 <b>AGH</b>	<b>Akademia Górniczo-Hutnicza</b> <b>Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej</b> <b>Fizyka Techniczna</b> <b>Podstawy fizyki teoretycznej</b>	<b>Zrealizował:</b> Ryś Przemysław
Rok akademicki: 2022/2023	Semestr VI	Grupa laboratoryjna nr 2
Temat projektu:  Projekt 3: Ruch cząstki w polu magnetycznym		
Data wykonania projektu 28.05.2023	Data oddania sprawozdania 28.05.2023	Ocena

## 1 Wstęp teoretyczny

Metodą zaimplementowaną w celu wykonania projektu była metoda Rungego-Kutty 4 rzędu skrótowo nazywana RK4. Pozwala ona rozwiązywać równania jak i układy równań różniczkowych 1 rzędu poprzez kroki czasowe popełniając przy tym niewielki błąd, na które to zawsze podatne są wyniki naszych rachunków w przypadku prowadzenia obliczeń numerycznych. W każdym kroku używa się wartości pochodnej funkcji, aby oszacować wartość funkcji w kolejnym punkcie. Metoda umożliwia również możliwość obliczenia równań różniczkowych wyższych rzędów, w zamian za dodatkowe równanie, które będzie przypisaniem do nowej zmiennej pochodnej szukanej funkcji. W wyniku takiego jednokrotnego przypisania schodzimy rzędem równania różniczkowego o jeden. Postępując tak kilkakrotnie możemy sprowadzić równanie różniczkowe rzędu  $n$  do układu  $n$  równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Rozwiązanie w  $i + 1$  kroku algorytmu ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad (1)$$

, gdzie:  $y_i$  jest rozwiązaniem w kroku poprzednim,  $\Delta t$  jest krokiem czasowym symulacji, natomiast współczynniki  $k_\alpha$  definiowane na potrzeby metody mają postać:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (2)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_1\right) \quad (3)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_2\right) \quad (4)$$

$$k_4 = f(t_i + \Delta t, y_i + \Delta t \cdot k_3) \quad (5)$$

## 2 Opis problemu

Postawionym zadaniem jest wykonać obliczenia numeryczne dla cząstki poruszającej się w polu magnetycznym na trajektorie, Energię całkowitą (Hamiltonian) i pędy oraz zestawić te dane na odpowiednich wykresach dla pięciu różnych warunków początkowych.

Pole magnetyczne może wywierać siłę Lorentza na poruszającą się cząstkę, pod warunkiem, że jest ona naładowana. Prowadzi to do zakrzywienia jej trajektorii. W przypadku niniejszej sytuacji mamy do czynienia z jednorodnym polem magnetycznym. W nim siła magnetyczna jest jednakowa we wszystkich punktach przestrzeni. Zasada działania polega na tym, że siła magnetyczna, działająca na poruszającą się naładowaną cząstkę, jest prostopadła zarówno do wektora prędkości cząstki, jak i do linii pola magnetycznego. W wyniku tego działania cząstka porusza się po trajektorii zakrzywionej, która może być określana jako helisa lub okrąg. Równanie ruchu naładowanej cząstki w jednorodnym polu magnetycznym w klasycznym opisie można zapisać jako:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (6)$$

gdzie:

- $m$  jest masą cząstki,
- $\vec{r}(t)$  to wektor położenia cząstki w funkcji czasu  $t$ ,
- $\vec{v}(t)$  to wektor prędkości cząstki w funkcji czasu  $t$ ,
- $q$  to ładunek cząstki,
- $\vec{B}$  to wektor pola magnetycznego.

Lagranżjan takiego układu ma postać:

$$L = 0.5m\dot{\vec{r}}^2 + 0.5q\vec{r} \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right) \quad (7)$$

Jeśli wprowadzimy współrzędne cylindryczne z osią 'z' skierowaną w kierunku pola B, to funkcja Hamiltona zapisana w nowych współrzędnych będzie miała postać:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) - \frac{qB}{2m} p_\varphi + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2 \quad (8)$$

, a z niej już można wydobyc równania ruchu:

$$\dot{r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_r}{m} \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{qB}{2m} \quad (10)$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad (11)$$

$$\dot{p}_r = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{q^2 B^2 r}{4m} \quad (12)$$

$$\dot{p}_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (13)$$

$$\dot{p}_z = \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

Ponieważ w funkcji Hamiltona nie występuje zmienna  $\varphi$  więc pęd uogólniony  $p_\varphi$  z nią sprzężony będzie całką ruchu:

