklig talföljd. Man säger att  $\{a_n\}$  är:

- Begränsad ovan-/underifrån om det finns ett tal  $L$  sådant att  $a_n \leq L/a_n \geq L \forall n = 1, 2, 3, \dots$
- Begränsad om den är begränsad både ovan- och underifrån.
- Positiv/Negativ om  $a_n \geq 0/a_n \leq 0, \forall n = 1, 2, \dots$
- Växande/Avtagande om  $a_{n+1} \geq a_n/a_{n+1} \leq a_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$
- Monoton om talföljden är antingen växande eller avtagande
- Alternerande om  $a_{n+1} \cdot a_n < 0, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Ett viktigt begrepp för talföljder (och funktioner) är konvergens, dvs. om talföljden ”stannar av” och håller sig oförändrad om man bara kollar tillräckligt långt in i följen (dvs.  $n$  stort). Måste försöka precisera vad detta betyder ren matematiskt.

**Definition** Konvergent talföld

Man säger att en talföld  $a_n$  konvergerar mot  $L \in \mathbb{R}$  och skriver  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , om det för varje positivt tal  $\varepsilon > 0$  existerar ett positivt heltalet  $N$  så att det för alla  $n \leq N$  gäller att  $|a_n - L| \leq \varepsilon$ .

**Intuitivt**  $\{a_n\}$  konvergerar mot  $L$  om alla tal tillräckligt långt in i följen ligger godtyckligt nära talet  $L$ . Av detta följer ”enkelt” att:

- om  $\{a_n\}$  konvergerar så är den begränsad.
- om  $\{a_n\}$  är begränsad ovanifrån och växande så är  $\{a_n\}$  konvergent. Motsvarande för begränsad underifrån och avtagande.

Bra räknelagar:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ , om  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$
- om  $a_n \leq b_n \leq c_n$  och  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .

**Ex (9.1.25)** Bestäm om möjligt det tal  $L$  som  $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}$  konvergerar mot då  $n \rightarrow \infty$

**Lösning** Det gäller att

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 - 1} &= \sqrt{(n+1) \cdot n} - \sqrt{(n+1)(n-1)} = \sqrt{n+1} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \\ \sqrt{n+1} \cdot \frac{(\sqrt{n}\sqrt{n-1}) \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} &= \sqrt{n+1} \cdot \frac{(n - (n-1))}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ \text{och } \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} &\leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &\leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2(n-1)} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{2(n-1)} = \\ \frac{n}{2(n-1)} &= \frac{1}{2(1 - \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

så  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \square$

Ett av de mest kraftfulla verktygen inom matematisk analys är gränsvärden för funktioner, dvs  $\lim_{x \rightarrow a} f(x), a \in \mathbb{R}$ . Det ger oss derivator, integraler, differentialekvationer, ... Hur ska man definiera gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ? Skulle kunna inspireras av definitionen för talföljder.

**Definition (försök)** Man säger att  $f(x)$  konvergerar mot värdet  $L \in \mathbb{R}$  då  $x$  går mot  $a \in \mathbb{R}$  om det för varje talföljd  $\{x_n\}$  s.a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gäller att  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

Bättre definition i liknande riktning är dock.

**Definition** Man säger att  $f(x)$  går mot gränsvärdet  $L \in \mathbb{R}$  då  $x$  går mot  $a \in \mathbb{R}$  och skriver  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , om det för varje  $\varepsilon > 0$  existerar ett annat tal  $\delta > 0$  (som ev. beror av  $\varepsilon$ ) s.a. om  $0 < |x - a| < \delta$  så ligger  $x$  i  $f$ s definitionsmängd och  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

## Ex

1.  $f \rightarrow L_1$ , när  $x \rightarrow a_1$ ? Ja! Går alltid att hitta  $\delta > 0$  s.a.  $|f(x) - L_1| < \varepsilon$  oavsett  $\varepsilon$ .
2.  $f \rightarrow L_2$ , när  $x \rightarrow a_1$ ? Omöjligt att hitta  $\delta > 0$  s.a.  $|f(x) - L_2| < \varepsilon$  om  $\varepsilon$  litet.

**Ex (1.5.19)** Använd definitionen av gränsvärde för att bevisa att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$$

**Lösning** Vill hitta  $\delta > 0$  så att  $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$  så länge som  $0 < |x - 1| < \delta$  (givet vilket  $\varepsilon > 0$  som helst). Gäller att  $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$ .  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Om } 0 < \varepsilon < \sqrt{x} \leq 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow (1 - \varepsilon)^2 < x < (1 + \varepsilon)^2 \\ \text{Om } \varepsilon > 1 : 1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < x < (1 + \varepsilon)^2 \end{array} \right.$  Notera att  $(1 - \varepsilon)^2 < x < (1 + \varepsilon)^2$  alltid implicerar att  $1 - \varepsilon < \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$  dvs  $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$ .

$$(1 - \varepsilon)^2 < x < (1 + \varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -\varepsilon(2 - \varepsilon) < x - 1 < \varepsilon(2 + \varepsilon)$$

så

$$-\varepsilon(2 - \varepsilon) < x - 1 < \varepsilon(2 + \varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon(2 - \varepsilon) < x - 1 < \varepsilon(2 + \varepsilon)$$

om  $\varepsilon < 2$ . Välj därför  $\delta = \varepsilon \cdot (2 - \varepsilon)$  om  $\varepsilon < 2$ . För  $\varepsilon \leq 2$ , välj t.ex  $\delta = 1$  eftersom  $|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt{x} - 1 < 2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < 2 \leq \varepsilon \square$

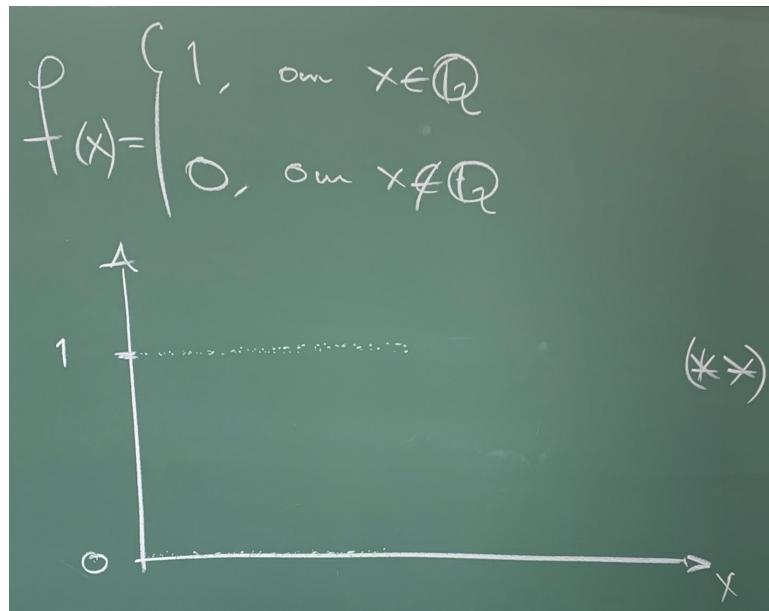
## 7.1 Kontinuitet

Matematisk analys handlar om studier av funktioner (och ekvationer) definierade på  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ .

Frågeställningar och intuition för ämnet hämtas ofta från fysik/teknik där funktioner bär på någon form av information.

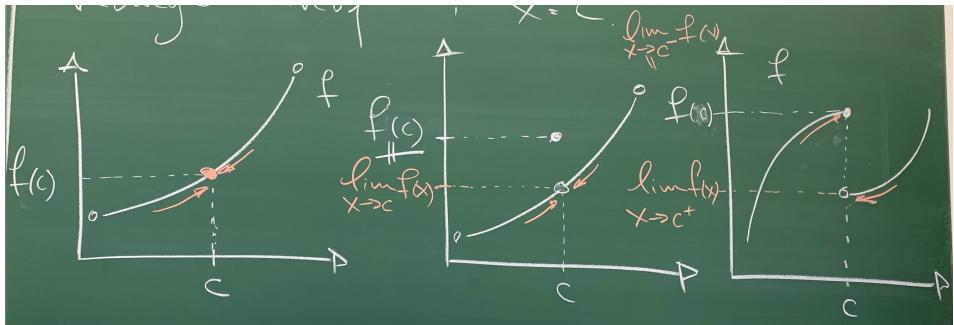
Vår definition av funktion är att det är "en regel" som avbildar ett tal  $x$  i en given definitionsmängd  $D(f)$  till ett annat tal  $y$  i en värdemängd. Gruppen av sådana regler är enorm, dvs. det finns ett uppräkneligt antal möjliga funktioner, och de flesta av dom skulle inte vara användbara för modellering av verkliga system.

**Ex**  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  (Dirichlet-funktionen)



Om man drar en funktion slumpmässigt från mängden av alla funktioner så skulle man nästan säkert dra något i stil med dirichlet funktionen. Måste därför hitta vettig begränsad klass av funktioner för att kunna hitta meningsfulla matematiska resultat. En sådan klass är de kontinuerliga funktionerna.

**Definition** (Kontinuerlig funktion) Man säger att en funktion  $f$  är kontinuerlig i punkten  $x = c$  (som antas vara en mindre punkt i  $D(f)$ ) om  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Om antingen  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  inte existerar eller existerar men inte är lika med  $f(c)$  säger man att  $f$  är diskontinuerlig i  $x = c$ . Vad betyder detta? Jo, det betyder att "funktionen hänger ihop" i  $x = c$ .

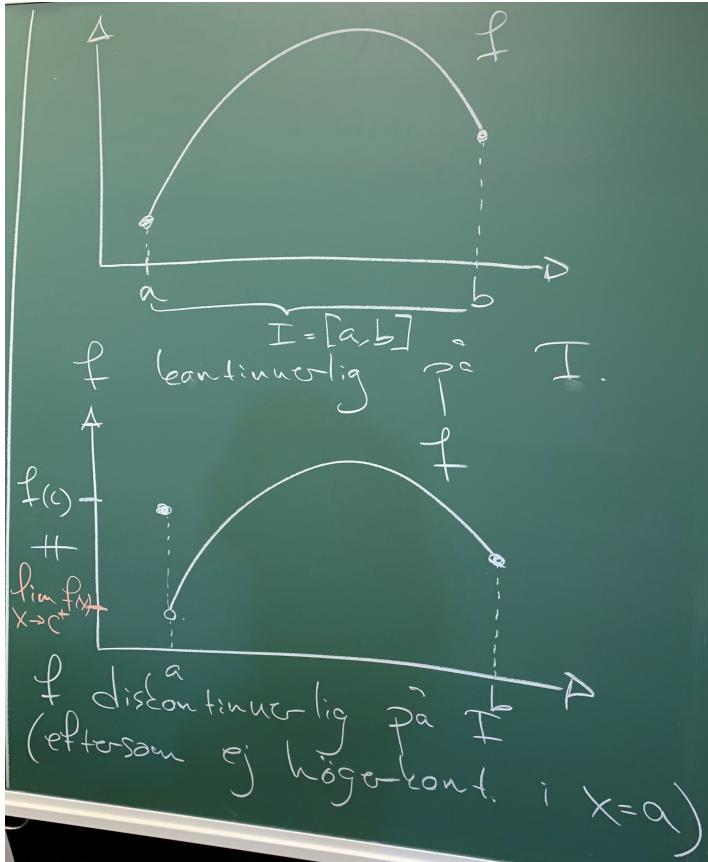


Man säger att en funktion  $f$  är kontinuerlig på ett helt interval  $I$  om  $f$  är kontinuerlig i varje punkt  $x \in I$ .

Hur hanterar man ändpunkterna i  $I$ ? Till exempel om  $I = [a, b]$ , vad ska gälla för  $x \rightarrow a$  och  $x = b$ ? Jo,  $f$  ska vara högerkontinuerlig i  $x = a$  och vänsterkontinuerlig i  $x = b$ .

- Man säger att en funktion  $f$  är vänsterkontinuerlig i en punkt  $x = c$  om  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ .
- Man säger att en funktion  $f$  är högerkontinuerlig i en punkt  $x = c$  om  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ .

Så,  $f$  benämns som kontinuerlig i randpunkter till ett interval (till exempel  $a$  och  $b$  för  $[a, b]$ ) om den är höger- respektive vänsterkontinuerlig.



**Ex (1.4.9)** Beskriv var i sin definitionsmängd som följande funktion är kontinuerlig, vänster- respektive högerkontinuerlig och diskontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{om } x \neq 0 \\ 0, & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

**Lösning** Försök att skissa funktionen.

- funktionen  $\frac{1}{x^2}$  är alltid positiv
- Om  $x$  är stort (antingen positivt eller negativt) så är  $\frac{1}{x^2} \approx 0^+$
- Om  $x$  är nära 0 (antingen positivt eller negativt) så är  $\frac{1}{x^2} \approx +\infty$
- Uppenbart tt  $\frac{1}{x^2}$  är växande på  $(-\infty, 0)$  och avtagande på  $(0, \infty)$ .

Alltså,  $f$  är kontinuerlig för alla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eftersom  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} = f(x)$  för alla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . I  $x = 0$  är  $f$  diskontinuerlig eftersom  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  och  $f(0) = 0$  och  $0 \neq \infty \square$

**Ex (1.4.16)** Hur ska man definiera funktionen  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$  i punkten  $x = \sqrt{2}$  för att den ska bli kontinuerlig där?

**Lösning** Vad händer i  $x = \sqrt{2}$ ?

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}^2 - 2}{\sqrt{2}^4 - 4} = \frac{2 - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0} ???$$

Vill studera gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$ .

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}^2 - 2}{\sqrt{2}^4 - 4} = \frac{x^2 - 2}{(x^2 - 2)(x^2 + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2} \xrightarrow{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{1}{4}$$

Vi ser att  $f$  kan naturligt definieras i punkten  $x = \sqrt{2}$  även om det inte var uppenbart från början. Genom att sätta  $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$  så blir funktionen kontinuerlig i  $x = \sqrt{2}$ , dvs.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}, & \text{om } x \neq \sqrt{2} \\ \frac{1}{4}, & \text{om } x = \sqrt{2} \end{cases} \square$

**Ex (1.5.3)** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|5 - 2x| - |x - 2|}{|x - 5| - |3x - 7|}$$

**Lösning** Måste reda ut hur det olika absolutbeloppen beter sig i en omgivning av  $x = 3$ .

$$|5 - 2x| = \begin{cases} 5 - 2x & \text{om } 5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} = 2,5 \\ -(5 - 2x) & \text{om } 5 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > 2,5 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{om } x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{om } x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{om } x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \\ -(x - 5) & \text{om } x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \end{cases}$$

$$|3x - 7| = \begin{cases} 3x - 7 & \text{om } 3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3} \approx 2,33 \\ -(3x - 7) & \text{om } 3x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < 2,33 \end{cases}$$

Vi kan alltså skriva gränsvärdet som:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5 - x + 2}{5 - x - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{-4x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{-4(x - 3)} = \frac{1}{4} \square$$

Är alla kontinuerliga funktioner ”välnartade” och alltid lämpliga för att beskriva något slags verklighet?

Nej.

- Finns massa verkliga situationer som kräver diskontinuerliga funktioner för att kunna beskrivas.
- finns väldigt ”konstiga” kontinuerliga funktioner.

Lite grundläggande egenskaper för kontinuerliga funktioner.

Om  $f$  och  $g$  är två kontinuerliga funktioner i  $c \in \mathbb{R}$  så gäller att:

- $f + g$ ,  $f - g$  och  $f \cdot g$  är kontinuerliga i  $x = c$  och  $\frac{f}{g}$ ,  $\frac{g}{f}$  om  $g(c) \neq 0$
- $k \cdot f$  är kontinuerlig i  $x = c$  för alla konstanter  $k \in \mathbb{R}$ .
- $(f)^{\frac{1}{n}}$  är kontinuerlig i  $x = c, n \in \mathbb{N}$  (givet att  $f(c) \geq 0$  om  $n$  är jämnt)

vad gäller om man vill kompononera ihop kontinuerliga funktioner?

**Sats** (Komposition av kont. funktioner)

Om  $f \circ g := f(g(x))$  är definierad på ett interval som innehåller  $x = C$  och  $f$  är kontinuerlig i  $x = L$  och  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  så gäller att:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x))$$

Speciellt om  $g$  är kontinuerlig i  $x = c$  (dvs.  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$ ) så är kompositionen  $f \circ g$  också kontinuerlig i  $x = c$ .

**Bevis** Vill bevisa att om  $f$  är kontinuerlig i  $x = L$  och  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  så är  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L)$  (Resten följer per automatik).

Använd definitionen av grändsvärde!

Vet att  $f$  är kontinuerlig i  $y = L$ , dvs.  $\lim_{y \rightarrow L} f(y) = f(L)$  vilket definitsmässigt betyder att det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett tal  $\gamma > 0$  s.a. om  $|y - L| < \gamma$  så är  $|f(y) - f(L)| < \varepsilon$ .

Vidare, eftersom  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  så finns det ett tal  $\delta > 0$  sådant att om  $|x - c| < \delta$  så är  $|g(x) - L| < \gamma$  för vilket  $\gamma > 0$  som helst. I vårt fall är vi intresserade av fallet där  $y = g(x)$  och av tidigare gäller således att om bara  $0 < |x - c| < \varepsilon$  så kommer  $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$  oavsett hur vi väljer  $\varepsilon > 0$ .

Men detta betyder att  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L)$  och vi har därmed visat att  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x))$  och speciellt att  $f \circ g$  är kontinuerlig i  $x = c$  om  $g$  är kontinuerlig i  $x = c$ .  $\square$

Vi förstätter med lite allmänna egenskaper för kontinuerliga funktioner.

**Sats** (kontinuerliga funktioner är begränsade) (tentat)

Om  $f$  är kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  så är  $f$  begränsad över samma intervall.

För att bevisa detta ska vi använda Bolzano-Weierstrass sats.

**Sats** (Bolzano-Weierstrass) (tenta)

Låt  $\{a_n\}$  vara en oändlig och begränsad talföljd. Då finns en delföljd av  $\{a_n\}$  som är konvergent!

Intuition: Givet att  $\{a_n\}$  är begränsad så kan man alltid plocka ihop en ny talföljd med element tagna i ordning från  $\{a_n\}$ , säg  $\{a_{n_k}\}$ , så att denna följd konvergerar.

**Bevis** (kontinuerliga funktioner är begränsade)

Använder ett så kallad ”motsägelsebevis”, dvs. antag att satsen inte stämmer och visar att detta leder till något orimligt eller omöjligt.

Antag att  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  men inte begränsad ovanifrån på  $[a, b]$ . I så fall gäller att det för varje heltalet  $k > 0$  finns ett  $x_k \in [a, b]$  så att  $f(x_k) > k$  (eftersom  $f$  växer obegränsat på  $[a, b]$  enligt antagande). Alltså kan vi konstruera en talföljd  $\{x_n\}$  där alla  $x_n \in [a, b]$  och  $f(x_n) > n$ . Men om alla  $x_n \in [a, b]$  så måste talföljden  $\{x_n\}$  vara begränsad (eftersom  $a \leq x_n \leq b$ ). Av Bolzano-Weierstrass finns därför en delföljd till  $\{x_n\}$  säg  $\{x_{n_k}\}$  som är konvergent. Beteckna denna delföljds gränsvärde med  $x$ , dvs  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ . Eftersom  $x \in [a, b]$  och  $f$  är kontinuerlig i  $x$  (eftersom  $f$  kontinuerlig på hela  $[a, b]$  enligt förutsättning) så gäller per definition att  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ . Men eftersom  $f(x_n) > n$  så måste  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$ . Detta motsäger att  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ !

Slutsats:  $f$  måste vara begränsad ovanifrån.

Liknande resonemang gäller för att visa att  $f$  även är måste vara begränsad underifrån och därmed begränsad.  $\square$

**Sats** (min-max-satsen)

Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion på  $[a, b]$  (där  $|a|, |b| < \infty$ ). Då existerar alltid tal  $p, q \in [a, b]$  sådana att för alla  $x \in [a, b]$ ,  $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$  dvs.  $f$  har ett minimum  $m = f(p)$  och ett maximum  $M = f(q)$ .

