 <b>AGH</b>	<b>Akademia Górniczo-Hutnicza</b> <b>Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej</b> <b>Fizyka Techniczna</b> <b>Podstawy fizyki teoretycznej</b>	<b>Zrealizował:</b> Ryś Przemysław
Rok akademicki: 2022/2023	Semestr VI	Grupa laboratoryjna nr 2
Temat projektu: Projekt 1: Symulacja ruchu wahadła o stałej długości		
Data wykonania projektu 15.05.2023	Data oddania sprawozdania 15.05.2023	Ocena

## 1 Wstęp teoretyczny

Metodą zaimplementowaną w celu wykonania projektu była metoda Rungego-Kutty 4 rzędu skrótowo nazywana RK4. Pozwala ona rozwiązywać równania jak i układy równań różniczkowych 1 rzędu poprzez kroki czasowe popelniając przy tym niewielki błąd, na które to zawsze podatne są wyniki naszych rachunków w przypadku prowadzenia obliczeń numerycznych. W każdym kroku używa się wartości pochodnej funkcji, aby oszacować wartość funkcji w kolejnym punkcie. Metoda umożliwia również możliwość obliczenia równań różniczkowych wyższych rzędów, w zamian za dodatkowe równanie, które będzie przypisaniem do nowej zmiennej pochodnej szukanej funkcji. W wyniku takiego jednokrotnego przypisania schodzimy rzędem równania różniczkowego o jeden. Postępując tak kilkakrotnie możemy sprowadzić równanie różniczkowe rzędu  $n$  do układu  $n$  równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Rozwiązanie w  $i + 1$  kroku algorytmu ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad (1)$$

, gdzie:  $y_i$  jest rozwiązaniem w kroku poprzednim,  $\Delta t$  jest krokiem czasowym symulacji, natomiast współczynniki  $k_\alpha$  definiowane na potrzeby metody mają postać:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (2)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_1\right) \quad (3)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_2\right) \quad (4)$$

$$k_4 = f(t_i + \Delta t, y_i + \Delta t \cdot k_3) \quad (5)$$

## 2 Opis problemu

Postawionym zadaniem jest policzyć numerycznie dla wahadła matematycznego przedstawionego na rysunku 1:

- trajektorię dla różnych wychyleń początkowych z położenia równowagi oraz porównać wynik z wynikiem analitycznym,
- energię: kinetyczną, potencjalną, całkowitą inaczej nazywaną Hamiltonianem,
- trajektorię w przestrzeni konfiguracyjnej, to znaczy wykres trajektorii od jej pochodnej tj. prędkości.

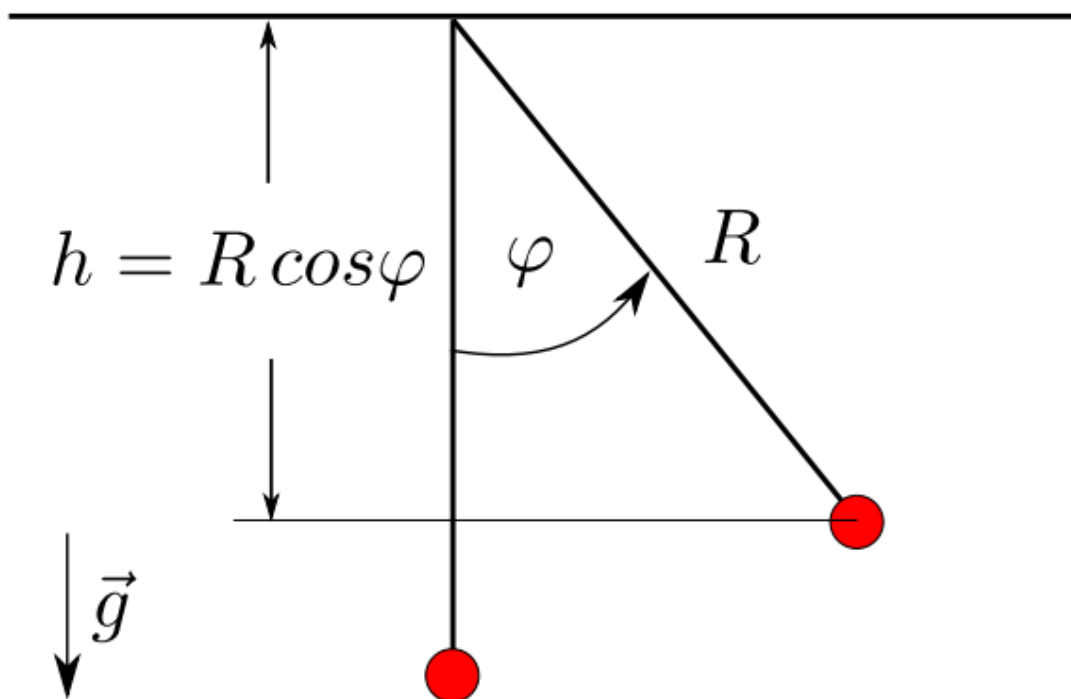
Równanie ruchu wahadła dane jest wzorem:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \sin(\varphi) = 0, \quad (6)$$

gdzie:  $g$  - przyspieszenie ziemskie,  $R$  - długość wahadła. Korzystając z wyżej zdefiniowanej metody RK4 możemy zamienić powyższe równanie różniczkowe drugiego rzędu na układ równań różniczkowych rzędu pierwszego stosując zapis:

$$\dot{\varphi} = v_\varphi \quad (7)$$

$$\dot{v}_\varphi = -\frac{g}{R} \sin(\varphi) \quad (8)$$



Rys. 1: Ilustracja wahadła, którego ruch badany jest w symulacji numerycznej metodą RK4.

