

Aproksymacja profilu wysokościowego

Metody Numeryczne - Projekt 3

Krystian Jandy, 184589 - Grupa 2

Maj 2022

Wprowadzenie

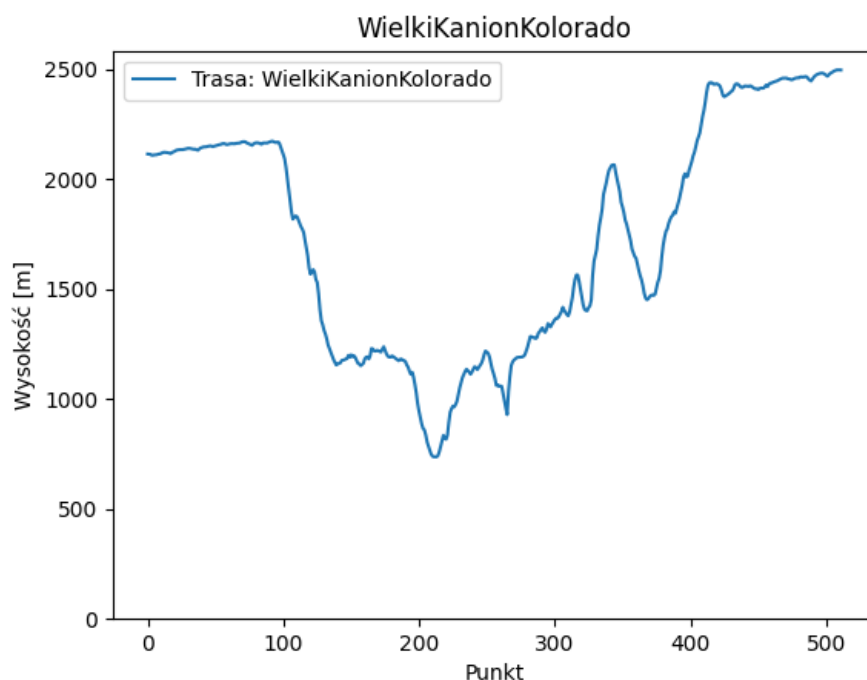
Celem projektu z przedmiotu Metod Numerycznych jest implementacja metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange oraz metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia, które to metody są potrzebne do utworzenia profilu wysokościowego na podstawie wybranych węzłów interpolacyjnych.

Do realizacji projektu został użyty język Python, natomiast do wizualizacji utworzonego profilu wysokościowego wykorzystano bibliotekę matplotlib.

Wybrane trasy

- **Wielki Kanion w Kolorado**

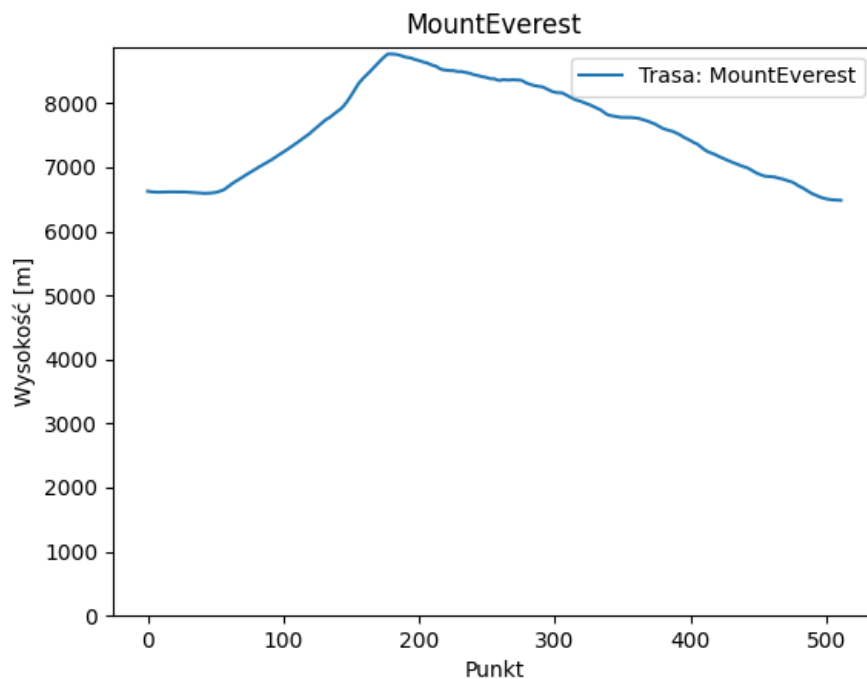
Teren z wyraźną różnicą wysokości (występują wzniesienia oraz spadki)



Rysunek 1: Wykres przedstawiający profil wysokościowy Wielkiego Kanionu w Kolorado

- **Mount Everest**

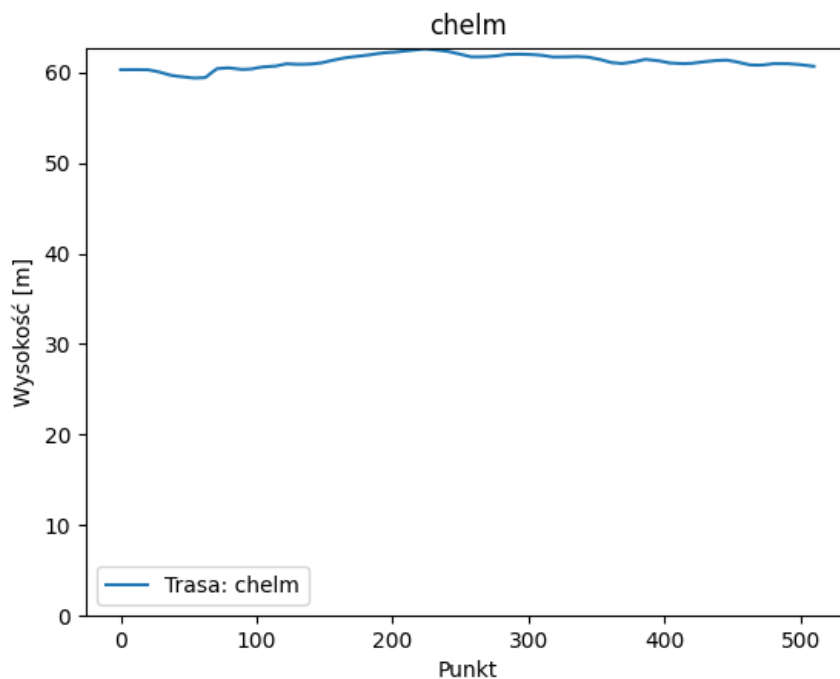
Teren górzysty, występuje jedno znaczne wzniesienie



Rysunek 2: Wykres przedstawiający profil wysokościowy szczytu Mount Everest

- **Chełm**

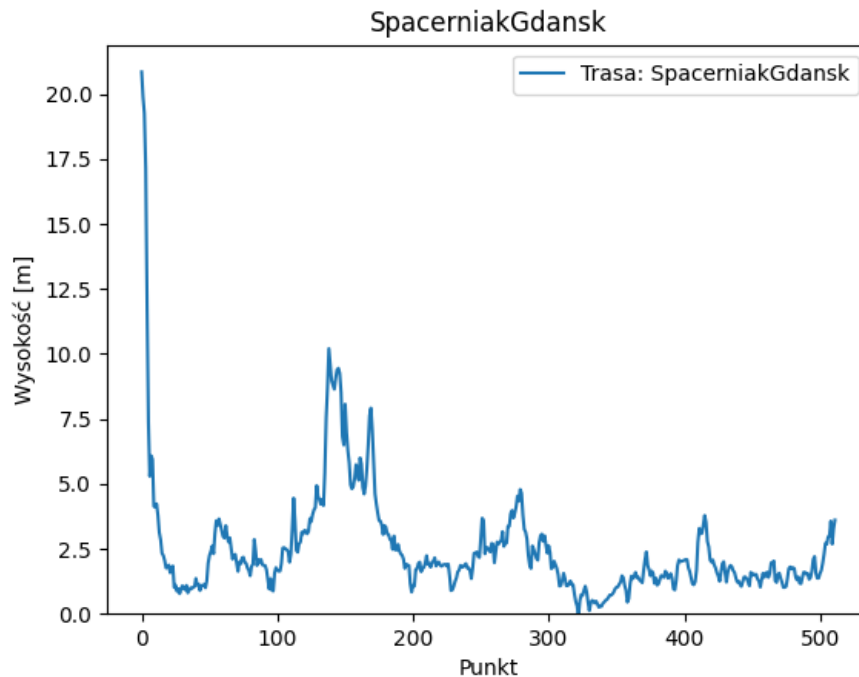
Trasa bez znaczących różnic wysokościowego (prawie płaska)



Rysunek 3: Wykres przedstawiający profil wysokościowy na Chełmie

- **Spacerniak w Gdańsku**

Zróżnicowana trasa, gdzie występują na przemian wzniesienia oraz spadki.



Rysunek 4: Wykres przedstawiający profil wysokościowy na spacerze w Gdańsku

Liczba punktów węzłowych

W celu zbadania powyższych metod przeprowadzono analizę na **3, 6, 11, 35, 52, 103** punktach węzłowych, będących wyróżnionymi punktami ze zbioru danych wejściowych.

Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a to łatwa w implementacji metoda bazująca na wyznaczeniu wielomianu n -tego stopnia określonego przez $n+1$ punktów. Baza Lagrange do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem:

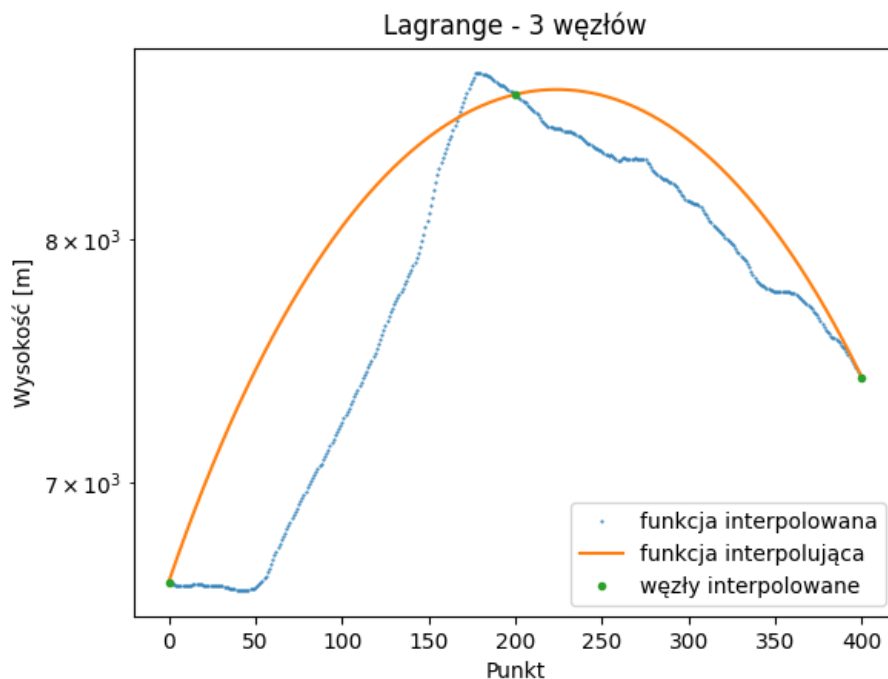
$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \text{ dla } i = 1, 2 \dots n + 1 \quad (1)$$

W interpolacji Lagrange'a nie trzeba konstruować i rozwiązywać układu równań liniowych, co jest jednym z etapów interpolacji funkcjami sklejanymi. Jednakże ta metoda jest podatna na **efekt Rungego** co charakteryzuje się tym, że na krawędziach pojawiają się oscylacje.

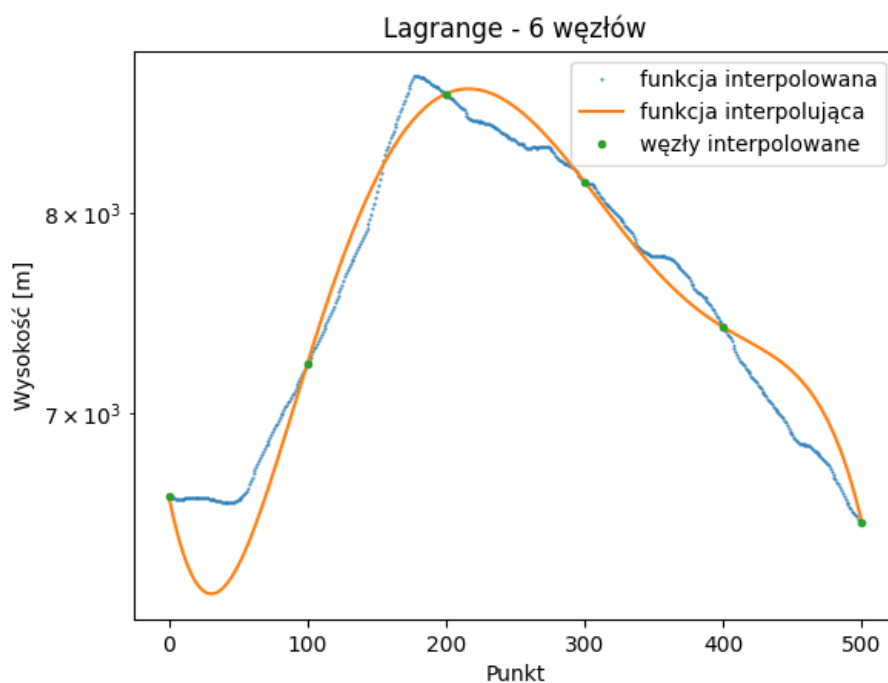
Wpływ liczby węzłów na wyniki

Liczba węzłów znacząco oddziałuje na uzyskany wynik. Można zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby węzłów funkcja jest dobrze interpolowana w środku przedziału, jednakże na krawędziach pojawiają się oscylacje.

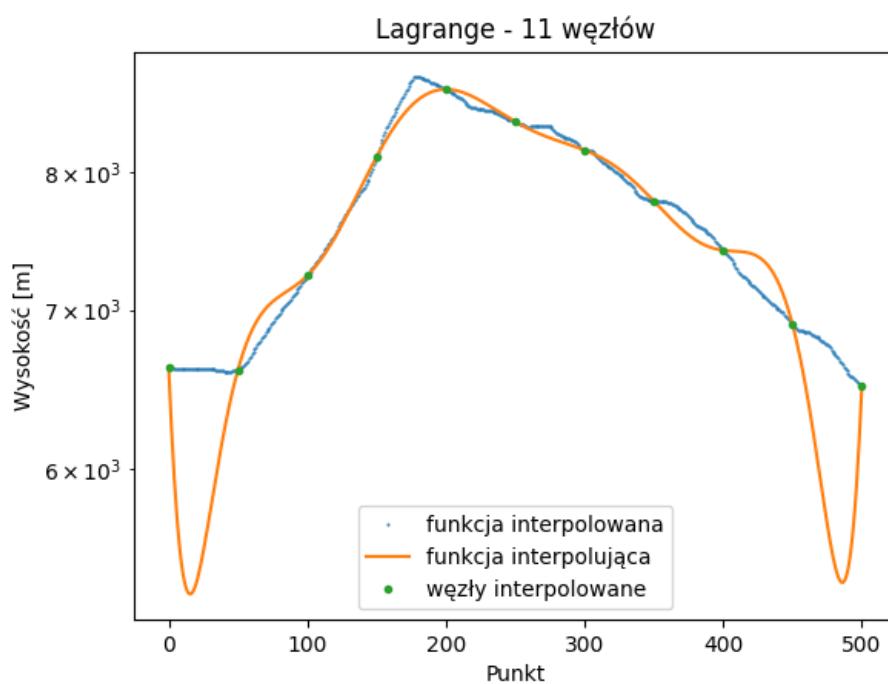
Przykład wpływu liczby węzłów na wyniki zaprezentowany na trasie Mount Everest:



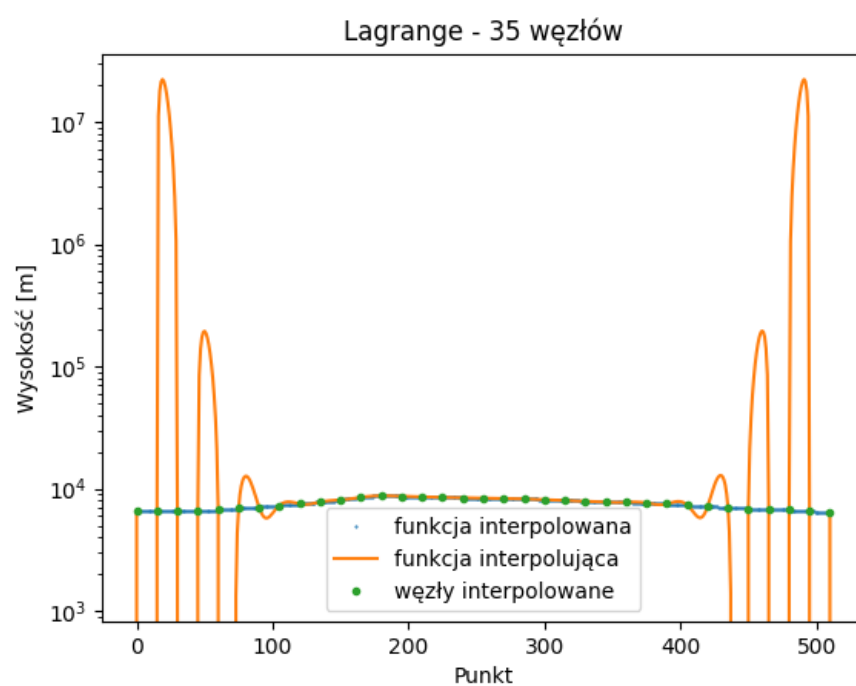
Rysunek 5: Mount Everest - Interpolacja Lagrange'a dla 3 węzłów