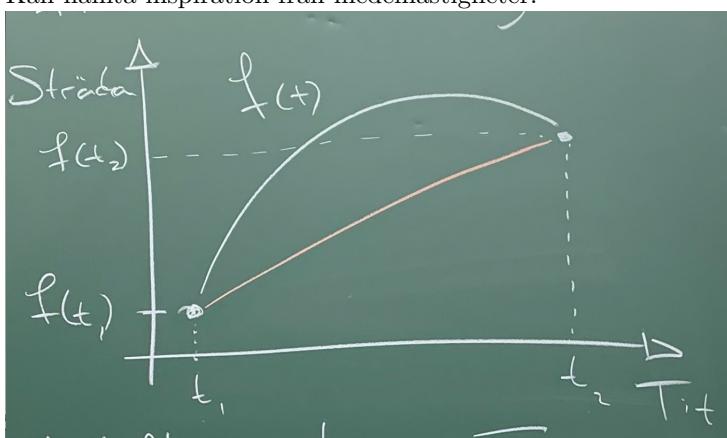
**Sats** (satsen om mellanliggande värden)

Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion på  $[a, b]$  och låt  $s$  vara ett tal mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ . Då existerar det alltid ett tal  $c \in [a, b]$  så att  $f(c) = s$ .

# Chapter 8

## Derivatan

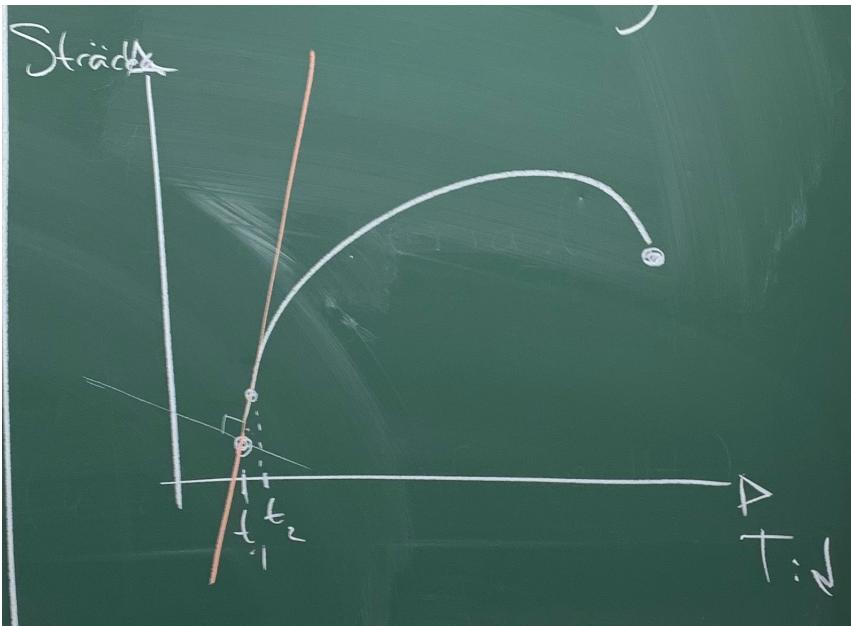
Ett av de mest fundamentalala koncepten inom matematisk analys är derivata. Handlar om hur snabbt en given funktion förändras i närheten av en punkt  $x$ . Kan hämta inspiration från medelhastigheter.



Medelhastigheten  $\bar{v}$  mellan  $t_1$  och  $t_2$  är  $\bar{v} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ . Just  $\bar{v}$  är dessutom lutningen på den linje som går från  $(t_1, f(t_1))$  till  $t_2, f(t_2)$ .

$$\bar{v} = \frac{y - f(t_1)}{x - t_1} \Leftrightarrow y = \bar{v}(x - t_1) + f(t_1)$$

Uppenbart att ju närmre  $t_2$  är  $t_1$  desto mer kan  $\bar{v}$  tolkas som den momentana hastigheten i  $t_1$  och ”snittlinjen” övergår till att bli en tangent.



Naturligt att definiera den momentana hastigheten i en punkt  $x_0$  för en given funktion  $f$  som

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Om detta gränsvärde existerar så kallas det för derivatan av  $f$  i  $x = x_0$  och betecknas som  $f'(x_0)$ . Geometriskt så kan  $f'(x_0)$  tolkas som tangentlinjens lutning i  $x = x_0$  för grafen till  $f$ .

Precis som för gränsvärden kan man definiera höger- och vänsterderivatan som:

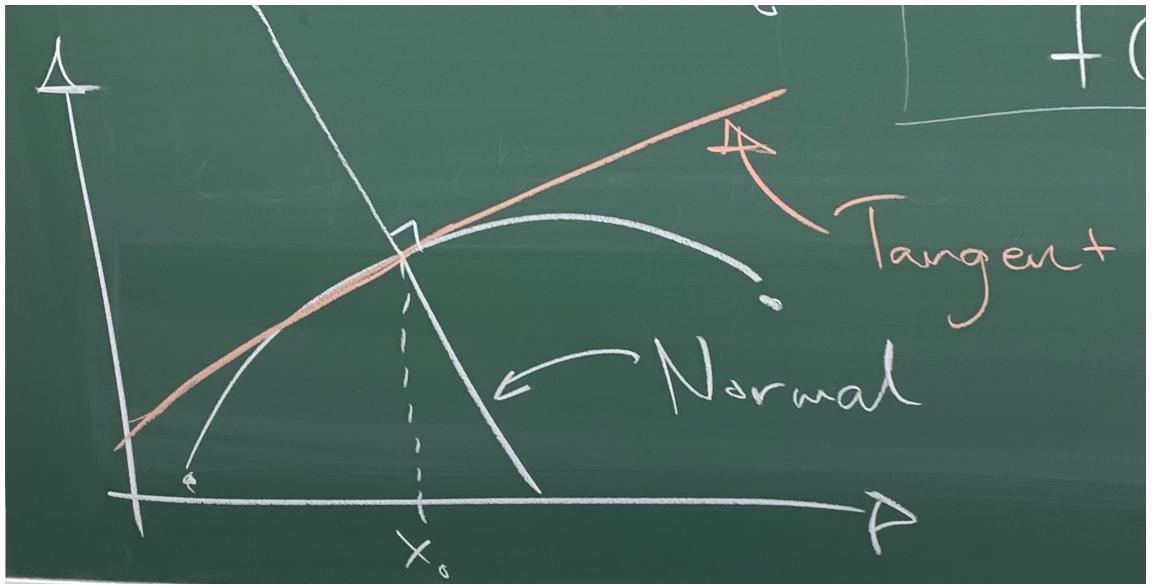
$$f'_+(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En funktion  $f$  sägs vara deriverbar på ett interval  $[a, b]$  om den är deriverbar i varje punkt  $x \in [a, b]$  och höger- respektive vänsterderiverbar i  $a$  respektive  $b$ .

från derivatan kan man enkelt beräkna lutningen för normalen, dvs. den linjen som är vinkelrät mot tangenten som:

$$\text{Normalens lutning i } x_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}$$



**Ex** (2.2.21)

Använd derivatans definition och beräkna  $f'(x)$  givet funktionen  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

**Lösning** Vi måste beräkna följande gränsvärde då  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{\sqrt{1+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+(x+h)^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}}{h} = \\
 &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+(x+h)^2}}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2}} = \\
 &= \frac{(1+x^2) - (1+(x+h)^2)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} = \\
 &= \frac{1+x^2 - (1+x^2+2xh+h^2)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} = \\
 &= \frac{-h(2x+h)}{h\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} = \\
 &= \frac{-2x-h}{\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})}
 \end{aligned}$$

Då  $h \rightarrow 0$  får vi:

$$-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2})} = -\frac{2x}{2(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

## 8.1 Räkneregler och standard derivator

Några standard derivator:

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Genom derivatans definition visar amn enkelt att

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

Två andra extremt viktiga räkneregler för derivator är produktregeln och kedjeregeln.

### Produktregeln

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(Ur denna får man öven ”kvotregeln” genom att sätta  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot g^{-1}(x)$ )

### Kedjeregeln

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Kedjeregeln ligger till grund för alla implementationer av träningssteget för neurala nätverk (typ av AI algoritm) nämligen genom så kallad ”backwards propagation”.

Intuitivt motsvarar derivatan  $f'(x)$  tangentlinjens lutning för  $f$  i  $x$ . Borde betyda att  $f$  ”hänger ihop” i  $x$ , dvs att  $f$  är kontinuerlig i  $x$ ?

**Sats** Deriverbarhet ger kontinuitet (tentat)

Om  $f$  är deriverbar i  $x$  så är  $f$  också kontinuerlig i  $x$ .

**Bevis** Att  $f$  är deriverbar i  $x$  betyder att gränsvärdet  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  existerar. Men det betyder att  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x) \frac{h}{h}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x) \cdot h}{h} = 0$  så  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ . Låt  $x+h=y \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ , dvs.  $f$  är kontinuerlig i  $x$ .  $\square$

Gäller det motsatta, dvs. att om  $f$  är kontinuerlig i  $x$  så är  $f$  deriverbar i  $x$ ? Nej! Till exempel är så kallade

**Browask rörelse**  $B(t)$  (slumpfunktion) Kontinuerlig i alla punkter men ej de-

riverbar någonstans.



Browask rörelse används bland annat inom signalbehandling och inom matematisk finans (för att modellera aktieprisutveckling).

### Derivatan av trigonometriska funktioner

- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1-\sin^2(x)} = \left\{ \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \right\} = 1 + \tan^2(x)$

Alla dessa bygger på beviset att  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

**Ex** (2.4.12) Beräkna derivatan av  $f(x) = (2 + |x|^3)^{\frac{1}{3}}$ .

**Lösning** Tänk på  $2 + |x|^3$  som en inre funktion och använd kedjeregeln!

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (2 + |x|^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2 + |x|^3)' = \frac{1}{3} (2 + |x|^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 + |x|^3)'$$

Vad är derivatan av  $2 + |x|^3$ ?

$$(2 + |x|^3)' = 0 + (|x|^3)' = 3 \cdot |x|^2 \cdot (|x|)'$$

Vad är  $(|x|)'$ ?

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0 \end{cases} \Rightarrow (|x|)' = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{om } x > 0 \\ -1, & \text{om } x < 0 \end{cases}}_{\text{sgn}(x)}$$

$= \text{sgn}(x)$  (sign function)

$$\text{så } f'(x) = \frac{1}{3} (2 + |x|^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 \cdot |x|^2 \cdot \text{sgn}(x) = \frac{x^2}{(2+|x|^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \text{sgn}(x), x \neq 0$$

Om en funktion  $f$  beskriver hur värdet  $y$  av någon typ av process beror av en inparameter  $x$ , dvs.  $y = f(x)$  så beskriver derivatan  $f'(x)$  hur snabbt eller långsamt motsvarande process förändras givet indata  $x$ .  $f''(x)$  kan tolkas som förändringshastigheten av  $f$  i punkten  $x$ .

### Ex

$x$  = "Framlednings temperatur för radiatorvatten"

$f(x)$  = "Inomhus temperatur givet framlednings temperatur  $x$ "

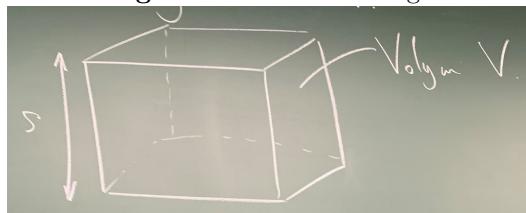
$\Rightarrow f'(x)$  = "Förändringshastighet i inomhustemperatur givet förändring i framledningstemperatur  $x$ ".

Derivator används och tolkas på liknande sätt i en mängd olika sammanhang för ekonomi/samhällsvetenskap till fysik/teknik/naturvetenskap.

Måste förstå möjligheter, begränsningar och egenskaper för  $f'$ .

**Ex (2.7.20)** Bestäm förändringshastigheten för sidorna av en kub som funktion av kubens volym.

**Lösning** Kalla kubens sidolängd för  $s$  och dess volym för  $V$ .



Vi vill hitta ett explicit uttryck för  $s'(V)$ . Vet att  $V = s^3 \Leftrightarrow s = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$ .

$$\text{Alltså är } s'(V) = \frac{1}{3} \cdot V^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot V^{-\frac{2}{3}} \quad \square$$

**Ex (2.7.29)** Om det kostar en fabrikör  $C(x)$  kr att tillverka  $x$  enheter av något så innebär detta en snittkostnad per enhet av  $\frac{C(x)}{x}$  (Kr/enhet). Visa att det antal enheter  $x$  som minimerar snittkostnaden gör snitt- och marginalkostnad lika (dvs  $C'(x)$ ).

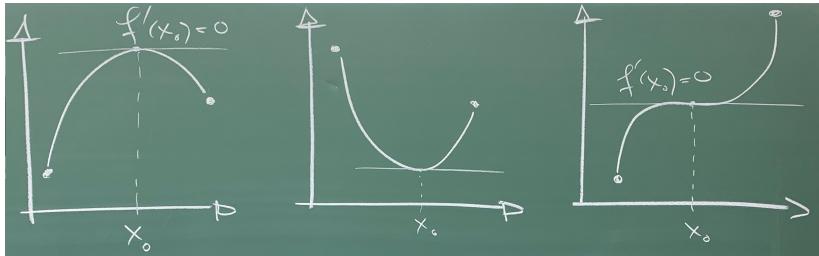
**Lösning** Låt  $A(x)$  beteckna snittkostnad. Dvs.  $A(x) = \frac{C(x)}{x}$ . Då gäller att:

$$A'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{C(x)}{x} \right] = \{\text{prod.reg.}\} = C'(x) \cdot x^{-1} + C(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

Vi ser att

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow C'(x) \cdot x - C(x) = 0 \Leftrightarrow \text{marginalkost.} = C'(x) = \frac{C(x)}{x} = \text{snittkost.} \quad \square$$

Varför sattes  $A'(x) = 0$  som en garant för att minimum? Rent generellt så betyder  $f'(x_0) = 0$  att en given funktion  $f$  har horizontell tangent i  $x = x_0$ . Sådana punkter  $x = x_0$  kallas för kritiska punkter och man säger att  $f$  är stationär för sådana  $x$ . Geometriskt kan detta bara betyda något av följande:



Hur visste man att  $A'(x) = 0$  skulle motsvara en kritisk punkt för ett minvärde av  $A(x)$ ? Rimligt att anta att  $C(x) = K + c(x)$  där  $K$  är en konstant, fast kostand, och  $c(x)$  är enhetskostnaden

- $A(x) \approx \frac{K}{x}$ , om  $x$  litet  $\Rightarrow$  avtagande.
- $A(x) \approx \frac{c(x)}{x}$ , om  $x$  stort  $\Rightarrow$  konstant eller växande.

$\Rightarrow A(x)$  har ett minimimum?

Smidigt att kika på högre ordning av derivator!

Givet en funktion  $f$  kan man definiera andraderivatan  $f''$  som  $'' = (f')'$ . På liknande sätt definieras tredje, fjärde och högre ordnings derivator som  $f^{(n)} = ((\dots(f')'\dots))'$ . Andraderivatan bär precis som förstaderivatan både på teknisk- och geometrisk information om  $f$ . Om  $x$  = tid och  $f(x)$  = tillryggalagd sträcka så motsvarar  $f'(x)$  momentanhastighet och  $f''(x)$  momentanacceleration. Geometriskt så kan  $f''(x_0)$  tolkas som krökningen av grafen till  $f$  i punkten  $x = x_0$ . Det gäller att om

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$  konvex i  $x_0$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$  konkav i  $x_0$
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow f$  kan vara konvex, konkav eller inget (och kan vara en så kallad inflektionspunkt.)

Speciellt gäller för stationära punkter där  $f'(x_0) = 0$  att:

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$  har ett lokalt minimum i  $x_0$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$  har ett lokalt maximum i  $x_0$

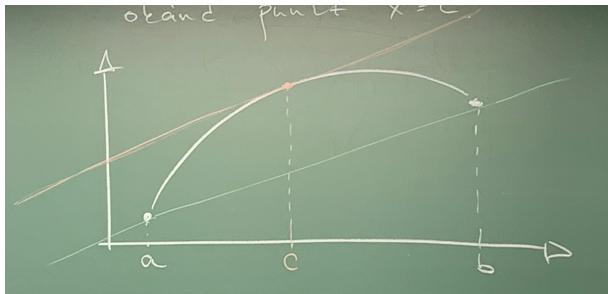
### Sats (Rolles sats)

Antag att  $g$  är konsttinuerlig på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b)$ . Om  $g(a) = g(b)$  så finns en punkt  $c \in (a, b)$  sådan att  $g'(c) = 0$ .

**Notera** Rolles sats är ett specialfall av medelvärdessatsen för derivator.

### Sats (Medelvärdessatsen för derivator) (tentativa)

Antag att  $f$  är en kontinuerlig funktion på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b)$ . Då existerar minst en punkt  $c \in (a, b)$  sådan att  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ .



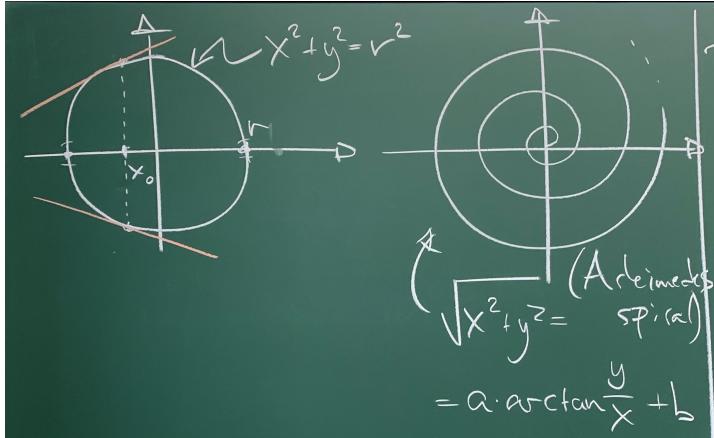
**Bevis** Givet en funktion  $f$  som uppfyller villkoren för satsen så kan vi konstruera funktionen  $g$  som  $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\right)$ . Uppenbart att  $g$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b)$  då  $f$  är det. Alltså är  $g(a) = g(b)$  och  $g'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Enligt Rolles sats finns då en punkt  $c \in (a, b)$  så att  $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .  $\square$

**Sats** Låt  $J$  vara ett öppet interval och  $I$  vara  $J$  med eller utan ändpunkter. Om  $f$  är kontinuerlig på  $I$  och deriverbar på  $J$  gäller att:

- $f'(x) > 0, \forall x \in J \Rightarrow f$  strängt växande på  $I$
- $f'(x) \geq 0, \forall x \in J \Rightarrow f$  växande på  $I$
- $f'(x) \leq 0, \forall x \in J \Rightarrow f$  avtagande på  $I$

## 8.2 Implicit derivering

Att derivera en given funktion  $f(x)$  är lätt med hjälp av regler som till exempel produktregeln och kedjeregeln. Ibland vill man dock beräkna derivator för kurvor som inte är funktionsgrafer, till exempel



Denna typ av kurvor kan inte skrivas på formen  $y = f(x)$ , men däremot som  $F(x, y) = 0$ .

**Ex** Archimedes spiral kan skrivas  $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - a \cdot \arctan \frac{y}{x} - b$

Hur beräknar man kurvan  $F(x, y) = 0$  i punkten  $x = x_0$ ? Notera att det mycket väl kan finnas flera derivator tillhörande en given punkt  $x = x_0$ . Man kan använda kedjeregeln för att beräkna  $F'(x, y)$ .

**Ex (2.9.5)** Givet kurvan  $x^2y^3 = 2x - y$ , bestäm  $y'$  uttryckt i termer av  $x$  och  $y$ .

**Lösning**

$$x^2y^3 = 2x - y \Leftrightarrow F(x, y) = x^2y^3 - 2x + y = 0$$

$$F'(x, y) = \frac{d}{dx}[F(x, y)] = \frac{d}{dx}[x^2y^3 - 2x + y] = \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(y) =$$

$$\left\{ \frac{d}{dx}(2x) = 2, \frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} = y' \right\} = \frac{d}{dx}(x^2x^3) - 2 + y' = \{\text{produktregeln}\} =$$

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(y^3) - 2 + y' = \{\text{kedjeregeln}\} = 2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot y' - 2 + y'$$

För kurvan gäller att:

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow F'(x, y) = 0 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2y' - 2 + y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2 - 2xy^3}{1 + 3x^2y^2} \quad \square$$

Vid implicit derivering måste man vara noga med att ha koll på punkter där derivatan eventuellt inte existerar.

