	<p style="text-align: center;"><b>Akademia Górniczo-Hutnicza</b>  <b>Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej</b>  <b>Fizyka Techniczna</b>  <b>Podstawy fizyki teoretycznej</b></p>	<p><b>Zrealizował:</b>  Ryś Przemysław</p>
Rok akademicki: 2022/2023	Semestr VI	Grupa laboratoryjna nr 2
<p>Temat projektu:</p> <p style="text-align: center;">Projekt 2: Symulacja ruchu cząstki w układzie z więzami</p>		
<p>Data wykonania projektu</p> <p style="text-align: center;">21.05.2023</p>	<p>Data oddania sprawozdania</p> <p style="text-align: center;">22.05.2023</p>	<p style="text-align: center;">Ocena</p>

## 1 Wstęp teoretyczny

Metodą zaimplementowaną w celu wykonania projektu była metoda Rungego-Kutty 4 rzędu skrótowo nazywana RK4. Pozwala ona rozwiązywać równania jak i układy równań różniczkowych 1 rzędu poprzez kroki czasowe spełniając przy tym niewielki błąd, na które to zawsze podatne są wyniki naszych rachunków w przypadku prowadzenia obliczeń numerycznych. W każdym kroku używa się wartości pochodnej funkcji, aby oszacować wartość funkcji w kolejnym punkcie. Metoda umożliwia również możliwość obliczenia równań różniczkowych wyższych rzędów, w zamian za dodatkowe równanie, które będzie przypisaniem do nowej zmiennej pochodnej szukanej funkcji. W wyniku takiego jednokrotnego przypisania schodzimy rzędem równania różniczkowego o jeden. Postępując tak kilkakrotnie możemy sprowadzić równanie różniczkowe rzędu  $n$  do układu  $n$  równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Rozwiązanie w  $i + 1$  kroku algorytmu ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad (1)$$

, gdzie:  $y_i$  jest rozwiązaniem w kroku poprzednim,  $\Delta t$  jest krokiem czasowym symulacji, natomiast współczynniki  $k_\alpha$  definiowane na potrzeby metody mają postać:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (2)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_1\right) \quad (3)$$

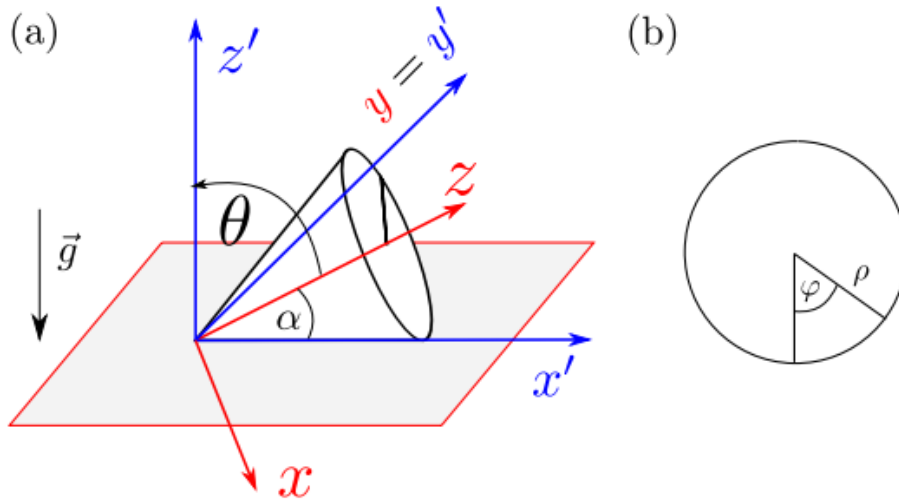
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_2\right) \quad (4)$$

$$k_4 = f(t_i + \Delta t, y_i + \Delta t \cdot k_3) \quad (5)$$

## 2 Opis problemu

Postawionym zadaniem jest policzyć numerycznie dla cząstki poruszającej się po powierzchni walca przedstawionego na rysunku 1:

- rozwiązania dla  $\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z}$  oraz przedstawić je na wykresie,
- przedstawić kilka rzutów izometrycznych trajektorii w układzie laboratoryjnym,
- Sprawdzić, czy w trakcie ruchu energia cząstki jest stabilna.



Rysunek 1: a) geometria układu, b) przekrój stożka

Rys. 1: Ilustracja wahadła, którego ruch badany jest w symulacji numerycznej metodą RK4.

