

MVE045 - Matematisk Analys

Max ”Krysset” Hagman

August 30, 2022

Contents

1	Mängder och delmängder	2
2	Intervall	4
3	Komplexa tal	7
4	Funktioner	8
4.1	Funktioner och funktionsgrafer	8
4.2	Kompositioner	8
5	Polynom och rationella funktioner	10
5.1	Polynomdivision	10
6	Grundläggande trigonometri	12

Chapter 1

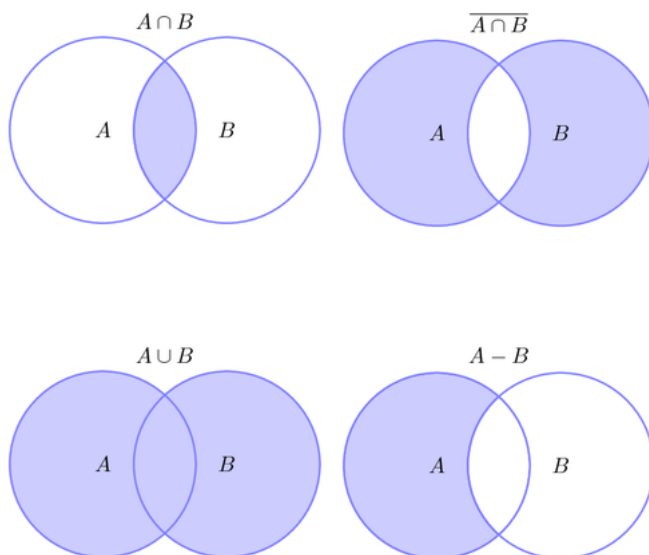
Mängder och delmängder

Mängder och delmängder är ett fundamentallt område inom matematik, alltså är det väldigt viktigt att kunna detta!

En mängd är en samling väldefinierade objekt. Dessa objekt brukar kallas för element.

En mängd A bestående av elementen a_1, a_2, \dots, a_n skrivs som $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Om A och B är två olika mängder så betecknar $A \cup B$ alla element som tillhör A eller B . $A \cap B$ alla element som tillhör A och B . Konstruktionen $A \cup B$ kallas för unionen av A och B och $A \cap B$ kallas för snittet.

Ett vanligt sätt att visualisera mängder är att genom så kallade venndiagram:



Ett par saker till

- $\emptyset = \{\}$, den tomma mängden
- A^c alla element som inte finns i A (kallas komplementet)
-

Talmängder är mängder vars element är tal. Några viktiga talmängder som är grundläggande i matematik är:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ heltalen
- $\mathbb{Q} = \{\text{Alla talen på formen } \frac{p}{q}, \text{ där } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- $\mathbb{R} = \{\text{Alla decimaltal}\}$ de reella talen
- $\mathbb{C} = \{\text{alla tal } a + ib\}$, de komplexa talen

Inom matematisk analys är mängderna \mathbb{R} och \mathbb{C} speciellt i fokus.

Chapter 2

Intervall

Ett intervall är en delmängd av \mathbb{R} som innehåller minst två tal och alla tal mellan två av sina element.

Mer konkret:

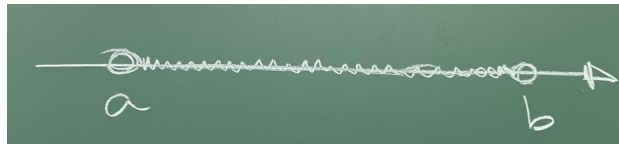


Figure 2.1: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ skrivs (a, b)

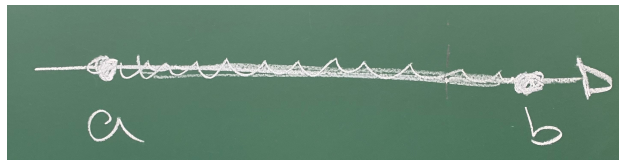


Figure 2.2: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ skrivs $[a, b]$



Figure 2.3: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ skrivs $[a, b)$

Ex (P1.41)

Lös olikheten $|x + 1| > |x - 3|$ genom att tolka avs som ett avst. på talaxeln.

