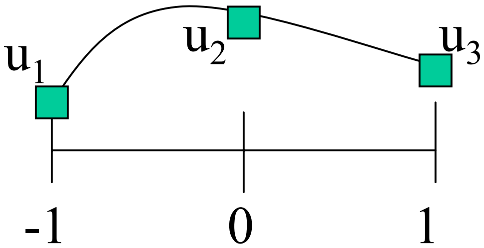


$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi)$$

Co zrobiliśmy : poprowadziliśmy przez każdy element wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

Zabieg zakończył się sukcesem. Lepsza dokładność prawie tej samej złożoności obliczeniowej w porównaniu z liniowymi funkcjami kształtu. Rozmiar URL bez zmian, ale macierz układu – więcej niezerowych elementów.

Chcemy podnieść rząd wielomianu interpolacyjnego. Czy równomiernie rozłożenie większej ilości węzłów na elemencie jest dobrym pomysłem ? NIE

Błąd interpolacji Lagrange'a (przypomnienie):

$x_0, x_1, \ldots, x_n - n+1$ różnych węzłów
$f(x)$ –gładka funkcja interpolowana (klasy co najmniej n+1)
x w przedziale interpolacji

$$\Pi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x) \qquad l_i(x) = \prod_{j=0; j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

odchylenie funkcji interpolowanej od wielomianu Lagrange'a

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

ξ należy do (najmniejszego) przedziału, w którym mieszczą się punkty x_i

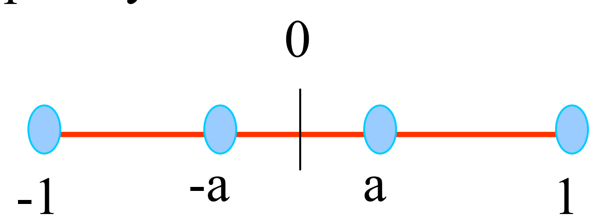
---

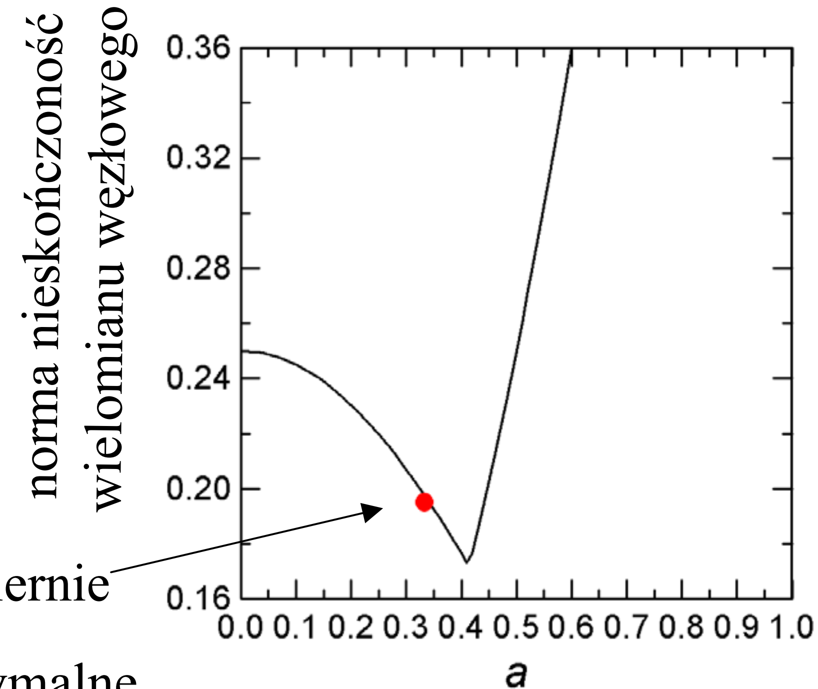
norma nieskończoność: $\|g(x)\|_\infty =$ max $|g(x)|$ w przedziale (a,b)

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

$$||E_n(x)||_\infty = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \times \left|\left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right|\right|_\infty$$

4 punkty



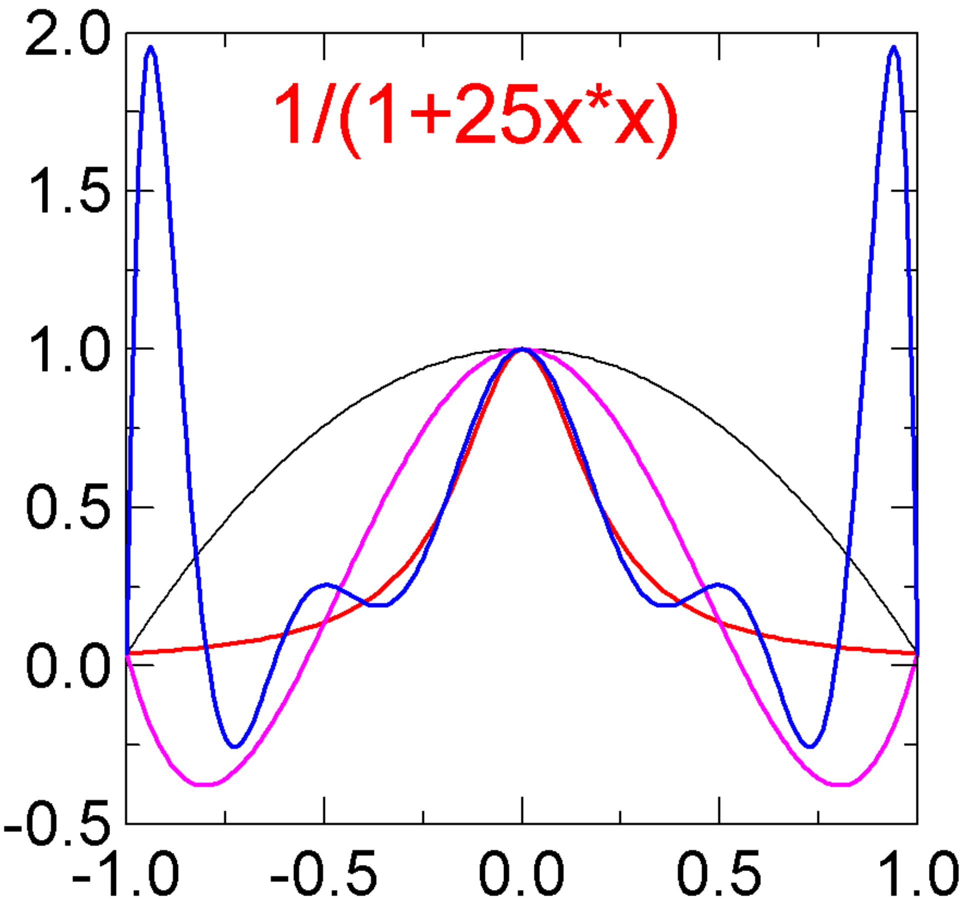


punkty rozłożone równomiernie

równomierne rozłożenie nie jest optymalne
dla celów aproksymacyjnych

Efekt Rungego

nieoptymalność interpolacji na równoodległych węzłach
robi się drastyczna dla wysokiego rzędu wielomianu interpolacyjnego



3 punkty
5 punktów
11 punktów

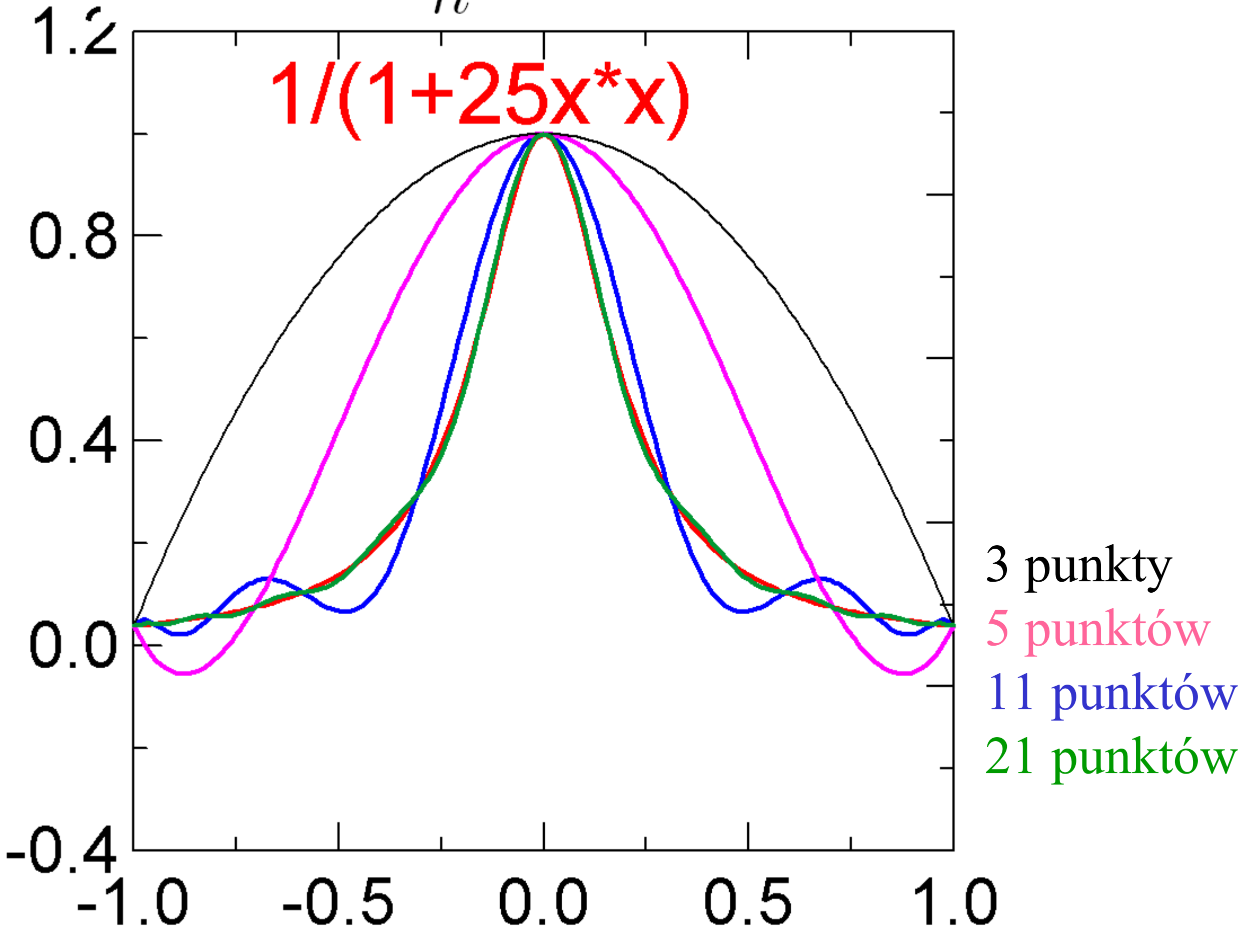
im wyższy stopień wielomianu interpolacyjnego
tym gorsze przybliżenie
[większa norma nieskończoność błędu]

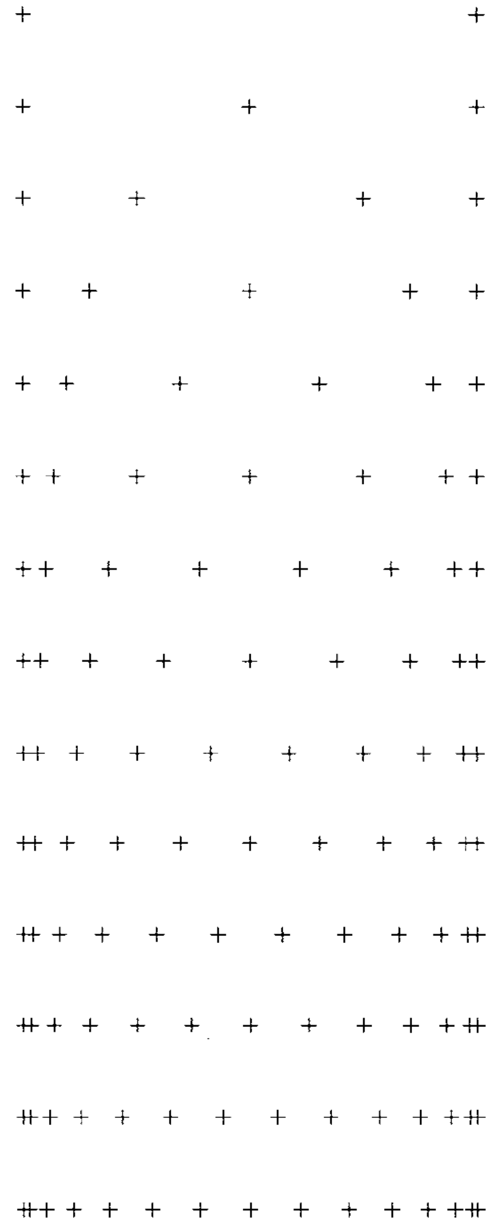
- szczególniej przy
brzegach przedziału

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Węzły Czebyszewa: bliskie optymalnym

$$x_j = \cos(\frac{\pi j}{n}), j = 0, 1, \ldots, n$$





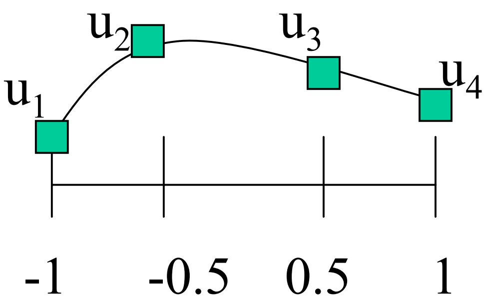
[w.czebyszewa: węzły wielomianów ortogonalnych na przedziale (–1,1) z wagą 1/sqrt(1-x**2)

[! waga gęsto punkty przy brzegu, błąd nie urośnie]

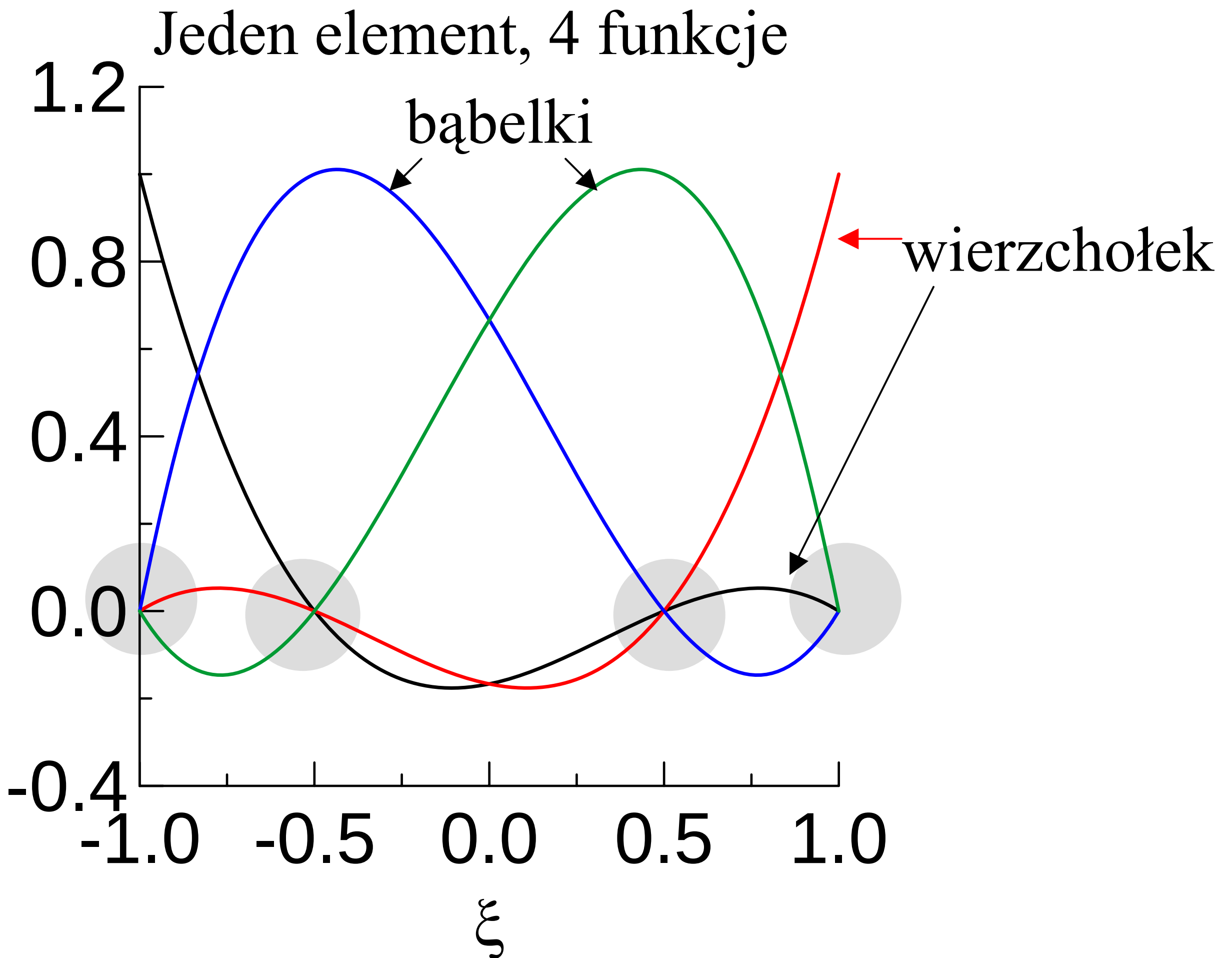
więcej węzłów przy brzegach

Kubiczne funkcje kształtu Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

cos(πj/3), j=0,1,2,3,: -1,-0.5,0.5,1



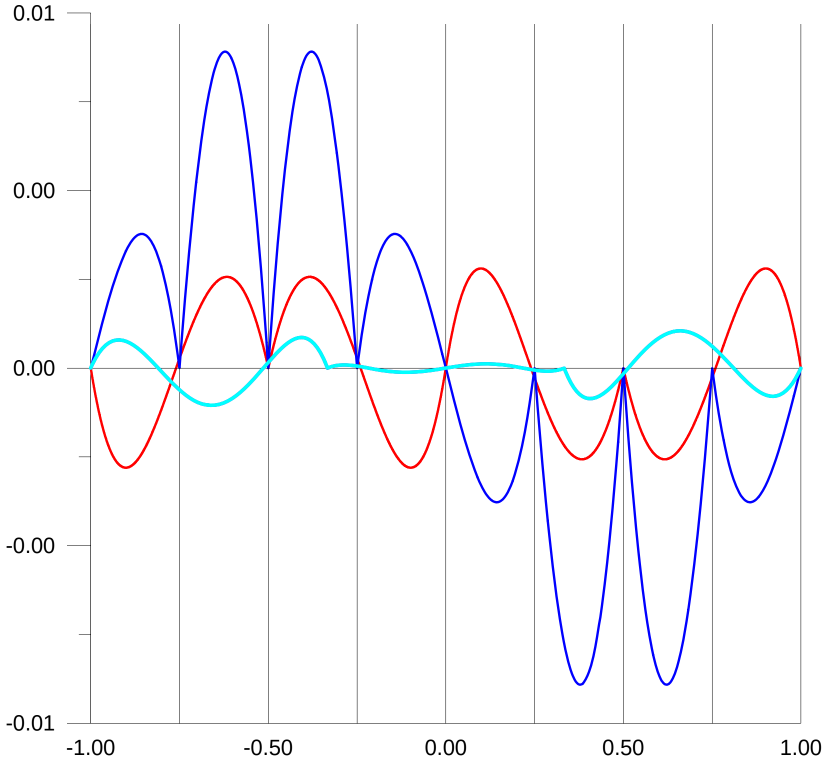
$$u(\xi) = \underline{u_1 f_1(\xi)} + \underline{u_2 f_2(\xi)} + \underline{u_3 f_3(\xi)} + \underline{u_4 f_4(\xi)}$$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

Wyniki dla problemu modelowego

błąd:



funkcje odcinkami liniowe 9 węzłów (8 elementów)

funkcje kwadratowe 9 węzłów (4 elementy)

funkcje kubiczne 10 węzłów (3 elementy)

zwiększenie stopnia wielomianów kształtu
o jeden: max. odchylenie
wyniku od dokładnego zmniejsza się 3 krotnie

MES używa jako funkcji bazowych określonych na elemencie wielomianów potrafimy je numerycznie różniczkować i całkować dokładnie

różniczkowanie:

$u(x)$	$u'(x)$	$\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+O(\Delta x)$ (C=1/2)	$\frac{u(x+\Delta x)-u(x-\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta x^2)$ (C=-1/6)	$(8u(x+\Delta x)-8u(x-\Delta x)+u(x-2\Delta x)-u(x+2\Delta x))/(12\Delta x)+O(\Delta x^4)$
		(błąd na czerwono)		
x	1	1	1	1
x^2	$2x$	$2x+\Delta x$	$2x$	2x
x^3	$3x^2$	$3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2$	$3x^2+\Delta x^2$	$3x^2$
x^4	$4x^3$	$4x^3+6x^2\Delta x+4x\Delta x^2+\Delta x^3$	$4x^3+4x\Delta x^2$	$4x^3$
x^5	$5x^4$	$5x^4+10x^3\Delta x+10x^2\Delta x^2+5x\Delta x^3+\Delta x^4$	$5x^4+10x^2\Delta x^2+\Delta x^4$	$5x^4-4\Delta x^4$

a całkowanie ... Gaussa

kwadratury Gaussa-Legendra do całkowania elementów macierzowych

Gauss= najbardziej efektywna metoda dla MES
funkcje kształtu są wielomianami(!), a Gauss całkuje je dokładnie

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E$$

wazona suma funkcji podcałkowej
w wybranych punktach x_i

Chcemy wybrać tak wagi i punkty aby kwadratura była dokładna
dla wielomianu jak najwyższego stopnia (funkcje kształtu będą wielomianami)

Na pewno uda nam się skonstruować kwadraturę dokładną dla
wielomianu stopnia *n-1*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E$$

Wybieramy wagi i punkty Gaussa, tak aby dokładnie scałkować wielomian stopnia 2*n*-1
[2*n* współczynników, 2*n* wag i punktów]

Przykład: *n*=2 – dokładnie scałkujemy wielomian stopnia 3

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 \times f(x_1) + w_2 \times f(x_2)$$

$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = a\int_{-1}^{1} dx + b\int_{-1}^{1} xdx + c\int_{-1}^{1} x^2dx + d\int_{-1}^{1} x^3dx$$

$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = a\int_{-1}^{1} dx + b\int_{-1}^{1} xdx + c\int_{-1}^{1} x^2dx + d\int_{-1}^{1} x^3dx$$

a,b,c,d – dowolne. Każda z powyższych całek musi zostać policzona dokładnie.
wstawiamy po kolei 1 za jeden z *a,b,c,d*=reszta 0.

$$\int_{-1}^{1} dx = 2 = w_1 \times 1 + w_2 \times 1$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = w_1 \times x_1^2 + w_2 \times x_2^2$$

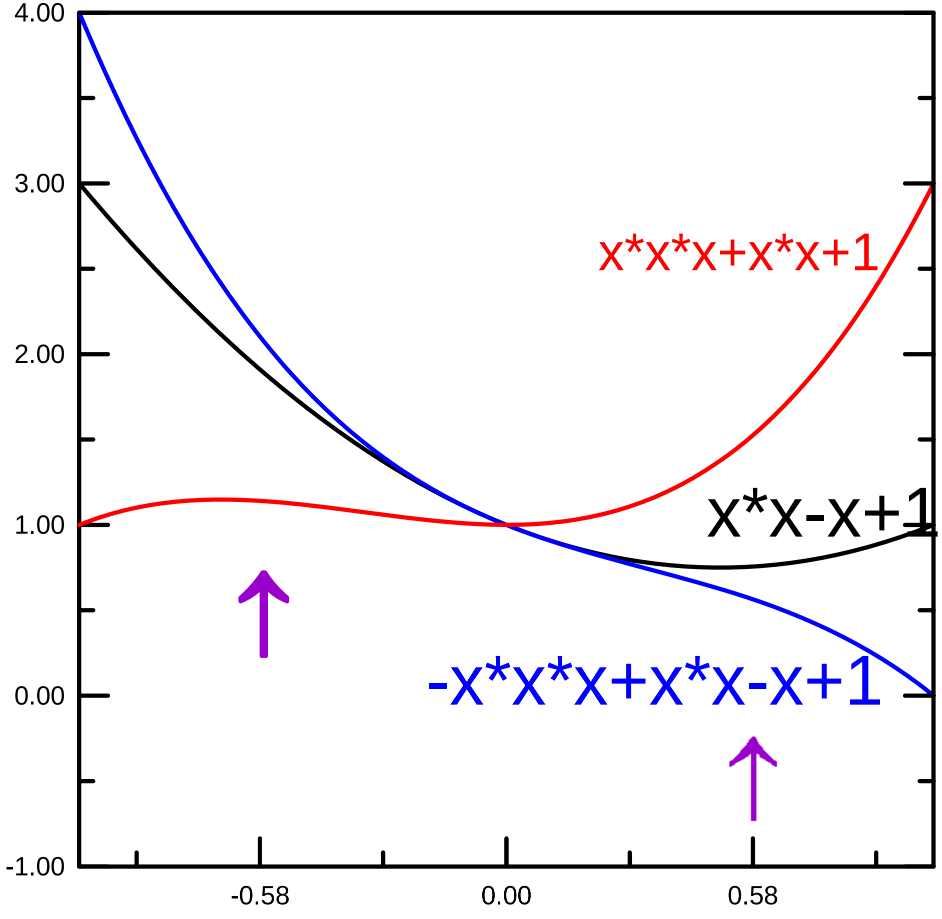
$$\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = w_1 \times x_1^3 + w_2 \times x_2^3$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