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{const} \quad (15)$$

## 3 Wyniki symulacji

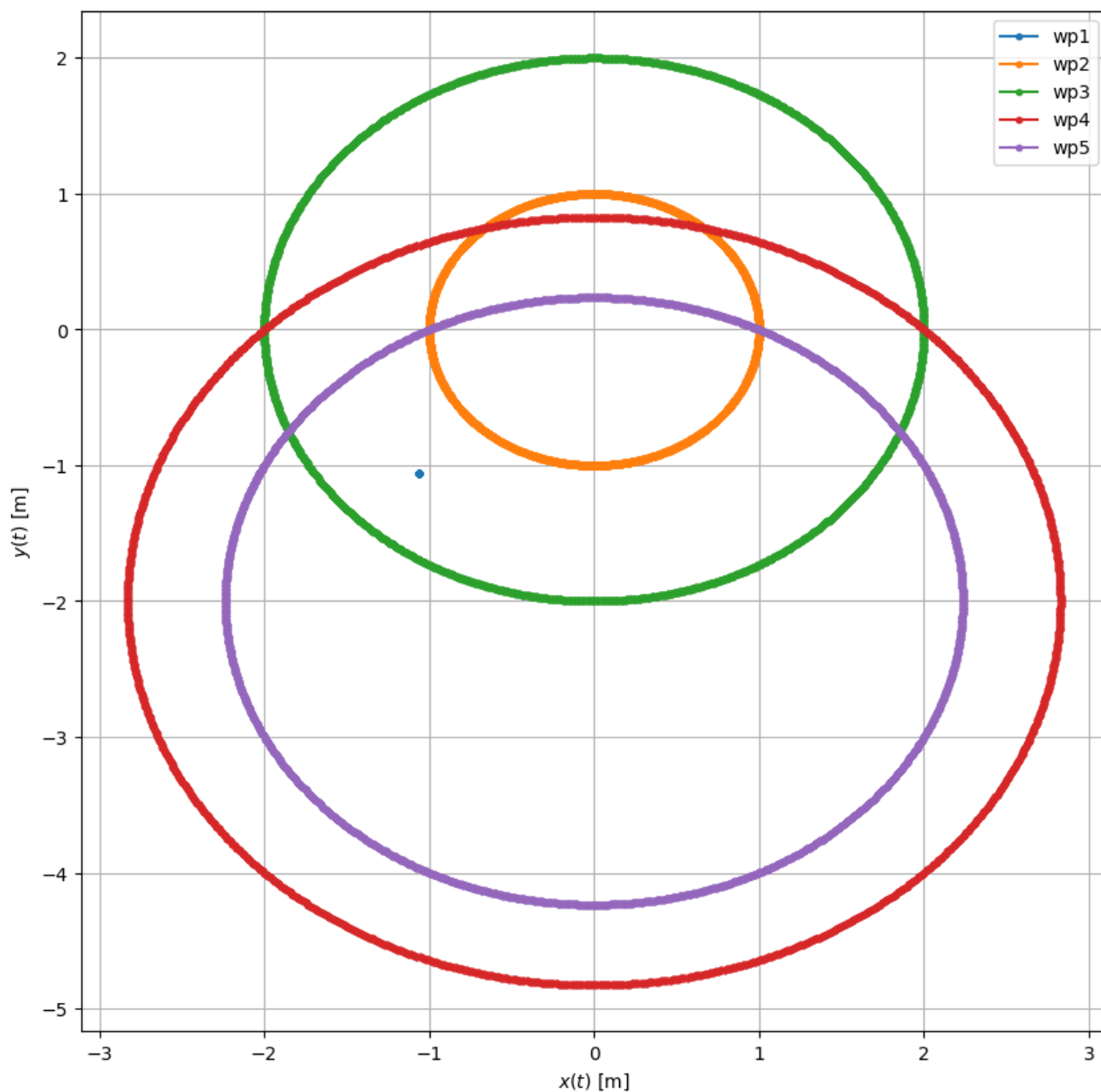
### 3.1 Parametry dla poszczególnych warunków początkowych.

Parametry wykorzystane do przeprowadzenia symulacji ruchu cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym:

- $n = 6$  - liczba zmiennych niezależnych,
- $N = 5000$  - liczba kroków czasowych,
- $\omega_c = \frac{qB}{m}$  - częstość kołowa,
- $q = B = m = 1$ ,
- $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$  - okres obiegu zamkniętej orbity cząstki,
- $\Delta t = 5\frac{T}{N}$  - krok czasowy,

