Politechnika Warszawska
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Aerodynamiki

Symulacja przepływu w obszarach o geometrii zmiennej w czasie

Autor:
Krystian Plackowski

Praca wykonana pod przewodnictwem:
prof. Jacek Rokicki

7 października 2017

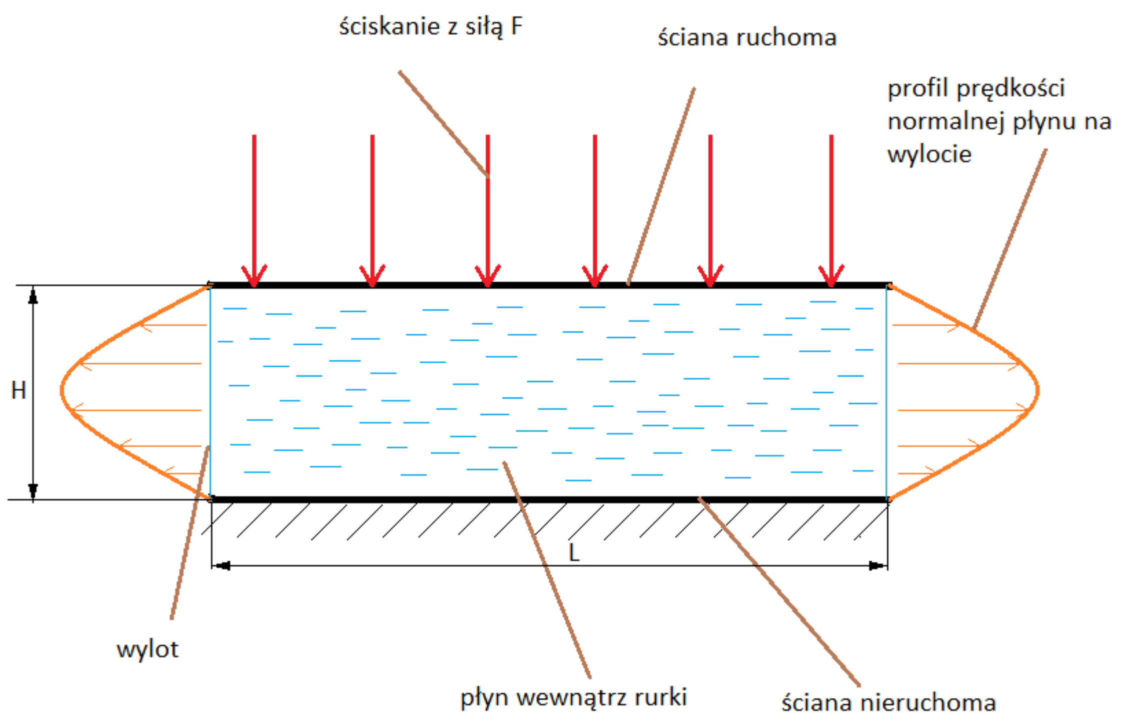
Spis treści

1 Sformuowanie problemu.

Rozważamy przepływ 2-wymiarowy. Woda początkowo w stanie niezaburzonym, przy zaniedbaniu siły grawitacji wypełnia prostokątną rurkę o wymiarach początkowych: długość L, wysokość H_0. Boki górny i dolny prostokąta są ściankami, boki prawy i lewy są wylotami (woda przez nie swobodnie wypływa).

Dolna ścianka jest nieruchoma, górna ścianka porusza się z taką prędkością, że wymiar wysokości rurki zmienia się w czasie zgodnie z funkcją $H(t)$, gdzie $H(0) = H_0$.
Zastanawiamy się, co stanie się z wodą w rurce po rozpoczęciu ruchu górnej ścianki. Zakładamy, że jesteśmy w stanie zaprojektować urządzenia wystrzykujące wodę (znajdujące się na wylocie, woda pobrana z rurki), które pozwolą nam uzyskać dokładnie takie profile prędkości stycznej i normalnej na wylotach, jakie chcemy.

Interesuje nas rozkład ciśnienia wewnątrz rurki, zwłaszcza odpowiedź na pytania:
1) Czy profil ciśnienia w przekroju poprzecznym przy wylocie jest stały?
2) Jaki jest przebieg w czasie siły $F(t)$ wymaganej do ściśnięcia rurki od wysokości H_0 do wysokości $H(t)$?



Rysunek 1: rysunek poglądowy

2 Wyprowadzenie równań.

Podejście $\psi - \omega$ do rozwiązania nieściśliwego równania Naviera-Stokesa w 2D:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \nabla \times \vec{f} \tag{1}$$

$$\Delta \psi = -\omega \tag{2}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{3}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$

ψ - funkcja prądu, ω - pole wirowości, u i v to składowe pola prędkości, $\vec{f} = [f_1, f_2]$ to pole sił objętościowych, $\nabla \times \vec{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$

Aby uniknąć operowania na siatce zmiennej w czasie, stosujemy transformację zmiennego w czasie układu współrzędnych do układu stałego.
Niech $(x, y) \in (0, L) \times (0, H(t))$ oznacza układ wyjściowy, a $(\xi, \eta) \in (0, 1) \times (0, 1)$ układ transformowany:

$$x = L \cdot \xi \tag{5}$$

$$y = H \cdot \eta \tag{6}$$

L oznacza długość rurki, H wysokość rurki (wartość zmienna w czasie)

W celu uzyskania równań transportu w układzie (ξ, η) należy pola $\psi(x, y), \omega(x, y), u(x, y), v(x, y)$ w równaniach (1) (2) (3) (4) zamienić do postaci $\psi(\xi, \eta), \omega(\xi, \eta), u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)$.

Zauważmy, że w przypadku pochodnych cząstkowych po x i y przekształcenie jest trywialne:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(L\xi, H\eta)}{\partial (L\xi)} = \frac{1}{L}\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} \tag{7}$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(L\xi, H\eta)}{\partial (H\eta)} = \frac{1}{H}\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta} \tag{8}$$

Także:

$$F(x, y) = F(L\xi, H\eta) = F(\xi, \eta) \tag{9}$$

Inaczej ma się sprawa pochodnej cząstkowej po t (czasie), mianowicie dla L i H zależnych od czasu:

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(L\xi, H\eta, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial F(\xi, \eta, t)}{\partial t} \tag{10}$$

Wynika to ze ścisłej definicji pochodnej cząstkowej - przy różniczkowaniu względem danej zmiennej ignorujemy fakt, że pozostałe zmienne mogą być funkcjami tej zmiennej.

Inna jest natomiast definicja pochodnej substancjalnej - bierze ona pod uwagę fakt, że pod wpływem zmiany czasu wartości zmiennych x i y we wzorze funkcji mogą ulec zmianie (zmienne te mogą być funkcjami $x(t)$ i $y(t)$). Z tego faktu wolno napisać równość:

$$\frac{DF(\xi,\eta,t)}{Dt} = \frac{DF(L\xi,H\eta,t)}{Dt} \tag{11}$$

Uwaga: punkt o współrzędnych (x,y) traktujemy **tutaj** (w celu wyprowadzenia) jako punkt siatki, a pochodne współrzędnych po czasie jako przemieszczenie punktu ruchomej siatki względem początku układu współrzędnych. Na rzecz wyprowadzenia nie należy mylić punktu (x,y) z położeniem cząstki płynu!

Rozpisując każdą ze stron (11):

$$\frac{DF(\xi,\eta,t)}{Dt} = \frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial \eta} \tag{12}$$

$$\frac{DF(L\xi,H\eta,t)}{Dt} = \frac{\partial F(L\xi,H\eta,t)}{\partial t} + \frac{\partial (L\xi)}{\partial t}\cdot\frac{\partial F(L\xi,H\eta,t)}{\partial (L\xi)} + \frac{\partial (H\eta)}{\partial t}\cdot\frac{\partial F(L\xi,H\eta,t)}{\partial (H\eta)} \tag{13}$$

Ponieważ ξ i η są stałe w czasie (w sensie punktów siatki), to z (5) i (6) mamy związki:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial (L\xi)}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial (H\eta)}{\partial t} = \dot{H}\eta \tag{17}$$

Wstawiając je do (12) i (13) otrzymujemy:

$$\frac{DF(\xi,\eta,t)}{Dt} = \frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial t} \tag{18}$$

$$\frac{DF(L\xi,H\eta,t)}{Dt} = \frac{\partial F(L\xi,H\eta,t)}{\partial t} + \dot{H}\eta\frac{\partial F(L\xi,H\eta,t)}{H\partial \eta} \tag{19}$$

Co z uwagi na (11) daje **ważny wzór (20)**:

$$\frac{\partial F(L\xi,H\eta,t)}{\partial t} = \frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial t} - \frac{\dot{H}}{H}\eta\frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial \eta} \tag{20}$$

Mamy zatem:

$$\frac{\partial\omega(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial\omega(\xi,\eta,t)}{\partial t} - \frac{\dot{H}}{H}\eta\frac{\partial\omega(\xi,\eta,t)}{\partial\eta} \tag{21}$$

Podstawienie (7), (8), (21) do równań wyjściowych (1)-(4) daje postać równań transportu w układzie (ξ,η):

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{L}u\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \frac{1}{H}(v - \dot{H}\eta)\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \nu\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial\omega^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\omega^2}{\partial\eta^2}\right] + \frac{1}{L}\frac{\partial f_2}{\partial\xi} - \frac{1}{H}\frac{\partial f_1}{\partial\eta} \tag{22}$$

$$\frac{1}{L^2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\psi^2}{\partial\eta^2} = -\omega \tag{23}$$

$$u = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \tag{24}$$

$$v = -\frac{1}{L}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \tag{25}$$

3 Warunki brzegowe.

Wyprowadzamy w układzie (x,y), następnie przechodzimy do układu (ξ,η). W celu benchmarka modelujemy całą rurkę, z dwoma wylotami po obu stronach, bez osi symetrii. Jeśli program będzie działał poprawnie, to w uzyskanym rozwiązaniu, każde pole będzie symetryczne lub antysymetryczne względem pionowej osi przechodzącej przez punkty $(\xi = 0.5, \eta = 0), (\xi = 0.5, \eta = 1)$.

Określmy prędkości na kierunkach x i y (odpowiednio u i v) dla każdej ze ścianek prostokąta o wymiarach $L \times H$ o lewym wierzchołku w punkcie $(0,0)$. Przyjmijmy oznaczenia: **G-ścianka górna, P-ścianka prawa, D-ścianka dolna, L-ścianka lewa.**

Wydatek wody Q, którą wtłacza górna ścianka, musi być równy minus sumie wydatków na wylotach (oba wyloty mają ten sam wydatek), a suma wszystkich wydatków równa 0:

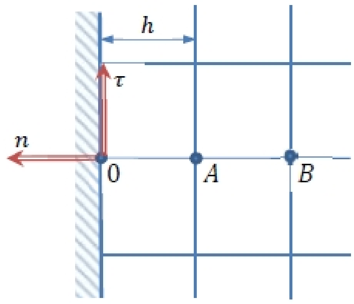
$$Q + \int_0^H u_P(x,y)dy + \int_0^H -u_L(x,y)dy = 0 \tag{26}$$

Rozkład prędkości stycznej na wylotach, z braku lepszego modelu przyjmujemy jako liniowy, rosnący od prędkości na kierunku y dolnej ścianki do prędkości górnej ścianki. Gwarantuje to **ciągłość pola modułu prędkości na obwodzie.**

Wydatek górnej ścianki wynosi $Q = L\dot{H}$.

Wirowość na brzegu.

Należy ją określić na początku każdej chwili czasowej. Można to zrobić na etapie dyskretyzacji, przy znajomości funkcji prądu w obszarze i na obwodzie. Standardowe wzory I i II rzędu dla **równomiernej** dyskretyzacji siatki **w kierunku normalnym** do ścianki, dla brzegu **niezaokrąglonego**:



Rysunek 2: siatka w pobliżu brzegu

$$\omega_{xy}(0) = -\frac{2}{h^2}\left[-\psi_{xy}(0) + \psi_{xy}(A) + h \cdot b_{xy}\right] + O(h) \tag{27}$$

$$\omega_{xy}(0) = -\frac{2}{h^2}\left[-1.75\psi_{xy}(0) + 2\psi_{xy}(A) - 0.25\psi_{xy}(B) + 1.5h \cdot b_{xy}\right] + O(h^2) \tag{28}$$

0 oznacza punkt na brzegu. A to punkt oddalony o h od tego punktu, zaś B to punkt siatki oddalony o $2h$ od brzegu.

b jest **prędkością styczną** na brzegu.

Indeksy dolne oznaczają, czy pola ψ, ω, b są przed, czy po transformacji układu współrzędnych.

Transformacja według wzorów (5) i (6) w wersji dla różniczek siatki:

$$h_x = L \cdot h_\xi \tag{29}$$

$$h_y = H \cdot h_\eta \tag{30}$$

Oznacza to, że wzory (27) i (28) przyjmą formę:

a) ścianki poziome (horizontal walls):

$$\omega_{\xi\eta}(0) = -\frac{2}{L^2 h_\xi^2}\left[-\psi_{\xi\eta}(0) + \psi_{\xi\eta}(A) + Lh_\xi \cdot b_{\xi\eta}\right] + O(h_\xi) \tag{31}$$

$$\omega_{\xi\eta}(0) = -\frac{2}{L^2 h_\xi^2}\left[-1.75\psi_{\xi\eta}(0) + 2\psi_{\xi\eta}(A) - 0.25\psi_{\xi\eta}(B) + 1.5Lh_\xi \cdot b_{\xi\eta}\right] + O(h_\xi^2) \tag{32}$$

a) ścianki pionowe (verticall walls):

$$\omega_{\xi\eta}(0) = -\frac{2}{H^2 h_\eta^2}\left[-\psi_{\xi\eta}(0) + \psi_{\xi\eta}(A) + Hh_\eta \cdot b_{\xi\eta}\right] + O(h_\eta) \tag{33}$$

$$\omega_{\xi\eta}(0) = -\frac{2}{H^2 h_\eta^2}\left[-1.75\psi_{\xi\eta}(0) + 2\psi_{\xi\eta}(A) - 0.25\psi_{\xi\eta}(B) + 1.5Hh_\eta \cdot b_{\xi\eta}\right] + O(h_\eta^2) \tag{34}$$

3.1. Profil paraboliczny prędkości normalnej na wylotach.

Przyjmujemy $u_P(x, y) = ay(H - y)$, gdzie wartość a jest do wyznaczenia z równania:

$$\frac{Q}{2} = -\int_0^H u_P(x, y)dy = -\int_0^H ay(H - y)dy \tag{35}$$

Po uzyskaniu pola prędkości na obwodzie w układzie (x, y), można przejść do układu (ξ, η) na podstawie związków (5) i (6).

Funkcja prądu musi spełnić związki (3) i (4) oraz **zachować ciągłość na obwodzie.** Rozkład funkcji prądu uzyskujemy z całkowania prędkości normalnej w układzie (x, y) i dobrania stałych całkowania. Następnie na podstawie związków (5) i (6) znajdujemy rozkład w układzie (ξ, η).

