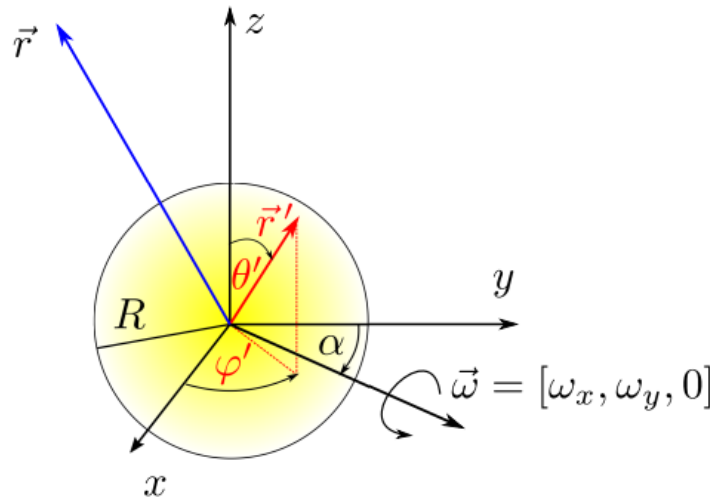
	Akademia Górniczo-Hutnicza Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej Fizyka Techniczna Podstawy fizyki teoretycznej	Zrealizował: Ryś Przemysław
Rok akademicki: 2022/2023	Semestr VI	Grupa laboratoryjna nr 2
Temat projektu: Projekt 6: Modelowanie pola elektrycznego i magnetycznego w otoczeniu obracającej się naładowanej sfery		
Data wykonania projektu 30.06.2023	Data oddania sprawozdania 30.06.2023	Ocena

1 Wstęp teoretyczny

Pole elektryczne wokół naładowanej sfery wynika z obecności ładunku elektrycznego na jej powierzchni. Podobnie, pole magnetyczne wokół obracającej się naładowanej sfery jest wynikiem ruchu obrotowego ładunku. Pole magnetyczne jest związane z ruchem ładunków elektrycznych i wywiera siłę na inne naładowane cząstki poruszające się w tym polu.

Na powierzchni sfery o promieniu R znajduje się ładunek o gęstości powierzchniowej σ . Sfera obraca się wokół osi leżącej w płaszczyźnie xy .



Rys. 1: Model obracającej się sfery

W celu opisu potencjału generowanego przez naładowaną sferę posłużymy się zasadą superpozycji:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1)$$

Definiując gęstość ładunku przy pomocy delty Diraca, tj.: $\rho(\vec{r}') = \sigma \cdot \delta(r' - R)$, gdzie $\sigma = const$ oraz wprowadzając współrzędne sferyczne otrzymujemy:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dr' \frac{\sin(\theta') r'^2 \delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin(\theta') R^2 \sigma}{|\vec{r} - \vec{R}'|}, \quad (2)$$

gdzie:

$$\vec{r} \rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \vec{R}' \rightarrow \begin{cases} x = R \sin \theta' \cos \varphi' \\ y = R \sin \theta' \sin \varphi' \\ z = R \cos \theta' \end{cases}$$

Podobnie natężenie pola elektrycznego generowanego przez naładowaną sferę wyznaczamy z tego, iż jest to ujemny gradient potencjału:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin(\theta') R^2 \sigma (\vec{r} - \vec{R}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|^3} \quad (3)$$

Indukcję pola magnetycznego generowanego przez obracającą się naładowaną sferę wyznaczamy również z zasady superpozycji tym razem stosując Prawo Biota-Savarta:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (4)$$

Przy następującej definicji gęstości prądu:

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}' = \sigma \delta(r' - R) \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (5)$$

oraz po wykonaniu całki po zmiennej radialnej otrzymujemy wynikową indukcję pola postaci:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin(\theta') R^2 \sigma (\vec{r} - \vec{R}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|^3} \quad (6)$$