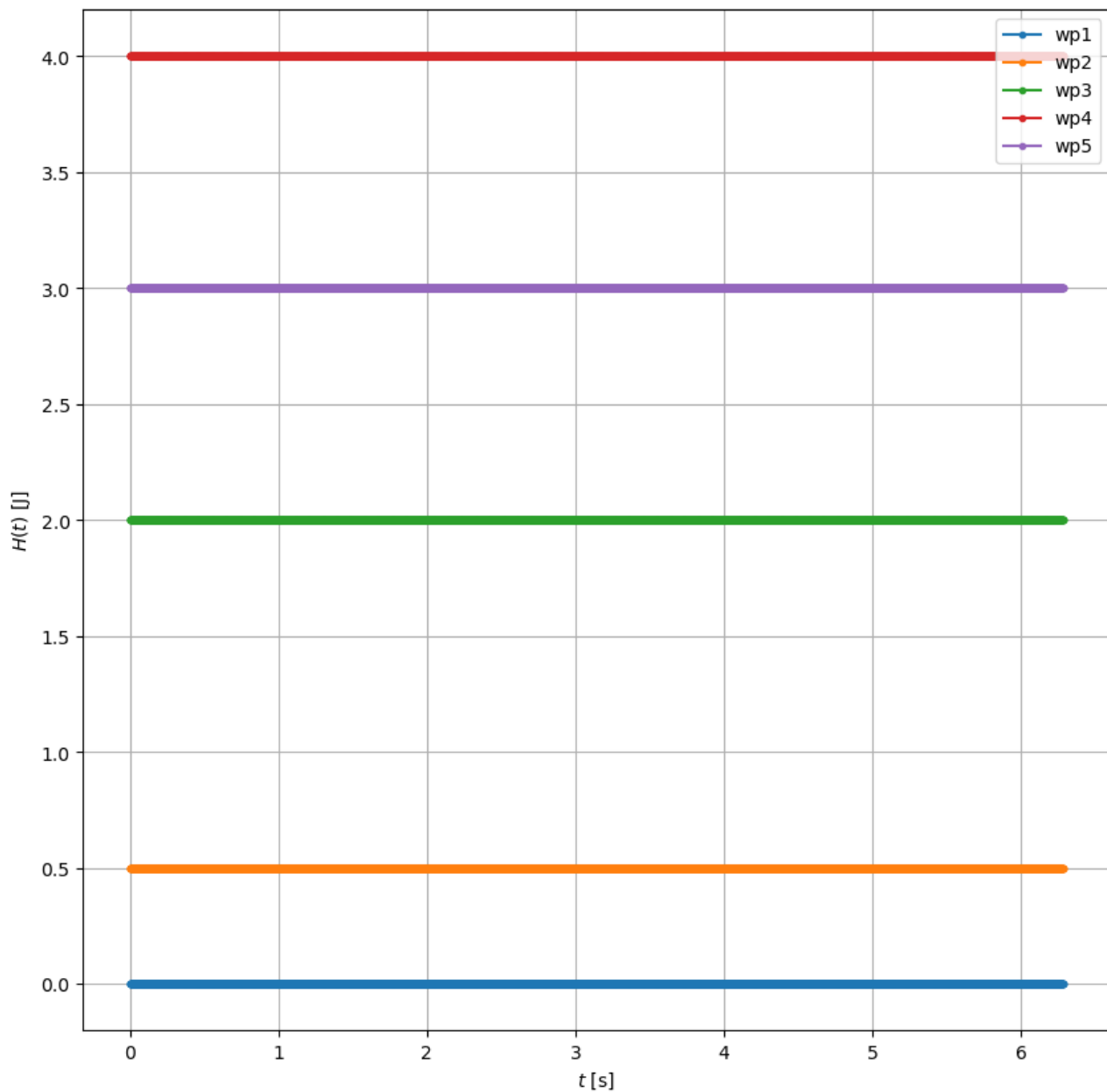
oraz warunki na szczególne przypadki:

1.  $r_0 = 1.5, \varphi_0 = 1.25\pi, z_0 = 0, p_{r0} = 0, p_{\varphi0} = \frac{qBr_0^2}{2}, p_z = 0$  - bezruch,
2.  $r_0 = 1, \varphi_0 = 0, z_0 = 0, p_{r0} = 0, p_{\varphi0} = -\frac{qBr_0^2}{2}, p_z = 0$  - okrąg centrowany w początku układu wsp.,
3.  $r_0 = 2, \varphi_0 = 0, z_0 = 0, p_{r0} = 0, p_{\varphi0} = -\frac{qBr_0^2}{2}, p_z = 0$  - okrąg centrowany w początku układu wsp. i niezależny od r,
4.  $r_0 = 2, \varphi_0 = 0, z_0 = 0, p_{r0} = 2, p_{\varphi0} = -\frac{qBr_0^2}{2}, p_z = 0$  - okrąg zorientowany dowolnie,
5.  $r_0 = 2, \varphi_0 = 0, z_0 = 0, p_{r0} = 2, p_{\varphi0} = -\frac{qBr_0^2}{2}, p_z = 1$  - spirala