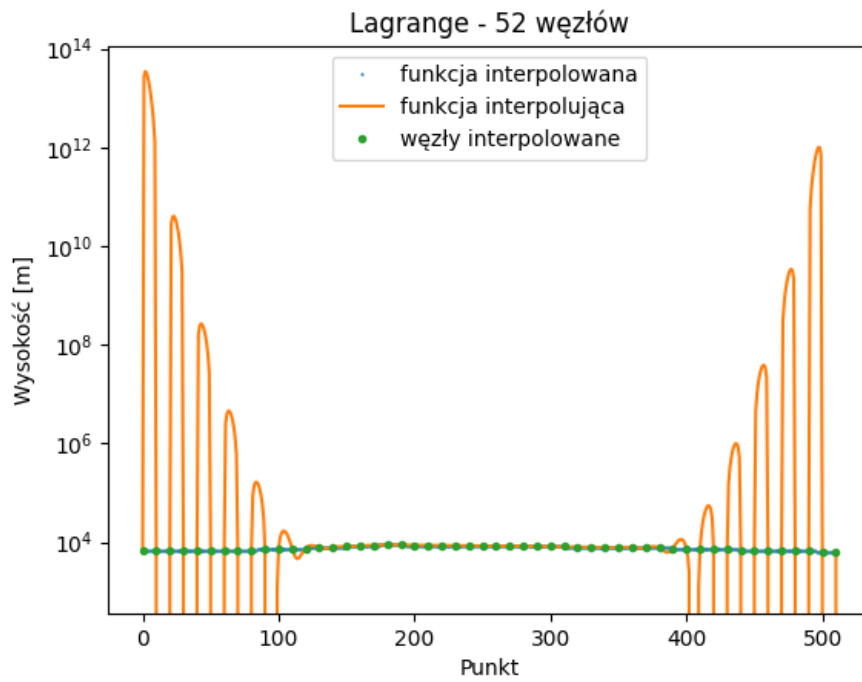
Rysunek 6: Mount Everest - Interpolacja Lagrange'a dla 6 węzłów



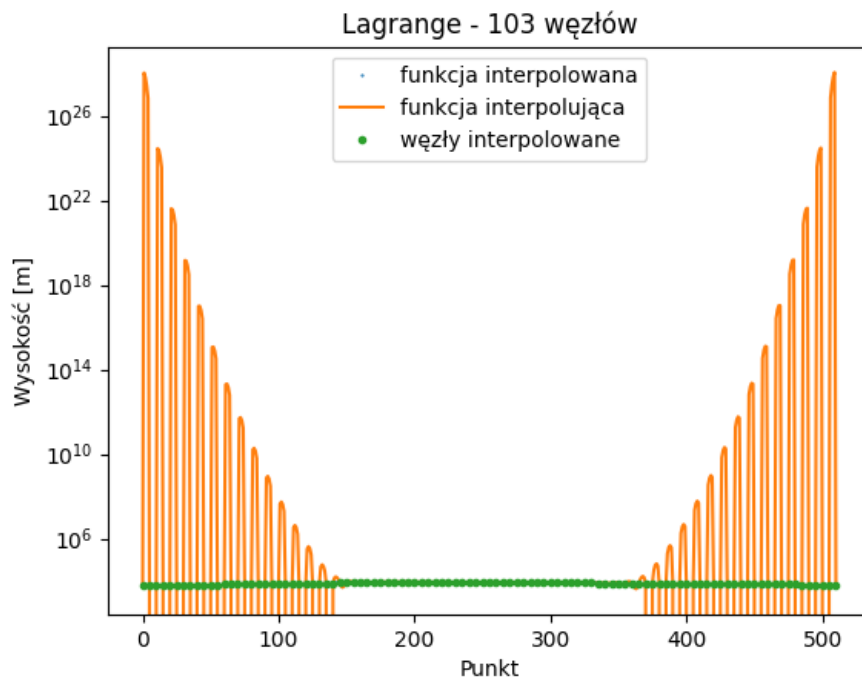
Rysunek 7: Mount Everest - Interpolacja Lagrange'a dla 11 węzłów



Rysunek 8: Mount Everest - Interpolacja Lagrange'a dla 35 węzłów



Rysunek 9: Mount Everest - Interpolacja Lagrange'a dla 52 węzłów

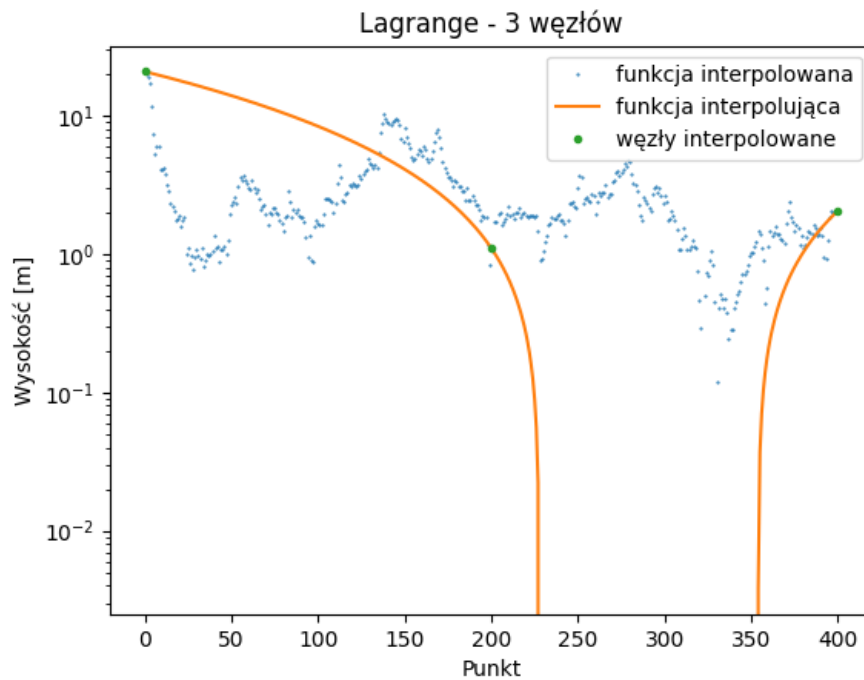


Rysunek 10: Mount Everest - Interpolacja Lagrange'a dla 103 węzłów

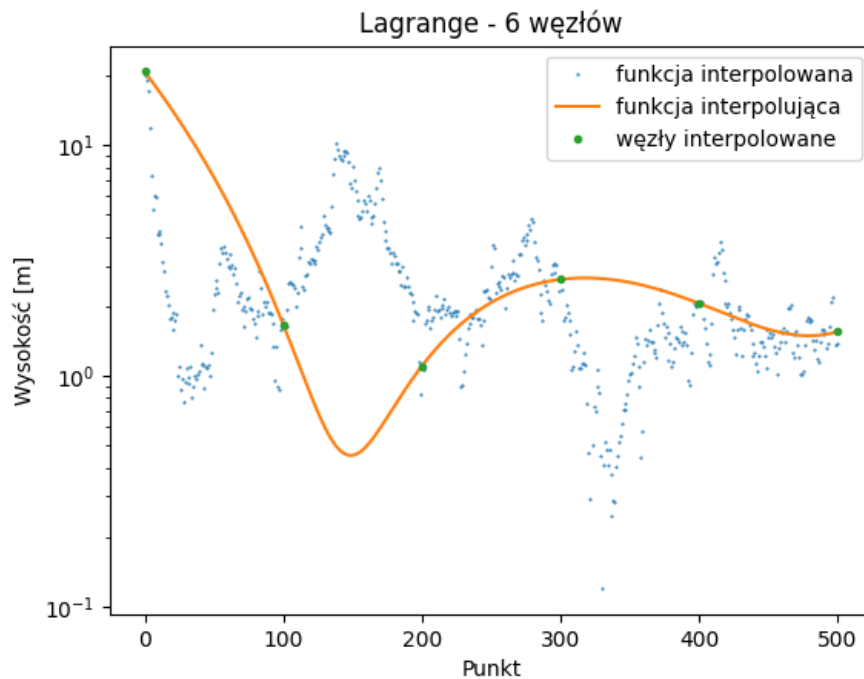
Z otrzymanych wyników można wywnioskować, że funkcja jest dobrze interpolowana w środku, natomiast wraz z wzrostem punktów interpolujących znacząco daje się zauważyć efekt Rungego.

Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki

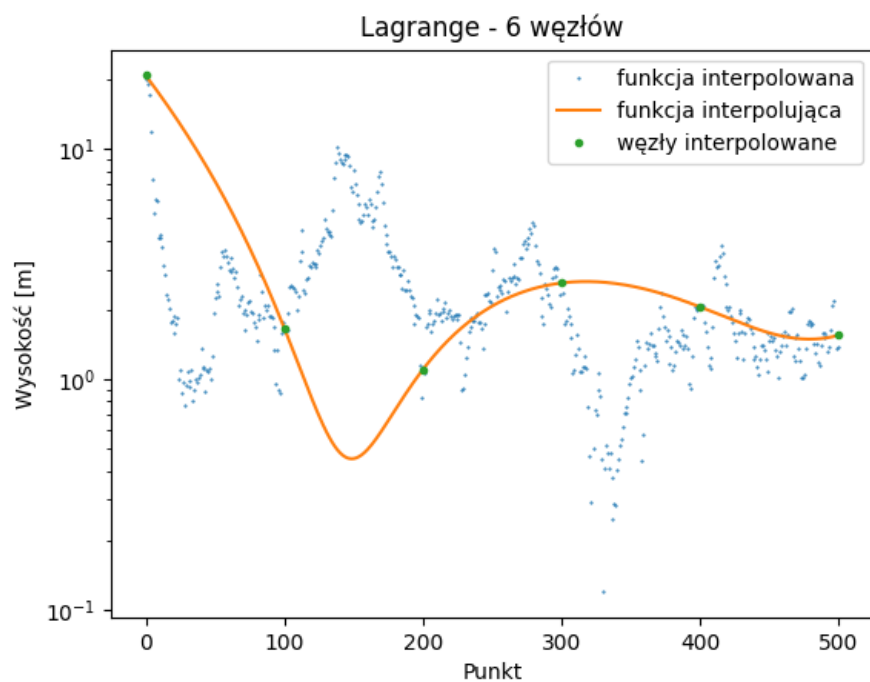
W celu zaprezentowania wpływu rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki posłużono się trasą przedstawiającą spaceriak w Gdańsku.