Zagadnienie jest trudne by móc wyznaczyć dokładne analityczne rozwiązanie, ponieważ równanie 6 jest równaniem różniczkowym nieliniowym, zatem nie możemy do niego zastosować ogólnie poznanych metod. Niemniej problem ten możemy rozwiązać stosując rozwinięcie funkcji sinus w szereg Taylora wokół zera zwany szeregiem Maclaurina (wzór 9)

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (9)$$

W przypadku małych wychyleń początkowych tj. do 5 stopni ( $x$  jest kątem w radianach) możemy zaniedbać wyrazy wyższych rzędów i tym samym aproksymować (przybliżyć) wartość funkcji sinus jej argumentem zadanym w radianach ( $\sin(x) \approx x$ ). w wyniku czego otrzymujemy do rozwiązania jednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu, które rozwiążemy metodą "przewidywania rozwiązania" postaci  $\varphi = A \cdot e^{r \cdot t}$ . Rozwiązując równanie charakterystyczne i podstawiając  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$  otrzymujemy, iż  $r = \pm i \cdot \omega$ . A zatem:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t} \quad (10)$$

Po elementarnych przekształceniach możemy przekształcić to rozwiązanie do postaci:

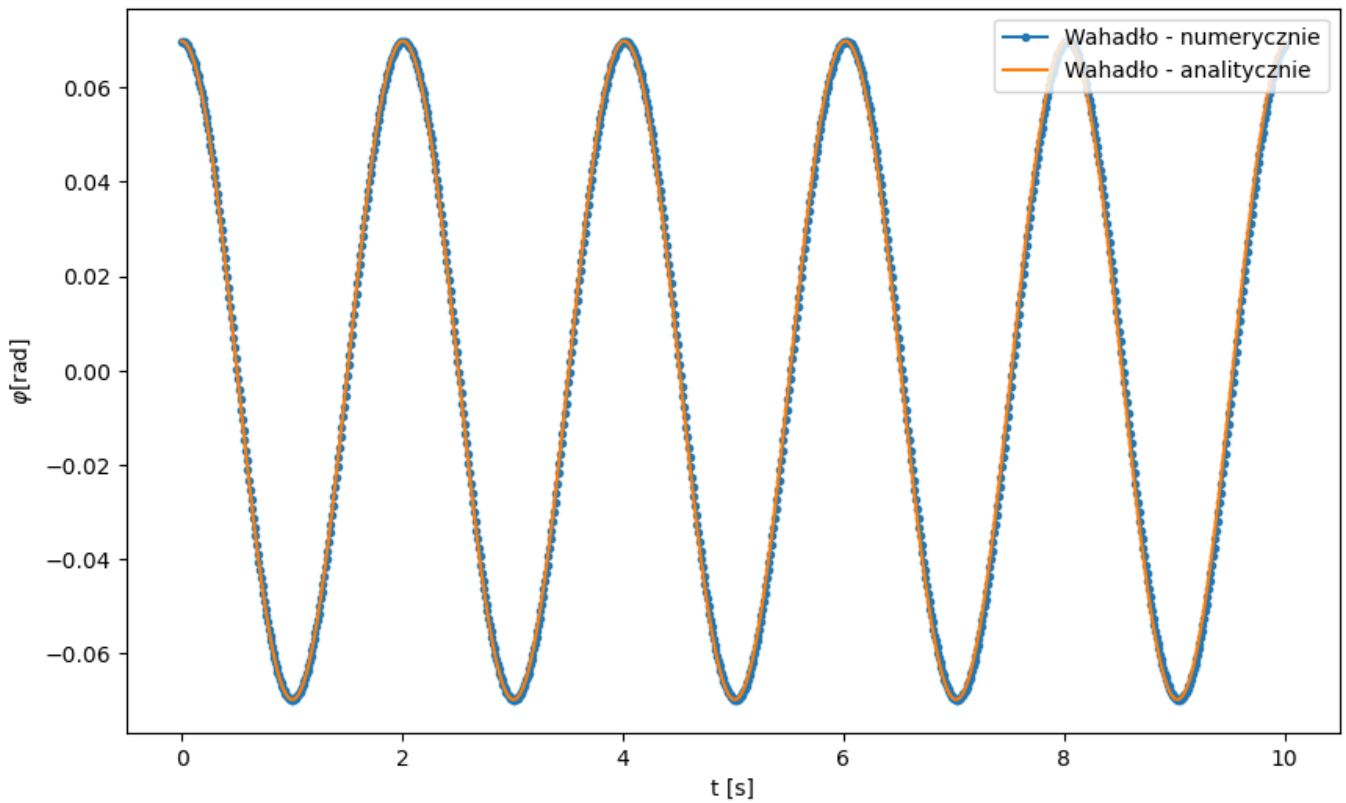
$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) \quad (11)$$

, gdzie  $\varphi_0$  jest amplitudą wychylenia, a  $\psi$  fazą początkową, która dla naszego przypadku równa jest 0, ponieważ ciało w chwili początkowej ( $t = 0$ ) jest wychylone o amplitudę, to funkcja cosinus musi wynosić 1.