## Chapter 9

# Primitiva funktioner och indefinita integraler

Med en primitiv funktion (antiderivata) till en funktion  $f$  definierad på ett intervall  $I$  menas en funktion  $F$  sådan att

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Eftersom derivatan av alla konstantfunktioner är  $g(x) = c$  är  $0$  ( $g'(x) = 0$ ) så finns oändligt många primitiva funktioner till  $f$  eftersom alla  $G(x) = F(x) + C$  funkar. Den indefinita integralen av  $f$  innehåller alla dessa!

**Definition** Givet en funktion  $f$  definieras den indefinita integralen som  $\int f(x), dx := F(x) + C, x \in I$  där  $C$  är en godtycklig konstant och  $F$  är en primitiv funktion till  $f$ , dvs  $F'(x) = f(x) \forall x \in I$ .

Integraler är en hörnsten inom matematisk analys och används i en mängd olika sammanhang.

**Ex (2.10.30)** Lös begynnelseproblemet  $\begin{cases} y' = x^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 5 \end{cases}$

**Lösning** Att lösa begynnelseproblemet innebär att bestämma  $y(x)$ . Om  $y' = \frac{1}{3}$  så måste  $y = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \left\{ \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} \right\} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ . Vidare så vet vi att  $y(0) = 5$  så  $\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 0 + c = 5 \Leftrightarrow C = 5$  och vi får att  $y = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 5 \square$

# Chapter 10

## L'Hôpital regler

L'Hôpitals regler är en strategi som ibland kan användas för att lösa icketriviala gränsvärdesproblem, dvs gränsvärden av typen

$$\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{"0"}{0}, \frac{"\pm \infty"}{\pm \infty}, "0 \cdot \infty", "\infty - \infty"$$

L'Hôpitals regler kan funka för gränsvärden för de två första typerna. Reglerna använder derivator!

### L'Hôpitals första regel

Antag att  $f$  och  $g$  är deriverbara på  $(a, b)$  och att  $g'(x) \neq 0$ . Antag också att

1.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, c \in (a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  (där  $L$  kan vara ändligt eller oändligt)

Då är  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

(Funkar även för  $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-}$  och om  $a, b = \pm\infty$ )

### L'Hôpitals andra regel

Antag att  $f$  och  $g$  är deriverbara på  $(a, b)$  och att  $g'(x) \neq 0$ . Antag också att

- $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty, c \in (a, b)$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  ( $L$  är ändlig)

Då är gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

**Ex (4.3.6)** Bestäm  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1}$

**Lösning** Gränsvärde av typen " $\frac{0}{0}$ ". Om  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$  och  $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$  så är  $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  och därmed  $g'(x) \neq 0$  i en omgivning av  $x = 1$ , dvs  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  för  $\varepsilon > 0$ . Gäller också att  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$  och att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

och enligt L'Hôpitals första regel gäller att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1} = \frac{1}{2} \quad \square$$

# Chapter 11

## Standardgränsvärden

Förutom L'Hôpitals regeler finns en samling Standardgränsvärden som man alltid kan ta för givna (om inte annat anges) när man löser gränsvärdesproblem.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ , om  $a > 1$  och  $b \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , om  $a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

# Chapter 12

## Funktioner

För alla reella tall  $a \neq 0$  gäller att  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ . Talet  $1/a$  kallas för den *multiplikativa inversen* till  $a$ . Den multiplikativa inversen definieras med hjälp av det speciellt talet 1 (ettan) som har den *unika* egenskapen att  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{R}$ . Om vi istället för de reella talen nu tänker oss funktioner och istället för multiplikation tänker oss komposition, alltså  $f \circ g$ , finns det då en ”etta”? Ja! Funktionen  $e(x) = x$  blir en detta eftersom  $f \circ e(x) = f(e(x)) = f(x)$  och  $e \circ f(x) = e(f(x)) = f(x)$  så alltså gäller att  $f \circ e = e \circ f = f$  för alla funktioner  $f$ . Med  $e(x) = x$  som ”etta” är det naturligt att fråga sig; givet en funktion  $f$ , finns det då en annan funktion  $g$  så att  $f \circ g = g \circ f = e$ ? Ja! Funktionen  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  blir en sådan funktion eftersom  $f \circ g(x) = f(\frac{1}{f(x)}) = \frac{1}{f(x)}$  och  $g \circ f(x) = \frac{1}{f(f(x))} = \frac{1}{f(x)}$  så alltså gäller att  $f \circ g = g \circ f = e$ . Detta gäller dock endast om  $f$  är injektiv, alltså om  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ . Funktionen  $g$  kallas då för *inversen* till  $f$  och skrivs  $f^{-1}$ . Geometriskt så representeras  $f^{-1}$  som en spegelbild av  $f$  i linjen  $y = x$ . Lite grundläggande egenskaper för inverser:

- $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Man kan också beräkna derivata av inversfunktionen som  $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$  eftersom vi vet att  $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x) = 1$  och  $\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \{\text{kedjeregeln}\} = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}x \Rightarrow \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(x^{-1}(x))}$ . *Behöver inte bevisas på tentan.*

### 12.1 Exponentialfunktioner

En exponentialfunktion är en funktion på formen  $f(x) = a^x$  där  $a > 0$ . Det gäller att  $a^0 = 1$ ,  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ,  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$  och  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ . Vidare är funktionen  $f(x) = a^x$  en *injektiv* funktion, och därmed finns alltid en invers. Denna invers kallas för *a-logaritmen* och skrivs  $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ . För alla *a*-logaritmer gäller att

- $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$

- $\log(1) = 0$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ , om  $a > 0$  och  $b > 0$

Derivatan av  $f(x) = a^x$  är  $f'(x) = a^x \cdot \log_a(x)$ . Finns det ett tall  $a$  så att  $C = 1$ ? Ja, och det kallas  $e \approx 2,718281828\dots$ . Motsvarande  $e$ -logaritmen kallas för den *naturliga logaritmen* och betecknas  $\ln(x)$ . Genom detta fås att  $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\ln(a^x)} = \frac{d}{dx} e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ . På motsvarande sätt gäller att  $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$ , och  $\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ . Exponentialfunktioner och logaritmer är oumbärliga för att modellera en mängd olika processer. I synnerhet tillväxt-/avtagande-modellering. Jämfört med potensfunktionen  $x^n$ ,  $n >$

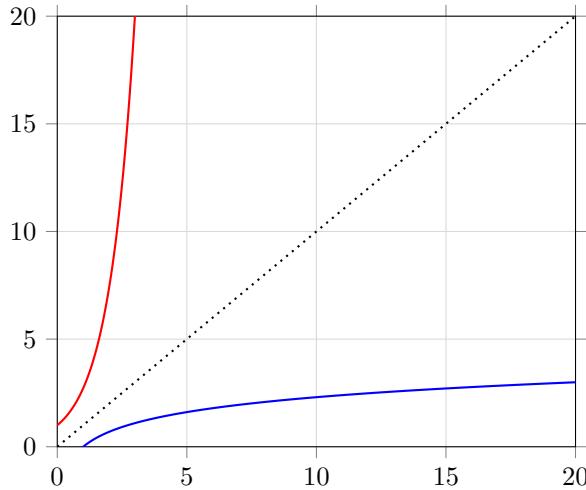


Figure 12.1: Kurvorna  $y = e^x$  och  $y = \ln(x)$

0, så växer/avtar  $e^x$  alltid snabbare och tvärtom för  $\ln(x)$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^n|e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$ . Vad gäller för de primitiva funktionerna (indefinita integralerna) av  $e^x$  och  $\ln(x)$ ?  $\int e^x dx = e^x + C$ ,  $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$  (primitiv av  $\ln(x)$  kan vi egentligen inte än). För  $\ln|x|$  gäller att  $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \cdot \text{sgn}(x) = \frac{1}{x}$ , så  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ . Talet  $e$  är intressant i sig, och omgärdas än idag av flera olösta matematiska problem. Det kan formuleras som följande kända gränsvärde:  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  och således gäller att  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ .

## 12.2 Inversa trigonometriska funktioner

Funktionerna  $\sin x$ ,  $\cos x$  och  $\tan x$  är periodiska och därmed inte injektiva på  $\mathbb{R}$ . Av den anledningen saknas inversfunktioner. Det går dock att begränsa dem

så att de blir injektiva på ett kortare intervall.  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  och  $\arctan x$  har följande definitions- och värdemängder:

- $\arcsin x \mathcal{D} = [-1, 1], \mathcal{R} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos x \mathcal{D} = [-1, 1], \mathcal{R} = [0, \pi]$
- $\arctan x \mathcal{D} = [-\infty, \infty], \mathcal{R} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Man har följande derivator:

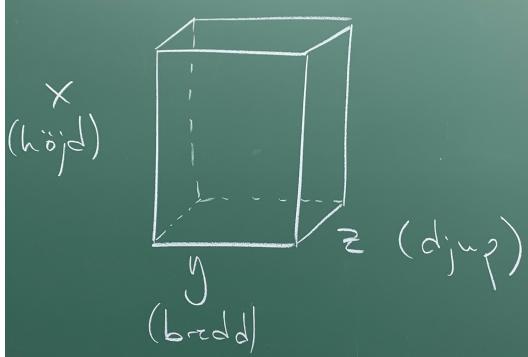
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

### 12.3 De hyperboliska funktionerna

Släktingar till de trigonometriska funktionerna med många liknande egenskaper.  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Precis som för sin och cos, så är sinh en udda funktion och cosh en jämn funktion. Den trigonometriska ettan gäller nästan (hyperboliska ettan!):  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ . För derivatorna gäller att  $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ ,  $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ . Man definierar  $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$  och får att  $\frac{d}{dx}$

**Ex (4.1.11)** Hur snabbt förändras volymen av en rektangulär låda då höjden är 6 cm, bredden är 5 cm och djupet är 4 cm om både höjd och djup ökar med 1 cm/s och bredden minskar med 2 cm/s?

**Lösning** Rital!

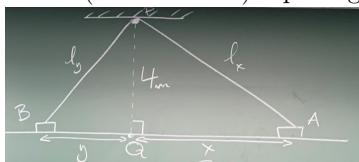


Lådans dimensioner beror av tiden så  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  och  $z = z(t)$ . Det gäller för volymen  $V(t)$  att  $V(t) = x(t) \cdot y(t) \cdot z(t)$  och vid tiden  $t = t_0$  vet vi att  $x(t_0) = 6$ ,  $y(t_0) = 5$ ,  $z(t_0) = 4$ ,  $x'(t_0) = 1$  och  $y'(t_0) = -2$ . Vad blir  $V'(t_0)$ ?

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t) \cdot z(t)) = \{\text{prod. regeln}\} = \\ &x'(t) \cdot y(t) \cdot z(t) + x(t) \cdot y'(t) \cdot z(t) + x(t) \cdot y(t) \cdot z'(t) \Rightarrow V'(t_0) = \\ &1 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 1 = 20 - 48 + 30 = 2 \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned}$$

så lådans volym ökar med  $2 \text{ cm}^3/\text{s}$   $\square$

**Ex (4.1.38)** Två tunga lådor är sammankopplade med ett 15 m långt och starkt (icke-elastiskt) rep enligt figur



Hur snabbt rör sig låda  $B$  mot punkten  $Q$  då låda  $A$  befinner sig 3 m från  $Q$  och rör sig bort från denna punkt med en fart av  $0.5 \text{ m/s}$ ?

**Lösning** Beteckna repets längd  $l$  och de båda dellängderna  $l_x$  och  $l_y$ . Då gäller att:  $l(t) = l_x(t) + l_y(t) = \sqrt{x^2(t) + 4^2} + \sqrt{y^2(t) + 4^2}$  och

$$\begin{aligned} 0 = l'(t) &= \frac{1}{2}(x^2(t) + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x(t) \cdot x'(t) + \frac{1}{2}(y^2(t) + 16)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y(t) \cdot y'(t) = \\ &\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 16}} + \frac{y(t) \cdot y'(t)}{\sqrt{y^2(t) + 16}} \end{aligned}$$

Vi vet att vid  $t = t_0$  så är  $x(t_0) = 3$ ,  $x'(t_0) = 0.5$  och

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \sqrt{l_y^2 - 16} = \sqrt{(l - l_x)^2 - 16} = \sqrt{(15 - \sqrt{16 - 9})^2 - 16} = \sqrt{84} \text{ så} \\ 0 &= \frac{3 \cdot 0.5}{\sqrt{9+16}} + \frac{\sqrt{84} \cdot y'(t_0)}{\sqrt{84+16}} \Rightarrow y'(t_0) = -\frac{3}{\sqrt{84}} \approx -0.327 \text{ m/s} \quad \square \end{aligned}$$

# Chapter 13

## Numerisk ekationslösning

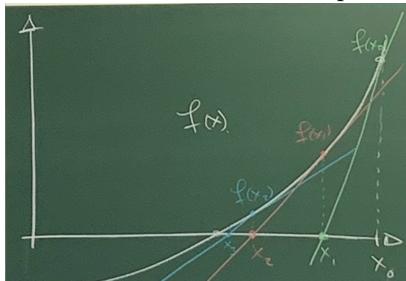
Handlar om att på numerisk väg lösa ekvationen  $f(x) = 0$ . Om till exempel  $f$  är kontinuerlig kan man använda bisektionsalgoritmen, dvs. hitta två tal  $a$  och  $b$  så att  $f(a) < 0$  och  $f(b) > 0$  (eller tvärt om!). Då ligger åtminstone ett nollställe mellan  $a$  och  $b$ . Beräkna  $f(\frac{a+b}{2})$ , dvs. värdet i mittpunkten och avgör sedan om nollställe ligger i antingen intervallet  $[a, \frac{a+b}{2}]$  eller i  $[\frac{a+b}{2}, b]$ . Fortsätt på samma vis i delintervallen...

**Fixpunktiteration** Formulera om  $f(x) = 0$  som  $g(x) = x$  (om möjligt). Till exempel  $f(x) = 3\sin^2(x) + x^2 - x = 0$  blir då  $g(x) = 3\sin^2(x) + x^2 = x$ . Tag sedan ett tal  $x = x_0$  som troligtvis ligger nära det  $x$  som löser ekvationen och sätt in i  $g(x)$ .  $x_0 \rightarrow g(x_0) = x_1 \rightarrow g(x_1) = x_2 \rightarrow g(x_2) \dots$  dvs. beräkna  $x_0, x_1, x_2, \dots$  enligt  $g(x_n) = x_{n+1}$ . Under vissa förutsättningar konvergerar talföljden  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  och man hittar en lösning till  $g(x) = x$  dvs.  $f(x) = 0$ . Gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  kallas fixpunkt till  $g(x)$ .

**Sats** Antag att  $g$  är definierad på intervallet  $I = [a, b]$  och uppfyller att:

1.  $f(x) \in I$  om  $x \in I$
2. Det finns en konstant  $0 < k < 1$  så att för att  $u, v \in I$  gäller att  $|f(u) - f(v)| \leq k \cdot |u - v|$  (lipschitz-kontinuitet). Då har  $g$  en unik fixpunkt  $r \in I$ , dvs.  $g(r) = r$ , och oavsett val av  $x_0 \in I$  så är  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$ .

**Newtons metod** Funkar bra om man söker nollställen  $f(x) = 0$  där  $f$  är en deriverbar funktion. Går ut på att iterativt hitta nollställen till tangentlinjer!



För  $x = x_n$  har man tangentlinjen  $\frac{y-f(x_n)}{x-x_n} = f'_{prime}(x_n)$  och nollstället till

denna ges av  $\frac{0-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} = f'(x_n)$  dvs  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ . Newtons metod kan fallera om  $f$  inte är överallt deriverbar eller om det finns horisontella/vertikala tangenter.

# Chapter 14

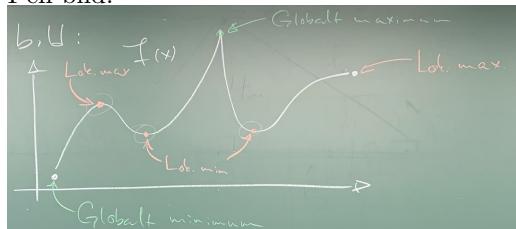
## Extremvärden

Ett extremvärde av en funktion  $f$  är en punkt där värdet av  $f$  är maximalt/minimalt, antingen globalt eller lokalt.

**Definition (globalt extremvärde)** En funktion  $f$  har ett eller flera globalt maximum/minimum i  $x = x_0$  (där  $x_0 \in D(f)$ ) om  $f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0)$  för alla  $x \in D(f)$ .

**Definition (lokalt extremvärde)** En funktion  $f$  har ett lokalt maximum/minimum i  $x = x_0$  (där  $x_0 \in D(f)$ ) om det finns ett tal  $h > 0$  så att  $f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0)$  för att  $x \in D(f)$  så att  $|x - x_0| < h$ .

I en bild:



Lokala (och globala) extrempunkter kan hittas i tre olika typer av fall:

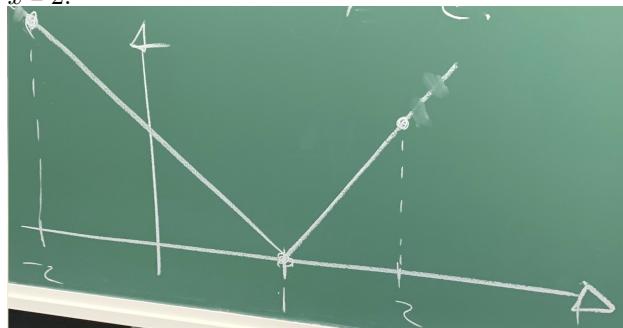
1. Kritiska punkter, dvs. i  $x$  sådana att  $f'(x) = 0$ .
2. Singulär punkter, dvs i  $x$  sådana att  $f'(x)$  ej existerar.
3. Ändpunkter av  $D(f)$

**Ex (4.4.13)** Hitta alla globala och lokala extrempunkter till  $f(x) = |x - 1|$ ,  $x \in [-2, 2]$

**Lösning**  $f$  saknar kritiska punkter (eftersom  $f'(x) = sgn(x - 1)$ ). Har singulär punkt i  $x = 1$  där  $f(1) = 0$  och i ändpunkterna gäller att:

- $f(-2) = |-2 - 1| = |-3| = 3$
- $f(2) = |2 - 1| = |1| = 1$

så globalt minimum i  $x = 1$ , globalt maximum i  $x = -2$  och lokalt maximum i  $x = 2$ .



## Chapter 15

# Linjär approximation och Taylorutveckling

Det är vanligt att funktioner modellerar de globala egenskaperna av olika system när teori för tillämpningar utvecklas. Detta leder ofta till hög komplexitet. Ibland är man dock bara intresserad av hur systemet beter sig av en viss punkt, säg  $x = a$ . Vi kan då använda oss av linjär approximation för att underlättा beräkningar. Vi vet att den linjära approximationen av  $f$  i  $x = a$ , alltså tangentlinjen, går igenom punkten  $(a, f(a))$  och har lutning  $f'(a)$ . Detta innebär att  $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ . Alltså, givet en deriverbar funktion  $f$  så gäller för  $x$ -värden "nära"  $a$  att  $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ . Hur stort fel innehåller denna approximation? Vi behöver den generaliseringen medelvärdessatsen för derivator för att besvara detta.

**Sats** Om  $f$  och  $g$  är kontinuerliga på  $[a, b]$ , deriverbara på  $(a, b)$  samt att  $g'(x) \neq 0$  i  $(a, b)$  så finns ett tal så att  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

Felet av att approximationen  $f(b)$  genom linjen approx  $L$  i  $x = a$  ges av:

$$E = f(b) - L(b) = f(f) - f(a) - f'(a) \cdot (b - a)$$

Tänk på  $E$  som en funktion av  $b$  och notera att  $E(a) = 0$  (dvs  $b = a$ ). Använd den medelvärdessatsen för  $E(b)$  och  $(b - a)^2$  genom kvoten:

$$\frac{E(b)}{(b - a)^2} = \{E(a) = 0\} = \frac{E(b) - E(a)}{(b - a)^2 - (a - a)^2} \Rightarrow E(b) = \frac{f''(s)}{2} \cdot (b - a)^2$$

Alltså, felet i att approximera  $f(x)$  med  $L(x)$  kan beräknas som  $E(x) = \frac{f''(x)}{2}(x - a)^2$  för något tal  $s$  mellan  $a$  och  $x$  ( $a < s < x$  eller  $x < s < a$ ).

