

# w stronę metody elementów skończonych

przypomnienie: metoda ważonych reszt

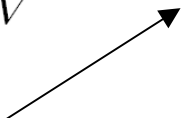
$Lu=f$  (na  $\Omega$ )  $\longrightarrow$  Rozwiązanie dokładne (silnej postaci równania)  
 $Bu=g$  (na  $d\Omega$ ) jest „trudne”.  
szukamy rozwiązania przybliżonego w bazie funkcji

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \quad \text{(rozwiązanie w podprzestrzeni wektorowej rozpiętej przez wektory bazy)}$$

Działając operatorami  $L$  i  $B$  na rozwiązanie przybliżone dostajemy funkcje resztkowe (rezydualne) zamiast zera:

$$\left. \begin{array}{l} L\tilde{u} - f = r \\ B\tilde{u} - g = s \end{array} \right\} \longrightarrow \text{zależy nam, aby reszty } r \text{ i } s \text{ były jak najmniejsze}$$

$c$  wyznaczamy z ważenia reszty:

$$\int_V r(x) w_j(x) dx = 0$$


dla metody Galerkina bierzemy funkcje bazowe jako wagi:  $w_j=v_j$

### **Silna forma równania:**

$$Lu=f \quad (\text{równość funkcji w każdym punkcie} \quad \tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \\ \text{obszaru całkowania})$$

ważone reszty:

$$(L\tilde{u} - f, w_j) = (r, w_j) = 0 \quad \Bigg|$$

$$(L\tilde{u}, w_j) = (f, w_j) \quad \Bigg| \quad \textbf{słaba forma równania,} \\ \text{(równość } N \text{ liczb)}$$

metoda Galerkina: residuum a przestrzeń wektorowa rozpięta przez wektory wybranej bazy

$$Lu=f$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(x)$$

chcemy znaleźć taki element przestrzeni żeby:  $(Lu, v_j) = (f, v_j)$

słaba forma równania

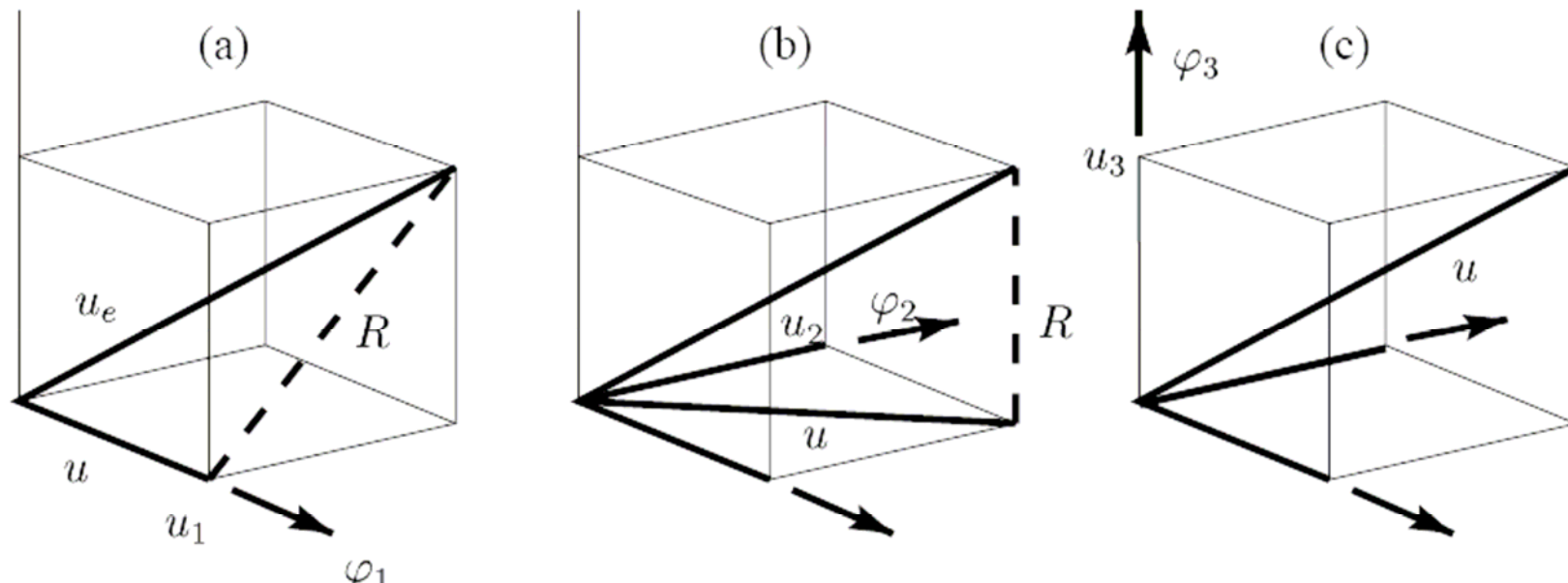
residuum (błąd)  $r=Lu-f$ : **ortogonalny do każdego wektora bazowego**

$$(r, v_j) = 0$$

*residuum znajduje się poza przestrzenią generowaną przez wybraną bazę*

ilustracja:  $u_e$  to rozwiązanie dokładne (przekątna sześcianu),  
 $u$  to rozwiązanie przybliżone  
 $R$  tutaj to  $u_e - u$

od (a) do (c) dodajemy elementy bazowe  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ .



metoda Galerkina rzutuje rozwiązanie dokładne na wektory bazy

błąd metody: residuum – jest ortogonalne do podprzestrzeni wyznaczonej przez wektory bazy

metoda Galerkina jest zbieżna: gdy baza obejmuje całą przestrzeń – nie ma miejsca na residuum

żargon MES: macierz sztywności i wektor obciążeń

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad \left| \begin{array}{l} \nearrow (Lu, v_j) = (f, v_j) \\ \searrow \sum_{i=1}^n (Lv_i, v_j) y_i = (f, v_j) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{S}_{ij} = (Lv_i, v_j)$$

$$\mathbf{F}_j = (f, v_j)$$

$$\mathbf{SY} = \mathbf{F}$$

*stiffness matrix*  
macierz sztywności

*load vector*  
wektor obciążeń

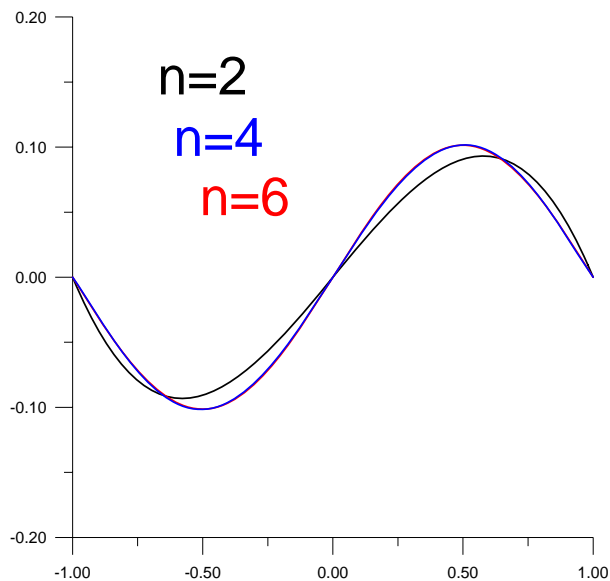
$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \right|$$

**SY=F**

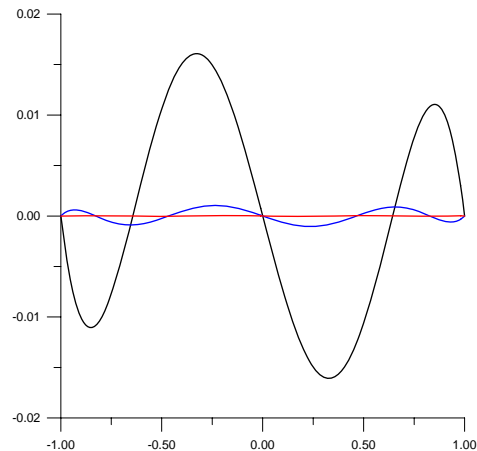
baza używana poprzednio:

$$v_i = (x + 1)(x - 1)x^{i-1}$$

rozwiązanie



błąd  $\varepsilon$  (**nie residuum** tylko różnica dokładne – Galerkina):



powyższy przykład: baza wielomianów określonych na całym pudle obliczeniowym.  
Z wielu powodów jest to zły pomysł.

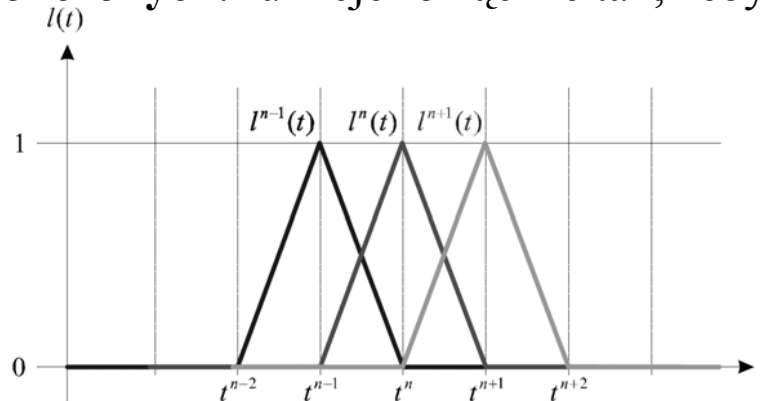
Wysokie potęgi wielomianów niewygodne w użyciu: całkowanie, efekt Rungego,  
powód najważniejszy:

macierz **S** byłaby gęsta, problem nie do rozwiązania przy dużym  $N$ .

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

Galerkin z bazą odcinkami wielomianowych funkcji zdefiniowanych w sposób rozłączny przestrzennie → metoda elementów skończonych

**Metoda elementów skończonych:** funkcje rozłączne tak, żeby  $\mathbf{S}$  = rzadka



najprostszy wybór *funkcji kształtu*(\*): baza funkcji odcinkami liniowymi  
zbieżność dostaniemy w przestrzeni funkcji odcinkami liniowymi

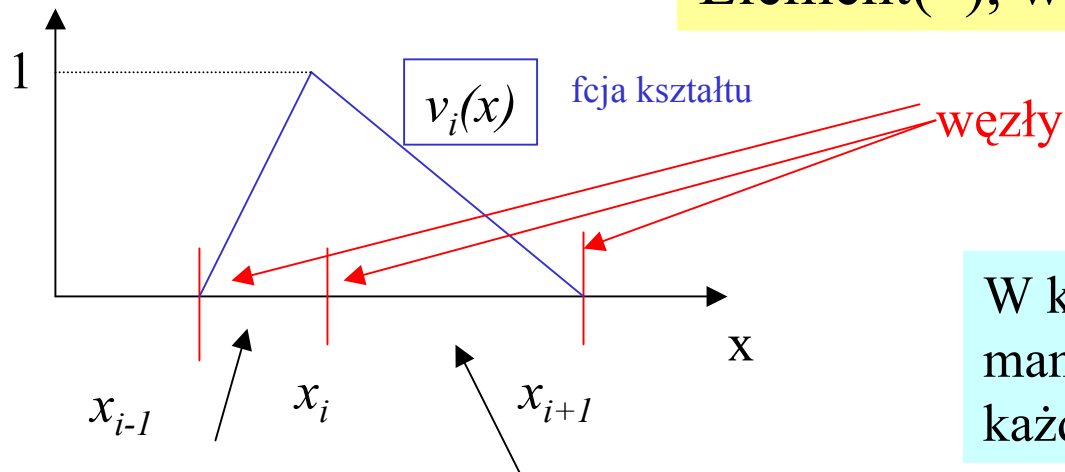
(\*) trzecie pojęcie z żargonu MES

Zobaczmy w działaniu metodę elementów skończonych,  
ale na razie: bez jej charakterystycznych narzędzi:  
bez lokalnych macierzy sztywności związanych z każdym elementem  
bez ich składania do macierzy globalnej  
bez mapowania przestrzeni fizycznej do przestrzeni referencyjnej

będziemy mówili o metodzie z punktu widzenia węzłów:  
tak najłatwiej wprowadzić metodę, ale dla 2D i 3D takie podejście okazuje się niepraktyczne  
podejście związane z elementami zobaczymy później



# Element(\*), węzły(\*), funkcje kształtu



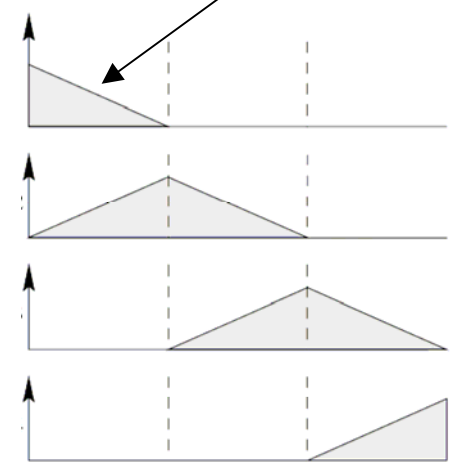
W każdym elemencie:  
mamy 2 funkcje,  
każda z innym węzłem związana

**element**  $K_i$  długości  
 $h_i = x_i - x_{i-1}$

**element**  $K_{i+1}$  długości  
 $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

funkcje bazowe i brzeg



$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i$$

Dla (jednorodnych) warunków Dirichleta  
mamy

$$y_{\text{pierwsze}} = y_{\text{ostatnie}} = 0$$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

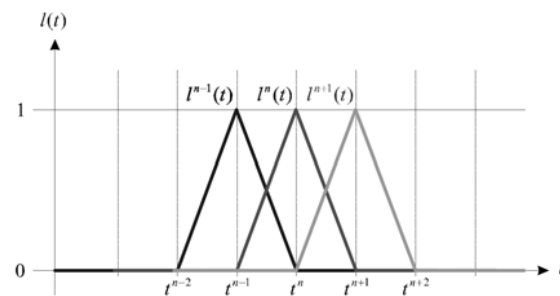
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$S_{ij} = (Lv_i, v_j) \quad \begin{array}{l} \text{niezerowe tylko dla} \\ i=j, i=j-1 \text{ oraz } i=j+1 \text{ [bez przekrywania} \\ \text{całka znika]} \end{array}$$

$$S_{ii} = \cancel{v'_i(x)v_i(x)|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx v'_i(x)v'_i(x) dx$$

$$S_{ii} = -\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)$$

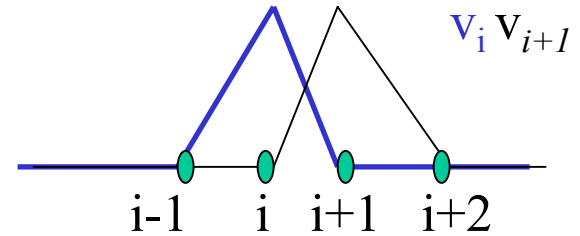


$$S_{ij} = (Lv_i, v_j) \quad \text{niech } j = i+1 \quad v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$S_{i,i+1} = + v'_i(x) v_{i+1}(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} dx v'_i(x) v'_{i+1}(x) dx$$

$$S_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx v'_i(x) v'_{i+1}(x) dx$$

gdy jedna pochodna  
dodatnia druga ujemna



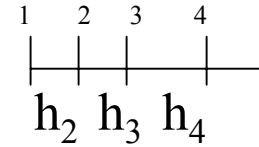
$$S_{i,i+1} = - \left( -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \times \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \times (x_{i+1} - x_i) \right) = \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$S_{i,i-1} = \frac{1}{h_i} \quad \leftarrow \text{długość elementu o numerze większym z dwóch indeksów } S$$

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

Macierz sztywności dla  $n$  węzłów

+ warunek  $y_1=y_n=0$



$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_n} & -\frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

wiersz  $n-1 \rightarrow$

$$F_i = (v_i f)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

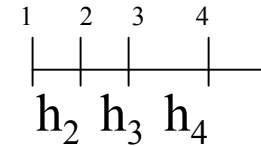
$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx \Bigg|$$

po elemencie  $K_i$                       po  $K_{i+1}$

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

Macierz sztywności dla  $n$  węzłów

+ warunek  $y_1=y_n=0$



$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_n} & -\frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

wiersz  $n-1 \rightarrow$

$$F_i = (v_i f)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

po elemencie  $K_i$                       po  $K_{i+1}$

dla równoodległych węzłów  $\mathbf{S}$  jak macierz metody RS (razy  $h=dx$ ),  
ale wektor obciążeń  $\mathbf{F}$  – nie! w MRS mielibyśmy  $F_i = f(x_i) dx$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

dla  $f(x) = -\sin(\pi x)$

$$F_i = -\frac{\sin(x_i \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i-1})} + \frac{\sin(x_{i-1} \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i-1})} - \frac{\sin(x_{i+1} \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i+1})} + \frac{\sin(x_i \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i+1})}$$

*warunki brzegowe (jednorodne Dirichleta): forma  $S$  oraz  $F_1 = F_n = 0$*

ten URL wygląda prawie jak dla MRS...  
zobaczmy wyniki

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_n} & -\frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

Układ równań z macierzą trójkątniową – przypomnienie.  
Jak rozwiązać?

# Dekompozycja LU macierzy trójkątnej

$$SY=F$$

$$S=LU \quad (LU - \text{trójkątne})$$

$$(LU)Y=F$$

$$UY=x$$

$Lx=F$  - najpierw rozwiązujemy ten układ

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

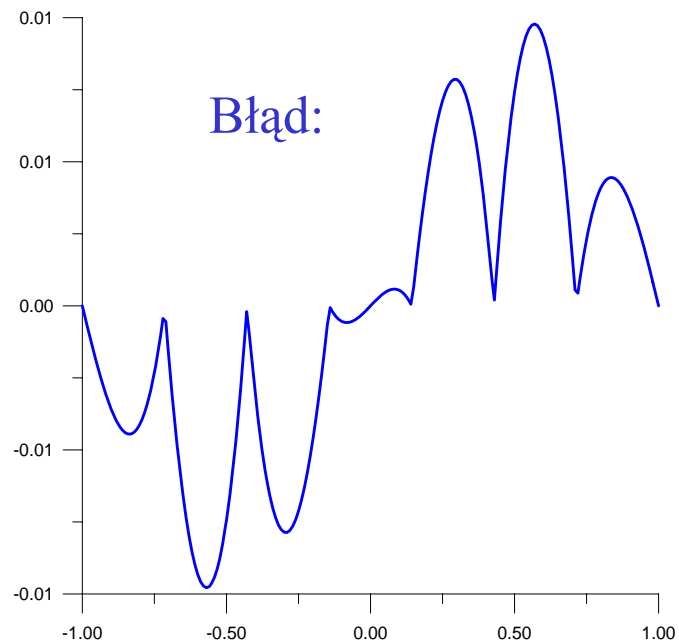
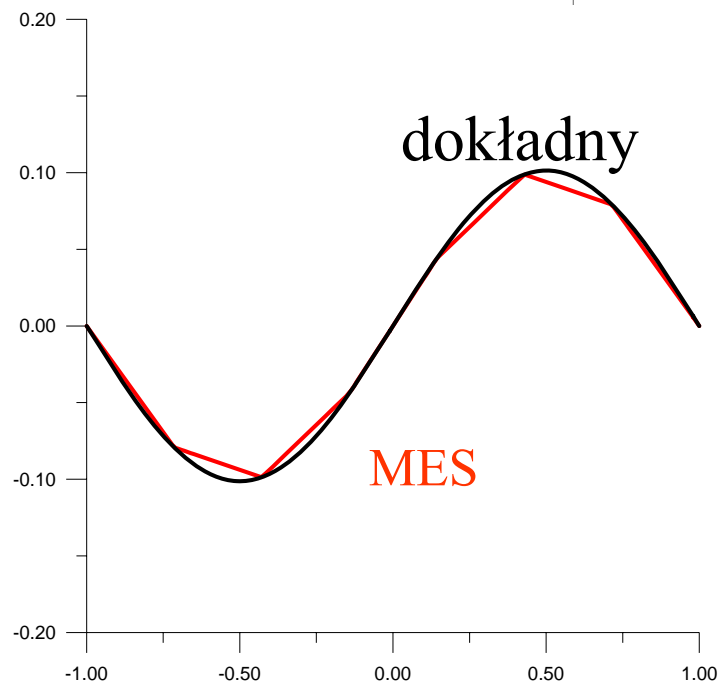
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{matrix} \text{dwuprzekątne} \\ U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \end{matrix} \right| \quad \begin{matrix} \text{bez zmian} \end{matrix}$$

$$\alpha_1 = a_1 \quad \left| \quad \begin{matrix} \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}} \\ \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1} \end{matrix} \right. \quad \text{dla } i > 1$$