### 3 Wyniki symulacji

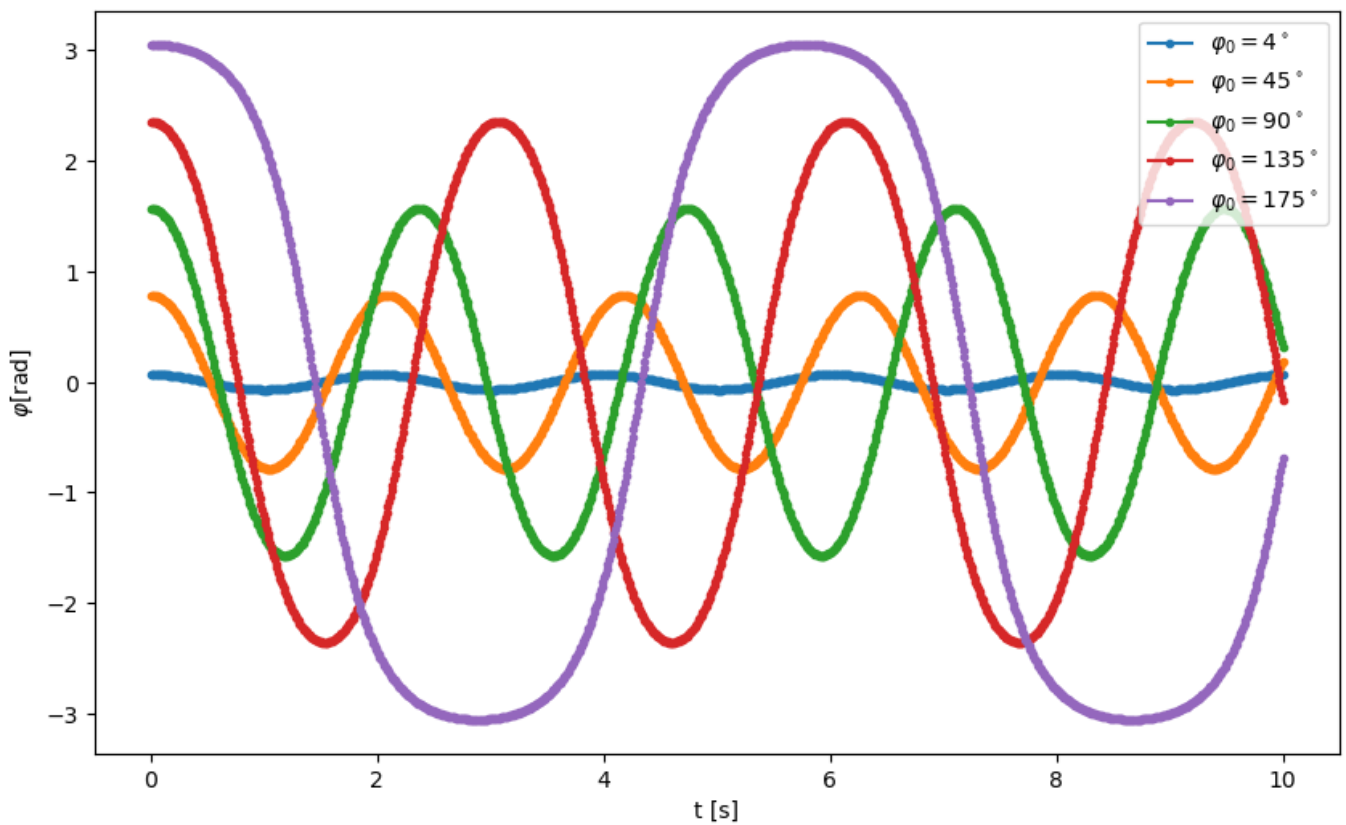
Parametry wykorzystane do przeprowadzenia symulacji ruchu wahadła:

- $\Delta t = 0.01[s]$  - krok czasowy
- $N = 1000$  - liczba kroków czasowych
- $R = 1[m]$  - długość wahadła
- $m = 1[kg]$  - masa punkowego obiektu
- $g = 9.81[m/s^2]$  - przyspieszenie grawitacyjne
- $\varphi(t = 0) = 4[^\circ]$  - początkowe wychylenie
- $\dot{\varphi}(t = 0) = 0[rad/s]$  - początkowa prędkość



Rys. 2: Wykres funkcji wychylenia wahadła w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego oraz analitycznego.