Zagadnienie jest trudne by móc wyznaczyć dokładne analityczne rozwiązanie, ponieważ równanie ?? jest równaniem różniczkowym nieliniowym, zatem nie możemy do niego zastosować ogólnie poznanych metod. Niemniej problem ten możemy rozwiązać stosując rozwinięcie funkcji sinus w szereg Taylora wokół zera zwany szeregiem Maclaurina (wzór 6)

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (6)$$

W przypadku małych wychyleń początkowych tj. do 5 stopni ( $x$  jest kątem w radianach) możemy zaniedbać wyrazy wyższych rzędów i tym samym aproksymować (przybliżyć) wartość funkcji sinus jej argumentem zadanym w radianach ( $\sin(x) \approx x$ ). w wyniku czego otrzymujemy do rozwiązania jednorowne równanie różniczkowe drugiego rzędu, które rozwiążemy metodą "przewidywania rozwiązania" postaci  $\varphi = A \cdot e^{r \cdot t}$ . Rozwiązując równanie charakterystyczne i podstawiając  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$  otrzymujemy, iż  $r = \pm i \cdot \omega$ . A zatem:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t} \quad (7)$$

Po elementarnych przekształceniach możemy przekształcić to rozwiązanie do postaci:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) \quad (8)$$

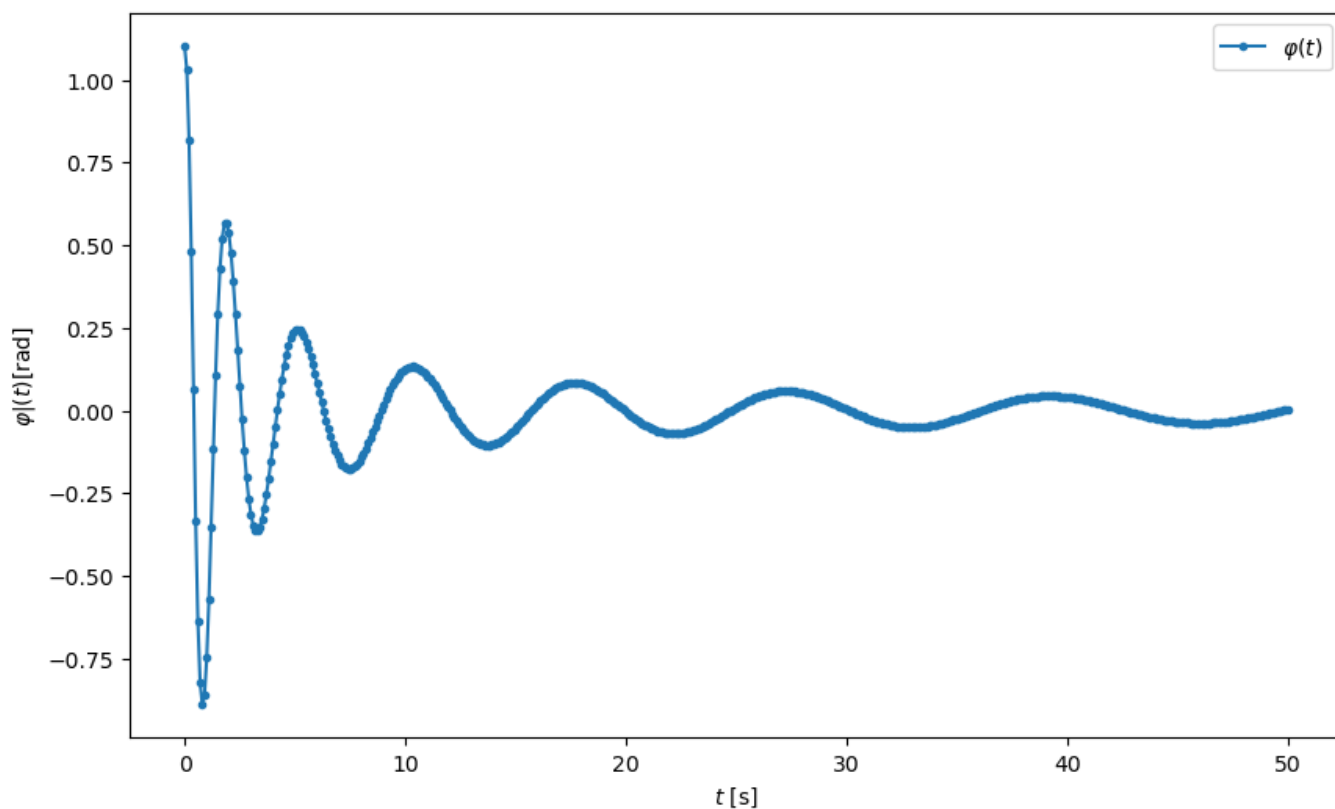
, gdzie  $\varphi_0$  jest amplitudą wychylenia, a  $\psi$  fazą początkową, która dla naszego przypadku równa jest 0, ponieważ ciało w chwili początkowej ( $t = 0$ ) jest wychylone o amplitudę, to funkcja cosinus musi wynosić 1.