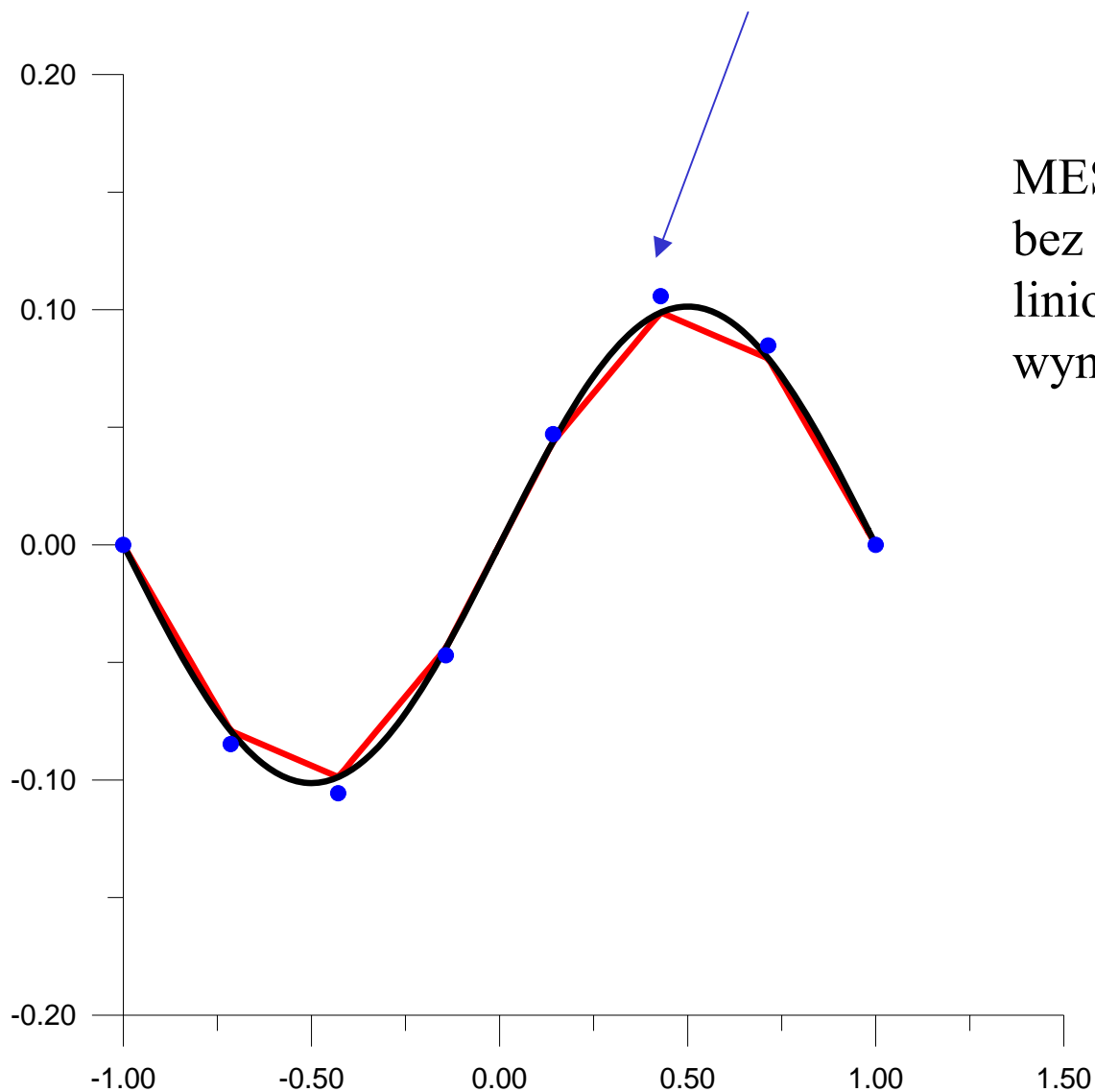


Wynik: równoodległe węzły

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

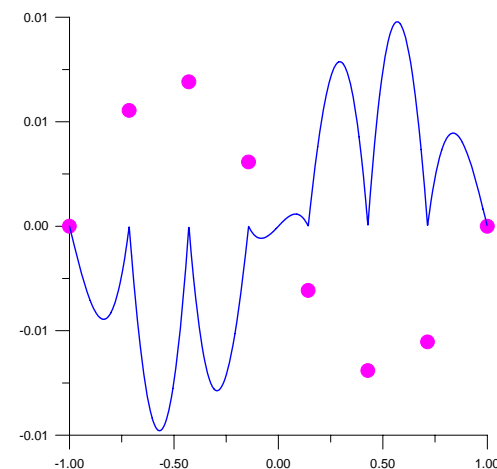


MES (równoodległe węzły) a **MRS** (węzły w tych samych punktach):

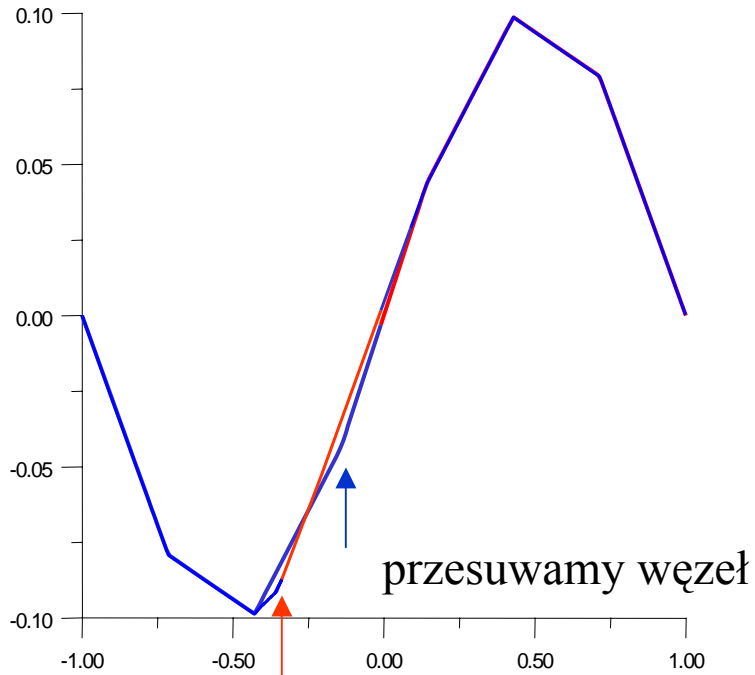


MES dla laplasjanu  
bez pochodnej z funkcjami  
liniowymi: w węzłach  
wynik dokładny !!!

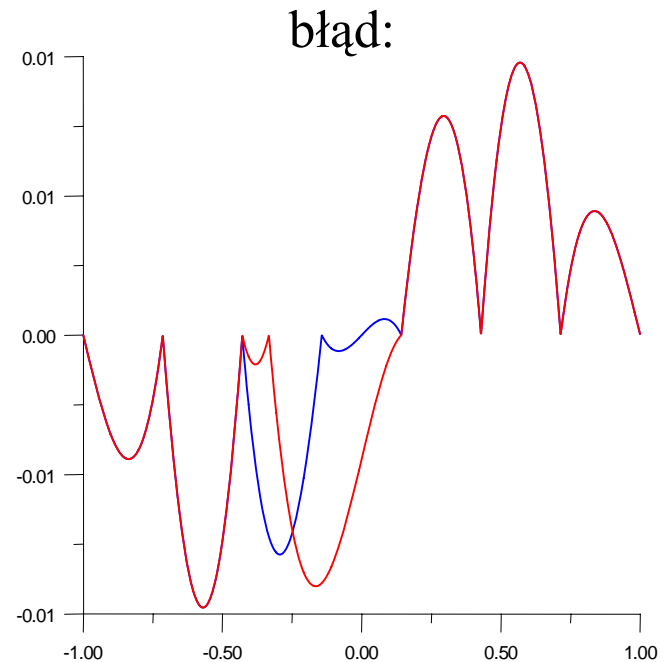
błąd **MRS** i **MES**

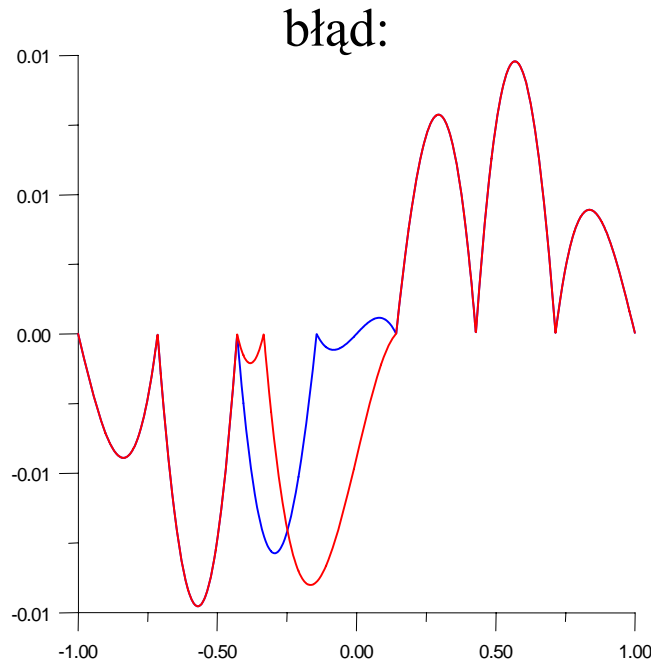


znikanie błędu MES (1D, liniowe f.kształtu) w węzłach  
zachodzi również dla nierównomiernego rozkładu węzłów:



Dla MRS: dla nierównomiernej siatki  
musielibyśmy używać  
niesymetrycznych ilorazów o  
[jak widzieliśmy] niższej dokładności





Równanie Poissona,  
funkcje kształtu liniowe  
wynik MES **dokładny** w węzłach

MES: produkuje oszacowanie  
wyniku również między węzłami

MRS: tylko w węzłach

MRS: wartości w węzłach,  
są dokładne **TYLKO**  
w granicy  $\Delta x \rightarrow 0$

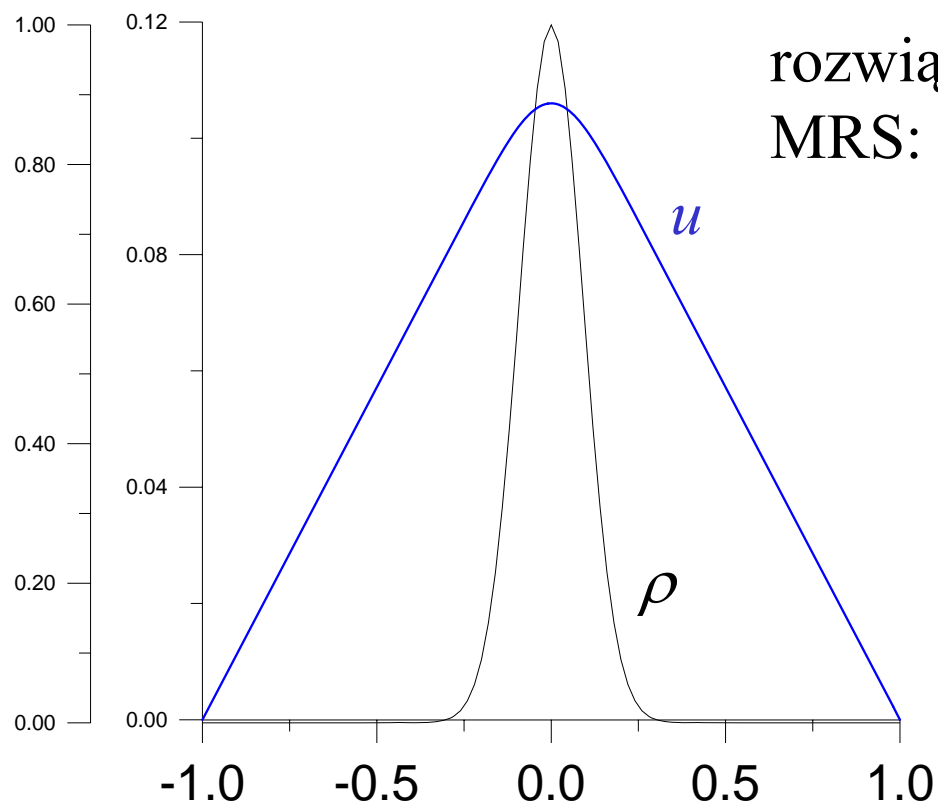
dowód dokładności MES w tej wersji - za parę folii

laboratorium

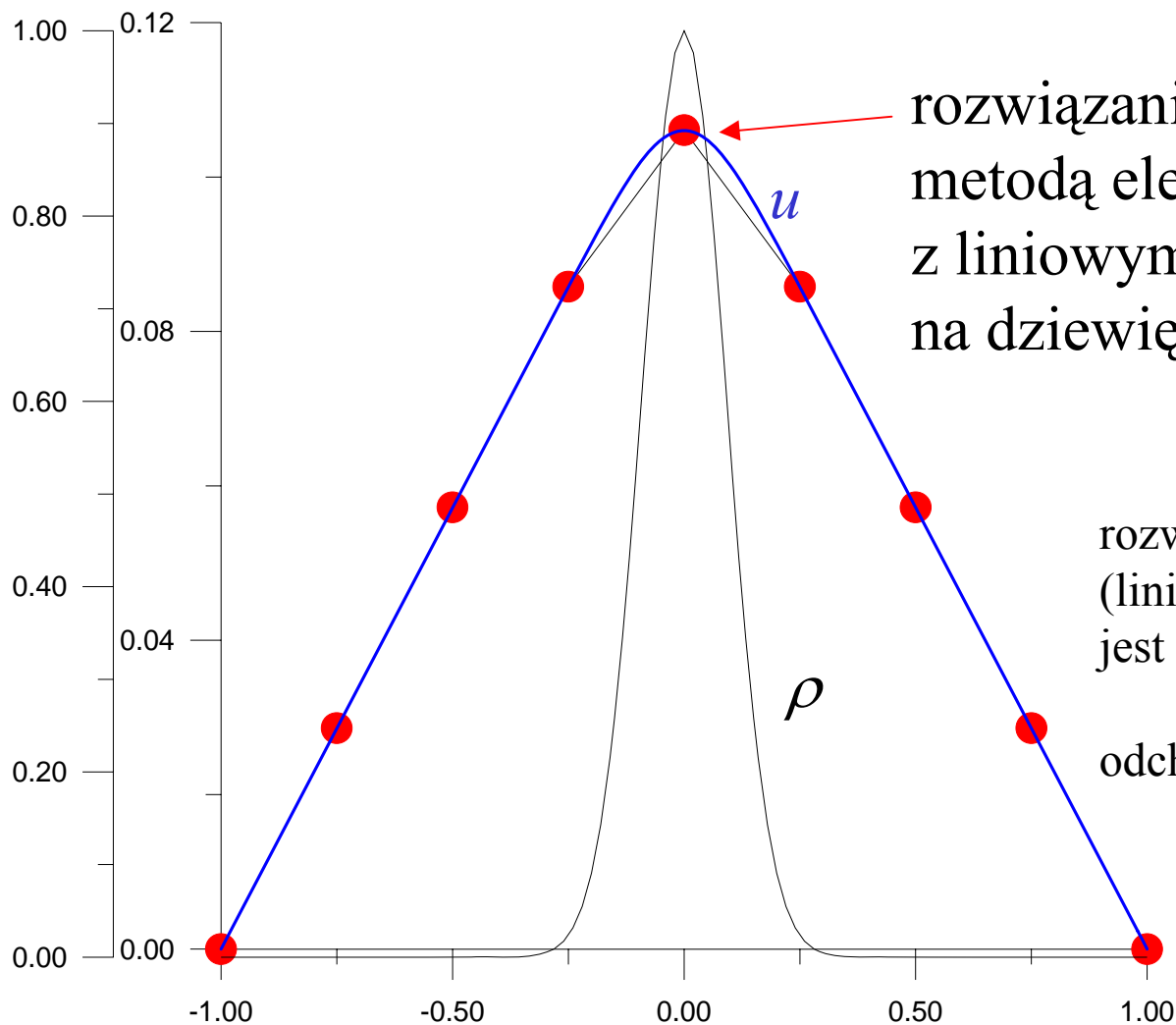
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x)$$

$$\rho(x) = \exp(-60x^2)$$

$$u(-1) = u(1) = 0$$



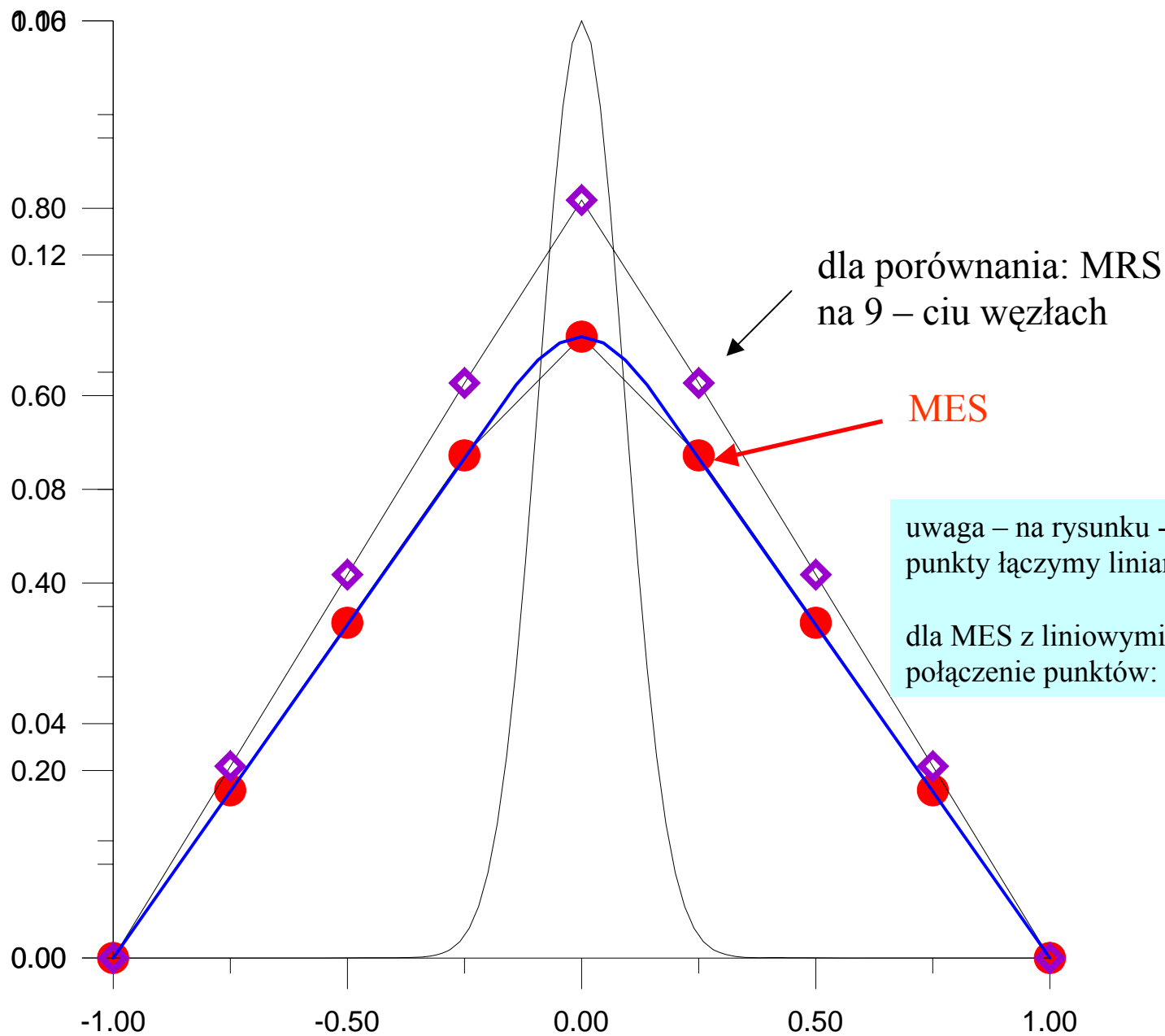
rozwiązanie (bardzo) dokładne  
MRS: gęsta siatka



rozwiązanie  
metodą elementów skończonych  
z liniowymi funkcjami kształtu  
na dziewięciu węzłach