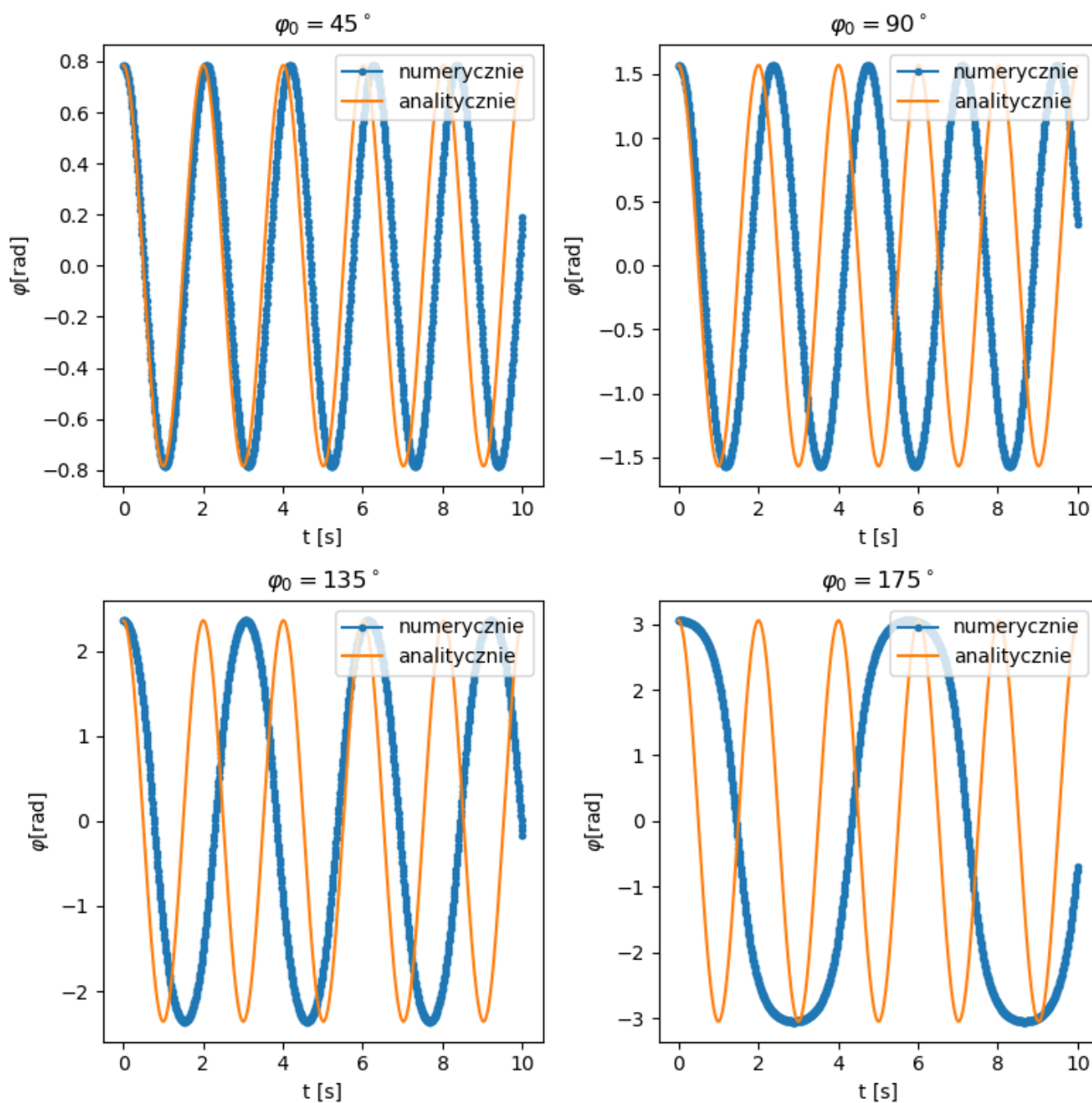
Na rysunku 2 zestawione zostały rozwiązanie numeryczne oraz analityczne dla początkowego wychylenia wynoszącego  $\varphi(t=0) = 4^\circ$ . Jak widać trajektorie dla obydwu rozwiązań bardzo dobrze się pokryły, a zatem uzasadnione jest korzystanie z przybliżenia sinusa jego argumentem dla małych odchyień.



Rys. 3: Wykres funkcji wychylenia wahadła w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych.

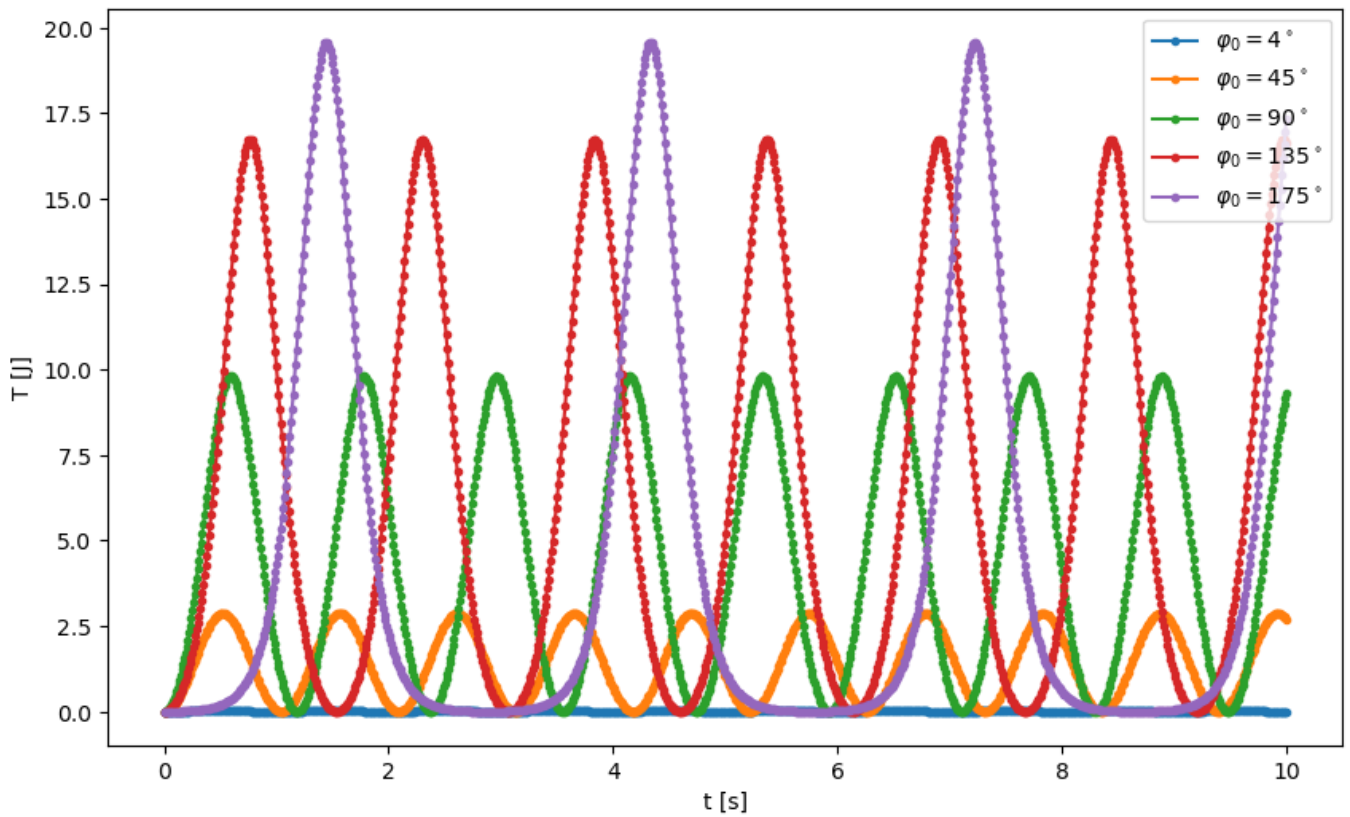
Na rysunku 3 zestawione zostały numerycznie wyznaczone trajektorie cząstki zawieszony na wahadle, dla 5-ciu

