Układy równań liniowych

Metody Numeryczne - Projekt 2

Krystian Jandy, 184589 - Grupa 2

Marzec 2022

Wprowadzenie

Celem projektu z przedmiotu Metod Numerycznych jest implementacja metod rozwiązujących układy równań liniowych. W projekcie zostały zaimplementowane metody iteracyjne (metoda Jacobiego i Gaussa-Seidla), a także metoda bezpośrednia, mianowicie faktoryzacja LU.
Do realzacji zadania został użyty język Python, natomiast do wizualizacji skuteczności metod wykorzystano środowisko MATLAB.

Konstrukcja układu równań

[Zadanie A]

Skonstruowana macierz jest **macierzą pasmową** o wymiarach 989 x 989 (N = 989), gdzie:

- Na głównej diagonali znajduje się: a1 = 5 + 5 = 10
- Na sąsiednich diagonalach są elementy: a2 = -1
- Na skrajnych diagonalach występują elementy: a3 = -1

Skonstruowana macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Natomiast prawą stronę równania stanowi wektor b o długości N = 989, którego n-ty element ma wartość: $sin(n \cdot 5)$

Wektor b:

$$b = \begin{bmatrix} sin(0 \cdot 5)) \\ sin(1 \cdot 5) \\ sin(2 \cdot 5) \\ \vdots \\ sin(988 \cdot 5) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Skonstruowany układ równań liniowych ($Ax = b$), gdzie wektor x inicjalnie przyjmuje wartości 1 ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{988} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(0 \cdot 5)) \\ sin(1 \cdot 5) \\ sin(2 \cdot 5) \\ \vdots \\ sin(988 \cdot 5) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Do policzenia wartości normy została użyta norma 2:

$$||e||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} e_j^2} \tag{4}$$

Zadanie B

W celu realizacji zadania B zostały zaimplementowane metody iteracyjne: Jacobiego i Gaussa-Seidla, które zostały użyte do rozwiązania układu równań z podpunktu A. Warunkiem zakończenia powyższych metod jest to, aby norma z wektora residuum była mniejsza od wartości 10^{-9}

Wynik dla macierzy z zadania A		
Metoda	Czas trwania [s]	Liczba iteracji
Metoda Jacobiego	9.705	29
Metoda Gaussa-Seidla	7.022	19

Metoda Gaussa-Seidla jest metodą szybszą (około 28% szybsza) od metody Jacobiego oraz wymaga mniejszej liczby iteracji (około 35% iteracj mniej), ze względu na to, że wykorzystuje aktualnie dostępne przybliżone rozwiązania, co pozwala na zaoszczędzenie pamięci operacyjnej i zmniejszenie liczby obliczeń.

Zadanie C

Warunkiem poprawności działania metod iteracyjnych jest to, aby wektor przybliżonych rozwiązań w każdej następnej iteracji zbiegał się do rozwiązania dokładnego. Aby sprawdzić czy metody zbiegają się dodano dodatkowy warunek zakończenia metody, ograniczając z góry normę z wektora residuum przez wartość 10^9, po przekroczeniu tej wartości metoda jest zakańczana, gdyż norma z wektora residuum rośnie, co oznacza, że rozwiązanie przybliżone wraz z następną iteracją oddala się od rozwiązania dokładnego.

W celu realizacji zadania wektor b pozostał bez zmian, natomiast skonstruowano nową macierz, w której na głównej diagonali została umieszczona wartość 3.

Testowana macierz (989 x 989):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Wynik dla macierzy z zadania C			
Metoda	Czas trwania [s]	Liczba iteracji	Wartość normy z residuum
Metoda Jacobiego	NaN	X	$\geqslant 10^9$
Metoda Gaussa-Seidla	NaN	X	$\geqslant 10^9$

Metody iteracyjne dla podanej w zadaniu macierzy C **nie zbiegają się**, na co wskazuje zwiększająca się wraz z kolejną iteracją wartość normy z wektora residuum, gdzie dla iteracji 69 w metodzie Jacobiego oraz w 29 iteracji w metodzie Gaussa-Seidla osiągnęła ona wartość powyżej 10^9.

Zadanie D

Aby zrealizować zadanie została zaimplementowana metoda bezpośrednia rozwiązania układów równań (faktoryzacja LU), której działanie zostało przetestowane na macierzy z zadania C.

Wynik dla macierzy z zadania C		
Metoda	Czas trwania [s]	Wartość normy z residuum
Faktoryzacja LU	61.54	$2.48 \cdot 10^{-15}$

Czas trwania faktoryzacji LU jest znacznie dłuższy od czasu trwania metod iteracyjnych, jednakże metoda ta pozwala na obliczenie przybliżonego rozwiązania, które jest bliskie dokładnemu rozwiązaniu (na co wskazuje bardzo mała wartość normy z wektora residuum), czego nie dało się osiągnąć w przypadku zastosowania metod iteracyjnych, gdzie wartości kolejnych przybliżeń dla zastosowanych metod nie zbiegały się.

Zadanie E

Realizacja zadania polegała na stworzeniu wykresu zależności czasu trwania poszczególnych metod rozwiązujących układy równań od liczby niewiadomych dla N = [100, 500, 1000, 2000, 3000] dla macierzy utworzonej w zadaniu A.