**Ex 4.9.12** En kub har sidlängden 20cm. Ungefär hur mycket måste denna minska om volymen ska minska med  $12 \text{ cm}^3$ ?

**Lösning:** Vi vet att  $x = 20 \text{ cm}$  och vill att  $\Delta V = -12 \text{ cm}^3$ . Vi använder linjär approximation av  $V$  kring  $x = 20 \text{ cm}$ .  $L(x) = V(20) + V'(20) \cdot (x + 20)$ ,  $\Delta V = V(20) - L(x) = V'(20) \cdot (x - 20) = V'(20) \cdot \Delta x$ . (...) Kubens sidlängd ska alltså minska med cirka  $1/100 = 0.01 \text{ cm}$ .

Går det att approximera en funktion  $f$  i omgivningen av en punkt  $x = a$  på ett bättre sätt än linjärisering? Vilka egenskaper hos linjäriseringen  $L(x)$  gör den till en bra approximation?  $L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \Rightarrow L(a) = f(a)$  och  $L'(a) = f'(a)$ . Kan man hitta en approximation där även andraderivatan stämmer? Ja!  $P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \Rightarrow P(a) = f(a)$ ,  $P(a) = f'(a)$

$P''(a) = 0 + 0 + \frac{f''(a)}{2} \cdot 2 = f''(a)$  På liknande sätt kan man fortsätta att bygga på med högre ordningens termer. Det gäller att  $\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n] = \{\text{kedjeregeln}\} = n \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x-a)^{n-a}] = \dots = 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Talet  $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$  för  $n \in \mathbb{N}$  kallas för  $n$ -fakultet och skrivs enklare som  $n!$ . Man definierar  $0! = 1$ . Detta gör att man enkelt hittar en approximation  $P_n$  till  $f$  nära vilken punkt  $x = a$  som helst (givet att  $f$  är  $n$  gånger deriverbar där) där alla derivator upp till ordning  $n$  överensstämmer som  $P_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$ . ( $= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ ). Approximation  $P_n$  kallas för Taylorpolynomet av grad  $n$  runt punkten  $x = a$  (eller  $n$ :te gradens Taylorutveckling). I specifallet då  $a = 0$  kallas ibland Taylorutvecklingen för Maclaurinutveckling. Högre ordningens Taylorutvecklingar innebär bättre och bättre approximationer av  $f$  runt  $x = a$  som också funkar längre och längre från  $x = a$ . Givet  $n$ :te gradens Taylorpolynom runt  $x = a$ , alltså  $P(x)$ , hur bra är approximationen  $P(x) \approx f(x)$ ? Vi kan visa att feltermen  $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$  för något tal  $s$  mellan  $a$  och  $x$ .  $E_n(x)$  kallas för Lagranges restterm.

**Ex 4.10.10** Använd andra ordningens Taylorpolynom  $P_2(x)$  för att approximera  $\sqrt{61}$ . Uppskatta även storleken av felet och ge ett intervall där det sanna värdet ligger.

Givet en funktion  $f$  och en punkt  $x = a$ , där  $f$  är tillräckligt många gånger deriverbar, lärde vi oss att:

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något tal  $s$  mellan  $a$  och  $x$ . Polynomet  $P_n(x)$  approx. funktionen  $f$  i närheten av  $x = a$ . Ofta är man inte intresserad av det exakta uttrycket för felet  $E_n(x)$ , utan bara "hur snabbt det växer" i takt med att  $x$  rör sig från  $a$ . Smidigt att använda så kallad O-notation (dvs. ordo-notation eller stora O-notation).

Man skriver att  $f(x) = O(u(x))$  då  $x \rightarrow a$  om det finns tal  $K > 0$  och  $\delta > 0$  sådana att  $|f(x)| \leq K|u(x)|$  då  $0 < |x-a| < \delta$ . På liknande sätt, om  $f(x) = g(x) + O(u(x))$  då  $x \rightarrow a$  så betyder det att  $f(x) - g(x) = O(u(x))$ . För Taylor-utv. gäller alltså att  $f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ .

Några räkneregler för O:

- $C \cdot O(u(x)) = O(u(x))$ ,  $\forall C > 0$
- $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$
- $O(x^m) + O(x^n) = O(x^n)$  om  $n \geq m$  och  $x \rightarrow \infty$
- $O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$  om  $n \geq m$  och  $x \rightarrow 0$
- Om  $f(x) = O((x-a)^k \cdot u(x))$  då  $x \rightarrow a$  så är  $\frac{f(x)}{(x-a)^k} = O(u(x))$  då  $x \rightarrow a$ .

**Sats (Om taylor-polynom och O)** Om  $f(x) = Q_n(x + O((x-a)^{n+1}))$  då  $x \rightarrow a$  och  $Q_n$  är ett polynom av grad  $n$  så är  $Q_n$  = Taylorpolynomet av  $f$  runt  $x = a$ .

Kan förstå l'hopitals regel bättre med hjälp av taylor-polynom och O-notation! Vi har lärt oss att om gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  är av typen  $\frac{0}{0}$  och  $g' \neq 0$  i en omgivning av  $x = a$  så kan man istället försöka beräkna  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Om det senare gränsvärdet konvergerar och inte är av typen  $\frac{0}{0}$  så konvergerar det förra mot samma sak.

### Varför?

Betrakta första ordningens Taylorutveckling av  $f$  och  $g$  runt  $x = a$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2) \\ g(x) &= g(a) + g'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)}{g(a) + g'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)} = \\ &= \{f(a) = g(a) = 0 \text{ enl. förutsättning}\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)}{g'(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2)} = \\ &= \{\text{Bryt ut } (x-a) \text{ ur täljare och nämnare}\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a) + O(x-a)}{g'(a) + O(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

Och om l'Hopital inte funkar, dvs.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  är av typen  $\frac{0}{0}$ ? Texta då istället  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ . Om det gränsvärdet inte är av typen  $\frac{0}{0}$  så kommer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ .

### Varför?

Taylorutveckling till andra ordningen runt  $x = a$  ger:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + O((x - a)^3)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2 + O((x - a)^3)$$

Samma räkning som innan ger att  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots = \frac{f''(a)}{g''(a)}$

**Ex (kompendie övn. 9.5)** Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2})$

**Lösning** Gränsvärdet är icke-trivialt då direkt insättning av  $x = 0$  ger  $\infty - \infty$ . Börja med lite omskrivningar.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2 \sin^2(x)} - \frac{\sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \\ \{ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) \\ \text{så } \sin^2(x) &= \frac{1 - \cos^2(x)}{2} \} = \frac{x^2 - \frac{1 - \cos(2x)}{2}}{x^2 \frac{1 - \cos(2x)}{2}} = \frac{2x^2 - 1 + \cos(2x)}{x^2 - x^2 \cos(2x)} \end{aligned}$$

Från standardutvecklingar vet vi att

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + O(x^{2n+2}) \\ \Rightarrow \cos(2x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Använd denna utveckling till ordning 4 i täljaren och ordning 2 i nämnaren!

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1 + \cos(2x)}{x^2 - x^2 \cos(2x)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1 + \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + O(x^6) \right)}{x^2 - x^2 \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + O(x^4) \right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1 + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{x^2 - x^2 + 2x^4 + O(x^6)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{2x^4 + O(x^6)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{\frac{2}{3} + O(x^2)}{2 + O(x^2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \quad \square \end{aligned}$$

**Ex** Använd Maclaurinutveckling för  $\sin(x)$  för att beräkna Maclaurinpolynomet av ordning 4 till funktionen  $\arcsin(x)$ .

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + O(x^{2n+1})$$

**Lösning** Eftersom att  $\arcsin$  är invers funktion till  $\sin$  (på intervallet  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) så gäller per definition att:  $\arcsin(\sin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x$  och  $\arcsin(-\sin(x)) = \arcsin(\sin(-x)) = -x = \{\arcsin(\sin(x)) = x\} = -\arcsin(\sin(x))$  så  $\arcsin(-\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = \{\sin(x) = z\}$  dvs.  $\arcsin(-z) = \arcsin(z)$ . Detta betyder att  $\arcsin$  är en udda funktion och utvecklingen vi söker måste därför vara på formeln  $a_1x + a_3x^3 + O(x^5)$  för några tal  $a_1$  och  $a_3$ . Vi vet att  $\sin(\arcsin(x)) = x$  eftersom (åter igen)  $\arcsin$  är invers till  $\sin$ , och vi vet att  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$  vilket leder till att

$$\begin{aligned} x &= \sin(\arcsin(x)) = (a_1x + a_3x^3 + O(x^5)) - \frac{(a_1x + a_3x^3 + O(x^5))}{6} + O((a_1 + a_3x^3 + O(x^5))^5) \\ &= (a_1x + a_3x^3 + O(x^5)) - \left(\frac{a_1^3}{6}x^3 + O(x^5)\right) + O(x^5) = a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1^3}{6}\right)x^3 + O(x^5) \end{aligned}$$

Vilket bara kan vara sant om  $a_1 = 1$  och  $a_3 - \frac{a_1^3}{6} = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$  och vi får att  $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)$   $\square$

# Chapter 16

## Summationsnotation

En summa av tal  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  skrivs smidigare med summationsnotation:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Indexet  $i$  kallas för summationsindex och existerar bara i själva summationen. Summering är en linjär operation, dvs superpositionsprincipen gäller:

$$\sum_{i=1}^n (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i$$

Några viktiga standard summor är:

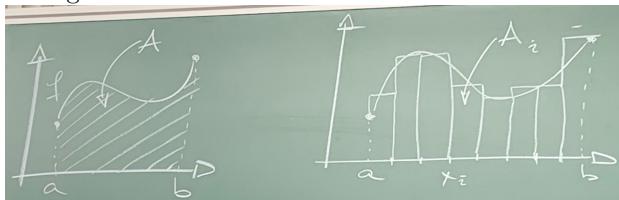
$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ ggr}} = n$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ (aritmetisk)}$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}, r \neq 1 \text{ (geometriskt)}$$

Vill kunna beräkna arean under funktionsgrafer. Strategin är att dela upp ytan i mindre bitar för vilka arean är lätt att beräkna och sedan summa alla bidrag.



Dela upp intervallet  $[a, b]$

i mindre delintervall med ändpunkter i  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Varje delintervall är av bredden  $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1$ , osv. Beräkna (t.ex) areorna av alla rektanglar med bred  $\Delta x_i$  och höjd  $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$  (medelvärdet).

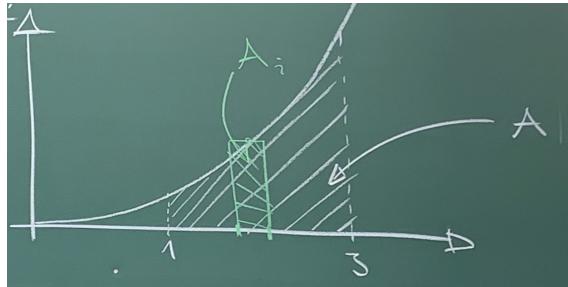
Då borde  $A \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$ . Approximationen borde bli

bättre och bättre i takt med att delintervallen blir mindre och mindre och det borde gälla att

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

Detta måste dock preciseras för att bli matematiskt relevant.

**Ex (5.2.5)** Beräkna areorna under grafen till  $y = x^2$  mellan  $x = 1$  och  $x = 3$ .



Lösning

Dela upp intervallet  $[1, 3]$  i  $n$  stycken lika stora delar. Delintervallens bredd blir då  $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$  med ändpunkter i  $1, 1 + \frac{2}{n}, 1 + 2\frac{2}{n}, \dots, 1 + (n-2)\frac{2}{n}, 3$ . Om vi använder funktionens medelvärde i varje delintervall som höjd för att approximerande rektanglar får vi att:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(1 + i \cdot \frac{2}{n})^2 + (1 + (i-1) \cdot \frac{2}{n})^2}{2} \cdot \frac{2}{n} = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \frac{4i}{n^2} + \frac{4i^2}{n^2} + 1 + \frac{4i}{n} - \frac{4}{n} + \frac{4i^2}{n^2} - \frac{8i}{n^2} + \frac{4}{n^2}}{2} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} + \frac{8i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3} - \frac{4}{n^2} - \frac{8i}{n^3} + \frac{4}{n^3} = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} \cdot n + \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n^2} \cdot n - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{n} + \frac{4}{n^3} \cdot n \right) = \\ &2 + 4 + \frac{16}{6} = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3} \text{ a.e } \square \end{aligned}$$

För att areaberäkning genom approx. med staplar ska vara ”vettig” måste det gälla att resultatet är oberoende av:

1. hur  $x$ -axeln styckas upp
2. vilken stapelhöjd som väljes i varje delintervall (dvs överoende av  $f(s)$  där  $s \in [x_i, x_{i+1}]$ )

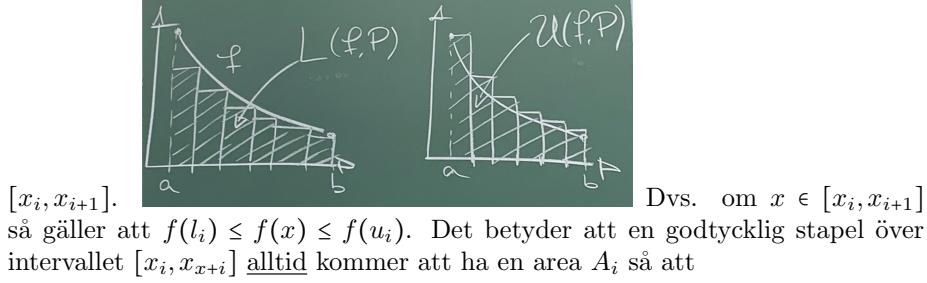
En uppdelning av ett interval  $[a, b]$  i disjunkta delintervall  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  kallas för en partition av  $[a, b]$  och kan refereras till som mängden av ändpunkter:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Varje delintervall i  $P$  har en längd  $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$  och man definierar normen som längden av det längsta delintervallat:

$$\|P\| := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Om  $f$  är en kontinuerlig funktion så antas både ett maximalt och ett minimalt värde någonstans i varje delintervall, säg i  $x = u_i$  och  $x = l_i$  för delintervallet

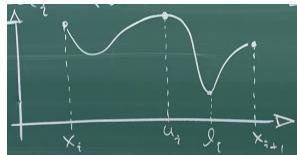


$$f(l_i) \cdot \Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i) \cdot \Delta x_i$$

Givet en partition  $P$  kan vi definiera den nedåt begränsande Riemann-summan  $L(f, P)$  och den övre begränsande  $U(f, P)$  som:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n f(l_i) \cdot \Delta x$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \cdot \Delta x$$



Om  $f$  beter sig ”vettigt” och  $P$  blir en finare och finare partition av intervallet  $[a, b]$  där  $\|P\| \rightarrow 0$  så borde  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P)$  oavsett val av partition  $P$ . I så fall är det ett rimligt mått av arean under funktionsgrafen. Detta definierar den definita intergralen av  $f$  mellan  $a$  och  $b$ .

**Definition (definit integral) (tenta)** Antag att det finns precis ett enda tal  $I$  så att det för varje partition  $P$  av  $[a, b]$  gäller att:  $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$  I så fall säger man att  $f$  är intergrerbar över  $[a, b]$  och vi kallas talet  $I$  för den definita integralen av  $f$  över  $[a, b]$ . Detta skrivs symboliskt som

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Notera att  $\int_a^b f(x) dx$  är ett tal och inte en funktion. ”Variabeln”  $x$  existerar endast inuti integralen och kallas för integrationsvariabel. Talen  $a$  och  $b$  kallas nedre- och övre-integransgräns. Funktionen  $f$  kallas för integrand och  $dx$  för differntialen.

Definierade utifrån Riemann-summor är en hörnsten inom matematisk analys tillsammans med definitionen av derivatan och definitionen av gränsvärde. Räcker gott och väl för praktiska tillämpningar men ej för vidare teoretiskt arbete (då används Lebesgue integralen).

# Chapter 17

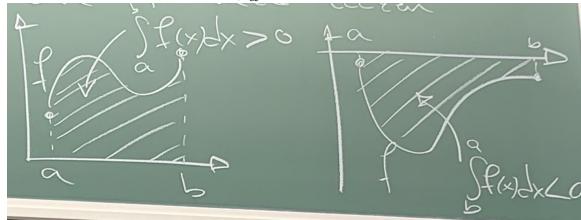
## Definita integraler

Den esfinita integralen  $\int_a^b f(x) dx$  av en kontinuerlig funktion  $f$  över ett intervalv  $[a, b]$  definieras som det unika tal  $I$  som alltid ligger mellan godtycklig nedåt begränsad- och övre begränsad Riemannsumma (om det finns):

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

för alla tänkbara partitioner  $P$  av  $[a, b]$ .

Geometriskt tolkas  $\int_a^b f(x) dx$  som "arean under grafen till  $f$  med tecken".



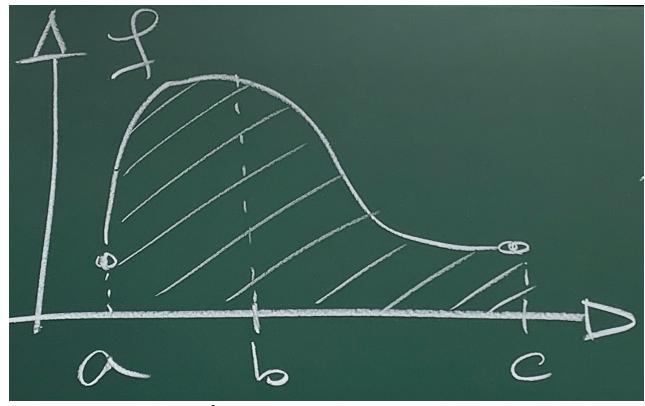
Har här förutsatt att  $a < b$ , men är naturligt att utvidga konceptet med definit integral genom följande definitioner:

- $a = b \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = 0$
- $a > b \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

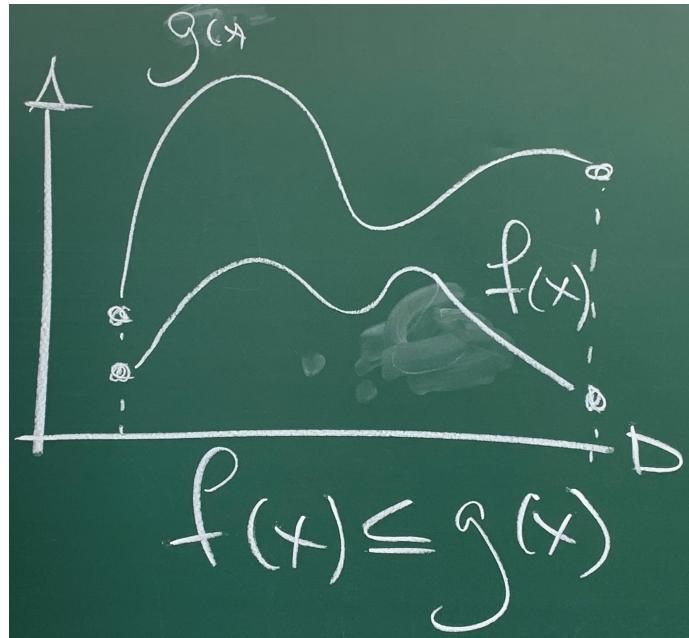
Integrering är en linjär operation, dvs. superpositionsprincipen gäller:

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

för alla  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Rent geometriskt gäller också följande:



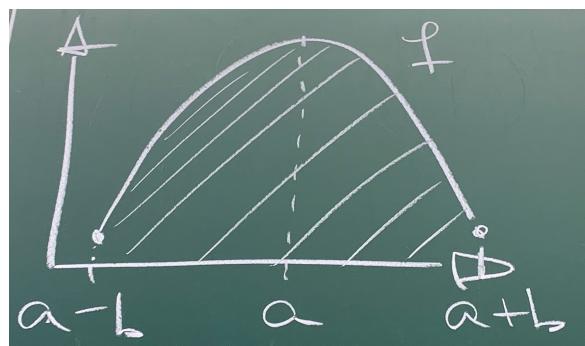
$$\Rightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



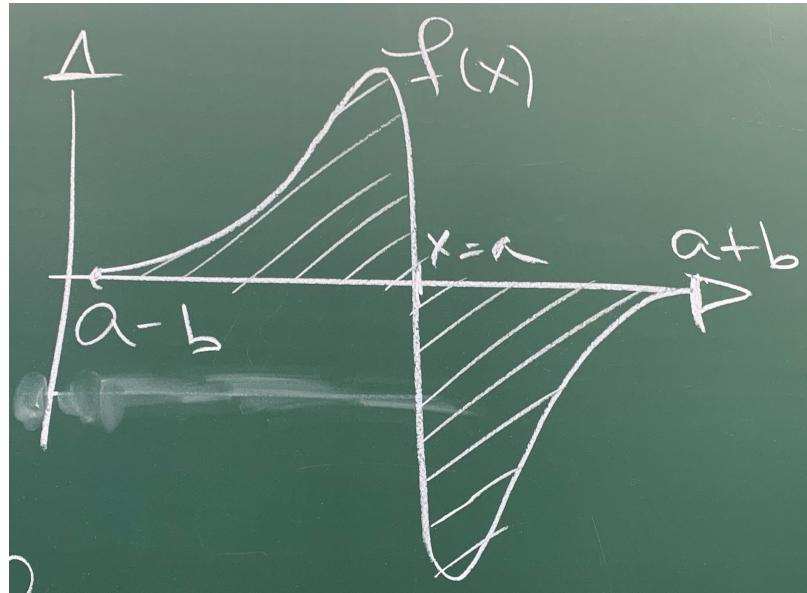
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



•  $\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  (triangelolikheten)



•  $\Rightarrow \int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = 2 \cdot \int_{a-b}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_a^{a+b} f(x) dx$   
 $f$  jämn med avseende på  $x = a$



- $\Rightarrow \int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = 0$   
 $f$  udda med avseende på  $x = a$

För kontinuerliga funktioner och för derivator gäller ”medelvärdessatser”.