2 Metoda obliczeniowa

Metoda obliczeniowa polega na dyskretyzacji odpowiednich całek, które to przechodzą na sumy. W tym celu wprowadzamy zmienne:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{N} \quad (7)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{M} \quad (8)$$

$$\theta \rightarrow \theta_i = \Delta\theta \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (9)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi_j = \Delta\varphi \cdot j, \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (10)$$

$$a_i \rightarrow \begin{cases} a_i = 1, & i = 0 \vee i = N \\ a_i = 4, & i \bmod 2 = 1 \\ a_i = 2, & i \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad b_j \rightarrow \begin{cases} b_j = 1, & j = 0 \vee j = M \\ b_j = 4, & j \bmod 2 = 1 \\ b_j = 2, & j \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

Zadane funkcje wyrażają się zatem w postaci:

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\varphi}{3} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin(\theta'_i)}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|} \quad (11)$$

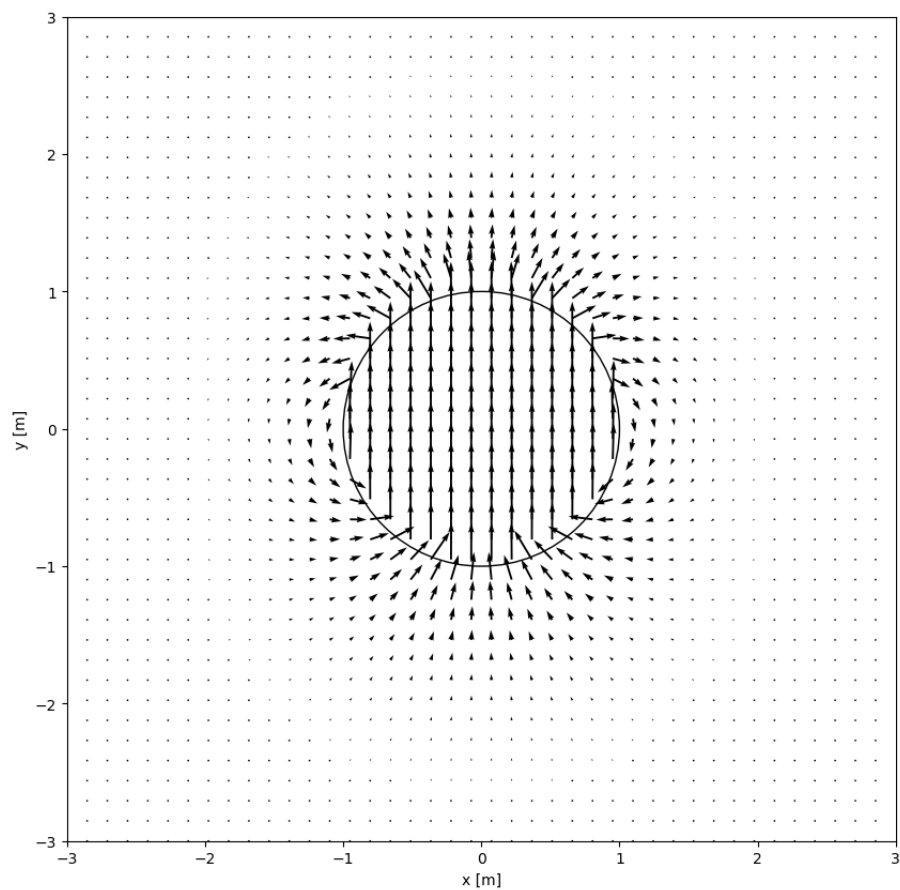
$$E(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\varphi}{3} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin(\theta'_i) (\vec{r} - \vec{R}'_{ij})}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3} \quad (12)$$

$$B(\vec{r}) = -\frac{\sigma R^2 \mu_0}{4\pi} \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\varphi}{3} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin(\theta'_i) [(\vec{r} - \vec{R}') \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')] \cdot \hat{e}_p}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3} \quad (13)$$