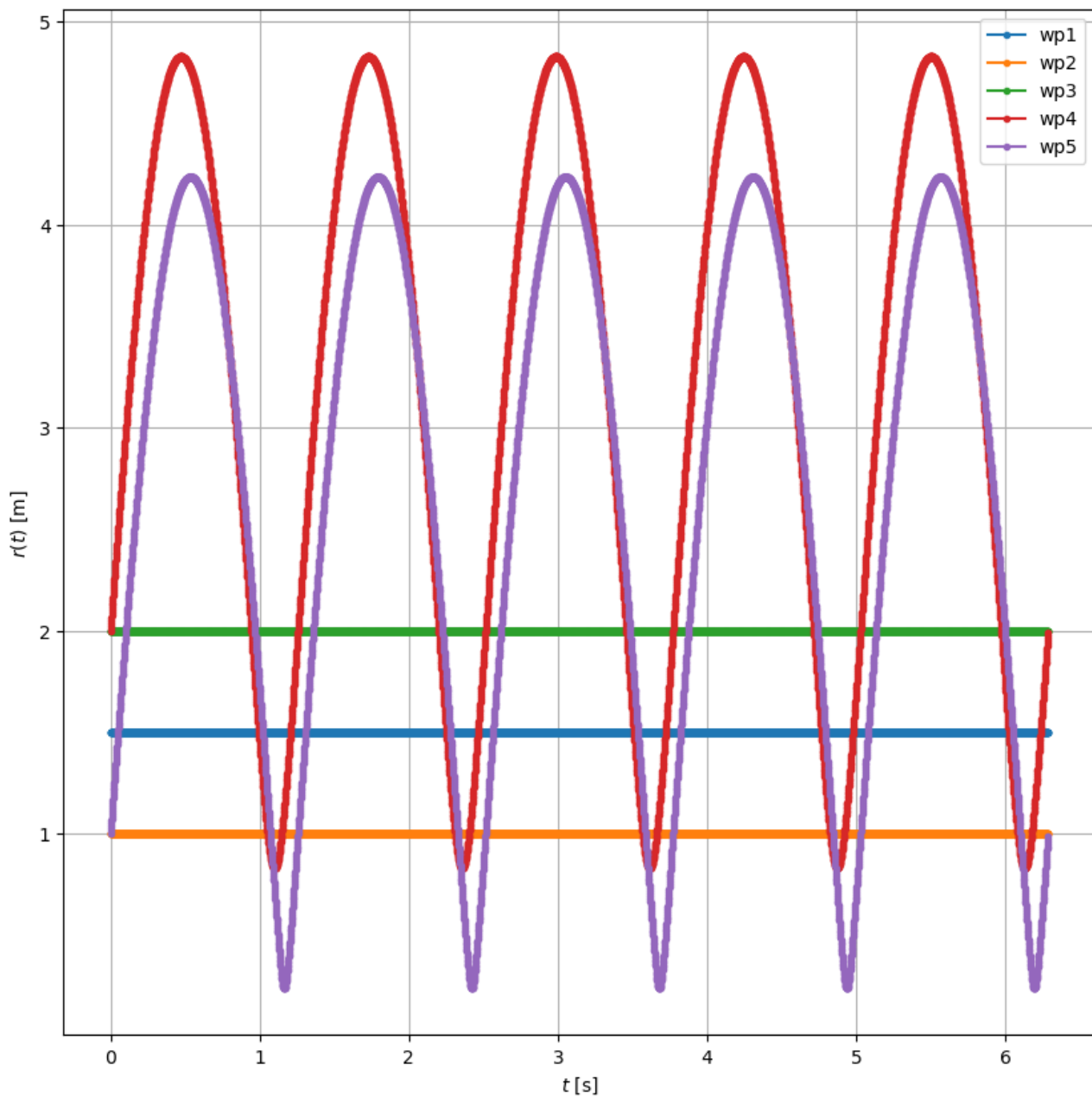
Rys. 1: Wykres trajektorii cząstki naładowanej w polu magnetycznym dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 1 przedstawiona została trajektoria cząstki jako wykresu funkcji położenia przestrzennego  $y$  w zależności od położenia przestrzennego  $x$  zależnych od czasu dla pięciu różnych warunków początkowych. Widoczne są na nim okręgi jakie zatacza cząstka pod wpływem siły Lorentza. Siła ta zmienia jedynie kierunek ruchu cząstki, niemniej nie wpływa na jej energię.