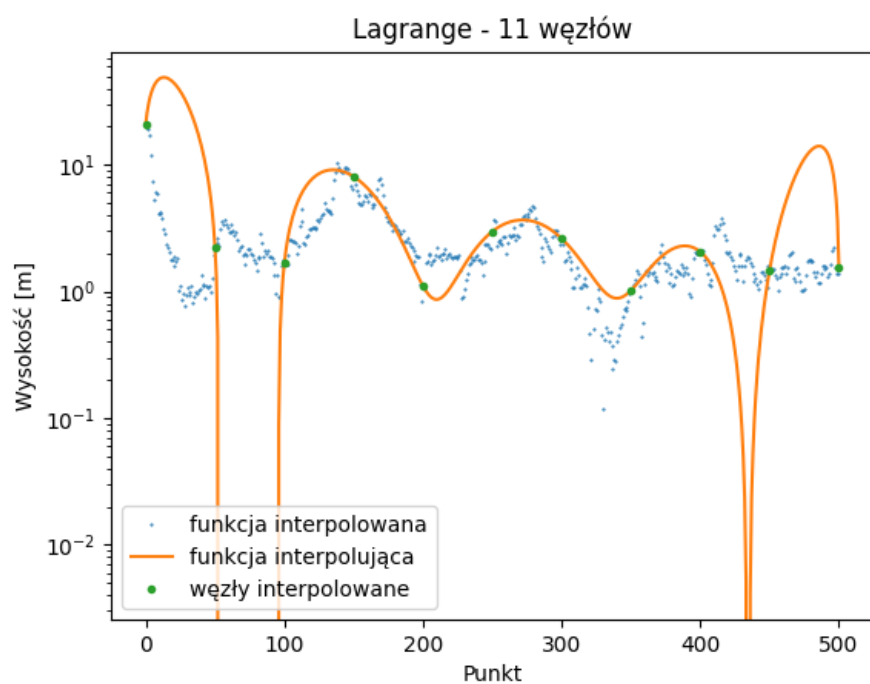
Rysunek 11: Spaceriak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 3 węzłów



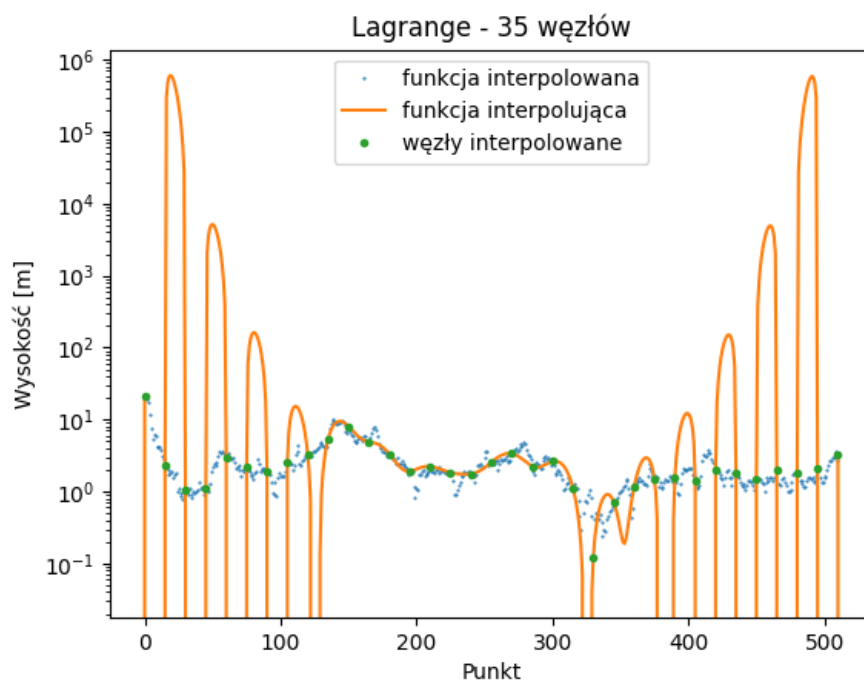
Rysunek 12: Spaceriak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 6 węzłów



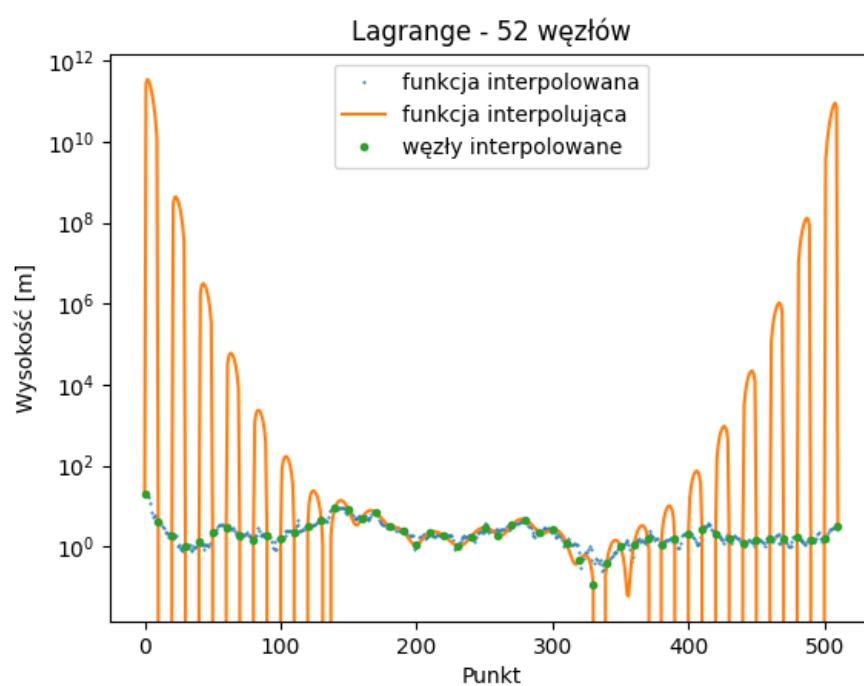
Rysunek 13: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 6 węzłów



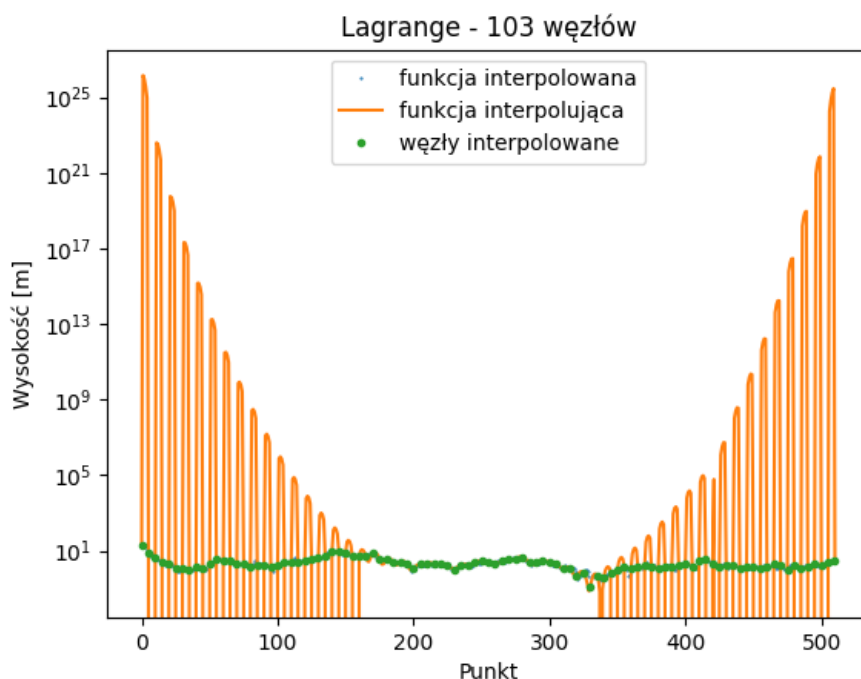
Rysunek 14: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 11 węzłów



Rysunek 15: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 35 węzłów



Rysunek 16: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 52 węzłów



Rysunek 17: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja Lagrange'a dla 103 węzłów

Z otrzymanych wyników można wyciągnąć wniosek że rozmieszczenie punktów ma znaczący wpływ na wynik, jak widać przy rzadkim rozmieszczeniu punktów pomijane są pewne zmiany wysokości co można zauważyć przy 6 węzłach dla metody Lagrange, gdzie pomijany jest ewidentny wzrost wysokości.

Wpływ charakteru trasy na wyniki

Na powyższych wykresach można zauważyć, że charakter terenu ma znaczący wpływ na wyniki, przy terenie gdzie nie ma częstej zmiany wysokości aproksymacja jest dokładniejsza (Mount Everest), niż w terenie gdzie na przemian występują wzniesienia i strome spadki (Spacerniak w Gdańsku), przez tak częste zmiany wysokości są one pomijane.