## 3 Wyniki symulacji

### 3.1 Parametry dla pierwszych warunków początkowych.

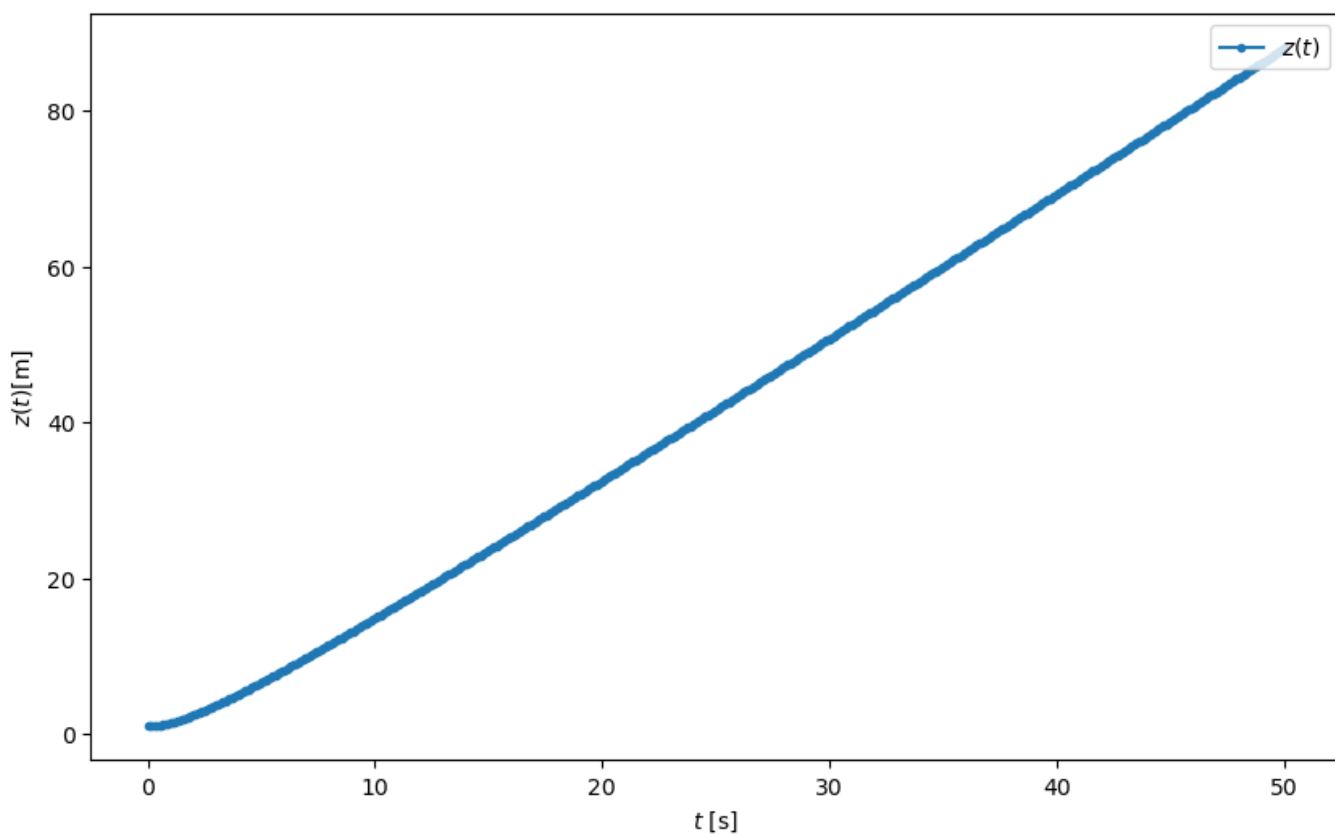
Parametry wykorzystane do przeprowadzenia symulacji ruchu cząstki po powierzchni stożka:

- $\Delta t = 0.01$  [s] - krok czasowy.
- $\alpha = 0.5$  - połowa kąta rozwarcia stożka.
- $N = 500$  - liczba kroków czasowych.
- $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] - przyspieszenie grawitacyjne.
- $\varphi(t = 0) = 1.1$  [rad] - początkowy kąt azymutalny.
- $z(t = 0) = 1.0$  [m] - początkowe położenie wzdłuż kierunku osi stożka.
- $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$  [rad/s] - początkowa prędkość azymutalna.
- $\dot{z}(t = 0) = 0$  [m/s] - początkowa prędkość wzdłuż kierunku osi stożka.