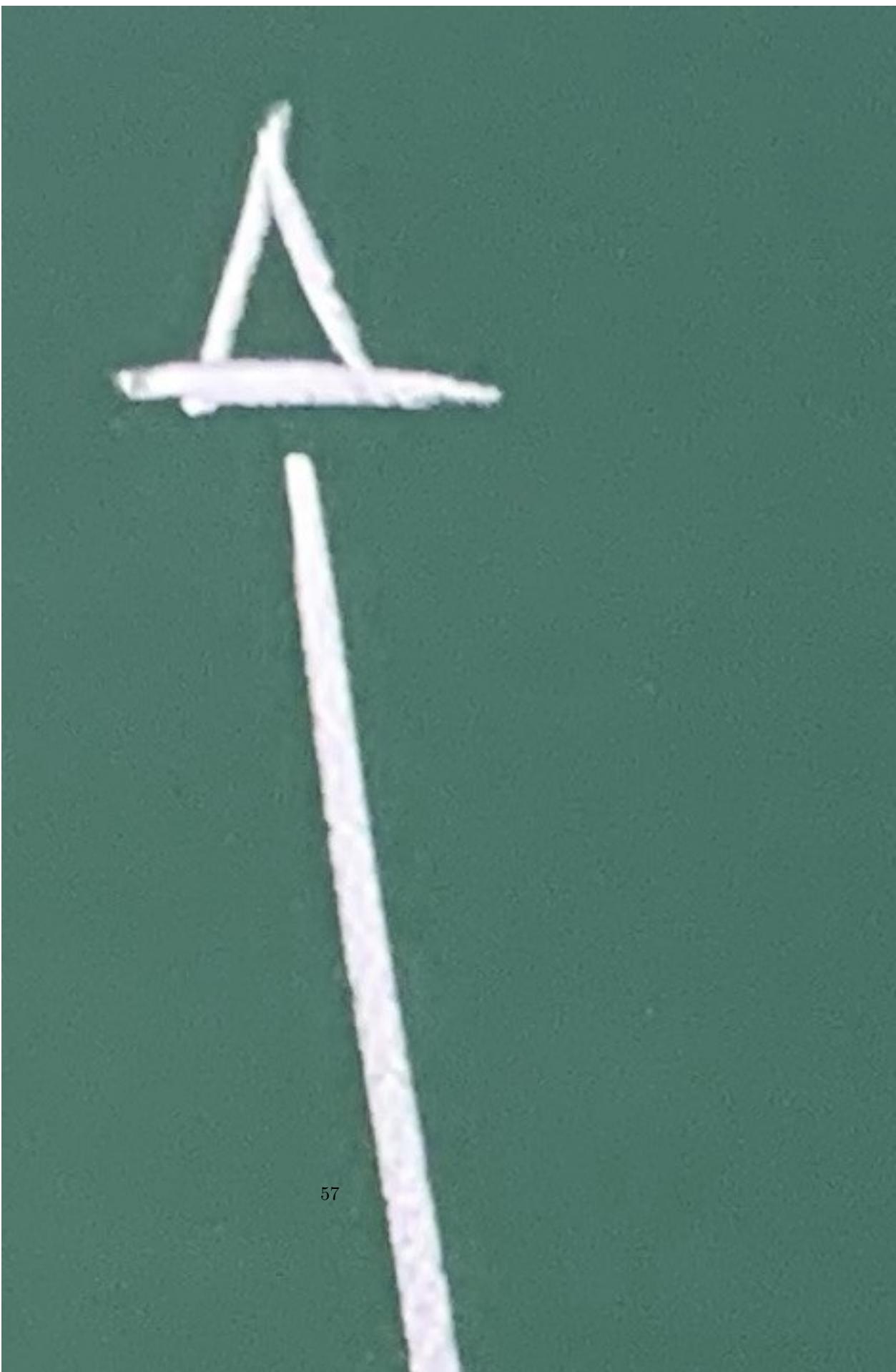
- $f$  kontinuerlig på  $[a, b] \Rightarrow$  det finns en punkt  $c \in [a, b]$  där  $f$  antar värdet  $\frac{f(a)-f(b)}{2}$
- $f$  deriverbar på  $(a, b) \Rightarrow$  det finns en punkt  $c \in (a, b)$  där derivatan av  $f$  motsvarar snittlutningen på intervallet, dvs.  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Analog medelvärdessats finns också för definita integraler!

**Sats (Medelvärdessatsen för definita integraler)** Om  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  så finns en punkt  $c \in [a, b]$  så att

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Medelvärdessatsen för integraler säger att det finns en rektangel med bred  $b-a$  och höjd  $f(c)$  (för något  $c \in [a, b]$ ) vars area är precis  $\int_a^b f(x) dx$ .



Ur detta resultat definieras medelvärdet av en funktion  $f$  (integrerbar) på ett intervall  $[a, b]$  som:  $\bar{f} \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$  (rimligare än t.ex. att sätta medelvärdet som  $\frac{f(a)+f(b)}{2}$  eftersom integralen tar hänsyn till  $f$  över hela intervallet  $[a, b]$  och inte bara ändpunkterna).

# Chapter 18

## Analysens huvudsats

Att definiera integraler genom Riemann-summor är bra på många sätt, inte minst för att det är intuitivt, men vi måste ha ett smidigare sätt att beräkna  $\int_a^b f(x) dx$  (håller ej att behöva beräkna gränsvärdet  $L(f, P)$  och  $U(f, P)$ ). Detta löser delvis analysens huvudsats.

**Sats (Analysen huvudsats) (tenta)** Antaga att funktionen  $f$  är kontinuerlig på ett interval  $I$  som innehåller punkten  $a$ .

1. Låt  $F$  vara en funktion på  $I$  definierat som  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Då är  $F$  deriverbar på  $I$  och  $F'(x) = f(x)$ , dvs.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

(så derivering är ”antioperationen” till integrering!)

2. Om  $G(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$  på  $I$ , dvs.  $G'(x) = f(x)$  så gäller för varje  $b \in I$  att:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

(dvs. en beräkningsformel för integraler)

### Bevis

1. Med definitionen av funktionen  $F$  enligt satsen gäller att:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \epsilon_x^{x+h} f(t) dt = \{\text{medelvärdessatsen för integraler}\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x+h-x) \cdot f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \end{aligned}$$

för något tal  $c \in [x, x+h]$ . Men vi vet att  $f$  är kontinuerlig på intervallet  $I$  och därmed att  $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$  och alltså är  $F'(x) = f(x)$  dvs. att  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$   $\square$

2. Om  $G' = f(x)$  så är  $F(x) = G(x) + C$  på  $I$  för något tal  $C \in \mathbb{R}$  (eftersom två olika primitiva funktioner till  $f$  endast kan skilja på konstanten). Alltså gäller att  $\int_a^x f(t) dt = G(x) + C$  och om  $x = a \Rightarrow 0 = G(a) - C$  så  $C = -G(a)$ . Om vi nu sätter  $x = b$  får vi att  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$   $\square$

**Ex (5.5.15)** Beräkna  $\int_0^e a^x dx$   $a > 0$

**Lösning** För att lösa problemet vill vi hitta en primitiv funktion till  $a^x$ , dvs.  $\int a^x dx$ . Det gäller att  $a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x \cdot ln(a)}$ . Men  $\frac{d}{dx}(e^{x \cdot ln(a)}) = ln(a) \cdot e^{x \cdot ln(a)}$  så  $\int e^{x \cdot ln(a)} dx = \frac{1}{ln(a)} \cdot x^{x \cdot ln(a)} = \frac{a^x}{ln(a)}$ . Så enligt analysens huvudsats gäller  $\int_0^e a^x dx = [\frac{a^x}{ln(a)}]_0^e = \frac{e^e}{ln(a)} - \frac{a^0}{ln(a)} = \frac{1}{ln(a)} \cdot (a^e - 1)$   $\square$

# Chapter 19

## Att integrera

Analysen huvudsats gör det möjligt att beräkna integraler på ett vettigt sätt (utan att konkret jobba med Riemann-summor). Jan dock vara mycket svårt ändå!

För att lösa olika typer av integrationsproblem behövs:

1. Erfarenhet och mycket träning!
2. En samling metoder och trix.

### Variabelsubstitution

Grundläggande och viktig metod för att beräkna vissa typer av integraler. Utgår från kedjeregeln, fast ”baklänges”:

$$\frac{d}{dx}(fg(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g' dx \end{array} \right\} =$$

$$\int f'(u) dx = f(u) + C = \{u = g(x)\} = f(g(x)) + C \text{ för } C \in \mathbb{R}$$

Så, om man vill lösa en integral där integranden är på formen  $f'(g(x)) \cdot g'(x)$  för några funktioner  $f(x)$  och  $g(x)$  (kan vara svåra att identifiera!), prova att byta variabel från  $x$  till  $u = g(x)$ .

Funkar även för definita integraler:

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x) dx \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = a \Rightarrow u = g(a) \\ x = b \Rightarrow u = g(b) \end{array} \right\} = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u) du$$

**Ex (5.6.4)** Lös integralen  $\int e^{2x} \cdot \sin(e^{2x}) dx$ .

**Lösning** Observera att  $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2 \cdot e^{2x}$  så vi kan skriva

$$\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} \sin(e^{2x}) dx$$

Använd Variabelsubstitution med  $f(x) = \sin(x)$  och  $g(x) = e^{2x}$ .

$$\frac{1}{2} \int \sin(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} dx = \left[ \begin{array}{l} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x} dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \sin(u) du =$$

$$\frac{1}{2}(-\cos(u)) + C = C - \frac{1}{2}\cos(e^{2x}), C \in \mathbb{R}$$

**Ex (5.6.41)** Beräkna integralen  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx$ .

**Lösning** Inte uppenbart på förhand. Krävs erfarenhet och trigonometri:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x))^2 dx = \\ \{\cos 2x = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \\ \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x) dx &= \\ \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x) dx &= \\ \{\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{\cos(4x) + 1}{2}\} &= \\ \frac{1}{4} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x) + 1 dx &= \\ \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin(2\pi) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(0) - 0\right) &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{2\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Formlerna för ”dubbla vinkeln” är väldigt ofta användbara om integranden involverar jämna potenser av  $\sin(x)$  och  $\cos(x)$ !

## 19.1 Partiell integration

En mycket användbar metod för att lösa integraler som fås ur produktregeln för derivator:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Om  $F(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$  så kan vi stället skriva:

$$\frac{d}{dx}(F(x) \cdot g(x)) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) = \{F'(x) = f(x)\} = f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$$

Omskrivet får vi:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{d}{dx}(F(x) \cdot g(x)) - F(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{Med def. intervall } \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) dx$$

och om vi integrerar båda sidor och använder analysens huvudsats finner man att:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int \frac{d}{dx}(F(x) \cdot g(x)) dx - \int F(x) \cdot g'(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

Detta samband kallas för partiell integration. Använtbart när integralen  $\int F(x) \cdot g'(x) dx$  är lättare än  $\int f(x) \cdot g(x) dx$ .

**Ex (6.1.6)** Lös integralen  $x(\ln(x))^3 dx$ .

**Lösning** Använd partiell integration med  $f(x) = x$  och  $g(x) = (\ln(x))^3$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x(\ln(x))^3 dx &= \frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 3(\ln(x))^2 \frac{1}{x} dx = \\ &\frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \frac{3}{2} \int x(\ln(x))^2 dx = \{\text{part. int.}\} = \\ &\frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{x^2}{2}(\ln(x))^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2(\ln(x)) \frac{1}{x} dx \right) = \\ &\frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln(x))^2 + \frac{3}{2} \int x \ln(x) dx = \{\text{parti. int.}\} = \\ &\frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln(x))^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) - \frac{3}{4} \int x dx = \\ &\frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln(x))^2 + \frac{3}{4}x^2 \ln(x) - \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

så  $\int x(\ln(x))^3 dx = \frac{x^2}{2}(\ln(x))^3 - \frac{3}{4}x^2(\ln(x))^2 + \frac{3}{4}x^2 \ln(x) - \frac{3}{8}x^2 + C, C \in \mathbb{R}$ .  
Kontroller att det stämmer!

**Ex (6.1.23)** Lös integralen  $\int \arccos(x) dx$ .

**Lösning** Använd partiell integration och ett klassiskt trix!

$$\begin{aligned} \int \arccos(x) dx &= \int 1 \cdot \arccos(x) dx = \{f(x) = 1, g(x) = \arccos(x)\} = \\ &x \cdot \arccos(x) - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = x \cdot \arccos(x) + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx = \\ &\left[ \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = x dx \end{array} \right] = x \cdot \arccos(x) + \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} \frac{1}{2} du = \\ &\left\{ \frac{d}{du} \sqrt{1-u} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u}} \right\} = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-u} + C = \{u = x^2\} = \\ &x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

så  $\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$  för  $C \in \mathbb{R}$ .

### Kontroll

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C] &= 1 \cdot \arccos(x) + x \cdot \left(-\frac{1}{1-x^2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) + 0 = \\ \arccos(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= \arccos(x) \square \end{aligned}$$

# Chapter 20

## Partialbråksuppdelning

**Ex (6.2.16)** Beräkna  $\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2} dx$ .

**Lösning** Eftersom täljaren har en högre grad än nämnaren ( $3 > 2$ ) kan vi skriva om den rationella funktionen i integranden med hjälp av polynomdivision. och alltså får vi att

$$\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2} dx = \int (x-7) + \int \frac{37x+85}{12+7x+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 7x + \int \frac{37x+85}{12+7x+x^2} dx$$

Hur löser man den nya integralen som uppstår? Polynomdivision hjälper ej eftersom täljaren har lägre grad än nämnaren. Faktorisera nämnaren genom att hitta dess nollställen!

$$12+7x+x^2=0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x + (\frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + \frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4} - \frac{48}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{6}{2} \\ x_2 = -\frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Så  $x^2 + 7x + 12 = (x+3) \cdot (x+4)$  så alltså

$$\int \frac{37x+85}{12+7x+x^2} dx = \int \frac{37x+85}{(x+3) \cdot (x+4)} dx = ?$$

Prova följande ansats:

$$\frac{37x+85}{(x+3) \cdot (x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}, A, B \in \mathbb{R}$$

Finns talen  $A$  och  $B$  så att detta stämmer? Ja!

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)}{(x+3)(x+4)} + \frac{B(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{(A+B)x + (4A+3B)}{(x+3)(x+4)}$$

Alltså måste:

$$\begin{cases} A+B=37 \\ 4A+3B=85 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} A=-26 \\ B=63 \end{cases}$$

$A$  och  $B$  hittas dock enklast med den så kallade "handpåläggningsmetoden".

Börja med:

$$\frac{37x + 85}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$

Multiplicera sedan med en nämnare:

$$\frac{37x + 85}{(x+3)(x+4)} \cdot (x+3) = \frac{A(x+3)}{(x+3)} + \frac{B}{x+4} \cdot (x+3) = A + \frac{B}{x+4} \cdot (x+3)$$

När vi då sätter  $x = -3$  försvinner  $B$  och vi får värdet på  $A$ . Gör likadant för andra värden.

Så

$$\begin{aligned} \int \frac{37x + 85}{(x+3)(x+4)} dx &= \int \frac{(-26)}{x+3} + \frac{63}{x+4} dx = 63 \int \frac{1}{x+4} dx - 26 \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &\left\{ \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C \right\} = 63 \ln(|x+4|) - 26 \ln(|x+3|) + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

och vi har då alltså till slut fått:

$$\int \frac{x^3 + 1}{12 + 7x + x^2} dx = \int x - 7 + \frac{37x + 85}{12 + 7x + x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 7x + 63 \ln(|x+4|) - 26 \ln(|x+3|) + C, C \in \mathbb{R}$$

Denna metod för att lösa integraler av typen  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  där  $P$  och  $Q$  är polynom kallas för partialbråksuppdelning. (Oftast underförstått att graden av  $P$  är lägre än graden av  $Q$ ).

## 20.1 Sammanfattande om partialbråksuppdelning

Om graden av  $P$  är lägre än graden av  $Q$  kan faktoriseras som

$Q(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  så funkar ansatsen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$$

förutsatt att alla nollställen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  är unika.

Talen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kan beräknas genom handpåläggning, dvs.

$$A_i = \lim_{x \rightarrow x_i} (x - x_i) \frac{P(x)}{Q(x)}$$

för alla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Vad händer om några av faktorerna  $(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_n)$  är samma?

Till exempel om  $Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$ ? Då gäller ansatsen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \frac{A_3}{(x - x_2)^2} + \frac{A_4}{(x - x_4)} + \frac{A_5}{(x - x_3)^2} + \frac{A_6}{(x - x_3)^3}$$

I dessa fall funkar ej handpåläggning och man måste lösa det linjära ekvationssystem enligt tidigare exempel.

Om  $Q$  inte faktoriseras till linjära termer? Till exempel  $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ ?

Då gäller

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Osv... Läs vidare i kap 6.3.

# Chapter 21

## Inverssubstitutioner

Variant av variabelsubstitution där man istället för att ersätta en funktion av  $x$  med en ny variabel  $u$  ersätter  $x$  men en ny funktion av  $u$ . Alltså:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{cases} \xrightarrow{\text{inverssubstitution}} \begin{cases} x = g(u) \\ dx = g'(u) du \end{cases}$$

Gör integralen till synes svårare, men underlättar i vissa speciella situationer.