[kwadratura ma działać również dla *f(-x)*]
x_1 oraz x_2 będą rozłożone
symetrycznie względem 0 ($x_1=-x_2$)
wtedy z (2) $w_1=w_2=1$ (z 1)
(4) - zawsze spełnione

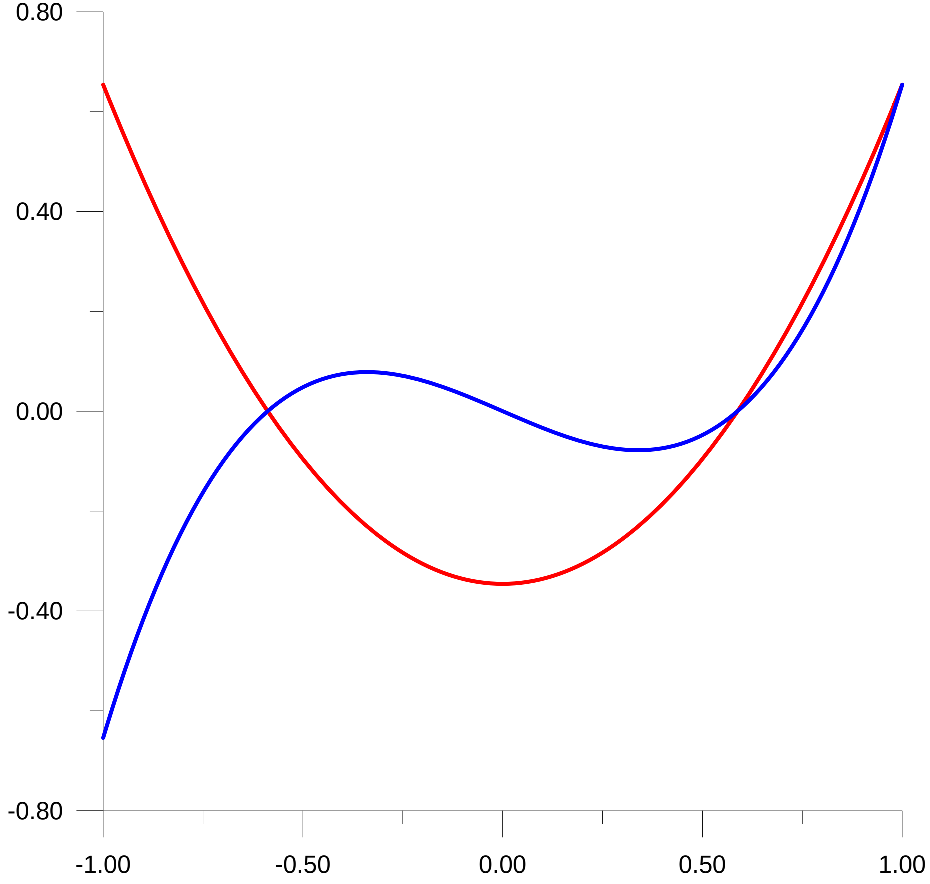
$2/3=x_2^2+x_2^2$ z (3)
$x_2=\pm(1/3)^{1/2}$
$x_1=-x_2$

kwadratura Gaussa dokładna
dla wielomianów stopnia 3:
$w_1=w_2=1$, $x_1=(1/3)^{1/2}$ $x_2=-(1/3)^{1/2}$



wystarczy
dodać wartości
funkcji w dwóch
punktach aby uzyskać
dokładną całkę
dla wielu różnych wielomianów

w konsekwencji: jeśli dwa wielomiany stopnia <4
przyjmują te same wartości w punktach Gaussa
to ich całki po przedziale –1,1 są również identyczne: np

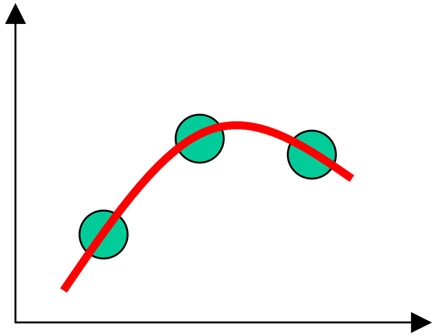


$x_g=(1/3)^{1/2}$

x(x-xg)*(x+xg)

(x-xg)*(x+xg)

Próbkując funkcję w *n* <u>dowolnych</u> punktach: na pewno uda się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia *n-1*



$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E$$

Na przedziale –1,1 wybieramy (dowolnie) *n* – punktów i prowadzimy przez nie wielomian interpolacyjny Lagrange'a funkcji f(x)

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq 1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Jeśli f(x) – wielomian stopnia nie większego niż *n-1*

f(x)=y(x) (interpolując wielomian dostaniemy ten sam wielomian)

$$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$$

na wyborze punktów x_i można zyskać dokładność dla *n* stopni więcej

Dalej o wyborze punktów Gaussa: Tw. Jakobiego:

kwadratura $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E$$

oparta na wielomianie interpolacyjnym Lagrange'a

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq 1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$$

jest dokładna dla wielomianów stopnia 2n-1, jeśli punkty x_i wybrane tak, że wielomian stopnia n

$$z(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

jest ortogonalny do *wszystkich* wielomianów stopnia *(n-1)*

---

zobaczmy, że tak jest:

$$\int_{-1}^{1} z(x) p_{n-1}(x) = 0 \longrightarrow \int_{-1}^{1} f_{2n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f_{2n-1}(x_i)$$

dla dowolnego wielomianu stopnia n i dowolnej liczby r
istnieje taki wielomian o stopniu o jeden niższym i taka liczba R, że:
$P_n(x)=(x-r)\, P_{n-1}(x)+R$

---

przykład:
$1+x+x^2=(x-2)\,(ax+b)+c=c-2b+(b-2a)x+ax^2$ – wyliczymy sobie a,b, oraz c

---

$$z(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$f_{2n-1}(x)=(x-x_1)\, f_{2n-2}(x)+r_0$
$f_{2n-1}(x)=(x-x_1)\, [(x-x_2)\, f_{2n-3}(x)+r_1]+r_0 =(x-x_1)(x-x_2)\, f_{2n-3}(x)+\underbrace{r_0+r_1(x-x_1)}_{q_1(x)}$

$f_{2n-1}(x)=z_n(x)f_{n-1}(x)+q_{n-1}(x)$

$$f_{2n-1}(x)=z_n(x)f_{n-1}(x)+q_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f_{2n-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} q_{n-1}(x)dx + \cancel{\int_{-1}^{1} z_n(x)f_{n-1}(x)dx}$$

całka oparta o przepis interpolacyjny na *n* punktach
będzie dokładna dla każdego wielomianu stopnia *n-1*

Problem: jak wybrać wielomian stopnia n *z(x)*
tak aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia *n-1*

Problem: jak wybrać *z(x)* aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia *n-1*

$$z(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

wybrać zera znaczy wybrać wielomian (co do stałej multiplikatywnej)

każdy wielomian można zapisać w postaci sfaktoryzowanej

$$P_n(x) = a \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = a z_n(x)$$

---

wielomian Legendre'a stopnia *n*

-ortogonalny na przedziale [–1,1] do wszystkich wielomianów stopnia *n-1*.

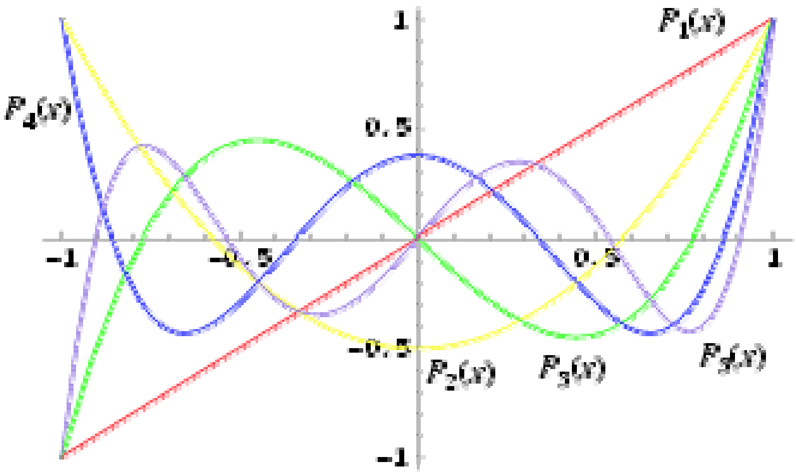
-zera tego wielomianu wyznaczą optymalne punkty Gaussa

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Przedział [-1,1].
Mamy zbiór niezaleznych liniowo funkcji $h_0=1,\ h_1=x,\ h_2=x^2,\ h_3=x^3$, ...
które nie są ortogonalne [iloczyn skalarny określony z funkcją wagową w(x)].
Chcemy skonstruować bazę wielomianów ortogonalnych.
funkcje bazowe dla tego przedziału, z wagą w(x)=1 są to wielomiany Legendre'a.

$u_0 = 1$
$u_1=a+x$

Jakie a aby $(u_0,u_1)=0$?: odp.: $a=0$



$u_1=x$
$u_2=x^2+bx+c$
$(u_2,u_0)= 2/3+2c=0$
$(u_2,u_1)=0 \rightarrow b=0$

$u_2=(x^2-1/3)$

W literaturze wielomiany Legendre'a normalizowane tak aby $P_k(1)=1$: $1, x, 3/2\ (x^2-1/3)$

itd.

kwadratury Gaussa-Legendra

W bazie $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ można opisać wszystkie wielomiany stopnia n-1,
P_n ortogonalny do wszystkich wektorów bazy,
więc i do wszystkich wielomianów stopnia n-1

Punkty Gaussa zapewniające maksymalną dokładność (do wielomianu stopnia *2n-1*):
zera *n*-tego wielomianu Legendra

$P_2 = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})$ → Dla *2n-1*=3 [punkty Gaussa tam gdzie wcześniej wyliczyliśmy]

l_1=(x+1/sqrt(3))/(2/sqrt(3)). całka z niego od od –1 do 1 = 1

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

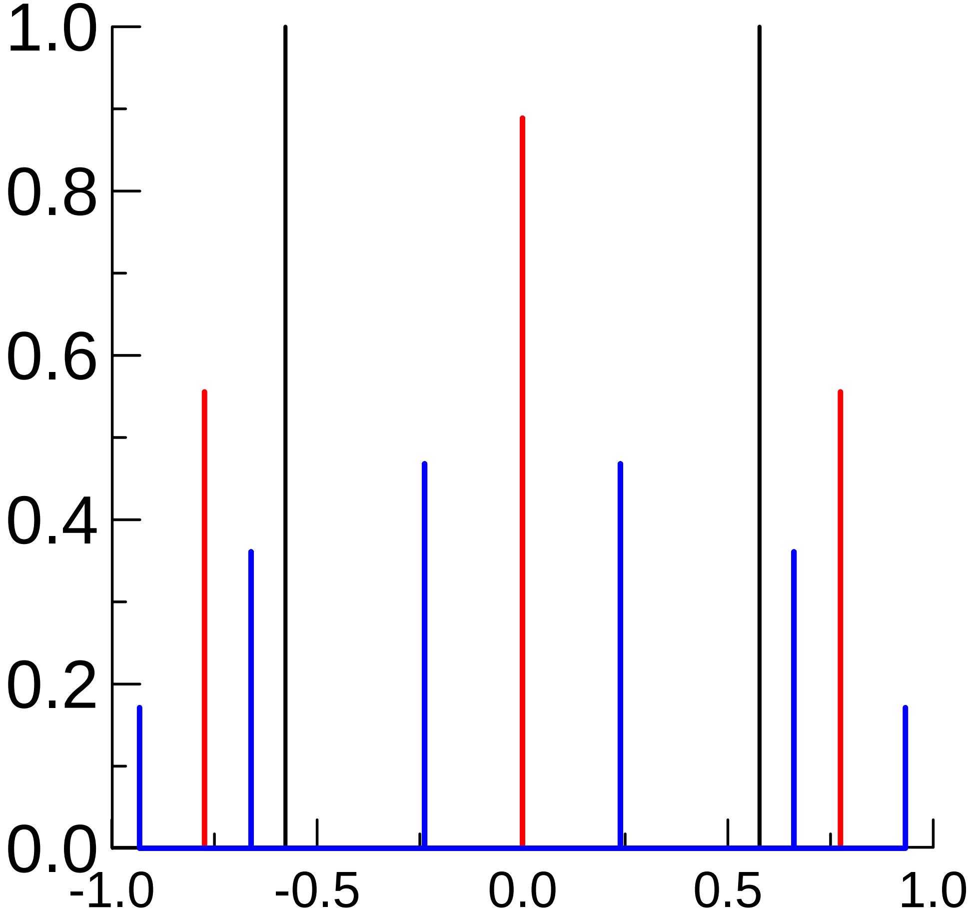
$$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x) dx$$

Wagi i punkty Gaussa

Dokładne do wielomianów stopnia 3

stopnia 5

stopnia 11



$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E$$

MES z liniowymi funkcjami kształtu: przykład zastosowania nr. 2: równanie oscylatora harmonicznego

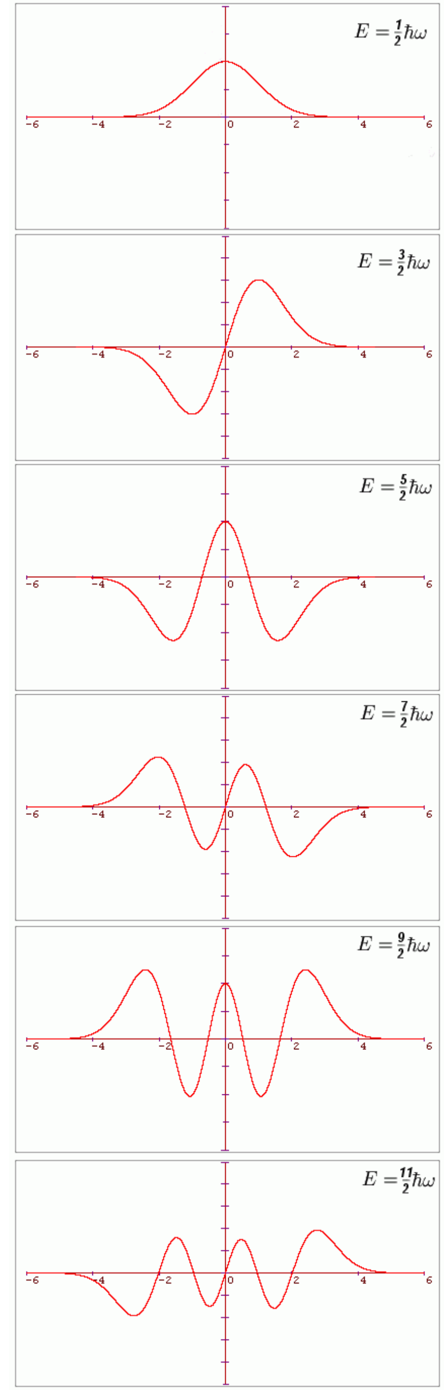
$$-\frac{1}{2}\frac{d^2u_n(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2u_n(x)=E_nu_n(x)$$

niewiadome: funkcja własna $u_n(x)$
oraz wartość własna E_n

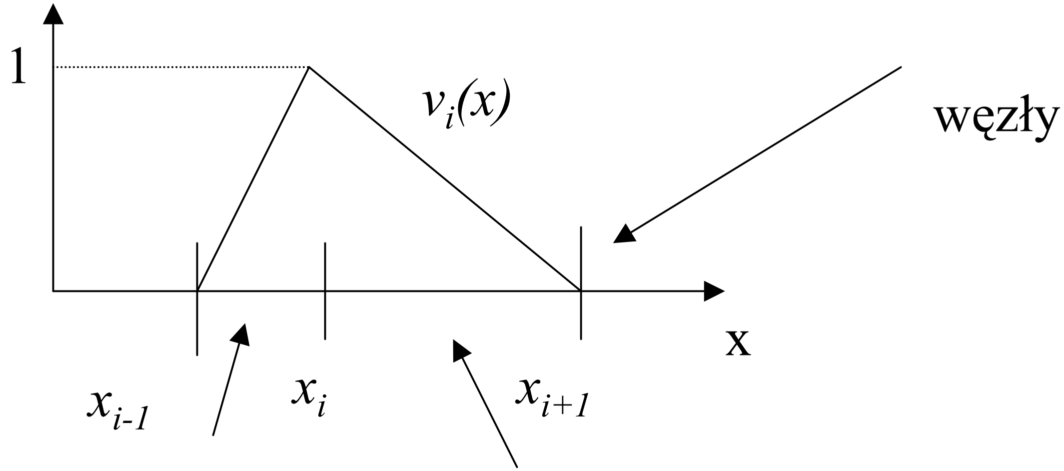
$$E_n=1/2+n$$

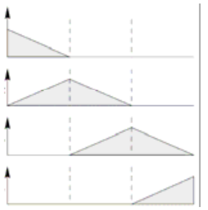
$$u_n=\exp(-x^2/2)H_n(x)$$

$$H_n=(-1)^n\exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2)$$



rysunek z Wikipedii





element K_i długości $\delta_i = x_i - x_{i-1}$

element K_{i+1} długości $\delta_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$$u_n = \sum_i c_i v_i(x)$$

baza funkcyjna

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 u_n(x) = E_n u_n(x) \quad \Big| \times v_j(x) \int dx$$

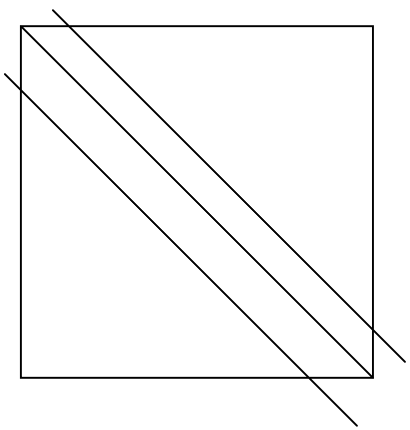
$$\sum_i \frac{1}{2}\left(\int dx \frac{dv_j(x)}{dx}\frac{dv_i(x)}{dx} + x^2 v_i(x) v_j(x)\right) c_i = E \sum_i \int dx v_j(x) v_i(x) c_i$$

$$\sum_i \frac{1}{2}\left(\int dx \frac{dv_j(x)}{dx}\frac{dv_i(x)}{dx} + x^2 v_i(x) v_j(x)\right) c_i = E \sum_i \int dx v_j(x) v_i(x) c_i$$

$$\sum_i H_{ji} c_i = E \sum_i O_{ji} c_i$$

całki się liczy analitycznie
[wielomiany stopnia najwyżej 4]

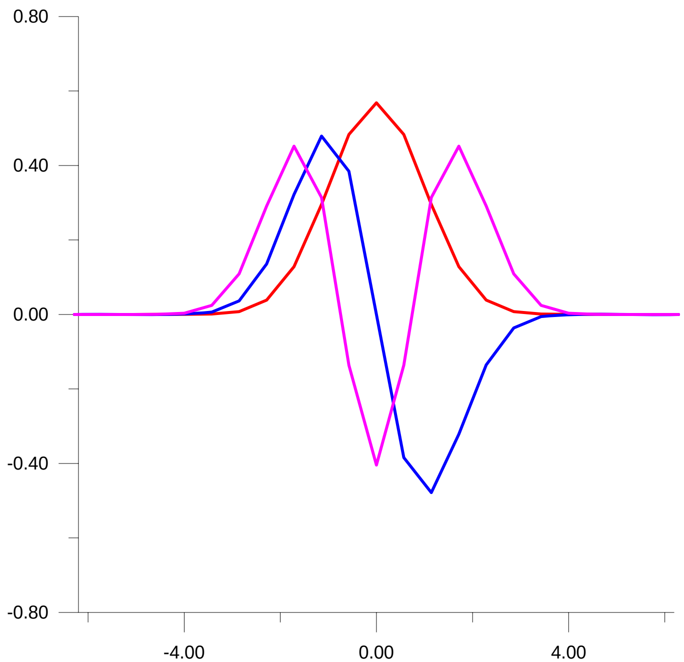
Hc=E**Oc**



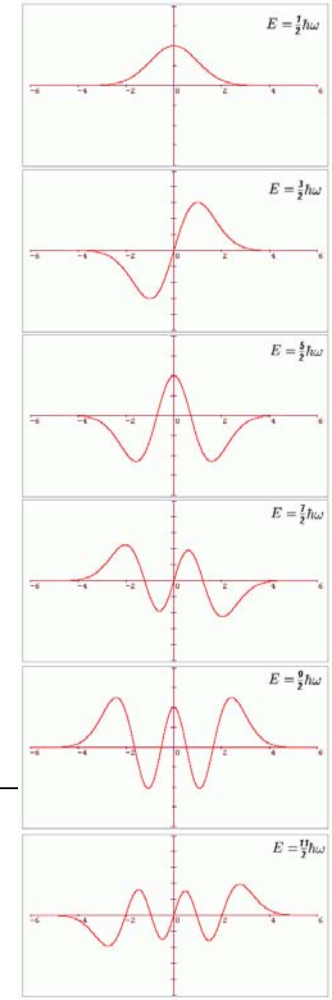
tzw. uogólnione macierzowe
równanie własne
[„zwykłe” równanie własne
gdy : **O**=1]

macierze **H,O** – trójprzekątniowa, symetryczna
nasz operator=samosprzężony (hermitowski)

równomierny rozkład 21 węzłów (elementy równej długości)
siatka od –6.2 do 6.2



E dok	E num	błąd
5.5	6.048	0.548
4.5	4.878	0.378
3.5	3.736	0.235
2.5	2.625	0.125
1.5	1.549	0.049
0.5	0.510	0.01



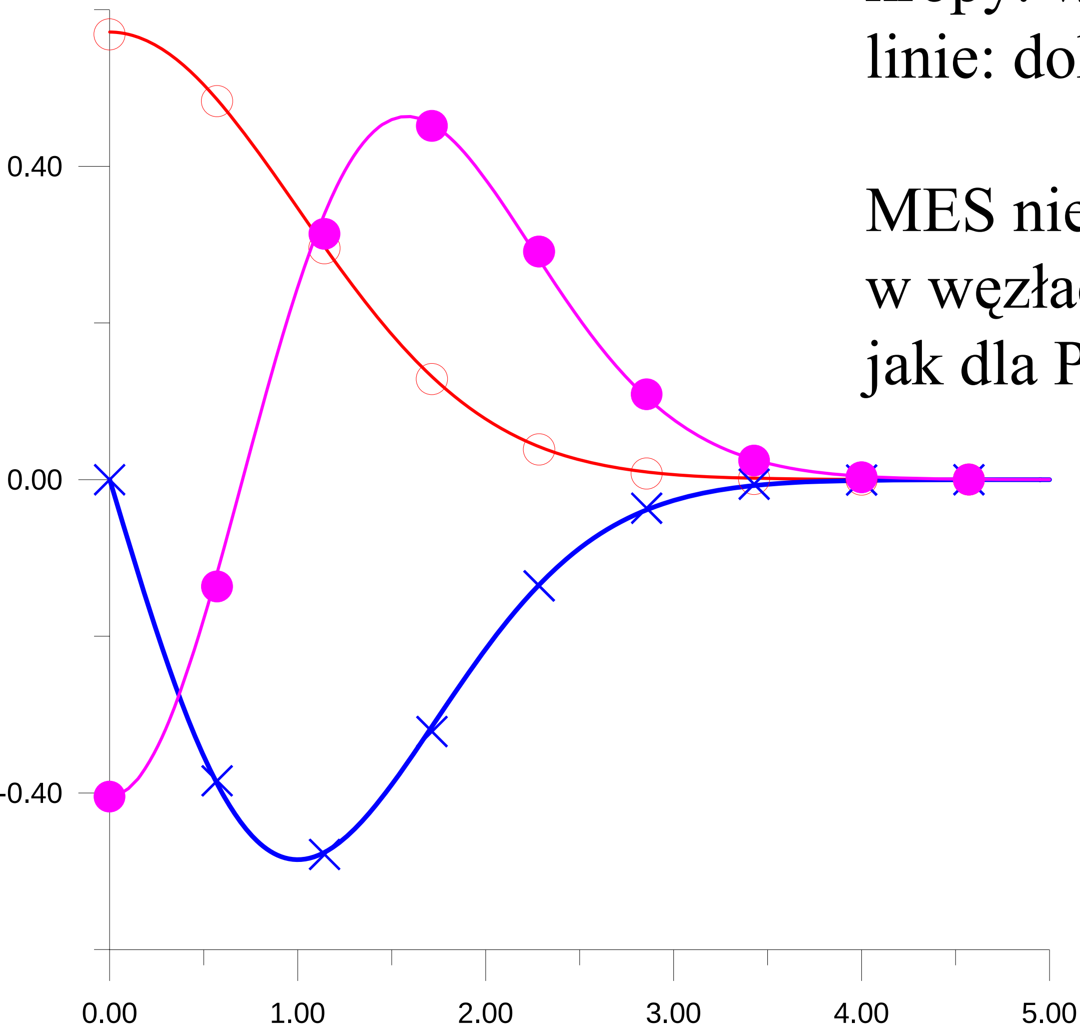
MRS: przy tej samej liczbie węzłów

E num	błąd
4.772	-0.728
4.027	-0.473
3.220	-0.280
2.358	-0.172
1.446	-0.054
0.489	-0.011