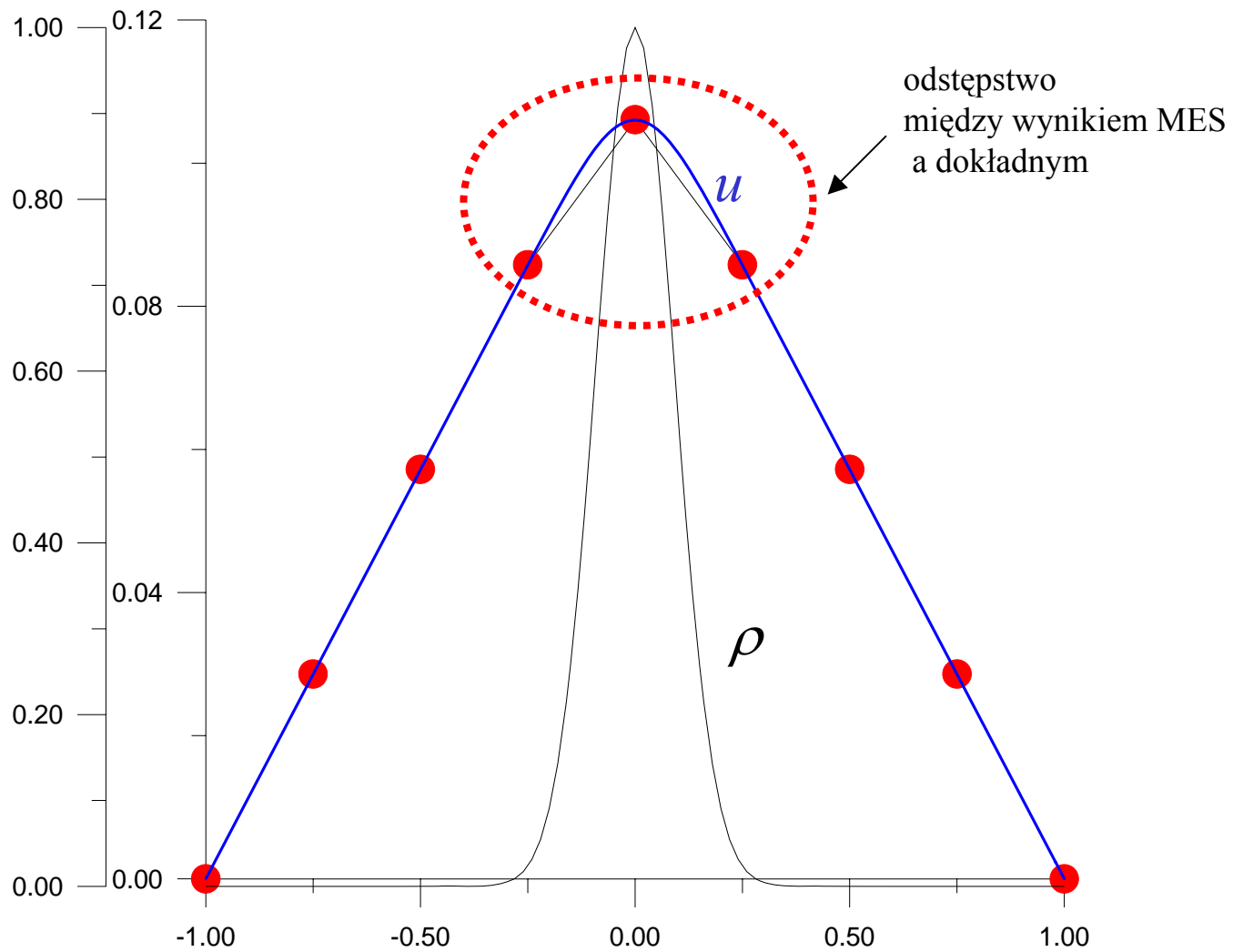
rozwiązanie MES w tej wersji  
(liniowe fcje kształtu 1D)  
jest dokładne w węzłach

odchylenia: tylko między węzłami

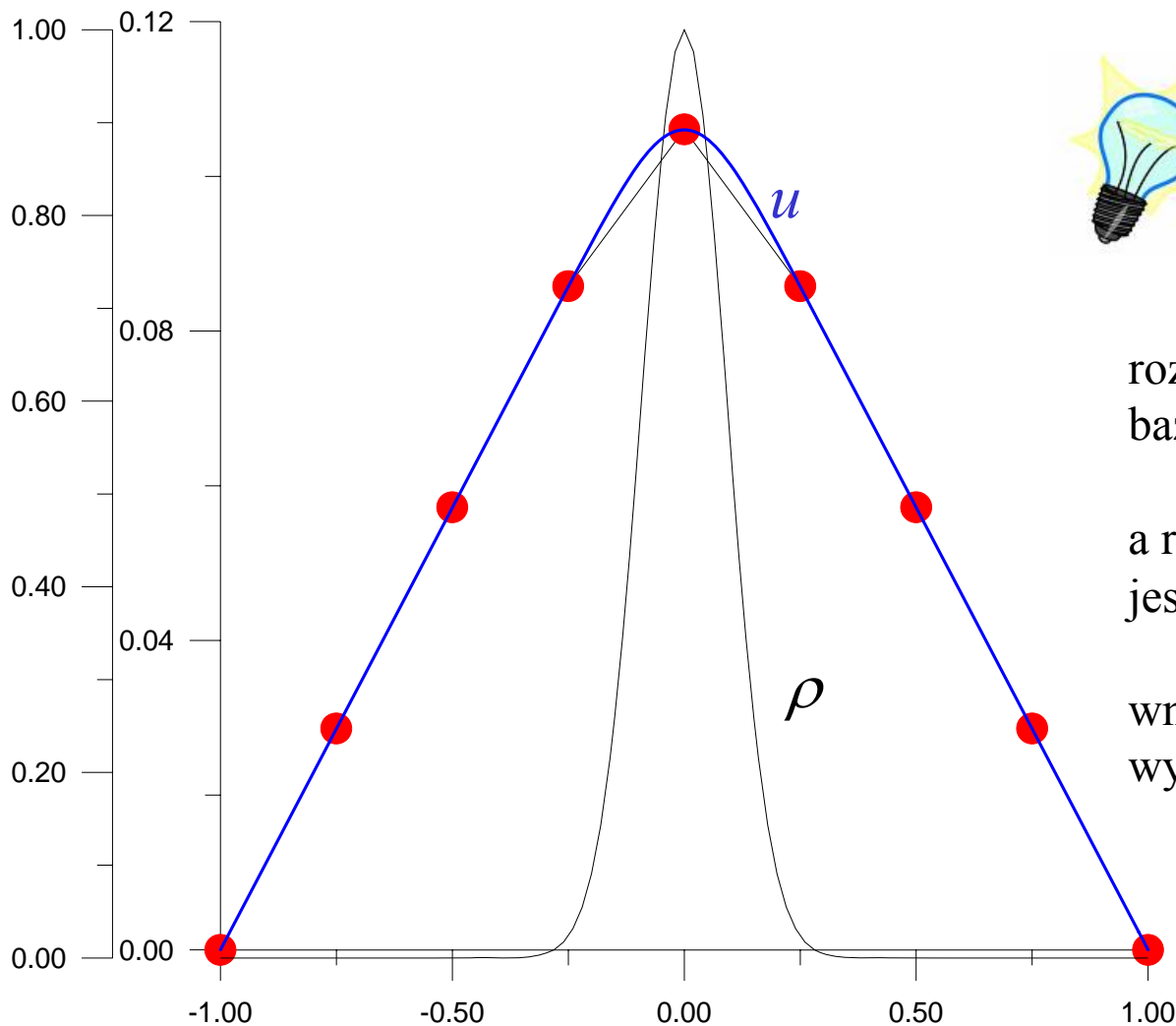


uwaga – na rysunku - dla MRS punkty łączymy liniami tylko dla ilustracji

dla MES z liniowymi funkcjami kształtu połączenie punktów: ma znaczenie dosłowne







rozwiązanie MES w naszej  
bazie jest odcinkami liniowe

a rozwiązanie dokładne  
jest liniowe tam gdzie  $\rho=0$

wniosek: tam gdzie  $\rho=0$   
wystarczy jeden element!

pomysł: przesunąć wszystkie węzły poza brzegowymi do obszaru gdzie nie znika  
gęstość ładunku – tam gdzie  $u$  zaokrąglone.

wiemy już, że przesuwanie czerwonych punktów pójdzie po krzywej dokładnej.

$x_1 = -x_9 = -1$  zacieśniamy węzły wokół  $x=0$

$$x_i = -b_x + \frac{i-2}{3}b_x \quad i=2,8$$

Kryterium wyboru węzłów? ( $b_x$ )

przy okazji dyskusji metod relaksacyjnych dowiedzieliśmy się, że najbliższe prawdzie jest rozwiązanie, które minimalizuje funkcjonal całki działania

wykorzystajmy działanie jako kryterium jakości rozwiązania w metodzie elementów skończonych

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x)$$

$$a = \int_{-1}^1 dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \rho(x)u(x) \right)$$

$$a = \int_{-1}^1 dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \rho(x)u(x) \right) \quad \left| \quad u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \right|$$

$$a = \left( \frac{1}{2} \sum_{ij} c_i c_j \int_{-1}^1 v'_i(x) v'_j(x) dx \right) - \left( \sum_i c_i \int_{-1}^1 \rho(x) v_i(x) dx \right)$$

$$a = \left( -\frac{1}{2} \sum_{ij} c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) - \left( \sum_i c_i \int_{-1}^1 \rho(x) v_i(x) dx \right)$$

$$a = \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left( \sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right) \left| \right.$$

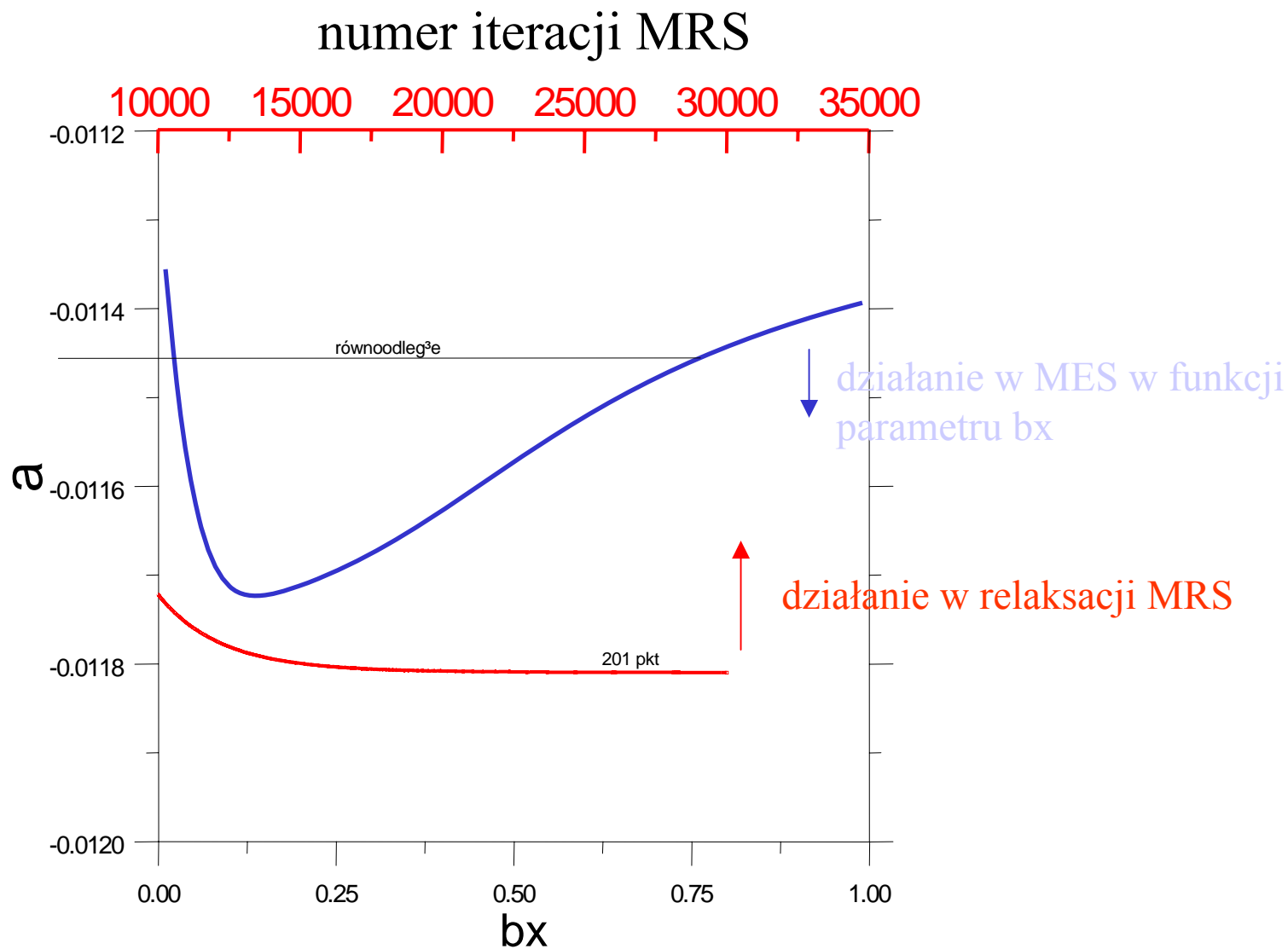
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ji} &= \int_{-1}^1 v''_i(x) v_j(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 v'_i(x) v'_j(x) dx, \end{aligned}$$

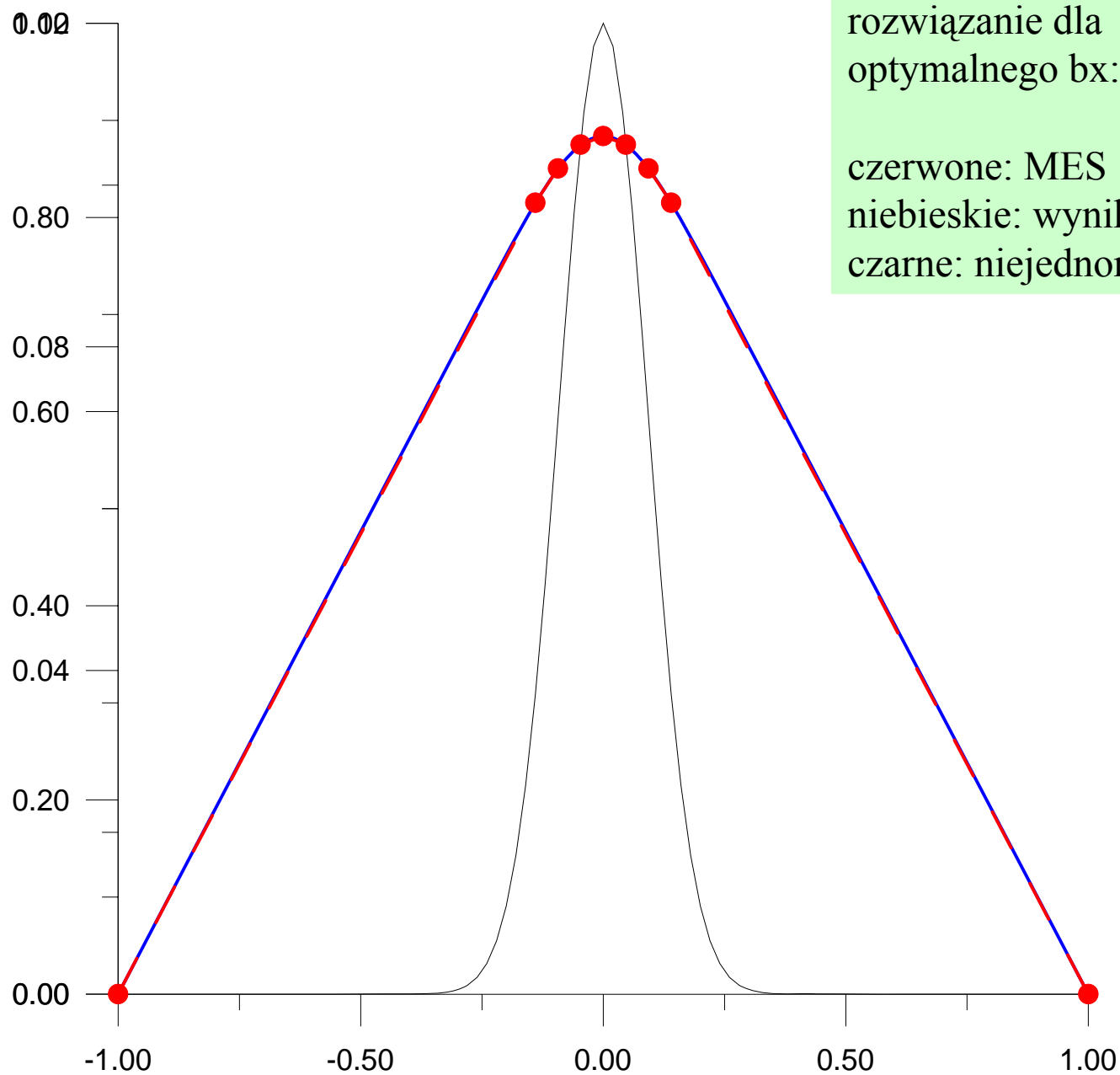
$c_1=c_9=0$  (warunki brzegowe)

$$\mathbf{F}_j = - \int_{-1}^1 \rho(x) v_j(x) dx.$$

do oceny jakości wyboru węzłów użyjemy macierzy A i F, które i tak musimy wyznaczyć aby wyliczyć c.

funkcjonał działania a wybór położeń węzłów:





rozwiązanie dla  
optymalnego bx:

czerwone: MES

niebieskie: wynik dokładny

czarne: niejednorodność równania

Wybór węzłów: przez optymalizację funkcjonału ...

metoda elementów skończonych ma charakter wariacyjny

w ogóle: metoda Galerkina dla dowolnej bazy jest równoważna metodzie Reyleigha-Ritza  
gdy ta stosowalna

metoda Reyleigha-Ritza:  
rozwiązanie w bazie funkcyjnej

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x)$$

dla ustalonych funkcji bazowych (w naszym przykładzie: dla ustalonych węzłów)  
 $c$  wyznaczone przez warunek minimum  $a$ .

$$a = \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left( \sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right)$$

(pokazać, że warunek min  $a$   
produkuje  $\mathbf{A}\mathbf{c}=\mathbf{F}$ )

Wybór węzłów: przez optymalizację funkcjonału ...

metoda elementów skończonych ma charakter wariacyjny

w ogóle: metoda Galerkina dla dowolnej bazy jest równoważna metodzie Reyleigha-Ritza  
gdy ta stosowalna

metoda Reyleigha-Ritza:  
rozwiązanie w bazie funkcyjnej

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x)$$

dla ustalonych funkcji bazowych (w naszym przykładzie: dla ustalonych węzłów)  
 $c$  wyznaczone przez warunek minimum  $a$ .

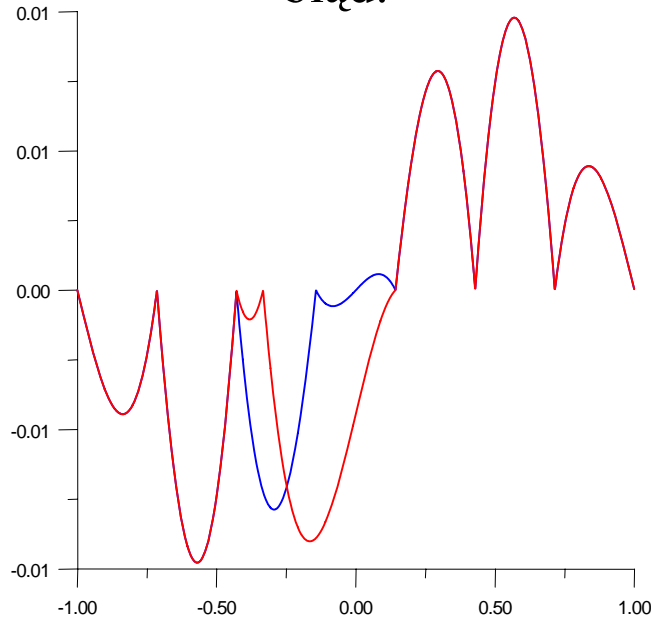
$$a = \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left( \sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right)$$

(pokazać, że warunek min  $a$   
produkuje  $\mathbf{A}\mathbf{c}=\mathbf{F}$ )

uwaga: w naszym przykładzie : dodatkowo optymalizowaliśmy funkcje bazowe (położenie węzłów). Zasada najmniejszego działania wykorzystana została więc dwukrotnie.

jeśli tylko znamy funkcjonał dla równania różniczkowego:  
przyda się do optymalizacji kształtu elementów (2D)

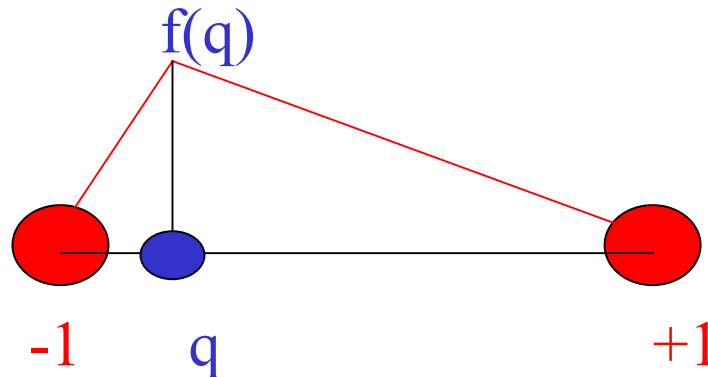
błąd:



Równanie Poissona,  
funkcje kształtu liniowe  
wynik MES **dokładny** w węzłach

w MRS wszystko co możemy  
otrzymać, to wartości w węzłach,  
które są dokładne **TYLKO**  
w granicy  $\Delta x \rightarrow 0$  !!!