**Ex (6.3.5)** Beräkna  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ .

**Lösning** För integrander som innehåller  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , ( $a > 0$ ) brukar Inverssubstitutionen  $x = a \sin(u)$  vara bra.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3 \cos(u) du}{9 \sin^2(u)\sqrt{9-9\sin^2(u)}} = \\ \int \frac{\cos(u)}{9 \sin^2(u)\sqrt{1-\sin^2(u)}} du &= \{1 - \sin^2(u) = \cos^2(u)\} = \\ \int \frac{\cos(u)}{9 \sin^2(u)\sqrt{\cos^2(u)}} du &= \\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow -1 < \sin(u) < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(u) > 0 \right\} &= \\ \int \frac{\cos(u)}{9 \sin^2(u) \cdot \cos(u)} du &= \int \frac{1}{9 \sin^2(u)} du = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sin^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} du = \\ \frac{1}{9} \int \frac{1}{\tan^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} du &= \left\{ \frac{\tan(u)}{\cos^2(u)} du = dw = \frac{1}{9} \int \frac{1}{w^2} dw = \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{w}\right) + C \right\} = \\ -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\tan(u)} + C, C \in \mathbb{R} & \end{aligned}$$

Hur uttrycks detta i termer av  $x$ ? Använd rätvinkliga trianglar! Vi satte  $x = 3 \sin(u)$ , dvs.  $\sin(u) = \frac{x}{3}$ . Betrakta följande triangel:

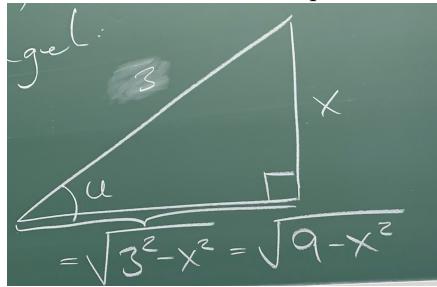
Här är uppenbarligen  $\sin(u) = \frac{x}{3}$  dvs.  $x = 3\sin(u)$  (inv. subst.), men även  $\tan(u) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ . Använd detta!

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \dots = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\tan(u)} + C = -\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{(9-x^2)}}{x} + C, C \in \mathbb{R} \square$$

## Chapter 22

# Generaliserade integraler

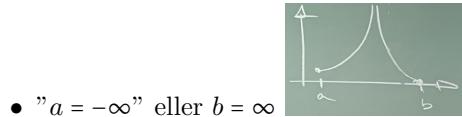
Vilka funktioner går att derivera? Kontinuerliga? Självklart, men behöver inte ens kontinuitet. Till exempel:



Värre kan det dock bli om antingen:



- $f$  är obegränsad i någon punkt  $x \in [a, b]$



Integraler som involverar någon eller båda egenheterna ovan kallas för generaliserade integraler. De definieras naturligt genom gränsvärden. Om  $f$  är obegränsad i en punkt  $c \in [a, b]$  så definieras integralern  $\int_a^b f(x) dx$  som:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow c^-} \int_a^z f(x) dx + \lim_{z \rightarrow c^+} \int_z^b f(x) dx$$

Om några av integrationsgränserna är obegränsad definieras integralen  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  och  $\int_a^\infty f(x) dx$  som:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^b f(x) dx \text{ och } \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

För generaliserade integraler kan en av tre olika fall inträffa:

1. Integralen existerar (blir ett tal)
2. Integralen existerar inte (gränsvärdet går inte att beräkna)
3. Integralen  $= \infty$  eller  $-\infty$

Om 1. så kallas integralen konvergent. För 2. så säger man att integralen är divergent och för 3. divergent mot  $\infty$  eller  $-\infty$ . Går ibland att avgöra konvergens/divergens genom att jämföra generaliserade integraler mot varandra. Om  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  och  $f$  och  $g$  är kontinuerliga på  $(a, b)$  så att  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  så konvergerar  $\int_a^b f(x) dx$  om  $\int_a^b g(x) dx$  gör det. På samma sätt om  $\int_a^b f(x) dx$  divergerar mot  $\infty$  så gör också  $\int_a^b g(x) dx$  det.

**Ex (6.5.17)** Beräkna  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$

**Lösning** Integralen är generaliserad eftersom  $\ln(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-\ln(1)} = \infty$ . Det gäller att

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\ln(x)}) = \frac{1}{2} \cdot (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

$$\text{så } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \int_z^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{z \rightarrow 1^+} [2\sqrt{\ln(x)}]_z^e =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} 2(\sqrt{\ln(e)} - \sqrt{\ln(z)}) = 2(1 - 0) = 2 \Rightarrow \text{Konvergent! } \square$$

**Ex (6.5.18)** Samma som innan för  $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$

**Lösning**

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \begin{cases} [c|c]u = \ln(x) & x = e \Rightarrow u = 1 \\ du = \frac{1}{x} dx & x = \infty \Rightarrow u = \infty \end{cases} = \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du =$$

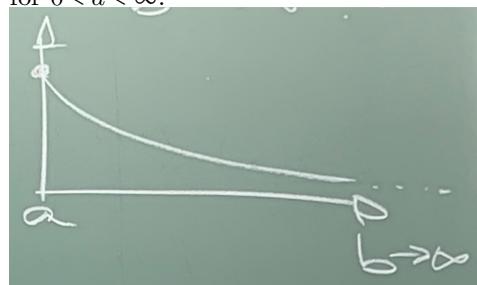
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{u^2} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \left[-\frac{1}{u}\right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left((-\frac{1}{R}) - (-\frac{1}{1})\right) = 1 \Rightarrow \text{Konvergent! } \square$$

Några generaliserade integraler som är bra att känna till för att avgöra konvergens/divergens genom jämförelse är det så kallade ”p-integralerna”.

$$1. \int_a^\infty x^{-p} dx = \begin{cases} \text{konvergerar mot } \frac{a^{1-p}}{p-1} \text{ om } p > 1 \\ \text{divergerar mot } \infty \text{ om } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

$$2. \int_0^a x^{-p} dx = \begin{cases} \text{konvergerar mot } \frac{a^{1-p}}{1-p} \text{ om } 0 < p < 1 \\ \text{divergerar mot } \infty \text{ om } p \geq 1 \end{cases}$$

för  $0 < a < \infty$ .



# Chapter 23

## Numerisk integration

Viktigt att kunna beräkna bra approximationer av integraler numeriskt. Finns olika typer av algoritmer/metoder.

### 23.1 Mittpunktsmetoden

Approximera  $\int_a^b f(x) dx$  som en Riemann-summa av staplar av samma bredd vars höjd motsvarar funktionens värde vid stapelnas mittpunkt.

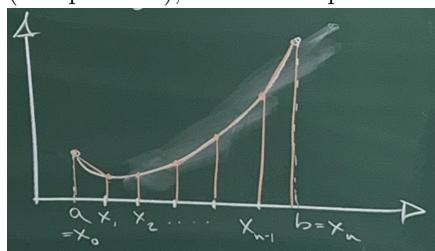


$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx f(m_1) \cdot h + f(m_2) \cdot h + \dots + f(m_n) \cdot h = h \cdot \sum_i^n f(m_i) = M_n$$

Ju mindre bredd  $h > 0$  desto bättre approximation.

### 23.2 Trapetsmetoden

Istället för att som i mittpunktsmetoden använda en punkt per stapel för höjden (mittpunkten), används stapelnas ändpunkter och linjärapprox. funktionen.



För stapel  $i$  ( $0 < i < n$ ) gäller:

$$A_{\text{rect}} = h \cdot (y_{i-1} + y_i) / 2$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx y_0 \cdot h + \frac{1}{2}(y_1 - y_0) \cdot h + y_1 \cdot h + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \cdot h + \dots = \\ h \cdot \left( \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \right) = T_n$$

Vilken metod är bäst? Man kan visa att:

- Trapetsmetoden  $|\int_a^b f(x) dx - M_n| \leq \frac{k \cdot (b-a)^3}{12n^2}$
- Mittpunktsmetoden  $|\int_a^b f(x) dx - T_n| \leq \frac{k \cdot (b-a)^3}{24n^2}$

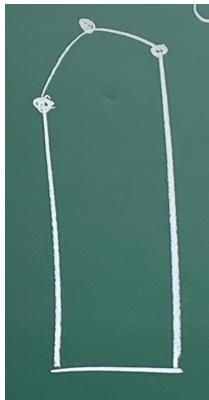
för ett tal  $K$  som hänger ihop med  $f$ . Alltså är:

- Trapetsmetoden  $\int_a^b f(x) dx = M_n + O(\frac{1}{n^2})$
- Mittpunktsmetoden  $\int_a^b f(x) dx = T_n + O(\frac{1}{n^2})$

dvs. dom är lika bra!

klar förbättring fås genom att använda både mittpunkten och ändpunkterna och approximera  $f$  i stapeln med en andragradskurva genom punkterna.

### 23.3 Simpsons regel



Man kan visa att Simpson-approximation innebär ett fel av storleksordning  $O(\frac{1}{n^4})$  dvs.

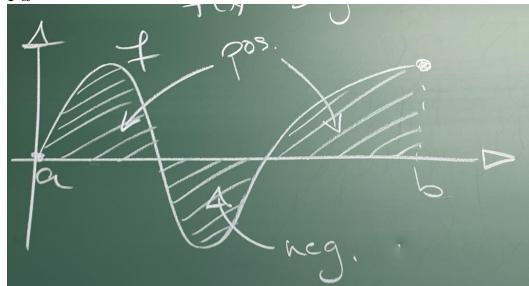
$$\int_a^b f(x) dx = S_n + O(\frac{1}{n^4})$$

## Chapter 24

# Tillämpningar av integraler

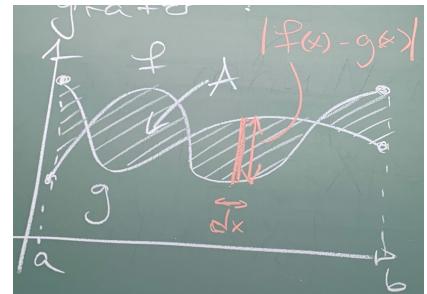
Vi har följande geometriska tolkning av integraler:

$\int_a^b f(x) dx$  = "arean med tecken under grafen till  $f(x)$  begränsad av  $x$ -axeln"



Om man vill ha totalarean (dvs arean utan tecken) är det bara att integrera  $|f(x)|$  istället.

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{"totala arean under grafen"}$$



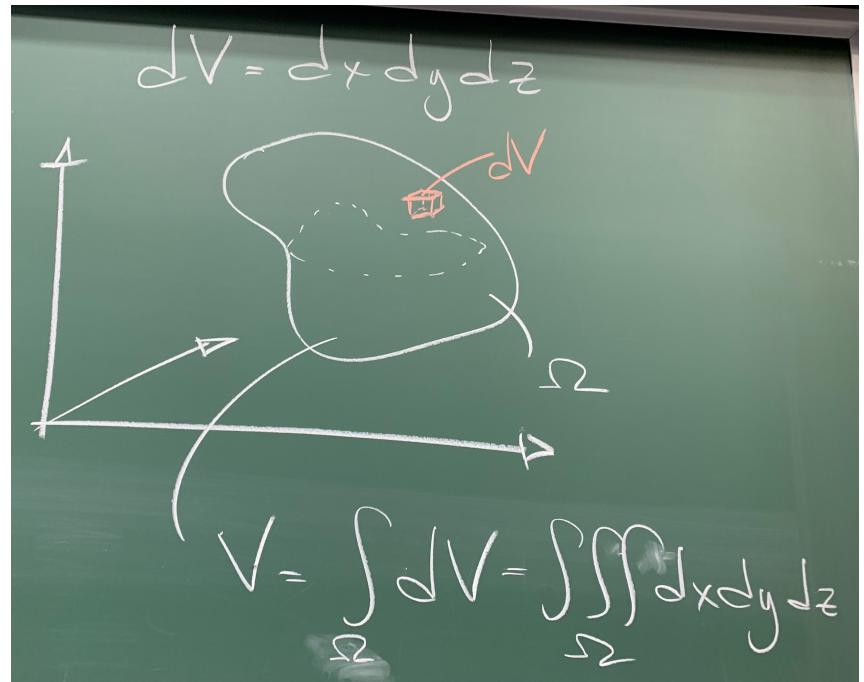
På liknande sätt kan man beräkna arean mellan två grafer.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Metoden med att integrera infinitesimala element, som till exempel  $|f(x) - g(x)| dx$ , är mycket användbar.

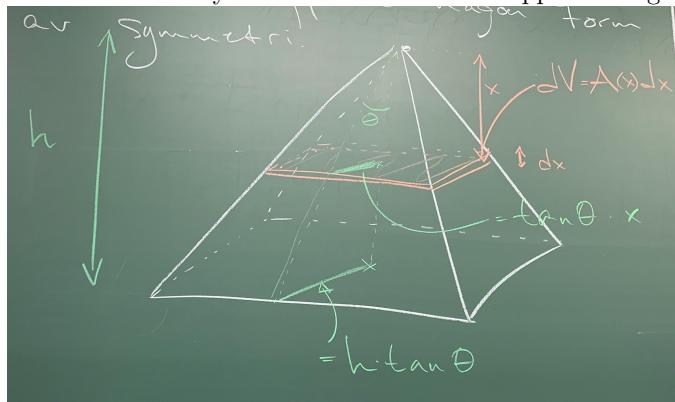
## 24.1 Volymberäkning

Att beräkna volymer med integraler kräver i allmänhet teori från från flervariabelanalys eftersom det grundläggande infinitesimala elementet är en liten kub



med volym  $dV = dx dy dz$ .

Ibland klarar man sig dock med vanliga enkelintegraler om man kan skriva  $dV = A(x)dx$ , där  $A(x)$  beskriver arean av en "skiva" och  $dx$  är skivans tjocklek. Går om volymen man vill beräkna uppvisar någon form av symmetri.

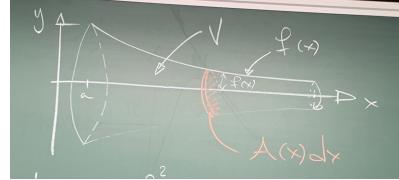


$$A(x) = (2 \cdot x \cdot \tan(\theta))^2 = 4x^2 \tan^2(\theta) \Rightarrow V = \int dV = \int A(x) dx =$$

$$\int_0^h 4x^2 \tan^2(\theta) dx = \left[ \frac{4}{3}x^3 \tan^2(\theta) \right]_0^h = \frac{4}{3}h^3 \cdot \tan^2(\theta) = \frac{h}{3}4h^2 \tan^2(\theta) = \\ \{4h^2 \tan^2(\theta) = "basytan" = b\} = \frac{h \cdot b}{3}$$

Ibland uppvisar volymer rotationssymmetri med antingen  $x$ - eller  $y$ -axeln och då

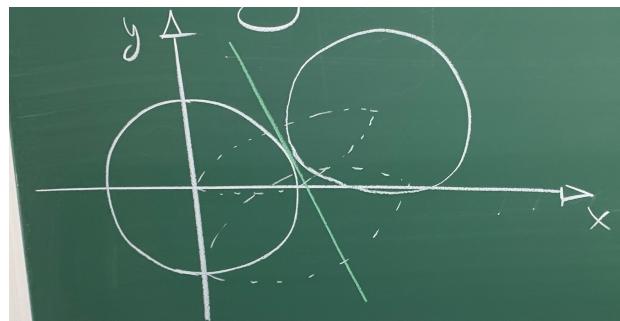
utnyttjas detta genom rotationssymmetriska element.



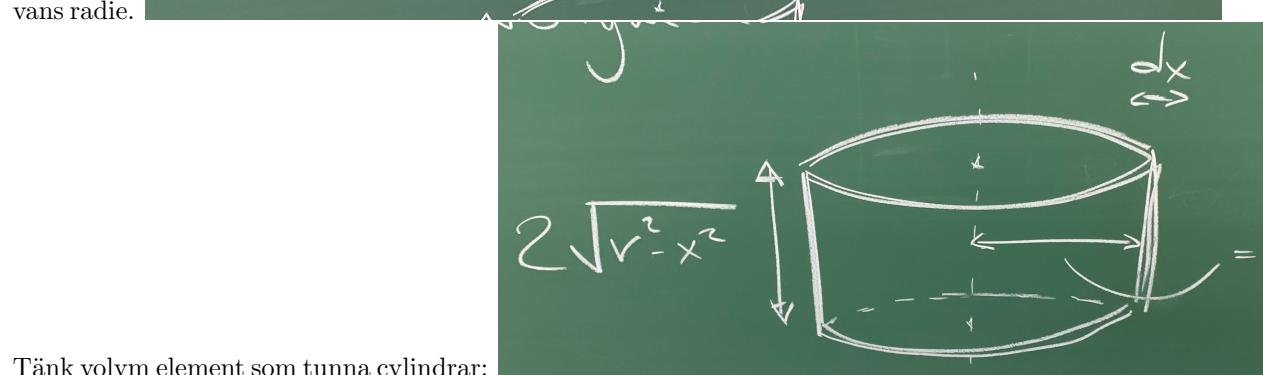
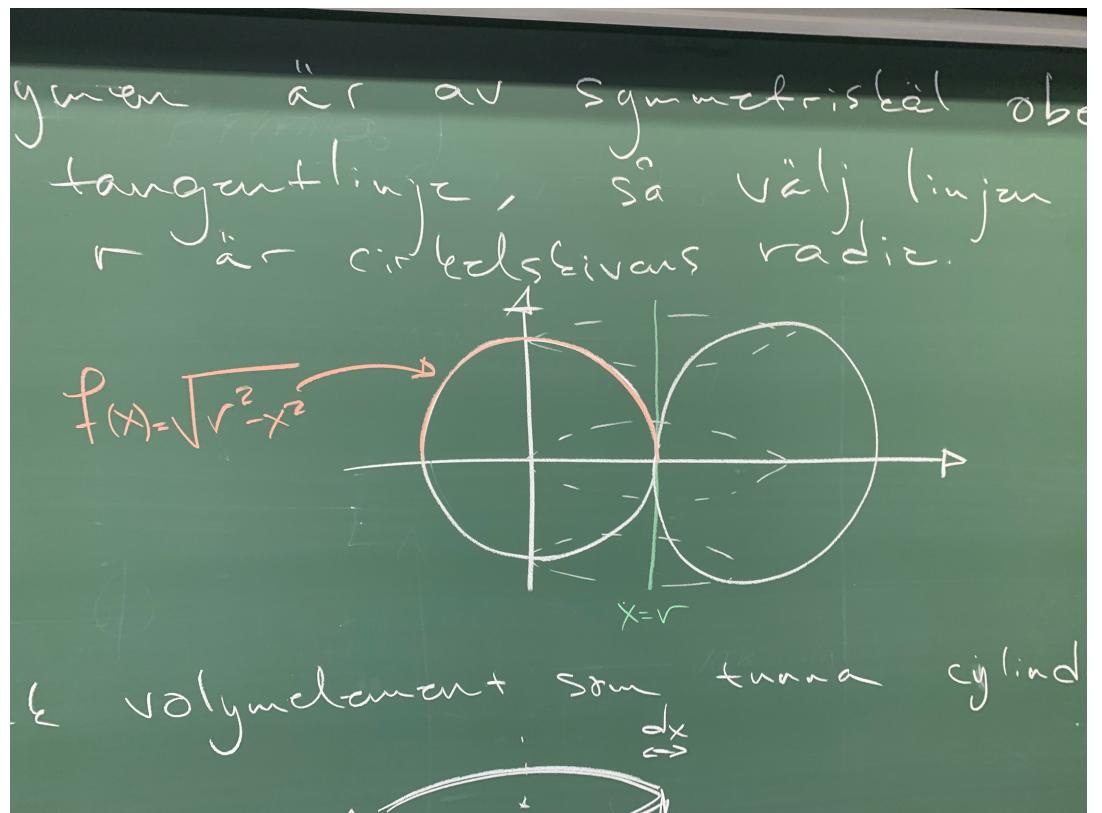
$$A(x) = f^2(x) \cdot \pi \Rightarrow V = \int_a^b dV = \int_a^b f^2(x) \pi dx$$

Liknande konstruktion runt  $y$ -axeln.