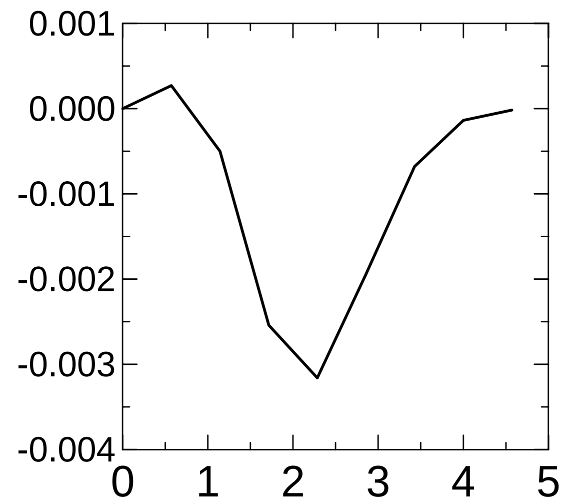
względna przewaga MES rośnie
dla stanów o wyższej energii

kropy: wartości z MES
linie: dokładne funkcje własne

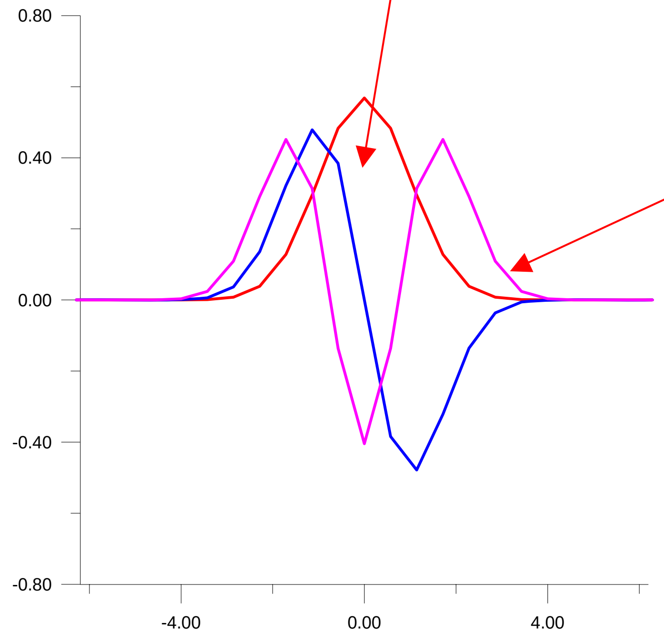
MES nie jest ściśle dokładna
w węzłach
jak dla Poissona, ale niezła



różnica dokładny=MES
dla wektora własnego
o najniższej wartości własnej

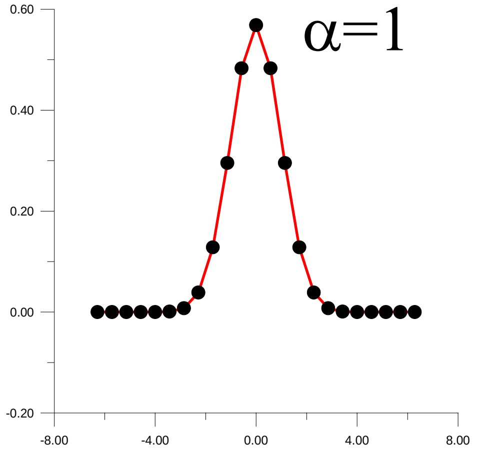


przydałaby się siatka nierównomierna:
więcej węzłów tam gdzie wektory własne
przyjmują duże wartości, mniej na ogonach

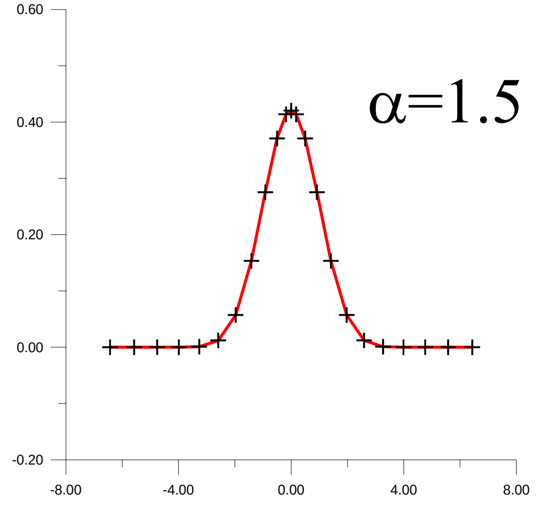


n=21 punktów

$$x_k = 6\left(\frac{|k-n/2-1|}{n/2}\right)^{\alpha}$$



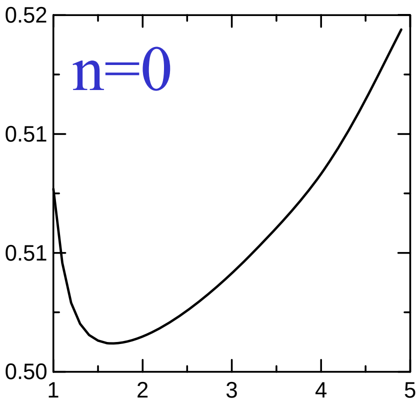
α=1

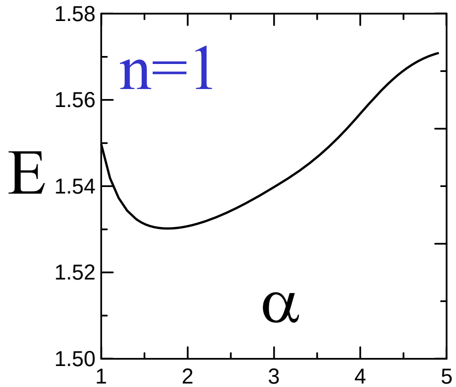


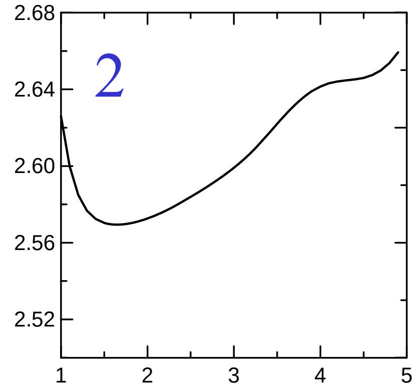
α=1.5

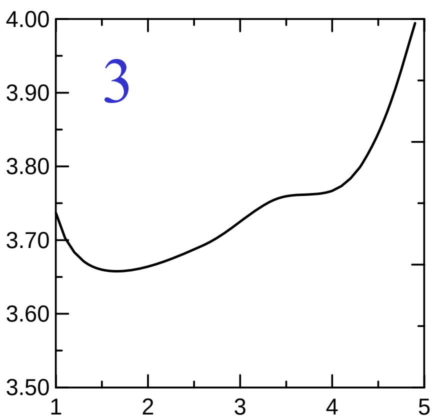
oscylator harmoniczny: optymalizacja rozkładu elementów

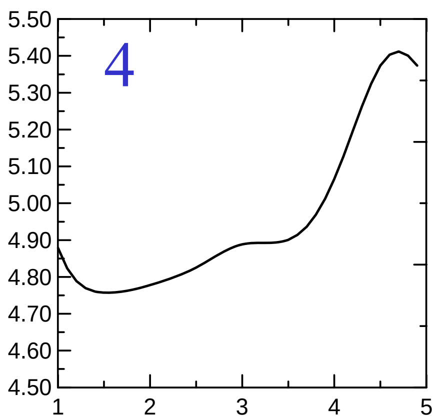
$$E_n = n + 1/2$$



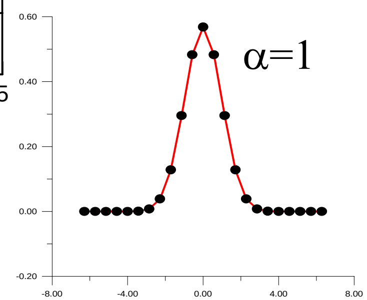


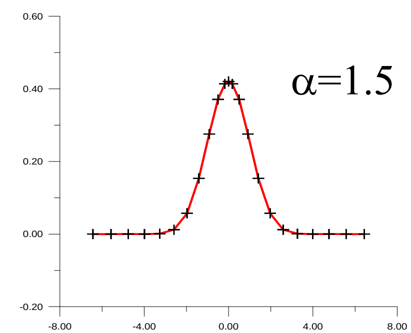






dla wszystkich stanów
optymalny jest wykładnik
$\alpha \approx 1.5$





Metoda różnic skończonych, siatka nierównomierna

Iloraz różnicowy drugiej pochodnej dla nierównej siatki:

$$\left. u(x+\Delta p) = u(x) + \Delta p \frac{du}{dx} + \frac{\Delta p^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta p^3}{6}\frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4) \right| \times \Delta l$$

$$+$$

$$\left. u(x-\Delta l) = u(x) - \Delta l \frac{du}{dx} + \frac{\Delta l^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta l^3}{6}\frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4) \right| \times \Delta p$$

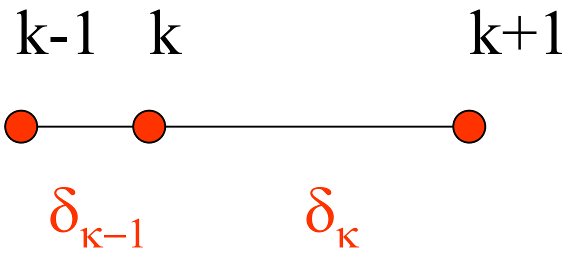
Wzór trójpunktowy

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2\frac{u(x-\Delta l)\Delta p + u(x+\Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l \Delta p(\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$

tracimy jeden rząd
dokładności w porównaniu
z siatką równomierną
Problem rozwiązany
w metodzie elementów
skończonych.

W MES: nie ma problemu
bo pochodne i całki liczymy dokładnie!

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2\frac{u(x-\Delta l)\Delta p + u(x+\Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l \Delta p(\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$



$$-\left(\frac{1}{\delta_k(\delta_k + \delta_{k-1})}\right)u_{k-1} + \left(\frac{1}{\delta_k\delta_{k-1}} + \frac{1}{2}x_k^2\right)u_k - \left(\frac{1}{\delta_{k-1}(\delta_k + \delta_{k-1})}\right)u_{k+1} = Eu_k$$

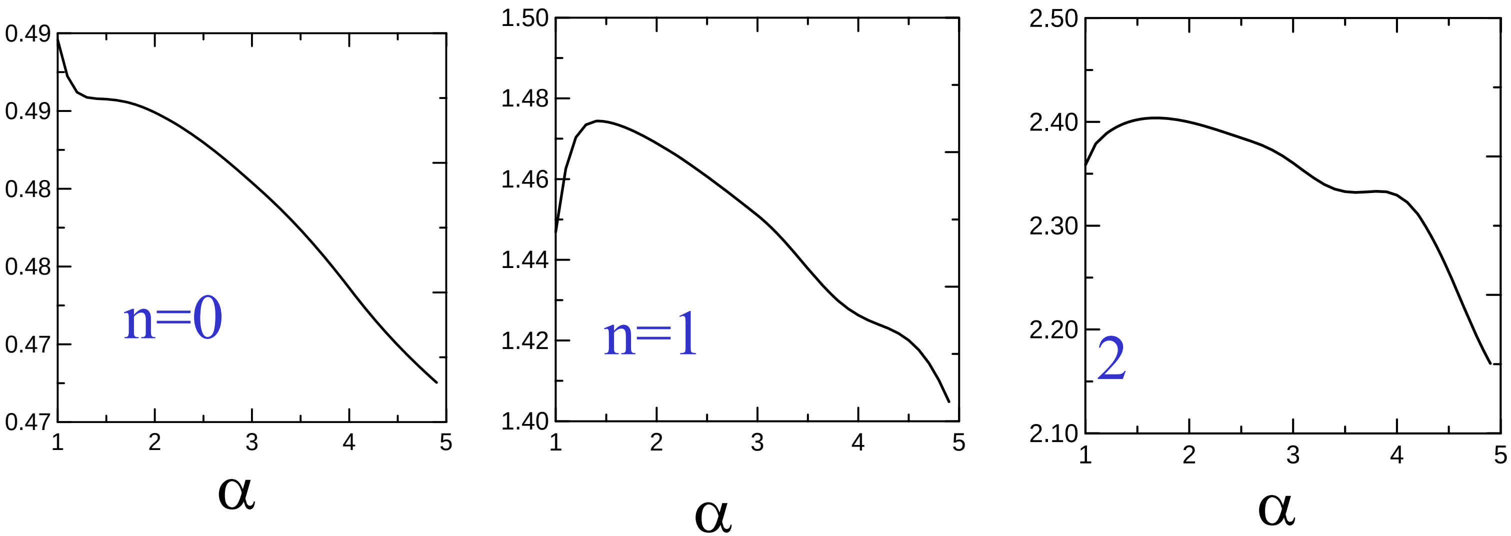
[różnica z MES: potencjał tylko do diagonali, **O**=1]

Uwaga: metoda produkuje niesymetryczną macierz **H:**

$$H_{k,k-1} = -\frac{1}{\delta_k(\delta_k + \delta_{k-1})} \neq H_{k-1,k} = -\frac{1}{\delta_{k-1}(\delta_k + \delta_{k-1})}$$

komplikacja, np. dla niesymetrycznych macierzy nie ma gwarancji, że wartości własne będą rzeczywiste, a wektory własne wzajemnie ortogonalne

Metoda różnic skończonych, siatka nierównomierna



$E_n = n + 1/2$

wartości własne mniejsze niż dokładne.
dla n=0, optymalna jest siatka równomierna.
Pewna poprawa (wzrost) jest dla wzbudzonych.
Ale (!!) wiemy, że wzrost to poprawa tylko dlatego, że rozwiązanie dokładne jest znane.
W typowej sytuacji - nie znamy rozwiązania dokładnego.
Nie będziemy wiedzieli czy mamy do czynienia z poprawą czy pogorszeniem.

w MES: przeciwnie, metoda ma charakter wariacyjny!
Lepsza siatka znaczy mniejsza wartość własna!
Parametr dla optymalizacji siatki!

równanie eliptyczne a różniczkowe równanie własne w metodzie elementów skończonych

$Lu=f$ eliptyczne

1D: np. $L=-d^2/dx^2$

$Hu=Eu$ własne

np. $H=-d^2/dx^2+x^2$

rozwiązanie poszukiwane w bazie funkcyjnej

funkcja próbna (*trial*)

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i(x)$$

(wstawić rozwiązanie próbne, wyrzutować na wektory bazy)

$$\sum_{i=1}^{n} (v_j, Lv_i) c_i = (v_j, f)$$

(układ równań algebraicznych)

Lc=f

$$\sum_{i=1}^{n} (v_j, Hv_i) c_i = E \sum_{i=1}^{n} (v_j, v_i) c_i$$

(uogólniony macierzowy problem własny)

Hc=EOc

wariacyjny charakter metody dla równania eliptycznego i własnego

MES (i Galerkin w ogóle) równoważna metodzie Reyleigha-Ritza, gdy ta stosowalna

$Lu=f$

$Hu=Eu$

$$\sum_{i=1}^{n}(v_j, Lv_i)c_i = (v_j, f)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(v_j, Hv_i)c_i = E\sum_{i=1}^{n}(v_j, v_i)c_i$$

wartościom c_i, które spełniają równania algebraiczne odpowiada minimum funkcjonału:

$$a = \int\left(\frac{1}{2}uLu - fu\right)$$

$$e = \frac{\int(uHu)}{\int uu}$$

dokładne rozwiązania równania oscylatora są nie tylko ciągłe,
ale również ciągłe z pochodną

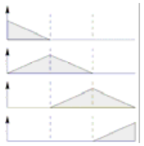
baza Lagrange'a: gwarantuje tylko ciągłość funkcji na granicy elementów
ciągłość pochodnej nie jest gwarantowana

jeśli zainwestujemy w funkcje kształtu tak aby zapewnić ciągłość z pochodną
- niższe wartości własne wyjść powinny

kiedy ciągłość pochodnej ważna

1) dla równania Poissona: nieciągłe pole elektryczne (pochodna potencjału)
   gdy rozkład gęstości ładunku o formie delty Diraca

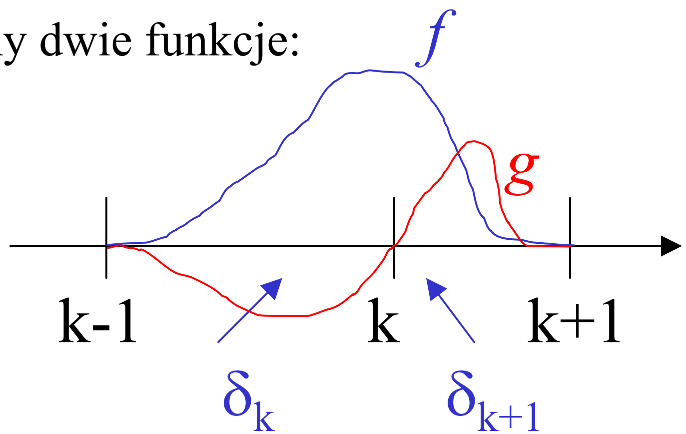
2) równanie przewodnictwa cieplnego: strumień ciepła proporcjonalny
   do gradientu temperatury = gdy ten nieciągły na granicy elementów
   stan nie może być ustalony



zapewniały ciągłość funkcji: 2 nie znikające f na element, jedna na węzeł

MES: baza funkcji ciągłych z pochodnymi na granicy elementów

z węzłem *k*
wiążemy dwie funkcje:



f przenosi ciągłą wartość funkcji
przez granice elementów:
f: 1 w węźle k, 0 w sąsiednich
f' zero we wszystkich węzłach

g przenosi ciągłą pochodną
przez dwa elementy:
g': 1 w węźle k, 0 w sąsiednich
g zero we wszystkich węzłach

$$u = \sum_i \alpha_i f_i(x) + \sum_i \beta_i g_i(x)$$

parametry węzłowe:
4 na element – wartości i pochodne
na obydwu końcach przedziału

4 funkcje kształtu na element
po 2 funkcje na węzeł

$$u = \sum_i \alpha_i f_i(x) + \sum_i \beta_i g_i(x)$$

$$f_l(x_k) = \delta_{kl} \qquad g_l(x_k) = 0$$

$$f_l'(x_k) = 0 \qquad g_l'(x_k) = \delta_{kl}$$

$$u(x_k) = \alpha_k$$

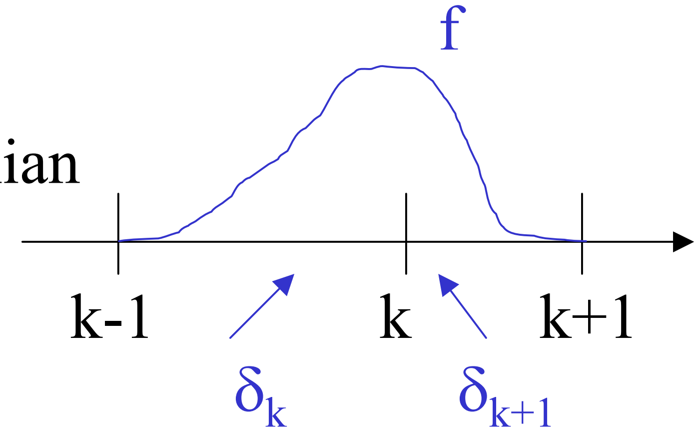
$$u'(x_k) = \beta_k$$

współczynniki rozwinięcia (niewiadome)
: wartości funkcji i pochodnej w węzłach

Metoda ES da nam ekstra
oszacowanie pochodnych rozwiązania

parametry węzłowe: tutaj *u* i *u'*

konstruujemy funkcję f_k:
stopnia musi trzeciego wielomian



$$f_k = \begin{cases} a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + d_k & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ A_k(x-x_k)^3 + B_k(x-x_k)^2 + C_k(x-x_k) + D_k & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & x \text{ w dopełnieniu} \end{cases}$$

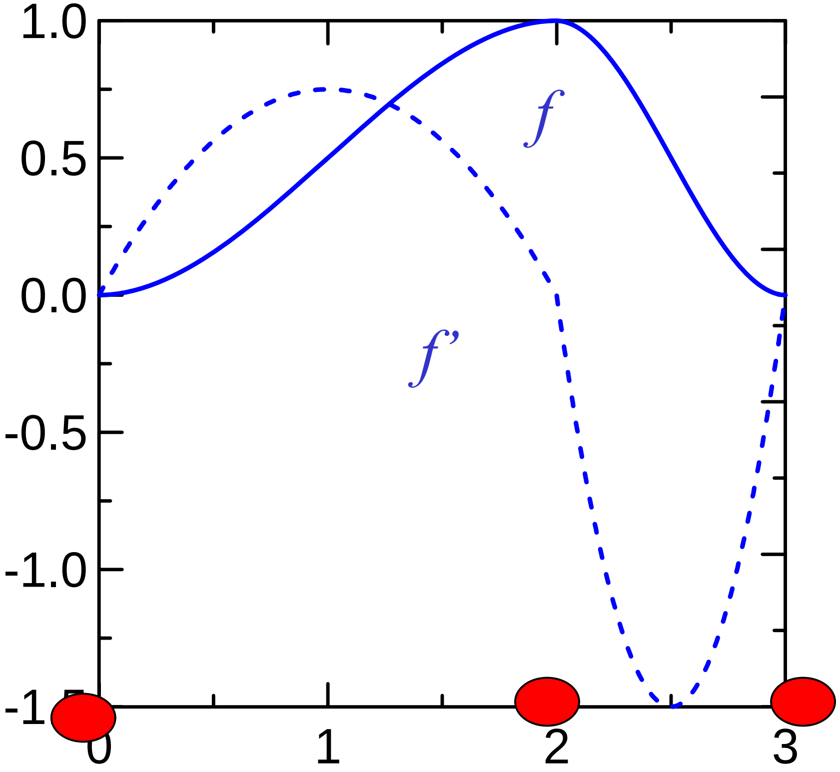
współczynniki a_k, b_k, c_k, d_k : $f(x_k)=1$, $f(x_{k-1})=0$, $f'(x_k)=0$, $f'(x_{k-1})=0$

$$\begin{aligned} c_k &= 0 \\ d_k &= 1 \\ a_k &= -\frac{2}{\delta_k^3} \\ b_k &= -\frac{3}{\delta_k^2} \end{aligned}$$