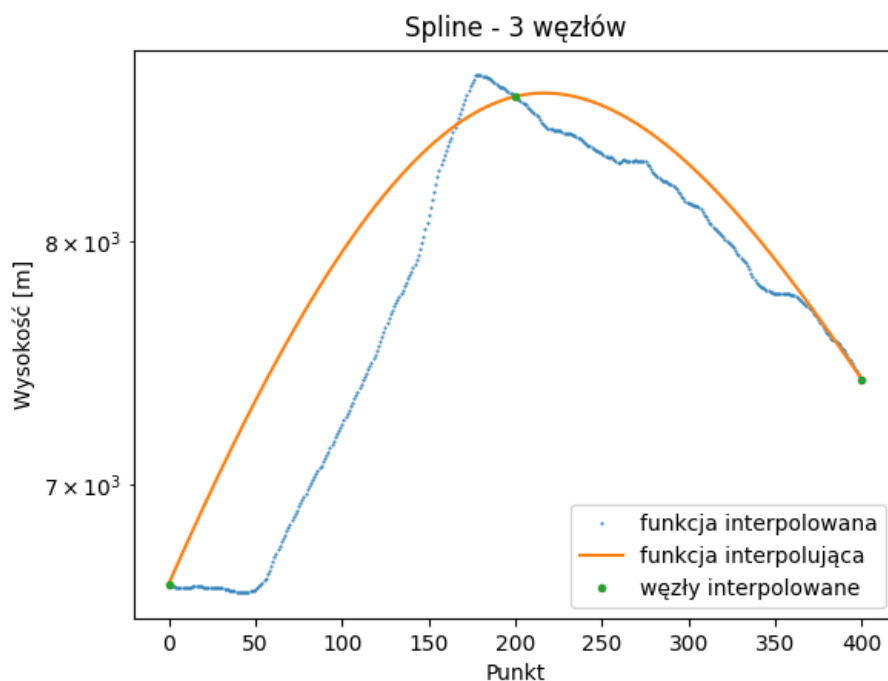
Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami)

Ze względu na to, że interpolacja globalna (Lagrange'a) jest ryzykowna i podatna na wystąpienie efektu Rungego stosuje się interpolację lokalną (występującą pomiędzy poszczególnymi węzłami) z użyciem wielomianu 3 stopnia. W tej metodzie stosuje się n przedziałów dla $n+1$ punktów, jednakże ta metoda jest bardziej złożona obliczeniowo ponieważ musimy dla każdego podprzedziału utworzyć funkcję co wiąże się z utworzeniem układu równań, w celu wyznaczenia współczynników funkcji dla każdego z podprzedziału.

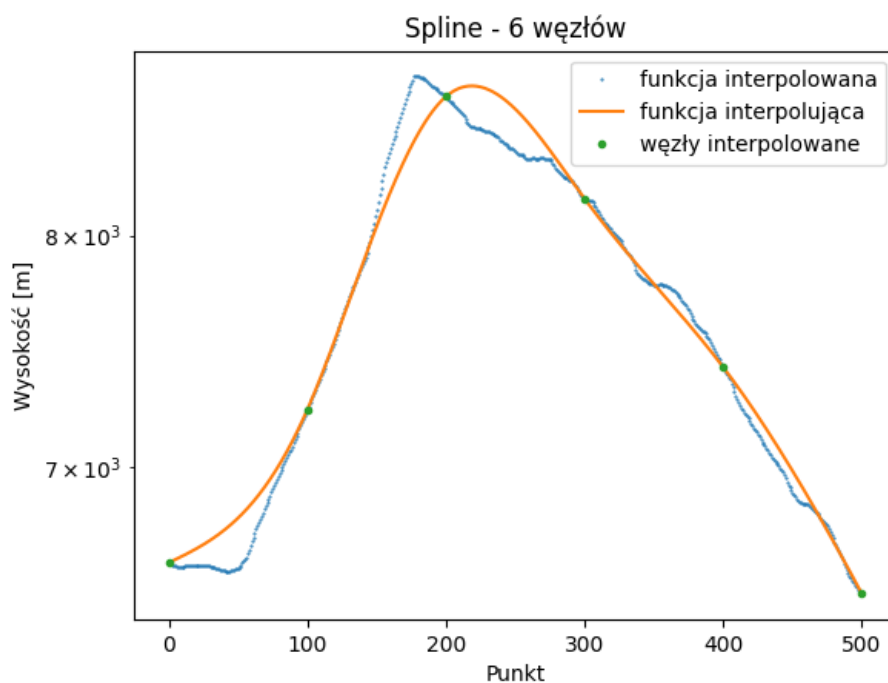
Wpływ liczby węzłów na wyniki

Podobnie jak w metodzie Lagrange'a wraz ze wzrostem liczby węzłów otrzymana aproksymacja jest dużo dokładniejsza, dodatkowo w interpolacji funkcjami sklejnymi nie występuje efekt Rungego.

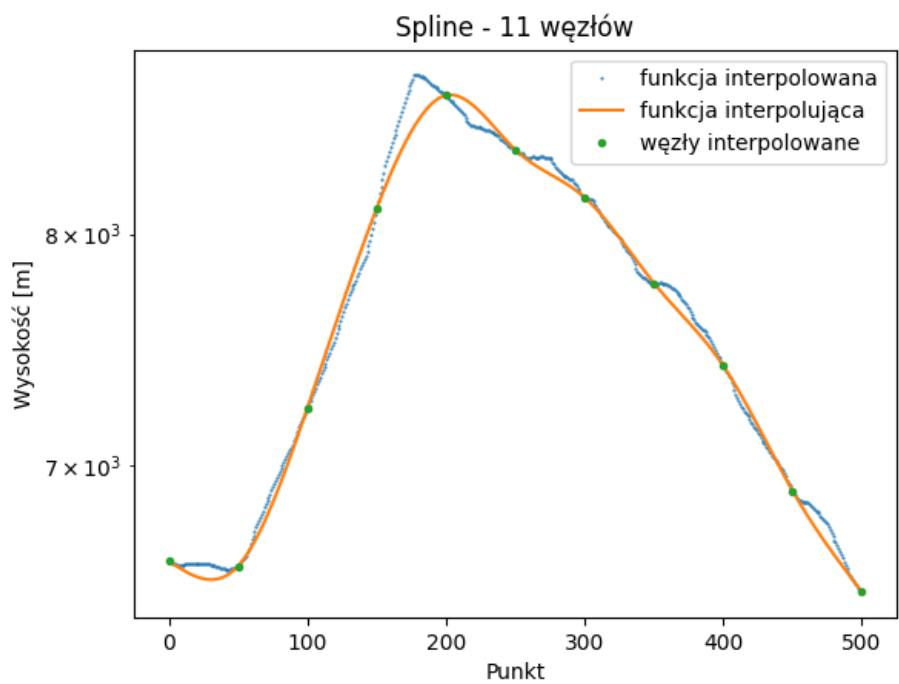
Przykład wpływu liczby węzłów na wyniki zaprezentowany na trasie Mount Everest:



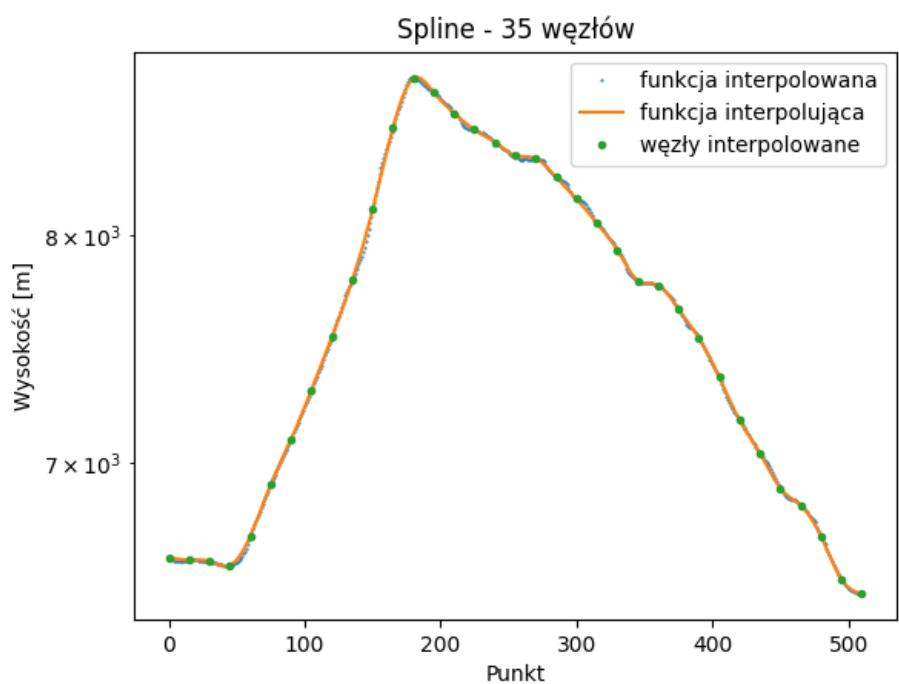
Rysunek 18: Mount Everest - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 3 węzłów



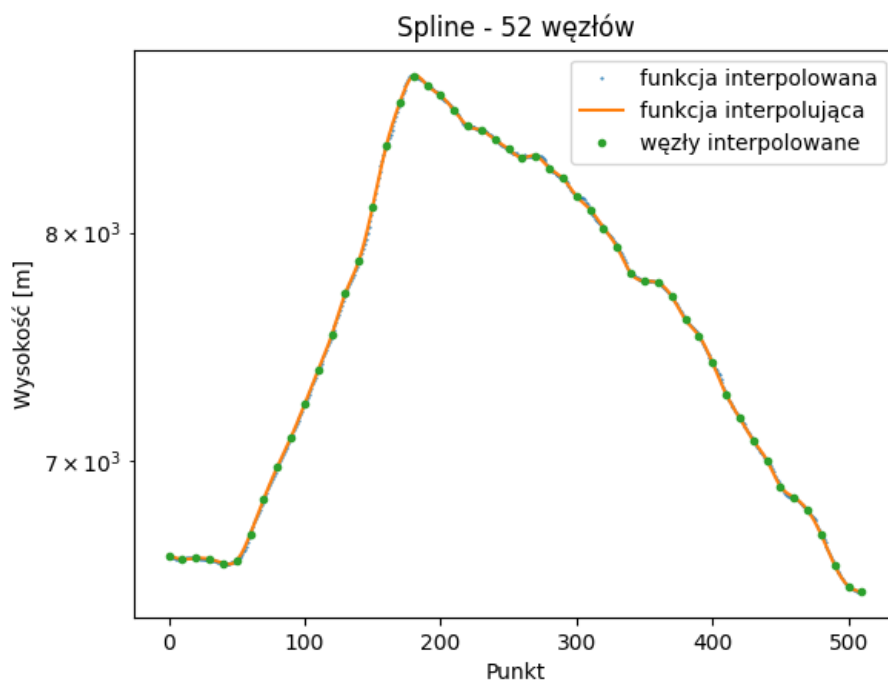
Rysunek 19: Mount Everest - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 6 węzłów