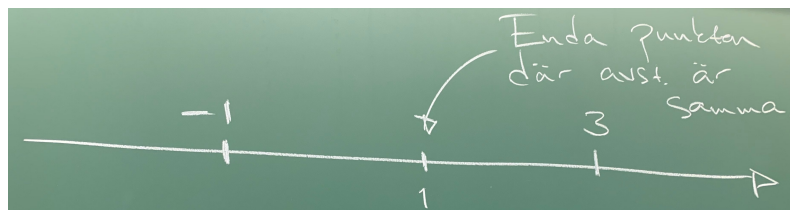
Lösning

$|x + 1| = |x - (-1)|$ = "avst mellan x och (-1) "

$|x - 3|$ = "avst. mellan x och 3 "

Så "avst. mellan x och (-1) " $>$ "avst. mellan x och 3 "

Till höger om 1 så kommer x alltid att vara längre från (-1) än 3 .



Chapter 3

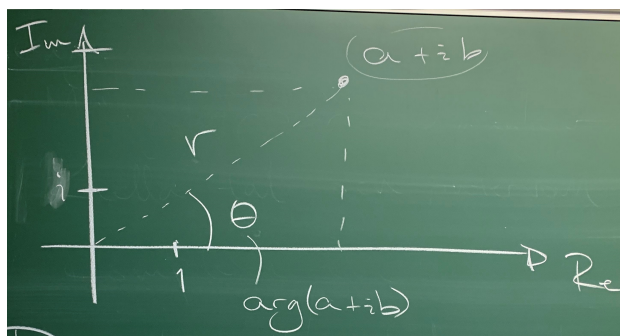
Komplexa tal

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan alltid skrivas på formen $z = a + i \cdot b$ där

- a kallas för realdelen av z $Re(z)$
- b kallas för imaginärdelen av z $Im(z)$

Den imaginära enheten i löser definitionsmsigt ekv. $x^2 + 1 = 0$, dvs $i = \sqrt{-1}$. Rent visuellt kan man betrakta ett komplext tal $a + ib$ som en punkt i det komplexa talplanet.

Det gäller att $r^2 = |a + ib|^2 = a^2 + b^2$. Givet r och argumentet θ kan alla komplexa tal skrivas $z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$



Chapter 4

Funktioner

4.1 Funktioner och funktionsgrafer

En funktion beskriver sambandet mellan in- och ut-data och kan bidra till ökad förståelse av hur olika processer hänger ihop. Klassisk machine learning handlar mycket om att just hitta bra funktioner för att relatera in- och ut-data (supervised learning).

I envariabelanalys studeras funktioner som relaterar ett tal till ett annat. Kan tänkas som en "regel" f som avbildar ett givet tal x till ett annat tal y .

Alla de värdena som är tillåtna att mata in i f kallas för funktionens definitionsområde och betecknas $D(f)$. Mängden av alla y -värden som funktionen kan leverera kallas för värdemängden och skrivs $R(f)$ (range).

Ex Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ har $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

En funktionsgraf (eller bara en graf) givet en funktion f utgörs av alla punkter $(x, y) = (x, f(x))$. Några viktiga concept:

- En funktion sägs vara jämn om $f(-x) = f(x)$ då $(x \in D(f))$.
Betyder att f är symmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion sägs vara udda om $f(-x) = -f(x)$.
Betyder att f är antispegelsymmetrisk m.a.p. y-axeln.
- En funktion är injektiv om det för varje par $x_1, x_2 \in D(f)$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.
- En funktion f som avbildar en mängd tal \mathbf{x} på en annan mängd \mathbf{y} , dvs $f : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ sägs vara surjektiv om $\mathbf{y} = R(f)$.

4.2 Kompositioner

En vanlig konstruktion är att kombinera två separata funktioner till en ny genom komposition. Kan göras på två sätt:

1. $f \circ g(x) := f(g(x))$

2. $g \circ f(x) := g(f(x))$

Notera att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet!