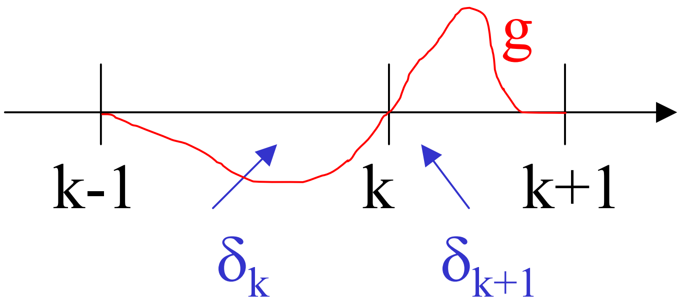
podobnie

$$\begin{aligned} C_k &= 0 \\ D_k &= 1 \\ A_k &= \frac{2}{\delta_{k+1}^3} \\ B_k &= -\frac{3}{\delta_{k+1}^2} \end{aligned}$$

przykładowy przebieg funkcji *f* niosącej ciągłość rozwiązania przez granicę elementów



konstruujemy funkcję g_k:



$$g_k = \begin{cases} a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + d_k & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ A_k(x-x_k)^3 + B_k(x-x_k)^2 + C_k(x-x_k) + D_k & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & x \text{ w dopełnieniu} \end{cases}$$

$g(x_{k-1}) = g(x_k) = g'(x_{k-1}) = 0$

$g'(x_k) = 1$

$$c_k = 1$$

$$d_k = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\delta_k^2}$$

$$b_k = \frac{2}{\delta_k}$$

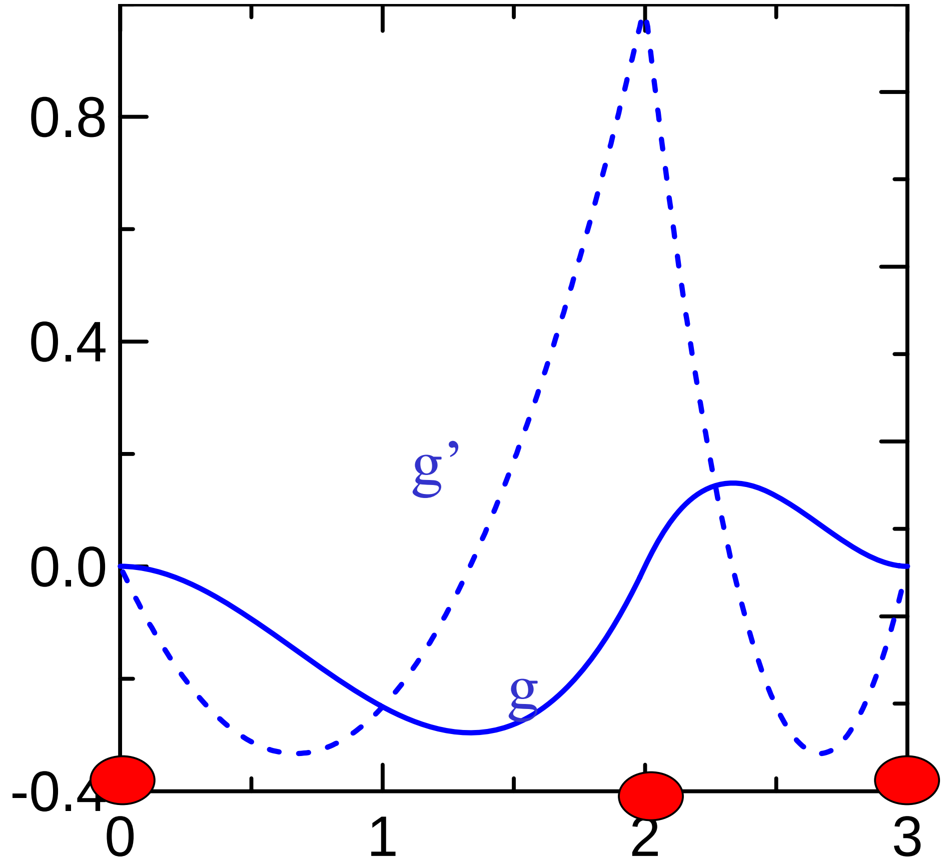
$$C_k = 1$$

$$D_k = 0$$

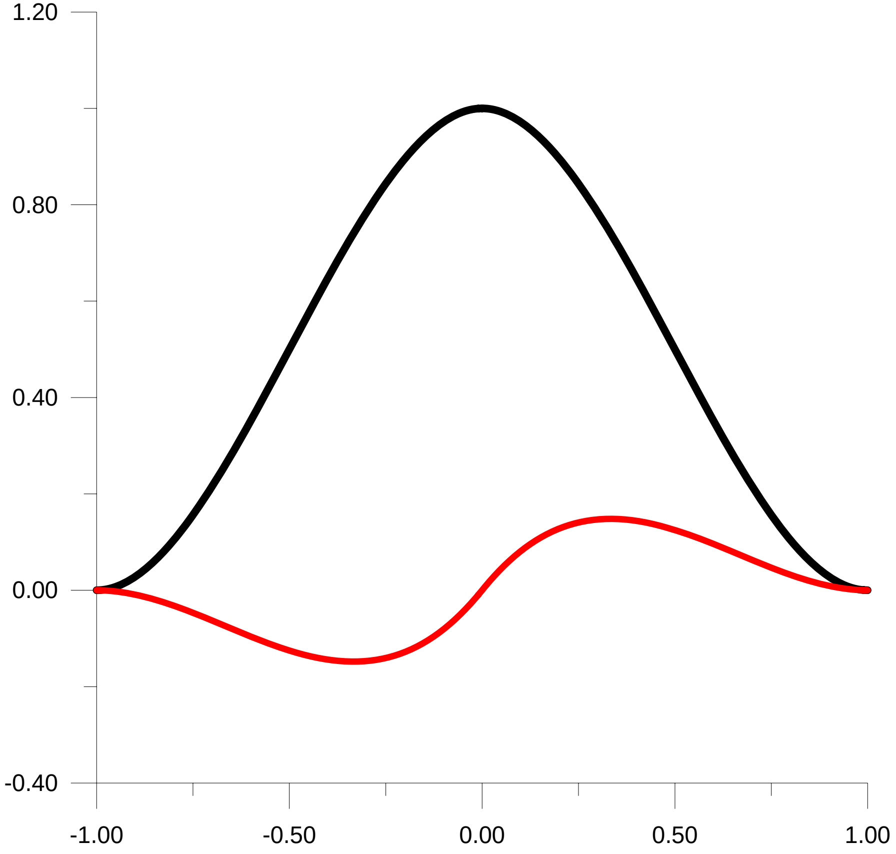
$$A_k = \frac{1}{\delta_{k+1}^2}$$

$$B_k = -\frac{2}{\delta_{k+1}}$$

przykładowy przebieg funkcji *g* niosącej ciągłość pochodnej rozwiązania przez granicę elementów



funkcje f_k g_k są ortogonalne jeśli węzły równoodległe



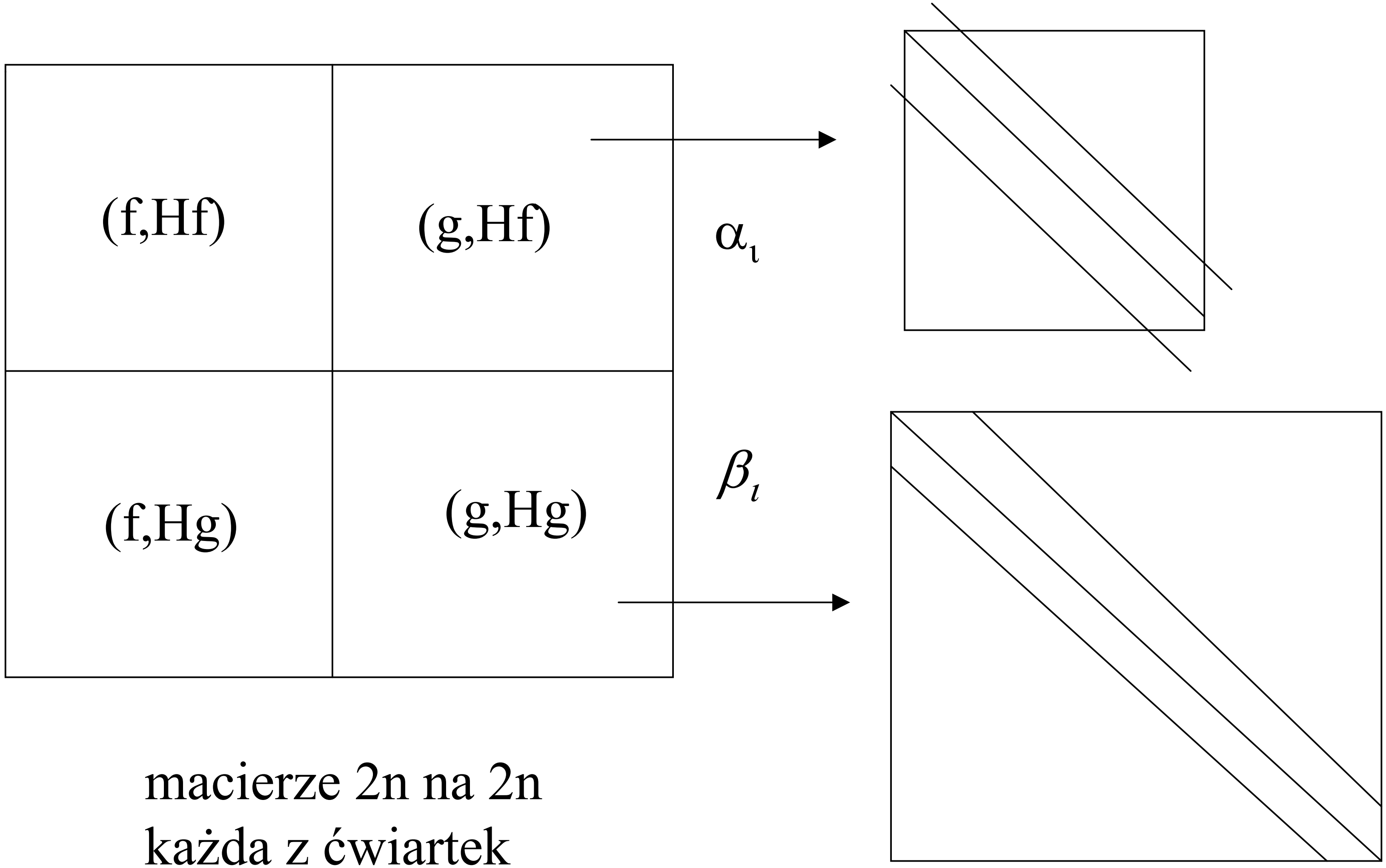
symetria, ale (f_k,g_{k+1}) już nie 0

w teorii interpolacji: wielomiany 3-go rzędu interpolujące wartości i pochodne - sklejki Hermite'a

sklejka Hermita dla równania własnego: struktura macierzy

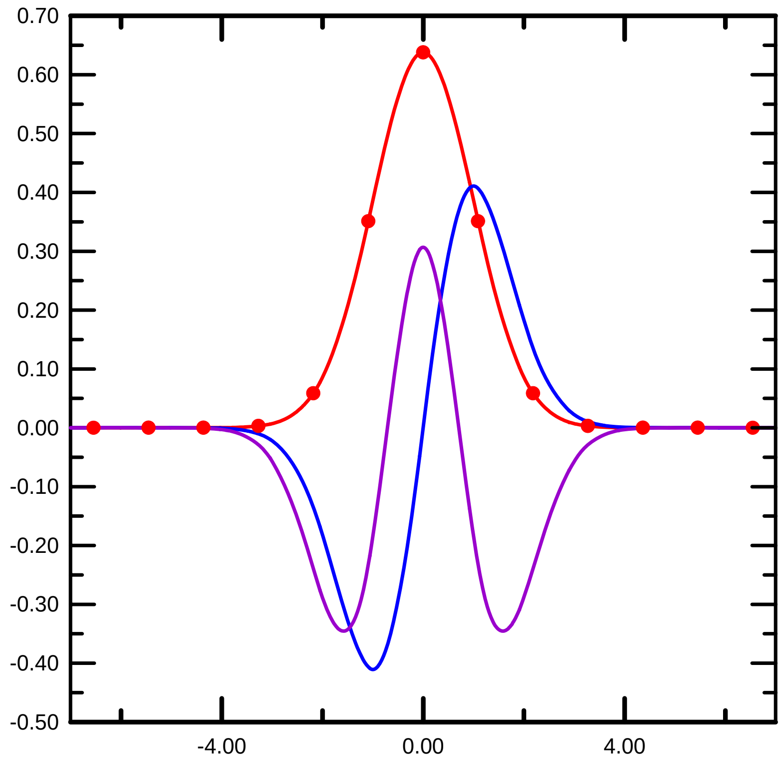
Hc=*E***Oc**

$$u = \sum_i \alpha_i f_i(x) + \sum_i \beta_i g_i(x)$$



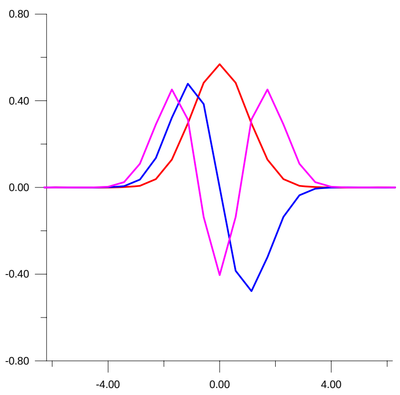
macierze 2n na 2n
każda z ćwiartek
trójprzekątniowa

równoodległe węzły zaznaczone kropami



4.502
3.510
2.500
1.500
0.500
rewelacyjny wynik

13 węzłów/26 równań

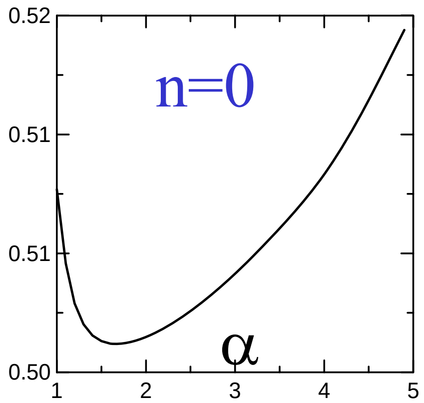


liniowe 23 węzły / (23 równania)

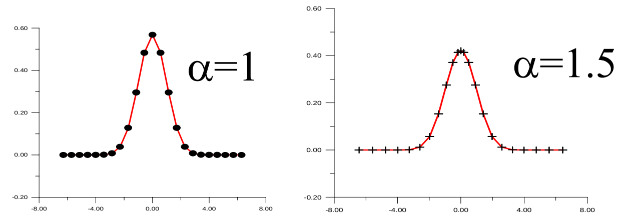
2.625
1.549
0.51

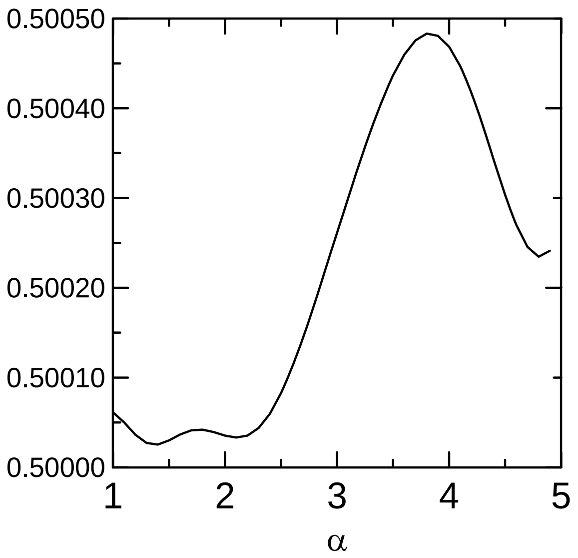
optymalizacja elementów
(więcej węzłów na środku)

$$x_k = 6\left(\frac{|k-n/2-1|}{n/2}\right)^{\alpha}$$



wynik dla funkcji liniowych

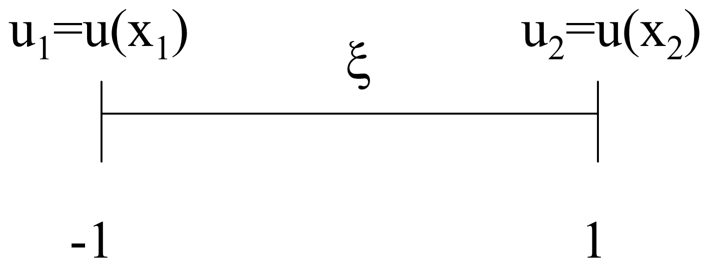




wynik dla sklejek Hermite'a

-funkcje kształtu są tak elastyczne,
że optymalizacja elementów staje
się zbędna

funkcje kształtu Hermite'a w przestrzeni referencyjnej
zastosowanie dla problemów eliptycznych 1D



Pochodne funkcji (po x nie po ξ) = nowe elementy węzłowe

$$u_1' = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_1} \qquad u_2' = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_2}$$

= oprócz ciągłości przez granicę elementu dostaniemy
oszacowanie pochodnych na granicy

Szukamy funkcji kształtu dla rozwiązań ciągłych z pochodną (funkcji kształtu Hermite'a)

4 równania: 2 wartości, 2 pochodne

$$u(\xi = -1) = u_1$$

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \ \xi$$

$$u(\xi = +1) = u_2$$

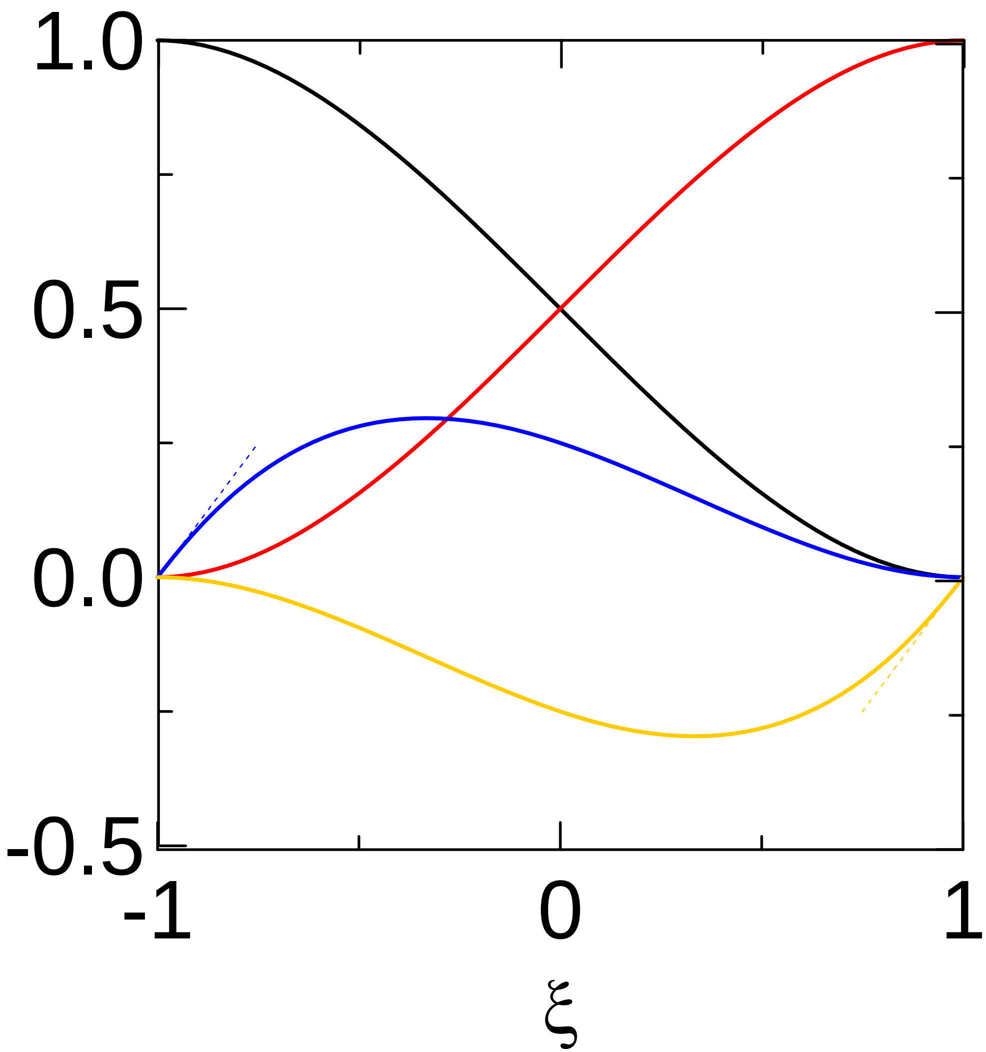
$$u_1' = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{du}{d\xi}\right|_{\xi=-1} \times \frac{d\xi}{dx} = \left.\frac{du}{d\xi}\right|_{\xi=-1} \frac{1}{J_m}$$

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$

$$u_2 = u_2^0 \qquad u_1' = u_1^1 \qquad u_2' = u_2^1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_1^0 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & \qquad \phi_1^1 &= \frac{J_m}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ \phi_2^0 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & \qquad \phi_2^1 &= \frac{J_m}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}}$$

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$



na rysunku funkcje związane z pochodnymi / Jakobian

$$\phi_1^0(\xi = -1) = \phi_2^0(\xi = +1) = 1$$

$$\phi_1^0(\xi = +1) = \phi_2^0(\xi = -1) = 0$$

$$(\phi_1^0)'(\xi = \pm 1) = (\phi_2^0)'(\xi = \pm 1) = 0$$

$$\frac{\phi_1^1(\xi = -1)}{J_m} = \frac{\phi_2^1(\xi = +1)}{J_m} = 1$$

$$\phi_1^1(\xi = +1) = \phi_2^1(\xi = -1) = 0$$

$$(\phi_1^1)'(\xi = \pm 1) = (\phi_2^1)'(\xi = \pm 1) = 0$$

każda z funkcji kształtu Hermite'a: odpowiedzialna za wartość lub pochodną, żadna nie przeszadza pozostałym (pełen podział kompetencji)

Funkcje kształtu Hermite'a: interpolacja jednomianów, przedział [–1:1]:

$$u(\xi) = u_1^0\phi_1^0(\xi) + u_1^1\phi_1^1(\xi) + u_2^0\phi_2^0(\xi) + u_2^1\phi_2^1(\xi)$$

$$\phi_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_1^1 = \frac{J_m}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$J_m=1$

dokładna funkcja v(ξ)=ξ $u_1^0= -1,\ u_2^0=1,\ u_1^1=1,\ u_2^1=1$

$u=\underbrace{3/2\,\xi -1/2\,\xi^3}_{\text{wartości}} + \underbrace{-1/2\xi+1/2\xi^3}_{\text{pochodne}} = \xi$

dokładna funkcja v(ξ)=ξ^2 $u_1^0= 1,\ u_2^0=1,\ u_1^1=-2,\ u_2^1=2$

$u=1+(-1-\xi^2)=\xi^2$

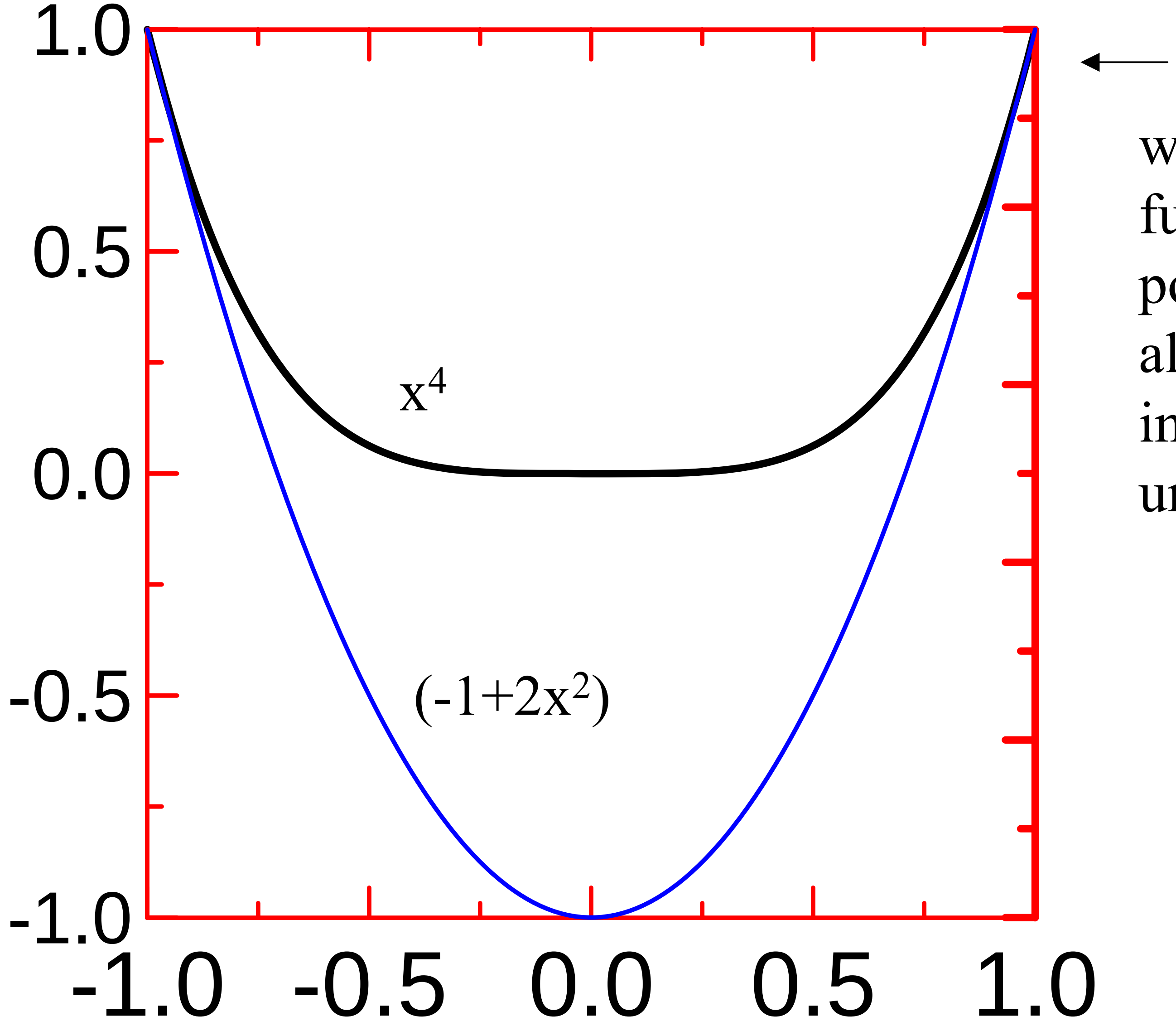
dokładna funkcja v(ξ)=ξ^3 $u_1^0= -1,\ u_2^0=1,\ u_1^1=3,\ u_2^1=3$