Rezultatem powyższych działań są składowe prędkości:

$$u_G(x, y) = 0 \longrightarrow u_G(\xi, \eta) = 0 \tag{36}$$

$$v_G(x, y) = \dot{H} \longrightarrow v_G(\xi, \eta) = \dot{H} \tag{37}$$

$$u_P(x, y) = -y(H - y)\frac{3L\dot{H}}{H^3} \longrightarrow u_P(\xi, \eta) = -\eta(1 - \eta)\frac{3L\dot{H}}{H} \tag{38}$$

$$v_P(x, y) = y\frac{\dot{H}}{H} \longrightarrow v_P(\xi, \eta) = \eta\dot{H} \tag{39}$$

$$u_D(x, y) = 0 \longrightarrow u_D(\xi, \eta) = 0 \tag{40}$$

$$v_D(x, y) = 0 \longrightarrow v_D(\xi, \eta) = 0 \tag{41}$$

$$u_L(x, y) = y(H - y)\frac{3L\dot{H}}{H^3} \longrightarrow u_L(\xi, \eta) = \eta(1 - \eta)\frac{3L\dot{H}}{H} \tag{42}$$

$$v_L(x, y) = y\frac{\dot{H}}{H} \longrightarrow v_L(\xi, \eta) = \eta\dot{H} \tag{43}$$

Funkcja prądu na obwodzie:

$$\psi_G(x, y) = \frac{\dot{H}}{2}(L - 2x) \longrightarrow \psi_G(\xi, \eta) = \frac{L\dot{H}}{2}(1 - 2\xi) \tag{44}$$

$$\psi_P(x, y) = \frac{L\dot{H}}{2H^3}(2y^3 - 3y^2H) \longrightarrow \psi_P(\xi, \eta) = \frac{L\dot{H}}{2}(2\eta^3 - 3\eta^2) \tag{45}$$

$$\psi_D(x, y) = 0 \longrightarrow \psi_D(\xi, \eta) = 0 \tag{46}$$

$$\psi_L(x, y) = -\frac{L\dot{H}}{2H^3}(2y^3 - 3y^2H) \longrightarrow \psi_L(\xi, \eta) = -\frac{L\dot{H}}{2}(2\eta^3 - 3\eta^2) \tag{47}$$

Wirowość na obwodzie (prędkości styczne b):

$$b_G(x,y) = 0 \longrightarrow b_G(\xi,\eta) = 0 \tag{48}$$

$$b_P(x,y) = -y\frac{\dot{H}}{H} \longrightarrow b_P(\xi,\eta) = -\eta\dot{H} \tag{49}$$

$$b_D(x,y) = 0 \longrightarrow b_D(\xi,\eta) = 0 \tag{50}$$

$$b_L(x,y) = y\frac{\dot{H}}{H} \longrightarrow b_L(\xi,\eta) = \eta\dot{H} \tag{51}$$

3.2. Profil eliptyczny prędkości normalnej na wylotach.

Ma następującą własność: wykres prędkości normalnej na wylotach jest styczny do ścianek górnej i dolnej.
Przyjmujemy $u_P(x,y) = a\sqrt{(\frac{H}{2})^2 - (y-\frac{H}{2})^2}$, gdzie wartość a jest do wyznaczenia z równania:

$$\frac{Q}{2} = -\int_0^H u_P(x,y)dy = -\int_0^H a\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{H}{2}\right)^2}dy \tag{52}$$

Postępując jak poprzednio dostaniemy różnice jedynie przy kilka wielkościach:

$$u_P(x,y) = -\frac{4L\dot{H}}{\pi H^2}\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{H}{2}\right)^2} \longrightarrow u_P(\xi,\eta) = -\frac{2L\dot{H}}{\pi H}\sqrt{1-(2\eta-1)^2} \tag{53}$$

$$u_L(x,y) = \frac{4L\dot{H}}{\pi H^2}\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{H}{2}\right)^2} \longrightarrow u_L(\xi,\eta) = \frac{2L\dot{H}}{\pi H}\sqrt{1-(2\eta-1)^2} \tag{54}$$

Funkcja prądu na obwodzie:

$$\psi_P(x,y) = -\frac{L\dot{H}}{2\pi}\left[\frac{y-\frac{H}{2}}{(\frac{H}{2})^2}\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{H}{2}\right)^2} + asin\left(\frac{y}{\frac{H}{2}}-1\right) + \frac{\pi}{2}\right] \tag{55}$$

$$\psi_P(\xi,\eta) = -\frac{L\dot{H}}{2\pi}\left[(2\eta-1)\sqrt{(1-(2\eta-1)^2)} + asin(2\eta-1) + \frac{\pi}{2}\right] \tag{56}$$

$$\psi_L(x,y) = \frac{L\dot{H}}{2\pi}\left[\frac{y-\frac{H}{2}}{(\frac{H}{2})^2}\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{H}{2}\right)^2} + asin\left(\frac{y}{\frac{H}{2}}-1\right) + \frac{\pi}{2}\right] \tag{57}$$

$$\psi_L(\xi,\eta) = \frac{L\dot{H}}{2\pi}\left[(2\eta-1)\sqrt{(1-(2\eta-1)^2)} + asin(2\eta-1) + \frac{\pi}{2}\right] \tag{58}$$

Pozostałe składniki, łącznie z wirowością na brzegu, zostają takie same jak w 3.1.

4 Ciśnienie.

Wychodzimy od równania Naviera-Stokesa dla prędkości w układzie (x, y) z pochodnymi ciśnienia przeniesionymi na lewą stronę:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f_1 \tag{59}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + f_2 \tag{60}$$

Korzystając ze wzoru (20) mamy:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, \eta, t)}{\partial t} - \frac{\dot{H}}{H}\eta\frac{\partial u(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \tag{61}$$

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(\xi, \eta, t)}{\partial t} - \frac{\dot{H}}{H}\eta\frac{\partial v(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \tag{62}$$

Dołączając wzory (5)-(7) otrzymujemy:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \rho\left[-L\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{L}{H}(v - \eta\dot{H})\frac{\partial u}{\partial \eta} + \nu\left(\frac{1}{L}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{L}{H^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + Lf_1\right] \tag{63}$$

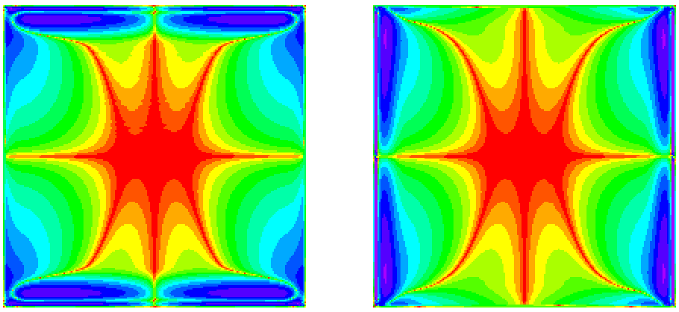
$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \rho\left[-H\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{H}{L}u\frac{\partial v}{\partial \xi} - (v - \eta\dot{H})\frac{\partial v}{\partial \eta} + \nu\left(\frac{H}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{H}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right) + Hf_2\right] \tag{64}$$

Ponieważ (63) i (64) zostaną obliczone **niezależnie i ze skończoną dokładnością**, bardzo ważne jest sprawdzenie, w jakim stopniu spełniona jest relacja:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) \tag{65}$$

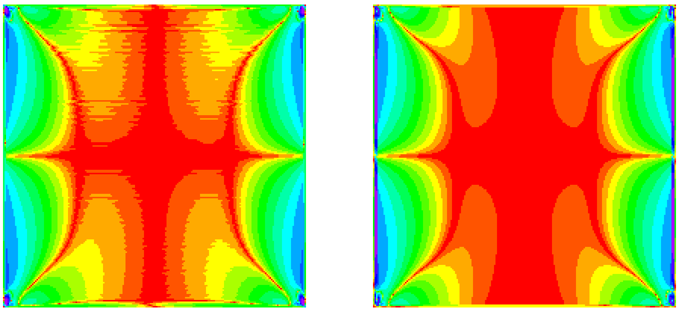
Sensowne spełnienie tej relacji zawsze wymaga **bardzo dokładnego policzenia wszystkich wyrażeń** i małych kroków czasowych (dokładność policzenia $\frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial v}{\partial t}$). Niemal nie ma wpływu błąd dyskretyzacji siatki. Jeśli relacja nie będzie "wyraźnie" spełniona w jakimś przedziale czasu (po przedstawieniu w skali logarytmicznej) to wynik ciśnienia będzie w tym przedziale **na pewno** błędny.

Poniżej przykłady (pochodzą z obliczeń zagadnienia, któremu poświęcona jest ta lektura):



(a) $\left|\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)\right|$ (b) $\left|\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)\right|$

Rysunek 3: pierwszy typ błędu - za mała dokładność policzenia $\frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial v}{\partial t}$



(a) $\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)\right|$ (b) $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)\right|$

Rysunek 4: drugi typ błędu - za mała dokładność policzenia $u(\xi,\eta)$ i $v(\xi,\eta)$

Wszystkie wykresy są w skali logarytmicznej, gdzie kolor czerwony odpowiada najmniejszej wartości, a fioletowy największej. W przypadku poprawności, wykresy a) i b) z każdej pary byłyby identyczne.

Na rysunkach 2.a) i 2.b) widzimy dodatkowe "góry" przy brzegach obszaru, które nie występują jednocześnie na obu wykresach. Aby je wyeliminować, należy zmniejszyć krok czasowy Δt.

Na rysunkach 3.a) i 3.b) widzimy "poszarpanie". Aby je wyeliminować, należy zażądać silniejszych warunków zakończenia iteracji przy liczeniu ψ z wyrażenia $\nabla^2\psi = -\omega$.

Jeśli relacja (65) jest spełniona, to pole ciśnienia uzyskujemy stosując iteracyjnie następujące relacje:

$$p(\xi \pm h,\eta) = p(\xi,\eta) \pm h\frac{\partial p}{\partial\xi}(\xi,\eta) + O(h) \tag{66}$$

$$p(\xi,\eta \pm h) = p(\xi,\eta) \pm h\frac{\partial p}{\partial\eta}(\xi,\eta) + O(h) \tag{67}$$

$$p(\xi \pm h,\eta) = p(\xi,\eta) \pm \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial\xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial p}{\partial\xi}(\xi \pm h,\eta)\right] + O(h^2) \tag{68}$$

$$p(\xi,\eta \pm h) = p(\xi,\eta) \pm \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial\eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial p}{\partial\eta}(\xi,\eta \pm h)\right] + O(h^2) \tag{69}$$

Przy czym należy założyć znaną wartość ciśnienia w 1 punkcie, np. niech $p(\frac{N+1}{2},\frac{N+1}{2}) = 0$.

Mając ciśnienie we wnętrzu obszaru, ciśnienie na brzegu możemy policzyć za pomocą wzorów:

$$p(\xi,\eta) = p(\xi \pm h,\eta) \mp h\left[1.5p_\xi(\xi \pm h,\eta) - 0.5p_\xi(\xi \pm 2h,\eta)\right] + O(h^2) \tag{70}$$

$$p(\xi,\eta) = p(\xi,\eta \pm h) \mp h\left[1.5p_\eta(\xi,\eta \pm h) - 0.5p_\eta(\xi,\eta \pm 2h)\right] + O(h^2) \tag{71}$$

Co pozwala uniknąć liczenia pochodnych ciśnienia na brzegu.

5 Dyskretyzacja siatki i algorytm.

Każdy bok kwadratu $(0,1) \times (0,1)$ w układzie (ξ, η) dzielimy na jednakową, parzystą liczbę pól N i nieparzystą liczbę wierzchołków $N+1$. Odległość między dwoma kolejnymi punktami siatki $h = \frac{1}{N}$. Preferowanie liczba N jest podzielna przez możliwie dużą potęgę 2.

Niech (i,j) dla $1 \leqslant (i,j) \leqslant N$ reprezentuje iterowanie po wszystkich wierzchołkach siatki.
Niech (i,j) dla $2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1$ reprezentuje iterowanie po wnętrzu kwadratu (pominięcie brzegowych wierzchołków siatki).
Niech $(i,j) \in \Gamma$ reprezentuje iterowanie po brzegu kwadratu.

Ponadto:
$\xi = (i-1) \cdot h$
$\eta = (j-1) \cdot h$
Niech $F(i,j)$ oznacza wartość funkcji F w punkcie (ξ, η).

Algorytm

1. Ustal wielkości globalne:

H_0 - początkowa wysokość rurki
L - długość rurki
$H(t)$ - funkcja wysokości rurki od czasu. Wymagania: musi być ciągła w $t \in \langle 0, T_{max} \rangle$ oraz spełniać $H(0) = H_0$
$\dot{H}(t)$ - pochodna funkcji wysokości rurki po czasie. Równa prędkości górnej ścianki.
T_{max} - maksymalny (celowany) czas symulacji
Δt - długość kroku czasowego 1 iteracji czasowej
ν - lepkość kinematyczna płynu, kształtująca liczbę Reynoldsa
$\rho = 1000$ - gęstość płynu w jednostkach SI
α - współczynnik relaksacji w algorytmie Cranka-Nicholsona
ϵ_1 - dokładność liczenia laplasjanów
ϵ_2 - dokładność liczenia w algorytmie Cranka-Nicholsona

2. Nadaj wartości początkowe dla chwili $T = 0$.

$T = 0$

dla $2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : \psi(i,j) = 0$
dla $2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : \omega(i,j) = 0$
dla $(i,j) \in \Gamma : \psi(i,j) =$ zgodnie z (44)-(47) lub (55)-(58)
dla $(i,j) \in \Gamma : \omega(i,j) =$ zgodnie z (31) i (33) (wzór I rzędu) albo (32) i (34) (wzór II rzędu)

Początkowe pola prędkości:

dla $(i,j) \in \Gamma : u(i,j) =$ zgodnie z (36),(38),(40),(42) lub (53),(54)
dla $(i,j) \in \Gamma : v(i,j) =$ zgodnie z (37),(39),(41),(43)

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : u(i,j) = \frac{\psi(i,j+1) - \psi(i,j-1)}{2hH} \tag{72}$$

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : v(i,j) = -\frac{\psi(i+1,j) - \psi(i-1,j)}{2hL} \tag{73}$$

W punktach (3.) i (4.):

ω_* - (docelowo) wirowość w chwili $T + \Delta t$
ψ_* - (docelowo) funkcja prądu w chwili $T + \Delta t$
ω - (znana) wirowość w chwili T
ψ - (znana) funkcja prądu w chwili T
$H = H(T)$
$H_* = H(T + \Delta t)$
$G(i,j) = \frac{1}{L}\frac{\partial f_2}{\partial \xi}(\xi,\eta) - \frac{1}{H}\frac{\partial f_1}{\partial \eta}(\xi,\eta)$ - (znana) rotacja pola sił objętościowych w układzie (ξ,η)
$G_*(i,j) = \frac{1}{L}\frac{\partial f_2}{\partial \xi}(\xi,\eta) - \frac{1}{H_*}\frac{\partial f_1}{\partial \eta}(\xi,\eta)$ - powyższe w chwili $T + \Delta t$

3. Algorytm jawnej dyskretyzacji po czasie.

Jeśli wybrałeś algorytm Cranka-Nicholsona, przejdź do (4.).

3.1. Oblicz $\omega_* = \omega(T + \Delta t)$ w obszarze:

$$\begin{aligned}
&2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : \omega_*(i,j) = \omega(i,j) + \\
&\Delta t \Bigg[-u(i,j)\frac{\omega(i+1,j) - \omega(i-1,j)}{2hL} - \Big(v(i,j) - y\dot{H}\Big)\frac{\omega(i,j+1) - \omega(i,j-1)}{2hH} + \\
&\nu\frac{\omega(i-1,j) - 2\omega(i,j) + \omega(i+1,j)}{(hL)^2} + \nu\frac{\omega(i,j-1) - 2\omega(i,j) + \omega(i,j+1)}{(hH)^2} + G(i,j)\Bigg]
\end{aligned} \tag{74}$$

3.2. Oblicz $\psi_* = \psi(T + \Delta t)$ na brzegu:

$$(i,j) \in \Gamma : \psi_*(i,j) = \text{dla chwili } T + \Delta t \text{ zgodnie z (44)-(47) lub (55-58)}$$

3.3. Znajdź $\psi_* = \psi(T + \Delta t)$ w obszarze rozwiązując równanie:

$$\nabla^2(\psi_*) = -\omega_* \tag{75}$$

Warto zwrócić uwagę, że do rozwiązania tego równania nie jest potrzebna znajomość ω_* na brzegu!

3.4. Oblicz $\omega_* = \omega(T + \Delta t)$ na brzegu:

$(i,j) \in \Gamma : \omega_*(i,j) =$ dla chwili $T + \Delta t$ zgodnie z (31) i (33) (wzór I rzędu) albo (32) i (34) (wzór II rzędu)

Przejdź do (5.).

4. Algorytm Cranka-Nicholsona.

4.1. Zainicjuj (pierwsze przybliżenie):

$\omega_* := \omega$

$\psi_* := \psi$

dla $(i,j) \in \Gamma : \psi_*(i,j) =$ dla chwili $T + \Delta t$ zgodnie z (44)-(47) lub (55-58)

4.2. Oblicz pole prędkości w chwili $T + \Delta t$:

$(i,j) \in \Gamma : u_*(i,j) =$ dla chwili $T + \Delta t$ zgodnie z (36),(38),(40),(42) lub (53),(54)

$(i,j) \in \Gamma : v_*(i,j) =$ dla chwili $T + \Delta t$ zgodnie z (37),(39),(41),(43)

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : u_*(i,j) = \frac{\psi_*(i,j+1) - \psi_*(i,j-1)}{2hH_*} \tag{76}$$

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : v_*(i,j) = -\frac{\psi_*(i+1,j) - \psi_*(i-1,j)}{2hL} \tag{77}$$

Zapamiętaj wartość ψ_*:

$\psi_{old} = \psi_*$

4.3. Oblicz kolejne przybliżenie ω_*:

a) Zdefiniuj:

$$\begin{aligned} P = &-u(i,j)\frac{\omega(i+1,j) - \omega(i-1,j)}{2hL} - \left(v(i,j) - y\dot{H}\right)\frac{\omega(i,j+1) - \omega(i,j-1)}{2hH} + \\ &\nu\frac{\omega(i-1,j) - 2\omega(i,j) + \omega(i+1,j)}{(hL)^2} + \nu\frac{\omega(i,j-1) - 2\omega(i,j) + \omega(i,j+1)}{(hH)^2} + G(i,j) \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} P_* = &-u_*(i,j)\frac{\omega_*(i+1,j) - \omega_*(i-1,j)}{2hL} - \left(v_*(i,j) - y\dot{H}_*\right)\frac{\omega_*(i,j+1) - \omega_*(i,j-1)}{2hH_*} + \\ &\nu\frac{\omega_*(i-1,j) - 2\omega_*(i,j) + \omega_*(i+1,j)}{(hL)^2} + \nu\frac{\omega_*(i,j-1) - 2\omega_*(i,j) + \omega_*(i,j+1)}{(hH_*)^2} + G_*(i,j) \end{aligned} \tag{79}$$

b) Wykonaj:

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : \omega_{**}(i,j) = \omega(i,j) + \frac{\Delta t}{2}(P + P_*) \tag{80}$$

c) Przypisz:

$$\omega_* := \alpha \cdot \omega_* + (1-\alpha)\omega_{**} \tag{81}$$

4.4. Znajdź ψ_* w obszarze rozwiązując równanie:

$$\nabla^2(\psi_*) = -\omega_* \tag{82}$$

4.5. Oblicz ω_* na brzegu:

$(i,j) \in \Gamma : \omega_*(i,j) =$ dla chwili $T+\Delta t$ zgodnie z (31) i (33) (wzór I rzędu) albo (32) i (34) (wzór II rzędu)

4.6. Oblicz normę i zakończ iterację Cranka-Nicholsona:

$$r = \sqrt{\sum_{1 \leqslant (i,j) \leqslant N} (\psi_{old} - \psi_*)^2} \tag{83}$$

Jeśli $r > \epsilon_2$ wróć do (4.2).

