

## Laboratorium 2: Symulacja pękającej tamy

Cel: Symulacja numeryczna 2D propagacji fali powodziowej w przypadku katastrofalnej awarii zapory wodnej.

Wstęp: Przewidywanie poziomu i prędkości wody w rzekach i kanałach ma wiele praktycznych zastosowań, np. dla prognozowania powodzi i warunków żeglugowych. Służby hydrologiczne zobowiązane są prognozować przemieszczanie się fal powodziowych wzdłuż głównych rzek. Niniejsze podejście oparte jest na równaniach płytkiej wody (Shallow Water Equations) bazujących na zasadzie zachowania masy (1) oraz zasadzie zachowania pędu (2) i (3).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

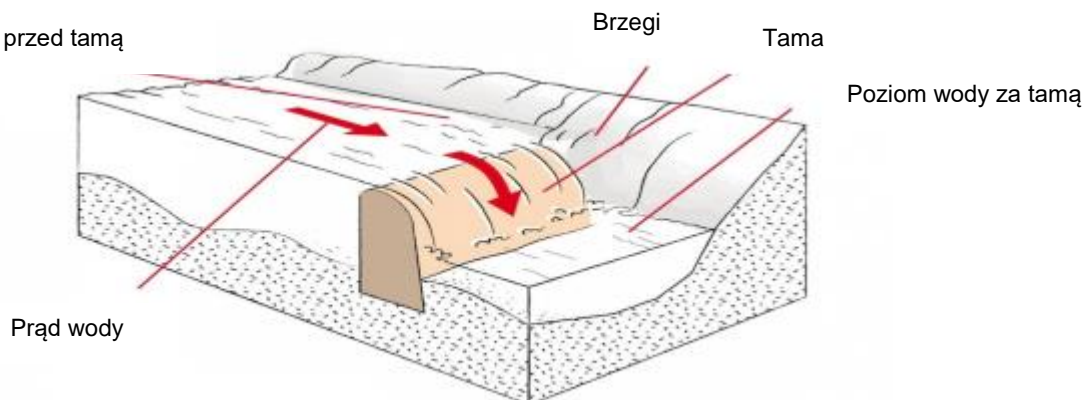
$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Zmiennymi niezależnymi są czas  $t$  oraz współrzędne poziome  $x$  i  $y$ , natomiast wielkościami poszukiwanymi poziom wody  $h$  oraz współrzędne prędkości przepływu  $u$  i  $v$ . Masa jest tu proporcjonalna do poziomu wody  $h$ , a składowe pędu do iloczynów poziomu wody i składowych prędkości  $uh$  i  $vh$ . Model ma pozwalać na definiowanie kształtu zbiornika wodnego poprzez wprowadzenie tablicy określającej status poszczególnych węzłów siatki jako:

- $<0$  – węzeł nieaktywny (poza zbiornikiem);
- $0$  – węzeł aktywny wewnątrz obszaru zbiornika;
- $>0$  – węzeł brzegowy (różne wartości przyporządkowane są do różnych położzeń brzegów (N-1, S-2, E-3, W-4, NE-5, NW-6, SE-7, SW-8)).

Dzięki temu możliwe będzie zdefiniowanie końcowej części zbiornika retencyjnego oraz koryta rzeki znajdującego się za tamą. (rys.1).

Poziom wody przed tamą



Rysunek 1 Poglądowy obraz modelowanego obiektu

Rzeczywistą geometrię koryta rzeki przybliżamy zakładając niewielkie nachylenie dna oraz możliwość aproksymacji przekroju poprzecznego za pomocą prostokąta o szerokości  $T(x)$  i głębokości  $h(x, y, t)$ . Podczas symulacji przyjmujemy, że współrzędne przestrzenne  $x$  i  $y$  przyjmują wartości z przedziału:

$$0 \leq x \leq X \quad (4)$$

$$0 \leq y \leq Y \quad (5)$$

a czasowa  $t$ :

$$0 \leq t \leq T_{max} \quad (6)$$

Lewostronny warunek brzegowy polega na określeniu wartości strumienia  $Q$  dopływającej wody:

$$Q(0, y, t) = Q_0(t) \quad (7)$$

W szczególności możemy przyjąć, że:

$$Q_0(t) = 0 \quad (8)$$

Symulując brak dopływu wody do zbiornika.

Prawostronny warunek brzegowy określa poziom wody na końcu modelowanego odcinka koryta rzeki.

$$h(X, y, t) = h(t) \quad (9)$$

Dodajemy do tego warunek początkowy określający prędkość przepływu oraz wysokość zwierciadła wody w każdym z punktów dla chwili  $t=0$ .