$u=\xi^3$

dokładna funkcja v(ξ)=ξ^4 $u_1^0= 1,\ u_2^0=1,\ u_1^1=-4,\ u_2^1=4$

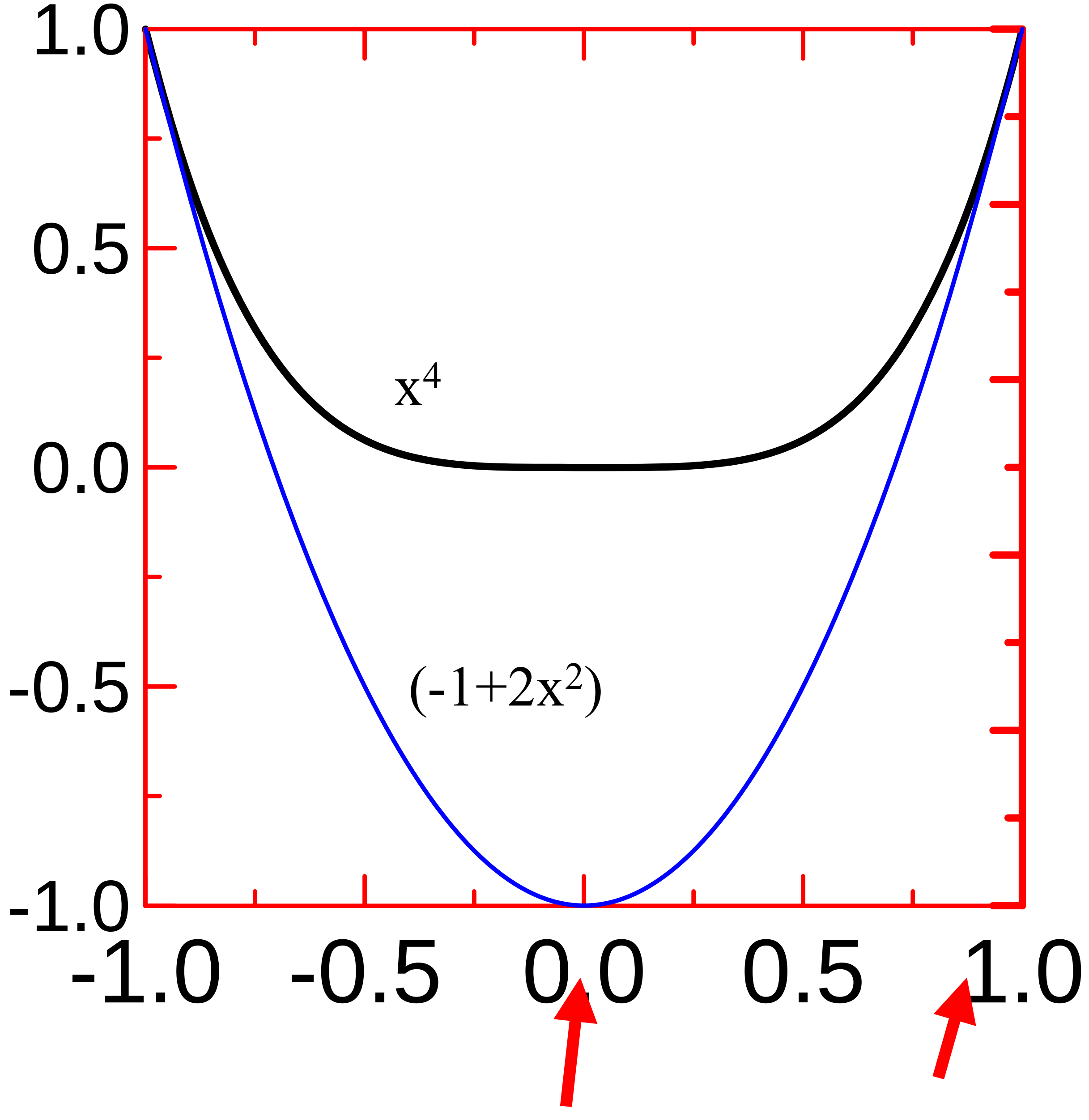
$u=-1+2\,\xi^2$

kubiczna sklejka Hermita a wielomian 4-tego rzędu



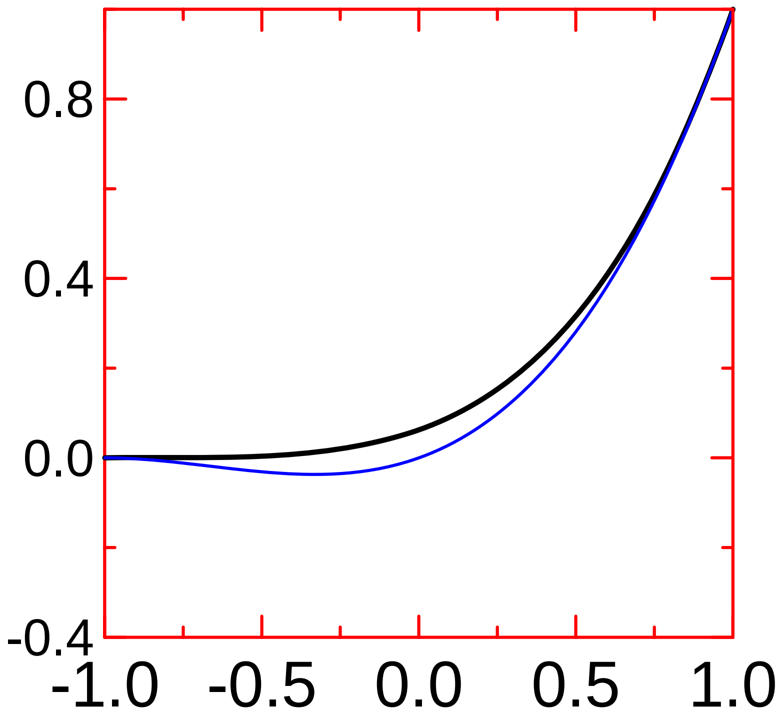
wartość funkcji i pochodnej OK, ale sukces interpolacji umiarkowany

Trzeba zawęzić przedział



zawęzić przedział x^4 od [–1,1] do [0,1]
aby nie przejmować się czynnikiem skali J_m:
trzymamy [-1,1] a przekształcamy funkcję $[(x+1)/2]^4$

dokładna funkcja $v(\xi)=[(\xi+1)/2]^4$ $\quad u_1^0= 0,\ u_2^0=1,\ u_1^1=0,\ u_2^1=2$
$u=1/4\xi+1/4\xi^3+1/2\xi^2$



itd.

funkcje kształtu Hermita: zastosowanie

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

u(x=-1)=0
u(x=1)=0

Przedział (-1,1)
Podzielony na 8 elementów
(9 węzłów, 18 parametrów węzłowych)

$u_1 = u_1^0$ $\qquad$ $u_2 = u_2^0$

$u_1' = u_1^1$ $\qquad$ ξ $\qquad$ $u_2' = u_2^1$

-1 $\qquad$ 1

$x(\xi) = (x_{m-1}+x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2\ \xi$

$J_m = h_m/2$

$$u(\xi) = u_1^0 \underbrace{\phi_1^0(\xi)}_{1} + u_1^1 \underbrace{\phi_1^1(\xi)}_{2} + u_2^0 \underbrace{\phi_2^0(\xi)}_{3} + u_2^1 \underbrace{\phi_2^1(\xi)}_{4}$$

macierz sztywności dla pojedynczego elementu

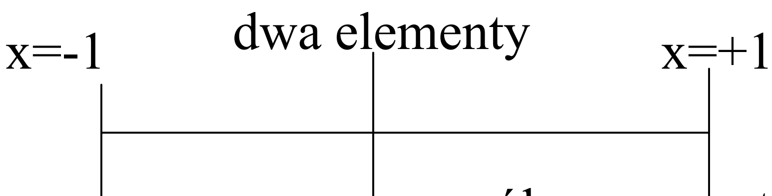
$$E_{ij}^m = \int_{-1}^{1} \frac{1}{J_m}\left[-\frac{df_i}{d\xi}\frac{df_j}{d\xi}\right] d\xi$$

$$E_{ij}^m = \frac{1}{30J_m}\begin{pmatrix} -18 & -3J_m & 18 & -3J_m \\ -3J_m & -8J_m^2 & 3J_m & 2J_m^2 \\ 18 & 3J_m & -18 & 3J_m \\ -3J_m & 2J_m^2 & 3J_m & -8J_m^2 \end{pmatrix}$$

$$
E^m = \frac{1}{30J_m}
\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} u_1^0 & u_1^1 & u_2^0 & u_2^1 \end{matrix} & \\
\hline
\begin{pmatrix}
-18 & -3J_m & 18 & -3J_m \\
-3J_m & -8J_m^2 & 3J_m & 2J_m^2 \\
18 & 3J_m & -18 & 3J_m \\
-3J_m & 2J_m^2 & 3J_m & -8J_m^2
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix} u_1^0 \\ u_1^1 \\ u_2^0 \\ u_2^1 \end{matrix}
\end{array}
$$

u(lewy)
u'(lewy)
u(prawy)
u'(prawy)

składanie macierzy sztywności dla f.k. Hermita



wspólne parametry węzłowe: wartość pochodna
wspólne również elementy pozadiagonalne dla tego węzła

$$
S = \begin{pmatrix}
E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\
E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\
E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\
E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\
0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\
0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2
\end{pmatrix}
$$

Prawa strona/jeden element

$$P_i^m = \int_{-1}^{1} J_m f_i(\xi)[-\sin(\pi x(\xi))]d\xi$$

$$F = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe: u(x=-1)=0
u(x=1)=0

$$S = \begin{pmatrix} E^1_{11} & E^1_{12} & E^1_{13} & E^1_{14} & 0 & 0 \\ E^1_{21} & E^1_{22} & E^1_{23} & E^1_{24} & 0 & 0 \\ E^1_{31} & E^1_{32} & E^1_{33} + E^2_{11} & E^1_{34} + E^2_{12} & E^2_{13} & E^2_{13} \\ E^1_{41} & E^1_{42} & E^1_{43} + E^2_{21} & E^1_{44} + E^2_{22} & E^2_{23} & E^2_{23} \\ 0 & 0 & E^2_{31} & E^2_{32} & E^2_{33} & E^2_{34} \\ 0 & 0 & E^2_{41} & E^2_{42} & E^2_{43} & E^2_{44} \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} u(-1) \\ u'(-1) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u(1) \\ u'(1) \end{array}\right.$$

Warunki brzegowe: u(x=-1)=0
u(x=1)=0

$$S = \begin{pmatrix} \cancel{E^1_{11}} & \cancel{E^1_{12}} & \cancel{E^1_{13}} & \cancel{E^1_{14}} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ E^1_{21} & E^1_{22} & E^1_{23} & E^1_{24} & 0 & 0 \\ E^1_{31} & E^1_{32} & E^1_{33}+E^2_{11} & E^1_{34}+E^2_{12} & E^2_{13} & E^2_{13} \\ E^1_{41} & E^1_{42} & E^1_{43}+E^2_{21} & E^1_{44}+E^2_{22} & E^2_{23} & E^2_{23} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{E^2_{31}} & \cancel{E^2_{32}} & \cancel{E^2_{33}} & \cancel{E^2_{34}} \\ 0 & 0 & E^2_{41} & E^2_{42} & E^2_{43} & E^2_{44} \end{pmatrix} \begin{array}{|l} u(-1) \\ u'(-1) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u(1) \\ u'(1) \end{array}$$

tu damy jedynki na diagonali

$$F = \begin{pmatrix} \cancel{P^1_1} \\ P^1_2 \\ P^1_3 + P^2_1 \\ P^1_4 + P^2_2 \\ \cancel{P^2_3} \\ P^2_4 \end{pmatrix}$$

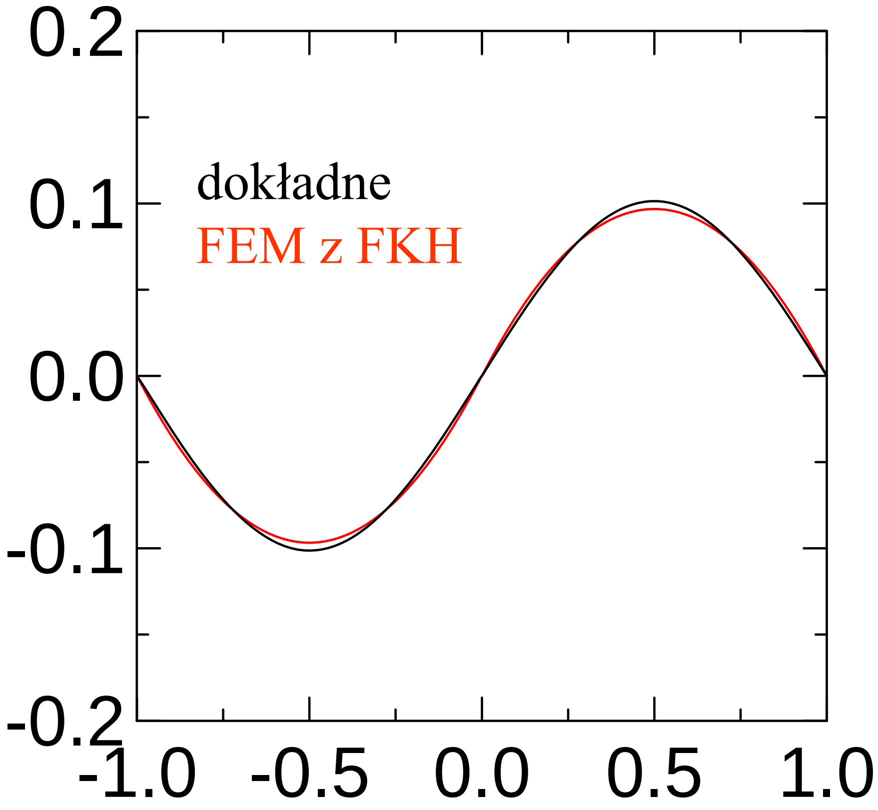
tu damy zera

Su=F

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

Wyniki dla problemu modelowego

dwa elementy / 3 węzły / 6 parametrów węzłowych



pochodne uzyskane z rozwiązania układu równań w węzłach:

-0.387 , 0.387 , -0.387

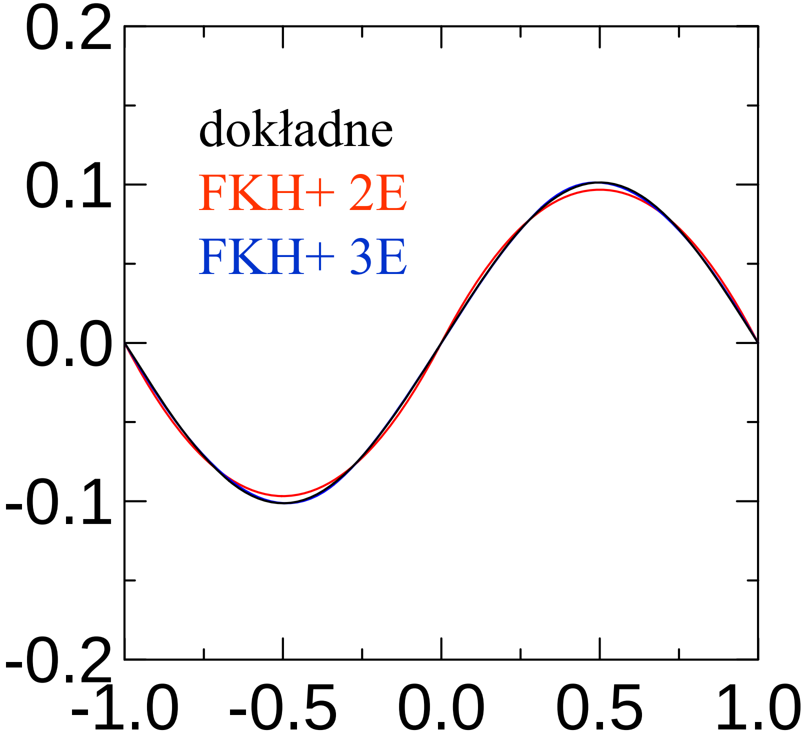
zamiast dokładnej

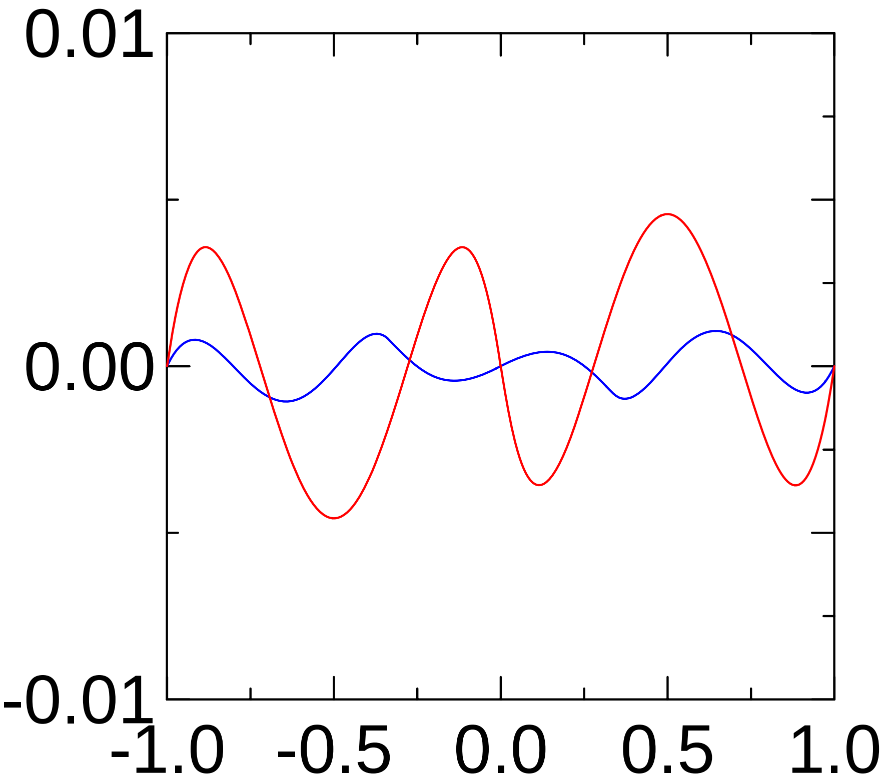
$-1/\pi$, $1/\pi$, $-1/\pi$

-0.318, 0.318, -0.318

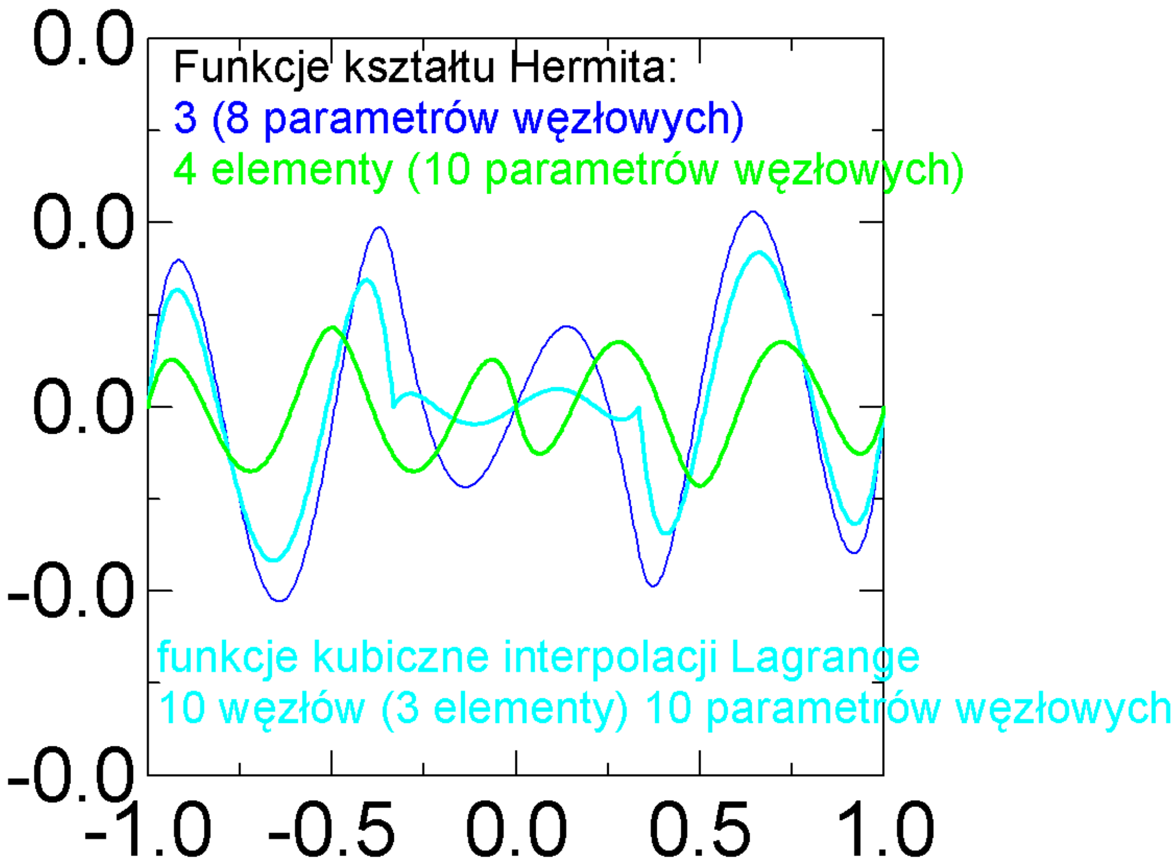
Wyniki dla problemu modelowego

3 elementy / 4 węzły / 8 parametrów węzłowych





Baza kubiczna Lagrange'a i baza Hermita porównanie dokładności



Przy tej samej złożoności: w porównaniu z bazą Lagrange'a w bazie Hermita błąd mniejszy (i ciągły, bo rozwiązanie przybliżone ciągłe)

funkcje kształtu Hermita a warunki brzegowe Neumanna

u(x=-1)=0

u'(x=1)=-1/π

$$u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$$

Przykład dla dwóch elementów

1

$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \cancel{P_1^1} \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ \cancel{P_4^2} \end{pmatrix}$$

0

1

co tutaj?