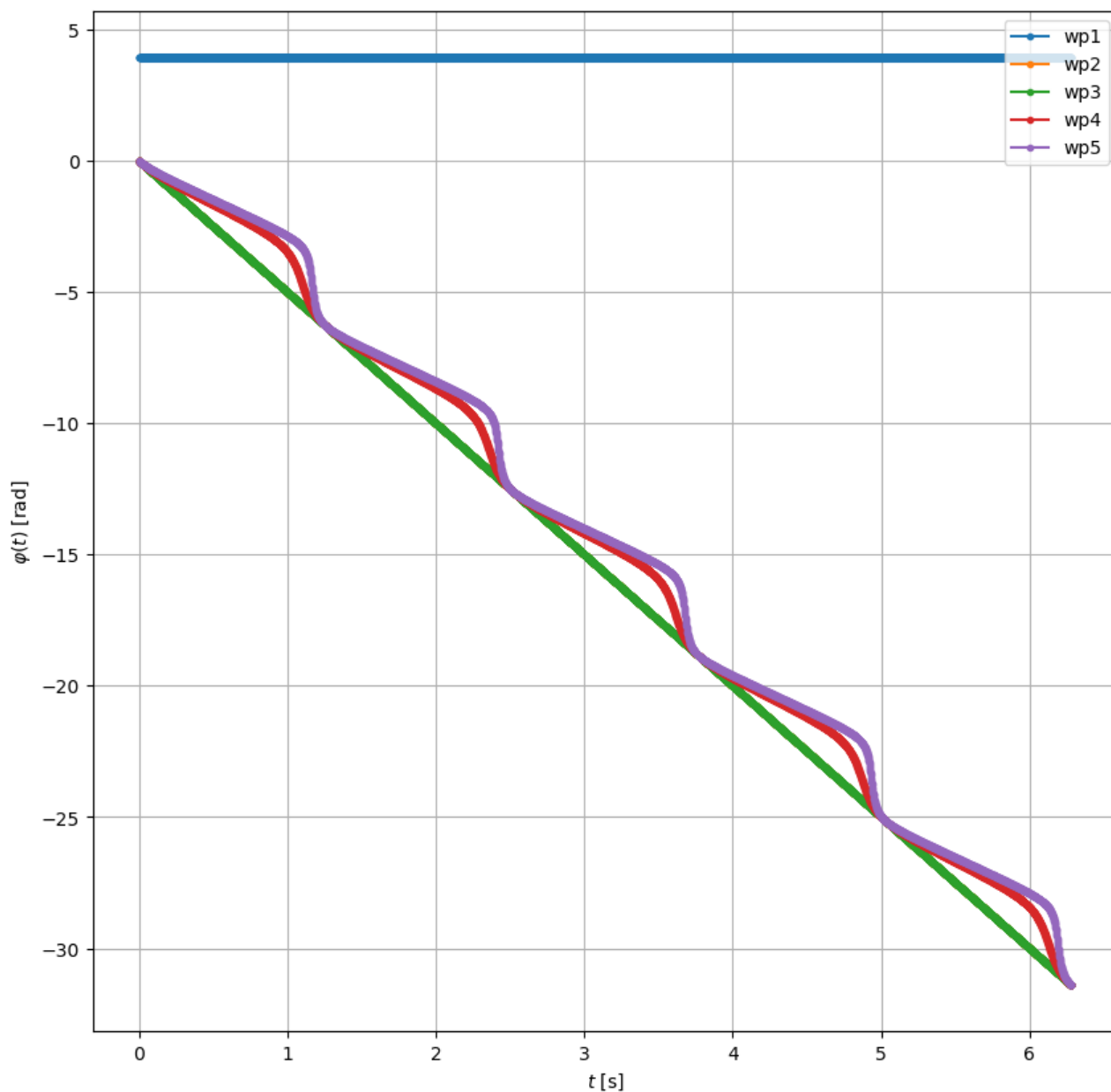
Rys. 2: Wykres Hamiltonianu cząstki naładowanej w polu magnetycznym w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 2 przedstawiony został Hamiltonian cząstki w zależności od czasu dla pięciu różnych warunków początkowych. Z wykresu łatwo zauważyć, iż się on nie zmienia co jest w pełni zrozumiałe biorąc pod uwagę iż siła ta zmienia jedynie kierunek ruchu cząstki, a nie wpływa na jej energię.



