Задание №1

1. В алфавите $\sum = \{a, b, c\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \sum^* \mid \omega$ содержит подстроку aa$\}$. Например, $\{aa, baac, caabb\} \subset L$.

   $S \to bS \mid cS \mid aaX \mid aS$
   $X \to aX \mid bX \mid cX \mid \lambda$

2. В алфавите $\sum = \{a, b, c\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \sum^* \mid \omega$ не палиндром$\}$. Например, $\{aab, baabab\} \subset L$, а $\{aba, bb, \lambda\} \not\subset L$.

   $S \to aX_1 \mid bX_2 \mid cX_3$
   $X_1 \to X_4c \mid X_4b \mid Sa$
   $X_2 \to X_4a \mid X_4c \mid Sb$
   $X_3 \to X_4a \mid X_4b \mid Sc$
   $X_4 \to aX_4 \mid bX_4 \mid cX_4 \mid \lambda$

3. Алфавит $\sum = \{\emptyset, \mathbb{N}, `\{`, `\}`, \cup\}$ Построить грамматику для языка $L = \{\omega \in \sum^* | \omega -$ синтаксически корректная строка,обозначающая множество $\}$

   $S \to o \mid n \mid \{X\} \mid SuS$
   $X \to S, X_1 \mid S \mid \lambda$

$X_1 \to S, X_1 \mid S$

Задание №2

1. Алфавит $\sum = \{1, +, =\}$
   Рассмотрим язык $A = \{1^m + 1^n = 1^{m+n} | m, n \in \mathbb{N}\}$
   (a) Докажите, что язык A регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке)

$$\omega = 1^n + 1^n = 1^{2n}, |w| \geq n$$
$$\omega = xyz$$
$$x = 1^i \; y = 1^j \; i + j \leq n \; j > 0$$
$$z = 1^{n-i-j} + 1^n = 1^{2n}$$
$$|xy| \leq n \; |y| > 0$$
$$\text{Возьмём } k = 0$$
$$xy^0z = 1^i 1^{n-i-j} + 1^n = (1^{n-j} + 1^n = 1^{2n}) \notin A$$
$$\Rightarrow \textbf{не регулярный язык}$$

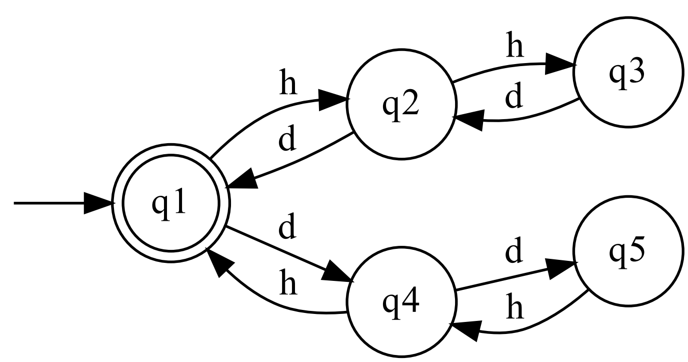
   (b) Постройте КС-грамматику для языка A, показывающую, что A – контекстно-свободный

$S \to 1S1 \mid +X$
$X \to 1X1 \mid =$

Задание №3

1. Вы пошли гулять с собакой, ваша собака на поводке длины 2. Это значит, что она не может отойти от вас более чем на 2 шага. Пусть $\sum = \{h, d\}$, где h – ваше перемещение на 1 шаг вперёд, а d – шаг собаки. Например, hhdd обозначает, что вы прошли на 2 шага вперёд, затем собака подошла к вам. При этом прогулка может быть завершена, если собака и человек оказались в одной точке.
   Пусть $D_1 = \{\omega \in \sum^* | \omega$ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке с поводком $\}$

   (a) Докажите, что язык D_1 регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке).



   (b) Постройте КС-грамматику для D_1, показывающую, что D_1- контекстно-свободный

$S \to hX_1 \mid dX_2 \mid \lambda$
$X_1 \to dS \mid hdX_1$
$X_2 \to hS \mid dhX_2$

2. Допустим теперь, что вы также пошли на прогулку с собакой, но не взяли с собой поводок. Это значит, что вы можете отдалиться от собаки на любое расстояние. Пусть $D_2 = \{\omega \in \sum^* |\omega$ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке без поводка $\}$

   (a) Докажите, что язык D_2 регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке).

$$\omega = h^n d^n, |w| \geq n$$
$$\omega = xyz$$
$$x = h^i \ y = h^j \ i + j \leq n \ j > 0$$
$$z = h^{n-i-j} d^n$$
$$|xy| \leq n \ |y| > 0$$
$$\text{Возьмём } k = 0$$
$$xy^0 z = h^i h^{n-i-j} d^n = h^{n-j} d^n \notin D_2$$
$$\Rightarrow \textbf{не регулярный язык}$$