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + \underline{u_2^1 \phi_2^1(\xi)}$$

odpowiedzialna za pochodną na końcu przedziału

mamy ustawić $u_2^1\Big|$ tak, żeby

$$\left.\frac{du(x(\xi))}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{1}{\pi} \longrightarrow u_2^1 \left.\frac{d\phi_2^1(x(\xi))}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{1}{\pi}$$

pochodne pozostałych funkcji znikają w 1 warunek Neumanna dla funkcji kształtu Hilberta

$$u_2^1 \frac{d\phi_2^1(x(\xi))}{dx}\bigg|_{x=1} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$$u_2^1 \frac{d\phi_2^1(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\bigg|_{\xi=1} = -\frac{1}{\pi}$$

$$u_2^1 J_m \frac{1}{J_m} = -\frac{1}{\pi}$$

$$u_2^1 = -\frac{1}{\pi}$$

0

$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \cancel{P_1^1} \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ \cancel{P_4^2} \end{pmatrix}$$

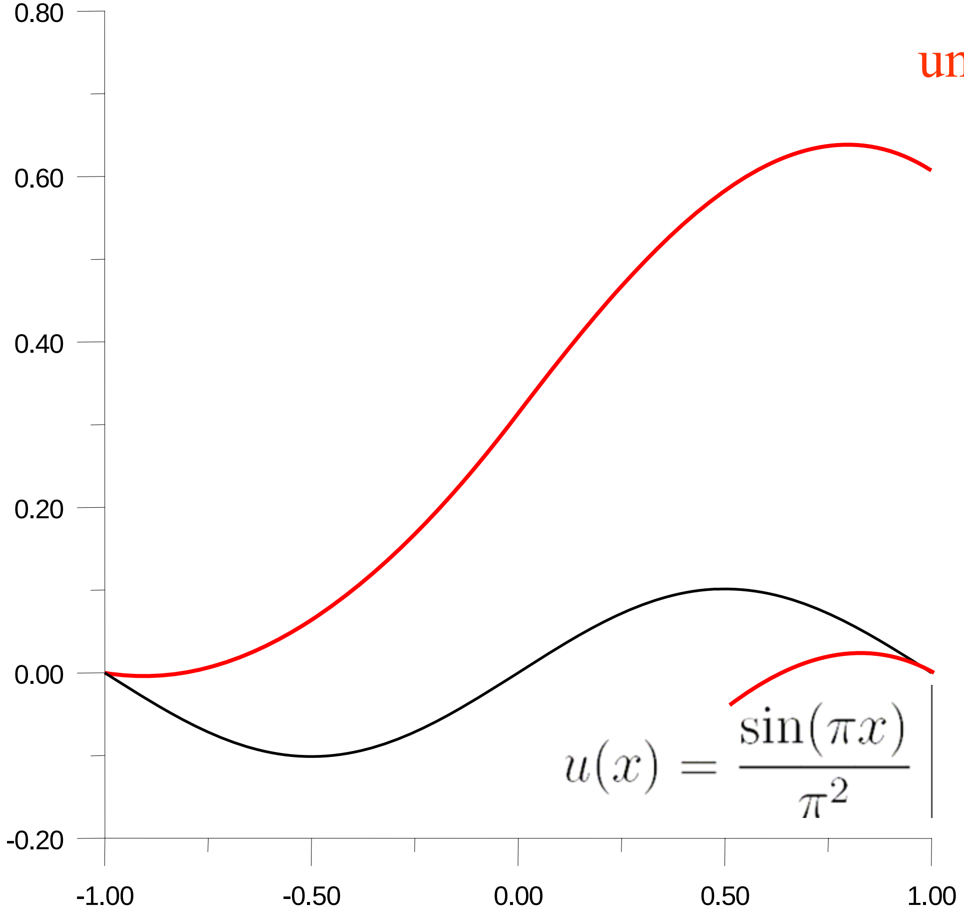
1

1

-1 / π

Wynik

warunek Neumanna dla funkcji kształtu Hermite'a



umiarkowany sukces

pochodna jak trzeba
ale wartość całkiem nie taka

co jest nie tak?

macierz sztywności pojedynczego elementu

warunek Neumana dla funkcji kształtu Hilberta

$$E_{ij}^{m}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{J_m}[-\frac{df_i}{d\xi}\frac{df_j}{d\xi}]d\xi$$

Przypomnijmy sobie skąd się wzięła

$$(Lu,v)=(f,v)$$

$$L=\frac{d^2}{dx^2}$$

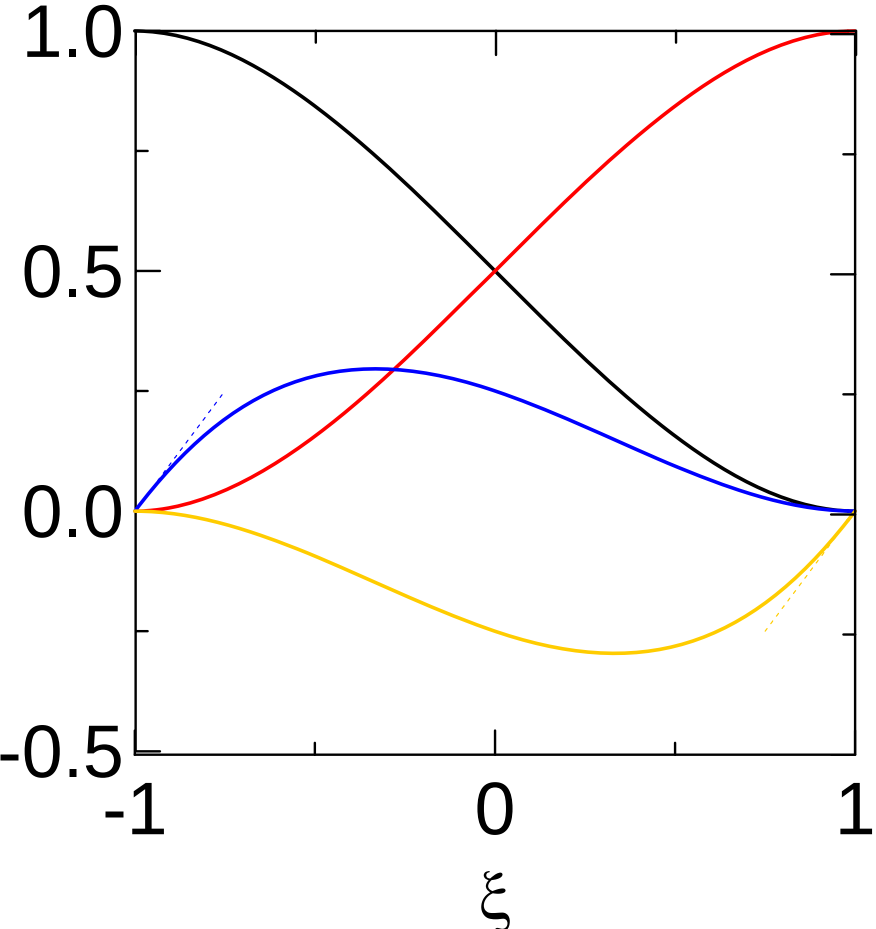
$$(Lu,v)=\frac{du}{dx}v(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

w metodzie Galerkina *v(x)* jest funkcją bazową.
dla warunków Dirichleta *u(1)=u(-1)=0*
usuwaliśmy z bazy funkcje, które nie znikały na prawym brzegu. *v(x)=0*

Teraz mamy parę funkcji dla których wyraz nie znika. Jaką?

$$u(\xi) = \underline{u_1^0\phi_1^0(\xi)} + u_1^1\underline{\phi_1^1(\xi)} + u_2^0\underline{\phi_2^0(\xi)} + u_2^1\underline{\phi_2^1(\xi)}$$

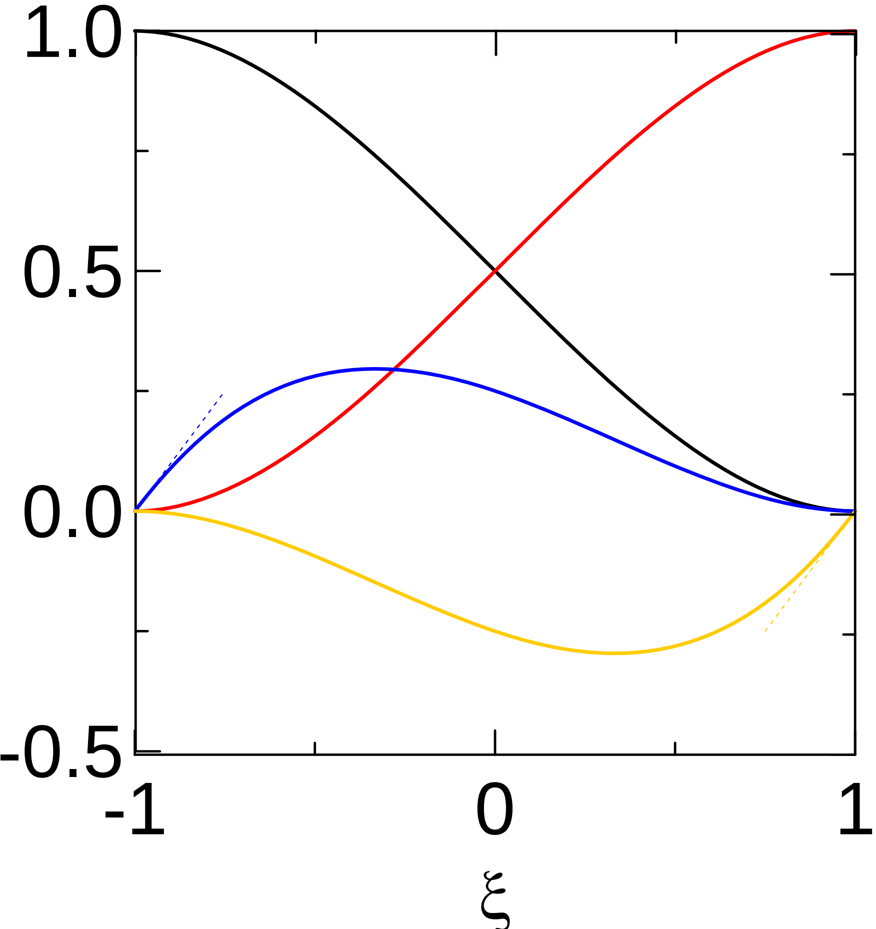
$$(Lu, v) = \frac{du}{dx}v(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \Big|$$



Teraz mamy parę funkcji,
dla których wyraz nie znika. Jaką?

$$u(\xi) = u_1^0 \underline{\phi_1^0(\xi)} + u_1^1 \underline{\phi_1^1(\xi)} + u_2^0 \underline{\phi_2^0(\xi)} + u_2^1 \underline{\phi_2^1(\xi)}$$

$$(Lu, v) = \frac{du}{dx} v(x) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} dx \Big|$$



Teraz mamy parę funkcji, dla których wyraz nie znika. Jaką?

$$\underline{\phi_2^0}, \underline{\phi_2^1}\Big|$$

no i co?

warunek Neumana dla funkcji kształtu Hermita

$$(Lu,v) = \frac{du}{dx}v(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

$$u(x) = \sum_j c_j\phi_j(x)$$

to trzeba dodać

to już mamy

$$S_{ij} = (L\phi_i,\phi_j) = \frac{d\phi_i}{dx}\phi_j(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx$$

$$S = \begin{pmatrix} E^1_{11} & E^1_{12} & E^1_{13} & E^1_{14} & 0 & 0 \\ E^1_{21} & E^1_{22} & E^1_{23} & E^1_{24} & 0 & 0 \\ E^1_{31} & E^1_{32} & E^1_{33}+E^2_{11} & E^1_{34}+E^2_{12} & E^2_{13} & E^2_{13} \\ E^1_{41} & E^1_{42} & E^1_{43}+E^2_{21} & E^1_{44}+E^2_{22} & E^2_{23} & E^2_{23} \\ 0 & 0 & E^2_{31} & E^2_{32} & E^2_{33} & E^2_{34} \\ 0 & 0 & E^2_{41} & E^2_{42} & E^2_{43} & E^2_{44} \end{pmatrix}$$

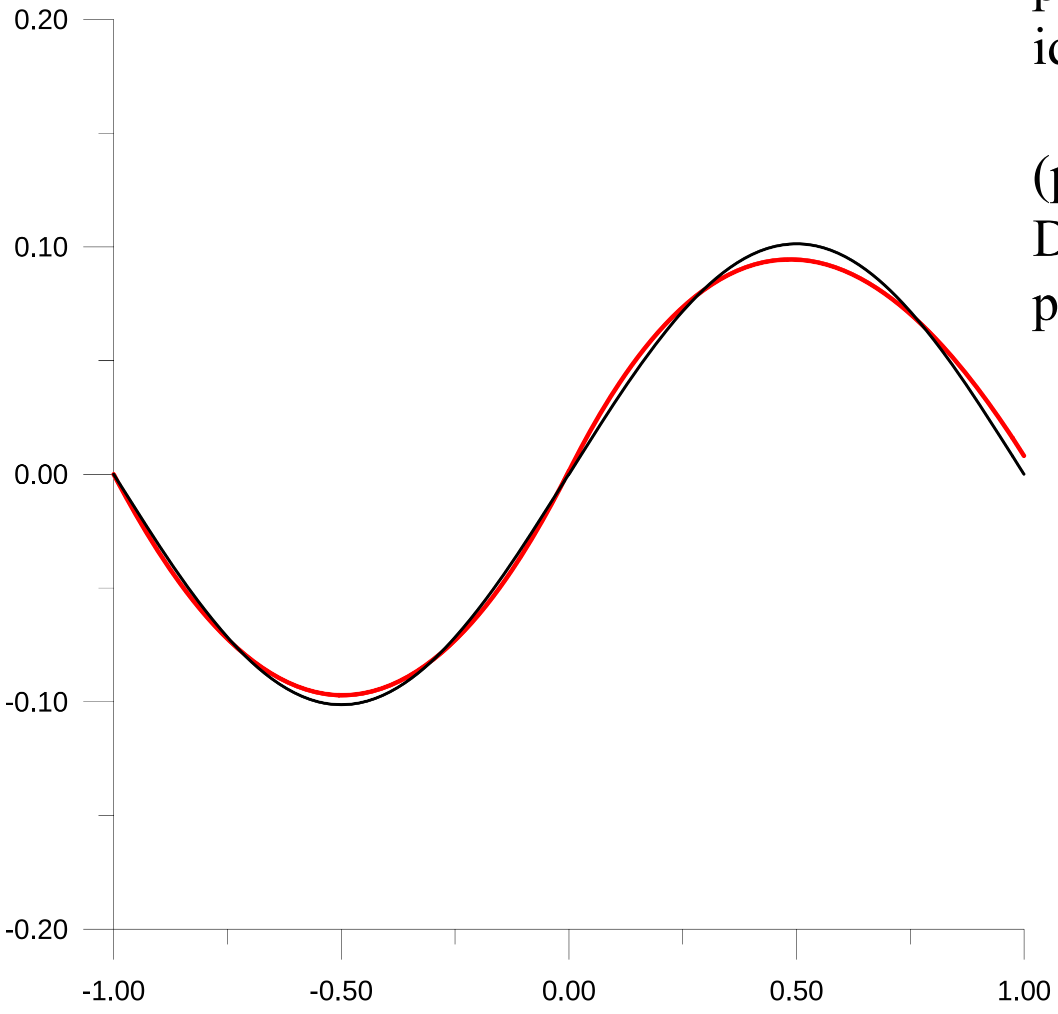
1

1

$$E^m_{ij} = \int_{-1}^{1}\frac{1}{J_m}[-\frac{df_i}{d\xi}\frac{df_j}{d\xi}]d\xi$$

$S_{56}=S_{56}+1$

Wynik: prawy warunek brzegowy Neumanna: 2 elementy

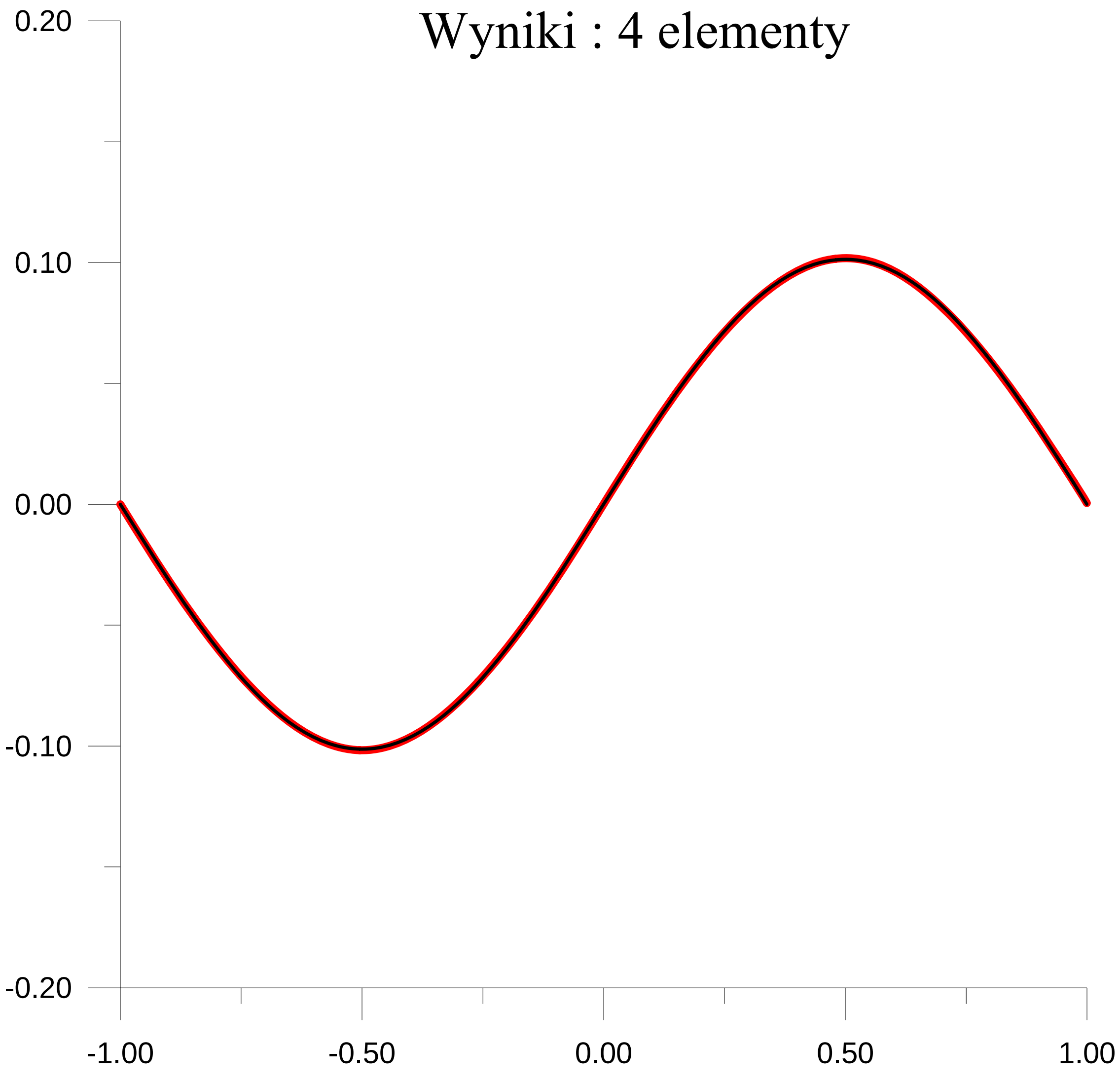


Znacznie lepiej
prawie dobrze, pochodna idealnie, wartość nie

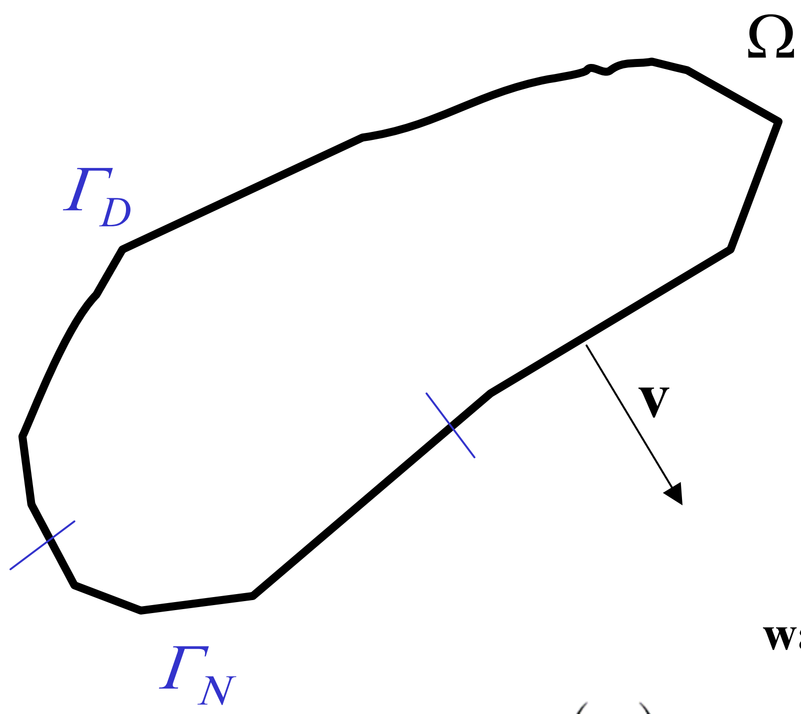
(poprzednio – przy warunkach Dirichleta – wartość była super pochodna taka sobie)

2 elementy
gdy więcej?

Wynik: prawy warunek brzegowy Neumanna



Metoda elementów skończonych, problemy dwuwymiarowe



problem modelowy:

$$-\nabla^2 u + a_0 u = f\Big|_{\text{w } \Omega}$$

warunki brzegowe:

$$u(x) = g_D(x)\Big| \quad \text{na } \Gamma_D \qquad \text{Dirichleta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = g_N(x)\Big| \quad \text{na } \Gamma_N \qquad \text{Neumanna}$$

problem ma jednoznaczne rozwiązanie, jeśli brzeg Γ_D nie ma zerowej długości.

gdyby na brzegu tylko warunek Neumanna (na pochodną):
rozwiązanie będzie niejednoznaczne, bo stałą można
dodać do u nie zmieniając wartości pochodnej

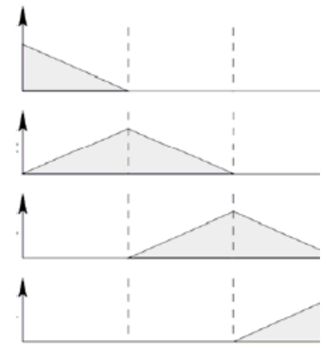
układ równań z macierzą sztywności w której
narzucono tylko warunek Neumanna - ? jak wygląda ?

stara folia

Warunki brzegowe: Neuman

$$u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

$$v_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \bigcup K_{i+1} \end{cases}$$



$$u'(x) = \sum_j y_j v_j'(x)$$

$$u'(x = x_1) = C$$

tylko v_1 oraz v_2 wnoszą przyczynek do pochodnej na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

pierwszy wiersz macierzy S

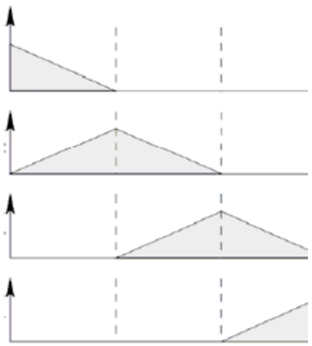
(-1/h_2 1/h_2 0 0 0 ....) prawa strona pierwszy wiersz F : C

stara folia

Warunki brzegowe: Neuman

$$u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

$$v_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \bigcup K_{i+} \end{cases}$$



$$u'(x) = \sum_j y_j v_j'(x)$$

$$u'(x = x_1) = C$$

tylko v_1 oraz v_2 wnoszą przyczynek do pochodnej na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

pierwszy wiersz macierzy S

($-1/h_2$ $1/h_2$ 0   0   0 ....)   prawa strona pierwszy wiersz F : C

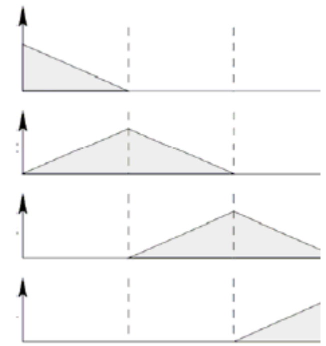
taki pierwszy wiersz dostaniemy ze składania macierzy lokalnych w równaniu u''(x)= - ρ(x)

stara folia

Warunki brzegowe: Neuman

$$u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

$$v_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \bigcup K_{i+} \end{cases}$$



$$u'(x) = \sum_j y_j v_j'(x)$$

$$u'(x = x_1) = C$$

tylko v_1 oraz v_2 wnoszą przyczynek do pochodnej na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

taki pierwszy wiersz dostaniemy ze składania macierzy lokalnych w równaniu u''(x)= - ρ(x)

pierwszy wiersz macierzy S

($-1/h_2$ $\;1/h_2$ $\;0\;\;0\;\;0$ ....) prawa strona pierwszy wiersz F : C

warunek Neumanna= tzw. naturalny wb (*natural bc*)

naturalny bo:
nie zmienia macierzy sztywności

weźmy z lewej strony warunek naturalny, z prawej Dirichleta

macierz sztywności po złożeniu i narzucewniu war.b. dla funkcji liniowych i trzech węzłów w 1D :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \text{pochodna na lewym końcu} \\ F_2 \\ \text{wartość na prawym końcu} \end{pmatrix}$$

warunek Dirichleta wymaga interwencji w macierz sztywności
w.D.= istotny warunek brzegowy (*essential BC)*

$det=1/h_2h_3$

weźmy warunek naturalny, z obu stron

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \text{pochodna na lewym końcu} \\ F_2 \\ \text{pochodna na prawym końcu} \end{pmatrix}$$

$$\det = -\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) + \frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_3}\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_2}$$

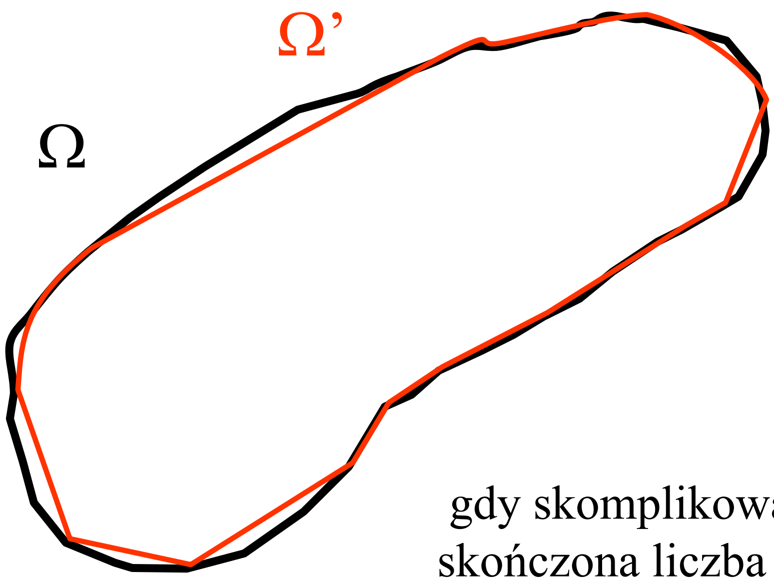
weźmy warunek naturalny, z obu stron

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} \end{pmatrix}$$

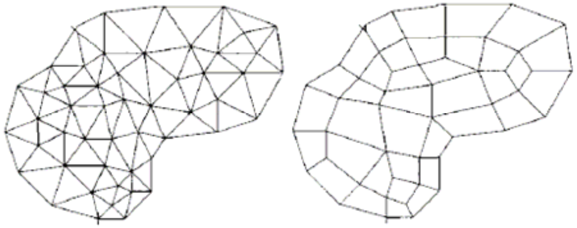
$$\det = -\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) + \frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_3}\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_2}$$

macierz sztywności po złożeniu jest osobliwa!
UR nie ma jednoznacznego rozwiązania !