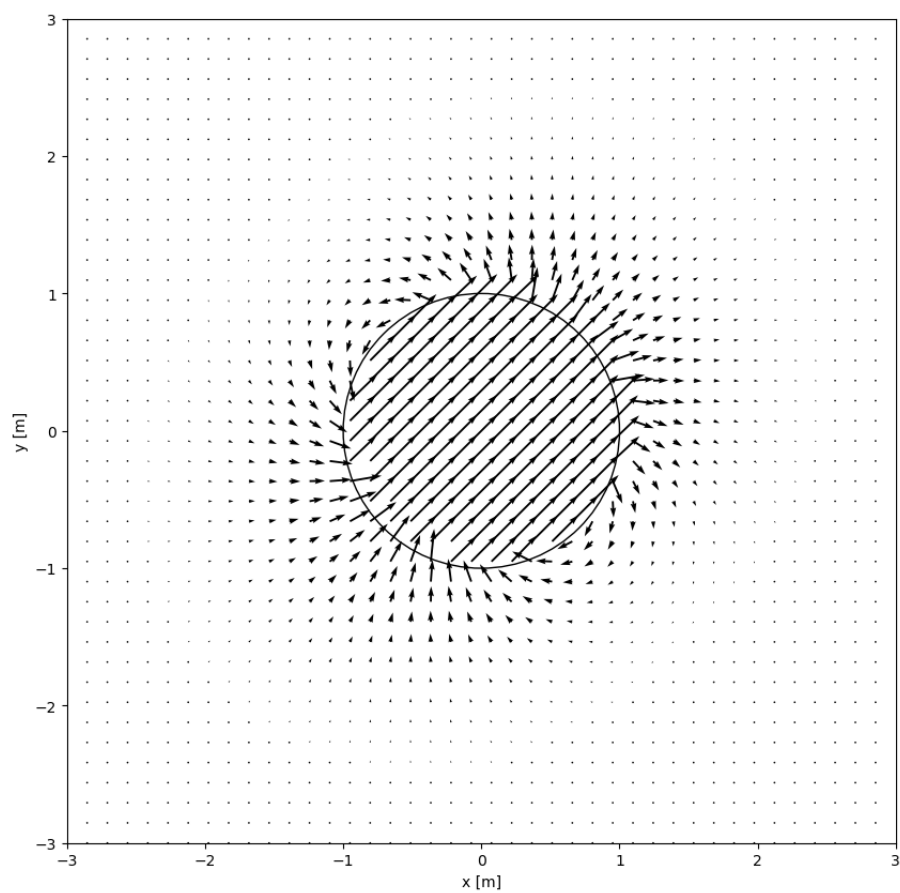
3 Wyniki symulacji

Parametry wykorzystane do przeprowadzenia symulacji:

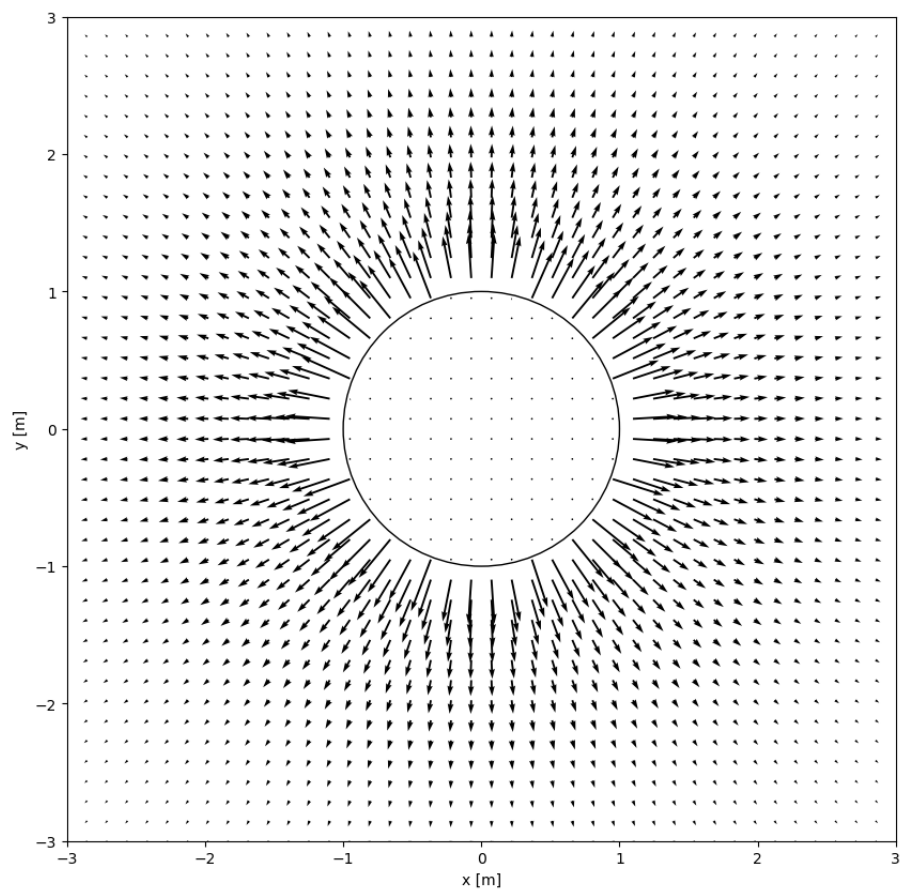
- $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ - stała przenikalności elektrycznej i magnetycznej
- $R = 1$ - promień sfery
- $\sigma = 1$ - gęstość powierzchniowa ładunku
- $N = M = 201$ - ilość kroków na które dzielimy odpowiednio kąt zenitalny oraz azymutalny
- $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$ - krok kąta zenitalnego (polarnego)
- $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{M}$ - krok kąta azymutalnego
- $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, 0] = [\omega \cdot \sin(\alpha), \omega \cdot \cos(\alpha), 0]$ - prędkość kątowa obracającej się naładowanej sfery
- $\omega = 0.1$ - moduł wektora prędkości kątowej
- $\alpha = 0$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{4}$ - kąt odchylenia osi obrotu sfery w kierunku od zwrotu osi y do zwrotu osi x



