Metody Numeryczne
Lab 1
Rozwiązywanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Kraków, 29.02.2024

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science and Technology

Sprawozdanie

- Cel ćwiczenia np. Rozwiązanie układu równań liniowych metodą Gaussa-Jordana
- Opis problemu (Jakie równianie, układ, macierz jest rozwiązywana i jakie wielkości należy wyznaczyć)
- Opis metody
- Wyniki (wykresy)
- Podsumowanie

Szukamy rozwiązania układu:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{gathered}
$$

gdzie a_{ij} - element macierzowy macierzy współczynników $A = [a_{ij}]$, x_i - niewiadoma, będąca i-tym elementem wektora x, b_i - wyraz wolny, będący i- tym elementem wektora b.

Równanie można zapisać macierzowo:

$$Ax = b$$

Metoda Eliminacji Gaussa

Układ pierwotny:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}\\
a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\\
a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Odejmujemy od $i$go wiersza ($i = 2,3,\dots,n$) pierwszy wiersz przemnożony przez

$$
l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}.
$$

Dostajemy układ:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)}\\
a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\\
a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Metoda Eliminacji Gaussa

Od $i$go wiersza ($i = 3, 4, \dots, n$) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

Kontynuując te operacje otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n &= b_1^{(n)} \\
a_{22}^{(n)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(n)}x_n &= b_2^{(n)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\
a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

Dzięki sprowadzeniu układu równań do postaci górnotrójkątnej rozwiązania x_i wyrażają się równaniami:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{n}},$$

$$x_i = \frac{b_i^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} x_j}{a_{ii}^{(n)}}$$

Metoda Eliminacji Gaussa-Jordana

Metoda podobna do metody Gaussa, jednak doprowadzamy macierz $A^{(1)}$ do macierzy jednostkowej w kroku $n$tym.

Dla pierwszej iteracji: pierwszy wiersz dzielimi przez $\omega_1 = a_{11}^{(1)}$ i od igo wiersza $(i = 2, 3, \dots, n)$ odejmujemy pierwszy wiersz przemnożony przez $\omega_{i1} = a_{i1}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)} x_n &= b_1^{(2)} \\
a_{22}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\
a_{n2}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n &= b_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Dla drugiej iteracji: pdrugi wiersz dzielimi przez $\omega_2 = a_{22}^{(2)}$ i od igo wiersza $(i = 1, 3, \dots, n)$ odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez $\omega_{i1} = a_{i1}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
x_1 + 0x_2 + \cdots + a_{1n}^{(3)} x_n &= b_1^{(3)} \\
x_2 + \cdots + a_{2n}^{(3)} x_n &= b_2^{(3)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\
a_{n2}^{(3)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(3)} x_n &= b_n^{(3)}.
\end{aligned}$$

Metoda Eliminacji Gaussa-Jordana

Ostatecznie dostajemy:

$$x_1 = b_1^{(n)}$$
$$x_2 = b_2^{(n)}$$
$$\dots$$
$$x_n = b_n^{(n)}$$

Wektor współczynników b_i po n operacjach jest równy wektorowi niewiadomych x_i