Przybliżenie brzegu



gdy skomplikowany brzeg:
skończona liczba elementów
(trójkątów, czworokątów itp)
opisuje problem tylko w sposób
przybliżony
= przybliżone warunki brzegowe



gdy brzeg opisany funkcja wielomianową
problem można opisać przypisać za pomocą
skończonej liczby elementów krzywoliniowych

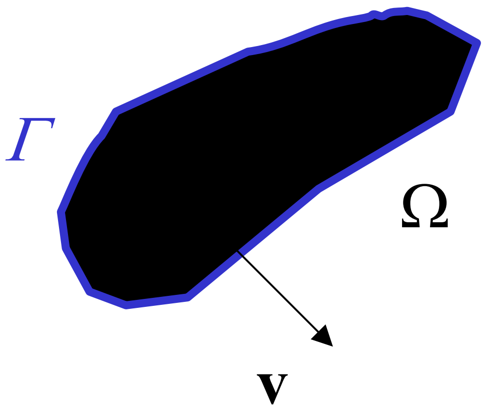
$$-\nabla^2 u + a_0 u = f$$

Słabe sformułowanie problemu z funkcją wagową *w(x)*

$$\int_\Omega \left(-\nabla^2 u + a_0 u\right) w(x) d\Omega = \int_\Omega f(x) w(x) d\Omega$$

całkowanie macierzy sztywności

całkowanie przez części, 2 i więcej wymiary



Tw. Gaussa

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\Gamma = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{A} d\Omega$$

strumień pola wektorowego przez zamkniętą powierzchnię = dywergencja pola wewnątrz objętości ograniczonej powierzchnią

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\Gamma = \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{A}d\Omega$$

a,b – dwie funkcje skalarne

tożsamość:

$$\nabla\cdot(a\nabla b) = a\nabla^2 b + (\nabla a)\cdot(\nabla b)$$

scałkować po objętości

$$\int_\Omega \nabla\cdot(a\nabla b)d\Omega = \int_\Gamma a\nabla b d\Gamma$$

$$\int_\Gamma a\nabla b d\Gamma = \int_\Omega a\nabla^2 b d\Omega + \int_\Omega \nabla a\cdot\nabla b d\Omega$$

całkowanie przez części w 2D

W 1D

$$a\frac{db}{dx}\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a\frac{d^2b}{dx^2}dx + \int_{x_1}^{x_2}\frac{da}{dx}\frac{db}{dx}dx$$

całka brzegowa w 1D: brzeg składa się z dwóch punktów wracamy do słabej formy równania różniczkowego

$$\int_\Omega \left(-\nabla^2 u + a_0 u\right) w(x) d\Omega = \int_\Omega f(x) w(x) d\Omega$$

całkowanie przez części:

$$\int_\Gamma a \nabla b d\Gamma = \int_\Omega a \nabla^2 b d\Omega + \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla b d\Omega$$

$$-\int_\Omega (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla w) d\Omega - \int_\Gamma (\nabla u) w d\Gamma$$

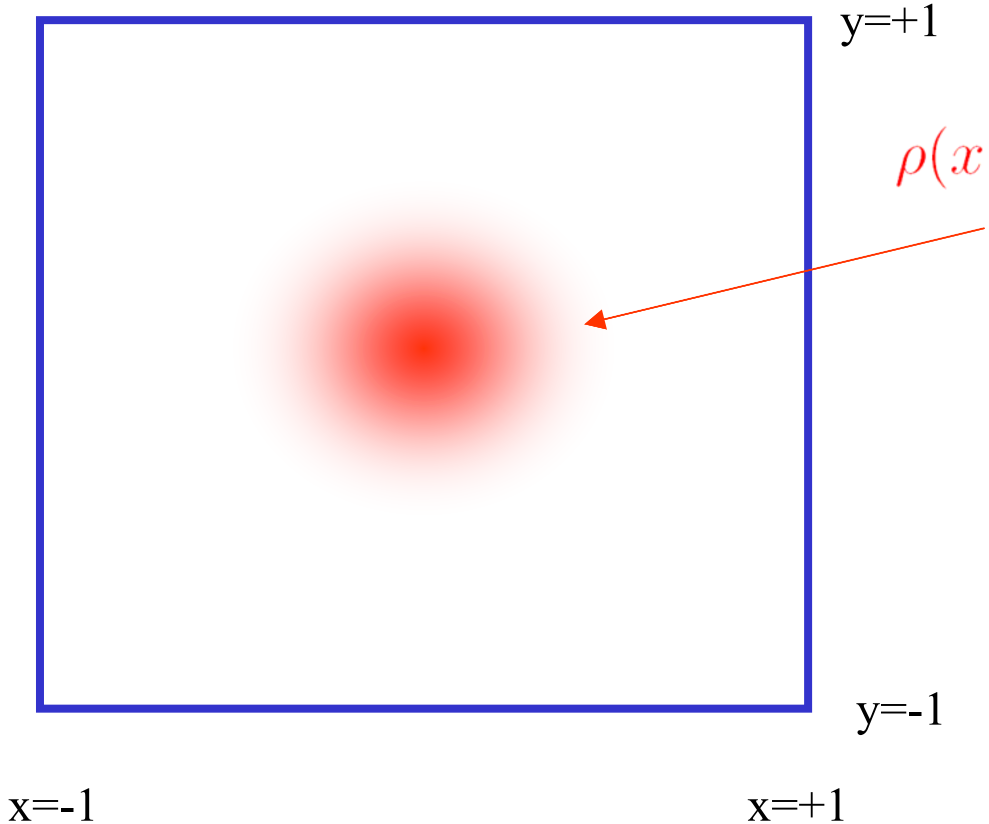
redukuje rząd pochodnych

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + a_0 u w)\, d\Omega = \int_\Omega f w d\Omega + \int_\Gamma w \nabla u d\Gamma$$

na części Γ: w. brzegowy na wartość u.
Całka po Γ znika jeśli *w*(na Γ)=0 . U Galerkina – *w* takie jak funkcje bazowe.
Jeśli rozwiązanie *u* nie znika na brzegu, całka brzegowa istnieje i trzeba się z nią uporać. Z całkami tego typu walczyć będziemy w dalszej części wykładu, przy metodzie elementów brzegowych.

Pierwszy problem:

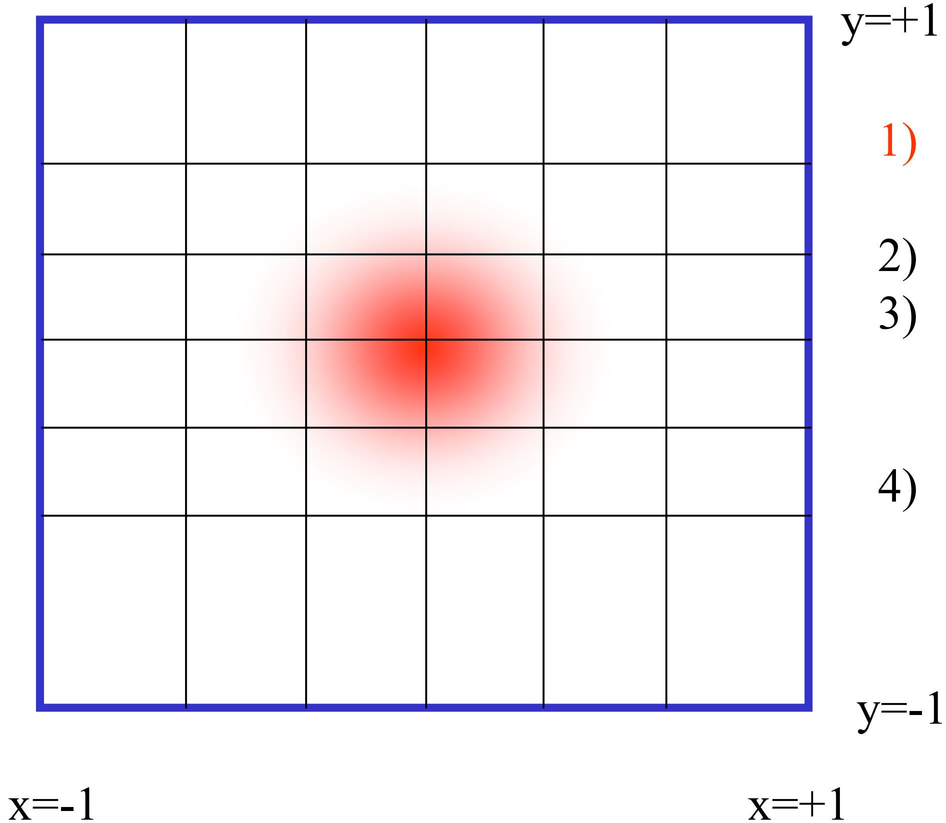
uziemiona skrzynka potencjał u=0



$$\rho(x,y) = \exp(-50(x^2+y^2))$$

$$\nabla^2 u = -\rho(x,y)$$

Pierwszy problem:

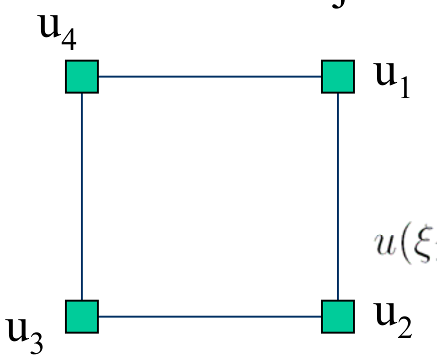


1) podzielić płaszczyznę na elementy (zaczniemy od czworokątnych el.)
2) wybrać funkcje kształtu
3) policzyć macierze sztywności i wektory obciążeń dla wszystkich elementów
4) złożyć globalną macierz sztywności i globalny wektor obciążeń

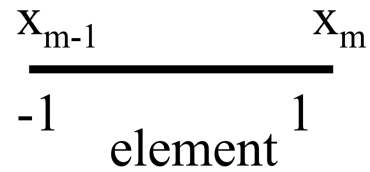
$$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$$

2) wybrać funkcje kształtu

najniższy rząd na kwadratowym elemencie:
biliniowe funkcje kształtu

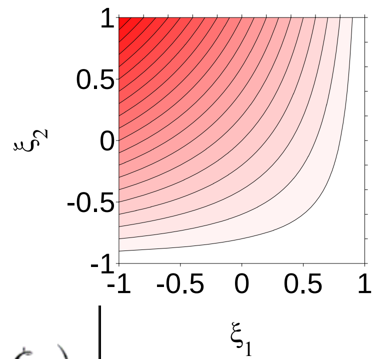


1D:

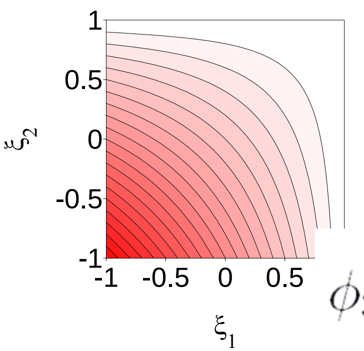


$\phi_1 = 1/2 - 1/2\ \xi$
$\phi_2 = 1/2 + 1/2\ \xi$

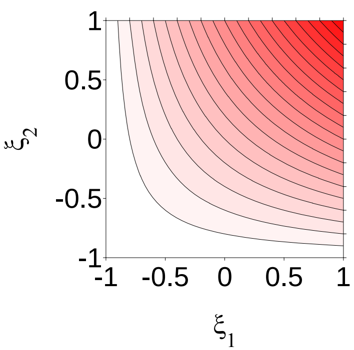
$$u(\xi_1,\xi_2) = u_1\phi_1(\xi_1,\xi_2) + u_2\phi_2(\xi_1,\xi_2) + u_3\phi_3(\xi_1,\xi_2) + u_4\phi_4(\xi_1,\xi_2)$$



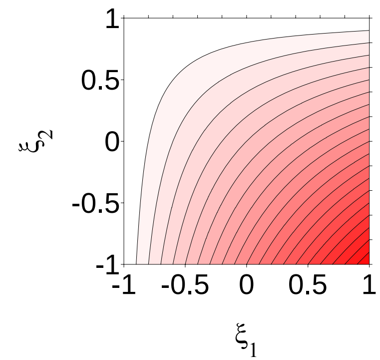
$$\phi_4(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$



$$\phi_3(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$



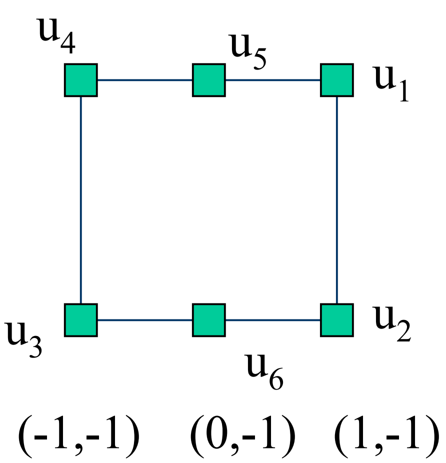
każda z funkcji kształtu:
osiąga wartość 1 w jednym za narożników
zeruje się w pozostałych



$$\phi_1(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)$$

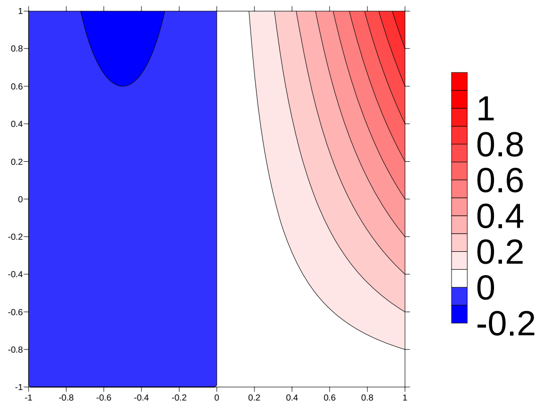
wyższego rzędu: iloczyny funkcji bazowych Lagrange'a w obydwu wymiarach

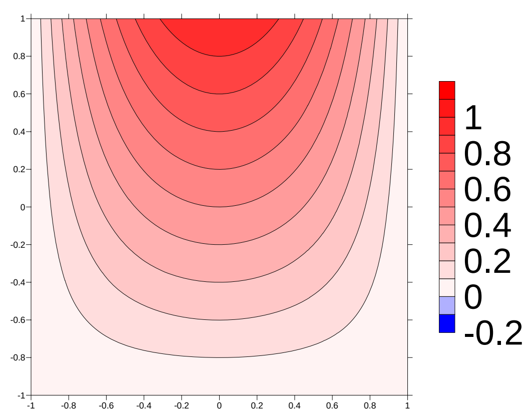
np. kwadratowe w x, liniowe w y



$$u(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{6}u_i\phi_i(\xi_1,\xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2}(\xi_2+1)\times\frac{(\xi_1)(\xi_1+1)}{2}$$

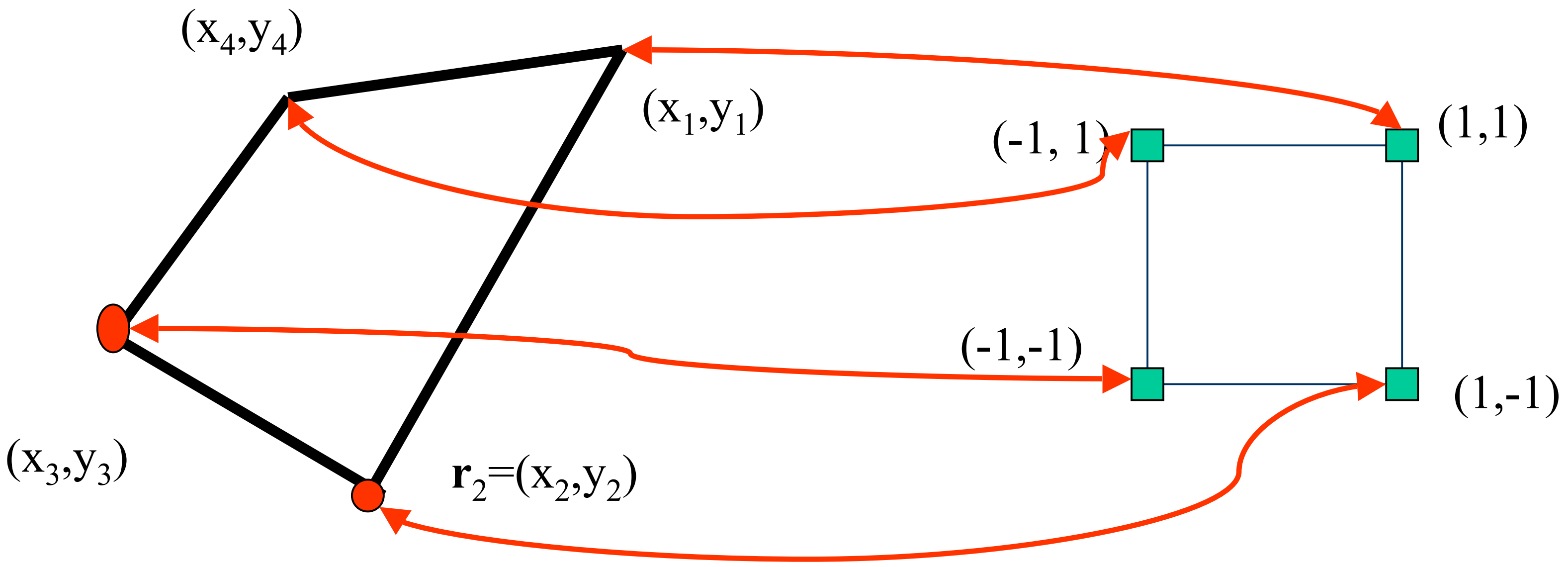




itd.

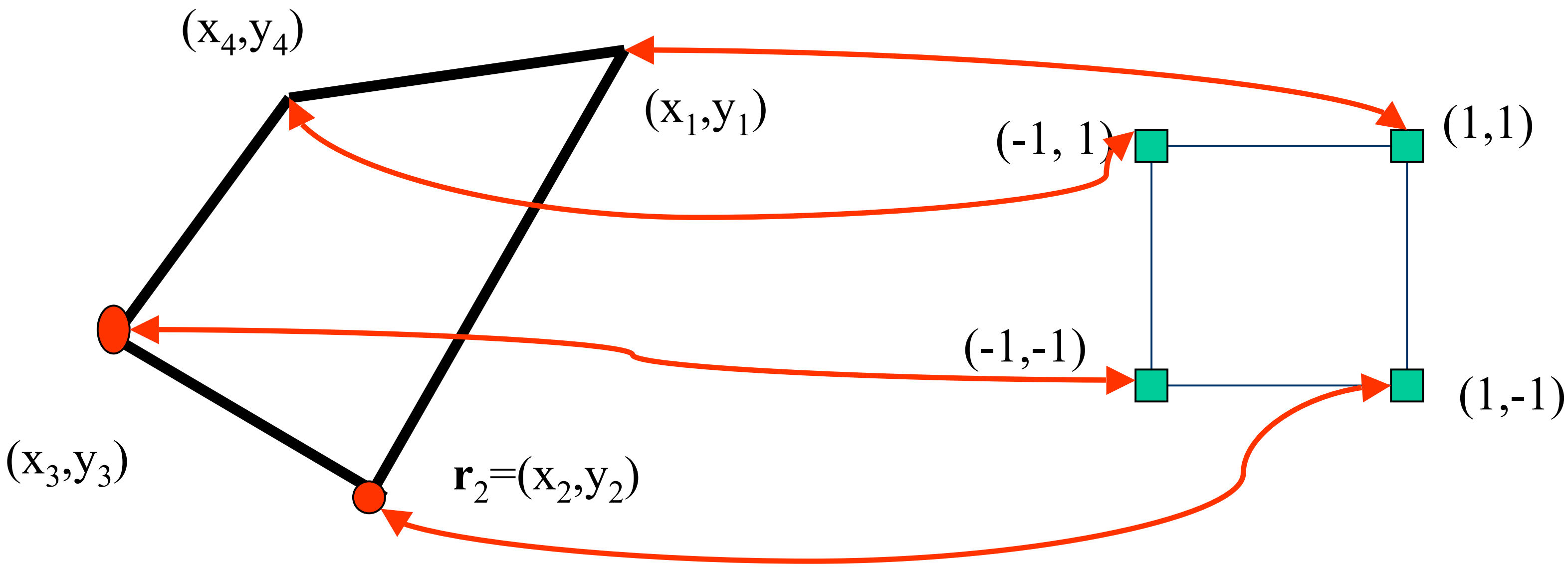
$$\phi_{\cancel{6}5}(\xi_1,\xi_2)=-\frac{1}{2}(\xi_2+1)\times(\xi_1-1)(\xi_1+1)$$

3) transformacja elementu z przestrzeni referencyjnej



wzajemnie jednoznaczne mapowanie ??? Jak to zrobić?

