Odwrotność macierzy

Macierz odwrotna jest określona tylko dla macierzy kwadratowych, których wyznacznik jest niezerowy. Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy kwadratowej *A* to macierz spełniająca równanie $A^{-1} A = A A^{-1} = I$, gdzie I to macierz jednostkowa.

Jeśli macierz A^{-1} istnieje to macierz A nazywamy *odwracalną*, a jeśli macierz A^{-1} nie istnieje to macierz A^{-1} nazywamy *nieodwracalną.* Jeśli macierz *A* jest odwracalna to istnieje tylko jedna macierz odwrotna A^{-1}

Własności macierzy odwrotnej:

- macierzą odwrotną do macierzy jednostkowej jest ta sama macierz tzn. $I^{-1} = I$
- $(\mathrm{diag}(\mathrm{a11}, \mathrm{a12}, \ldots, \mathrm{anm}))^{-1} = \mathrm{diag}((\mathrm{a11})^{-1}, (\mathrm{a12})^{-1}, \ldots \mathrm{anm})^{-1})$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$
- $(\mathrm{c}A)^{-1} = c^{-1} * (A)^{-1}$, gdzie **c**- stała
- $(AB)^{-1} = (B)^{-1} * (A)^{-1}$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy symetrycznej jest symetryczna,
- macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy trójkątnej jest trójkątna.

Nie można obliczyć macierzy odwrotnej z macierzy osobliwej, czyli takiej której wyznacznik jest równy zero

Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A (ozn. A^{-1}) to taka macierz, że

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$$

gdzie ***I*** to macierz jednostkowa takiego samego stopnia jak macierz A.

Przykład obliczania macierzy odwrotnej 2x2

Przykład 1:

Aby obliczyć macierz odwrotną z macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

zawsze najpierw obliczamy wyznacznik, więc:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$$

wyznacznik jest różny od zera więc już wiemy, że można obliczyć naszą macierz odwrotną, następnie przystępujemy do obliczania macierzy dopełnień algebraicznych A^D:

$$A^D = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot a_{22} & (-1)^{1+2} \cdot a_{21} \\ (-1)^{2+1} \cdot a_{12} & (-1)^{2+2} \cdot a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 & -5 \\ -1 & +2 \end{bmatrix}$$

gdzie $(-1)^{i+j}$ w wyrażeniu oznacza to numer wiersza i i kolumny j,
następnie transponujemy macierz $(A^D)^T$:

$$(A^D)^T = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot a_{22} & (-1)^{1+2} \cdot a_{21} \\ (-1)^{2+1} \cdot a_{12} & (-1)^{2+2} \cdot a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

na koniec aby obliczuć macierz odwrotną trzeba podzielić każdy z wyrazów macierzy dołączonej przez wartość wyznacznika macierzy:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{1+1} \cdot a_{22}}{det(A)} & \frac{(-1)^{1+2} \cdot a_{21}}{det(A)} \\ \\ \frac{(-1)^{2+1} \cdot a_{12}}{det(A)} & \frac{(-1)^{2+2} \cdot a_{11}}{det(A)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{1} & \frac{-1}{1} \\ \\ \frac{-5}{1} & \frac{2}{1} \end{bmatrix}$$

i tak dokładnie wygląda wzór na macierz odwrotna 2x2, a nasza szukana macierz odwrotna wynosi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Przykład obliczania macierzy odwrotnej 3x3

Mając macierz A taką że:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotną można obliczyć w nastepujący sposób:

jeżeli $detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \neq 0$ to macierz odwrotna ma postać:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

NumPy w swojej bibliotece posiada odpowiednio zaimplementowaną funkcję na obliczanie odwrotności macierzy -> **np.linalg.inv()**

```python
import numpy as np

# Taking a 4 * 4 matrix
A = np.array([[6, 1, 1, 3],
              [4, -2, 5, 1],
              [2, 8, 7, 6],
              [3, 1, 9, 7]])

# Calculating the inverse of the matrix
print(np.linalg.inv(A))
```

```
[[ 0.13368984  0.10695187  0.02139037 -0.09090909]
 [-0.00229183  0.02673797  0.14820474 -0.12987013]
 [-0.12987013  0.18181818  0.06493506 -0.02597403]
 [ 0.11000764 -0.28342246 -0.11382735  0.23376623]]
```

Zadania do wykonania

Zadanie 1

Posiadając poniższą macierz 2x2 napisz funkcję aby wyznaczyć do niej macierz odwrotną. Wynik porównaj z funkcją, którą posiada biblioteka NumPy.

a) $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$

Zadanie 2

Posiadając poniższą macierz 3x3 napisz funkcję aby wyznaczyć do niej macierz odwrotną. Wynik porównaj z funkcją, którą posiada biblioteka NumPy.

a) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Wskazówka:

Przekształć wzór :

$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$

Zadanie 3

Posiadając napisane funkcję powyżej stwórz jedną funkcję, która będzie obliczała odwrotność macierzy zarówno 2x2 jak i 3x3. Sprawdź poprawność działania wykorzystując przykłady macierzy z zadań 1a,1b,2a,2b.