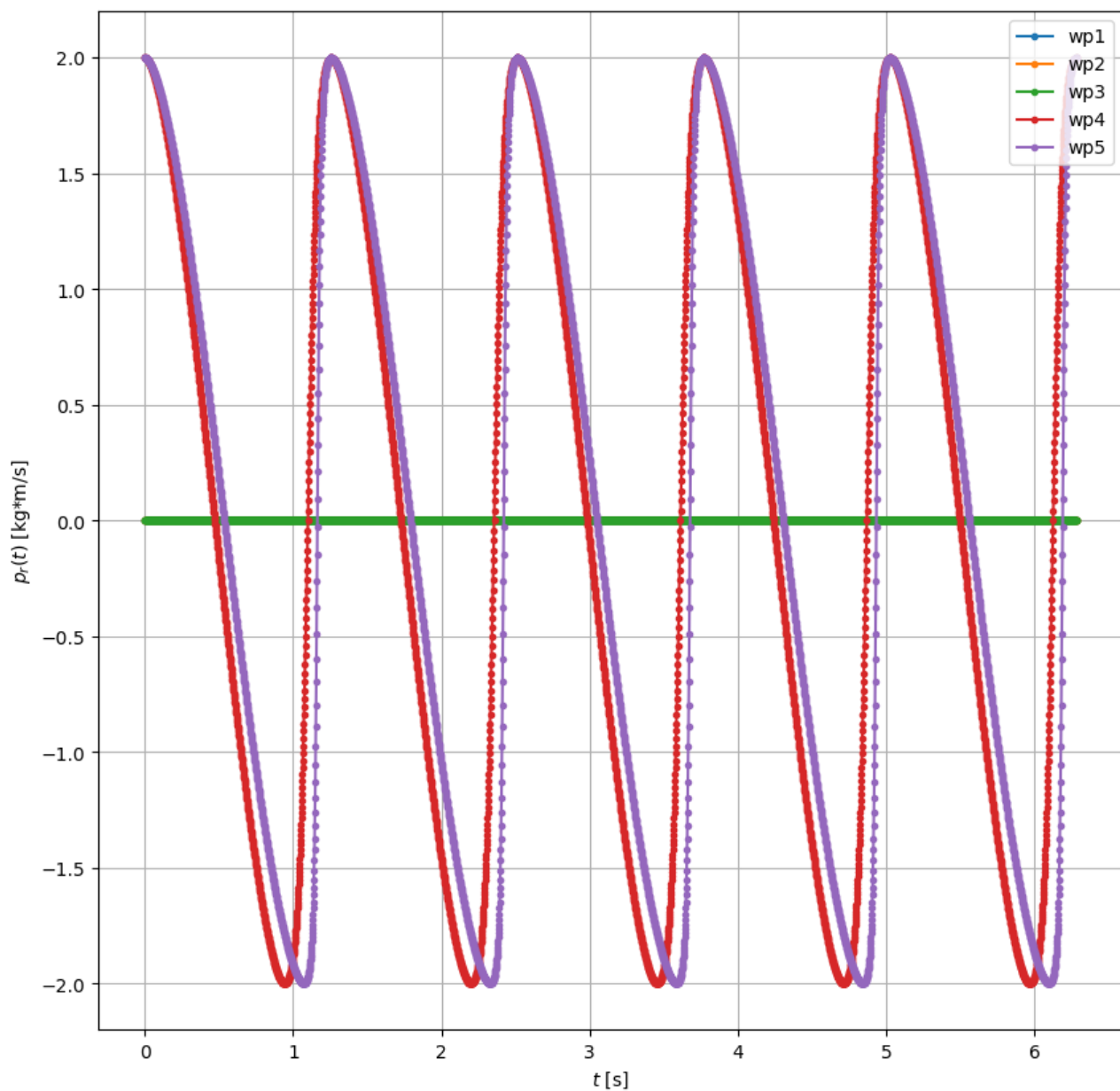
Rys. 3: Wykres położenia radialnego cząstki w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 3 przedstawione zostało położenie radialne cząstki w polu magnetycznym w zależności od czasu dla pięciu różnych warunków początkowych. Z wykresu zauważamy, iż oscyluje krzywa dla warunku 4 oraz 5, co spowodowane jest niezerowymi wartościami pędu wzdłuż kierunku radialnego oraz transwersalnego.