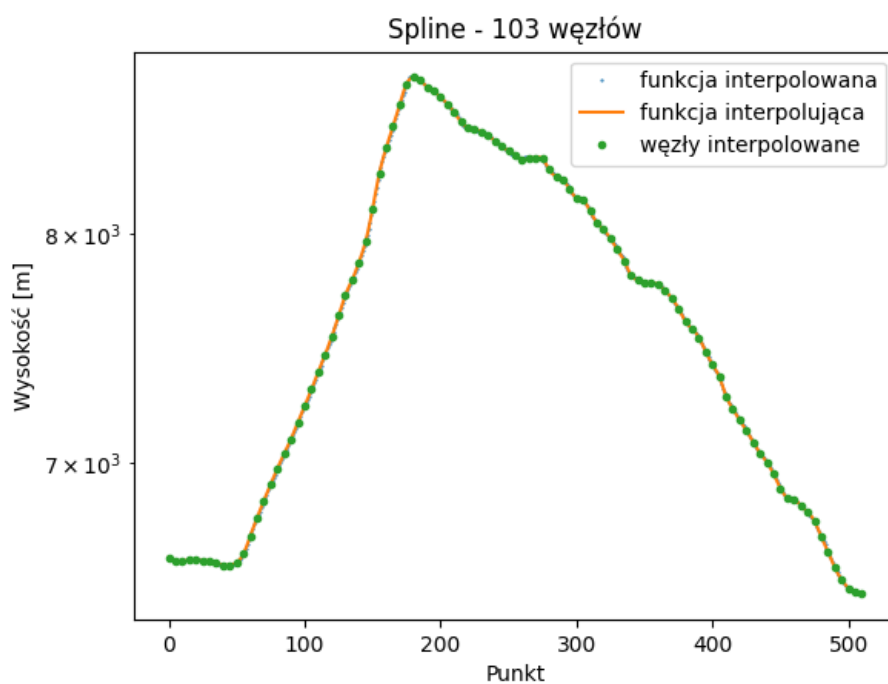
Rysunek 20: Mount Everest - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 11 węzłów



Rysunek 21: Mount Everest - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 35 węzłów



Rysunek 22: Mount Everest - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 52 węzłów

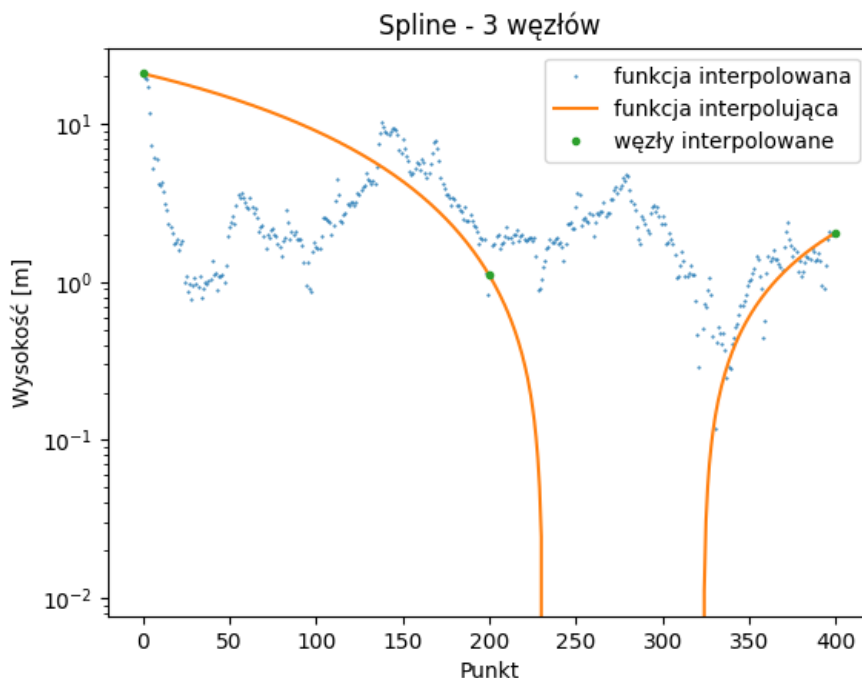


Rysunek 23: Mount Everest - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 103 węzłów

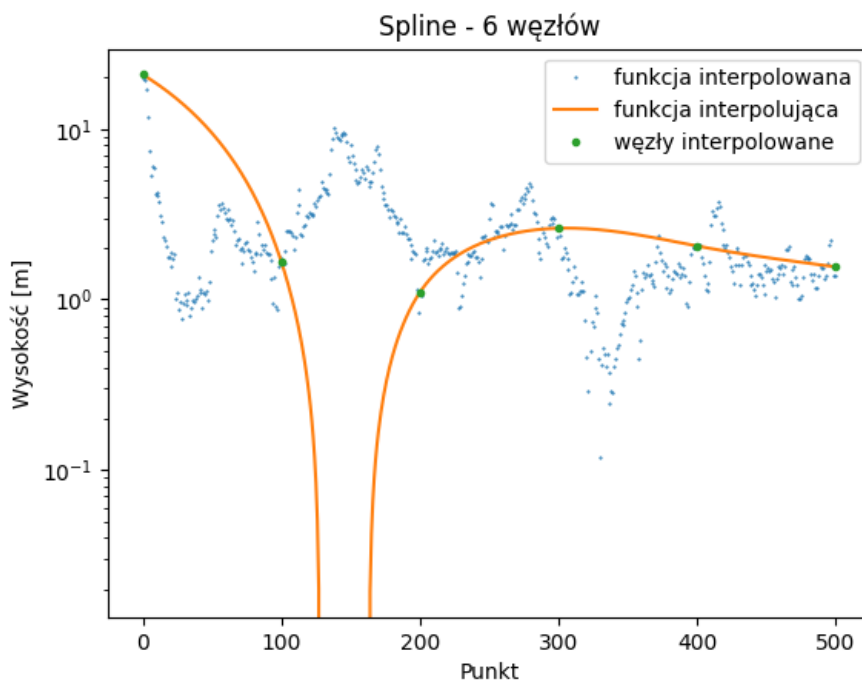
Jak można zauważyć wynik w przypadku interpolowania terenu Mount Everest jest już zadowalający przy interpolowaniu z wykorzystaniem 35 węzłów.

Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki

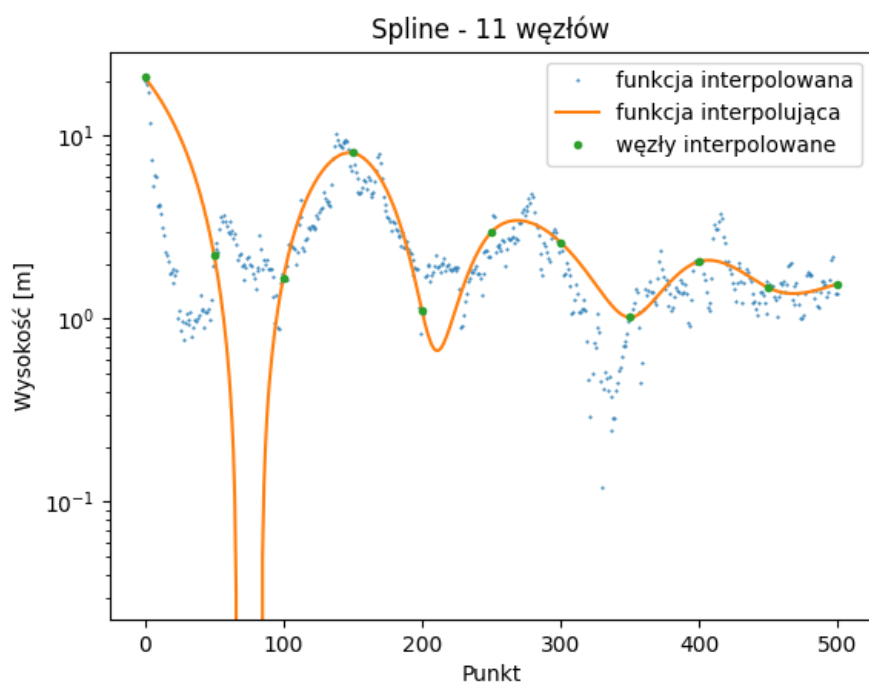
Rozmieszczenie punktów węzłowych w metodzie interpolacji funkcjami sklejanymi również jak to było w przypadku metodzie Lagrange'a ma istotny wpływ na otrzymany wynik, co można zauważyć na poniżej przedstawionym przykładzie.



