Rząd macierzy

Rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) tej macierzy.

Teoria

Macierz *A* jest rzędu *r*, jeżeli istnieje chociaż jeden różny od zera wyznacznik stopnia *r* utworzony z elementów tej macierzy (przy czym elementy bierze się w tej kolejności, w jakiej są one rozmieszczone w danej macierzy), a wszystkie wyznaczniki tej macierzy stopnia wyższego niż *r* mają wartość zero.

Kiedy wektory są od siebie liniowo zależne?

Dwa wektory nazwiemy liniowo zależnymi, gdy istnieje taka liczba, że po przemnożeniu przez tą liczbę jednego z wektorów są one równe.

Przykłady dwóch wektorów zależnych to:

$\vec{x}=[1,3,5]$ i $\vec{y}=[2,6,10]$, bo wektor $\vec{y}$ to wektor $\vec{x}$ przemnożony przez 2.

Dwa wektory są **liniowo niezależne**, jeżeli NIE istnieją takie stałe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ (z których co najmniej jedna jest różna od zera), że:

$$\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + \alpha_3 \overrightarrow{x_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{x_n} = \vec{0}$$

Obliczanie linowej zależności wektorów

Jeśli wektory poukładamy wierszami (lub kolumnami – nie ma to w tym przypadku znaczenia) otrzymamy macierz.

Obliczanie z definicji liniowej zależności pomiędzy wektorami jest długie i pracochłonne, natomiast takie same rezultaty dostaniemy obliczając rząd macierzy. Jeżeli rząd macierzy 4x4 po obliczeniu równy był by 3, oznacza to, że w podanych wektorach są tylko 3 liniowo niezależne od siebie, czyli ta czwórka jako całość jest liniowo zależna.

Jak obliczyć rząd macierzy?

W celu obliczenia rzędu macierzy musimy obliczyć jej wyznacznik.

Dla przykładu mając macierz 4x4 i chcąc obliczyć jej rząd, najpierw musimy obliczyć jej wyznacznik i teraz:

- jeśli wynikiem jest liczba inna niż zero to kończymy - rząd takiej macierzy wynosi 4 (bo wyznacznik macierzy 4x4 jest różny od zera)
- jeśli wyjdzie nam zero to wybieramy po kolei wszystkie macierze 3x3 (wykreślając którąś kolumnę i wiersz) i liczymy ich wyznacznik
- jeśli wynikiem jest liczba inna niż zero to kończymy - rząd takiej macierzy wynosi 3 (bo wyznacznik macierzy 3x3 jest różny od zera)
- jeśli wyjdzie nam zero to wybieramy po kolei wszystkie macierze 2x2 (wykreślając którąś kolumnę i wiersz) i liczymy ich wyznacznik
- jeśli wynikiem jest liczba inna niż zero to kończymy - rząd takiej macierzy wynosi 2 (bo wyznacznik macierzy 2x2 jest różny od zera)
- jeśli wyjdzie nam zero to wybieramy po kolei wszystkie macierze 1x1 czyli szukamy czy którakolwiek liczba w naszej macierzy jest inna niż zera
  - jeśli którakolwiek z liczb jest inna niż zero to rząd macierzy wynosi
  - jeśli wszystkie liczby w naszej macierzy są zerami to rząd naszej macierzy wynosi 0

sposób postępowania :

https://www.naukowiec.org/wiedza/matematyka/rzad-macierzy_611.html

W jaki sposób obliczyć wyznacznik macierzy 4x4?

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} + a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} + a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43} - a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} - a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}) +$$

$$-a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} + a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} + a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43} - a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} - a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} - a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44}) +$$

$$+a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} + a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41} + a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{42} - a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41} - a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} - a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44}) +$$

$$-a_{14} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} + a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} + a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41} - a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{42} - a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{43})$$

Co można zapisać w również w sposób:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} +$$

$$+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} +$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} +$$

$$+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} +$$

$$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} +$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} +$$

$$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} +$$

$$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

Zadania do wykonania

Zadanie 1

Oblicz rząd poniższych macierzy:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 10 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 20 & 0 & -10 \\ -3 & -12 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$