Wniosek:  
cały rachunek  
na 2 elementach:

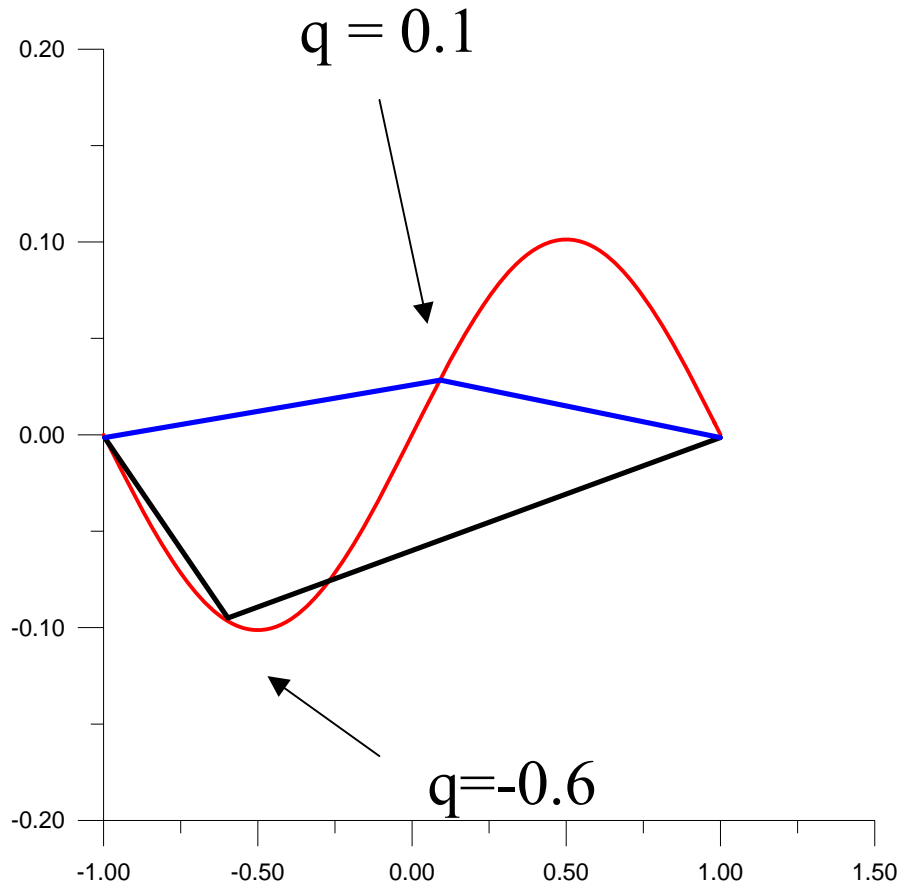


niezależnie od wyboru  
 $q$ :  $f(q)$  da dokładne  
rozwiązanie równania

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \right|$$



$q$  możemy ustawić gdziekolwiek, zawsze dostaniemy rozwiązanie dokładne



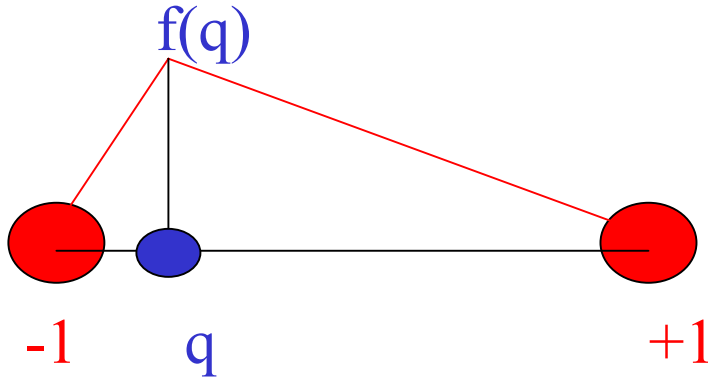
wniosek:  
wystarczy przeskanować  
 $q$  przez pudło  
aby uzyskać dokładny wynik

jeden węzeł wewnątrz pudła

funkcja kształtu

$$v_I = (x+1)/(q+1) \text{ dla } x < q$$

$$v_I = (1-x)/(1-q) \text{ dla } x > q$$



rozwiązanie przybliżone:  $v = f(q)v_I(x)$

$$Lu = \rho$$

funkcjonał:

$$F(v) = \frac{1}{2}(v, Lv) - (\rho, v)$$

$$\left. -\frac{d^2 u}{dx^2} = \rho(x) \right|$$

wyliczymy F jako funkcję  $f(q)$

z warunku  $\min F(v)$  wyznaczymy  $f(q)$

$$v=f(q)v_I(x)$$

$$v_I= (x+1)/(q+1) \text{ dla } x<q$$

$$v_I= (1-x) / (1-q) \text{ dla } x>q$$

$$F(v)=1/2(v,Lv)-(\rho,v)$$

v znika na brzegach:

$$(v, Lv) = (v, \frac{-d^2v}{dx^2}) = +(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx})$$

$$(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx}) = -f(q)^2 \left( \int_{-1}^q \frac{dx}{(q+1)^2} + \int_q^1 \frac{dx}{(1-q)^2} \right) \Bigg|$$

$$(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx}) = f(q)^2 \left( \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(1-q)} \right) \Bigg|$$

$$(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx}) = f(q)^2 \left( \frac{2}{(1-q^2)} \right) \Bigg|$$

---


$$(\rho, v) = \int_{-1}^q \rho(x) \frac{f(q)(x+1)}{(q+1)} dx + \int_q^1 \rho(x) \frac{f(q)(1-x)}{(1-q)} dx$$


---

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1 - q^2} - f(q) \left( \int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1 - q^2} - \left( \int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1 - q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1 + q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$


---

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1-q^2} - f(q) \left( \int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1-q^2} - \left( \int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1-q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1+q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$

policzmy pochodne  $f(q)$  po  $q$

$$f'(q) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2} \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx + \cancel{\frac{1}{2}(1-q)\rho(q)(q+1)} - \cancel{\frac{1}{2}(1+q)\rho(q)(1-q)}$$

$$f''(q) = -\frac{1}{2}\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}\rho(q)(1-q)$$

$$-f''(q) = \rho(q)$$

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1-q^2} - f(q) \left( \int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1-q^2} - \left( \int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1-q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1+q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$

policzmy pochodne  $f(q)$  po  $q$

$$f'(q) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2} \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx + \cancel{\frac{1}{2}(1-q)\rho(q)(q+1)} - \cancel{\frac{1}{2}(1+q)\rho(q)(1-q)}$$

$$f''(q) = -\frac{1}{2}\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}\rho(q)(1-q)$$

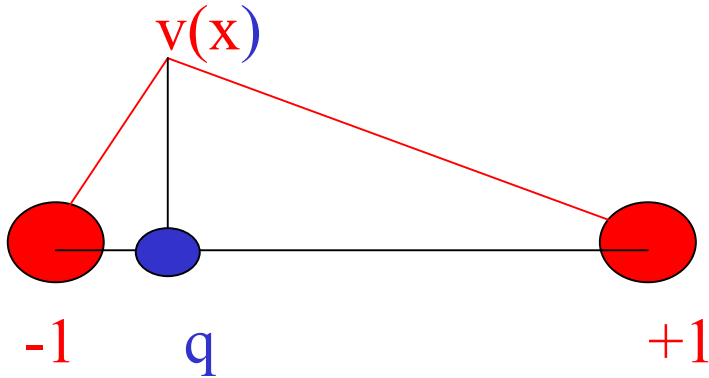
$$-f''(q) = \rho(q) \longrightarrow$$

spełnia silną formę równania  
 $u'' = -\rho$   
 stąd wynik dokładny dla  $u$  w  $x=q$

## silna a słaba forma równania: różnica

$$u(x)'' = -\rho(x)$$

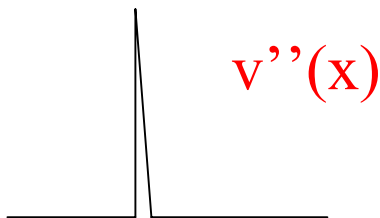
druga pochodna potencjału = ładunek



funkcja  $v$  nie spełnia silnej formy równania różniczkowego, tylko słabą:

$$v'(x)$$

$$(v, v'')f(q) = -(v, \rho)$$



druga pochodna potencjału delta D, niezależnie od tego jak wygląda ładunek

Podobny zabieg dla MRS: 3 węzły.

Metoda różnic skończonych, siatka nierównomierna

Iloraz różnicowy drugiej pochodnej dla nierównej siatki:



$$\left. \begin{aligned} u(x + \Delta p) &= u(x) + \Delta p \frac{du}{dx} + \frac{\Delta p^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta p^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4) \\ u(x - \Delta l) &= u(x) - \Delta l \frac{du}{dx} + \frac{\Delta l^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta l^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta l^4) \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \times \Delta l \\ \times \Delta p \end{array} \Bigg|_+$$

Wzór trójpunktowy

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$



tracimy jeden rząd  
dokładności w porównaniu  
z siatką równomierną  
Problem rozwiązany  
w metodzie elementów  
skończonych.

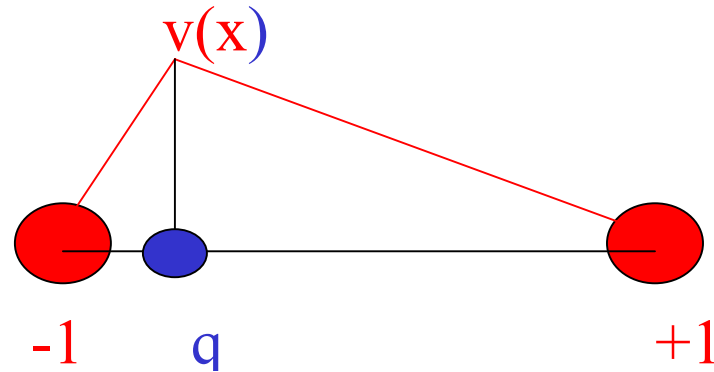
W MES: nie ma problemu  
bo pochodne i całki liczymy dokładnie!



# Co się stanie jeśli taki zabieg powtórzymy w MRS?

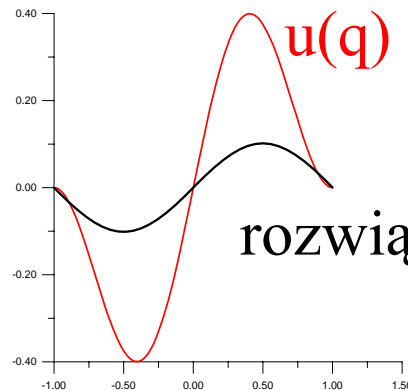
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)}$$

$$\Delta p = 1 - q$$
$$\Delta l = q + 1$$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{-2u(q)}{(1 - q^2)2} = 2 \frac{-u(q)}{(1 - q^2)} = -\sin(\pi q)$$

$$u(q) = \sin(\pi q)(1 - q^2)/2$$



rozwiązanie dokładne

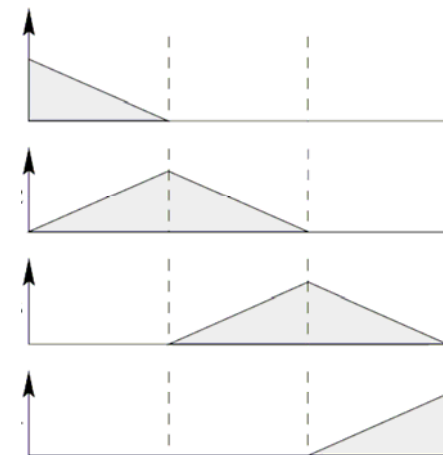
liniowe fcje kształtu a warunki Neumanna

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \Big|$$

$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$u'(x) = \sum_j y_j v'_j(x)$$

$$u'(x = x_1) = C \Big|$$



tylko  $v_1$  oraz  $v_2$  wnoszą przyczynek do pochodnej  
na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Big|$$

pierwszy wiersz macierzy S

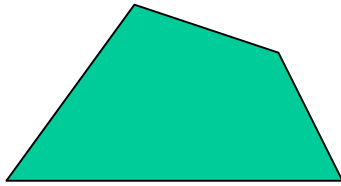
$(-1/h_2 \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$  prawa strona pierwszy wiersz F : C

warunki mieszane [Robina]  $u'(x_1) + Du(x_1) = E$ :  $(-1/h_2 + D \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$

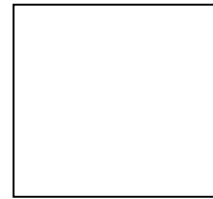
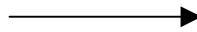
wybrane narzędzia MES umożliwiające  
jej automatyzację w więcej niż 1D:

- 1) macierze sztywności pojedynczych elementów  
oraz ich
- 2) składanie do globalnej macierzy sztywności
- 3) przestrzeń odniesienia i jej mapowanie do przestrzeni fizycznej

# Przestrzeń referencyjna [odniesienia]



*element w przestrzeni fizycznej*



$y=1$

$y=-1$

$x=-1$        $1$

*element w przestrzeni odniesienia*

w 1D

Problem fizycznie zadany jest na siatce  $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$

Rachunki (całkowanie elementów macierzowych)

dla każdego elementu chcemy przenieść do przedziału  $(-1, 1)$

Element  $K_m = (x_{m-1}, x_m) \rightarrow (-1, 1)$

*mapowanie z  $(-1, 1)$  do  $K_m$ :*

$x = (x_m + x_{m-1})/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$ ,      gdzie  $\xi$  z przedziału  $(-1, 1)$

Modelowy operator

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \Bigg|$$

będziemy całkować jego elementy macierzowe w przestrzeni odniesienia

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \quad \Bigg|$$

**Całkowanie macierzy sztywności w przestrzeni referencyjnej**

element macierzowy całkowany w elemencie [fizycznym]

$$C_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left[ -a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x) \right] dx$$

całkę i pochodne przenosimy do przestrzeni odniesienia:

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$J_m = (x_m - x_{m-1})/2$$

skala transformacji  $m$ -tego elementu:  
(czynniki skali, jacobian)  $J_m = \frac{dx}{d\xi}$

pole elementu fizycznego  
/ pole elementu odniesienia

przy transformacji: granice całki  
zmieniają się na  $-1, 1$ , poza tym  $dx = J_m d\xi$

transformacja pochodnych:

$$u'(x) = \frac{du(x(\xi))}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J_m} \quad \Bigg|$$

1D:  $J$  nie zależy od  $\xi$   
w 2D: zobaczymy,  
że nie zawsze tak jest  
[gdy element zmienia  
swój kształt w mapowaniu.  
w 1D: odcinek  $\rightarrow$  odcinek]

## Całkowanie macierzy sztywności w przestrzeni referencyjnej

$$C_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left( -a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x) \right) dx$$

$$u'(x) = \frac{du(x(\xi))}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J_m} \Bigg|$$

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \left( -a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m^2} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) \right) J_m d\xi$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \left( -a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) \right) J_m d\xi \Bigg|$$

całkowanie wektora sztywności: całka  $(f, v_j)$  transformuje się jak wyraz z  $a_0$ .

odcinkowo liniowe funkcje kształtu w przestrzeni odniesienia

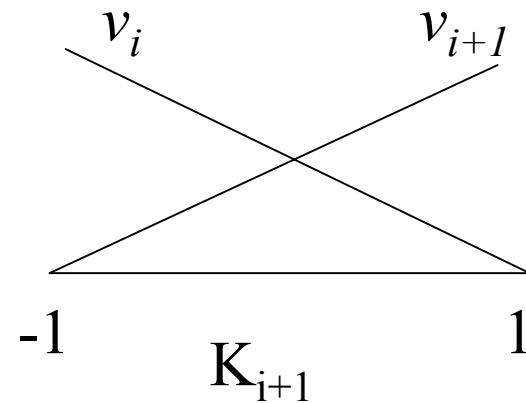
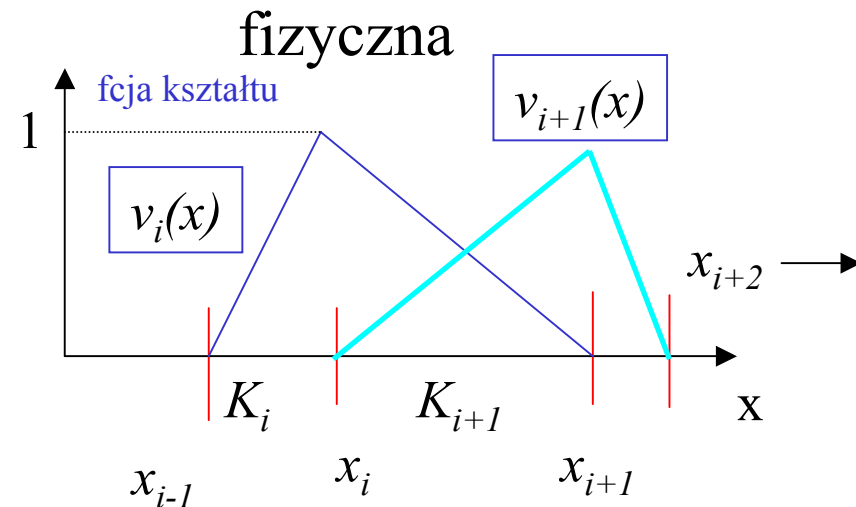
$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$x(\xi) = (x_i + x_{i+1})/2 + (x_{i+1} - x_i)/2 \xi$$

W elemencie  $i+1$   
dwie funkcje kształtu

$$v_i(\xi) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(\xi) = 1/2 \xi + 1/2$$



odniesienia

# Przykład całkowanie w przestrzeni odniesienia dla bazy odcinkami liniowej

(całka po elemencie  $K_{i+1}$ )

$$S_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx v'_i(x) v'_{i+1}$$

$$J_m = \frac{dx}{d\xi}$$

$$J_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) / 2$$

pole elementu fizycznego  
/ pole elementu odniesienia

$$C_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \text{tu prim to pochodna po } x \quad -a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x) dx$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \text{a tu po } \xi \quad -a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) J_m d\xi$$

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$

$$S_{i,i+1} = \int_{-1}^1 d\xi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{h_{i+1}}$$

ten wynik już znamy



# Macierz sztywności pojedynczego elementu składanie macierzy globalnej

Zmieniamy punkt widzenia:  
(z funkcji kształtu na elementy)

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \text{ (parametry węzłowe} \\ x_{m-1} & & x_m \text{ niewiadome)} \\ \hline -1 & \text{element} & 1 \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

[ funkcje bazowe :  
ważone  
parametrami  
węzłowymi ]

Zmieniamy punkt widzenia:  
(z funkcji kształtu na elementy)

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \text{ (parametry węzłowe)} \\ x_{m-1} & & x_m \text{ niewiadome} \\ \hline -1 & \text{element} & 1 \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

macierz sztywności  
elementu  $m$   
[wymiar taki jak liczba funkcji  
kształtu na element]

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

$$E^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m & E_{12}^m \\ E_{21}^m & E_{22}^m \end{bmatrix}$$

$$E_{ij}^m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \phi_i(x) L \phi_j(x) dx$$

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

zależność od  $m$  w  $J_m$  :

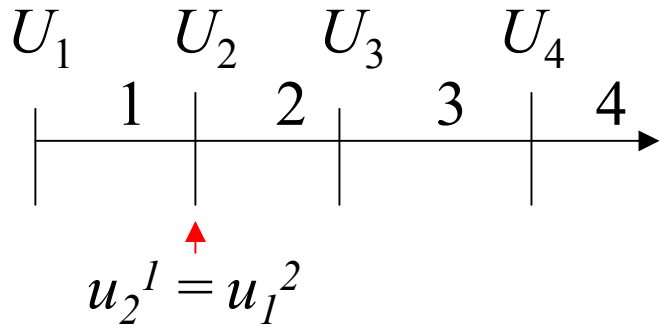
$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 -a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) J_m d\xi$$

# Składanie (assembly) globalnej macierzy sztywności

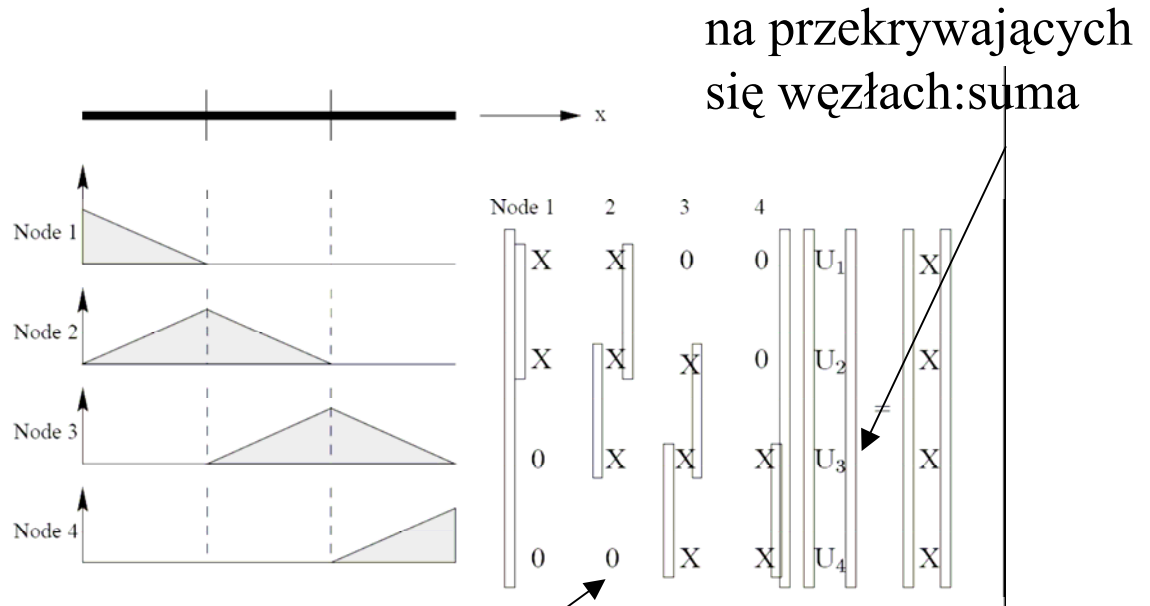
$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

węzły na granicy elementów  
obsługują więcej niż jeden element



globalna  $[U]$  i lokalna  $[u]$  numeracja węzłów

$$E^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m & E_{12}^m \\ E_{21}^m & E_{22}^m \end{bmatrix}$$



macierz globalna  $S$  (rozmiar = liczbie węzłów)

## case study

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \right| \begin{array}{l} u(x=-1)=0 \\ u(x=1)=0 \end{array}$$

Przedział  $(-1,1)$   
 Podzielony na 7 elementów  
 (8 węzłów)

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \\ x_{m-1} & & x_m \\ \hline -1 & & 1 \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi)$$

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[ -\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\phi_j}{d\xi} \right] d\xi$$

$$E_{ij}^m = \frac{2}{h_m} 2 \frac{1}{4} (-1)^{i+j+1} = \frac{(-1)^{i+j+1}}{h_m} \left| \right.$$