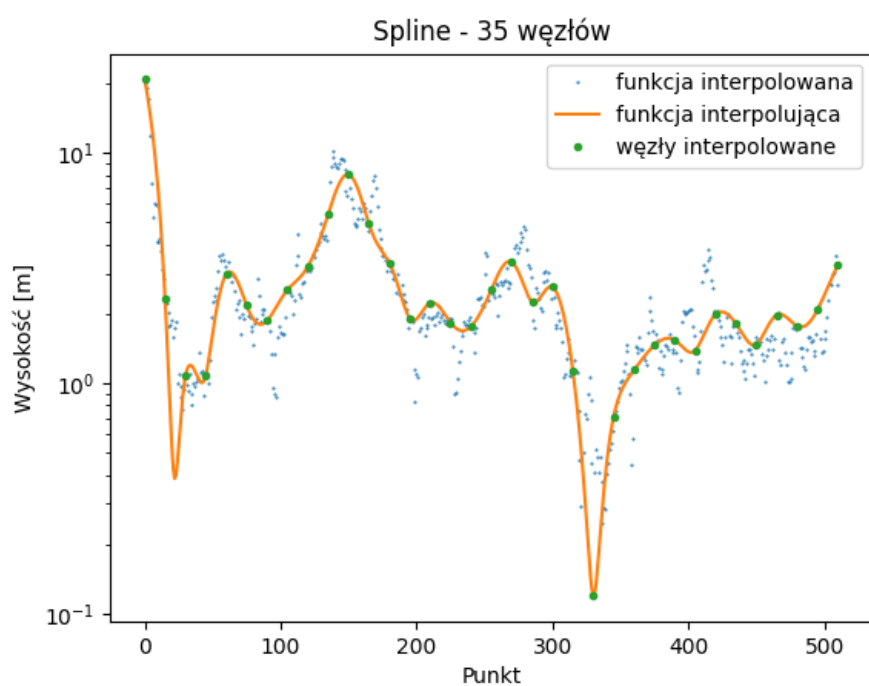
Rysunek 24: Spaceriak w Gdańsku - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 3 węzłów



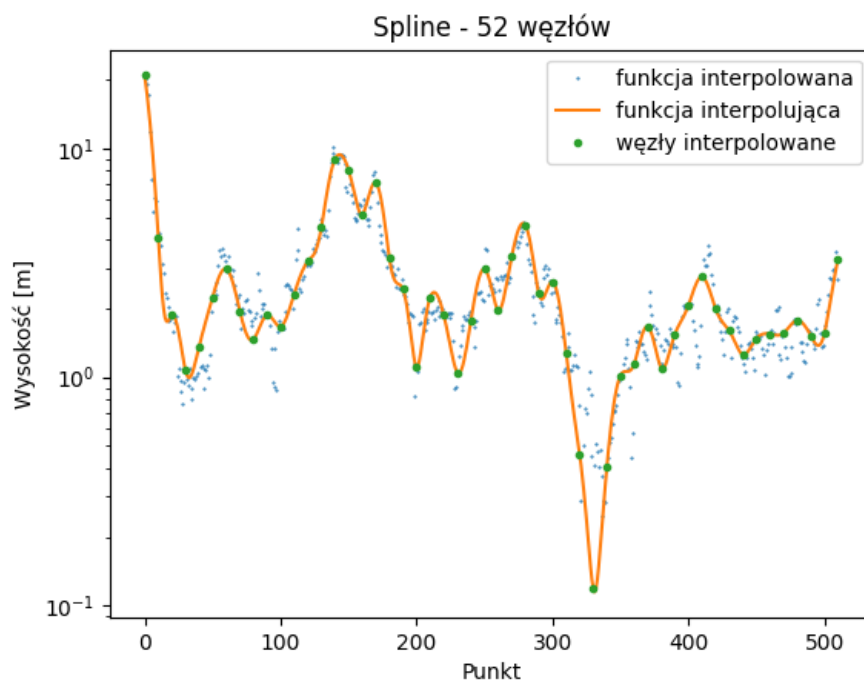
Rysunek 25: Spaceriak w Gdańsku - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 6 węzłów



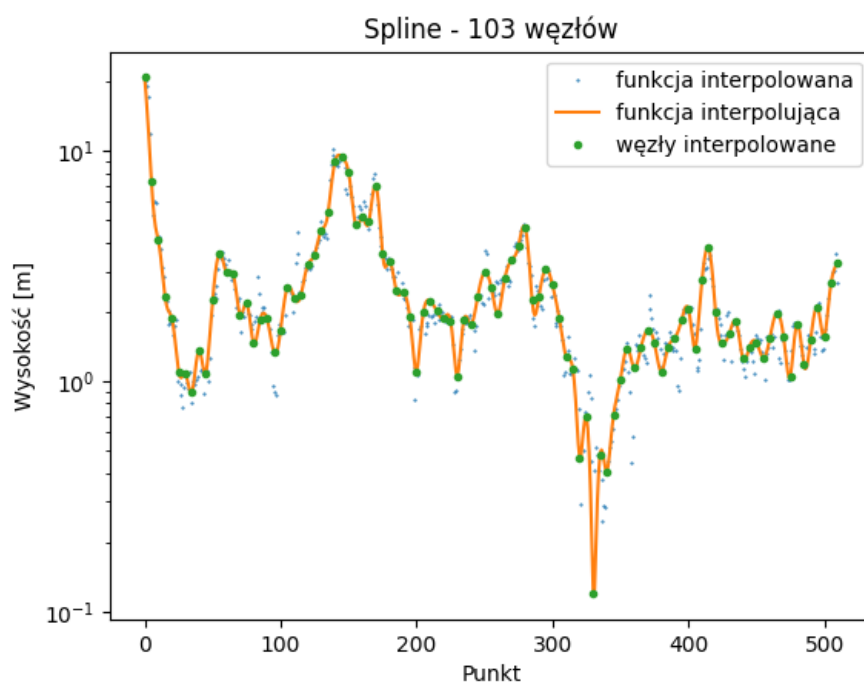
Rysunek 26: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja funkcjami sklejanyymi dla 11 węzłów



Rysunek 27: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja funkcjami sklejanyymi dla 35 węzłów



Rysunek 28: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja funkcjami sklejanyymi dla 52 węzłów

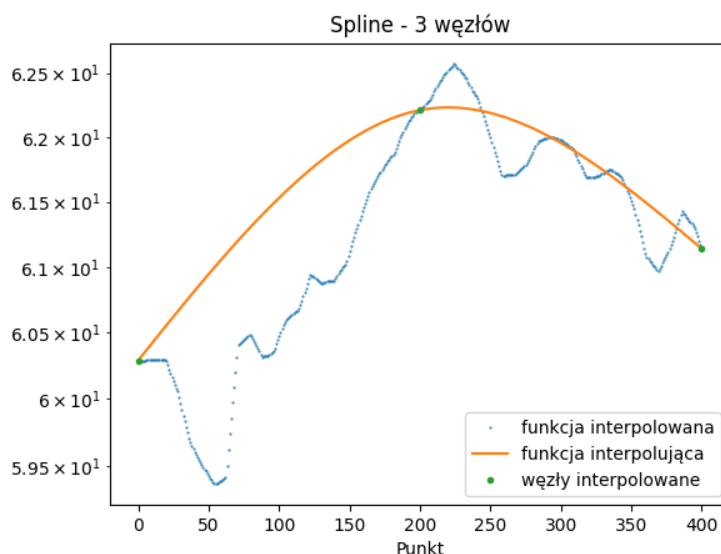


Rysunek 29: Spacerniak w Gdańsku - Interpolacja funkcjami sklejanyymi dla 103 węzłów

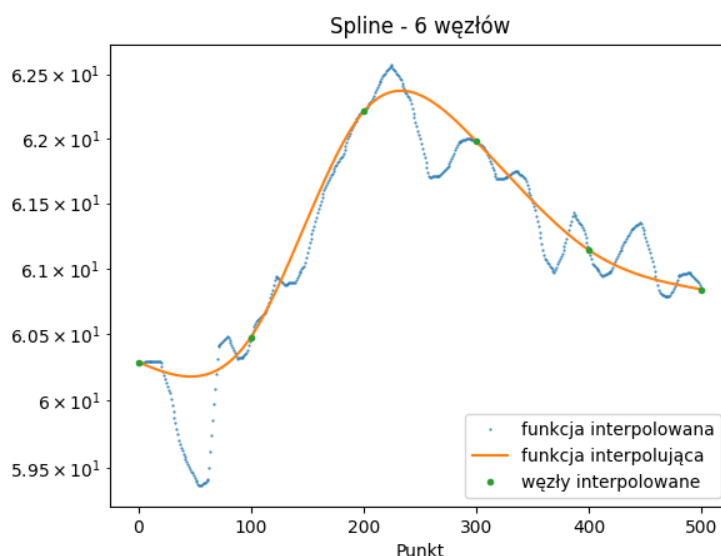
Przedstawione wykresy prezentują wpływ rozmieszczenia punktów na dokładność aproksymacji. Można zauważyć, że wraz ze wzrostem zagęszczenia punktów aproksymacja jest dokładniejsza.