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (10)$$

$$v(x, y, 0) = 0 \quad (11)$$

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} h_1 & \text{dla } x < x_t \\ h_2 & \text{dla } x > x_t \end{cases} \quad (12)$$

gdzie:

$x_t$  – współrzędna tamy

$h_1$  – poziom wody przed tamą

$h_2$  – poziom wody po tamie

W celu uproszczenia równań wprowadzamy następujące wektory:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$G(U) = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Przy takim zapisie nasze równania płytkiej wody przyjmują postać równania hiperbolicznego:

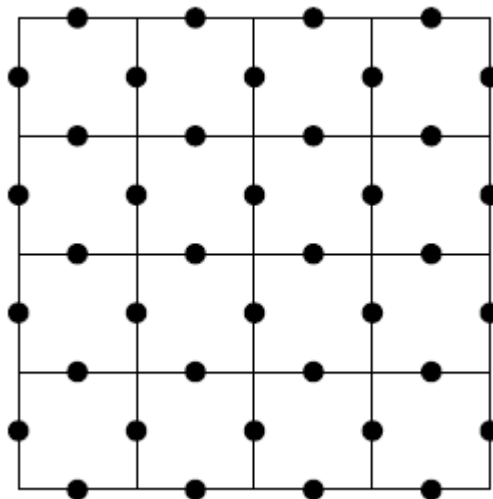
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

Do rozwiązania numerycznego powyższego równania zastosujemy metodę Lax-Wendroff. W metodzie każdy krok czasowy składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie obliczamy poszukiwane wartości w kroku połówkowym:

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_{i+1,j}^n + U_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) \quad (16)$$

$$U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_{i,j+1}^n + U_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}(G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \quad (17)$$

W punktach przedstawionych na rys 2.

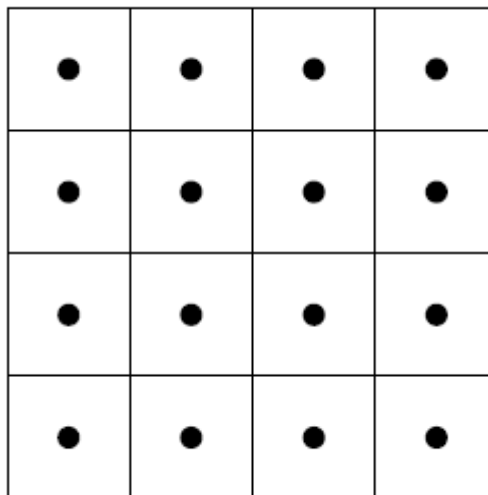


Rysunek 2 Siatka obliczeniowa dla pierwszego etapu obliczenia kolejnego kroku czasowego.

Drugi etap pozwala obliczyć wartości funkcji w kolejnym, całkowitym kroku czasowym na podstawie wartości z poprzedniego etapu:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (18)$$

Czyli w punktach centralnych każdej komórki siatki obliczeniowej (rys.3)



*Równanie 1 Siatka obliczeniowa dla drugiego etapu całkowania.*

Schemat Lax-Wendroff ma tendencje do wzmacniania oscylacji numerycznych, które mogą się pojawić przy niewłaściwie dobranym kroku przestrzennym i/lub czasowym. W ramach ćwiczenia należy sprawdzić obszar stabilności numerycznej rozwiązania.

Przebieg ćwiczenia:

1. Zapoznanie się z metodyką obliczeń
2. Zaimplementowanie schematu numerycznego (16 do 18) do rozwiązania równań
3. Obliczenie rozkładu przestrzennego wysokości zwierciadła wody w funkcji czasu
4. Testowanie stabilności numerycznej
5. Wizualizacja uzyskanych wyników (rozkład przestrzenny w różnych momentach czasu dla różnych warunków brzegowych oraz zmiana wysokości zwierciadła w wybranym punkcie w funkcji czasu).
6. Program może być napisany w dowolnym języku lub środowisku obliczeniowym (np. Matlab).
7. Kod programu zaopatrzony w niezbędne komentarze należy umieścić w sprawozdaniu.
8. Sprawozdanie należy zakończyć wnioskami.

Literatura:

Cleve Moler, Experiments in MATLAB, Electronic edition published by MathWorks, Inc.  
<http://www.mathworks.com/moler> Data ostatniego dostępu: 13.11.2023