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Składanie (assembly) macierzy sztywności z całek po elementach

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

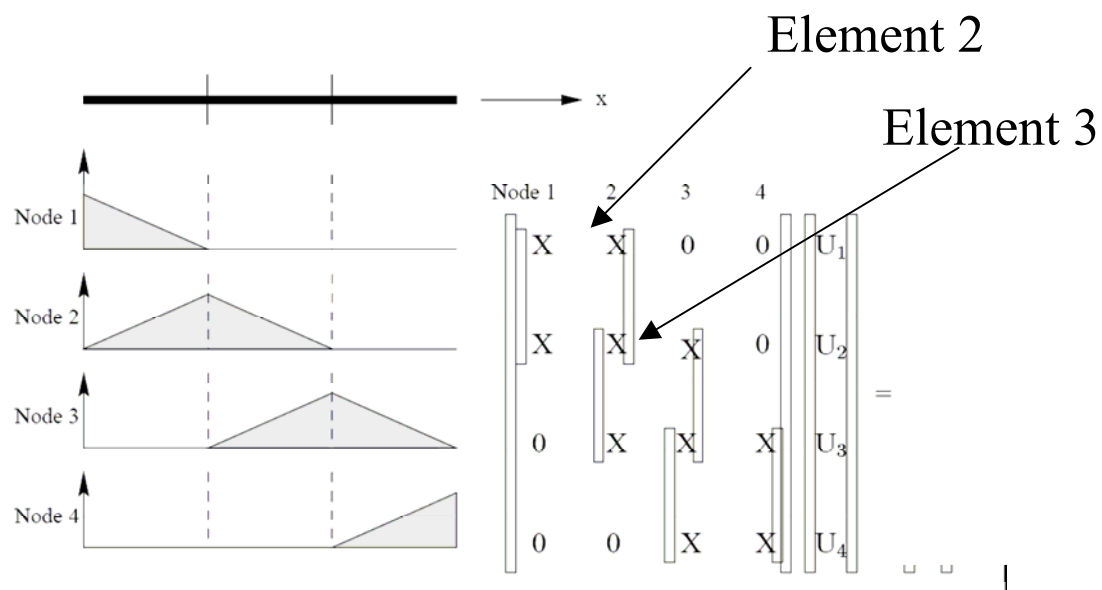
dodajemy elementy  
z różnych macierzy lokalnych  
które odpowiadają temu samemu węzłowi

$$S_{mm} = E_{22}^m + E_{11}^{m+1}$$

$$S_{m,m+1} = E_{12}^{m+1}$$

$$S_{m,m-1} = E_{21}^m$$

Forma już znana



$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_n} & -\frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

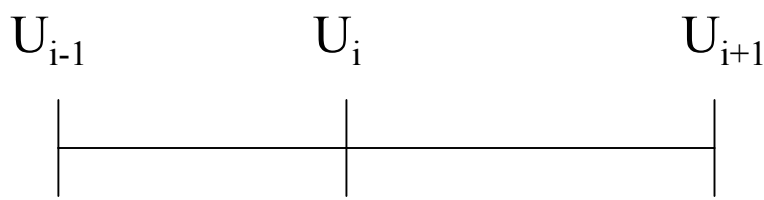
# Wektor obciążeń pojedynczego elementu/składanie globalnego

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

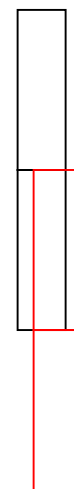
po elemencie  $K_i$

po  $K_{i+1}$



$$P_k^i = \int_{-1}^1 f(\xi) \phi_k^i(\xi) J_i d\xi$$

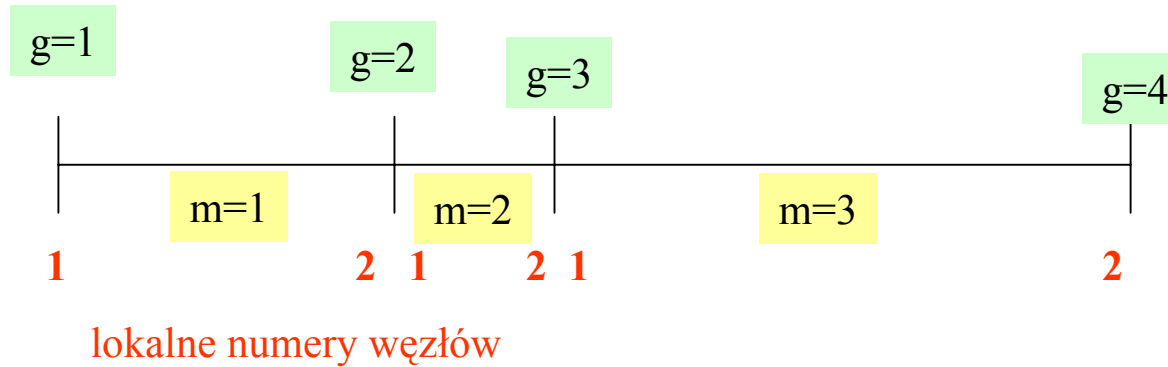
$$P^i = \begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \end{pmatrix}$$



$$F_i = P_2^i + P_1^{i+1}$$

druga funkcja elementu  $i$   
i pierwsza elementu  $i+1$  = ta sama  $v_i(x)$

## Składanie globalnej macierzy sztywności – buchalteria węzłów



m-numeruje elementy

g – globalna numeracja węzłów

$nr(k, m)$  – przyporządkowanie numeru globalnego węzłowi o lokalnym numerze  $k$  w elemencie  $m$

$$1 = nr(1, 1)$$

$$2 = nr(2, 1) = nr(1, 2)$$

$$3 = nr(2, 2) = nr(1, 3)$$

$$4 = nr(2, 3)$$

pętla po elementach  $m=1, M$

pętla po węzłach lokalnych  $k=1, N$

pętla po węzłach lokalnych  $l=1, N$

identyfikacja numeru globalnego węzła

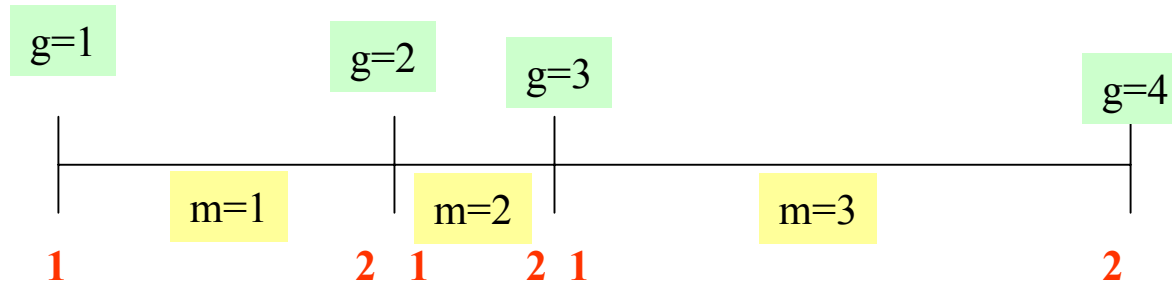
$$i = nr(k, m)$$

$$j = nr(l, m)$$

$$S(i, j) = S(i, j) + E(m, k, l)$$

identycznie składa się macierze dla wyższych funkcji kształtu i w więcej niż 1D

# Składanie globalnej macierzy sztywności – buchalteria węzłów



$1 = \text{nr}(1,1)$   
 $2 = \text{nr}(2,1) = \text{nr}(1,2)$   
 $3 = \text{nr}(2,2) = \text{nr}(1,3)$   
 $4 = \text{nr}(2,3)$

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

pętla po elementach  $m=1,M$   
 pętla po węzłach lokalnych  $k=1,N$   
 pętla po węzłach lokalnych  $l=1,N$   
 identyfikacja numeru globalnego węzła  
 $i = \text{nr}(k,m)$   
 $j = \text{nr}(l,m)$   
 $S(i,j) = S(i,j) + E(m,k,l)$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{X} & \text{X} & 0 & 0 \\ \text{X} & \text{X} & \text{X} & 0 \\ 0 & \text{X} & \text{X} & \text{X} \\ 0 & 0 & \text{X} & \text{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \end{bmatrix}$$



składanie lokalnego wektora obciążeń:

pętla po elementach  $m=1,M$

pętla po węzłach lokalnych  $k=1,N$

identyfikacja numeru globalnego węzła

$$i = nr(k, m)$$

$$F(i) = F(i) + P(k, m)$$

o potrzebie używania wyższych funkcji kształtu (i o laboratorium):

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \right| \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$u(1)=u(-1)=0$$

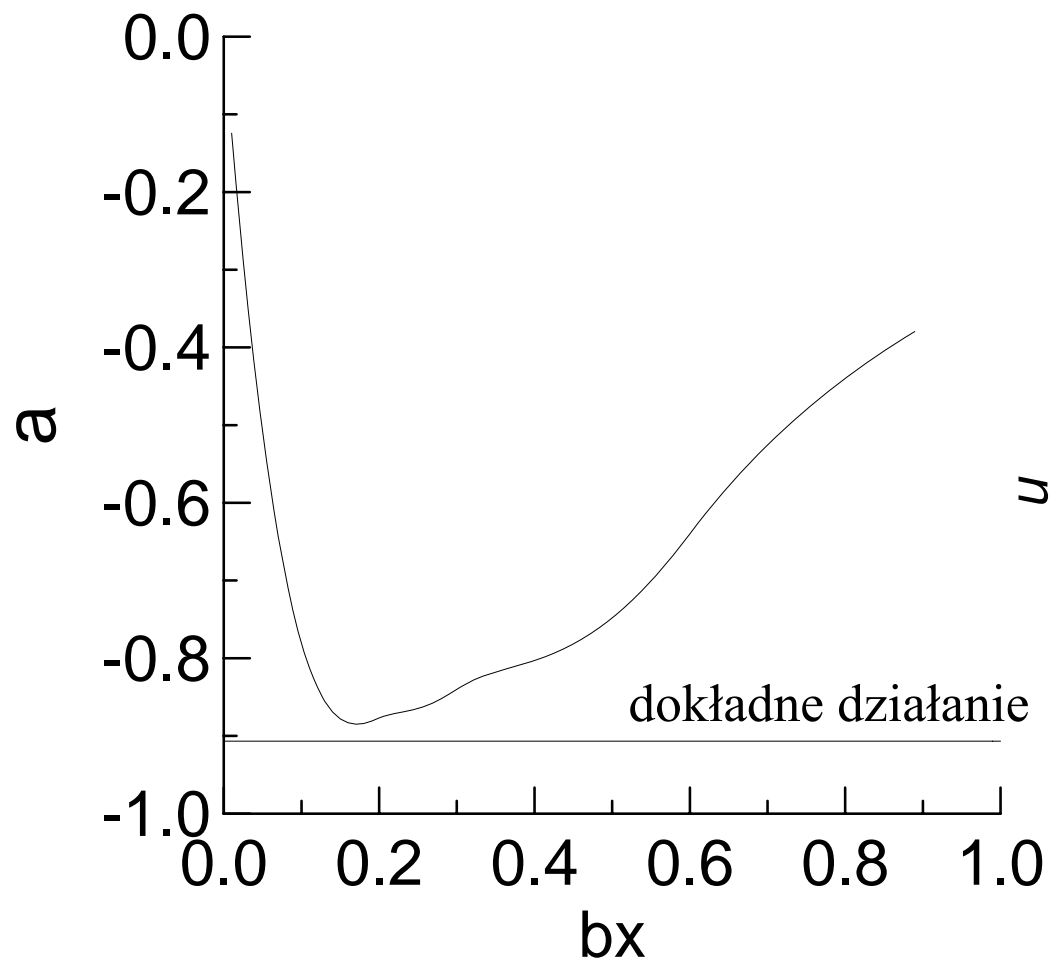
z liniowymi funkcjami kształtu: poza węzłami  
nie uzyskamy dokładnego rozwiązania tego równania  
(nigdy nie uzyskamy rozwiązania silnej postaci równania, druga pochodna  
wewnątrz elementów jest zawsze równa zero a ma być równa niejednorodności  
dla równań elektrostatyki – źródło potencjału, dla równania przew. ciepl. – źródło  
ciepła)

rozwiązanie dokładne:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}(x+1) & \text{dla } x \in (-1, -0.2] \\ 10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (-0.2, 0] \\ -10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (0, 0.2] \\ -\frac{2}{5}(x-1) & \text{dla } x \in (0.2, 1) \end{cases}$$

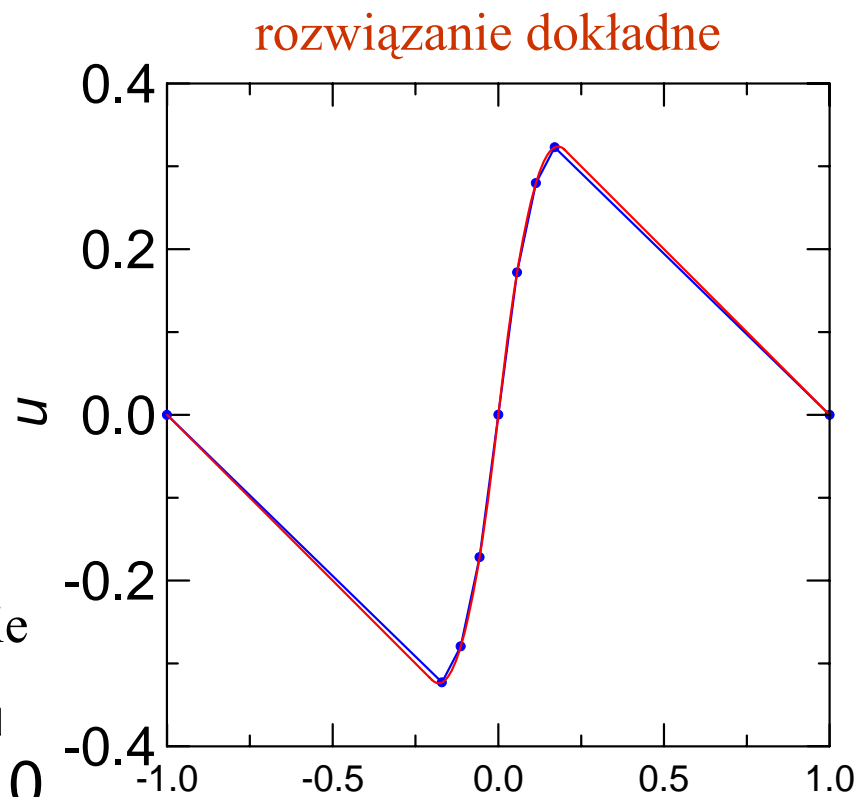
Odpowiada mu działanie  $a = -0.9666(6)$

całka działania a rozkład elementów  
dla funkcji odcinkowo liniowych:

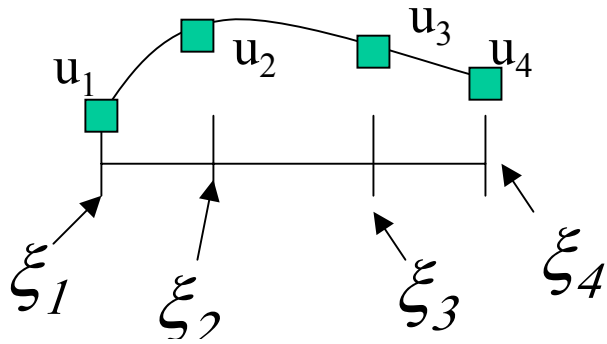


$$x_i = -b_x + \frac{i-2}{3}b_x \quad i=2,8$$

optymalne rozwiązanie  
odcinkami liniowymi



## Funkcje kształtu wyższych rzędów:



jeden element, cztery ( $n$ ) węzły

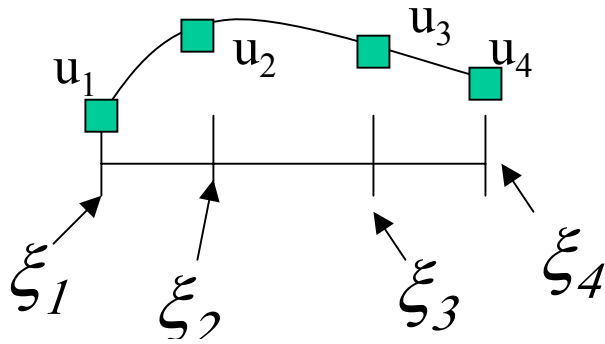
$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi) + u_3 \phi_3(\xi) + u_4 \phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$\phi_i(\xi)$

wielomian stopnia  $n-1$ , taki, że  $\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$

## Funkcje kształtu wyższych rzędów:



jeden element, cztery ( $n$ ) węzły

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi) + u_3 \phi_3(\xi) + u_4 \phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$$\phi_i(\xi)$$

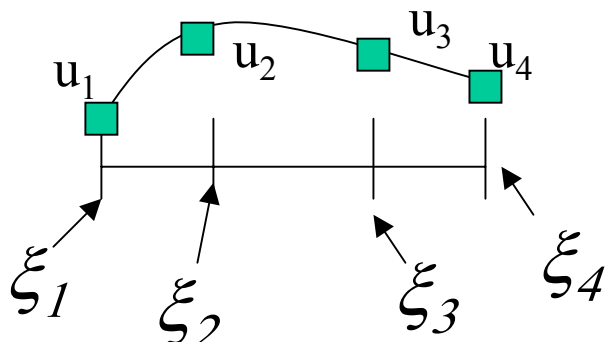
wielomian stopnia  $n-1$ , taki, że  $\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$

wiemy jak go wskazać:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi)$$

wielomian węzłowy  
Lagrange'a

## Funkcje kształtu wyższych rzędów:



jeden element, cztery ( $n$ ) węzły

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi) + u_3 \phi_3(\xi) + u_4 \phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$$\phi_i(\xi)$$

wielomian stopnia  $n-1$ , taki, że  $\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$

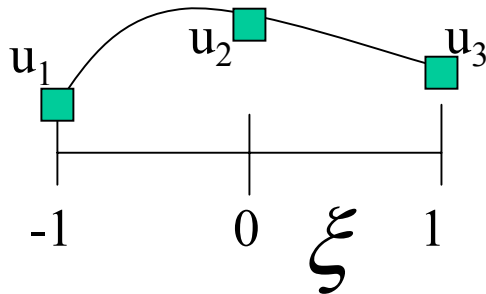
wiemy jak go wskazać:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi)$$

wielomian węzłowy  
Lagrange'a

funkcje kształtu Lagrange'a: rozwiązanie interpolowane wielomianowo w każdym z elementów. jedynie ciągłość rozwiązania między elementami. w przeciwieństwie do problemów z KSN: wartości funkcji w węzłach **nie są znane**. należy je wyliczyć. istota FEM.