5. Ciśnienie w chwili T.

5.1. Oblicz pola prędkości w chwili $T + \Delta t$:

$(i,j) \in \Gamma : u(i,j,T+\Delta T) =$ dla chwili $T+\Delta t$ zgodnie z (36),(38),(40),(42) lub (53),(54)
$(i,j) \in \Gamma : v(i,j,T+\Delta T) =$ dla chwili $T+\Delta t$ zgodnie z (37),(39),(41),(43)

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : u(i,j,T+\Delta T) = \frac{\psi_*(i,j+1) - \psi_*(i,j-1)}{2hH} \tag{84}$$

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : v(i,j,T+\Delta T) = -\frac{\psi_*(i+1,j) - \psi_*(i-1,j)}{2hL} \tag{85}$$

5.2. Jeśli $T \neq 0$, oblicz pola pochodnych cząstkowych prędkości po czasie w chwili T:
Uwaga: jeśli $T = 0$, to użyj analogicznych wzorów I stopnia.

$$1 \leqslant (i,j) \leqslant N : u_t(i,j,T) = \frac{u(i,j,T+\Delta t) - u(i,j,T-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{86}$$

$$1 \leqslant (i,j) \leqslant N : v_t(i,j,T) = \frac{v(i,j,T+\Delta t) - v(i,j,T-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{87}$$

5.3. Oblicz pochodne ciśnienia po kierunkach ξ i η za pomocą (63) i (64):
Uwaga: pola $u(i,j)$ i $v(i,j)$ pochodzą z chwili czasowej T!

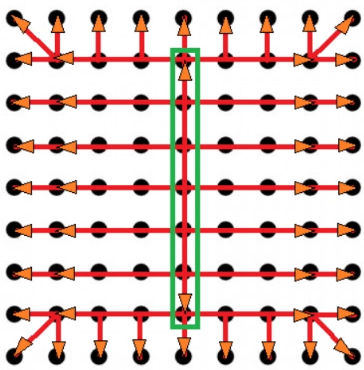
$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : \frac{\partial p}{\partial \xi} =$$
$$\rho\Bigg[-Lu_t(i,j,T) - u(i,j)\frac{u(i+1,j) - u(i-1,j)}{2h} - \frac{L}{H}\left(v(i,j) - \eta\dot{H}_*\right)\frac{u(i,j+1) - u(i,j-1)}{2h} +$$
$$\nu\frac{1}{L}\frac{u(i-1,j) - 2u(i,j) + u(i+1,j)}{2h} + \nu\frac{L}{H^2}\frac{u(i,j-1) - 2u(i,j) + u(i,j+1)}{2h} + f_1(i,j)\Bigg] \tag{88}$$

$$2 \leqslant (i,j) \leqslant N-1 : \frac{\partial p}{\partial \eta} =$$

$$\rho\Bigg[-Hv_t(i,j,T) - \frac{H}{L}u(i,j)\frac{v(i+1,j)-v(i-1,j)}{2h} - \left(v(i,j)-\eta\dot{H}\right)\frac{v(i,j+1)-v(i,j-1)}{2h} +$$

$$\nu\frac{H}{L^2}\frac{v(i-1,j)-2v(i,j)+v(i+1,j)}{2h} + \nu\frac{1}{H}\frac{v(i,j-1)-2v(i,j)+v(i,j+1)}{2h} + f_2(i,j)\Bigg] \tag{89}$$

5.4. Oblicz ciśnienie.



Rysunek 5: Schematyczny sposób wyznaczania ciśnienia w a) - g) z zaznaczoną środkową kolumną. Strzałka oznacza iterowanie we wskazanym kierunku.

a) Przyjmij zerowe ciśnienie w środku:

$p(\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}) = 0$

b) Oblicz iteracyjnie* ciśnienie w górnej części środkowej kolumny o indeksie $i = \frac{N+1}{2}$ stosując (69):

$$\frac{N+1}{2} \leqslant j \leqslant N-2 : p(\frac{N+1}{2}, j+1) = p(\frac{N+1}{2}, j) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial \eta}(\frac{N+1}{2}, j) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\frac{N+1}{2}, j+1)\right] \tag{90}$$

c) Oblicz iteracyjnie* ciśnienie w dolnej części środkowej kolumny o indeksie $i = \frac{N+1}{2}$ stosując (69):

$$\frac{N+1}{2} \geqslant j \geqslant 3 : p(\frac{N+1}{2}, j-1) = p(\frac{N+1}{2}, j) - \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial \eta}(\frac{N+1}{2}, j) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\frac{N+1}{2}, j-1)\right] \tag{91}$$

d) Startując z wierzchołków kolumny o indeksie $i = \frac{N+1}{2}$, oblicz iteracyjnie* ciśnienie w każdym wierszu na prawo od kolumny, stosując (68):

$$\substack{\frac{N+1}{2} \leqslant i \leqslant N-2 \\ 2 \leqslant j \leqslant N-1} : p(i+1,j) = p(i,j) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial \eta}(i,j) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(i+1,j)\right] \tag{92}$$

e) Startując z wierzchołków kolumny o indeksie $i = \frac{N+1}{2}$, oblicz iteracyjnie* ciśnienie w każdym wierszu na lewo od kolumny, stosując (68):

$$\mathop{}_{\substack{\frac{N+1}{2} \geqslant i \geqslant 3 \\ 2 \leqslant j \leqslant N-1}} : p(i+1,j) = p(i,j) - \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial \eta}(i,j) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(i+1,j)\right] \tag{93}$$

f) Wyznacz ciśnienie na pominiętych brzegach za pomocą wzorów (70) i (71):

ściana górna:

$$2 \leqslant i \leqslant N-1 : p(i,N) = p(i,N-1) + h[1.5p_\eta(i,N-1) - 0.5p_\eta(i,N-2)] \tag{94}$$

ściana dolna:

$$2 \leqslant i \leqslant N-1 : p(i,1) = p(i,2) - h[1.5p_\eta(i,1) - 0.5p_\eta(i,3)] \tag{95}$$

ściana prawa:

$$2 \leqslant j \leqslant N-1 : p(N,j) = p(N-1,j) + h[1.5p_\xi(N-1,j) - 0.5p_\xi(N-2,j)] \tag{96}$$

ściana lewa:

$$2 \leqslant j \leqslant N-1 : p(1,j) = p(2,j) - h[1.5p_\xi(2,j) - 0.5p_\xi(3,j)] \tag{97}$$

g) Wyznacz ciśnienie w pominiętych narożnikach:

$p(N,N) = p(N-1,N-1) + h\frac{\partial p}{\partial \xi}(N-1,N-1) + h\frac{\partial p}{\partial \eta}(N-1,N-1)$
$p(1,N) = p(2,N-1) - h\frac{\partial p}{\partial \xi}(2,N-1) + h\frac{\partial p}{\partial \eta}(2,N-1)$
$p(N,1) = p(N-1,2) + h\frac{\partial p}{\partial \xi}(N-1,2) - h\frac{\partial p}{\partial \eta}(N-1,2)$

*iteracyjnie oznacza przechodzenie po kolei po rosnącym/malejącym indeksie i/j.

6. Zakończenie iteracji po czasie.

Przypisz:
$\omega := \omega_*$
$\psi := \psi_*$
$u := u(i,j,T+\Delta t)$
$v := v(i,j,T+\Delta t)$
$T := T + \Delta t$
Jeśli $T < T_{max}$ wróć do (3.).

Uwaga: ciśnienie w chwili $T = T_{max}$ można policzyć wzorami analogicznymi do (86) i (87), zakładając przybliżenia:

$u_t(T_{max}) \approx u_t(T_{max} - \Delta t)$
$v_t(T_{max}) \approx v_t(T_{max} - \Delta t)$

6 Multigrid.

Bez niego rozwiązanie równania $\nabla^2\psi = -\omega$ z dokładnością wymaganą do poprawnego obliczenia ciśnienia byłoby niemożliwe w realnym czasie.

Algorytm

Znajdź pole X z równania:

$$\nabla^2 X = -Y \tag{98}$$

z dokładnością do ϵ_1 na konkretnej siatce rzadkiej* (zdefiniowanej stopniem multigrida m).

***UWAGA:** Aby obliczyć (96) na **pełnej siatce** ze wskazaną dokładnością ϵ_1 i możliwie najszybciej, konieczne jest wywołanie funkcji "multigrid" kilka razy, z różnymi parametrami m i k (znaczenie parametrów opisane w poniższym pkt. 1.). **Więcej informacji w sekcji "Dodatek".**

1. Przyjmij argumenty:

$X(\xi, \eta)$ - szukane pole, znane dokładnie na brzegu, mniej dokładnie w środku (lub wcale nieznane w środku)
$Y(\xi, \eta)$ - pole znane co najmniej we wnętrzu (bez brzegu)
m - stopień multigrida, potęga liczby 2
k - ilość operacji "wygładzania" prostym algorytmem Gauss-Seidel, jest to końcowy etap funkcji multigrid

Ponadto zdefiniuj tablice:

$r(i, j)$ - wektor residuuów
$temp(i, j)$ - tablica pomocnicza, będąca kopią tablicy $r(i, j)$ na rzadkiej siatce
$e(i, j)$ - wektor błędu siatki rzadkiej

2. Znajdź wektor residuów na siatce wyjściowej (pełnej):

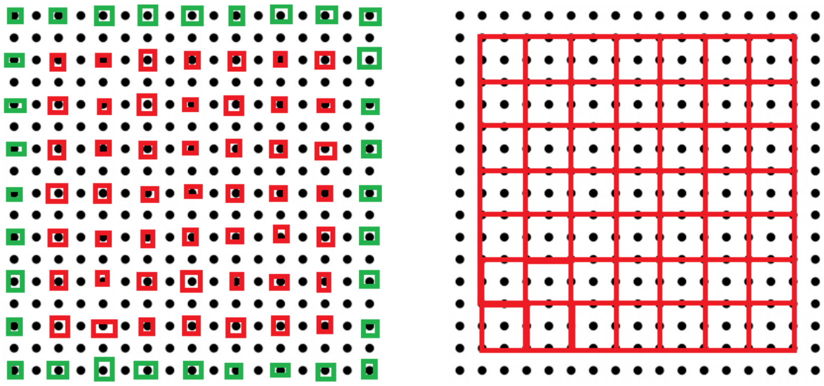
$$2 \leqslant (i, j) \leqslant N-1 : r(i, j) = -Y(i, j) - \frac{X(i+1, j) - 2X(i, j) + X(i-1, j)}{(hL)^2} - \frac{X(i, j+1) - 2X(i, j) + X(i, j-1)}{(hH_*)^2} \tag{99}$$

3. Stwórz siatkę rzadką, o rozmiarze $N' = \frac{N-1}{m} + 1$:

Aby stworzyć siatkę m razy rzadszą, należy log_2^m razy zastosować schemat pomniejszania siatki przedstawiony schematycznie na rysunku 5.

W działającym kodzie wygląda to tak:

pętla($p := 2$; $p \leqslant m$; $p := 2 \cdot p$)



(a) czerwone - punkty, po których iterujemy, pod koniec dołączamy też zielone punkty brzegowe

(b) punkty na obwodzie kwadratów składają się na wartość w punkcie w środku danego kwadratu

Rysunek 6: na przykładzie siatki o $N = 2^4 + 1$: schemat tworzenia siatki 2 razy mniejszej, czyli o $N' = \frac{2^4+1-1}{2} + 1 = 2^3 + 1$ (liczą się też punkty na brzegu)

pętla($i := 1 + p$; $i \leqslant N - p$; $i := i + p$)

pętla($j := 1 + p$; $j \leqslant N - p$; $j := j + p$)

$$temp(i,j) = \Big\{ r(i+\tfrac{p}{2}, j+\tfrac{p}{2}) + r(i+\tfrac{p}{2}, j-\tfrac{p}{2}) + r(i-\tfrac{p}{2}, j+\tfrac{p}{2}) + r(i-\tfrac{p}{2}, j-\tfrac{p}{2}) + 2 \cdot \Big[r(i+\tfrac{p}{2}, j) + r(i-\tfrac{p}{2}, j) + r(i, j+\tfrac{p}{2}) + r(i, j-\tfrac{p}{2}) \Big] + 4 \cdot r(i,j) \Big\} / 16$$

Wartość w komórce (i, j) tablicy *temp* jest uśrednieniem wartości tablicy r wewnątrz kwadratu $\langle i-1, i+1\rangle \times \langle j-1, j+1\rangle$. Wartości z kwadratu są wzięte z pewnymi wagami: wierzchołki z wagą 1/16, punkty środkowe boków z wagą 1/8, środek z wagą 1/4.

4. Oblicz wektor błędu $e(i, j)$ siatki rzadkiej:

ustal wartość początkową tablicy błędu:

$1 \leqslant i, j \leqslant N : e(i, j) = 0$

zdefiniuj zmienne i przypisz wartości:

$r := \infty,\ l := 0$

dopóki $(r > \epsilon_1) \vee (l < 3)$:

a) $r := 0,\ l := l + 1$

b) dla $(1 + m \leqslant i, j \leqslant N - m) \wedge (i \ mod \ m \equiv 0) \wedge (j \ mod \ m \ \equiv 0)$ wykonaj (98),(99),(100).

c) wykonaj (101).

$$e_*(i,j) := \left[\frac{e(i-m,j) + e(i+m,j)}{L^2} + \frac{e(i,j-m) + e(i,j+m)}{H_*^2} - (m\ dx)^2\ temp(i,j) \right] / \left(\frac{2}{L^2} + \frac{2}{H_*^2} \right) \tag{100}$$

$$e_*(i,j) := -0.5e(i,j) + 1.5e_*(i,j) \tag{101}$$

$$r := r + [e_*(i,j) - e(i,j)]^2 \tag{102}$$

$$e := e_*,\ r := \sqrt{r} \tag{103}$$

5. Interpoluj wektor błędu $e(i,j)$ na siatkę wyjściową:

Aby stworzyć siatkę m razy gęstszą, przy pomocy interpolacji liniowej, należy log_2^m razy zastosować schemat interpolacji siatki.

W działającym kodzie wygląda to tak:

pętla($p := m$; $p \geqslant 2$; $p := p/2$)
    pętla($i := 1$; $i \leqslant N - p$; $i := i + p$)
        pętla($j := 1$; $j \leqslant N - p$; $j := j + p$)
            $e(i + \frac{p}{2}, j) = \frac{e(i,j)+e(i+p,j)}{2}$
            $e(i, j + \frac{p}{2}) = \frac{e(i,j)+e(i,j+p)}{2}$
            $e(i + \frac{p}{2}, j + \frac{p}{2}) = \frac{e(i,j)+e(i+p,j)+e(i,j+p)+e(i+p,j+p)}{4}$

6. Dodaj wektor błędu $e(i,j)$ do tablicy $X(i,j)$:

$2 \leqslant (i,j) \leqslant N - 1 : X(i,j) := X(i,j) + e(i,j)$

7. Wygładź tablicę $X(i,j)$:

Wykonaj k iteracji Gauss-Seidel na pełnej siatce.

zdefiniuj zmienne i przypisz wartości:
    $r := \infty,\ l := 0$
dopóki $(r > \epsilon_1) \wedge (l < k)$:
    a) $r := 0,\ l := l + 1$
    b) dla $2 \leqslant (i,j) \leqslant N - 1$ wykonaj (102),(103),(104).
    c) wykonaj (105).

$$X_*(i,j) := \left[\frac{X(i-1,j) + X(i+1,j)}{L^2} + \frac{X(i,j-1) + X(i,j+1)}{H_*^2} + dx^2\ Y(i,j)\right] / \left(\frac{2}{L^2} + \frac{2}{H_*^2}\right) \tag{104}$$

$$X_*(i,j) := -0.5X(i,j) + 1.5X_*(i,j) \tag{105}$$

$$r := r + [X_*(i,j) - X(i,j)]^2 \tag{106}$$

$$X := X_*,\ r := \sqrt{r} \tag{107}$$

Dodatek

Optymalne wywołania funkcji **multigrid** gwarantujące dużą szybkość. Dobrane "ręcznie" dla kilku rozmiarów siatek:

a) $N = 128 + 1$:
$multigrid(m = 8, k = 8)$
$multigrid(m = 4, k = 4)$
$multigrid(m = 2, k = 2)$
$multigrid(m = 1, k = 1)$

b) $N = 256 + 1$:
$multigrid(m = 16, k = 10)$
$multigrid(m = 8, k = 8)$
$multigrid(m = 4, k = 6)$
$multigrid(m = 2, k = 4)$
$multigrid(m = 1, k = 1)$

c) $N = 512 + 1$:
$multigrid(m = 32, k = 25)$
$multigrid(m = 16, k = 10)$
$multigrid(m = 8, k = 5)$
$multigrid(m = 4, k = 5)$
$multigrid(m = 2, k = 3)$
$multigrid(m = 1, k = 1)$

Zauważmy, że wywołanie $multigrid(m = 1, k = 1)$ odpowiada najprostszemu Gauss-Seidelowi na pełnej siatce.

7 Błąd obliczenia pól prędkości.

Zakładamy **znane rozwiązanie analityczne** składowych prędkości, na podstawie których obliczymy ψ i ω.
Na podstawie ω znajdziemy **pole sił objętościowych** (lub jakąś jego formę, w tym przypadku rotację) spełniające równanie (22).