różnych wychyleń początkowych. Wartości tych wychyleń (poza pierwszym) wykraczają znacznie poza zakres małych kątów, z tego też powodu nieuzasadnione jest użycie wyniku analitycznego do opisu zjawiska.



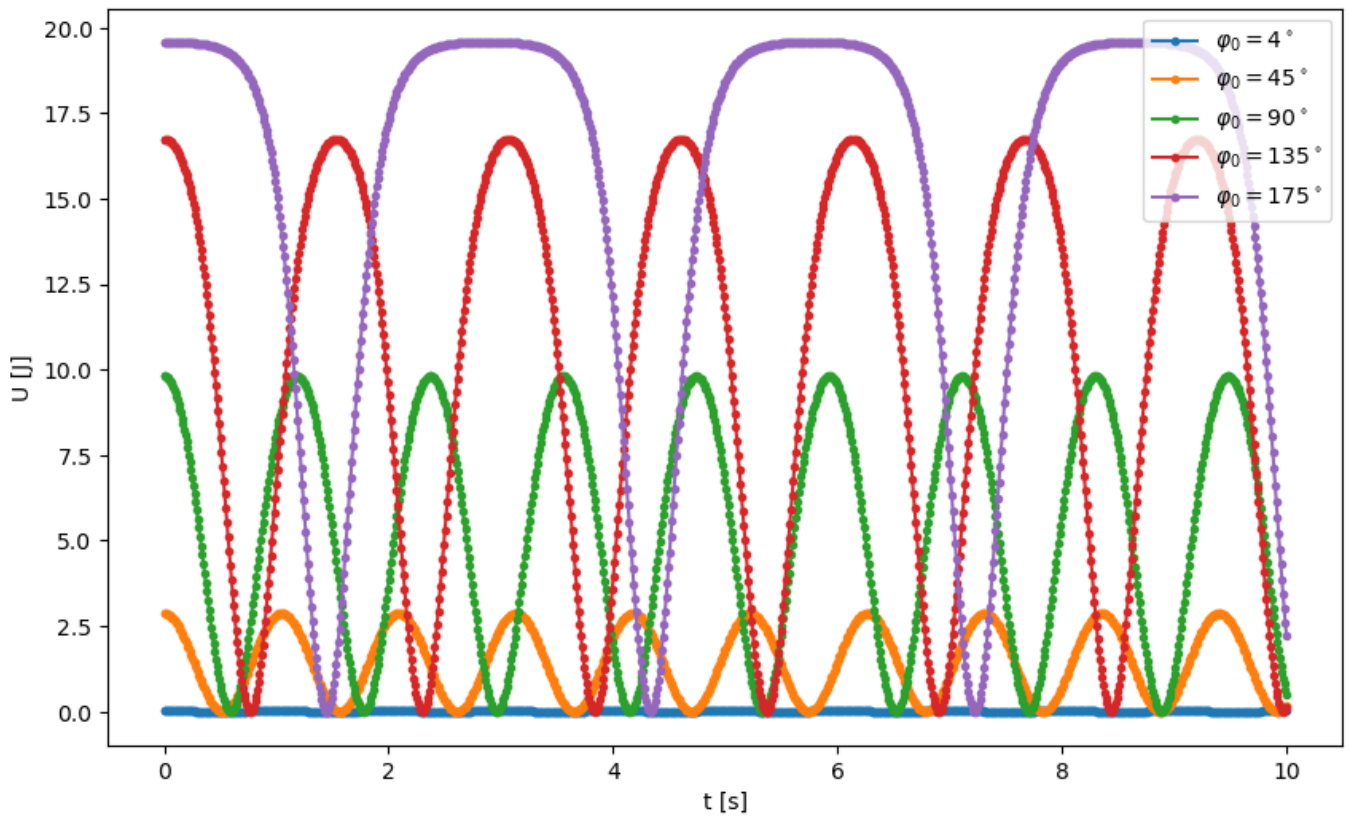
Rys. 4: Wykres funkcji wychylenia wahadła w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego oraz analitycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych.

