Gruppövning 1 - Grupp A19

Max Hagman, Felix Bjerhem Aronsson

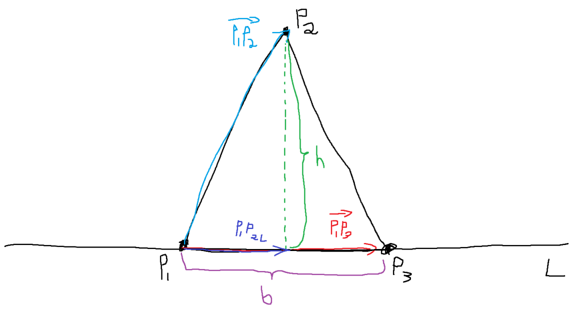
February 7, 2022

Chapter 1

Teoriövningar

1. (a) Formeln för en triangels area är $\frac{b \cdot h}{2}$. Utgår man ifrån detta så får man att basen kan representeras av $||\overrightarrow{P_1P_3}||$ (eller $\overrightarrow{P_1P_2}$). Höjden, däremot, går inte att representera direkt utav någon vektorn baserad på punkterna P_1, P_2 och P_3. För att få höjden tar man $\overrightarrow{P_1P_2}$ projektion på den linje som har riktningsvektor $\overrightarrow{P_1P_3}$, som blir basen till en triangel med $||\overrightarrow{P_1P_2}||$ som hypotenusa. Enligt Pytagoras sats kan man då få höjden på denna nya triangel genom $\sqrt{||\overrightarrow{P_1P_2}||^2 - (\frac{|\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{||\overrightarrow{P_1P_3}||})^2}$. Om man sedan multiplicerar denna höjden, med $||\overrightarrow{P_1P_3}||$ så får man formeln för triangelns area enligt följande:

$$\frac{\sqrt{||\overrightarrow{P_1P_2}||^2 - (\frac{|\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{||\overrightarrow{P_1P_3}||})^2} \cdot ||\overrightarrow{P_1P_3}||}{2} \tag{1.1}$$



Om vi sedan applicerar denna formel på triangeln med hörnen $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (4,2)$ och $P_3 = (-1,7)$, så har vi vektorerna:

$$\boldsymbol{v} = P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$u = P_1 - P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Om man sedan kan stoppa in i formeln för att få arean:

$$\frac{\sqrt{||\boldsymbol{v}||^2 - (\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{||\boldsymbol{u}||})^2} \cdot ||\boldsymbol{u}||}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{50}^2 - (\frac{5\cdot 2 + (-5)\cdot(-6)}{\sqrt{40}})^2} \cdot \sqrt{40}}{2} = 10 \quad (1.2)$$

(b) Med tre godtyckliga punkter på en linje, P_a, P_b och P_c, kan vi bilda tre st vektorer, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$. Då punkterna ligger på en linje får alla vektorer samma riktning. Alltså är minsta vinkeln, α, blir då 0. Uttrycket i roten ur blir då:

$$||\boldsymbol{v}||^2 - (\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{||\boldsymbol{u}||})^2 = ||\boldsymbol{v}||^2 - (\frac{||\boldsymbol{u}||\cdot||\boldsymbol{v}||cos(0)}{||\boldsymbol{u}||})^2 = ||\boldsymbol{v}||^2 - ||\boldsymbol{v}||^2 = 0$$

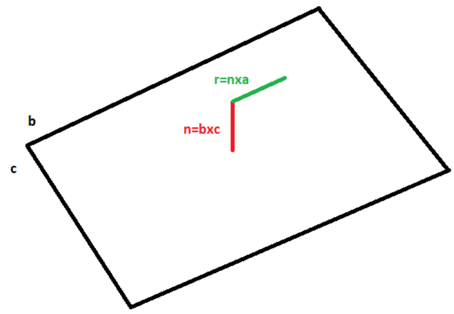
Detta leder till att vi får: $\frac{\sqrt{0}\cdot||\boldsymbol{u}||}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Alltså är arean av den triangeln som P_a, P_b och P_c bildar 0.

2. I en rätvinklig triangel ABC med vinkeln vid $B = \frac{\pi}{2}$.
Vi definierar triangelns vektorer som $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{BC}$ och $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$.

$$||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$

Då $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = ||\boldsymbol{u}||^2$ och $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{v}||^2$ får vi $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.
Då $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala blir $2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ vilket ger oss: $||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 \blacksquare$

3. (a) Då $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ ger normalen, vilket är ortogonal till planet $\boldsymbol{bc}$ spänner. Detta leder till att vi får $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}$ som sedan är ortogonal mot normalen, dvs parallell med planet. Eftersom den är parallell med planet, innebär det att normalens normal vektor kan representeras av någon linjär kombination av $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$, dvs $\lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$.



(b) Då $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ är parallell med planet är det också ortogonalt mot $\boldsymbol{a}$. Skalärprodukten av två vektorer som är ortogonala mot varandra är 0. Sedan kan vi skriva om $\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})$ som:

$$\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) =$$
$$\lambda\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c})$$

Och eftersom $\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, innebär det att $\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$ är ortogonalt mot $\boldsymbol{a}$ och då blir $\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = 0$.

(c) Då $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=0$

kan vi räkna ut att

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=0.$$

Detta innebär att $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ är ortogonala mot $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ och därför måste de vara parallella.

Vilket implicerar att man kan skriva den ena vektorn som en linjärkombination av den andra vektorn, såsom:

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ (-)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}$$

(d) Då vi antar att $s=1$ ser ekvationen ut som följande:

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot c\\ (-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

Om vi då sätter $a=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ och $c=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&=3\cdot2+1\cdot3+5\cdot1=6+3+5=14=\lambda\\ -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=-3\cdot1-1\cdot4-5\cdot2=-3-4-10=-17=\mu\end{aligned}$$

Med hjälp av dessa värden kan vi sätta:

$$\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}=14\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+(-17)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\5\\11\end{pmatrix}$$

Om vi dessutom räknar ut $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ får vi $\begin{pmatrix}-20\\5\\11\end{pmatrix}$.

Chapter 2

Datorövningar

1. Se Span.m för implementation
2. (a) Se NormalNormalisedVektor.m för implementation.
   Vi börjar med att räkna ut den normalen till planet som spänns av u,v. Detta görs med matlab funktionen cross() som räknar ut kryssprodukten. För att normalisera normalen delas den på sin längd, vilket man får från norm(x,1). Sedan returneras normalen.

   (b) Se OrtoProj.m för implementation.
   Funktionen använder sig utav formeln:

   $$\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||^2} \cdot \boldsymbol{n}$$

   Med denna beräknar den projektionen av given vector på planet utifrån normalen.

   (c) Se test.m för att testa alla funktioner tillsammans.
   Vi använder oss utav NormalNormalisedVektor.m för att få en normal som vi sedan skickar in till OrtoProj.m med våran punkt. Detta ger oss resultatet $\begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$. Vilket är projektionen av $P = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$ på yz-planet.
3. Se TriangelToPlain.m för implementation.