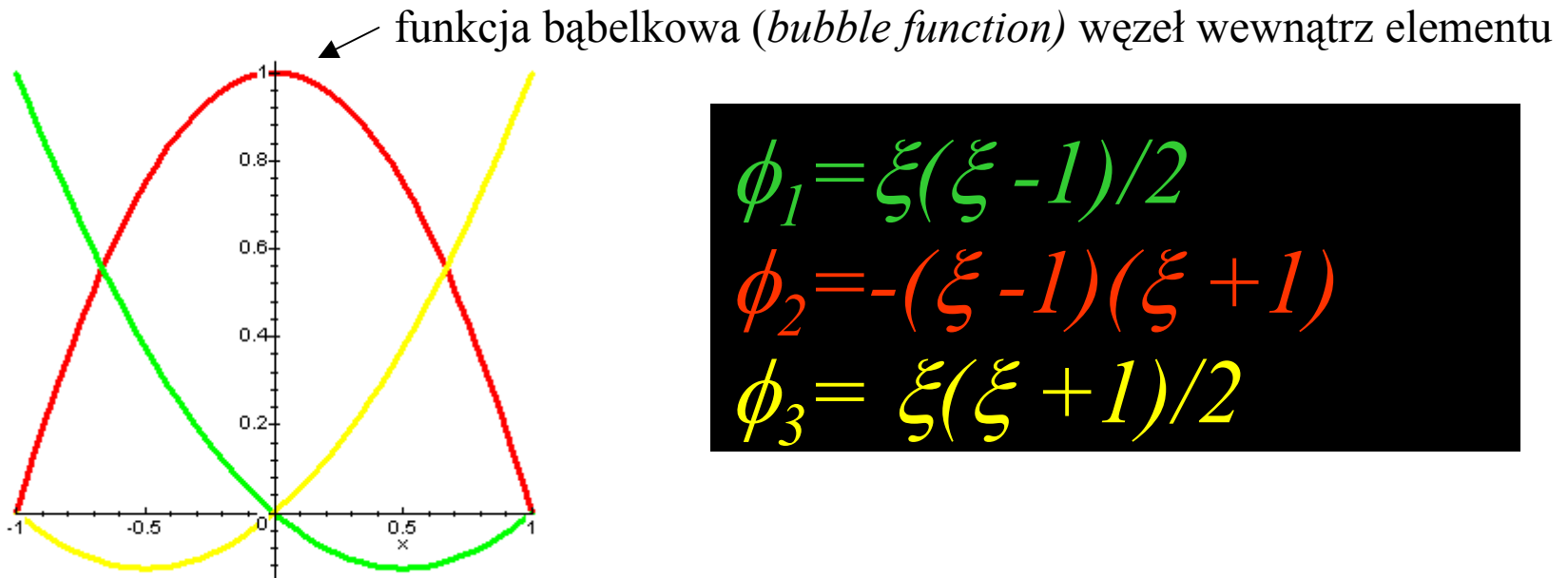
## Elementy wyższych rzędów:



$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi)$$

Jeden element, trzy funkcje bazowe, 3 parametry węzłowe

Funkcje bazowe : w danym węźle tylko jedna z nich niezerowa  
(co min. gwarantuje liniową niezależność funkcji bazowych)



$$\phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$$

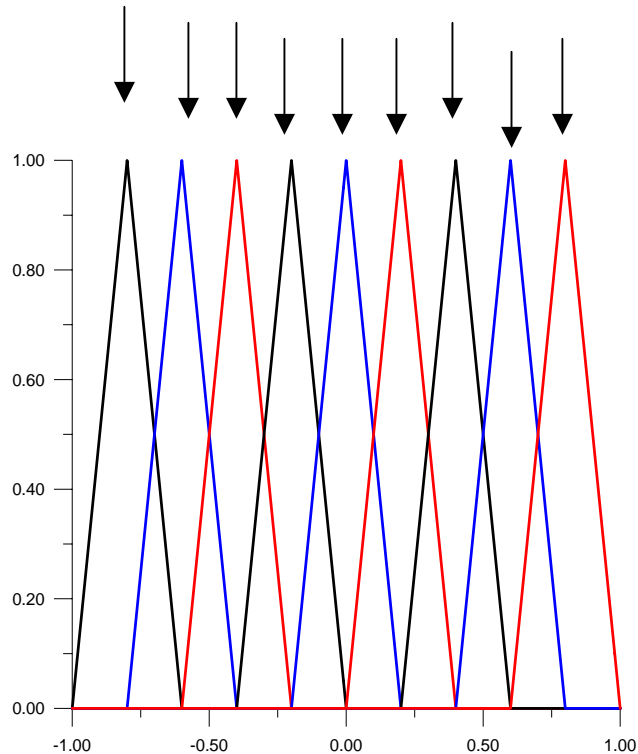
$$\phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

funkcje wierzchołkowe (vertex functions) 1 na krawędziach elementu

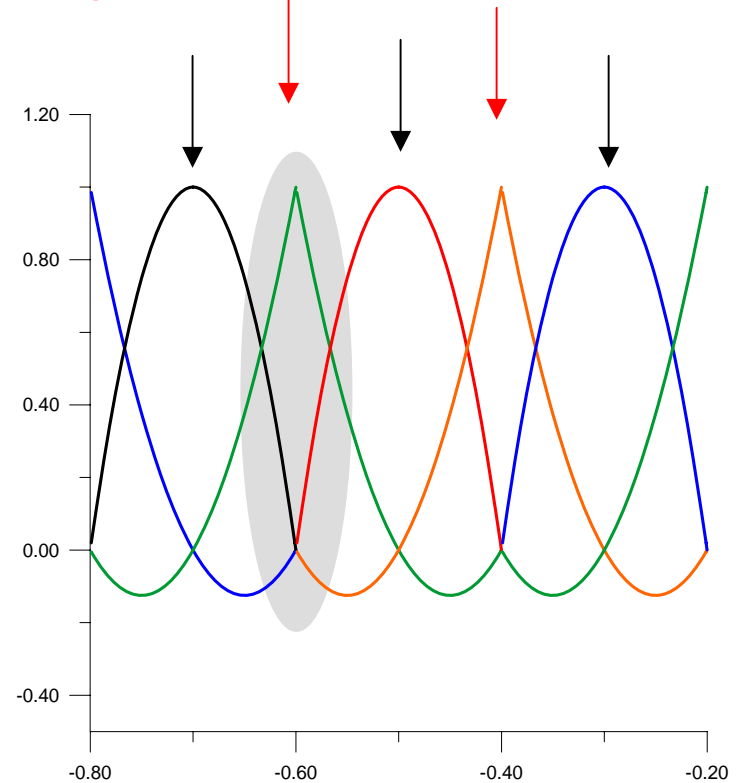
# Funkcje kształtu Lagrange'a: odcinkowo liniowe i kwadratowe

węzły= granice elementów



liniowa baza Lagrange'a

każda strzałka to węzeł  
granice elementów czerwone



kwadratowa baza Lagrange'a



# Macierz sztywności dla kwadratowych f. Lagrange'a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[ -\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\phi_j}{d\xi} \right] d\xi$$

$$E^m = \frac{1}{3h_m} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

przy równym podziale  
przedziału E takie samo  
dla każdego elementu

lecz P **nie!** [inny zakres  $x(\xi)$ ]

$$x(\xi) = (x_m + x_{m+1})/2 + (x_{m+1} - x_m)/2 \xi$$

$$\phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$$

$$\phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

całki wyliczone analitycznie:  
ilu punktowego Gaussa  
należałoby użyć aby dokładnie  
scałkować m.sztywności numerycznie?

$$P_k^i = \int_{-1}^1 f(\xi) \phi_k^i(\xi) J_i d\xi$$

liczone numerycznie  
metodą Gaussa

$$P^m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix}$$

# Składanie globalnej macierzy sztywności i wektora obciążeń dla kwadratowych funkcji Lagrange'a

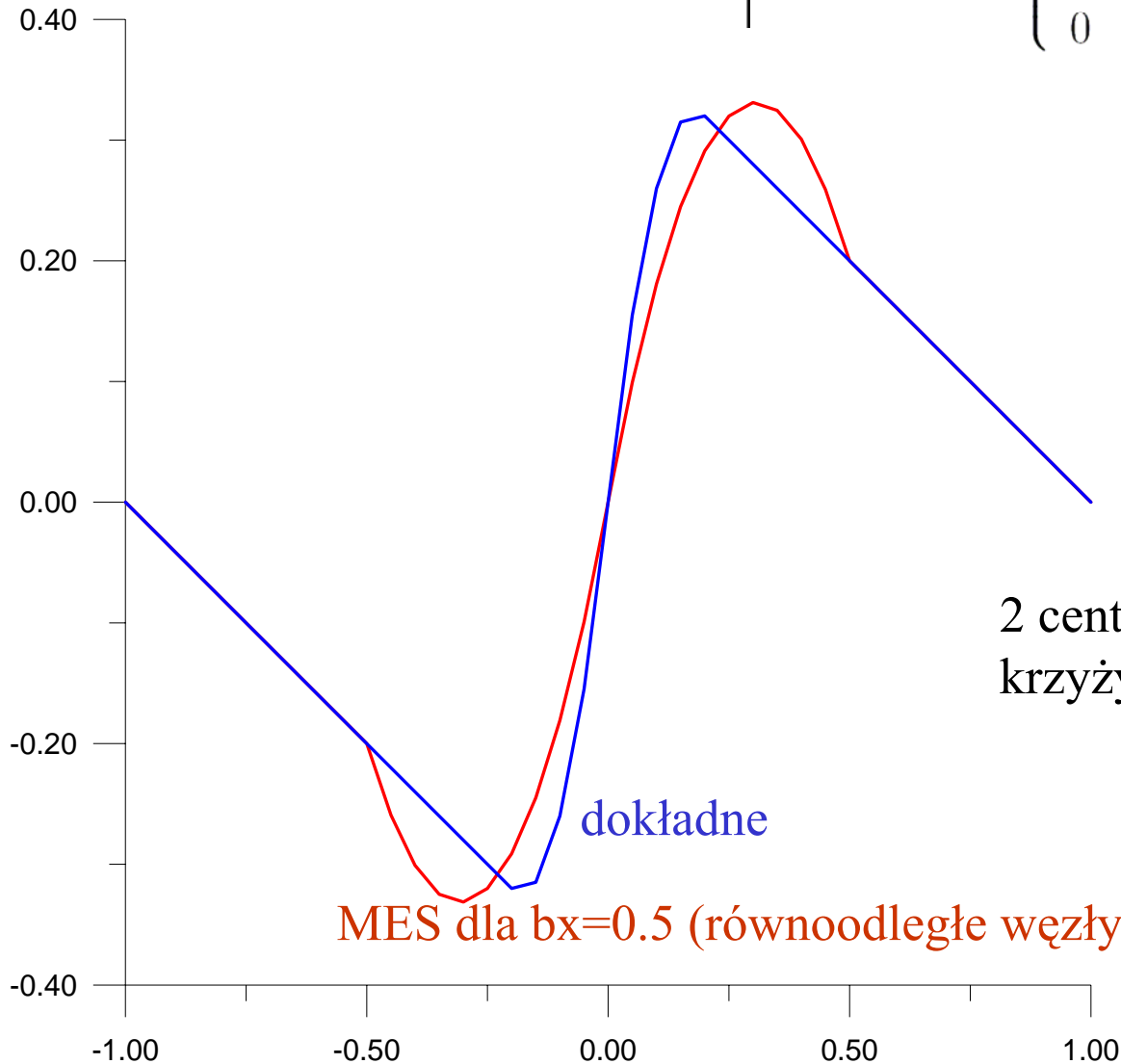
$$E^m = \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m \\ d_m & e_m & f_m \\ g_m & i_m & j_m \end{pmatrix} \quad \text{lokalne} \quad P^m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & i_2 & j_2 + a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & e_3 & f_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & i_3 & j_3 + a_4 & b_4 & c_4 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_n & e_n & f_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{globalne} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 + A_3 \\ B_3 \\ C_3 + A_4 \\ \dots \\ B_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

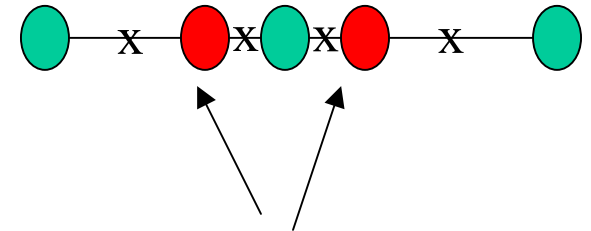
Liczba wierszy:  $2n+1$  (n-liczba elementów)

# Laboratorium:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \left| \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \right.$$



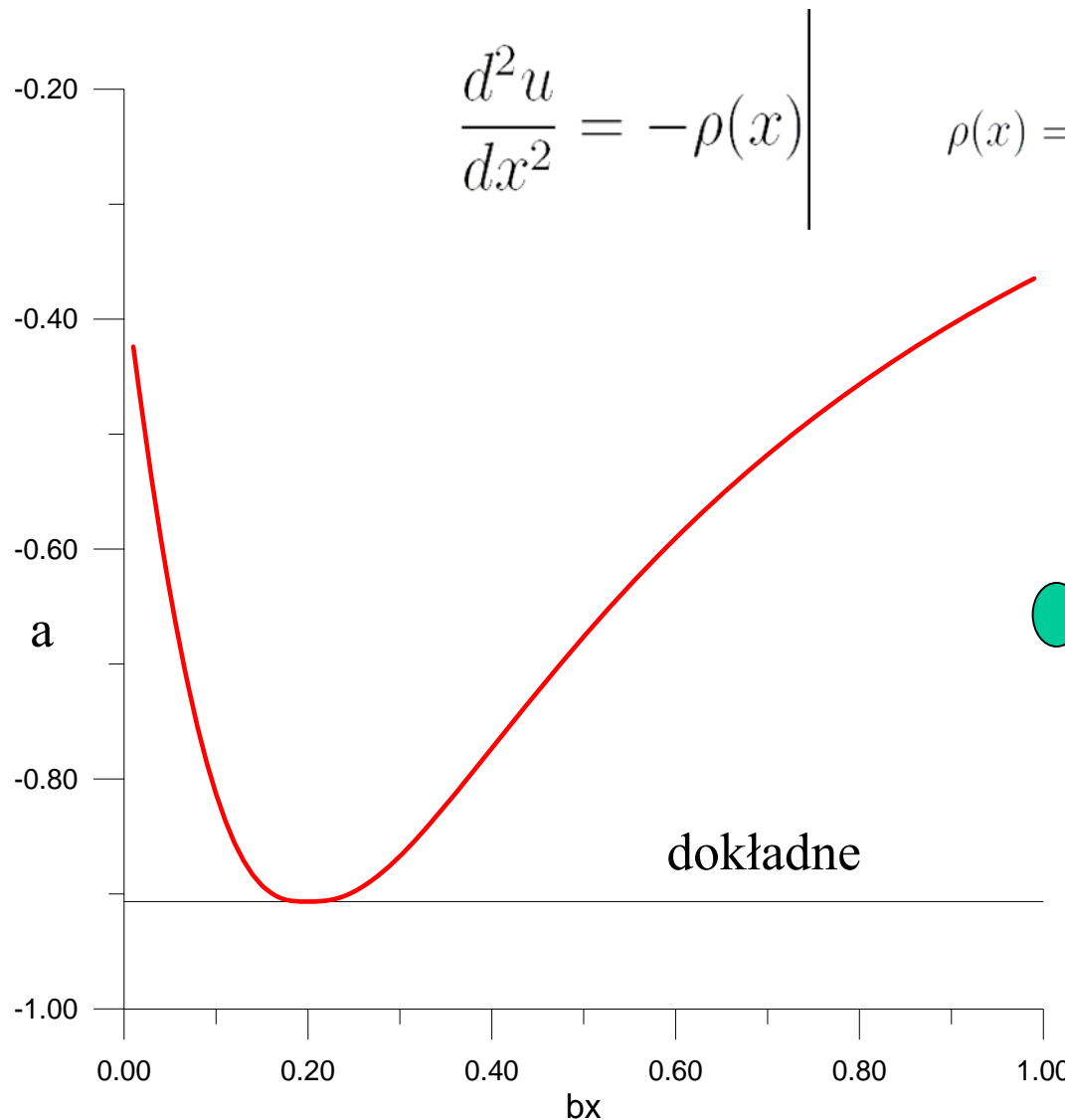
4 elementy:



2 centralne elementy o długości  $b_x$   
krzyżyki: węzły bąbelkowe

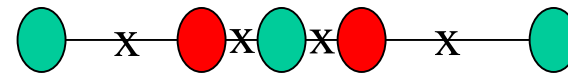
MES dla  $b_x=0.5$  (równoodległe węzły) widzimy: dokładne  
dla węzłów granicznych

# Laboratorium:



$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

4 elementy:

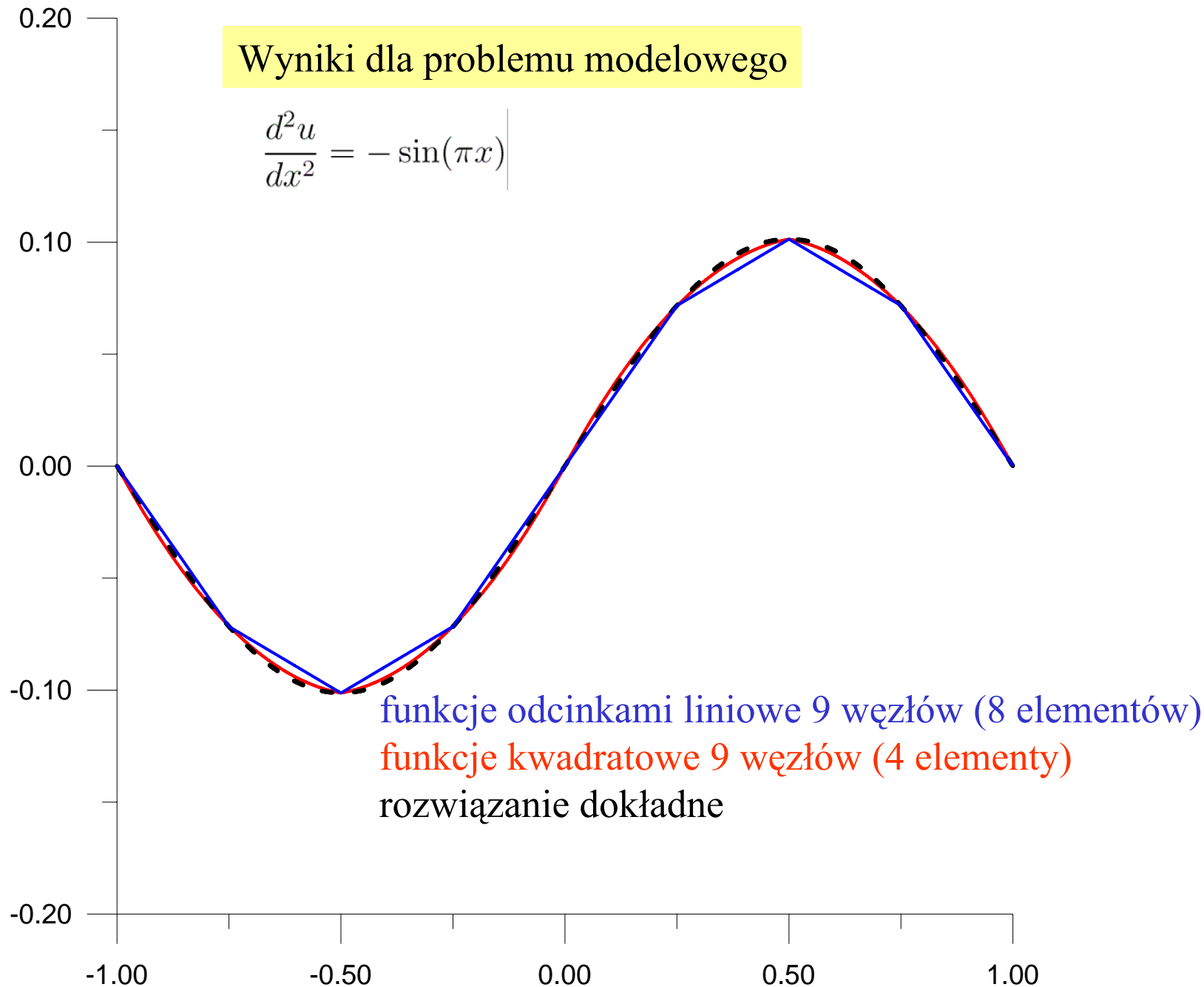


2 centralne elementy o długości  $bx$   
krzyżyki: węzły bąbelkowe

na laboratorium zobaczymy, że potencjał dokładny odtworzony

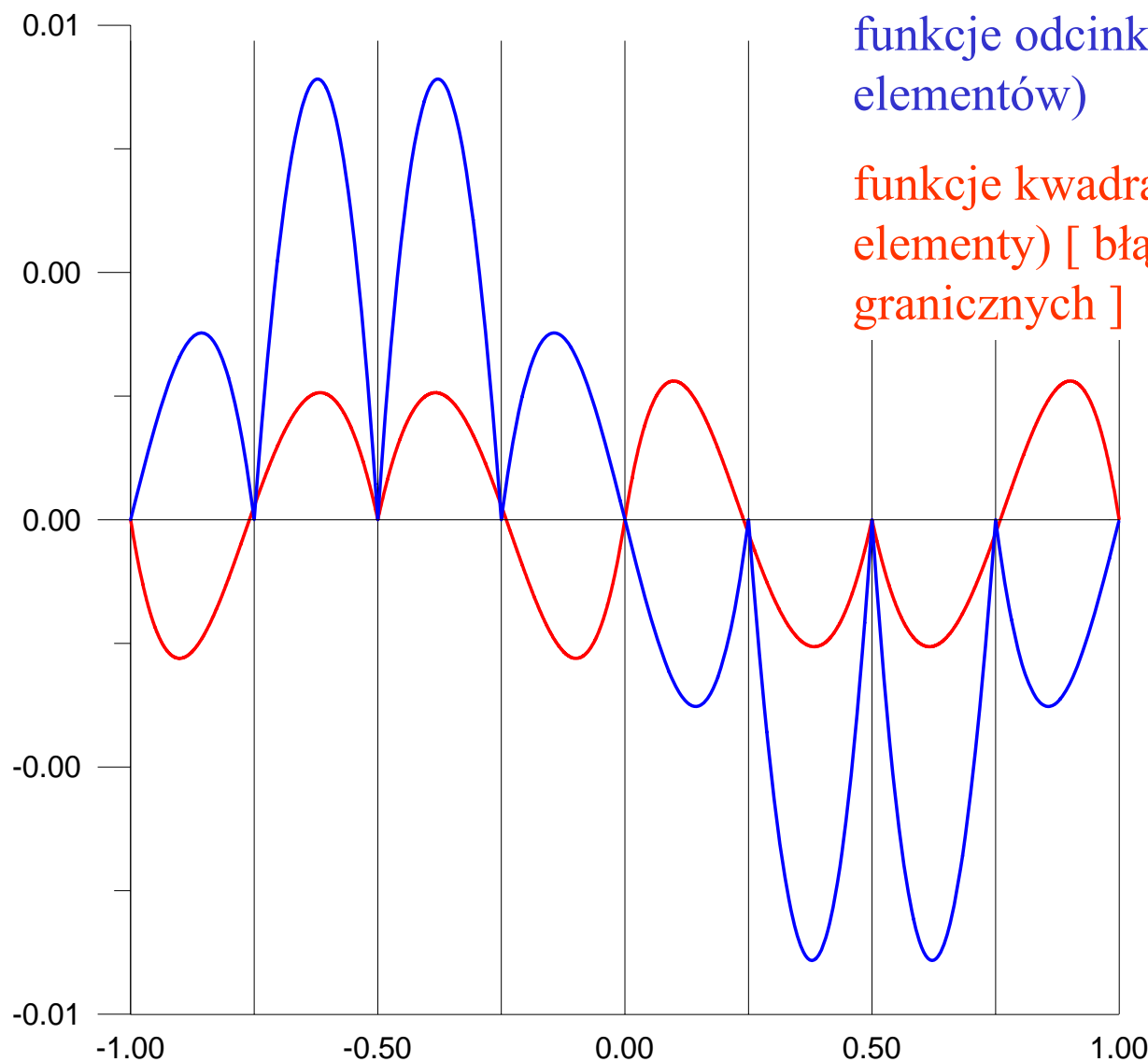
## Wyniki dla problemu modelowego

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$



$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

## Funkcje liniowe i kwadratowe



funkcje odcinkami liniowe 9 węzłów (8 elementów)