**Ex (7.1.16)** Bestäm volymen av den kropp som fås genom att rotera en cirkelskiva runt en godtycklig tangentlinje.



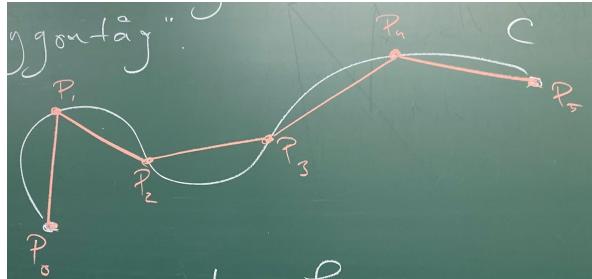
**Lösning** Volymen är  
av symmetriskäl oberoende av tangentlinje, så välj linjen  $x = r$ , där  $r$  är cirkelski-



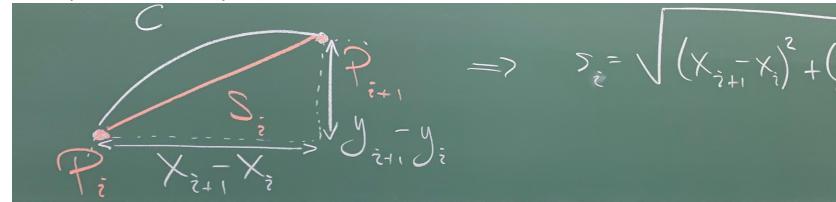
$$\begin{aligned} \rightarrow V &= \int dV = \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r 2\pi(r-x) \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ &4\pi[r \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx - \int_{-r}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx] = 4\pi r \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ &\{\text{arean av halvcirkeln} = \frac{\pi r^2}{2}\} = 4\pi r \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 r^3 \square \end{aligned}$$

## 24.2 Kurvlängd och mantelarea

Kan approximera en kurva  $C$  genom ett så kallat "polygontåg".



klart att det för varje polygontåg definierat av punkterna  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  gäller att dess längd  $L_n$  är kortare än den verkliga längden av  $C$ . Man definierar längden av  $C$  som det minsta tal  $s \in \mathbb{R}$  så att  $L_n \leq s$  för alla polygontåg  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ . Längden för ett linje-



segment, säg mellan  $P_i$  och  $P_{i+1}$ , blir:

$$\Rightarrow s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}} \cdot |x_{i+1} - x_i|$$

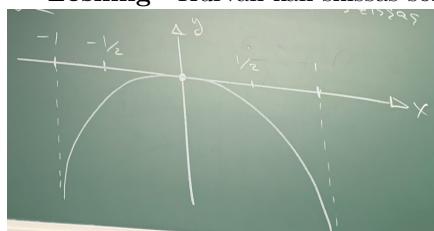
Om kurvans  $y$ -värden beskrivs av en funktion  $f(x)$ , polygontåget blir tätare och tätare och  $f'(x)$  existerar

$$s_i \rightarrow ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\text{och } s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Ex (7.3.12)** Bestäm längden av kurvan  $x = -\frac{1}{2}$  och  $x = \frac{1}{2}$  som definieras av grafen till  $y = \ln(1 - x^2)$ .

**Lösning** Kurvan kan skissas som

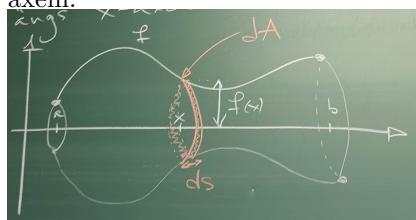


Det gäller att  $y' = \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{1-x^2}$  för allt  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  och alltså kan kurvans längd beräknas som:

$$s = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = \\
2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{(1-x^2)^2}} dx = \\
2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(1-x^2)^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1+2-2}{1-x^2} dx = \\
2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2} - 1 dx &= \left\{ \frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} \Rightarrow A=B=1 \right\} = \\
2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 1 dx &= 2[\ln(|1+x|) - \ln(|1-x|) - x]_0^{\frac{1}{2}} = \\
2 \cdot \left( \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) &= 2\ln(3) - 1 \square
\end{aligned}$$

Kan använda liknande teknik som för kurvlängder för att beräkna mantelytan av rotationssymmetriska kroppar till exempel om rotationssymmetrin längs  $x$ -axeln:



Måste hitta uttryck för area elementet  $dA$  så att den totala mantelarean  $A$  kan beräknas som  $A = \int dA$ . Bandet med arean  $dA$  kan "klippas upp" och tänkas som en rektangel med höjd  $ds$  och längd  $2\pi f(x)$ , så:

$$dA = 2\pi|f(x)|ds = 2\pi|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

och allstår kan  $A$  beräknas som

$$A = \int dA = 2\pi \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

## 24.3 Praktiska tillämpningar

Inom klassisk mekanik studeras så kallade ”stela kroppar”, dvs. objekt som kan tänkas fullständigt oelastiska där inbördes relativas avstånd är oförändrade under påverkan av ytter kraftar. För dessa r tyngdpunkt ett centralt och viktigt begrepp. För partikelsystem:



Systemets tyngdpunkt  $\bar{r}$  definieras som:

$$\bar{r} = \frac{\sum_i r_i \cdot m_i}{\sum_i m_i}$$

Systemets moment betecknas  $M_0$  och består av tre dimensionskomponenter:

$$M_0 = (M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0})$$

Vad blir motsvarande för en stel kropp vars densitet i en punkt  $(x, y, z)$  beskrivs av  $\varrho(x, y, z)$ . Stel kropp:



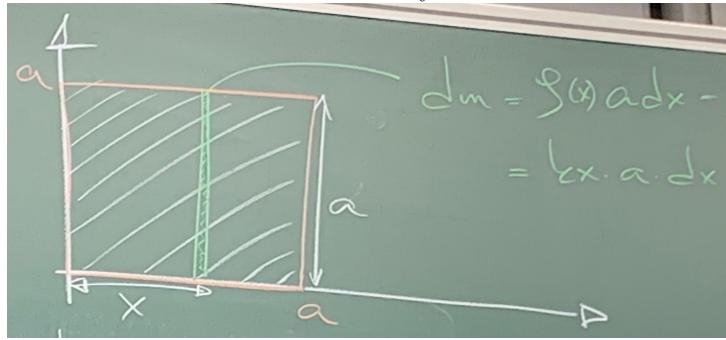
så tyngdpunkten för den stela kroppen blir:

$$\bar{r} = \sum_i \frac{m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \frac{\int_{\Omega}(x, y, z) \cdot \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\int \varrho(x, y, z) dx dy dz}$$

Om man kan identifiera symmetrier ibland  $\bar{r}$  beräknas med hjälp av "enkelintegraler".

**Ex (7.4.7)** Beräkna tyngdpunkten för en kvadratisk platta med sidan  $a$  cm om dess areadensitet är  $\varrho(x) = k \cdot x$  g/cm<sup>2</sup> där  $x$  är avståndet mellan en punkt  $P$  på plattan och en av plattans sidor.

**Lösning** Lägg plattan i ett koordinatsystem där "referenssidan" för plattans densitet är sammanfaller med  $y$ -axeln.



Uppenbart av symmetriskäl att tyngdpunkten i  $y$ -led ligger på höjden  $\frac{a}{2}$ . Platans totala massa  $m$  blir:

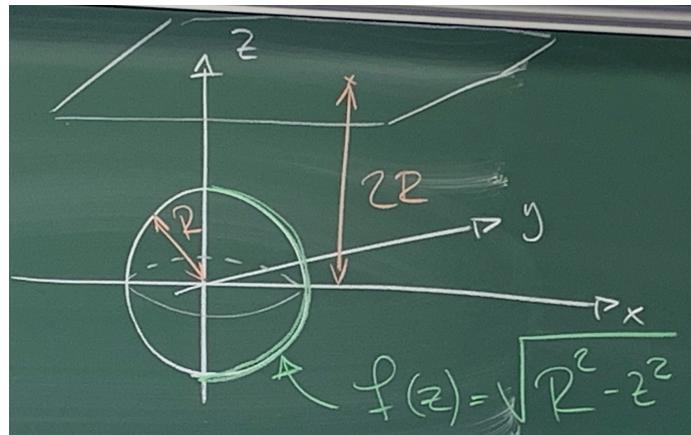
$$m = \int dm = \int_0^a kx \cdot a \cdot dx = ka \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{ka^3}{2}$$

Och momentet runt  $x = 0$  betecknas  $M_{x=0}$ , blir:

$$M_{x=0} = \int x dm = \int_0^a x \cdot kx \cdot a \cdot dx = ka \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ka^4}{4}$$

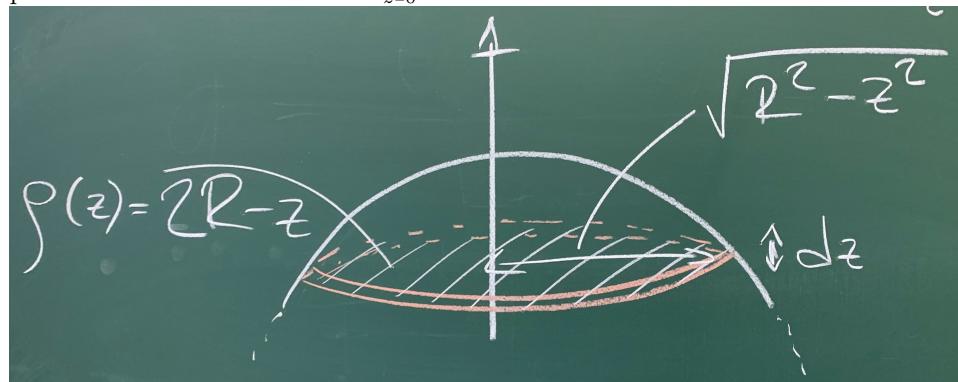
så tyngdpunkten i  $x$ -led hamnar i  $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\frac{ka^3}{4}}{\frac{ka^3}{2}} = \frac{2a}{3}$  dvs.  $\bar{r} = (\frac{2a}{3}, \frac{a}{2})$  □

**Ex (7.4.14)** Beräkna tyngdpunkten för en boll med radie  $R$  (m) om bollens densitet i en punkt  $P$  är  $\varrho(z) = z$  kg/m<sup>3</sup> där  $z$  är avstånd från  $P$  till ett plan  $2R$  m från bollems mittpunkt.



**Lösning**

Med angivet koordinatsystem angivet enligt bild så är det givet att bollens tynndpunkt i  $x$ - respektive  $y$ -led är 0 på grund av symmetri och att densiteten endast varierar i  $z$ -led, dvs.  $\bar{r} = (0, 0, \bar{z})$ . Använd plattor parallella med  $xy$ -planet för att beräkna  $m$  och  $M_{z=0}$ .



$$\Rightarrow dm = (2R - z) \cdot \pi(\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \pi(2R - z)(R^2 - z^2) dz$$

$$\Rightarrow m = \int dm = \int_{-R}^R \pi(2R - z)(R^2 - z^2) dz = \pi \int_{-R}^R 2R^3 - 2Rz^2 - zR^2 + z^3 dz = \\ \pi [2R^3z - \frac{2}{3}Rz^3]_{-R}^R = \frac{8}{3}\pi R^4$$

$$M_{z=0} = \int_{-R}^R z dm = \int_{-R}^R z \cdot \pi(2R - z)(R^2 - z^2) dz = \dots = \frac{4\pi}{15}R^5 \Rightarrow$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{4\pi}{15}R^5}{\frac{8\pi R^4}{3}} = \dots = \frac{R}{10} \square$$

**Ex (7.6.3)** En damm är 200 m lång, 24 m hög och är utformad som en 26 m lång slip. Om Vattenytan står vid dammens topp, hur stor kraft måste den då hålla emot från vattentrycket?

**Lösning** Det hydrostatiska trycket på djupet  $h$  m ges av  $p = \rho \cdot g \cdot h$  där  $\rho$  är vattnets densitet och  $g$  är tyngdaccelerationen.

Betrakta en tunn delyta på dammen som kan betraktas som utsatt för ett konstant tryck. Om ytans area är  $dA$  så utsätts denna för en kraft  $dF = p \cdot dA = \rho g h dA$ . Vad är  $dA$ ?

$$dA = 200 \cdot ds = 200 \frac{dh}{\sin(\alpha)} \text{ där } \sin(\alpha) = \frac{24}{26} (\Rightarrow \alpha \approx 67.4^\circ) \text{ så}$$

$$F_{\text{tot}} = \int dF = \int_0^2 4\rho g h \cdot 200 \cdot \frac{dh}{\sin(\alpha)} = 200\rho g \frac{26}{24} \int_0^2 4h dh = 200\rho g \frac{26}{24} \left[ \frac{h^2}{2} \right]_0^2 = 6.12 \cdot 10^8 \text{ N}$$

**Ex (7.6.9)** Beräkna det arbete som krävs för att pumpa allt vatten ur en (sfärisk) skål med radie  $a$  m till en höjd  $h$  m ovanför skålens top.

**Lösning** Beräkna det arbete som krävs för att lyfta en tunn cirkulär vattenskiva från skålens till höjden  $h$  enligt bild. För cirkelbågen gäller att

$$\text{så } dm = \rho dV = \rho A(x) dx = \rho \pi f^2(x) dx = \rho \pi (a^2 - x^2) dx$$

Arbete att lyfta en massa  $m$  till höjden  $h$  ges av  $W = mgh$  och alltså

$$dW = \rho g \pi (a^2 - x^2)(x + h) dx = \rho g \pi (a^2 x + a^2 h - x^3 - x h^2) dx$$

För att lyfta skvian vid  $x$  till höjden  $h$  krävs det totala arbetet  $W_{\text{tot}}$  enligt

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int dW = \int_0^a \rho g \pi (a^2 x + a^2 h - x^4 - x h^2) dx = \\ &\rho g \pi \left[ \frac{a^2}{2} x^2 + a^2 h x - \frac{x^4}{4} - \frac{h}{3} x^3 \right]_0^a = \rho g \pi \left( \frac{a^4}{2} + a^3 h - \frac{a^4}{4} - \frac{a^3 h}{3} \right) = \rho g \pi \left( \frac{a^4}{4} + \frac{2a^3 h}{3} \right) = \\ &\frac{\rho g \pi a^3}{4} \left( a + \frac{8h}{3} \right) = 2450 \pi a^3 \left( a + \frac{8h}{3} \right) \text{ J} \square \end{aligned}$$

# Separabla differentialekvationer

Matematisk modellering handlar ofta om att använda generella principer (fysikaliska, tekniska, hypotetiska) för att beskriva hur olika typer av processer fungerar. Man vet sällan funktionen  $f(x)$ , man känner bara till de lagar och principer som den måste respektera.

**Ex** Vilken kastbana följer en toppad tennisboll (dvs. en boll som roterar framåt i luften)?

## Lösning

Då bollen färdas i luften utsätts den för tre olika krafter:

1. gravitation  $\mathbf{F}_G$
2. luftmotstånd  $\mathbf{F}_D$
3. magnuskraften  $\mathbf{F}_M$

Det gäller att  $|\mathbf{F}_G| = mg$ ,  $|\mathbf{F}_D| = C_1 \cdot \frac{|\mathbf{V}|^2}{2}$  och  $|\mathbf{F}_M| = C_2 \cdot \frac{|\mathbf{V}|^2}{2 + \frac{|\mathbf{V}|}{R \cdot w}}$  och av Newtons 2:a lag gäller:

$$m \cdot a = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_M$$

Eftersom  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$  kan man skriva detta som två separata (kopplade) samband i  $x$ - och  $y$ -led:

$$(*) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot v \left( C \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\frac{dy}{dt}}{2 + \frac{v}{Rw}} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot v \left( \frac{\frac{dx}{dt}}{2 + \frac{v}{Rw}} - C \cdot \frac{dy}{dx} \right) - g \end{cases}$$

och där  $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$ ,  $C, k \in \mathbb{R}$ . Bollbanan ges av de funktioner  $x(t)$  och  $y(t)$  som uppfyller  $(*)$ .

## 24.4 Separabla differentialekvationer

En differentialekvation som kan skrivas på formeln:  $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$  kallas för separabel. Målet är att hitta ett uttryck för  $y = y(x)$ . Lösningsmetodiken går ut på att separera  $x$  och  $y$  på var sin sida om likhetstecknet.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \stackrel{(?)}{\Leftrightarrow} dy = f(x)g(y) dx \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

Vilket betyder att

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Kan man lösa dessa och sedan uttrycka  $y$  som en funktion av  $x$  så är man klar.

**Ex (7.9.8)** Lös differentialekvationen  $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ .

**Lösning** Denna differentialekvation är separabel eftersom

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{1}{1 + y^2} dy = 1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int dx = x + C, C \in \mathbb{R}$$

För den andra integralen har vi att:

$$\int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(y) + D, D \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\arctan(y) + D = x + c \Leftrightarrow \arctan(y) = x + E (E = C - D)$$

och alltså gäller att

$$y = \tan(x + E)$$

Prova om det stämmer!

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [\tan(x + E)] = \frac{1}{\cos^2(x + E)} = \frac{\sin^2(x + E) + \cos^2(x + E)}{\cos^2(x + E)} = \\ &1 + \frac{\sin^2}{\cos^2(x + E)} = 1 + \tan(x + E) = \{y = \tan(x + E)\} = 1 + y^2 \square \end{aligned}$$

## Chapter 25

# Första ordningens linjära differentialekvation

”Första ordningen” syftar på att högsta ordningen derivata i differentialekvationen är 1, dvs  $y'$ . En linjär sådan differentialekvation kan skrivas  $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ . Hur lösa?

Vill hitta  $y(x)$  så att  $y' + p(x)y = q(x)$  givet  $p(x)$  och  $q(x)$ . Antag att man kan beräkna den primitiva funktionen för  $p(x)$ , dvs.  $\int p(x) dx$ . Då gäller att

$$\frac{d}{dx} [e^{\int p(x) dx}] = \{\text{kedjeregeln}\} = e^{\int p(x) dx} \cdot \frac{d}{dx} [\int p(x) dx] = e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) + C$$

Om både vänster- och högerled i differentialekvationen multipliceras med  $e^{\int p(x) dx}$  får vi

$$e^{\int p(x) dx} \cdot y' + e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) \cdot y = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) \Leftrightarrow e^{\int p(x) dx} \cdot y' + \frac{d}{dx} [e^{\int p(x) dx}] \cdot y = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x)$$

Produktregeln ger:  $\frac{d}{dx} [e^{\int p(x) dx} \cdot y] = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x)$ . Om man integrerar vänster- och högerled med avseende på  $x$  fås:

$$e^{\int p(x) dx} \cdot y = \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx$$

och man hittar lösningen  $y(x)$  till differentialekvationen som

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C$$

Funktionen  $e^{\int p(x) dx}$  i lösningsmetodiken kallas för den integrerande faktorn.

**Ex** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + \cos(x) \cdot y = 2x \cdot e^{-\sin(x)} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

**Lösning** Använd metoden med integrerande faktor!

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

Den integrerande faktorn är alltså  $e^{\sin(x)}$  och

$$e^{\sin(x)} \cdot y' + e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot y = e^{\sin(x)} \cdot 2x \cdot e^{-\sin(x)} = 2x \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} [e^{\sin(x)} \cdot y] = 2x \Rightarrow \{\text{integrera}\} \Rightarrow e^{\sin(x)} \cdot y = \int 2x \, dx = x^2 + C$$

och får att  $y = e^{-\sin(x)}(x^2 + C)$ . Vi vet också att  $y(\pi) = 0$  vilket används för att bestämma konstanten  $C$ .

$$y(\pi) = e^{-\sin(\pi)}(\pi^2 + C) = e^0(\pi^2 + C) = \pi^2 + C \Rightarrow \pi^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\pi^2$$

och lösningen till problemet är

$$y(x) = e^{-\sin(x)}(x^2 - \pi^2) \square$$

**Ex (7.9.29)** Enligt Newtons andra lag kan hastigheten av en fritt fallande kropp i luft beskrivas som  $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - hv^2$ . Talen  $m$  och  $g$  är kroppens massa respektive tyngdaccelerationen och termen  $-h \cdot v^2$  modellerar luftmotståndet. Givet att kroppen faller från vila i  $t_0$  ( $v(0) = 0$ ). Bestäm ett uttryck för  $v(t)$ . Vad blir  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ ?