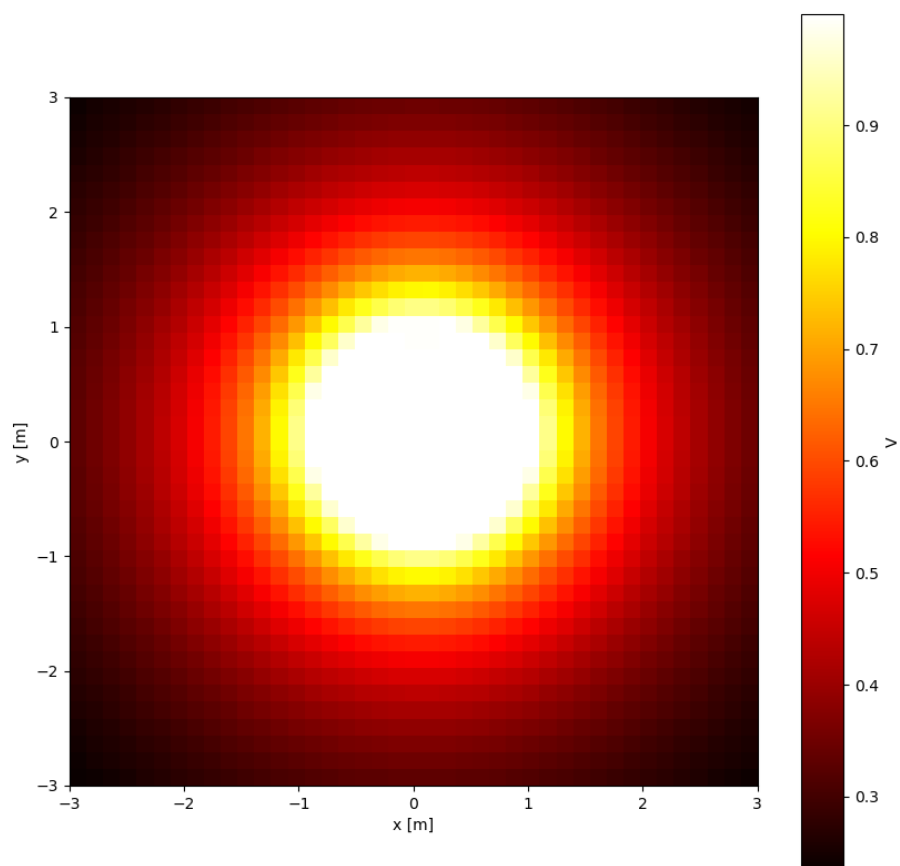
Rys. 2: Rozkład indukcji pola magnetycznego dla parametru $\alpha = 0$