Na rysunku 4 zestawione zostały trajektorie cząstki zawieszanej na wahadle dla wyniku numerycznego i analitycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych. Widać znaczny rozrzut krzywych, które powinny opisywać ten sam ruch, co też obrazuje to, że aproksymacja funkcji sinus szeregiem dla większych wychyleń jest błędna.



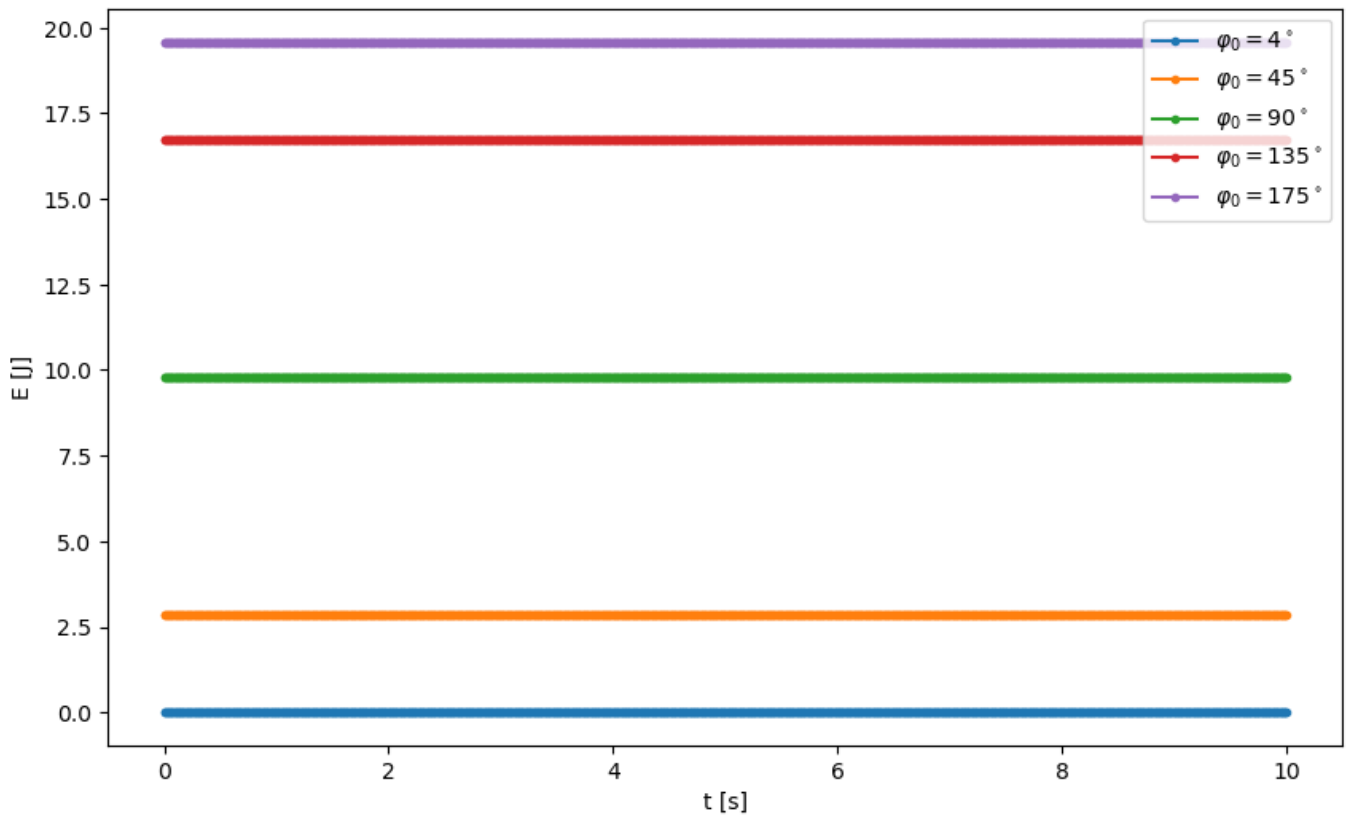
Rys. 5: Wykres funkcji energii kinetycznej wahadła w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych.

Na rysunku 5 zestawione zostały krzywe reprezentujące energię kinetyczną cząstki zawieszanej na wahadle dla wyniku numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych. Tak jak i w przypadku trajektorii są one periodyczne, czego się też spodziewamy, pod warunkiem, iż układ jest izolowany tj. jego energia nie jest wytracana. Większe wychylenia naturalnie wiążą się z większymi wartościami energii kinetycznej, ponieważ wtedy ciało jest tym bardziej rozpędzane przez pole siły grawitacyjnej im większą drogę pokonuje do położenia równowagi.