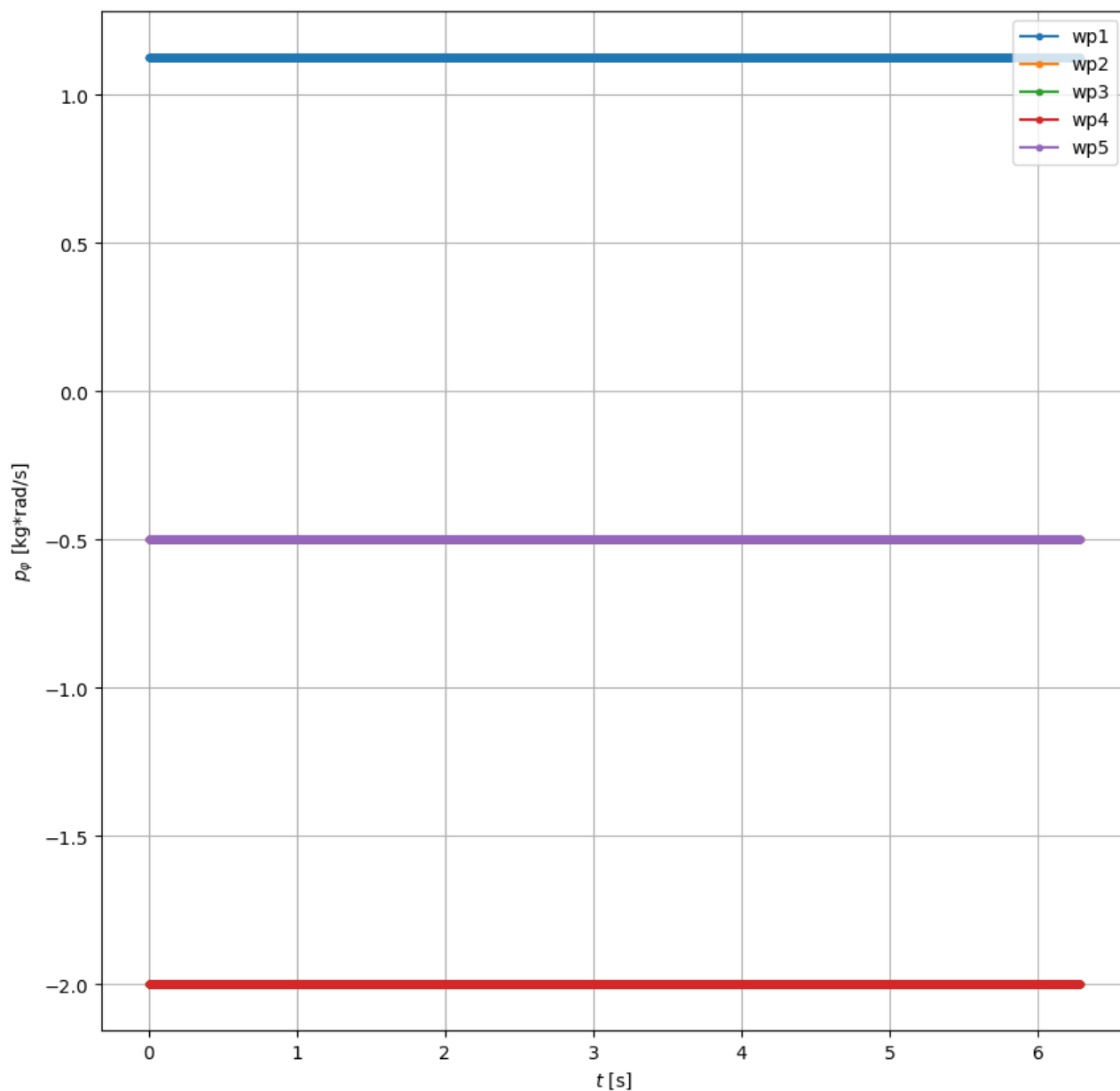
Rys. 4: Wykres położenia kątownego cząstki w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 4 przedstawione zostało położenie kątowne cząstki w polu magnetycznym w zależności od czasu dla pięciu różnych warunków początkowych. Wraz z trwającą symulacją wartość tej składowej położenia maleje, przy niektórych warunkach oscyluje, niemniej tendencja krzywej charakteryzuje się liniowym spadkiem.



Rys. 5: Wykres składowej radialnej pędu cząstki w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