   (b) Постройте КС-грамматику для D_2, показывающую, что D_2- контекстно-свободный

$S \to hSd \mid dSh \mid \lambda \mid SS$

Задание №4

Пусть Perm(ω) – это множество всех пермутаций строки ω, то есть, множество всех уникальных строк, состоящих из тех же букв и в том же количеству, что и в ω. Если $L-$ регулярный язык, то Perm(L) – это объединение Perm(ω) для всех ω в L. Если L регулярный, то Perm(L) иногда тоже регулярный, иногда контекстно-свободный, но не регулярный, а иногда даже не контекстно-свободный. Рассмотрите следующие регулярные выражения R и установите, является ли Perm((R)) регулярным, контекстно-свободным или ни тем и ни другим.

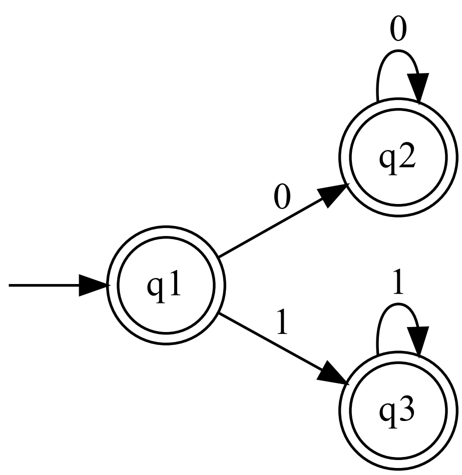
1. (01)*

$$\omega = 0^n 1^n, |w| \geq n$$
$$\omega = xyz$$
$$x = 0^i \ y = 0^j \ i + j \leq n \ j > 0$$
$$z = 0^{n-i-j} 1^n$$
$$|xy| \leq n \ |y| > 0$$
$$\text{Возьмём } k = 0$$

$$xy^0z = 0^i 0^{n-i-j} 1^n = 0^{n-j} 1^n \notin Perm((R))$$
$$\Rightarrow \textbf{не регулярный язык}$$

$S \to 0S1 \mid 1S0 \mid \lambda \mid SS$

2. $0^* + 1^*$



$S \to 0X_1 \mid 1X_2 \mid \lambda$
$X_1 \to 0X_1 \mid \lambda$
$X_2 \to 1X_2 \mid \lambda$

3. $(012)^*$

$$\omega = 0^n 1^n 2^n, |w| \geq n$$

$$\omega = xyz$$
$$x = 0^i \ y = 0^j \ i + j \leq n \ j > 0$$
$$z = 0^{n-i-j}1^n2^n$$
$$|xy| \leq n \ |y| > 0$$
$$\text{Возьмём } k = 0$$
$$xy^0z = 0^i0^{n-i-j}1^n2^n = 0^{n-j}1^n2^n \notin Perm((R))$$
$$\Rightarrow \textbf{не регулярный язык}$$

$$\alpha = 0^n1^n2^n, |\alpha| \geq n$$
$$v\omega x = \left[\begin{array}{c} 0^k, \ k \leq n \\ 1^k, \ k \leq n \\ 2^k, \ k \leq n \\ 0^i1^j, \ i + j \leq n \\ 1^i2^j, \ i + j \leq n \end{array}\right. \quad |v\omega x| \leq n$$
$$\alpha = uv^k\omega x^k y$$

Если взять k = 0 уменьшится кол-во 0 или 1 или 2 или 01 или 12

$\Rightarrow$ не контекстно-свободный

Задание №5

Все правила праволинейной КС-грамматики имеют одну из следующих форм:

$$A \to \lambda$$

$$A \to B$$
$$A \to aB$$

где $A, B-$ нетерминалы, а $a-$ терминал

1. Пусть грамматика $G-$ прямолинейная. Опишите алгоритм построения НКА N, такого, что $(N) = (G)$. Коротко докажите(от противного), что ваш алгоритм может получить только слова из языка грамматики. Проиллюстрируйте алгоритм на грамматике:

   (a) Множество вершин = Множеству нетерминалов

   (b) Множество конечных вершин = Множеству нетерминалов у которых в правилах вывода справа были лямбда (A $\to \lambda$)

   (c) Стартовая вершина = стартовый нетерминал

   (d) Для правил вида A $\to$ aB добавим переход из вершины A в вершину B по символу a. Для правил A $\to$ B добавляем лямбда переход из A в B

$$A \to aB|bC$$
$$B \to aB|\lambda$$
$$C \to aD|A|bC$$

$$D \rightarrow aD|bD|\lambda$$