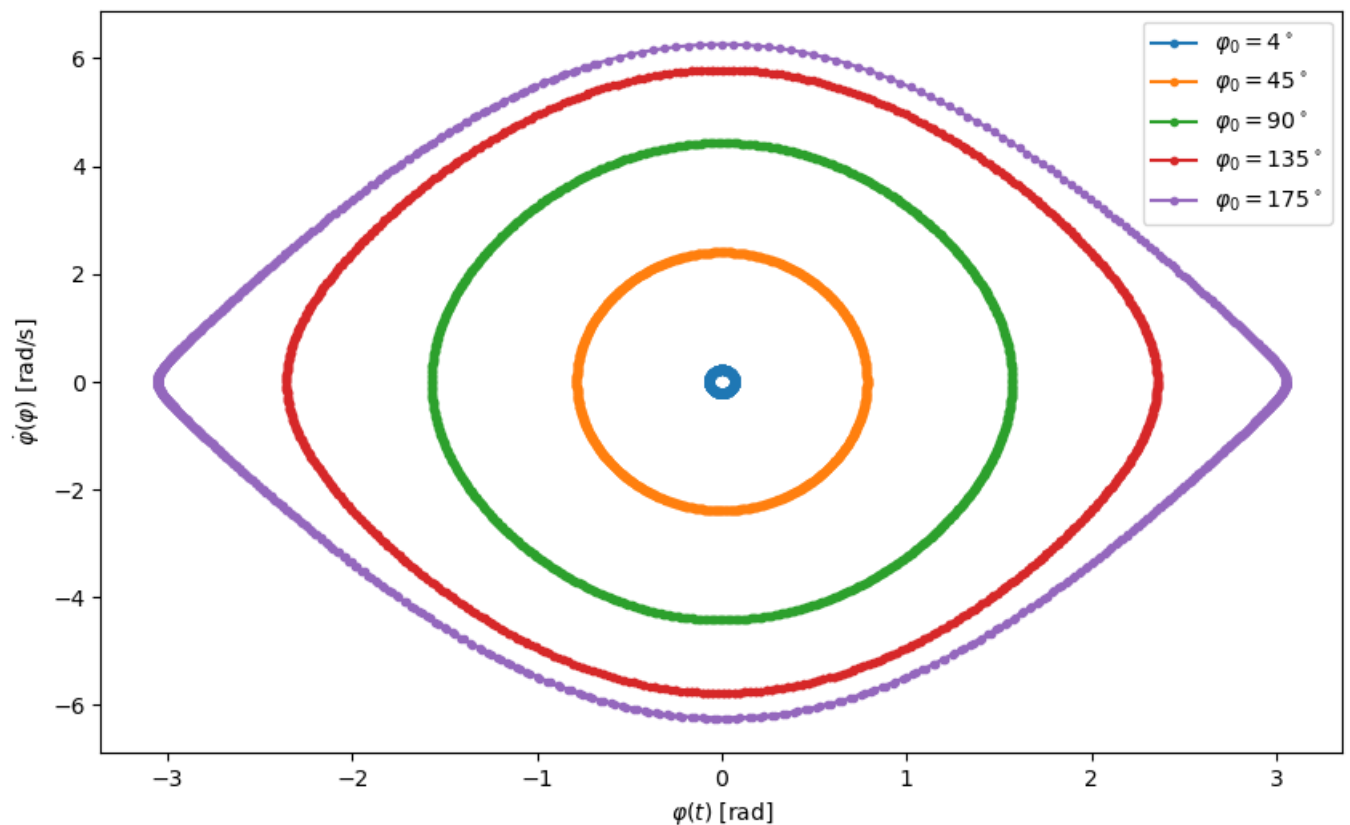
Rys. 6: Wykres funkcji energii potencjalnej wahadła w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych.

Na rysunku 6 zestawione zostały krzywe reprezentujące energię potencjalną cząstki zawieszanej na wahadle dla wyniku numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych. Tak jak i w przypadku trajektorii są one periodyczne, czego się też spodziewamy, pod warunkiem, iż układ jest izolowany tj. jego energia nie jest wytracana. Większe wychylenia naturalnie wiążą się z większymi wartościami energii potencjalnej, ponieważ wtedy ciało jest na większej wysokości względem przyjętego poziomu referencyjnego jakim jest położenie równowagi, z tego też powodu najmniejszą możliwą wartością energii potencjalnej jest wartość 0 [J].



Rys. 7: Wykres funkcji energii całkowitej wahadła w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych.

Na rysunku 7 zestawione zostały krzywe reprezentujące energię całkowitą cząstki zawieszanej na wahadle dla wyniku numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych. Ponieważ układ nie wytraca energii, naturalnym jest iż energia układu w czasie się nie zmienia. W czasie energia przepływa z formy energii kinetycznej na energię potencjalną i odwrotnie utrzymując sumę obu na stałym poziomie.



Rys. 8: Trajektoria wahadła w przestrzeni konfiguracyjnej dla rozwiązania numerycznego w przypadkach różnych wychyleń początkowych.



Na rysunku 8 zestawione zostały krzywe reprezentujące trajektorię w przestrzeni konfiguracyjnej (przestrzeni stanów) dla różnych wartości wychyleń początkowych z położenia równowagi. Każdy stan układu jest reprezentowany przez unikalny punkt w tej przestrzeni. W mechanicznym sensie, przestrzeń konfiguracyjna opisuje wszystkie możliwe konfiguracje układu w danej chwili czasowej.