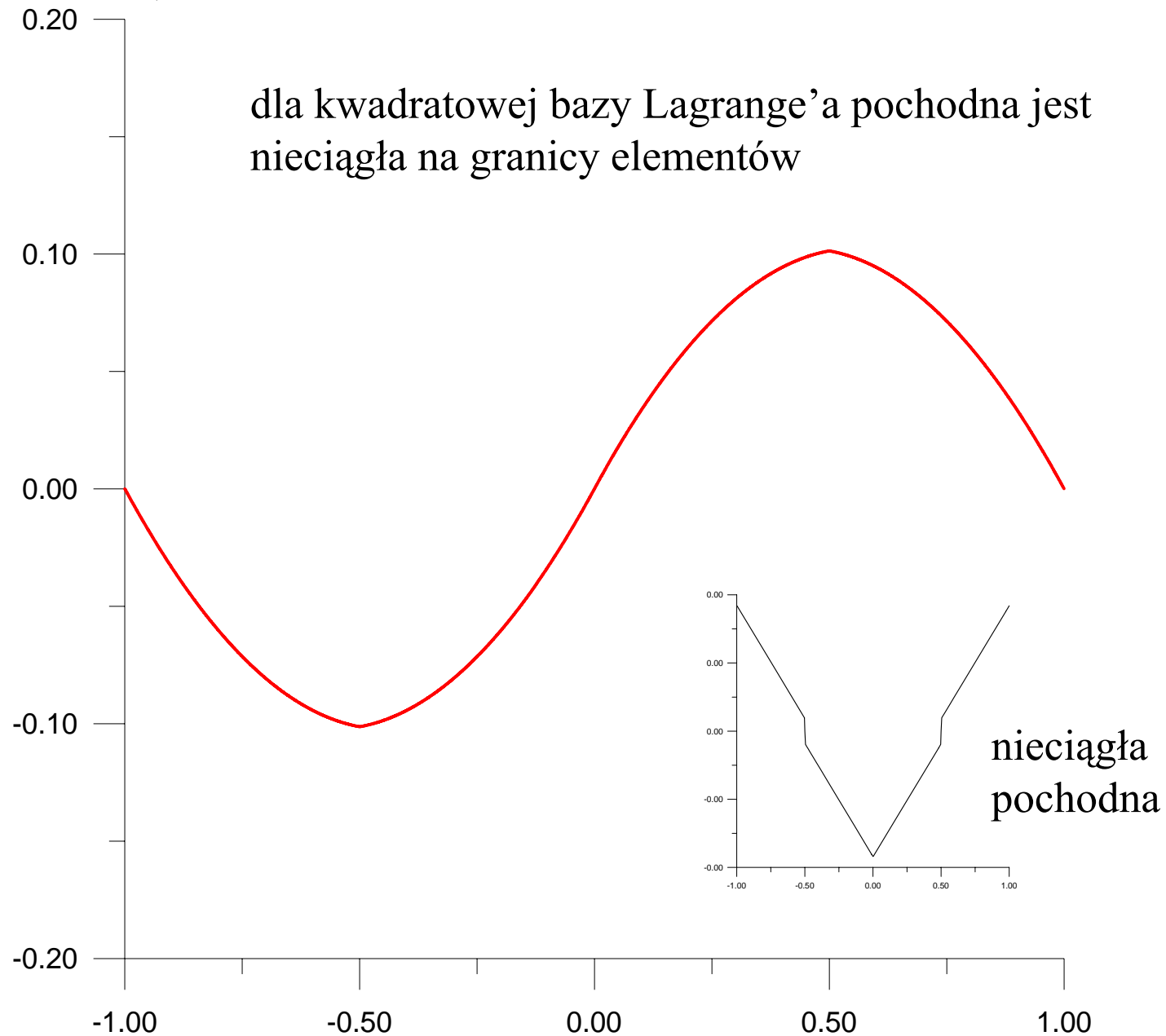
funkcje kwadratowe 9 węzłów (4 elementy) [ błąd = 0 tylko na węzłach granicznych ]

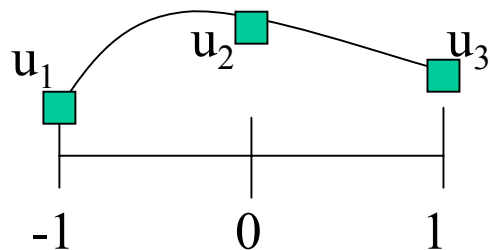
jeden rząd funkcji kształtu  
więcej:  
maksymalny błąd  
zmniejszony trzykrotnie

rozmiar problemu liniowego  
bez zmian, ale  $S$   
ma więcej niezerowych  
elementów

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

dla kwadratowej bazy Lagrange'a pochodna jest  
nieciągła na granicy elementów





$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi)$$

Co zrobiliśmy : poprowadziliśmy przez każdy element wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

Zabieg zakończył się sukcesem. Lepsza dokładność prawie tej samej złożoności obliczeniowej w porównaniu z liniowymi funkcjami kształtu. Rozmiar URL bez zmian, ale macierz układu – więcej niezerowych elementów.

Chcemy podnieść rząd wielomianu interpolacyjnego. Czy równomiernie rozłożenie większej ilości węzłów na elemencie jest dobrym pomysłem ? **NIE**



## Błąd interpolacji Lagrange'a (przypomnienie):

$x_0, x_1, \dots, x_n$  –  $n+1$  różnych węzłów

$f(x)$  – gładka funkcja interpolowana (klasy co najmniej  $n+1$ )

$x$  w przedziale interpolacji

$$\Pi_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x) \qquad l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

odchylenie funkcji interpolowanej od wielomianu Lagrange'a

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

$\xi$  należy do (najmniejszego) przedziału, w którym mieszczą się punkty  $x_i$

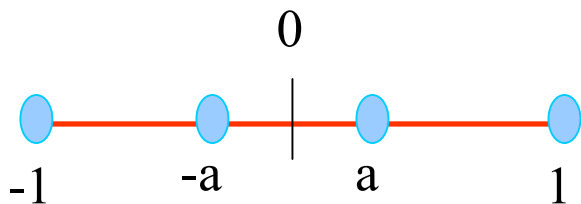
---

norma nieskończoność:  $\|g(x)\|_{\infty} = \max |g(x)|$  w przedziale  $(a,b)$

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

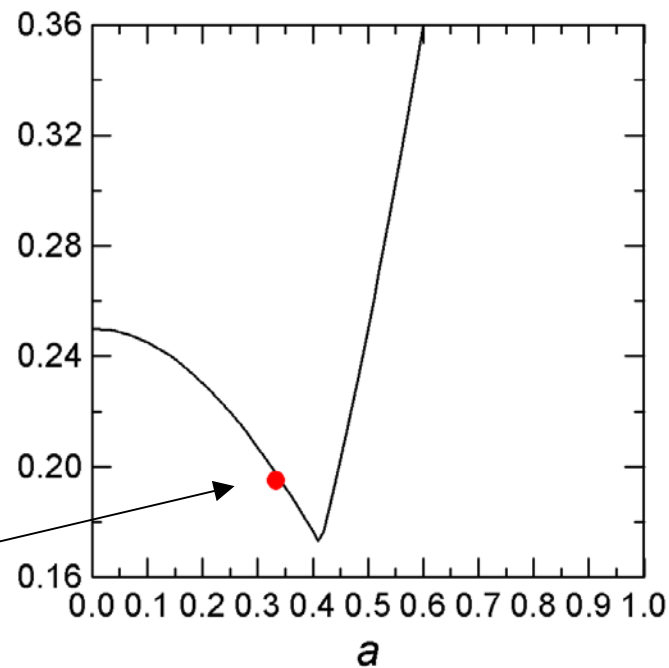
$$\|E_n(x)\|_{\infty} = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \times \left\| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\|_{\infty}$$

4 punkty



norma nieskończoności  
wielomianu węzłowego

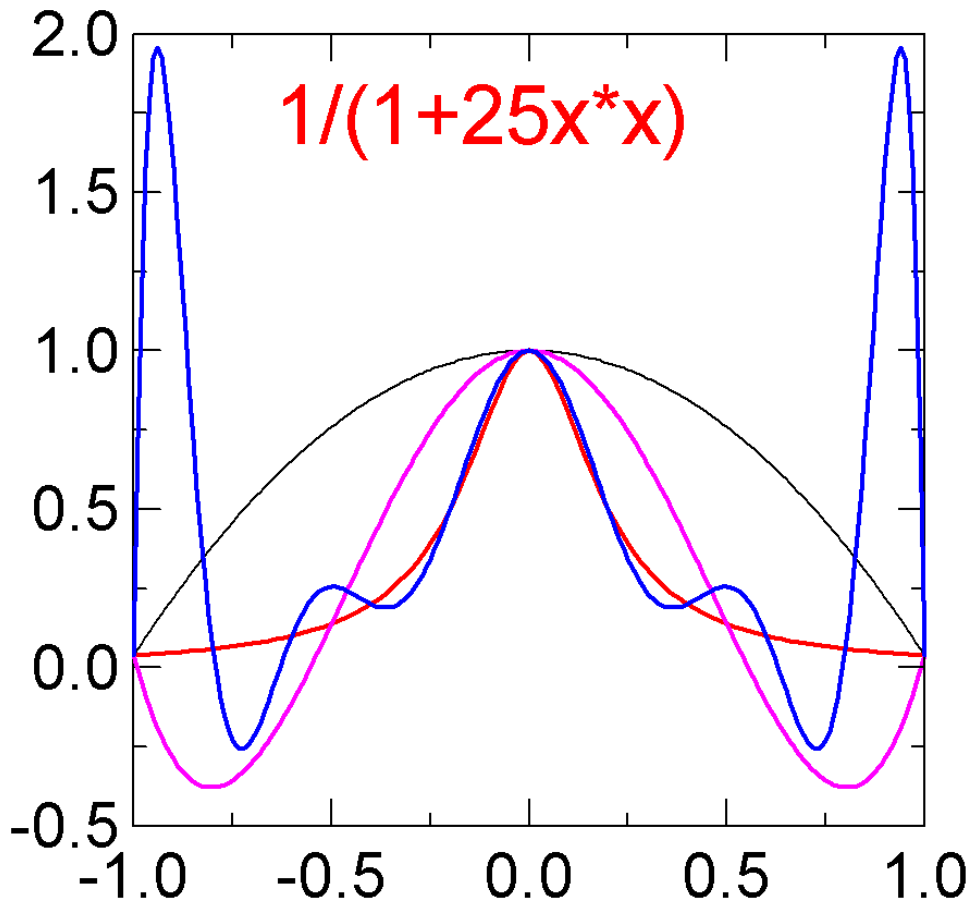
punkty rozłożone równomiernie



równomierne rozłożenie nie jest optymalne  
dla celów aproksymacyjnych

## Efekt Rungego

nieoptymalność interpolacji na równoodległych węzłach  
robi się drastyczna dla wysokiego rzędu wielomianu interpolacyjnego



3 punkty

5 punktów

11 punktów

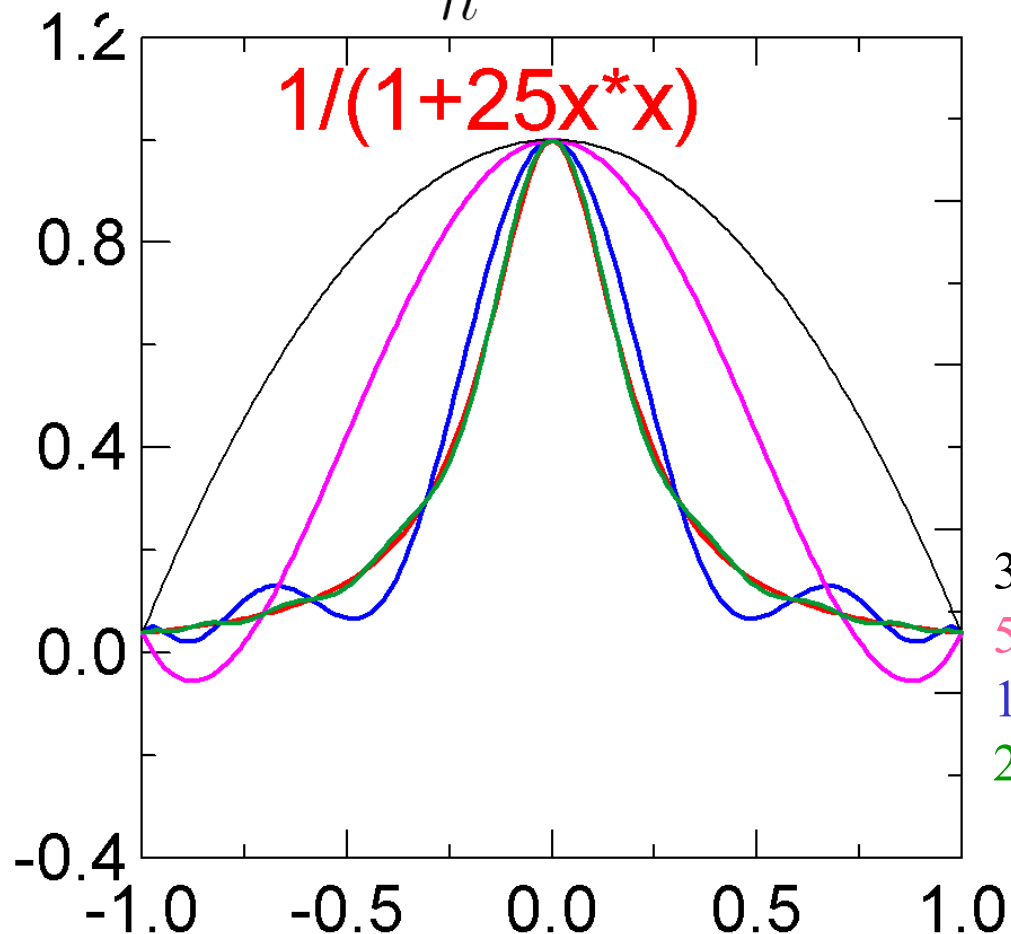
im wyższy stopień wielomianu  
interpolacyjnego  
tym gorsze przybliżenie  
[większa norma nieskończoność  
błędu]

- szczególnie przy  
brzegach przedziału

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

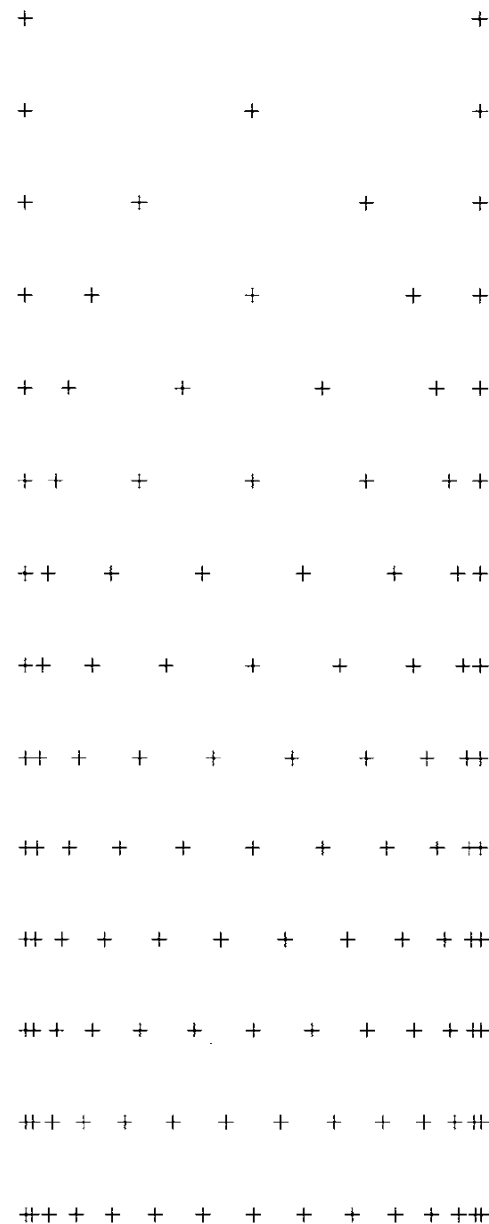
## Węzły Czebyszewa: bliskie optymalnym

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), j = 0, 1, \dots, n$$



[w.czebyszewa: węzły wielomianów ortogonalnych  
na przedziale  $(-1,1)$  z wagą  $1/\sqrt{1-x^2}$ ]

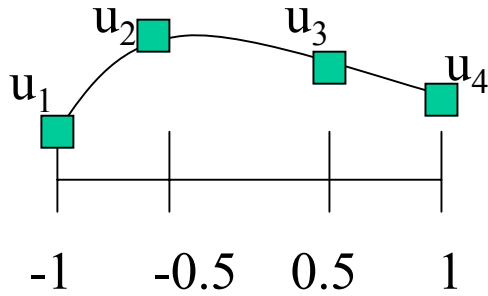
[! waga gęsto punkty przy brzegu, błąd nie urośnie ]



więcej węzłów przy brzegach

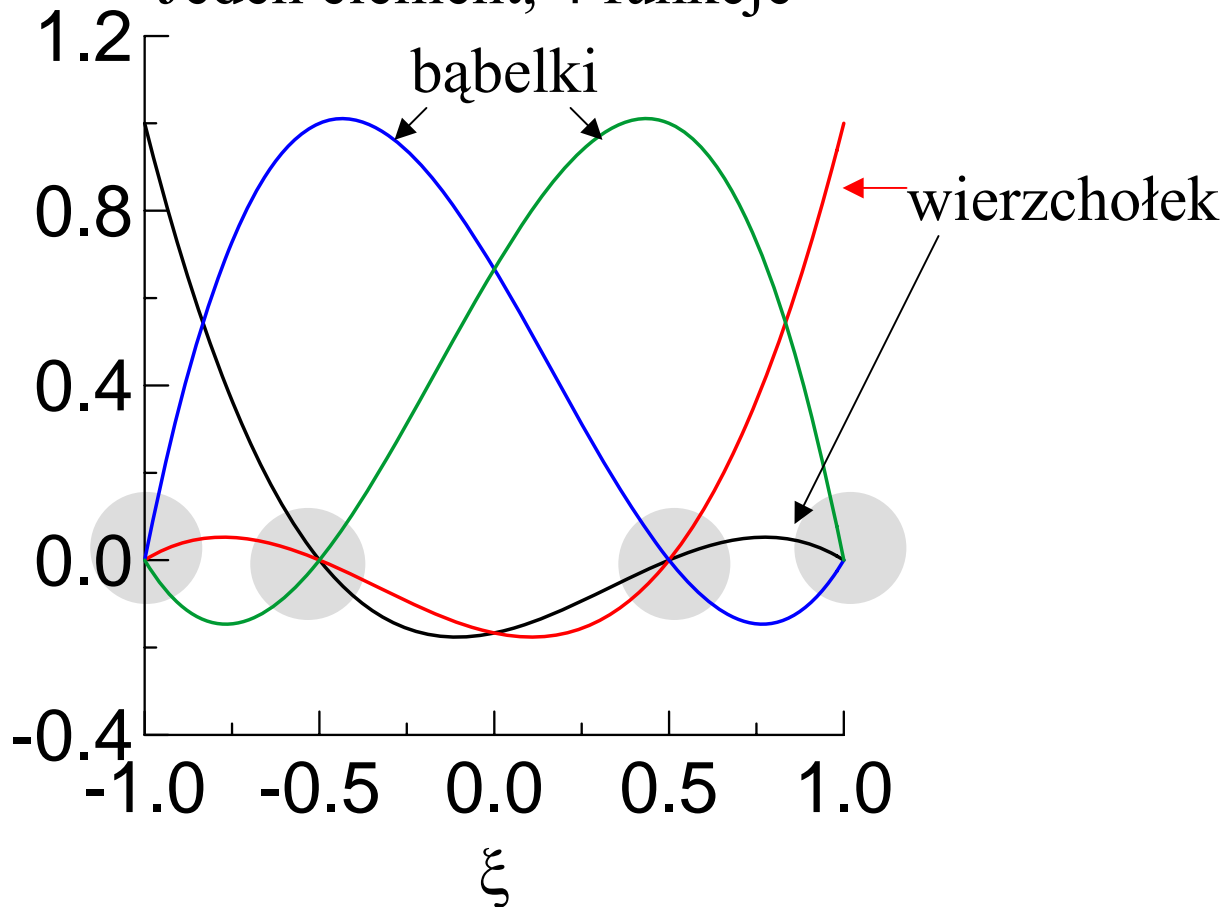
# Kubiczne funkcje kształtu Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$\cos(\pi j/3), j=0,1,2,3, : -1, -0.5, 0.5, 1$$



$$u(\xi) = \underline{u_1 f_1(\xi)} + \underline{u_2 f_2(\xi)} + \underline{u_3 f_3(\xi)} + \underline{u_4 f_4(\xi)}$$

