Poszukiwanie minimum wartości funkcji metodą największego spadku w 2D

Tomasz Chwiej

15 maja 2017

Naszym zadaniem jest wyznaczenie numerycznie minimum funkcji:

$$f(\vec{r}) = f(x, y) = \frac{5}{2}(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2 \tag{1}$$

metodą największego spadku, którą trzeba zaprogramować samemu. W metodzie tej startujemy od przybliżenia $\vec{r}_0$, które w kolejnych iteracjach "poprawiamy"

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i - h \cdot \nabla f(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{r}_i} \tag{2}$$

gdzie gradient $\nabla f(\vec{r})$ to:

$$\nabla f(\vec{r}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] \tag{3}$$

Zadania do wykonania:

1. Zaprogramować metodę największego spadku dla dwóch wymiarów. Pochodne proszę liczyć numerycznie

$$\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_x) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_x)}{2\Delta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_y) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_y)}{2\Delta} \tag{5}$$

   gdzie: $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$ są wersorami układu kartezjańskiego. Przyjąć $\Delta = 10^{-4}$.

2. Rozwiązanie. Proszę znaleźć przybliżone położenie minimum funkcji startując od punktu $\vec{r}_0 = [-0.75, 1.75]$, stała $h = 0.1$. Jako warunek stopu przyjąć $\|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\|_2 < \varepsilon$, a jako maksymalną liczbę iteracji 1000 . Obliczenia wykonać dla: a) $\varepsilon = 10^{-2}$, b) $\varepsilon = 10^{-3}$. Po ilu iteracjach zostanie ono spełnione? Do pliku zapisać położenia kolejnych przybliżeń (np. "eps1.dat" i "eps2.dat").

3. Wizualizacja. Dla każdej wartości ε proszę sporządzić rysunek na którym widoczny byłby kontur funkcji oraz kolejne przybliżenia minimum (połączone linią). Aby to zrobić należy najpierw zrobić wykres konturowy 3D i zapisać go do pliku. W tym celu należy najpierw do pliku (np. "fxy.dat") wyprowadzić dane: x, y, f(x,y). Niech $x, y \in [-2, 2]$, a krok w kierunku x i y przyjąć równy 0.02. Następnie tworzymy kontur i zapisujemy do pliku "kontur.dat" przy użyciu Gnuplota:

```
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set table 'kontur.dat'
unset key
set contour
unset surface
```

```
set view map
set cntrparam levels 50
splot 'fxy.dat' u 1:2:3 w l lt -1
unset table
```

Jeśli chcemy aby na rysunku zaznaczyć też położenie minimum to należy stworzyć plik "minimum.dat" i w pisać do niego jego położenie $\vec{r}_{min} = [1.0, 1.0]$. Teraz można na jednym rysunku pokazać kontur (plik "kontur.dat"), położenia kolejnych przybliżeń ("eps1.dat", "eps2.dat") i minimum funkcji ("minimum.dat"):

```
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
plot  'eps1.dat' u 1:2 w lp lt 3,\
        'kontur.dat' u 1:2 w l lt 1,\
        'minimum.dat' u 1:2 w p pt 1 ps 3 lt -1
```

4. Sprawozdanie. W sprawzodaniu proszę przeanalizować uzyskane rozwiązania oraz odpowiedzieć na pytania: a) czy warunek stopu jest właściwy?, b) dlaczego uzyskane przybliżenie jest dalekie od dokładnego, c) jaki wpływ na rozwiązanie ma utrzymywanie stałej wartości h?