Z przekształcenia (22):

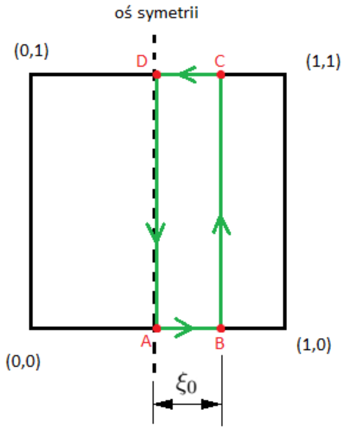
$$\frac{1}{L}\frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H}\frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{L}u\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{H}(v - \dot{H}\eta)\frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \nu\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial \omega^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial \omega^2}{\partial \eta^2}\right] \tag{108}$$

Załóżmy, że profil prędkości $u(\xi, \eta)$ jest w każdym przekroju $\xi = \xi_0$ parabolą:

$$u(\xi, \eta) = -a(\xi) \cdot \eta(1 - \eta)\frac{3L\dot{H}}{H} \tag{109}$$

funkcja $a(\xi)$ nie zależy od zmiennej η, tzn. $\frac{\partial a}{\partial \eta} = 0$

Wybierzmy kontur prostokąta o wierzchołkach $A(0.5, 0), B(\xi_0, 0), C(\xi_0, 1), D(0.5, 1)$ (rysunek 7.).



Rysunek 7: rysunek poglądowy konturu prostokąta

Zdefiniujmy: $\psi_{P_2-P_1} = \psi(P_2) - \psi(P_1)$

ψ musi być ciągłe wzdłuż dowolnego zamkniętego konturu, co można zapisać:

$$\psi_{A-B} + \psi_{B-C} + \psi_{C-D} + \psi_{D-A} = 0 \tag{110}$$

Ponieważ odcinki A-B i C-D należą do brzegu, to następujące wartości są znane:

$$\psi_{A-B} = 0 \tag{111}$$

Stosując wzór (44):

$$\psi_{C-D} = \psi(0.5, 1) - \psi(\xi_0, 1) = \psi_G(0.5) - \psi_G(\xi_0) = \frac{L\dot{H}}{2}(1-2\cdot 0.5) - \frac{L\dot{H}}{2}(1-2\cdot\xi_0) = -\frac{L\dot{H}}{2}(1-2\xi_0) \tag{112}$$

Ponieważ odcinek D-A jest osią symetrii, to zachodzi (nie ma wydatku przepływu przez oś symetrii):

$$\psi_{D-A} = 0 \tag{113}$$

Pozostaje:

$$\psi_{B-C} = \frac{L\dot{H}}{2}(1 - 2\xi_0) \tag{114}$$

ψ_{B-C} jest wydatkiem przez linię B-C, czyli:

$$\psi_{B-C} = \int_0^1 u(x, y)dy = H \int_0^1 u(\xi, \eta)d\eta \tag{115}$$

Podstawiając (107) i (112) do (113) obliczamy funkcję $a(\xi)$:

$$a(\xi) = (2\xi - 1) \tag{116}$$

<u>**Ostatecznie:**</u>

$$u(\xi, \eta) = -\frac{3L\dot{H}}{H}\eta(1 - \eta)(2\xi - 1) \tag{117}$$

Zatem profil prędkości u (na kierunku ξ) zmienia się liniowo od wartości $u_L = \frac{3L\dot{H}}{H}\eta(1-\eta)$ na lewym brzegu ($\xi = 0$) do wartości $u_P = -\frac{3L\dot{H}}{H}\eta(1-\eta)$ na prawym brzegu ($\xi = 1$).

Rozkład prędkości v (na kierunku η) otrzymujemy z przekształconego równania ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{H}\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \tag{118}$$

Wstawiając (115):

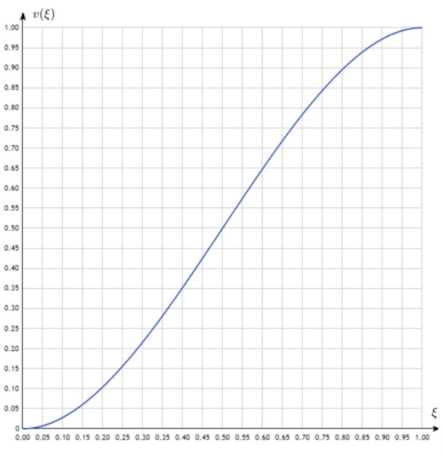
$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{H}{L}\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{H}{L}\cdot(-1)\frac{3L\dot{H}}{H}\eta(1-\eta)\cdot 2 = 6\dot{H}\eta(1-\eta) \tag{119}$$

Całkując z warunkiem brzegowym $v(\eta = 0) = 0$ **otrzymujemy**:

$$v(\xi,\eta) = \dot{H}(3\eta^2 - 2\eta^3) \tag{120}$$

Warunek brzegowy $v(\eta = 1) = \dot{H}$ został spełniony automatycznie.

Zauważmy że rozkład prędkości v na brzegach **nie jest liniowy**, tak jak założyliśmy na początku paragrafu 3. (patrz: Rysunek 8.) Warunek na prędkość styczną okazał się nadmiarowym warunkiem brzegowym (*w rozwiązaniu numerycznym*: w wierzchołku siatki najbliższym brzegowi [ale nie na brzegu] rozkład v będzie poprawny, a na samym brzegu nie).



Rysunek 8: rozkład prędkości $v(\xi) = 2\eta^3 - 3\eta^2$ w poprzek rury dla $\dot{H} = 1$

Podsumowując, założyliśmy następujący profil prędkości:

$$[u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)] = \left[-\frac{3L\dot{H}}{H}\eta(1-\eta)(2\xi - 1),\ \dot{H}(3\eta^2 - 2\eta^3)\right] \tag{121}$$

Przekłada się on na następującą **wirowość** $\omega(\xi,\eta)$:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{L}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 - \frac{1}{H}\cdot(-1)\frac{3L\dot{H}}{H}(1-2\eta)(2\xi-1) \tag{122}$$

$$\omega = -\frac{3L\dot{H}}{H^2}(2\eta-1)(2\xi-1) \tag{123}$$

Funkcja prądu $\psi(\xi,\eta)$ przyjmie postać:

$$\psi = -\frac{L\dot{H}}{2}(3\eta^2-2\eta^3)(2\xi-1) \tag{124}$$

Obliczmy pochodne:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 3L\left(-\frac{\ddot{H}}{H^2} + 2\frac{\dot{H}^2}{H^3}\right)(2\eta-1)(2\xi-1) \tag{125}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = -\frac{6L\dot{H}}{H^2}(2\eta-1) \tag{126}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = -\frac{6L\dot{H}}{H^2}(2\xi-1) \tag{127}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = 0 \tag{128}$$

Podstawiając (119), (123), (124), (125), (126) do równania (22) i wykonując niezbędne przekształcenia **otrzymamy**:

$$\frac{1}{L}\frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H}\frac{\partial f_1}{\partial \eta} = 3L\left(-\frac{\ddot{H}}{H^2} + 2\frac{\dot{H}^2}{H^3}\right)(2\eta-1)(2\xi-1) + \frac{12L\dot{H}^2}{H^3}(-2\eta^3+3\eta^2-\eta)(2\xi-1) \tag{129}$$

Jeśli przyjmiemy $H(t) = H_0(1-b\ t)$, to zajdzie $\ddot{H}=0$ i powyższe uprości się do postaci:

$$\frac{1}{L}\frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H}\frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{6L\dot{H}^2}{H^3}(-4\eta^3+6\eta^2-1)(2\xi-1) \tag{130}$$

Ostatecznie równanie (22) przyjmie postać (tylko dla $\ddot{H}=0$):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{L}u\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{H}(v-\dot{H}\eta)\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \nu\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial \omega^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial \omega^2}{\partial \eta^2}\right] + \frac{6L\dot{H}^2}{H^3}(-4\eta^3+6\eta^2-1)(2\xi-1) \tag{131}$$

Po dołączeniu do równania (131) równań (23),(24),(25), rozwiązaniami analitycznymi układu będą pola (121),(123),(124).

Warunki brzegowe na u, v, ψ określamy według wzorów (36)-(51). Chociaż wiemy że rozkład v na brzegach jest nieliniowy, to w celu wiarygodnego obliczenia błędu metody (co jest celem tego paragrafu) należy przyjąć go tak samo jak w paragrafie 3. (czyli jako liniowy).

Wartości początkowe pól ψ i ω są niezerowe. Należy je określić według wzorów (121) i (122) dla chwili $T = 0$, co zmodyfikuje punkt 2. algorytmu z paragrafu 5. "Dyskretyzacja siatki i algorytm".

8 Błąd obliczenia pola ciśnienia.

Należy przyjąć jakiekolwiek funkcje $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$ spełniające zależność (128).
Niech będą one następujące:

$$f_1 = 0 \tag{132}$$

$$f_2 = \frac{6L^2\dot{H}^2}{H^3}(-4\eta^3 + 6\eta^2 - 1)(\xi^2 - \xi) \tag{133}$$

(130) i (131) należy podstawić do równań (63) i (64) i wyprowadzić wzory na analityczne pochodne ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ i $\frac{\partial p}{\partial \eta}$.

Obliczmy pochodne prędkości danych wzorem (119):

Składowa u:

$$u_t = -3L\frac{\ddot{H} - \dot{H}^2}{H^2}\eta(1-\eta)(2\xi - 1) \overset{\ddot{H}=0}{=} 3L\frac{\dot{H}^2}{H^2}\eta(1-\eta)(2\xi - 1) \tag{134}$$

$$u_\xi = -6L\frac{\dot{H}}{H}\eta(1-\eta) \tag{135}$$

$$u_\eta = 3L\frac{\dot{H}}{H}(2\eta - 1)(2\xi - 1) \tag{136}$$

$$u_{\xi\xi} = 0 \tag{137}$$

$$u_{\eta\eta} = 6L\frac{\dot{H}}{H}(2\xi - 1) \tag{138}$$

Składowa v:

$$v_t = \ddot{H}(3\eta^2 - 2\eta^3) \overset{\ddot{H}=0}{=} 0 \tag{139}$$

$$v_\xi = 0 \tag{140}$$

$$v_\eta = 6\dot{H}\eta(1-\eta) \tag{141}$$

$$v_{\xi\xi} = 0 \tag{142}$$

$$v_{\eta\eta} = 6\dot{H}(1 - 2\eta) \tag{143}$$

Podstawiając (132)-(136) do równania (63) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \xi} = \rho\Bigg[- 3L^2\frac{\dot{H}^2}{H^2}\eta(1-\eta)(2\xi-1)- \\ -\frac{18L^2\dot{H}^2}{H^2}\eta^2(1-\eta)^2(2\xi-1)- \\ -\frac{3L^2\dot{H}^2}{H^2}(3\eta^2-2\eta^3-\eta)(2\eta-1)(2\xi-1)+ \\ \nu\frac{6L^2\dot{H}}{H^3}(2\xi-1)+ \\ 0\Bigg]\end{aligned} \tag{144}$$

Zauważmy że: $Re = \frac{\dot{H}\cdot H}{\nu} \longrightarrow \nu = \frac{\dot{H}\cdot H}{Re}$

<u>**Wykonując niezbędne przekształcenia dostaniemy:**</u>

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -6\rho L^2\frac{\dot{H}^2}{H^2}(2\xi-1)\left(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta - \frac{1}{Re}\right) \tag{145}$$

Podstawiając (137)-(141) do równania (64) otrzymamy:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \rho\left[-6\dot{H}^2(3\eta^2-2\eta^3-\eta)\eta(1-\eta) + 6\nu\frac{\dot{H}}{H}(1-2\eta) + \frac{6L^2}{H^2}\dot{H}^2(-4\eta^3+6\eta^2-1)(\xi^2-\xi)\right] \tag{146}$$

<u>**Po maksymalnych uproszczeniach:**</u>

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -6\rho\dot{H}^2(2\eta-1)\left[(\eta-1)^2\eta^2 + \frac{1}{Re} + \frac{L^2}{H^2}(2\eta^2-2\eta-1)(\xi^2-\xi)\right] \tag{147}$$

<u>**Pole ciśnienia związane z pochodnymi (143) i (144) ma poniższą postać:**</u>

$$\hat{p}(\xi,\eta) = -6\rho L^2\frac{\dot{H}^2}{H^2}(\xi^2-\xi)\left(\eta^4-2\eta^3+\eta-\frac{1}{Re}\right) - 2\rho\dot{H}^2(\eta^2-\eta)\left(\eta^4-2\eta^3+\eta^2+\frac{3}{Re}\right) \tag{148}$$

Wzór może być zmodyfikowany o stałą. Założenie, że **ciśnienie w środku geometrycznym rury jest zerowe** daje poniższy <u>**pełny**</u> **wzór na pole ciśnienia**:

$$p(\xi,\eta) = \hat{p}(\xi,\eta) - \hat{p}(0.5, 0.5) \tag{149}$$

9 Wyniki - błędy pól prędkości i ciśnienia.

Przyjęto następujące wielkości globalne:

1) $H(t) = 1 - 0.5t$
2) $L = 1$
3) $\Delta t = 10^{-4}$
4) $\epsilon_1 = 10^{-7}$
5) $\nu = 10^{-2}$
6) $\rho = 1000$

Oraz założenia:

7) Algorytm jawnej dyskretyzacji po czasie.
8) Pole prędkości na brzegach według (119).
9) Funkcja prądu na brzegach według (122).
10) Wirowość i funkcja prądu w chwili $T = 0$ według (121) i (122).

Przedmiotem porównywanym jest rozkład wielkości P w przekroju poprzecznym rury, dla danego $\xi = (i-1) \cdot h$. Przy czym $\xi \in \{0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1\}$, co umożliwia zbadanie rozkładu w dowolnym przekroju rury (od osi symetrii do wylotu).

Błąd δP wartości numerycznej P_* (wynik algorytmu) względem wartości analitycznej P (dokładnej) policzono odchyleniem standardowym:

$$\delta P = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left[P(i,j) - P_*(i,j)\right]^2}}{N} \tag{150}$$

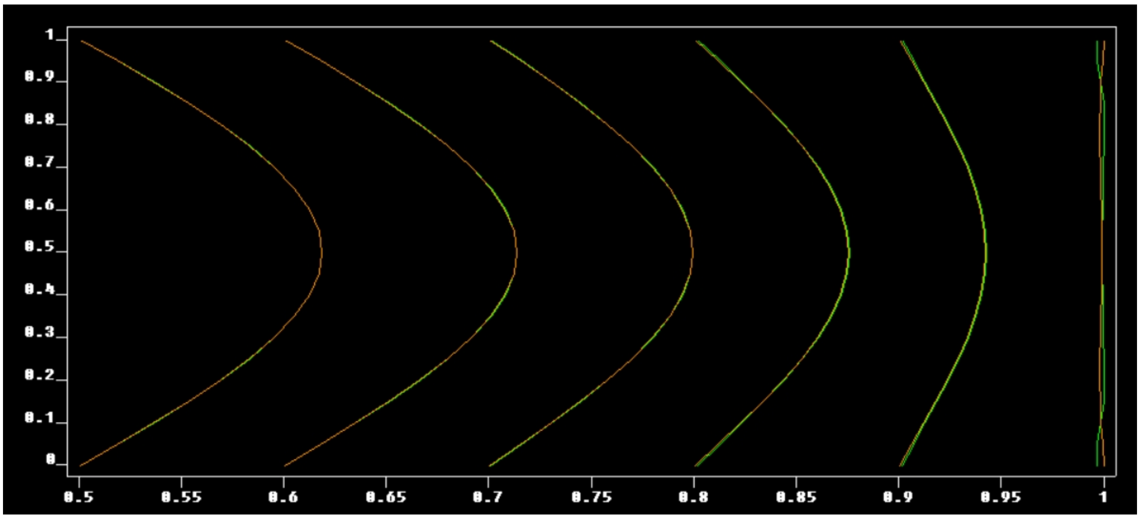
Czas symulacji postępować będzie do przodu, dopóki algorytm nie stanie się niestabilny (ale nie dłużej niż $T_{max} = 3s$).

Wzięto pod uwagę 7 rozmiarów siatki (ilość węzłów wzdłuż boku kwadratu):

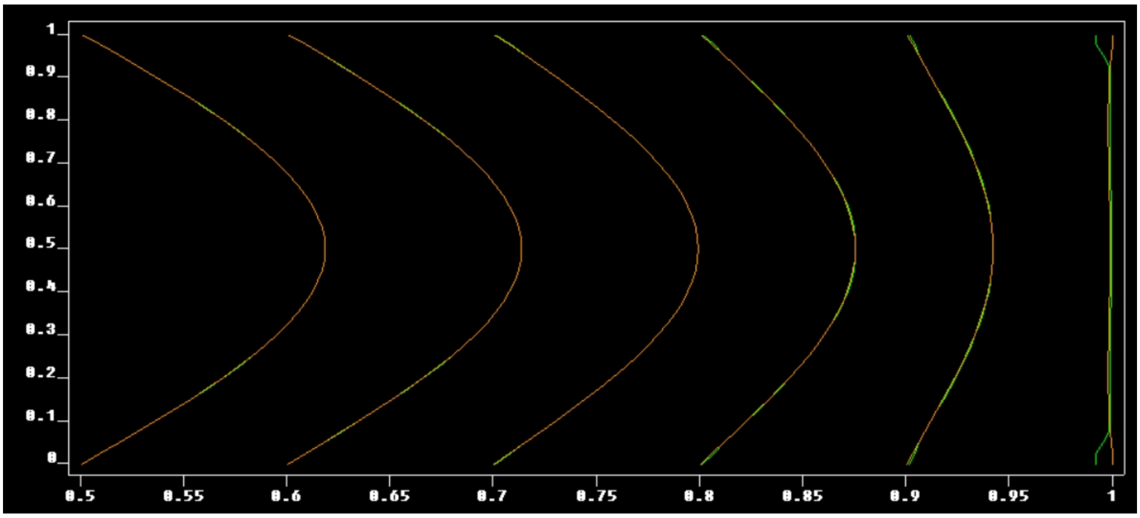
a) $N = 21$
b) $N = 41$
c) $N = 101$
d) $N = 161$
e) $N = 201$
f) $N = 401$

Wymiary siatek wybrano ze względu na logistykę - brane pod uwagę będą przekroje co $\Delta\xi = 0.05$, zatem wygodnie jeśli wielokrotność odległości między dwoma wierzchołkami siatki może być równa 0.05.