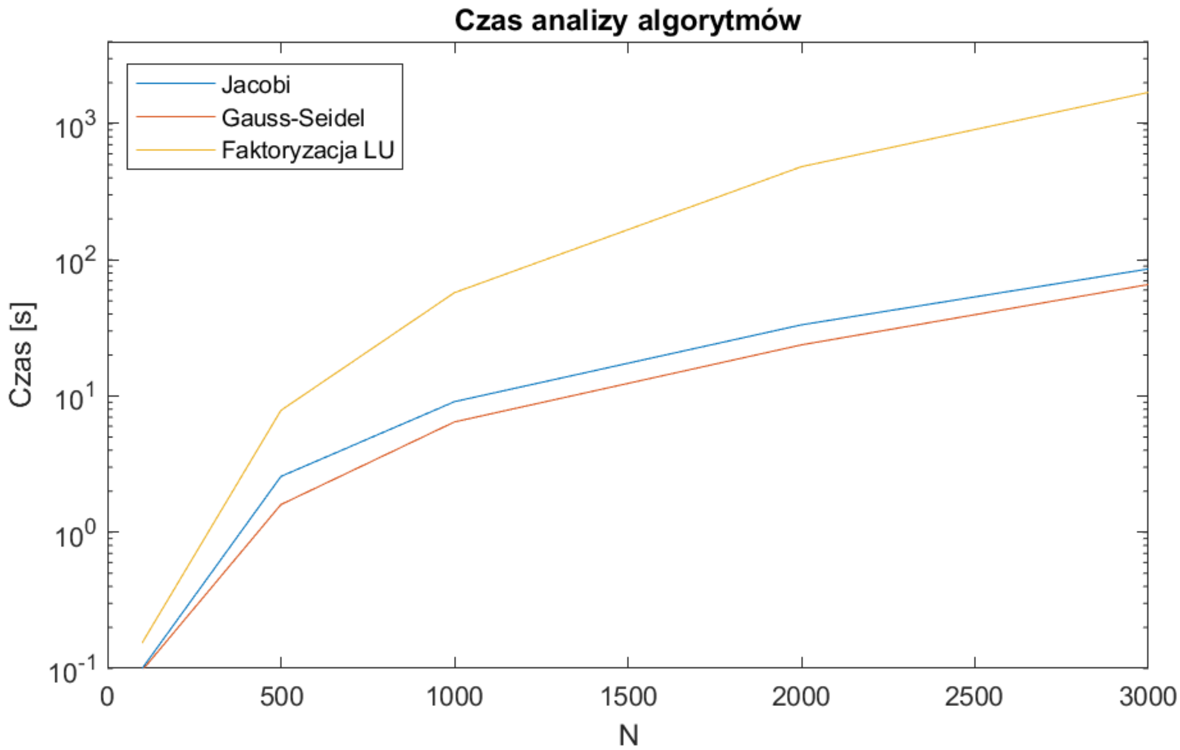
Wynik dla macierzy z zadania A [N = 100]		
Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Faktoryzacja LU	0.15	X
Metoda Jacobiego	0.1	27
Metoda Gaussa-Seidla	0.09	18

Wynik dla macierzy z zadania A [N = 500]		
Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Faktoryzacja LU	7.84	X
Metoda Jacobiego	2.57	28
Metoda Gaussa-Seidla	1.6	19

Wynik dla macierzy z zadania A [N = 1000]		
Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Faktoryzacja LU	57.4	X
Metoda Jacobiego	9.09	29
Metoda Gaussa-Seidla	6.45	19

Wynik dla macierzy z zadania A [N = 2000]		
Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Faktoryzacja LU	483.02	X
Metoda Jacobiego	33.31	29
Metoda Gaussa-Seidla	23.75	19

Wynik dla macierzy z zadania A [N = 3000]		
Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Faktoryzacja LU	1696.49	X
Metoda Jacobiego	85.75	29
Metoda Gaussa-Seidla	65.9	20



Rysunek 1: Porównanie czasów wykonania algorytmów dla zaimplementowanych metod rozwiązujących układ równań liniowych

Z wykresu można odczytać, że czas rozwiązania układów rownań przez metody iteracyjne jest dużo krótszy niż w przypadku metody faktoryzacji LU, trend wzrostu dla obu metod iteracyjnych jest podobny. Jak widać wraz ze wzrostem liczby niewiadomych dla wszystkich metod czas rośnie znacząco.

Wnioski

Metoda faktoryzacji LU, będąca jedną z wariantów metody eliminacji Gaussa jest stosowana, gdy układ równań musi być rozwiązany dla wielu prawych stron (wektor b) przy czym lewa strona równania (macierz A) pozostaje bez zmian, pomimo dłuższego czasu obliczenia wartości wynikowych gwarantuje ona uzyskanie wyniku, co dla niektórych wartości macierzy A może być niemożliwe w przypadku zastosowania metod iteracyjnych, gdyż warunkiem jest zbieganie się wektora z rozwiązaniami przybliżonymi do wektora z rozwiązaniami dokładnymi. Jednakże metody iteracyjne są dużo szybsze niż metody bezpośrednie, dlatego w sytuacji, gdy algorytmy nie zbiegają się, można poprawić zbieżność, poprzez dobranie odpowiednich parametrów.