Chapter 5

Polynom och rationella funktioner

Ett polynom är en funktion som kan skrivas som: $P(x) = a_1 \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + ax + a_0$ där $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ kallas för polynomets koefficienter och talet n (positivt heltal) kallas för polynomets grad. En rationell funktion $R(x)$ är en funktion som kan skrivas som en kvot på två polynom $P(x)$ och $Q(x)$, dvs $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Definitionsmängden $D(R)$ begränsas enbart av nollställena till $Q(x)$, dvs. $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

5.1 Polynomdivision

Rationella tal kan alltid skrivas som en heltalsdel + rest:

$$\frac{29}{6} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{4 \cdot 6}{6} + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$$

Motsv. funkar även för rationella funktioner och metoden för att hitta "heltalsdelen" och "resten" kalla polynomdivision.

Ex (P6.18) Uttryck $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$ som summan av ett polynom och en rationell funktion.

Lösning

$$\begin{array}{r} \text{Lösning:} \\ \begin{array}{r} x^4 + x^2 \\ - (x^3 + x^2 + 1) \cdot x \\ \hline -x^3 + x^2 - x \\ - (-1)(x^3 + x^2 + 1) \\ \hline 2x^2 - x + 1 \end{array} \end{array}$$

Eftersom polynomet $2x^2 - x + 1$ har lägre grad än nämnaren $x^3 + x^2 + 1$ tar divisionsalgo. slut.

Vi har fått att $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1} = (x-1) + \frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2+1} \square$.

Enligt Aritmetikens fundamentalsats så kan alla positiva heltal alltid skrivas som en unik faktorisering av primtal, t.ex $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Liknande resultat finns för polynom! Algebrans fundementsats säger att varje polynom av grad n har exakt n st. nollställen (ev. komplexa och räknade med multiplicitet). Vidare gäller också faktorsatsen:

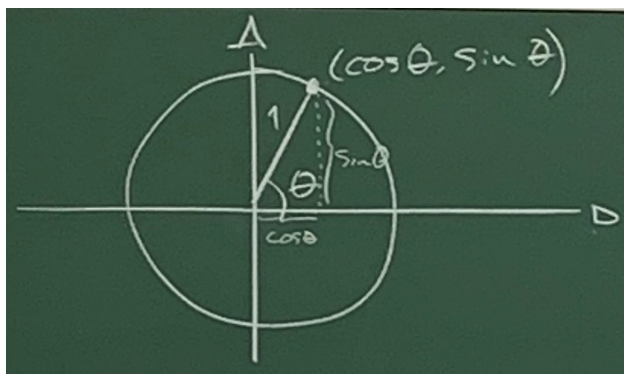
Sats Talet r är en rot (dvs ett nollställe) till ett polynom P av grad minst 1 om och endast om $(x - r)$ är en faktor av $P(x)$.

Eftersom alla polynom P av grad ≥ 1 har precis n st. nollställen säg r_1, \dots, r_n kan man alltid faktorisera ett polynom som $P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$.

Chapter 6

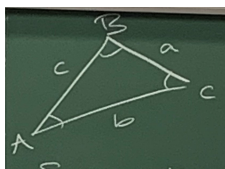
Grundläggande trigonometri

De trigonometriska funktionerna $\cos \theta$ och $\sin \theta$ def. som x - respektive y -koordinaten på den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln θ . Pythago-



ras sats ger omedelbart att $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, även kallat trigonometriska ettan. Vinkeln θ mäts oftast i radianer men kan också mätas i grader. Det gäller att π radianer motsvarar 180° grader.

Utifrån \sin och \cos definieras vidare funktionen tangens som $\tan \theta := \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Två trigonometriska samband som är viktiga är sinus- och cosinus-satsen:



Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Ex (P6.53) Visa att arean på en godtycklig triangel ABC kan beräknas som $\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$.

Lösning Area = $\frac{x_1 \cdot y}{2} + \frac{x_2 \cdot y}{2} = \frac{x_1 \cdot y + x_2 \cdot y}{2}$. Men $\sin A = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c \cdot \sin A \Rightarrow$
 $Area = \frac{x_1 \cdot c \sin A + x_2 \cdot c \sin A}{2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot c \sin A}{2} = \{x_1 + x_2 = b\} = \frac{1}{2}bc \sin A$. De andra
 formulerna följer analogt. \square