Wartości Δt i ϵ_1 dobrano jako największe niepogarszające dokładności numerycznej jakiegokolwiek z pól (a więc tak, aby **dominujący był błąd dyskretyzacji siatki**).



Rysunek 9: rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych dla N = 21, T = 0.6s



Rysunek 10: rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych dla N = 41, T = 0.6s

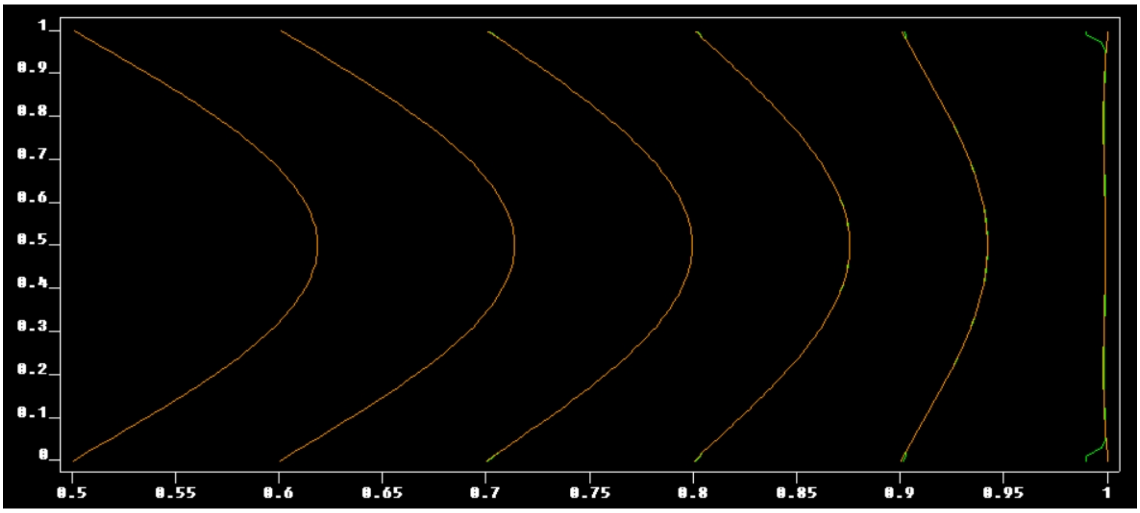
Na rysunkach 9-13 przedstawiono porównanie rozkładów ciśnienia w kilku przekrojach poprzecznych rury, dla $\xi = \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$, przy czym:

a) kolor zielony - ciśnienie policzone numerycznie.
b) kolor pomarańczowy - ciśnienie policzone wzorem analitycznym.

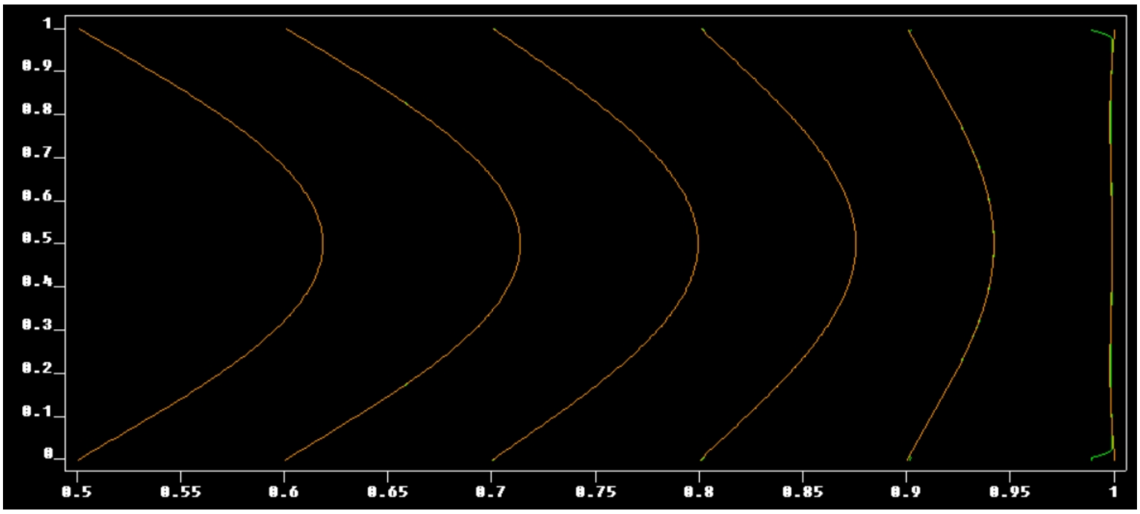
Oba wykresy z danej pary zostały transponowane o tę samą wartość, taką aby wykres pomarańczowy (wzór analityczny) zaczynał się na podziałce poziomej o odpowiadającym ξ.

Na wykresach widać, że **im przekrój dalej od osi symetrii rury, tym błąd jest większy.**

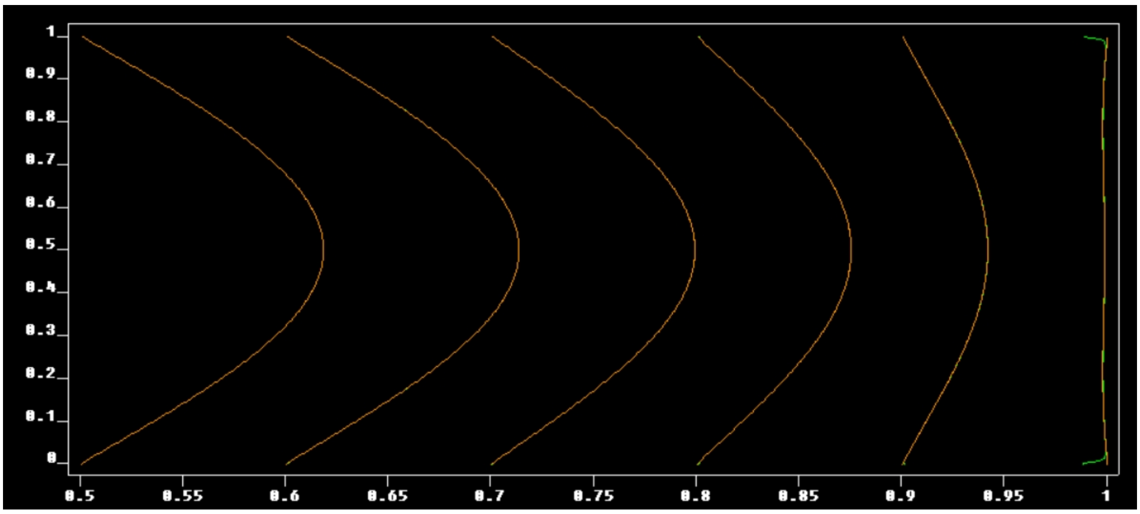
Ponadto, ciśnienie przy brzegach dla przekrojów blisko wylotu jest obarczone poważnym błędem, którego pełne wyeliminowanie jest **niemożliwe w metodzie różnic skończonych**. Należałoby użyć **gęstszej siatki przy brzegu.**



Rysunek 11: rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych dla N = 101, T = 0.6s



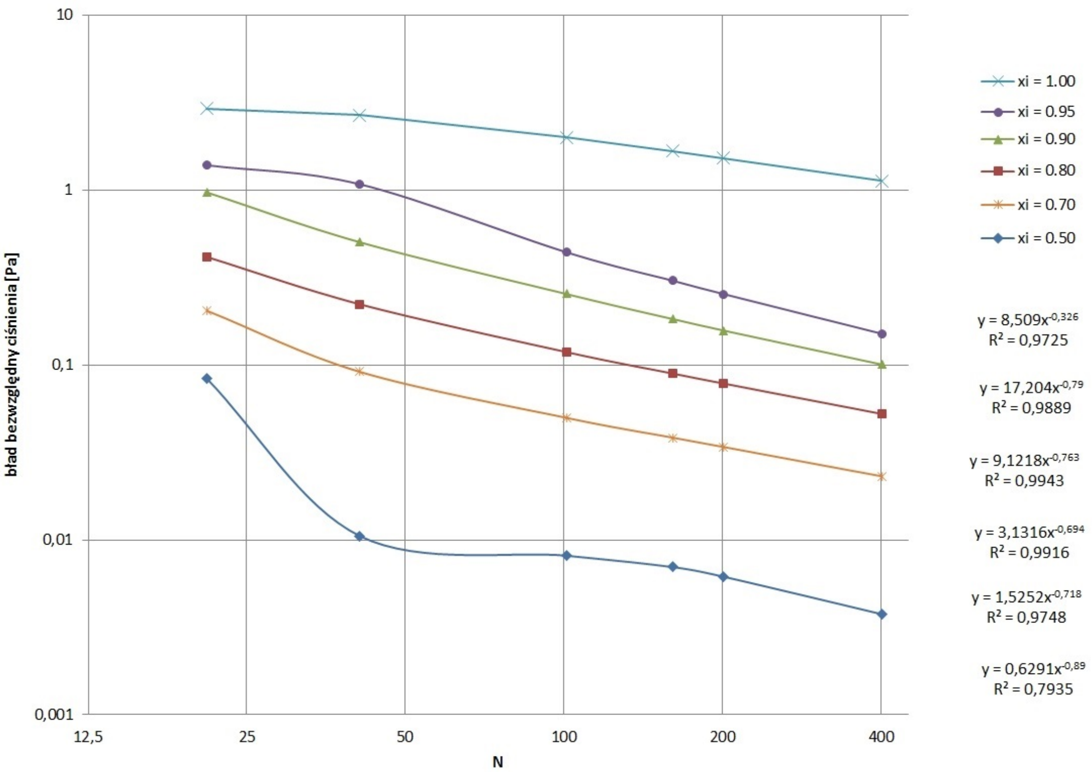
Rysunek 12: rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych dla N = 201, T = 0.6s



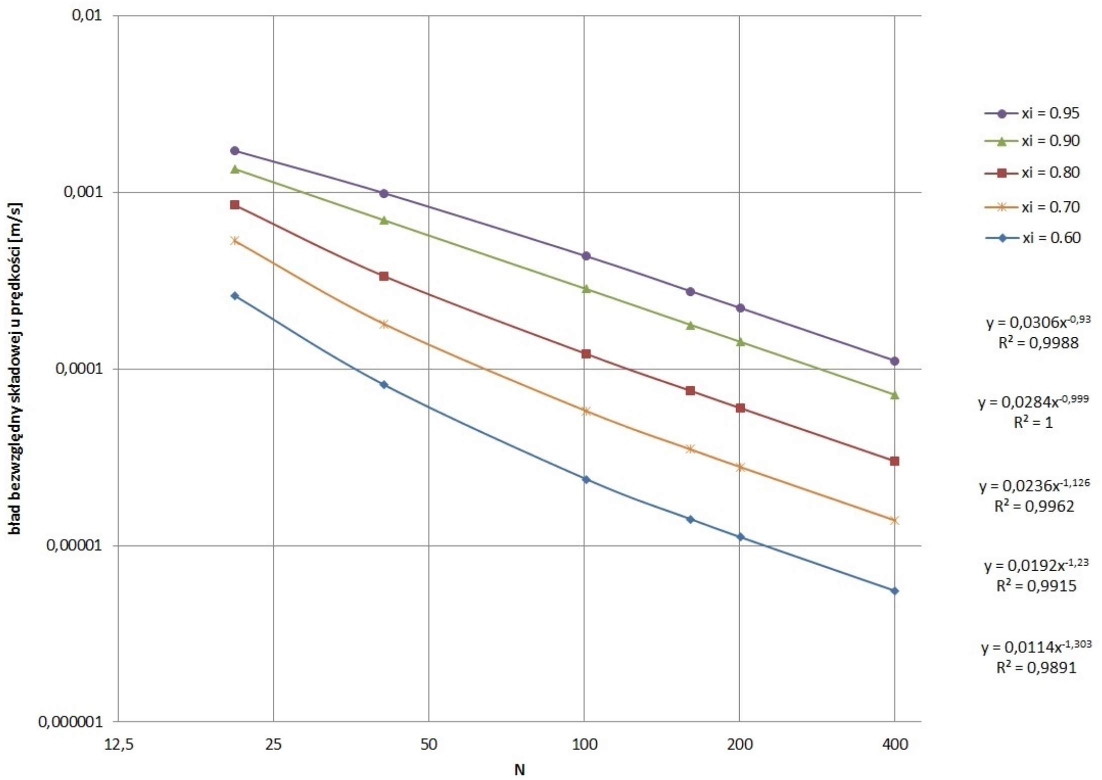
Rysunek 13: rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych dla N = 401, T = 0.6s

W późniejszej analizie, już tytułowego zagadnienia przepływowego, wyniki numeryczne przy brzegach, blisko wylotu będzie należało **zignorować i uznać za niezgodne z prawdą.**

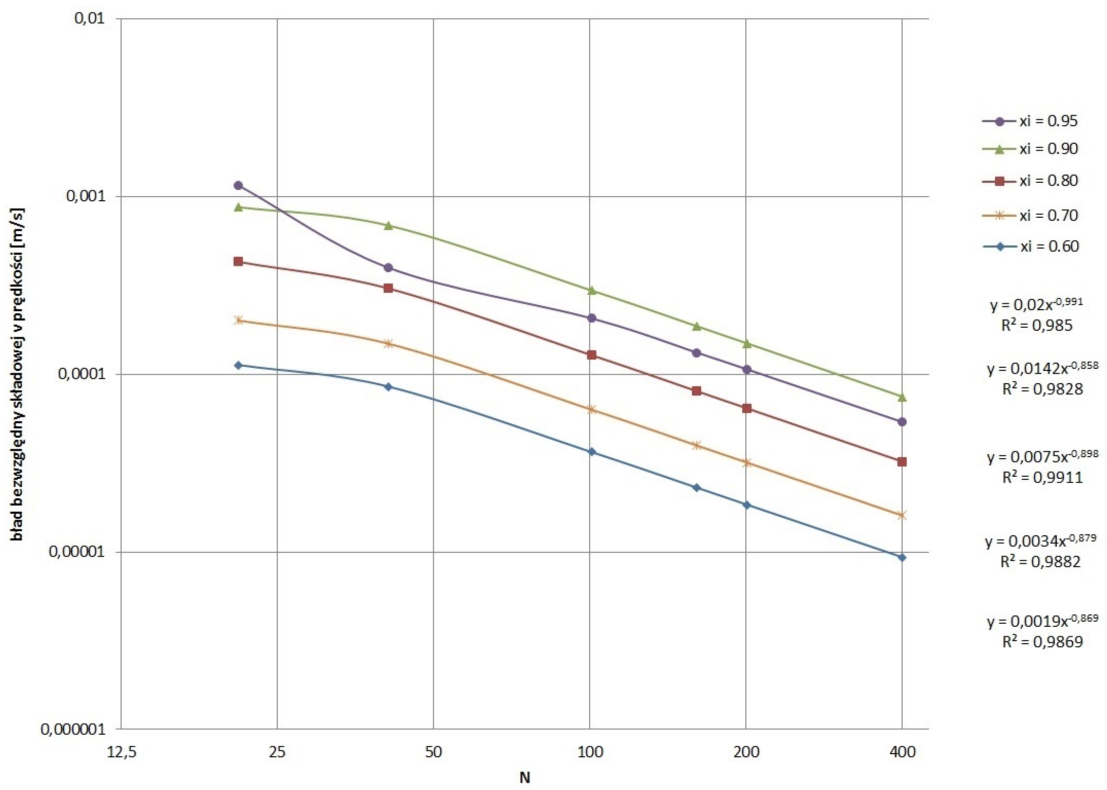
Na rysunkach 15-20, z prawej strony wykresów, pod legendą wypisano równania linii regresji oraz ich dopasowanie R^2, w kolejności od przekroju najdalszego do najbliższego osi symetrii rury.