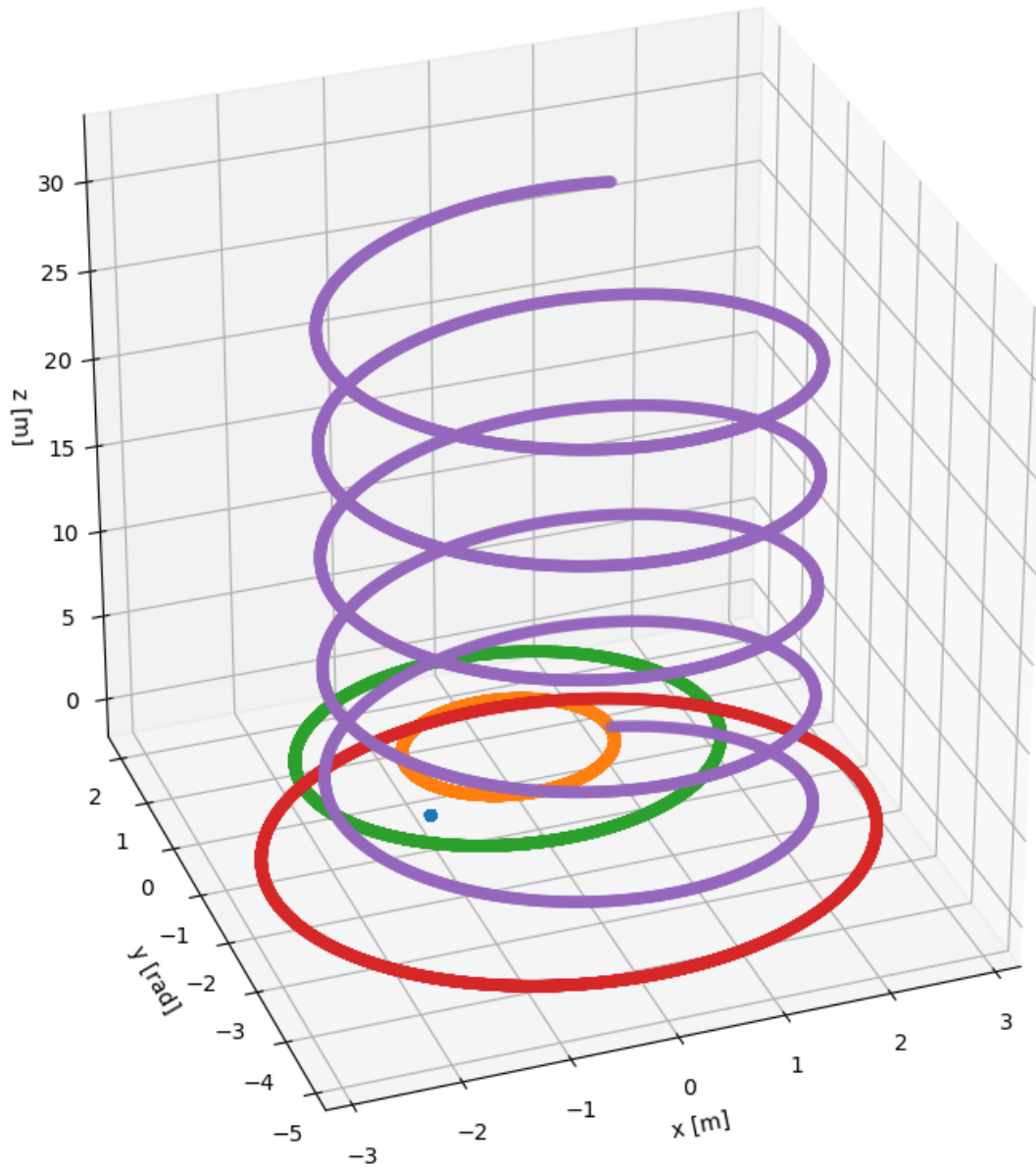
Na rysunku 5 przedstawiona została składowa radialna pędu cząstki w polu magnetycznym w zależności od czasu dla pięciu różnych warunków początkowych. Powołując się na wykres 3 dochodzimy do wniosku, iż krzywe reprezentujące 3 pierwsze warunki początkowe przykrywają się na osi  $p_r = 0$ . Wartości dwóch pozostałych natomiast w sposób oczywisty oscylują z powodu okresowego ruchu cząstki po okręgu.



Rys. 6: Wykres składowej azymutalnej pędu cząstki w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 7 przedstawiona została składowa azymutalna pędu cząstki w polu magnetycznym w zależności od czasu dla pięciu różnych warunków początkowych. Krzywe te pozostają stałe w czasie, uwarunkowane jest to tym, iż pęd sprzężony ze zmienną, która to jawnie nie występuje w Hamiltonianie jest efektywnie całką ruchu.





Rys. 7: Trójwymiarowy układ współrzędnych kartezjańskich widziany z perspektywy, na którym to znajdują się trajektorie ruchu cząstki w polu magnetycznym.

Na rysunku 7 przedstawione zostały trajektorie cząstki w polu magnetycznym dla pięciu różnych warunków początkowych. W przykładzie trójwymiarowego układu można zauważyć realny tor ruchu cząstek.

## 4 Wnioski

W kontekście uzyskanych wyników zauważyć można, iż metoda RK4 pozwala na uzyskanie zadowalających jakością wyników. Warunki początkowe determinują zachowanie się układu z upływem czasu. Jest to szczególnie zauważalne na ostatnim wykresie, który to prezentuje rzeczywisty ruch cząstki w polu magnetycznym. Odpowiedź na pierwszy z przypadków otrzymujemy ze skorzystania z równań ruchu 10, nie dziwne jest zatem iż cząstka spoczywa. pozostałe przypadki, kiedy to ruch cząstki nie w kierunku działającego pola magnetycznego 6 powodują, iż porusza się ona po okręgach. Jeśli w dodatku zdefiniujemy pęd transwersalny zataczany będzie tor śrubowy.