**Lösning**  $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \Leftrightarrow g - \frac{k}{m}v^2$  är separabel!

$$\Rightarrow \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} \, dv = dt \Rightarrow \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} \, dv = \int dt = t + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} \, dv = \frac{m}{k} \int \frac{1}{\frac{mg}{k} - v^2} \, dv = \frac{m}{k} \int \frac{1}{(\sqrt{\frac{mg}{k}} - v)(\sqrt{\frac{mg}{k}} + v)} \, dv =$$

$$\{\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}\} = \frac{m}{k} \int \frac{1}{(\alpha - v)(\alpha + v)} \, dv = \{\text{partialbråksuppdelning}\} =$$

$$\left| \frac{1}{(\alpha-v)(\alpha+v)} = \frac{A}{\alpha-v} + \frac{B}{\alpha+v} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{2\alpha} \right| = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha} \int \frac{1}{\alpha-v} + \frac{1}{\alpha+v} \, dv =$$

$$\frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha} \int (\ln(|\alpha+v|) - \ln(|\alpha-v|)) = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{\alpha+v}{\alpha-v}\right) \Rightarrow \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{\alpha+v}{\alpha-v}\right) = t + C, C \in \mathbb{R}$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{\alpha+v}{\alpha-v}\right) = 0 + C \Leftrightarrow C = 0 (\ln(1) = 0)$$

så  $\ln\left(\frac{\alpha+v}{\alpha-v}\right) = \frac{2\alpha t k}{m} = \{\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}\} = 2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t$ . För  $v < \alpha$  så gäller att  $\frac{\alpha+v}{\alpha-v} = e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t}$

vilket efter lite räkningar ger  $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} + 1}}$ .

$$\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t} + 1} \rightarrow 1 \text{ då } t \rightarrow \infty$$

$$\text{så } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \square$$

## Chapter 26

# Andra ordningens linjära differential ekvationer med konstanta koefficienter

Ofta räcker första ordningens ekvationer inte och vi behöver kunna hantera även högre ordningar. Naturligt att studera andra ordningens linjära differentialekvationer som ett nästa steg, dvs. något i stil med:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

för givna funktioner  $p(x)$ ,  $q(x)$  och  $f(x)$ . Detta problem är dock betydligt svårare än dess motsvarighet av första ordningen och vi ska nöja oss med fallet där  $p(x)$  och  $q(x)$  är konstanter, dvs.

$$(**) y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), p, q \in \mathbb{R}$$

### Terminologi

Om funktionen  $f(x) = 0$  så säger man att differentialekvationen är homogen. I annat fall säger man att differentialekvationen är icke-homogen. Antag att  $y_p$  är en lösning till en icke-homogen differentialekvation av typen  $(**)$  och att  $y$  är en lösning till motsvarande homogena ekvationen. Då gäller att funktionen  $y_p + y_h$  löser den icke-homogena differentialekvationen eftersom:

$$\begin{aligned} (y_p + y_h)'' + p(y_p + y_h)' + q(y_p + y_h) &= y_p'' + y_h'' + p \cdot y_p' + p \cdot y_h' + q \cdot y_p + q \cdot y_h = \\ (y_p'' + p \cdot y_p' + q \cdot y_p) + (y_h'' + p \cdot y_h' + q \cdot y_h) &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

Alltså, för att lösa den icke-homogena differentialekvationen måste man även lösa den homogena. Den totala lösningen ges av summan  $y_p + y_h$  där  $y_p$  kallas för partikulärlosning och  $y_h$  kallas för homogenlösning. Hur hittar man homogenlösningen  $y_h$ , dvs. lösningen till differentialekvationen:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

för givna tal  $p, q \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$ ? Testa ansatsen  $y = e^{rx}$ ,  $r \in \mathbb{C}$ .

$$\Rightarrow (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + q(e^{rx}) = r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + q e^{rx} = (r^2 + pr + q) \cdot e^{rx} = 0$$

Men detta kan bara vara sant om  $r^2 + pr + q = 0$  och det gäller att hitta det tal  $r$  som löser den ekvationen. Man brukar kalla  $r^2 + pr + q = 0$  för den karakteristiska ekvationen tillhörande den homogena differential ekvationen  $y'' + py' + q = 0$ . Den karakteristiska ekvationen har alltid två lösningar räknade med multiplicitet (algebrans fundamentalsats) och vi får tre olika fall: (givet att  $p, q \in \mathbb{R}$ )

1. Två reella rötter  $r_1$  och  $r_2$ .

$$\Rightarrow y_h = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}, A, B \in \mathbb{R}$$

2. En dubbelrot  $r (= r_1 = r_2)$ .

$$\Rightarrow y_h = A \cdot e^r + B x e^{rx}, A, B \in \mathbb{R}$$

3. Två komplexkonjugerande rötter  $r_{1,2} = k \pm i\omega$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_h &= C \cdot e^{(k+i\omega)x} + D \cdot e^{(k-\omega i)x} = C \cdot e^{kx} \cdot e^{i\omega x} + D e^{kx} \cdot e^{-i\omega x} = \\ &\{e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)\} = \dots = e^{kx}(A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) \end{aligned}$$

Att lösa den karakteristiska ekvationen och därefter identifiera vilket av fallen 1., 2. eller 3. man har ger ett "recept" som alltid kan användas för att lösa homogena och linjära andra ordningens differentialekvationer med konstanta koefficienter.

**Ex** Lös differential ekvationen  $\begin{cases} 2y'' + 5y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

**Lösning** Differentialekvationen är homogen av andra ordningen med konstanta koefficienter och vi vill lösa den karakteristiska ekvationen.

$$2r^2 + 5r - 3 = 0 \Leftrightarrow r^2 + \frac{5}{2}r - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}r + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(r + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = \frac{25}{16} + \frac{24}{16} = \frac{49}{16} \Leftrightarrow r_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$$

så vi får två reella rötter  $r_1 = -3$  och  $r_2 = \frac{1}{2}$ . En allmän lösning ges därför av:

$$y_h = A \cdot e^{-3x} + B e^{\frac{x}{2}}, A, B \in \mathbb{R}$$

Talen  $A$  och  $B$  måste respektera villkoren  $y(0) = 0$  och  $y'(0) = 1$ .

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow y_h(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B = 0 \\ y'(0) = 1 &\Rightarrow y_h'(0) = -3Ae^0 + \frac{B}{2}e^0 = \frac{B}{2} - 3A = 1 \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$A = -B \Rightarrow \frac{B}{2} - 3(-B) = 1 \Leftrightarrow \frac{B}{2} + 3B = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{2}B = 1 \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{2}{7} \Rightarrow A = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow B = \frac{2}{7} \Rightarrow A = -\frac{2}{7}$$

så vi får slutligen lösningen:

$$y = -\frac{2}{7}e^{-3x} + \frac{2}{7}e^{\frac{x}{2}} = \frac{2}{7}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-3x}) \square$$

För en differentialekvation av typen  $y'' + py' + qy = f(x)$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$  så är lösningen på formen  $y = y_p + y_h$  och vi kan hitta  $y_h$ .

Hur hittar man partikulärlösningen? Kan vara supersvårt, men om inte högerledet  $f(x)$  är för komplicerat kan man sätta upp bra ansatser och kontrollera att det funkar. Låt  $P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n$  (n:te-grads polynom),  $A_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  och  $B_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$  där talen  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  är okända.

1. om  $f(x) = P_n(x)$  ansätt  $y_p = x^m A_n(x)$
2.  $f(x) = P_n(x)e^{rx}$  ansätt då  $y_p(x) = x^m A_n(x)e^{rx}$
3.  $f(x) = P_n(x)e^{rx} \cos(kx)$  eller  $f(x) = P_n(x)e^{rx} \sin(kx)$  ansätt  $y_p(x) = x^m e^{rx} (A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx))$

Talet  $m$  i faktorn  $x^m$  väljs så liten som möjligt,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , för att se till att  $y_p$  inte överlappar med homogenlösningen  $y_h$ . Kräver mycket träning!

**Ex (19.6 chapter review 26)** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} 2y'' + 5y' - 3y = 6 + 7e^{\frac{x}{2}} \\ y(0) = 0 \\ y(0)' = 1 \end{cases}$$

**Lösning** Vi har redan löst det homogena problemet (tidigare exempel) så gäller nu att hitta partikulärlösning. Prova ansatsen  $y_p(x) = A + Bxe^{\frac{x}{2}}$  vilken ger derivatorna.

$$y'_p(x) = 0 + Be^{\frac{x}{2}} + Bx \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = B(1 + \frac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}$$

$$y''_p(x) = B \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + B(1 + \frac{x}{2}) \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = B(1 + \frac{x}{4})e^{\frac{x}{2}}$$

Sätt in i differentialekvationen och försök identifiera vad talen  $A$  och  $B$  måste vara.

$$\begin{aligned} 2y''_p + 5y'_p - 3y_p &= 2B(1 + \frac{x}{4})e^{\frac{x}{2}} + 5B(1 + \frac{x}{2})e^{\frac{x}{2}} - 3(A + Bxe^{\frac{x}{2}}) = \\ -3A + (2B + 5B)e^{\frac{x}{2}} + (\frac{2}{4}B + \frac{5}{2}B - 3B)x^{\frac{x}{2}} &= -3A + 7Be^{\frac{x}{2}} + (\frac{2+10-12}{4}B)x^{\frac{x}{2}} = \\ -3A + 7Be^{\frac{x}{2}} &= 6 + 7e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow A = -2, B = 1 \end{aligned}$$

För homogenlösningen vet vi att  $y_h(x) = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2e^{-3x}$  och den allmänna lösningen blir

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -2 + xe^{\frac{x}{2}} + C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2e^{-3x}$$

Vi vet också att  $y'(0) = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \Rightarrow -2 + C_1 + C_2 = 0 \\ y'(x) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{C_2}{2} - 3C_2 = 1 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow C_1 = \frac{12}{7}, \frac{2}{7}$  och vi får

$$y(x) = -2 + xe^{\frac{x}{2}} + \frac{12}{7}e^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{7}e^{-3x} \quad \square$$

# Chapter 27

## Serier

En serie defineras som en summa av oändligt många termer, dvs.  $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ . Rent formellt är  $s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$  där  $s_N$  beteckna partialsumman  $s_N = \sum_{n=1}^N a_n$  och man säger att  $s$  är konvergent om gränsvärdet  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N$  existerar. En geometrisk serie definieras av egenskapen att kvoten mellan två på varandra närliggande termer är konstant, dvs.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ . Det betyder att:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a \\ a_n = a \cdot r^{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + \dots$$

För geometriska summor vet vi att:

$$s_N = a + a \cdot r + \dots + a \cdot r^{N-1} = \frac{a(1 - r^N)}{1 - r}$$

och om  $-1 < r < 1$  (dvs  $|r| < 1$ ) så blir  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^N)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$ . Villkoret att  $|r| < 1$  kallas för konvergenskriteriet (förutsatt att  $a \neq 0$ ). Rent allmänt hänger konvergens av serier ihop med de ingående termerna.

**Sats** Om  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerar så måste  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Annars om  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  inte existerar eller inte är noll så kommer serien vara divergent.

Räcker det med att  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  för att avgöra konvergens av  $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ? Nej, till exempel så divergerar den harmoniska serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  mot  $\infty$ .

**Hur kan man testa konvergens?** Kan tolka  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  som en ”area” genom att tänka  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + \dots$ , dvs. där stapel  $i$  har bredd 1 och höjd  $a_i$ . Borde kunna uppskatta genom en integral om man kan hitta en funktion  $f$  som löper genom staplarnas övre vänstra eller högra hörn?

**Sats (integraltestet)** Antag att  $a_n = f(n)$  där funktionen  $f$  är positiv, kontinuerlig och avtagande op ett interval  $[N, \infty)$  för något positivt heltal  $N$ . Då kommer både  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\int_N^{\infty} f(x) dx$  antingen att konvergera eller att divergera mot  $\infty$ .  $\square$

Med hjälp av integraltestet kan man avgöra konvergens/divergens för p-serier genom jämförelse med p-integraler och får då

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konv. om } p > 1 \\ \text{div. mot } \infty \text{ om } p \leq 1 \end{cases}$$

**Ex (9.3.5)** Avgör om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\frac{1}{n^2})|$  är konvergent/divergent genom något lämpligt test.

**Lösning** Serien är uppenbart positiv och  $|\sin(\frac{1}{n^2})| \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . Av Taylors formel runt  $a = 0$  vet vi att  $\sin(x) = x + \frac{(-\cos(s))}{6} \cdot x^3$  för något tal  $s$  mellan 0 och  $x$ . Därför gäller att  $\sin(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} + \frac{(-\cos(s))}{6} \frac{1}{n^6}$  för något  $s \in [0, \frac{1}{n^2}]$  och alltså har vi att

$$|\sin(\frac{1}{n^2})| = \left| \frac{1}{n^2} + \frac{(-\cos(s))}{6} \frac{1}{n^6} \right| \leq \frac{1}{n^2} + \left| \frac{-\cos(s)}{6} \right| \frac{1}{n^6} \leq \{ |-\cos(s)| \leq 1 \} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^6}$$

Detta leder till att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^6} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

där båda serierna i högerledet är konvergenta enligt resultat för p-serier ( $2 > 1$  och  $6 > 1$ ) och alltså konvergerar vänsterledet!  $\square$

En serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sägs vara absolutkonvergent om det gäller att  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  är konvergent. Om dock serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  är konvergent men inte absolutkonvergent säger man att den är betingat konvergent. Till exempel är Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

betingat konvergent eftersom den konvergerar men

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

är divergent mot  $\infty$ .

## 27.1 Potensserier och Taylorserier

Från den geometriska serien vet vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

förutsatt att  $|r| < 1$ . Kan därför skriva funktionen  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  där  $|x| < 1$ , som en serie

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Detta är ett exempel på en så kallad potensserie.

**Definition (Potensserie)** En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kallas för en potensserie i  $(x-c)$  riunt punkten  $x=c$ . Vad gäller för potensegenskaper för potensserier?

**Sats** För godtycklig potesnserie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  gäller alltid något utav följande:

- (i) serien konvergerar bara  $x = c$ .
- (ii) serien konvergerar för alla  $x \in \mathbb{R}$ .
- (iii) det finns ett tal  $R$  (kallas konvergensradien) så att serien konvergerar för alla  $x$  så att  $|x-c| < R$  och divergar för alla  $x$  så att  $|x-c| > R$ . I ändpunkten där  $|x - c| = R$  kan man ha antingen konvergens eller divergens.

I (i) – (iii) är konvergensen absolut utom möjligtvis i ändpunkterna där  $|x - c| = R$ . För naturliga representationer av deriverbarar funktioner som potensserier genoma att uttrycka dom som ”oändligt långa” Taylor-polynom runt given punkt  $x = c$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

Sådana serier, givet att de konvergerar för  $x$  runt  $c$ , kallas för Taylor-serier av  $f$  runt  $x = c$ . Några kända Taylor-serier runt  $x = 0$  (Maclaurin-serier) är:

1.  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
2.  $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
3.  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

Om vi slarvar lite och betraktar  $e^{2x}$  så får vi:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots = \\ &(1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots) + (ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots) = \\ &(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots) + (ix + \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots) = \\ &(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots) = \\ &\cos(x) + i\sin(x), \text{ dvs. } e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \text{ (Eulers formel!)} \end{aligned}$$

Inte helt vattentätt eftersom detta resultat bygger på antagandet att Taylor-serier funkar på precis samma sätt för reella och komplexa tal. För att helt förstå kopplingen måste man studera så kallade komplext matematisk analys. Vi nöjer oss här med Eulers formel och sambandet  $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1$  alltså  $e^{i\pi} = -1$ .

# Chapter 28

## Exempelräkning

**Ex** Lös integralekvationen  $y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt = 2x + 2$

**Lösning** Om vi deriverar både vänster- och högerled får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt] &= \frac{d}{dx} [2x + 2] \Rightarrow y' + \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt = 2 \Leftrightarrow \\ y' - \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt &= 2 \Leftrightarrow \{\text{analysens huvudsats}\} \Leftrightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 2 (*)\end{aligned}$$

Notera att (\*) är en differentialekvation av första ordningen och vi kan använda metoden med integrerande faktor. I vårt fall är  $p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$

$$\int p(x) dx = \int -\frac{2x}{1+x^2} dx = -\ln(|1+x^2|)$$

$$\text{Multiplicera } (x) \text{ med } e^{-\ln(|1+x^2|)} = e^{\ln|1+x^2|} = \frac{1}{|1+x^2|} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left[ \frac{y}{1+x^2} \right] = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\{\text{integrera VL och HL}\} \Rightarrow \frac{y}{1+x^2} = \int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow y(x) = 2(1+x^2) \arctan(x) + C(1+x^2) \text{ där } C \in \mathbb{R} (**)$$

Är vi klara? Nej! Vi hade från början en integralekvation

$$y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt = 2x + 2$$

Om vi sätter  $x = 1$  försvinner integralen och vi får

$$y(1) + 0 = 2 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow y(1) = 4$$

Med detta kan vi bestämma konstanten  $C$ ! Sätt in  $x = 1$  i (\*\*):

$$y(1) = 2 \cdot (1+1^2) \arctan(1) + C(1+1^2) = 4 \arctan(1) + 2C = 4 \Leftrightarrow$$

$$C = \frac{4 - 4 \arctan(1)}{2} = 2(1 - \arctan(1)) = 2(1 - \frac{\pi}{4})$$

och vi finner den slutgiltiga lösningen till integralekvationen som:

$$y(x) = 2(1+x^2)(1 + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}) \square$$

**Ex** Beräkna värdet av serien  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!}$

**Lösning** Börja med att utveckla täljaren

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 2}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (*)$$

Notera att Maclaurin-utvecklingen för  $e^x$  är:

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

och därför måste  $e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ . Försök använda detta för att beräkna serierna i (\*).

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \{k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k\} = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} + 2 - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)+1}{(k-1)!} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2e - 2 = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2e - 2 = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2e - 2 = \\ & \{n = k-2 \text{ i första summan och } m = k-1 \text{ i andra}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} + 2e - 2 = \\ & e + 4e + 2e - 2 = 7e - 2 \end{aligned}$$

Så alltså är  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!} = 7e - 2 \square$

**Ex** Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y'' + y' - 6y = e^{3x}$  som har ett gränsvärde då  $x \rightarrow -\infty$  och som antar värdet 2 i  $x = 0$

**Lösning** homogena ekvationen  $y'' + y' - 6y = 0$ . Den karakteristiska ekvationen blir  $r^2 + r - 6 = 0$ .

$$r^2 + 2 \frac{1}{2} r + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (r + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

dvs.  $r_1 = -\frac{6}{2} = 3$  och  $r_2 = \frac{4}{2} = 2$  och vi har två distinkta och reella rötter. En allmän homogenlösning ges därför som  $y_h = Ae^{-3x} + Be^{2x}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ . Som partikulärlösning ansätt  $y_p(x) = C \cdot e^{3x}$  vilket ger

$$\begin{cases} y'_p(x) = 3Ce^{3x} \\ y''_p = 9Ce^{3x} \end{cases}$$

Insättning i differentialekvationen ger då

$$9Ce^{3x} + 3Ce^{3x} - 6Ce^{3x} = 6Ce^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow C = \frac{1}{6}$$

Vi får alltså den allmänna lösningen till problemet som

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{6}e^{3x} + Ae^{3x} + Be^{2x}$$

Enligt förutsättning vet vi att  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$  måste existera, vilket betyder att  $A = 0$  (eftersom  $e^{-3x} \rightarrow \infty$  då  $x \rightarrow -\infty$ ). Vi vet också att  $y(0) = 2$ , dvs

$$\frac{1}{6}e^{3 \cdot 0} + Be^{3 \cdot 0} = 2 \Leftrightarrow B = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

och allstår ges lösningen av

$$y(x) = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{11}{6}e^{2x} \quad \square$$

**Ex** Beräkna  $\int e^x \cos(x) dx$

**Lösning** Använd partiell integration!

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) - \int e^x (-\sin(x)) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx =$$

$$\{\text{partiell integration igen!}\} = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Om vi betecknar  $\int e^x \cos(x) dx$  med  $I$  så har vi alltså fått

$$I = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I \Leftrightarrow 2I = e^x (\cos(x) + \sin(x)) \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + C, C \in \mathbb{R} \quad \square$$

**Ex** Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$

**Lösning** Betrakta först logaritmen av gränsvärdet, dvs.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$\{y = 1 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y-1} \text{ och } x \rightarrow \infty \text{ motsvarar } y \rightarrow 1^+\} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{6}{y-1} \ln(y) = 6 \cdot \lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{\ln(y)}{y-1} = \{z = y-1 \Leftrightarrow y = z+1\} =$$

$$6 \cdot \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(z+1)}{z} = \{\text{l'hopital}\} = 6 \cdot \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{z+1}}{1} = 6$$