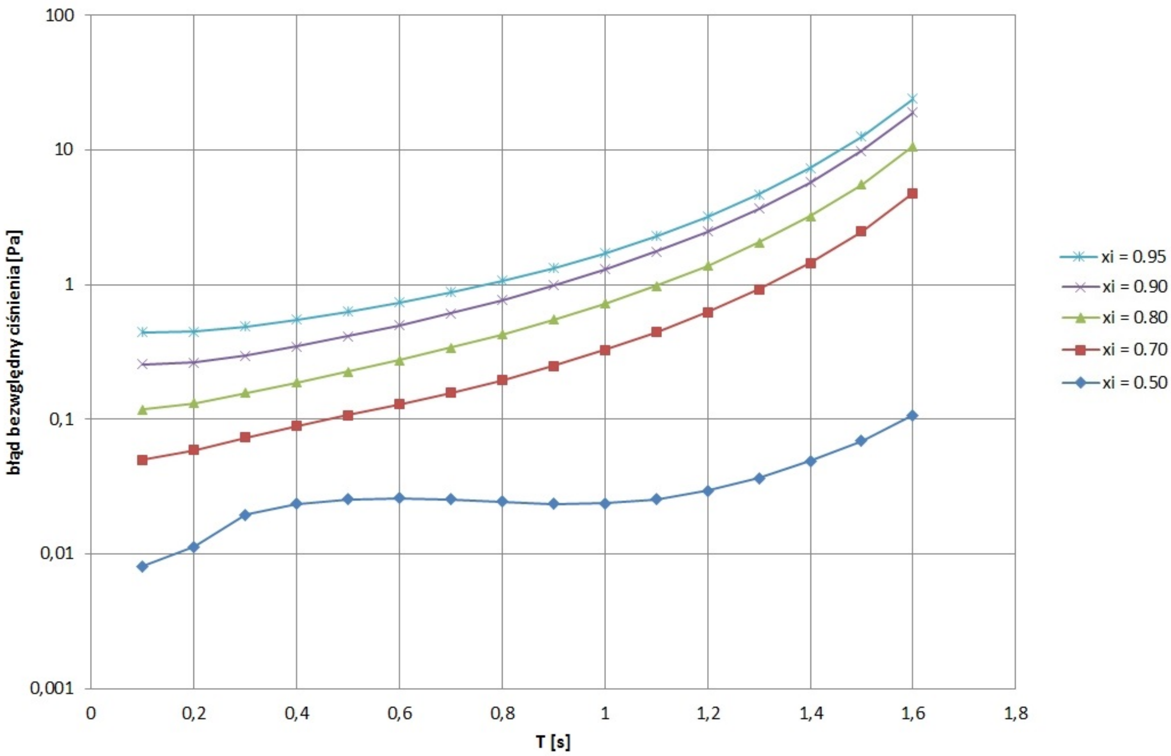
Rysunek 14: błąd ciśnienia, w zależności od położenia przekroju i rozmiaru siatki, T = 0.1s



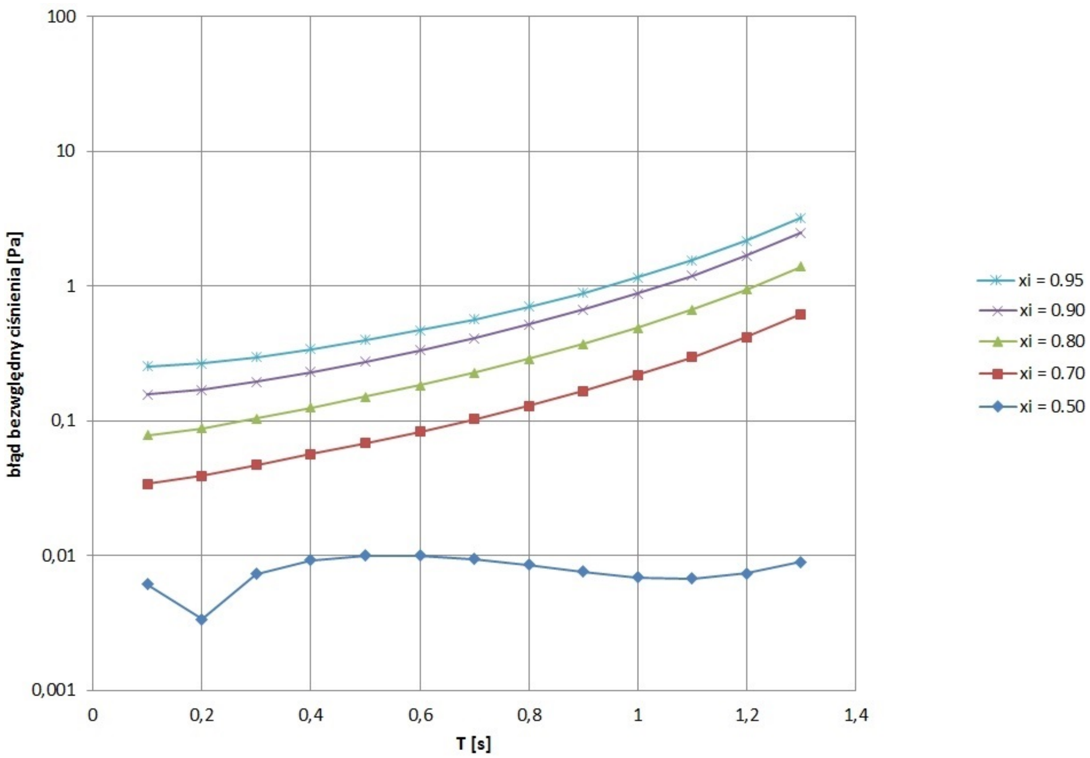
Rysunek 15: błąd składowej u, w zależności od położenia przekroju i rozmiaru siatki, T = 0.1s



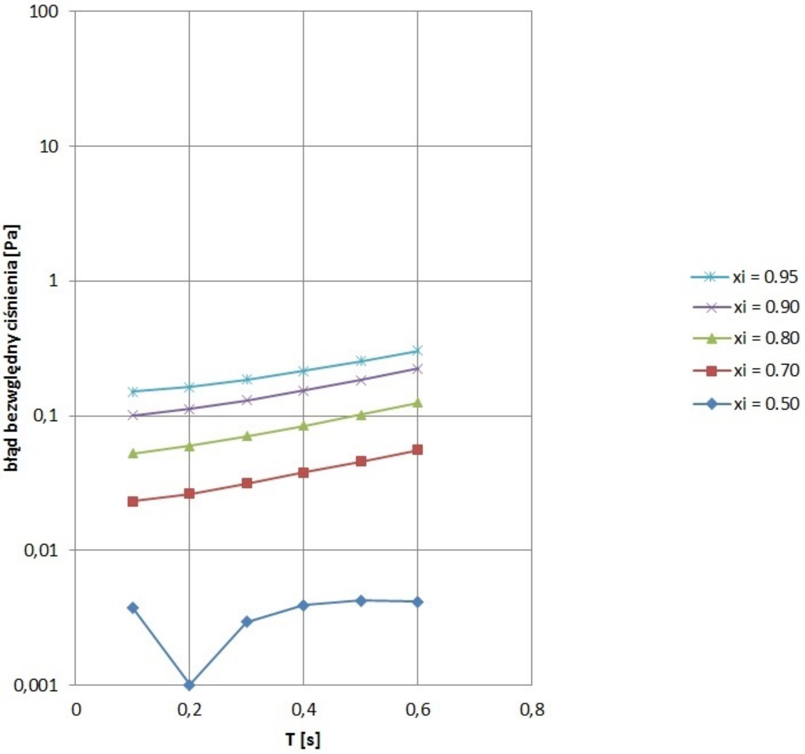
Rysunek 16: błąd składowej v, w zależności od położenia przekroju i rozmiaru siatki, T = 0.1s



Rysunek 17: błąd czasu symulacji, ciśnienie w przekrojach, N = 101



Rysunek 18: błąd czasu symulacji, ciśnienie w przekrojach, N = 201



Rysunek 19: błąd czasu symulacji, ciśnienie w przekrojach, N = 401

9.1. Błąd obliczenia ciśnienia (rysunek 14.), w zależności od miejsca położenia przekroju:

$$\delta p(\xi = 1.00) = 8.509\ N^{-0.326}$$
$$\delta p(\xi = 0.95) = 17.204\ N^{-0.790}$$
$$\delta p(\xi = 0.90) = 9.1218\ N^{-0.763}$$
$$\delta p(\xi = 0.80) = 3.1316\ N^{-0.694}$$
$$\delta p(\xi = 0.70) = 1.5252\ N^{-0.718}$$
$$\delta p(\xi = 0.50) = \text{funkcja niepotęgowa}$$

Współczynnik wykładniczy przy członie z rozmiarem siatki N wynosi raczej $(-0.6) \div (-0.7)$, czyli **zbieżność jest gorsza niż liniowa.**
W przekrojach bardzo bliskich wylotowi, współczynnik ten spada aż do -0.3, to jest katastrofalne.

9.2. Błąd obliczenia składowej u prędkości (rysunek 15.) maleje **liniowo** względem rozmiaru siatki, niezależnie od miejsca położenia przekroju (te same nachylenia prostych na wykresie):

$$\delta u(\xi = 0.95) = 0.0306\ N^{-0.930}$$
$$\delta u(\xi = 0.90) = 0.0284\ N^{-0.999}$$
$$\delta u(\xi = 0.80) = 0.0236\ N^{-1.126}$$
$$\delta u(\xi = 0.70) = 0.0192\ N^{-1.230}$$
$$\delta u(\xi = 0.60) = 0.0114\ N^{-1.303}$$

9.3. Błąd obliczenia składowej v prędkości (rysunek 16.) maleje **trochę wolniej niż liniowo** względem rozmiaru siatki (współczynnik wykładniczy przy N około -0.88), niezależnie od miejsca położenia przekroju:

$$\delta v(\xi = 0.95) = 0.0200\ N^{-0.991}$$
$$\delta v(\xi = 0.90) = 0.0142\ N^{-0.858}$$
$$\delta v(\xi = 0.80) = 0.0075\ N^{-0.898}$$
$$\delta v(\xi = 0.70) = 0.0034\ N^{-0.879}$$
$$\delta v(\xi = 0.60) = 0.0019\ N^{-0.869}$$

9.4. Błąd wynikający z postępu czasu symulacji (rysunki 17-19) jest **funkcją niepotęgową, bliską wykładniczej**.
Im większy rozmiar siatki, tym mniejsza ostateczna wielkość tego błędu.
Wyjątek stanowi wykres błędu dla $\xi = 0.50$, który ma postać nieregularną (prawdopodobnie zmniejszenie wartości ϵ_1 poprawiłoby tę zależność).

9.5. Stabilność. Dla każdego rozmiaru siatki, od pewnej chwili czasowej **algorytm stawał się niestabilny**. Dokładne maksymalne uzyskane czasy symulacji:

a) $N = 21 \longrightarrow T_{max} = 1.94s$
b) $N = 41 \longrightarrow T_{max} = 1.88s$
c) $N = 101 \longrightarrow T_{max} = 1.70s$
d) $N = 161 \longrightarrow T_{max} = 1.52s$
e) $N = 201 \longrightarrow T_{max} = 1.38s$
f) $N = 401 \longrightarrow T_{max} = 0.68s$

10 Ściskanie rurki - wyniki symulacji.

Przyjęto następujące wielkości globalne:

1) 2 warianty zależności wysokości rurki od czasu:
    A) $H(t) = 1 - 0.5\ t$
    B) $H(t) = 2^{-t}$
2) $L = 1$
3) $\Delta t = 10^{-4}$
4) $\epsilon_1 = 10^{-7}$
5) $\nu = 10^{-2}$
6) $\rho = 1000$

Oraz założenia:

7) Algorytm jawnej dyskretyzacji po czasie.
8) Pole prędkości na brzegach według (36)-(43).
9) Funkcja prądu na brzegach według (44)-(47).
10) Wirowość w chwili $T = 0$ wszędzie zerowa.

10.1. Stabilność. Tak jak w symulacji liczącej błąd (paragraf 9.), istnieje ograniczenie na maksymalną chwilę czasową, zależne od liczby N:

wariant A):

a) $N = 101 \longrightarrow T_{max} = 2.68s$
b) $N = 201 \longrightarrow T_{max} = 1.68s$
c) $N = 301 \longrightarrow T_{max} = 1.10s$

wariant B):

a) $N = 101 \longrightarrow T_{max} = 1.70s$
b) $N = 201 \longrightarrow T_{max} = 1.38s$
c) $N = 301 \longrightarrow T_{max} = 1.08s$

Uwaga ogólna: Na rysunkach (20-26) wykresy przekrojów zostały tak przesunięte w poziomie, aby prosta prostopadła do osi, przechodząca przez rzędną o danym ξ, przecinała dany wykres dokładnie w osi rury.

Analiza wariantu A):

Analizując 10.2. zauważamy, że istotnie algorytm zwiększa swoją dokładność dla rosnącego N, z rozbieżnościami głównie przy ściankach i wylotach.

W przypadku stałej w czasie prędkości górnej ścianki (wariant A)), rozkład ciśnienia jest symetryczny względem osi rury.

Analizując rysunki 20-22 widzimy, że rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych jest prawie stały dla przekrojów odległych o ponad 10% długości rury od jej wylotu.

W przekrojach przywylotowych pojawia się wyraźny spadek ciśnienia w pobliżu osi.

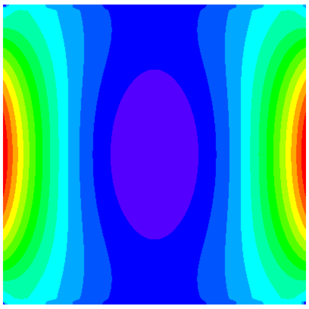
Analiza wariantu B):

Jeśli prędkość górnej ścianki jest zmienna w czasie, to pole ciśnienia jest niesymetryczne względem osi rury.

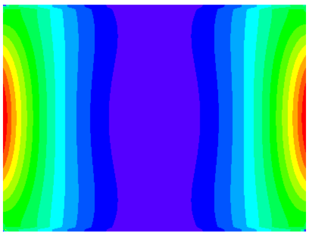
Pola prędkości i funkcja prądu (podparagrafy 10.5. i 10.9.) mają podobny charakter, niezależnie od postaci funkcji $H(t)$.

(10.3. i 10.8.) Rozkład ciśnienia w przekroju przywylotym jest w wariancie B) bardziej równomierny, niż w wariancie A) **(brak wyraźnego spadku ciśnienia w pobliżu osi)**.
Wraz z postępem czasu, rozkład ten zdaje się zbiegać do położenia równoległego do linii przekrojów.

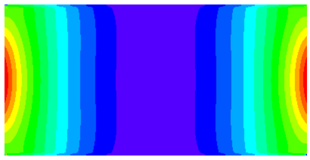
10.2. Wariant A), pole ciśnienia, ewolucja w czasie, 3 różne siatki.



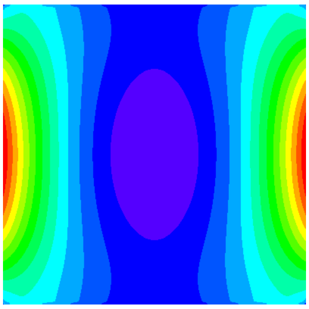
(a) N = 101, T = 0.02s



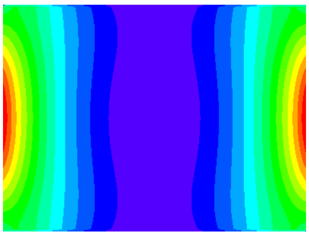
(b) N = 101, T = 0.5s



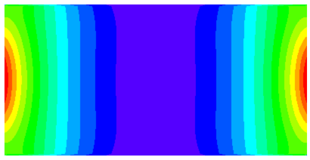
(c) N = 101, T = 1s



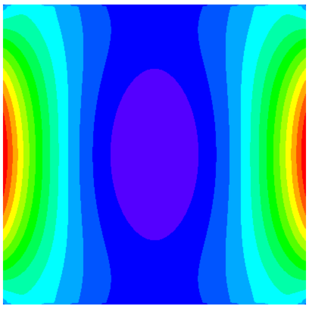
(a) N = 201, T = 0.02s



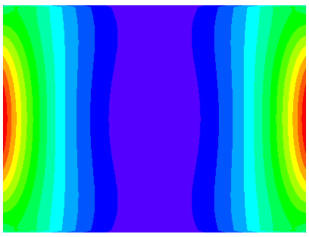
(b) N = 201, T = 0.5s



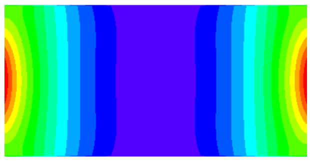
(c) N = 201, T = 1s



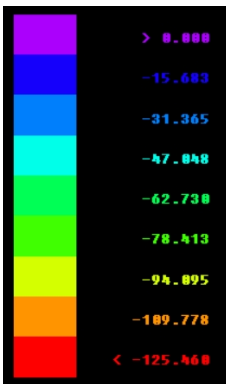
(a) N = 301, T = 0.02s



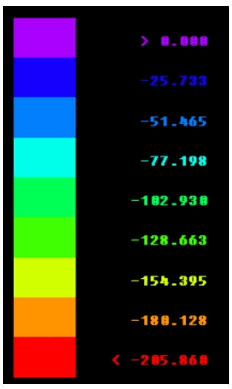
(b) N = 301, T = 0.5s



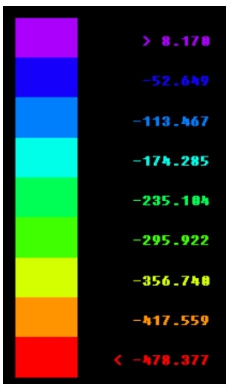
(c) N = 301, T = 1s



(a) skala, T = 0.02s

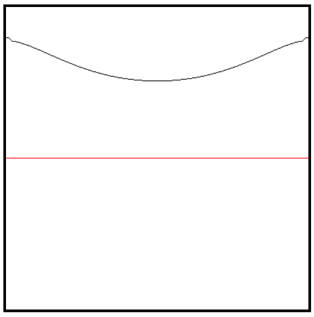


(b) skala, T = 0.5s

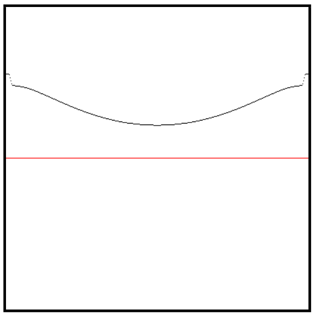


(c) skala, T = 1s

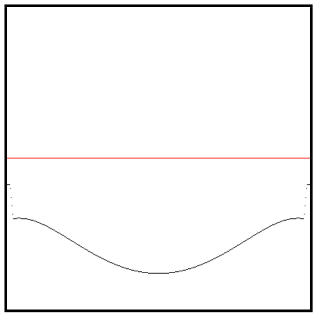
10.3. Wariant A), rozkład ciśnienia w przekroju poprzecznym dla $\xi = 0.95$, ewolucja w czasie, 3 różne siatki.