3) transformacja elementu z przestrzeni referencyjnej



wzajemnie jednoznaczne mapowanie:??? Jak to zrobić? - zaskakująco łatwo

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{r}_i \phi_i(\xi) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

biliniowe funkcje kształtu (do mapowania zawsze, nawet gdy używane są później wyższe)

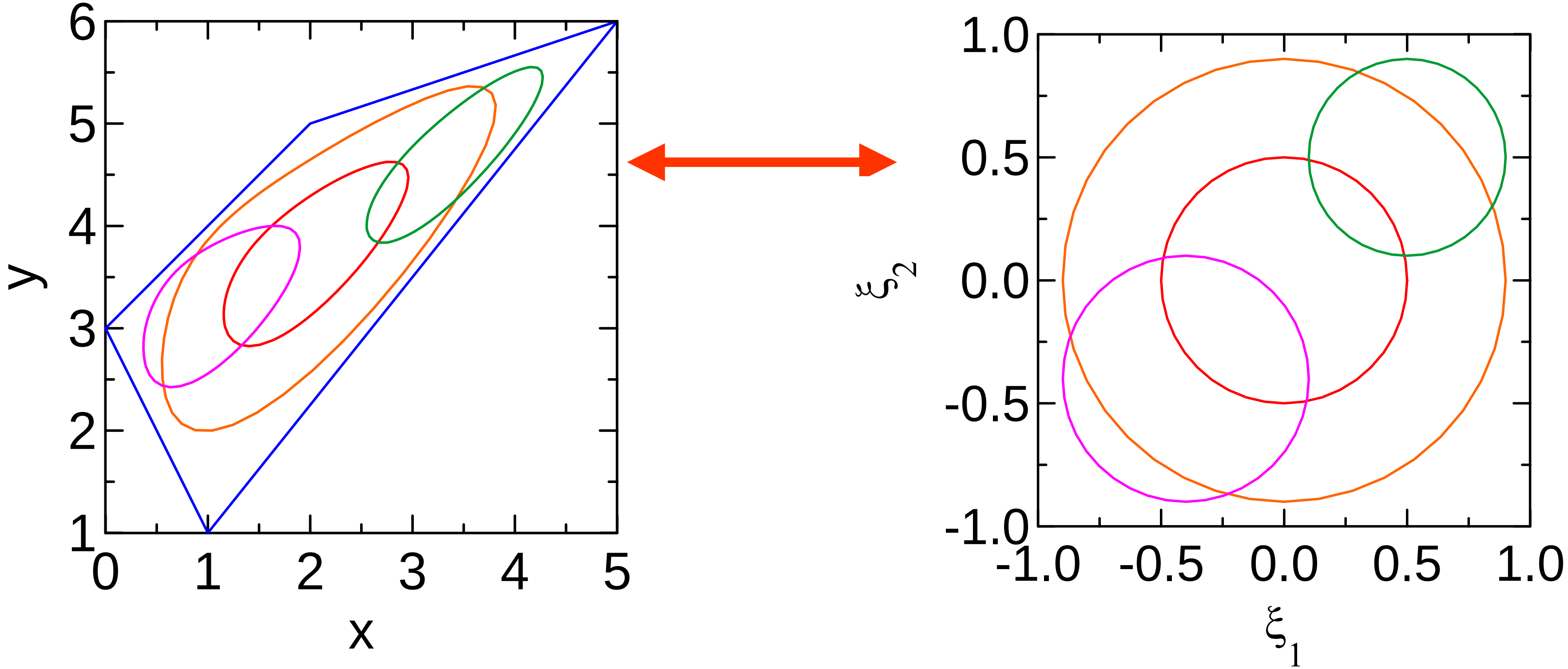
$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$

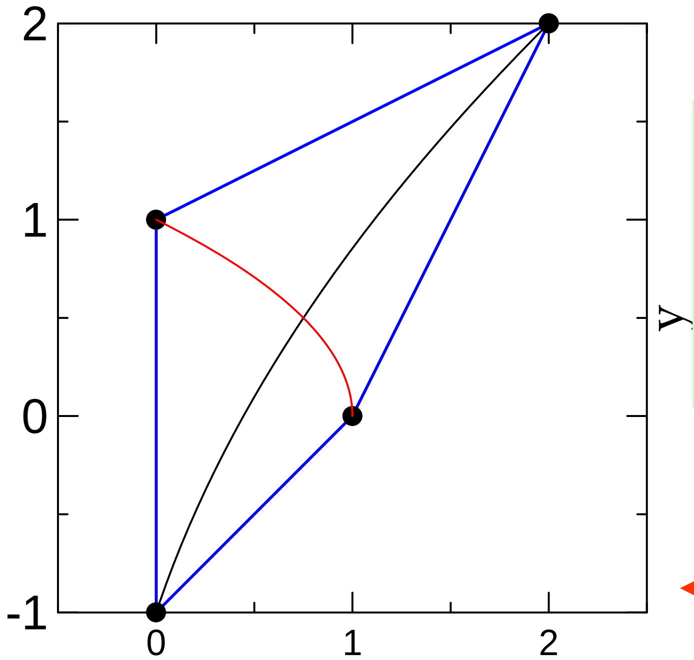
transformacja elementu do przestrzeni referencyjnej

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \sum_{i=1}^{4} \left(\begin{array}{c} x_i \\ y_i \end{array} \right) \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

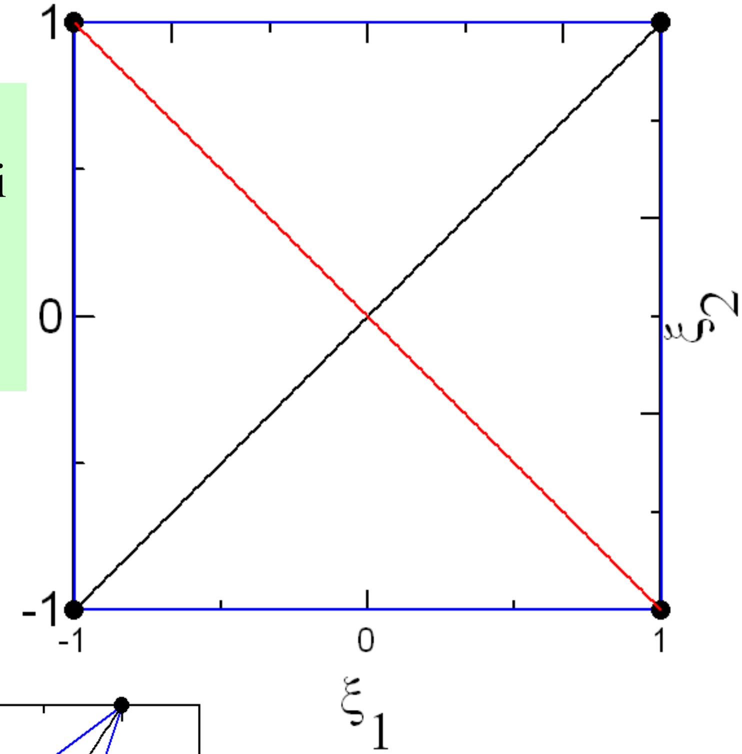
składanie narożników
: w każdym tylko 1 funkcja nie znika

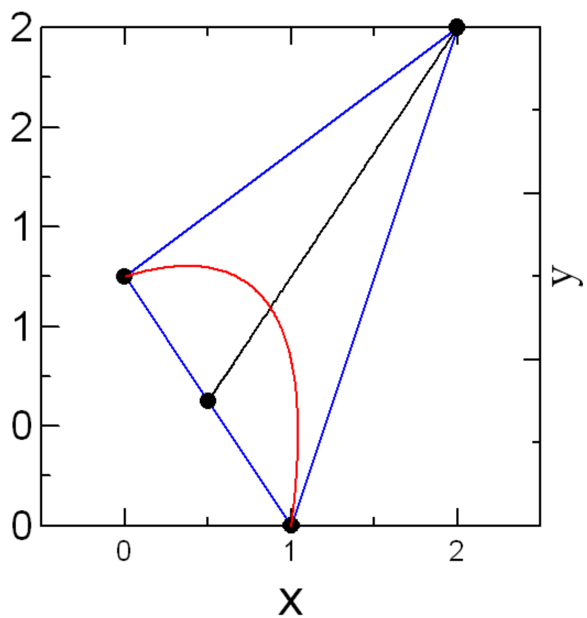


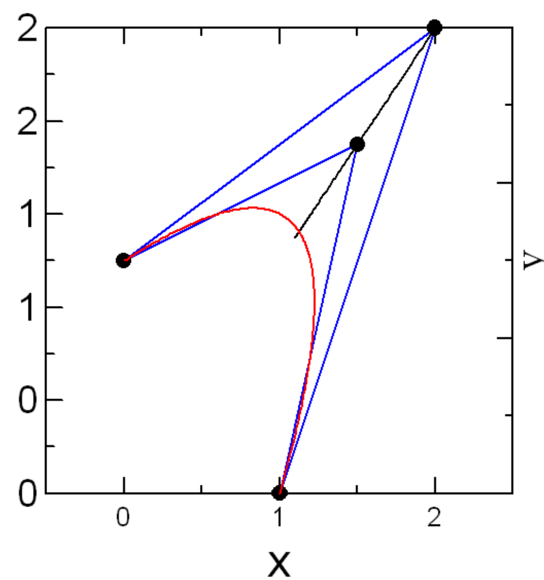
co się dzieje z przekątnymi? transformacja elementu do przestrzeni referencyjnej



przekształcenie nie jest liniowe i nie zachowuje równoległości prostych

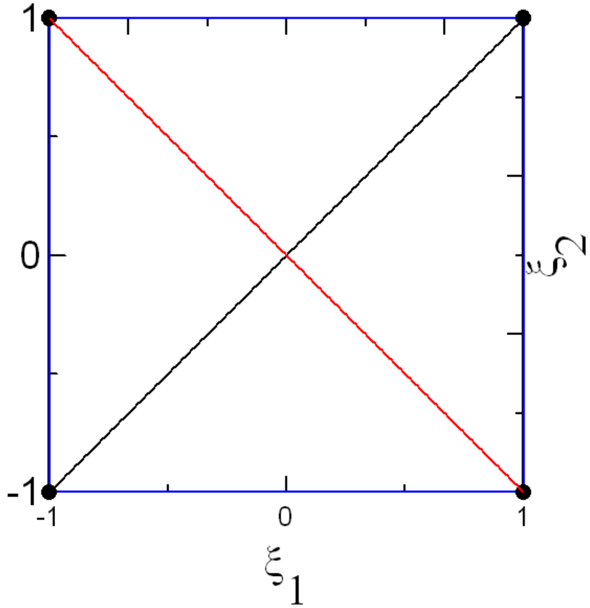


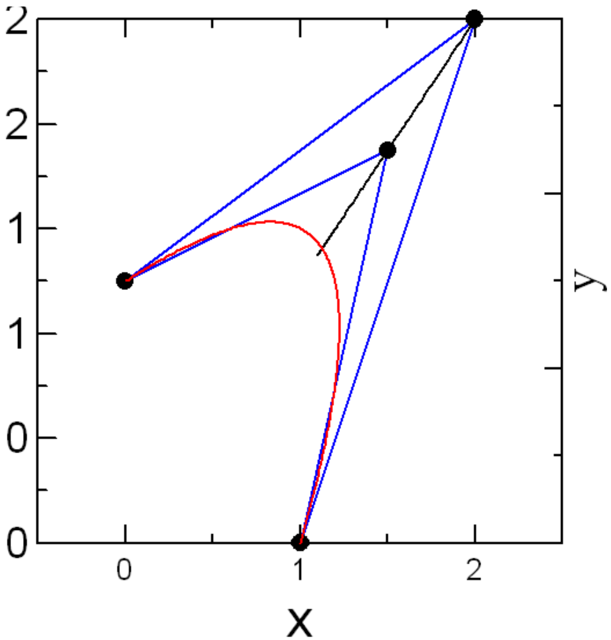


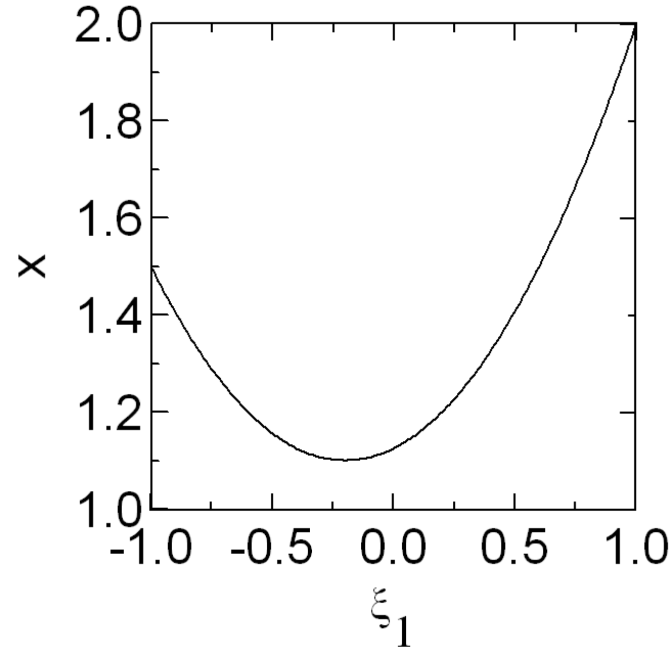


element wklęsły
wnętrze mapowane na zewnętrze,
nie chcemy takich elementów.
mają być wypukłe

element wklęsły niedobry -mapowanie nie jest bijekcją







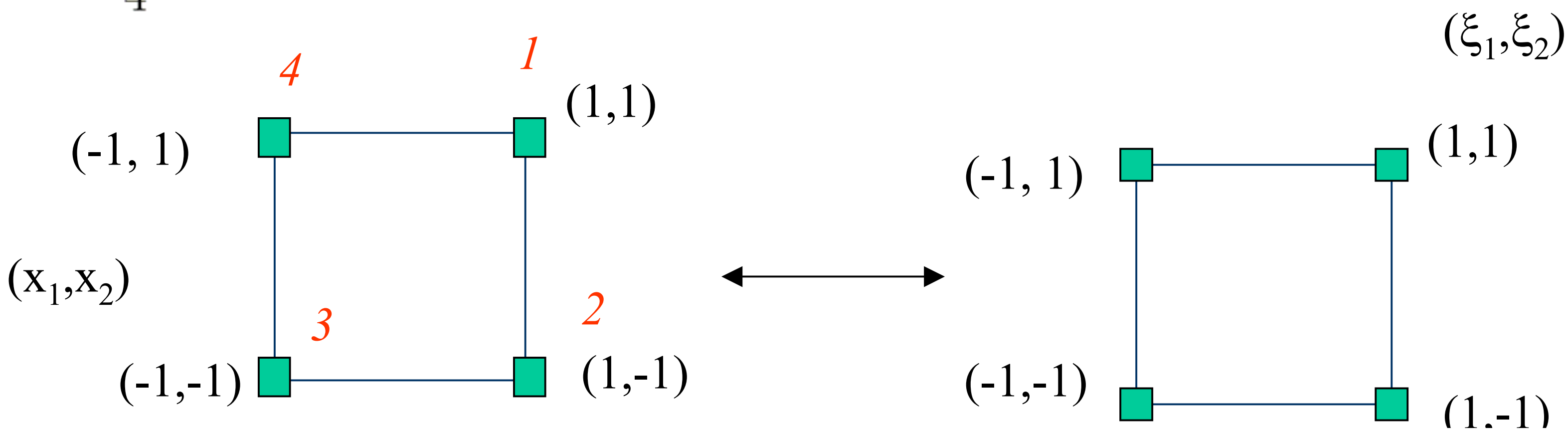
liczone wzdłuż antydiagonali

Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 1. tożsamość

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_3(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \phi_4(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$



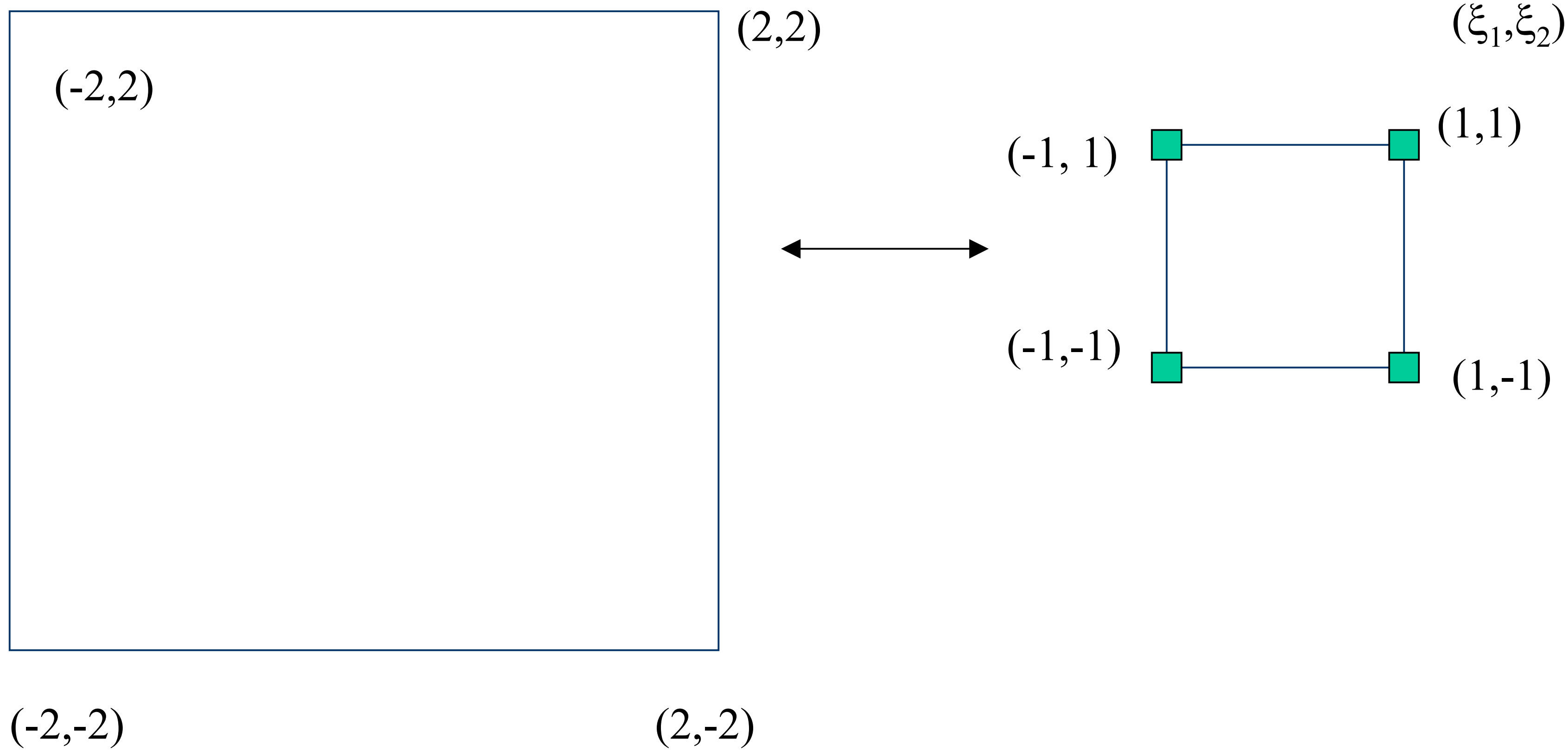
$$x = \frac{1}{4}\left[(1+\xi_1)(1+\xi_2) + (1+\xi_1)(1-\xi_2) - (1-\xi_1)(1-\xi_2) - (1-\xi_1)(1+\xi_2)\right]$$

$$x = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_1) - 2(1-\xi_1)\right] = \xi_1$$

$$y = \frac{1}{4}\left[(1+\xi_1)(1+\xi_2) - (1+\xi_1)(1-\xi_2) - (1-\xi_1)(1-\xi_2) + (1-\xi_1)(1+\xi_2)\right]$$

$$y = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_2) - 2(1-\xi_2)\right] = \xi_2$$

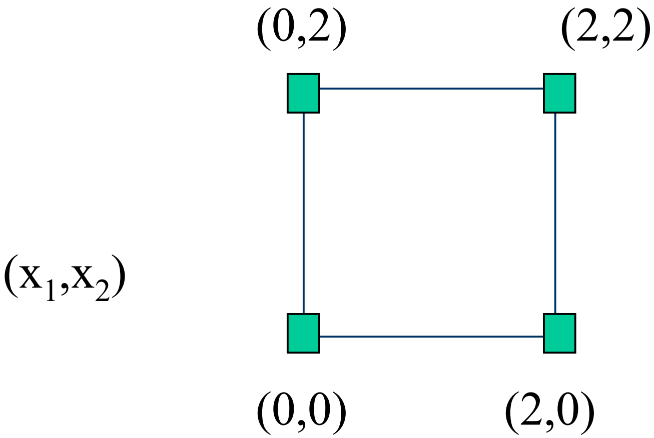
Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 2 powiększenie

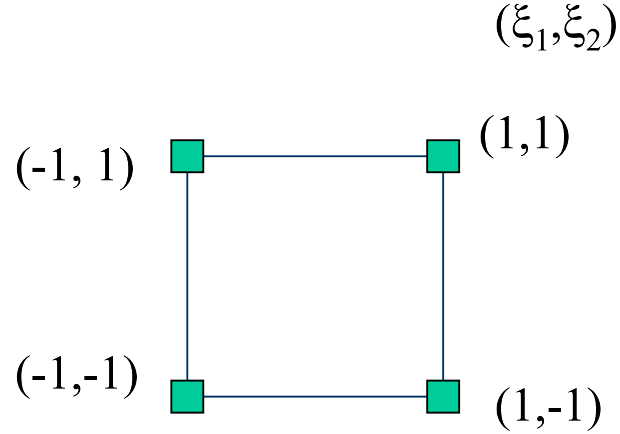


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$x = 2\xi_1$$
$$y = 2\xi_2$$

Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 3 przesunięcie

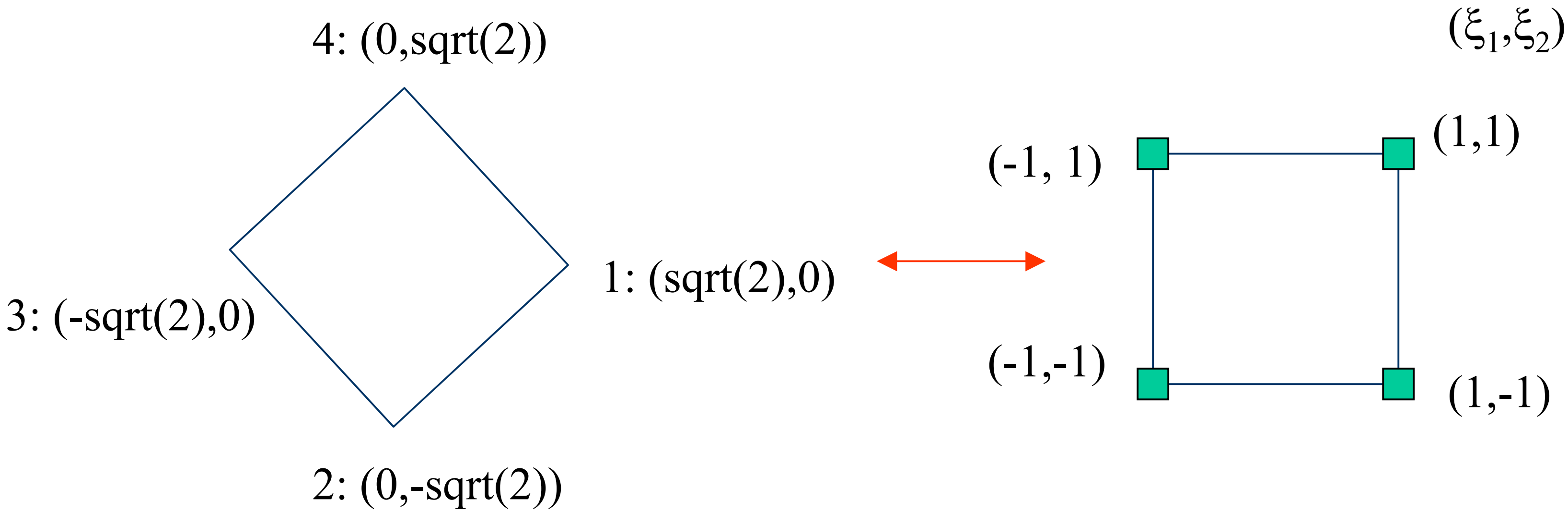




$$x = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_1)(1+\xi_2) + 2(1+\xi_1)(1-\xi_2)\right] = \xi_1 + 1$$

$$y = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_1)(1+\xi_2) + 2(1-\xi_1)(1+\xi_2)\right] = \xi_2 + 1$$

Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 4 obrót



$$x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}(1+\xi_1)(1+\xi_2) - \sqrt{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2)\right)\Bigg| \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\xi_1+\xi_2\right)\Bigg|$$

$$y = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2) + \sqrt{2}(1-\xi_1)(1+\xi_2)\right)\Bigg| \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\xi_1+\xi_2\right)\Bigg|$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$\theta = -\pi/4$

Macierz sztywności-całkowanie w przestrzeni referencyjnej

f=-ρ(x,y)

bo warunki brzegowe

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + \cancel{a_0} uw)\, d\Omega = \int_\Omega f w d\Omega + \cancel{\int_\Gamma w \nabla u d\Gamma}$$

bo tego wyrazu nie ma w równaniu (Poissona)

$$u(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{m} u_i \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

Galerkin: $w = \phi_j(\xi_1, \xi_2)$

do macierzy sztywności

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \left(\sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) \times \left(\sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) + \left(\sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\right) \times \left(\sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\right)$$