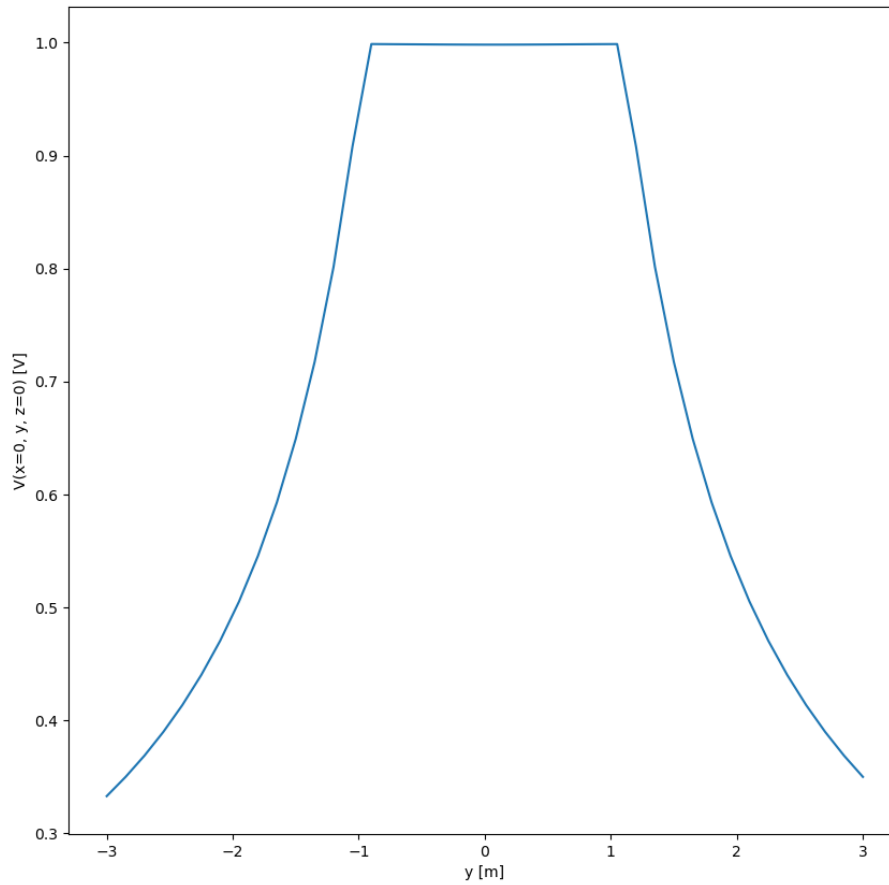
Rys. 3: Rozkład indukcji pola magnetycznego dla parametru $\alpha = \frac{\pi}{4}$



Rys. 4: Rozkład natężenia pola elektrycznego



Rys. 5: Rozkład potencjału



Rys. 6: Wykres potencjału w przekroju $V(x = 0, y, z = 0)$

4 Wnioski

Analizując wyniki symulacji rozkładu pola magnetycznego w otoczeniu obracającej się naładowanej sfery zauważyć można, że zarówno dla parametru $\alpha = 0$ jak i $\alpha = \frac{\pi}{4}$ wektory indukcji pola skierowane są wzdłuż kierunku osi obrotu sfery, ich zwrot jest z kolei zdeterminowany przez kierunek obrotu sfery (obróć w drugą stronę spowodowałby przeciwne ustawienie wektorów). Na zewnątrz wektory indukcji magnetycznej wychodzą z miejsca zwrotów wektorów z wewnątrz sfery i w miarę oddalania się od niej ich wartość maleje. Długości wektorów rosną z kolei w otoczeniu drugiego końca sfery w ten sposób, że wytyczają one zamknięty obieg.

Wyniki symulacji natężenia pola elektrycznego oraz jego potencjału nie zależą od tego w jakim kierunku jest skierowana oś obrotu i tego z jaką szybkością kręcić się będzie sfera, ich wartości definiuje całkowity rozkład ładunku na powierzchni. Wewnątrz sfery potencjał jest stały. Natężenie pola elektrycznego wewnątrz sfery jest natomiast zerowe, jest to logiczne następstwo twierdzenia o powłoce.

Wartość potencjału pola elektrycznego przedstawiona w przekroju dla $x = 0$ oraz $z = 0$ pokazuje, że rzeczywiście wewnątrz sfery jego wartość jest stała i ponieważ na sferze jest rozłożony ładunek dodatni to wartość wewnątrz sfery jest maksymalna i równa 1 (dla ujemnego ładunku byłoby to minimum).