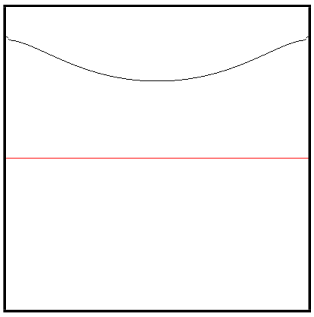
(a) N = 101, T = 0.02s



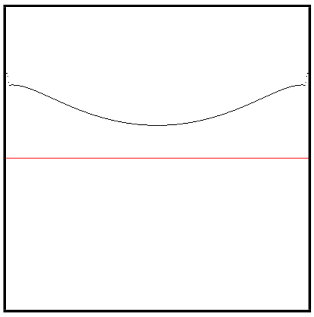
(b) N = 101, T = 0.5s



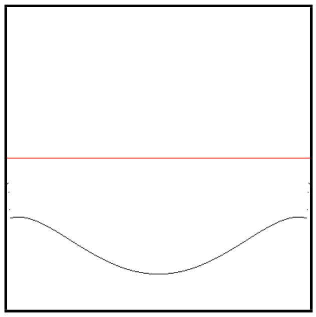
(c) N = 101, T = 1s



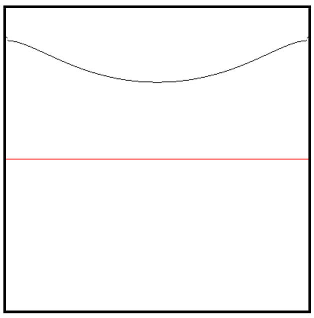
(a) N = 201, T = 0.02s



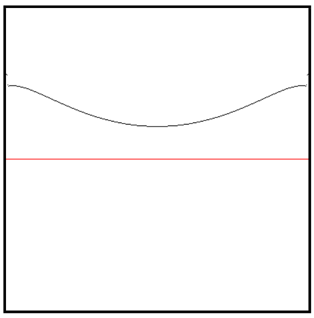
(b) N = 201, T = 0.5s



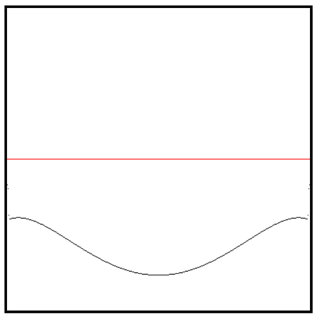
(c) N = 201, T = 1s



(a) N = 301, T = 0.02s



(b) N = 301, T = 0.5s



(c) N = 301, T = 1s

Wyjaśnienie skali:

pozioma krawędź ramki - odległość od ścianek rurki.

pionowa krawędź ramki - wartość ciśnienia:

dolny róg ramki:

$$p = -400\ Pa$$

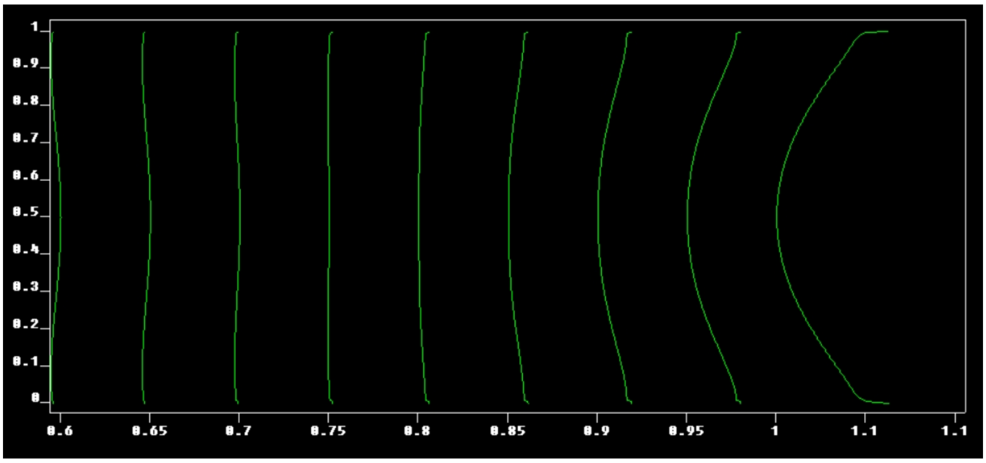
czerwona linia:

$$p = -200\ Pa$$

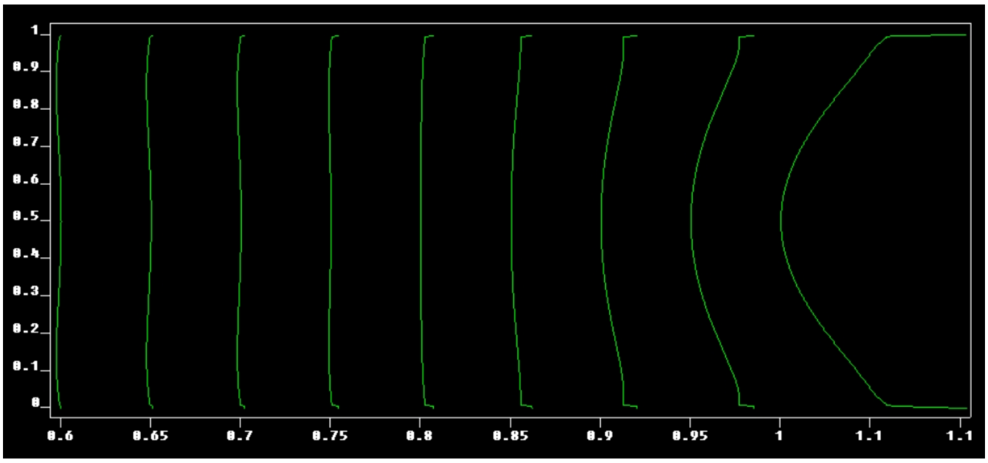
górny róg ramki:

$$p = 0\ Pa$$

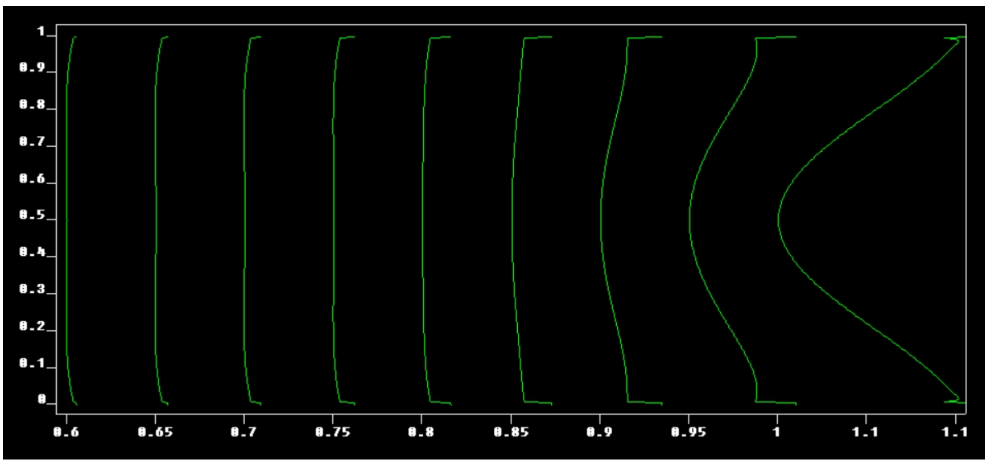
10.4. Wariant A), rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych, dla $\xi = \{0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95\}$.



Rysunek 20: T = 0.02s

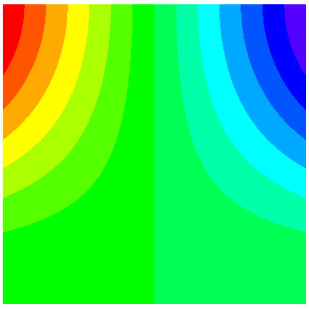


Rysunek 21: T = 0.5s

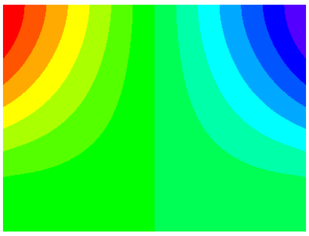


Rysunek 22: T = 1s

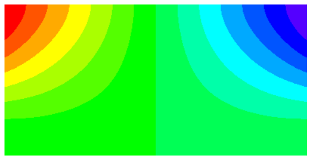
10.5. Wariant A), funkcja prądu, składowe i moduł prędkości, ewolucja w czasie, siatka $N = 301$.



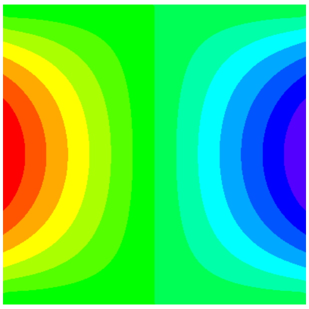
(a) T = 0.02s, ψ



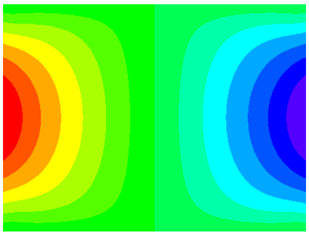
(b) T = 0.5s, ψ



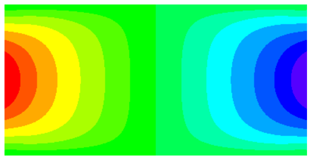
(c) T = 1s, ψ



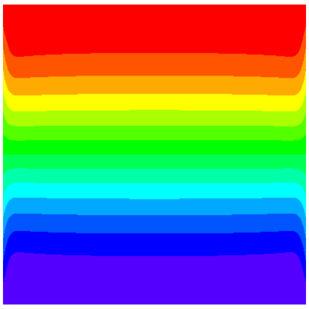
(a) T = 0.02s, u



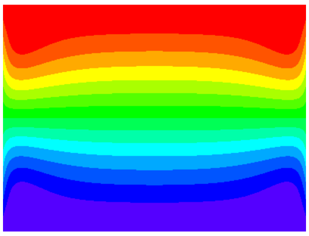
(b) T = 0.5s, u



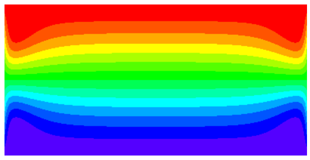
(c) T = 1s, u



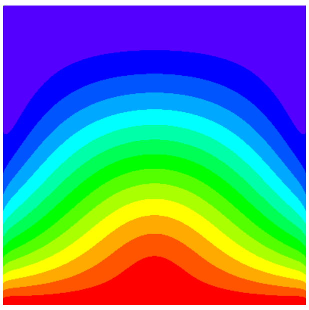
(a) T = 0.02s, v



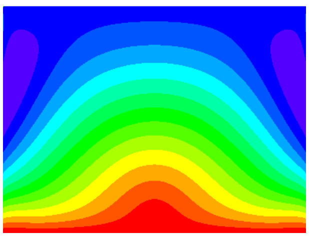
(b) T = 0.5s, v



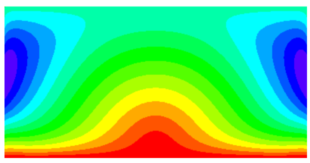
(c) T = 1s, v



(a) T = 0.02s, $\sqrt{u^2 + v^2}$

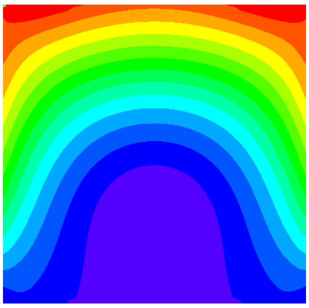


(b) T = 0.5s, $\sqrt{u^2 + v^2}$

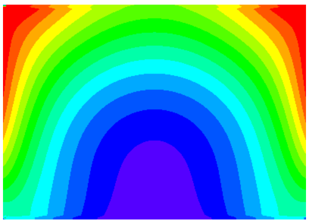


(c) T = 1s, $\sqrt{u^2 + v^2}$

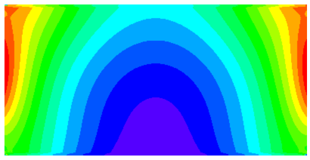
10.6. Wariant B), pole ciśnienia, ewolucja w czasie, 3 różne siatki.