Wpływ charakteru trasy na wyniki

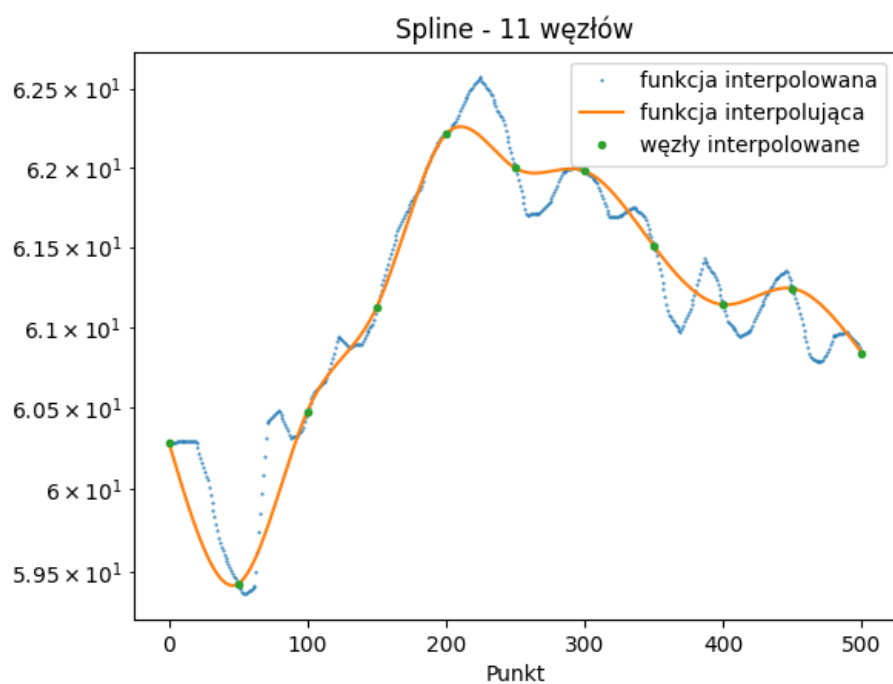
Podobnie jak to było w poprzedniej metodzie, charakter trasy ma wpływ na otrzymany wynik, ponieważ to czy trasa ma tendencje do licznej zmiany wysokości wiąże się z tym, że interpolacja będzie mniej dokładna, niż w przypadku trasy gdzie ta wysokość oscyluje na podobnych wartościach, bądź występuje na całej trasie tendencja wzrostu lub spadku. Prezentuje to przykład powyżej, gdzie na spacerunku w Gdańsku interpolacja dla 52 węzłów nie osiąga takiego rezultatu jak możemy zauważyć dla interpolowania terenu Mount Everest, bądź poniżej przedstawionego terenu Chełmu, w których to już interpolacja dla 35 węzłów daje zadowalający wynik.



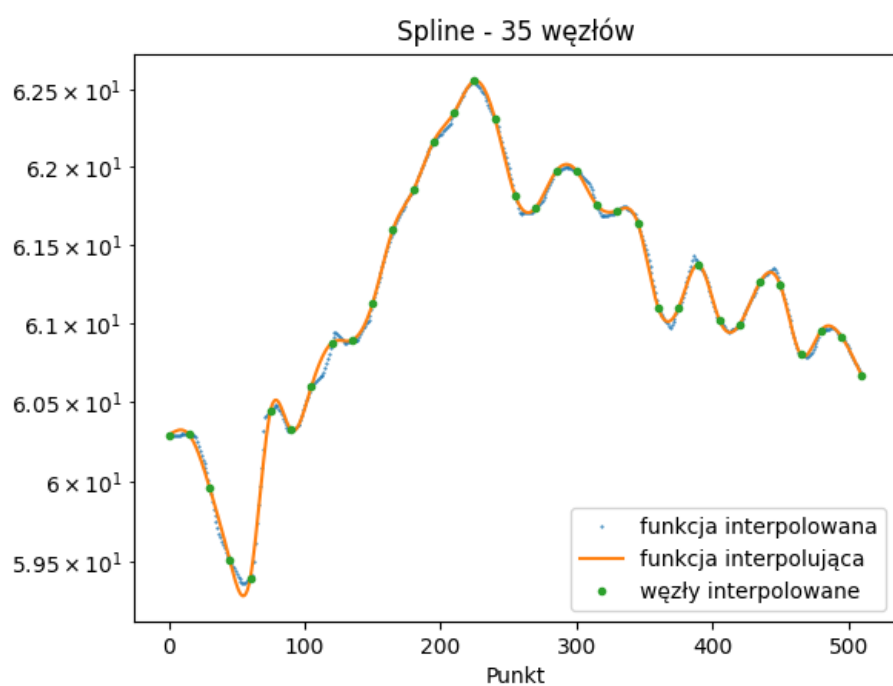
Rysunek 30: Chełm - Interpolacja funkcjami splejnymi dla 3 węzłów



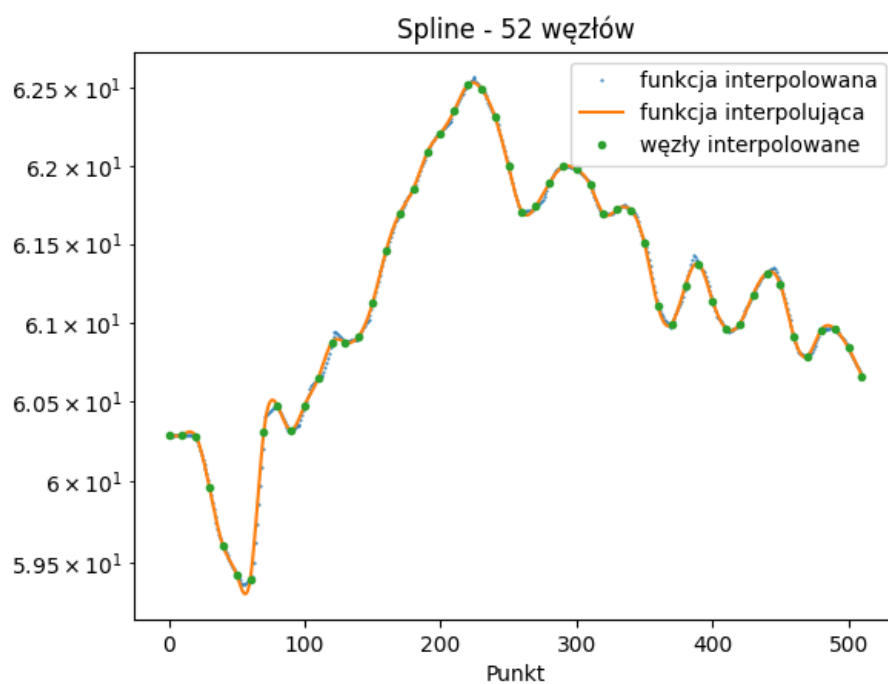
Rysunek 31: Chełm - Interpolacja funkcjami splejnymi dla 6 węzłów



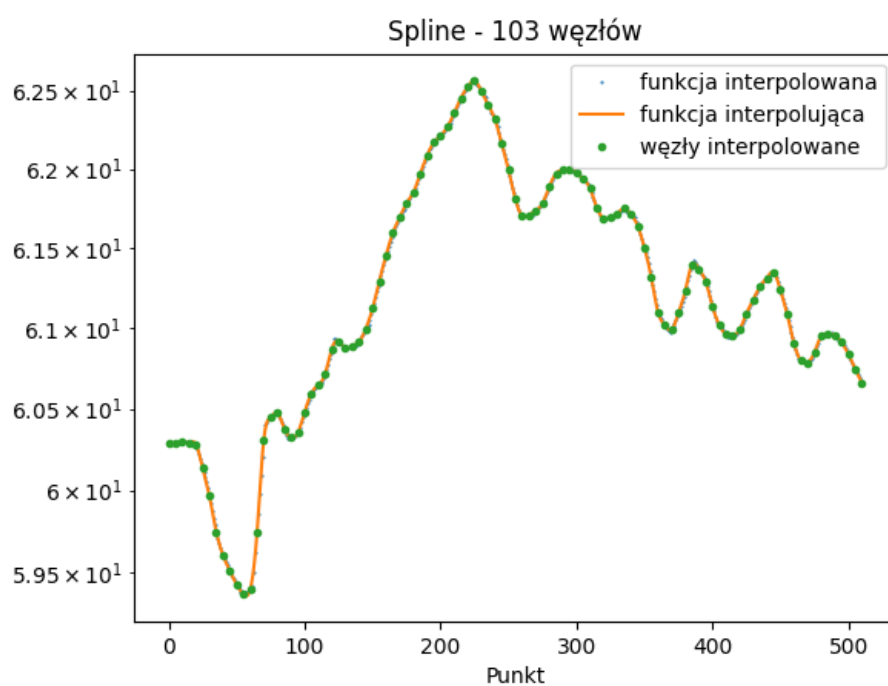
Rysunek 32: Chełm - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 11 węzłów



Rysunek 33: Chełm - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 35 węzłów



Rysunek 34: Chełm - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 52 węzłów



Rysunek 35: Chełm - Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 103 węzłów

Podsumowanie

Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki

Liczba punktów węzłowych ma znaczący wpływ na wyniki, w obu metodach wraz ze wzrostem liczby punktów zwiększa się dokładność aproksymacji (jednakże w przypadku metody Lagrange'a pojawia się problem Rungego).

Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki

Równomierne rozmieszczenie punktów węzłowych poprawia wynik.

Wpływ charakteru trasy na wyniki

Trasy, które charakteryzują się gwałtownymi zmianami tendencji wzrostu (wzniosy/spadki na przemian) potrzebują większej liczby punktów interpolowanych aby otrzymać dokładny wynik, natomiast trasy o stałej tendencji wzrostu/spadku, bądź trasy płaskie potrzebują mniej węzłów interpolujących w celu uzyskania zadowalającego wyniku.

Interpolacja funkcjami sklejonymi jest metodą kosztowniejszą obliczeniowo, natomiast daje zadowalające wyniki aproksymacji punktów dyskretnych. Nie występuje tam efekt Rungego, który jest widoczny w metodach globalnych interpolacji.