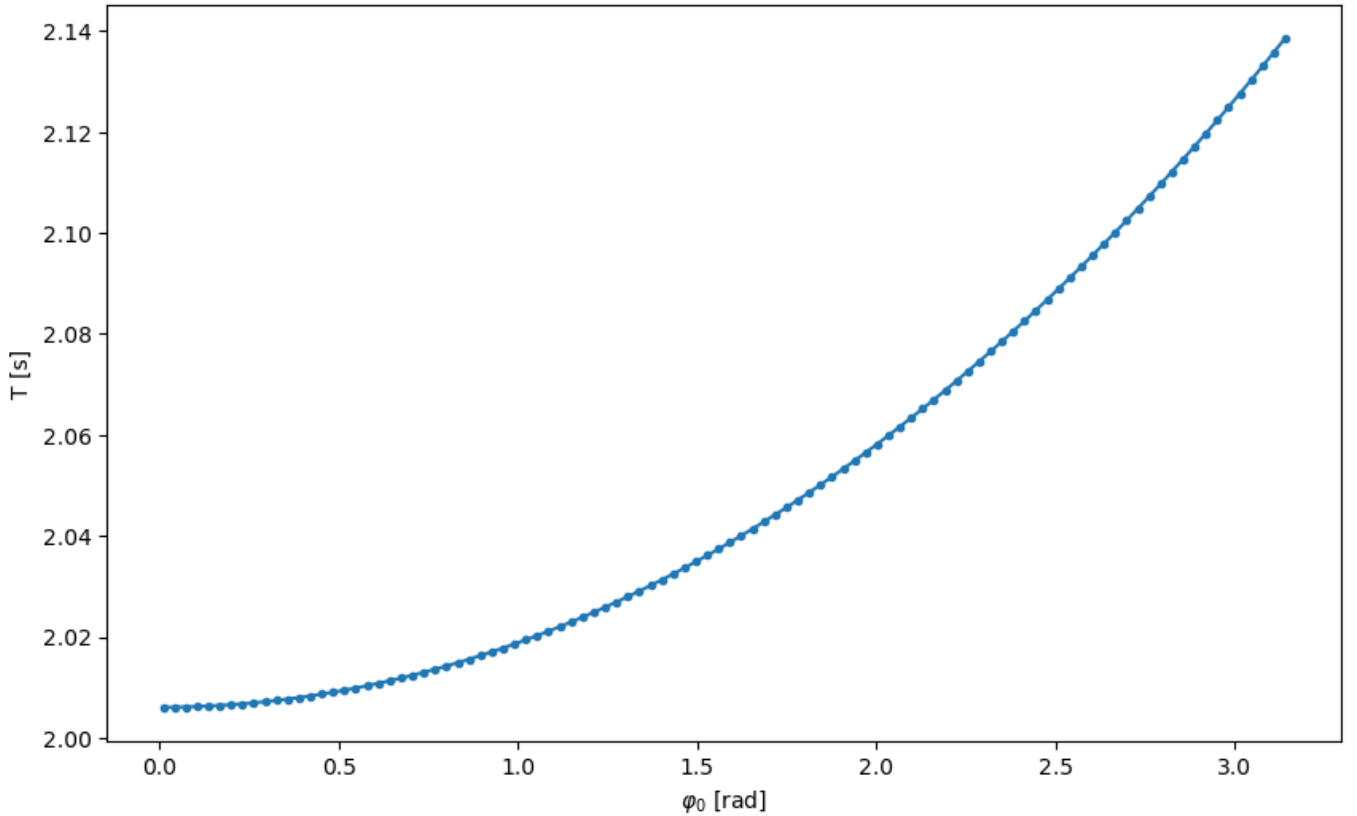
Dla drgań o dowolnie dużej amplitudzie okres drgań zależy od amplitudy  $\varphi_0$  i rośnie wraz z jej wzrostem, a zależność tą opisuje wzór:

$$T(\varphi_0) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \mathbf{K} \cdot \left(\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right) \quad (12)$$

, gdzie  $\mathbf{K}$  jest zupełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju. W wyniku rozwinięcia tego wzoru względem kąta wychylenia, otrzymujemy:

$$T(\varphi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{11}{3072}\varphi_0^4 + O(\varphi_0^6)\right) \quad (13)$$

Pomijając wyrazy rzędu  $O(\varphi_0^6)$  licząc wartość funkcji okresu wahań w zależności od maksymalnego wychylenia otrzymując w ten sposób wykres 9.



Rys. 9: Wykres funkcji okresu wahadła w zależności od maksymalnego wychylenia.

Na rysunku 9 zestawiony został wykres okresu wahadła w zależności od maksymalnego wychylenia z położenia równowagi. Można dostrzec nieliniowy wzrost wartości okresu wahadła w zależności od maksymalnego kąta wychylenia, przy czym nie musi to być początkowe wychylenie, ponieważ dla takowego może być określona jeszcze prędkość początkowa.

## 4 Wnioski

Podsumowując, korzystanie z numerycznych metod rachunkowych pozwala na symulowanie i modelowanie różnych zjawisk w sposób dokładny i efektywny. Metoda RK4, będąca jedną z najpopularniejszych i najskuteczniejszych metod numerycznych, pozwala na rozwiązanie równań różniczkowych o różnym stopniu skomplikowania z wysoką dokładnością.

Korzystanie z metody RK4 pozwala na uzyskanie dokładnych wyników symulacji i modelowania zjawisk w sposób bardziej precyzyjny niż przy użyciu innych metod numerycznych. Jednocześnie, złożoność obliczeniowa metody RK4 jest dość niska, co pozwala na stosowanie jej w praktyce na dużą skalę.

Wniosek zatem jest taki, że metoda RK4 jest bardzo przydatnym narzędziem do rozwiązywania różnego rodzaju problemów, a korzystanie z numerycznych metod rachunkowych pozwala na dokładne i efektywne modelowanie zjawisk.