(a) N = 101, T = 0.02s

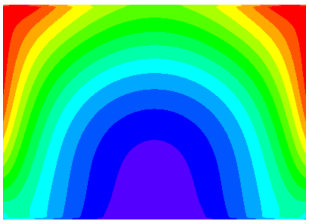


(b) N = 101, T = 0.5s

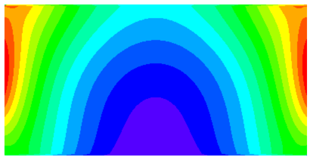


(c) N = 101, T = 1s

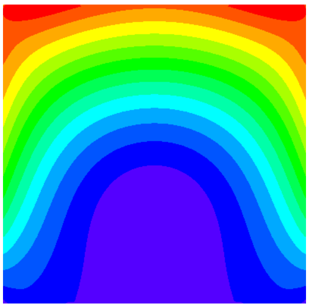
(a) N = 201, T = 0.02s



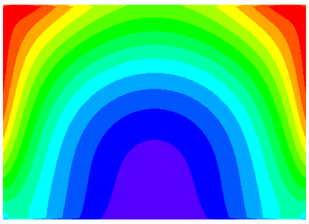
(b) N = 201, T = 0.5s



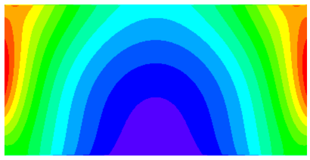
(c) N = 201, T = 1s



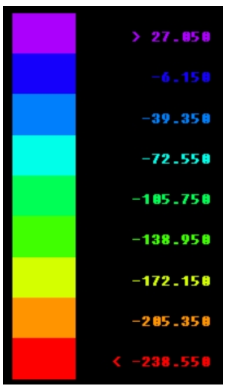
(a) N = 301, T = 0.02s



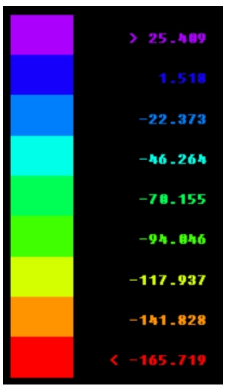
(b) N = 301, T = 0.5s



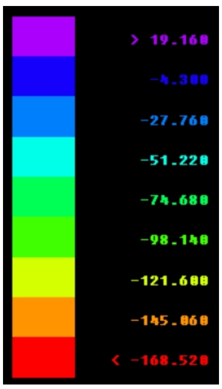
(c) N = 301, T = 1s



(a) skala, T = 0.02s

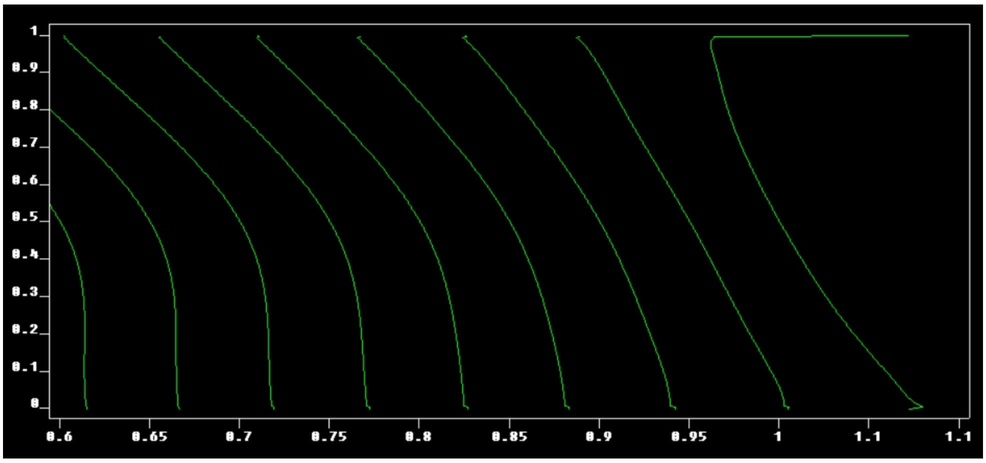


(b) skala, T = 0.5s

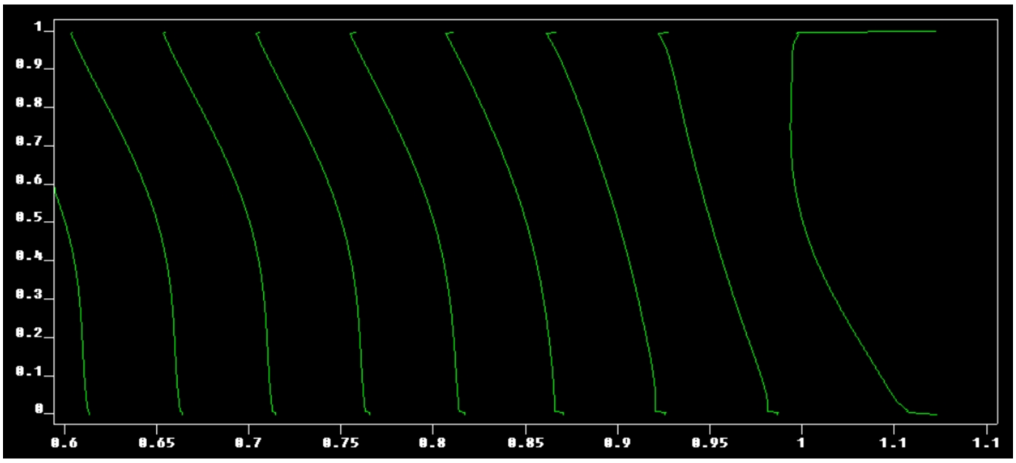


(c) skala, T = 1s

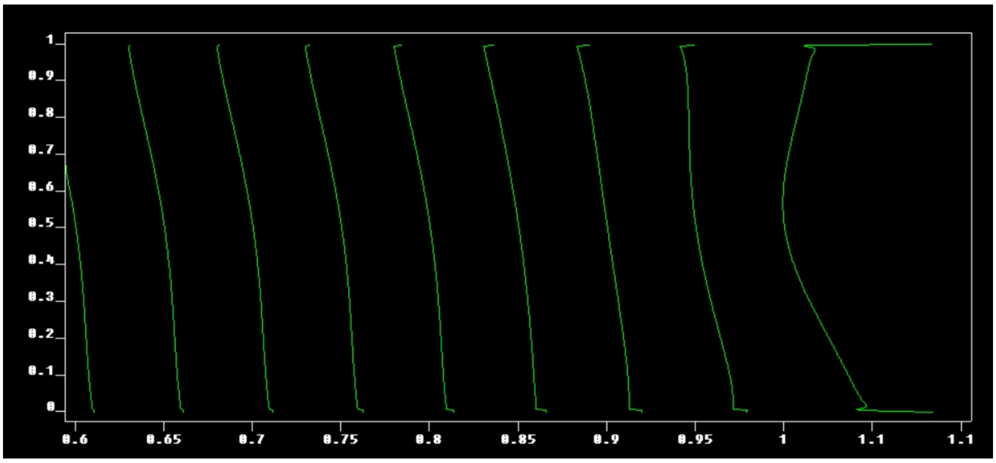
10.7. Wariant B), rozkład ciśnienia w przekrojach poprzecznych, dla $\xi = \{0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95\}$.



Rysunek 23: T = 0.02s

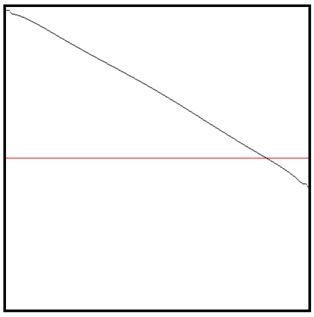


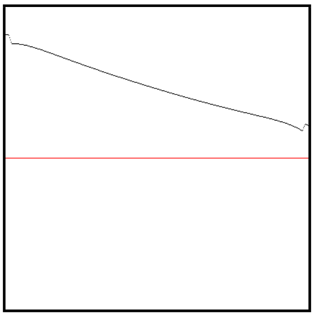
Rysunek 24: T = 0.5s

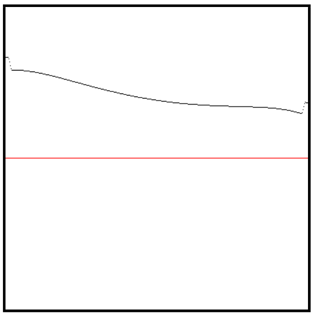


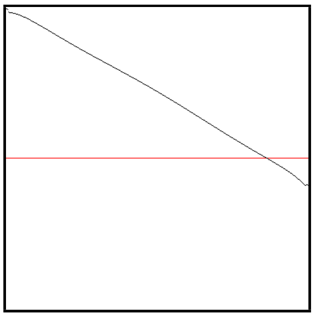
Rysunek 25: T = 1s

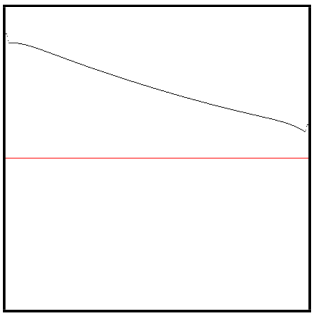
10.8. Wariant B), rozkład ciśnienia w przekroju poprzecznym dla $\xi = 0.95$, ewolucja w czasie, 3 różne siatki.

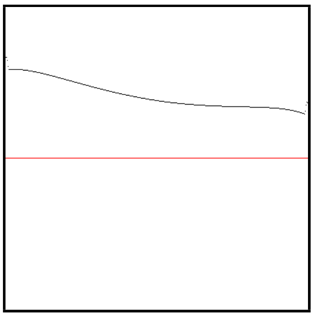

(a) N = 101, T = 0.02s

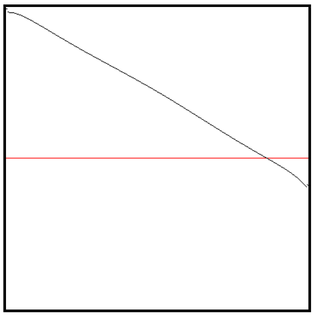

(b) N = 101, T = 0.5s

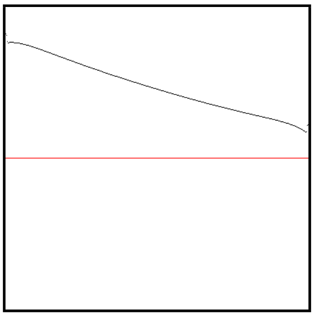

(c) N = 101, T = 1s

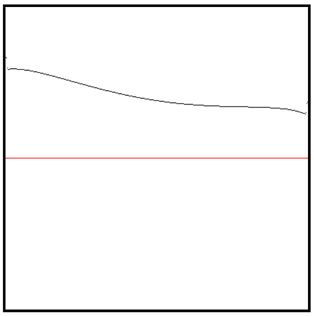

(a) N = 201, T = 0.02s


(b) N = 201, T = 0.5s


(c) N = 201, T = 1s


(a) N = 301, T = 0.02s


(b) N = 301, T = 0.5s


(c) N = 301, T = 1s

Wyjaśnienie skali:

<u>pozioma krawędź ramki</u> - odległość od ścianek rurki.

<u>pionowa krawędź ramki</u> - wartość ciśnienia:

dolny róg ramki:

$$p = -400\ Pa$$

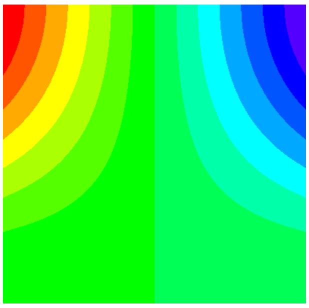
czerwona linia:

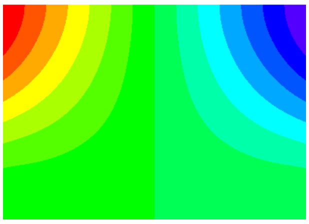
$$p = -200\ Pa$$

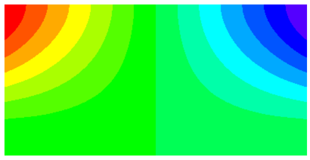
górny róg ramki:

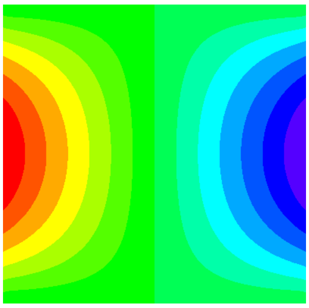
$$p = 0\ Pa$$

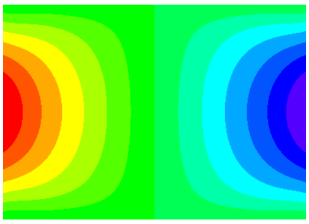
10.9. Wariant B), funkcja prądu, składowe i moduł prędkości, ewolucja w czasie, siatka $N = 301$.

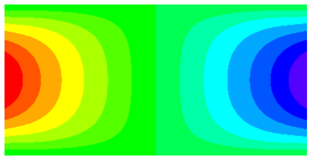

(a) T = 0.02s, ψ

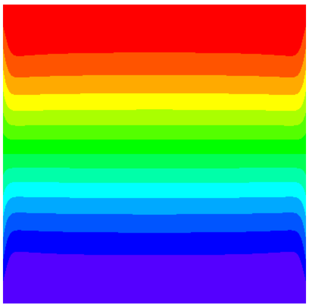

(b) T = 0.5s, ψ

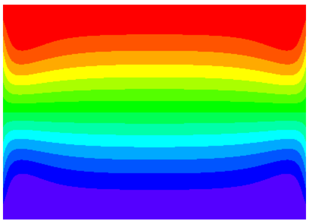

(c) T = 1s, ψ

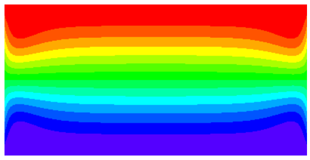

(a) T = 0.02s, u

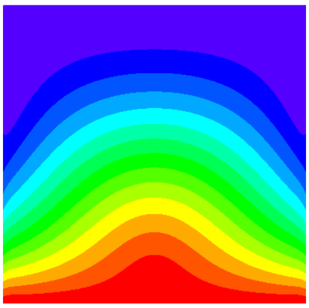

(b) T = 0.5s, u

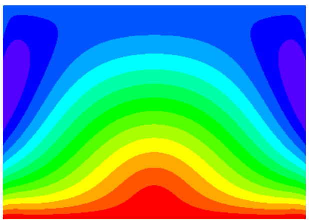

(c) T = 1s, u

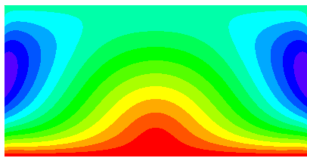

(a) T = 0.02s, v


(b) T = 0.5s, v


(c) T = 1s, v


(a) T = 0.02s, $\sqrt{u^2 + v^2}$


(b) T = 0.5s, $\sqrt{u^2 + v^2}$


(c) T = 1s, $\sqrt{u^2 + v^2}$

11 Siła wymagana do ściśnięcia.

Siła wymagana do ściśnięcia jest całką krzywoliniową po górnej ściance, z różnicy ciśnień między płynem na zewnątrz rurki (próżnia bądź atmosfera) a płynem wewnątrz rurki, gdzie oba ciśnienia wyznaczone są w pobliżu górnej ścianki (po obu jej stronach).

Ciśnienie wody w rurce zostało wyznaczone z odniesieniem, że ciśnienie w środku rurki jest równe 0. **Poprawnym podejściem** byłoby wyznaczyć ciśnienie w oparciu o to, że na granicy woda-powietrze jest ono równe 0. Nie jest to jednak możliwe do wykonania, ponieważ nie modelujemy granicy woda-powietrze (jej położenie jest nieznane).

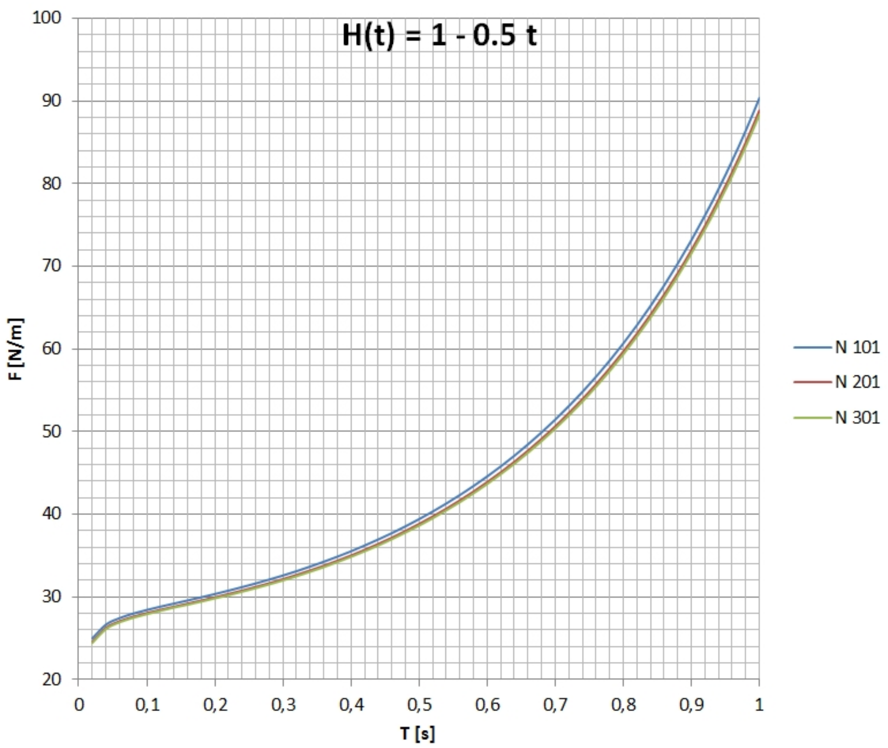
Pozostaje więc tylko "umówić się" że rozkład siły wyznaczonej w tym paragrafie będzie **translacją o stałą wartość** względem rzeczywistego rozkładu siły w rozważanym zagadnieniu.

Ponieważ ciśnienie przy brzegach i wylotach jest obarczone znacznym błędem, obliczenie siły wykonamy całkując wzdłuż linii $\eta = 0.95$, $\xi \in (0.05, 0.95)$ - da to bardziej zbieżny wynik dla rosnących rozmiarów siatek.

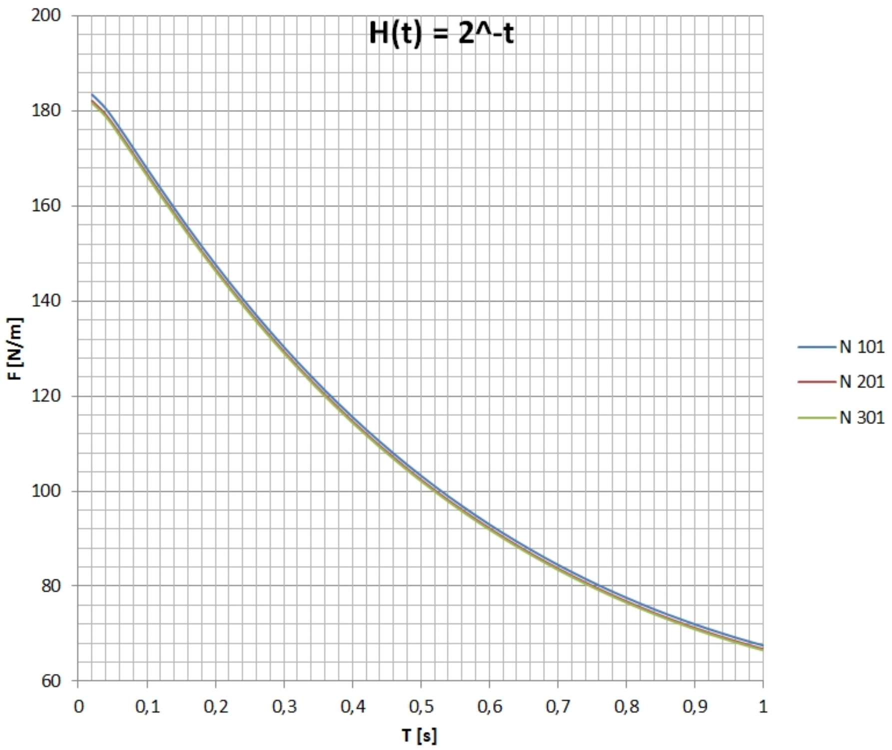
$$F(t) = \int_K p(\xi, \eta) dK = \sum_{i=a}^{b} p(i, b) \; \frac{L}{N-1} \tag{151}$$

Gdzie:

$a = 1 + 0.05 \; (N - 1)$
$b = 1 + 0.95 \; (N - 1)$



Rysunek 26: ściskanie siłą wywołującą stałą prędkość górnej ścianki



Rysunek 27: ściskanie siłą wywołującą wykładniczo malejącą prędkość górnej ścianki

Zgodnie z przewidywaniami, rysunek 26. przedstawia funkcję rosnącą.
Interpretacja: aby ściskać ściankę ze stałą prędkością, musimy przykładać tym więcej siły, im więcej wody już wycisnęliśmy, a smukłość rurki się zwiększyła.

Rysunek 27. przedstawia funkcję malejącą: jeśli przyłożylibyśmy siłę malejącą w czasie, to będziemy wyciskali stopniowo coraz mniej wody.

Ponieważ uzyskaliśmy 2 skrajne przypadki, to **na pewno istnieje** taka zależność wysokości rurki od czasu $H(t)$, że wymagana do przyłożenia siła jest stała w czasie.
Funkcja $H(t)$ dla takiego wymuszenia siłowego będzie malała w czasie szybciej niż wykładniczo, ale wolniej niż liniowo.