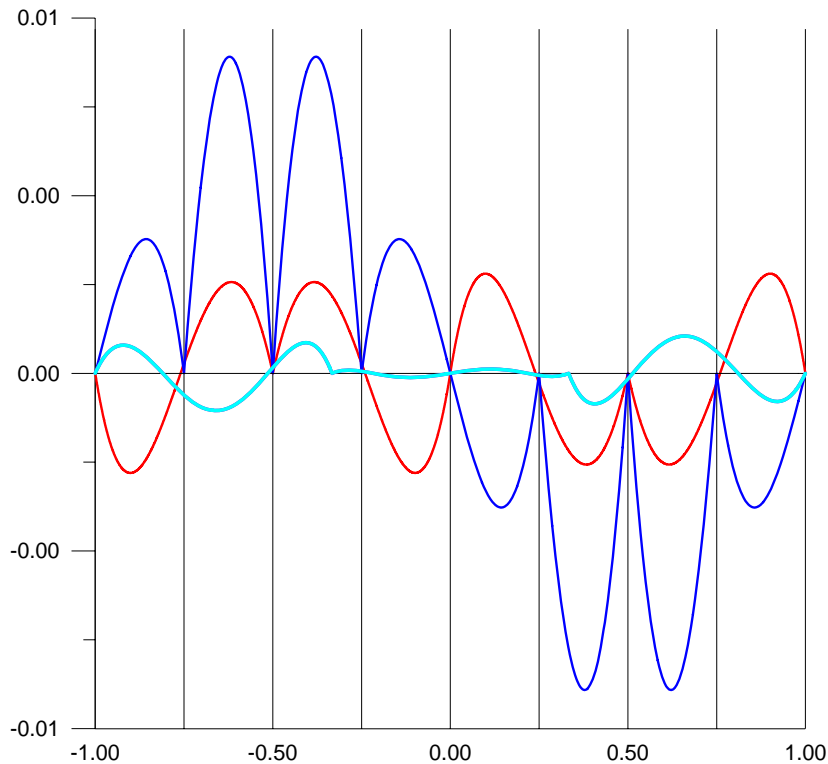
Jeden element, 4 funkcje



$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

## Wyniki dla problemu modelowego

błąd:



funkcje odcinkami liniowe 9 węzłów (8 elementów)

funkcje kwadratowe 9 węzłów (4 elementy)

funkcje kubiczne 10 węzłów (3 elementy)

zwiększenie stopnia wielomianów kształtu  
o jeden: max. odchylenie  
wyniku od dokładnego zmniejsza się 3 krotnie

MES używa jako funkcji bazowych określonych na elemencie wielomianów potrafimy je numerycznie różniczkować i całkować dokładnie

różniczkowanie:

		C=1/2	C=-1/6	
$u(x)$	$u'(x)$	$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$\frac{(8u(x + \Delta x) - 8u(x - \Delta x) + u(x - 2\Delta x) - u(x + 2\Delta x))/(12\Delta x) + O(\Delta x^4)}$
$x$	1	1	1	1
$x^2$	2x	$2x + \Delta x$	2x	2x
$x^3$	$3x^2$	$3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$	$3x^2 + \Delta x^2$	$3x^2$
$x^4$	$4x^3$	$4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3$	$4x^3 + 4x\Delta x^2$	$4x^3$
$x^5$	$5x^4$	$5x^4 + 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4$	$5x^4 + 10x^2\Delta x^2 + \Delta x^4$	$5x^4 - 4\Delta x^4$

a całkowanie ... Gaussa

## kwadratury Gaussa-Legendra do całkowania elementów macierzowych

Gauss= najbardziej efektywna metoda dla MES  
funkcje kształtu są wielomianami(!), a Gauss całkuje je dokładnie

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

wazona suma funkcji podcałkowej  
w wybranych punktach  $x_i$

Chcemy wybrać tak wagi i punkty aby kwadratura była dokładna dla wielomianu jak najwyższego stopnia (funkcje kształtu będą wielomianami)

Na pewno uda nam się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia  $n-1$



$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E \quad \Bigg|$$

Wybieramy wagi i punkty Gaussa, tak aby dokładnie scałkować wielomian stopnia  $2n-1$

[ $2n$  współczynników,  $2n$  wag i punktów]

Przykład:  $n=2$  – dokładnie scałkujemy wielomian stopnia 3

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 \times f(x_1) + w_2 \times f(x_2)$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a \int_{-1}^1 dx + b \int_{-1}^1 x dx + c \int_{-1}^1 x^2 dx + d \int_{-1}^1 x^3 dx$$

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a \int_{-1}^1 dx + b \int_{-1}^1 xdx + c \int_{-1}^1 x^2dx + d \int_{-1}^1 x^3dx$$

$a, b, c, d$  – dowolne. Każda z powyższych całek musi zostać policzona dokładnie.  
wstawiamy po kolei 1 za jeden z  $a, b, c, d$ =reszta 0.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 dx &= 2 = w_1 \times 1 + w_2 \times 1 \\ \int_{-1}^1 xdx &= 0 = w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 \\ \int_{-1}^1 x^2dx &= \frac{2}{3} = w_1 \times x_1^2 + w_2 \times x_2^2 \\ \int_{-1}^1 x^3dx &= 0 = w_1 \times x_1^3 + w_2 \times x_2^3 \end{aligned} \right|$$

$$\int_0^1 f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

→

[kwadratura ma działać również dla  $f(-x)$ ]  
 $x_1$  oraz  $x_2$  będą rozłożone  
 symetrycznie względem 0 ( $x_1 = -x_2$ )  
 wtedy z (2)  $w_1 = w_2 = 1$  (z 1)  
 (4) - zawsze spełnione

$$2/3 = x_1^2 + x_2^2 \text{ z (3)}$$

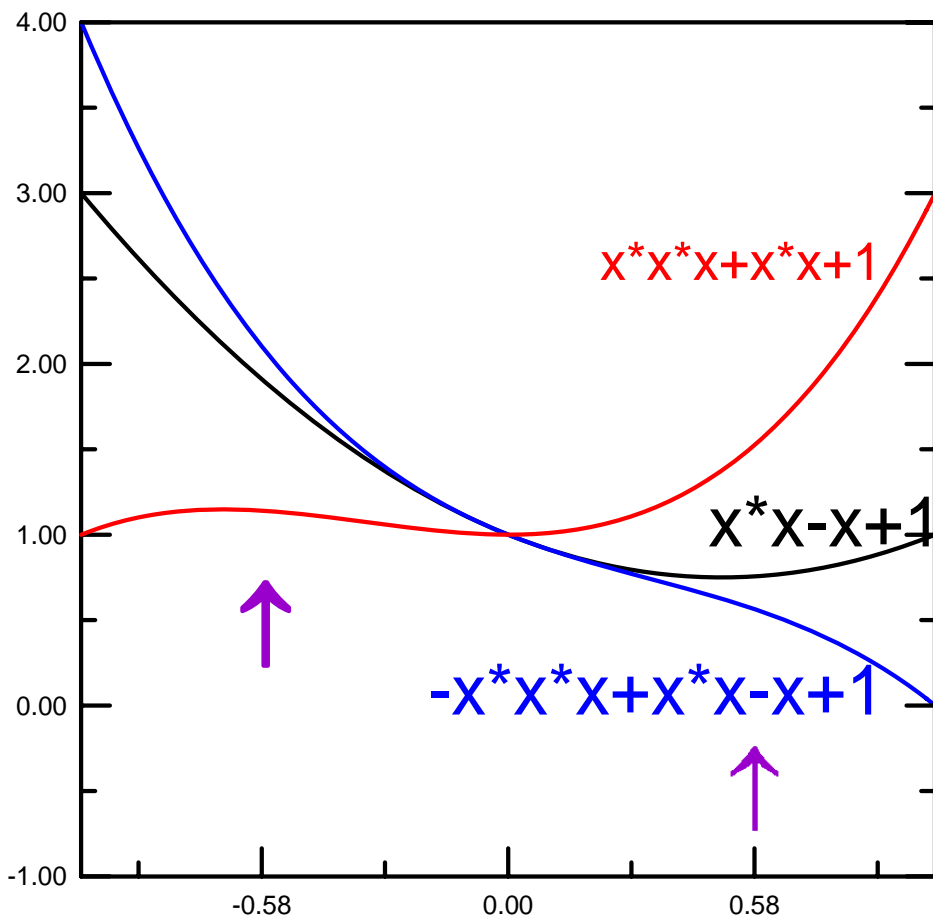
$$x_2 = \pm(1/3)^{1/2}$$

$$x_1 = -x_2$$

kwadratura Gaussa dokładna

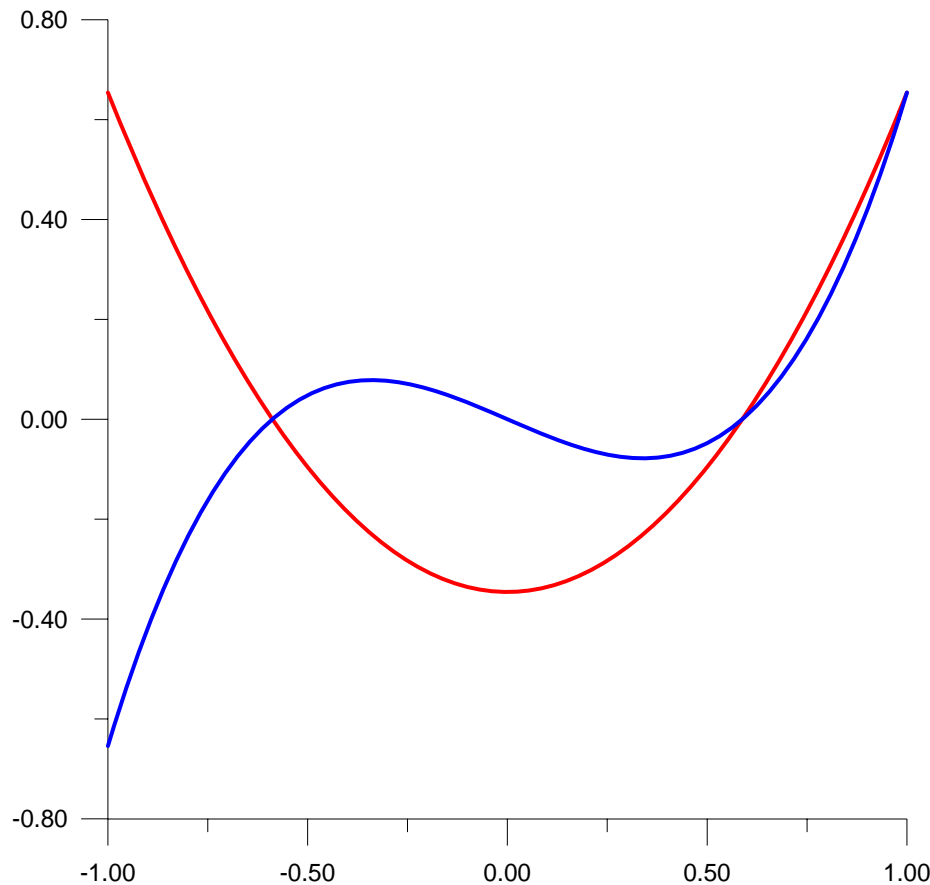
dla wielomianów stopnia 3:

$$w_1=w_2=1, \quad x_1=(1/3)^{1/2} \quad x_2=-(1/3)^{1/2}$$



wystarczy  
dodać wartości  
funkcji w dwóch  
punktach aby uzyskać  
dokładną całkę  
dla wielu różnych wielomianów

w konsekwencji: jeśli dwa wielomiany stopnia  $<4$   
przyjmują te same wartości w punktach Gaussa  
to ich całki po przedziale  $-1,1$  są również identyczne: np

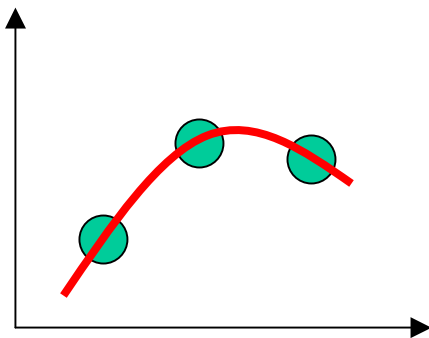


$$x_g = (1/3)^{1/2}$$

$$x(x-x_g)(x+x_g)$$

$$(x-x_g)(x+x_g)$$

Próbkując funkcję w  $n$  dowolnych punktach: na pewno uda się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia  $n-1$



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Na przedziale  $-1,1$  wybieramy (dowolnie)  $n$  – punktów i prowadzimy przez nie wielomian interpolacyjny Lagrange’a funkcji  $f(x)$

$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Jeśli  $f(x)$  – wielomian stopnia nie większego niż  $n-1$

**$f(x)=y(x)$**  (interpolując wielomian dostaniemy ten sam wielomian)

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

na wyborze punktów  $x_i$  można  
zyskać dokładność dla  $n$  stopni  
więcej

Dalej o wyborze punktów Gaussa: Tw. Jakobiego:

$$\text{kwadratura} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

oparta na wielomianie interpolacyjnym Lagrange'a

$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

jest dokładna dla wielomianów stopnia  $2n-1$ , jeśli punkty  $x_i$  wybrane tak, że wielomian stopnia  $n$

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad \left| \begin{array}{l} \text{jest ortogonalny do wszystkich wielomianów} \\ \text{stopnia } (n-1) \end{array} \right.$$

zobaczmy, że tak jest:

$$\int_{-1}^1 z(x) p_{n-1}(x) dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{-1}^1 f_{2n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f_{2n-1}(x_i)$$

dla dowolnego wielomianu stopnia  $n$  i dowolnej liczby  $r$   
 istnieje taki wielomian o stopniu o jeden niższym i taka liczba  $R$ , że:

$$P_n(x) = (x-r) P_{n-1}(x) + R$$


---

przykład:

$$1+x+x^2 = (x-2)(ax+b)+c = c-2b+(b-2a)x+ax^2 - \text{wyliczymy sobie } a, b, \text{ oraz } c$$


---

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad \Bigg|$$

$$f_{2n-1}(x) = (x-x_1) f_{2n-2}(x) + r_0$$

$$f_{2n-1}(x) = (x-x_1) [(x-x_2) f_{2n-3}(x) + r_1] + r_0 = (x-x_1)(x-x_2) f_{2n-3}(x) + \underline{r_0 + r_1(x-x_1)}$$


---


$$q_1(x)$$

$$\underline{f_{2n-1}(x) = z_n(x) f_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)}$$


---

$$f_{2n-1}(x) = z_n(x)f_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^1 f_{2n-1}(x) dx = \int_{-1}^1 q_{n-1}(x) dx + \int_{-1}^1 \cancel{z_n(x)f_{n-1}(x) dx}$$


całka oparta o przepis interpolacyjny na  $n$  punktach  
będzie dokładna dla każdego wielomianu stopnia  $n-1$

Problem: jak wybrać wielomian stopnia  $n$   $z(x)$   
tak aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia  $n-1$



Problem: jak wybrać  $z(x)$  aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia  $n-1$

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad \Bigg|$$

wybrać zera znaczy wybrać wielomian (co do stałej multiplikatywnej)

każdy wielomian można zapisać w postaci sfaktoryzowanej

$$P_n(x) = a \prod_{i=1}^n (x - x_i) = az_n(x) \quad \Bigg|$$

---

wielomian Legendre'a stopnia  $n$

-ortogonalny na przedziale  $[-1,1]$  do wszystkich wielomianów stopnia  $n-1$ .

-zera tego wielomianu wyznaczają optymalne punkty Gaussa

# Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Przedział  $[-1,1]$ .

Mamy zbiór niezależnych liniowo funkcji  $h_0=1$ ,  $h_1=x$ ,  $h_2=x^2$ ,  $h_3=x^3$ , ...

które nie są ortogonalne [iloczyn skalarny określony z funkcją wagową  $w(x)$ ].

Chcemy skonstruować bazę wielomianów ortogonalnych.

funkcje bazowe dla tego przedziału, z wagą  $w(x)=1$  są to wielomiany Legendre'a.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = a + x$$

Jakie  $a$  aby  $(u_0, u_1) = 0$ ?: odp.:  $a=0$

$$u_1 = x$$

$$u_2 = x^2 + bx + c$$

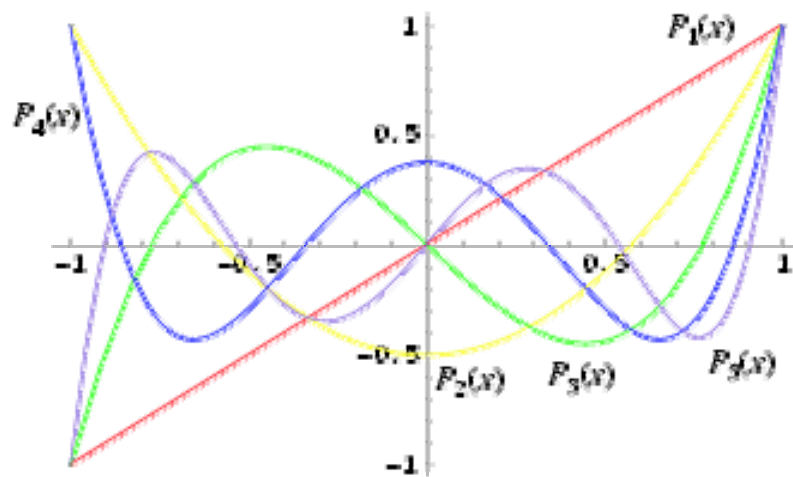
$$(u_2, u_0) = 2/3 + 2c = 0$$

$$(u_2, u_1) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$u_2 = (x^2 - 1/3)$$

W literaturze wielomiany Legendre'a normalizowane tak aby  $P_k(1)=1$  :  $1, x, 3/2 (x^2 - 1/3)$

itd.



## kwadratury Gaussa-Legendra

W bazie  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  można opisać wszystkie wielomiany stopnia  $n-1$ ,  
 $P_n$  ortogonalny do wszystkich wektorów bazy,  
więc i do wszystkich wielomianów stopnia  $n-1$

Punkty Gaussa zapewniające maksymalną dokładność  
(do wielomianu stopnia  $2n-1$ ):  
zera  $n$ -tego wielomianu Legendra

$$P_2 = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \text{Dla } 2n-1=3 \quad [\text{punkty Gaussa tam gdzie wcześniej wyliczyliśmy}]$$

$$l_1 = (x + 1/\sqrt{3}) / (2/\sqrt{3}). \quad \text{całka z niego od } -1 \text{ do } 1 = 1$$

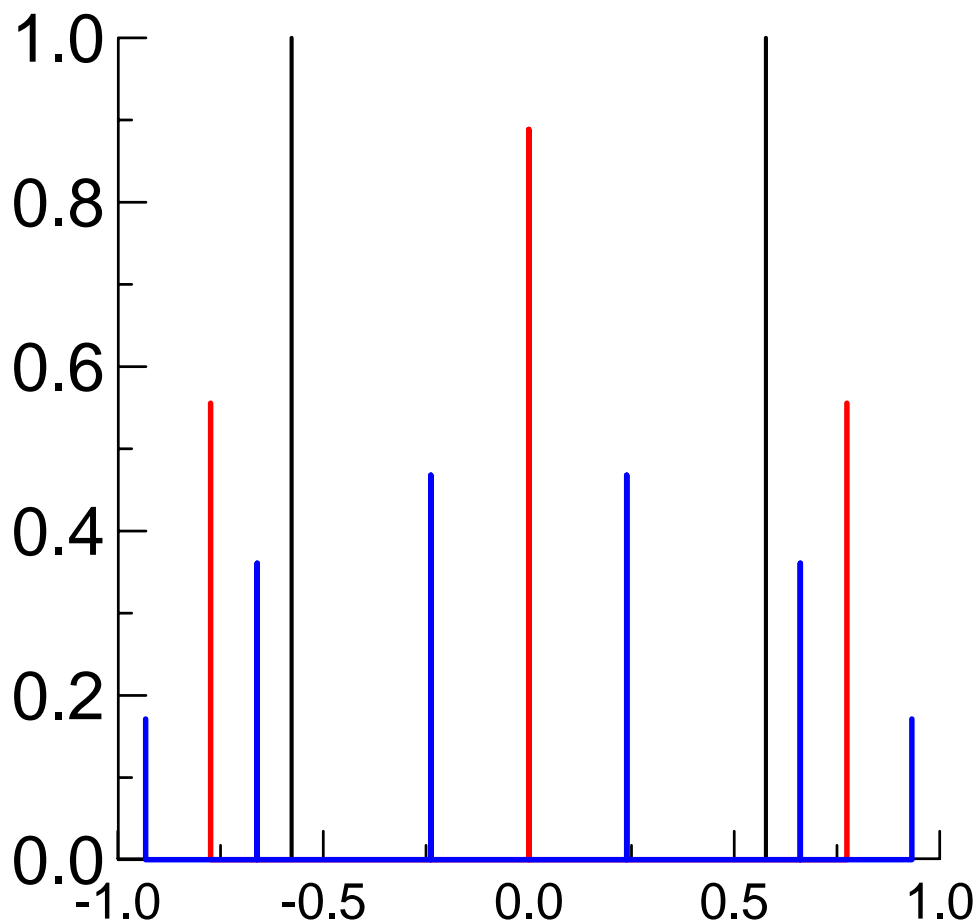
$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \left| \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx \right.$$

## Wagi i punkty Gaussa

Dokładne do wielomianów stopnia 3

stopnia 5

stopnia 11



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$