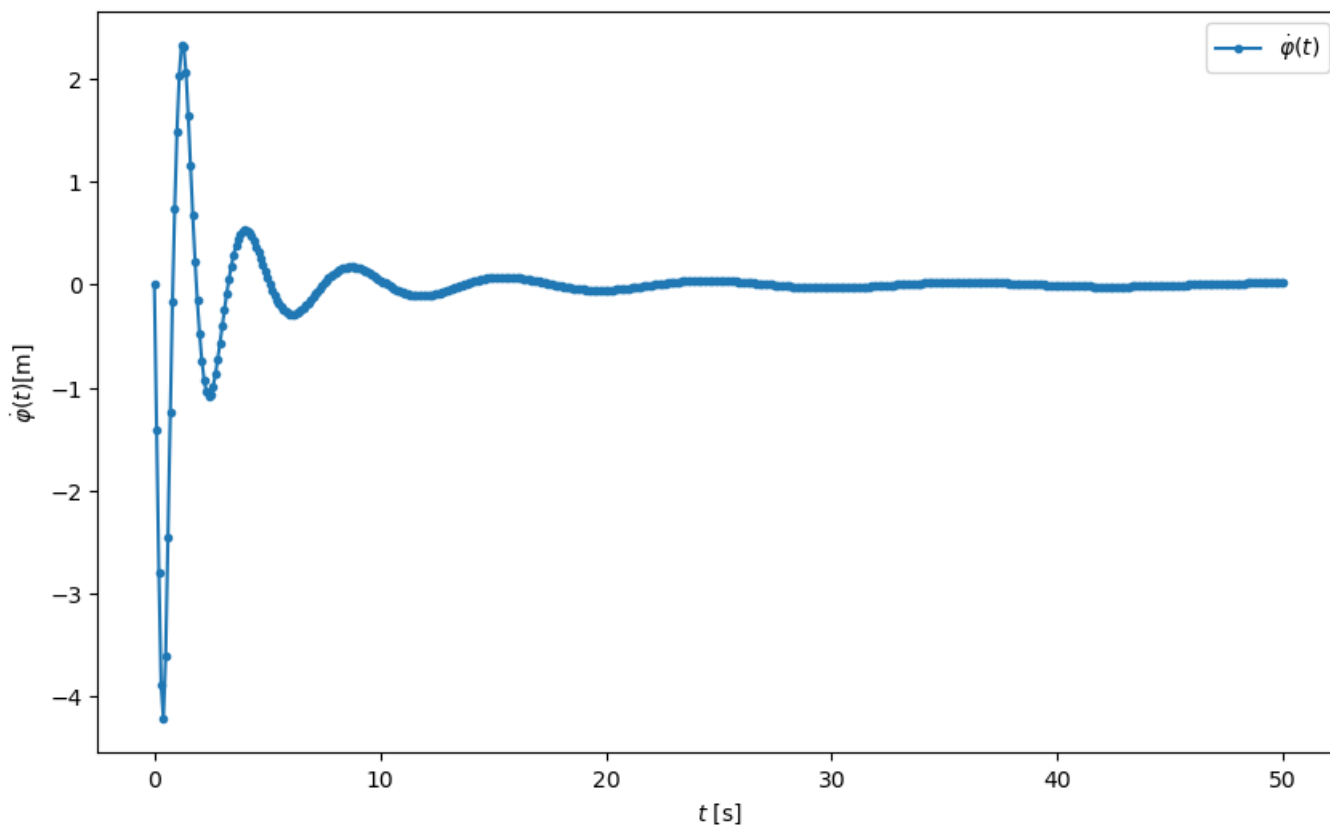
Rys. 2: Wykres funkcji wychylenia kąta azymutalnego cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 2 przedstawione zostało położenie cząstki jako zależności kąta azymutalnego mierzonego poprzecznie do osi stożka, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosił on  $\varphi(t = 0) = 1.1[rad]$ . Wraz z trwającą symulacją wartość tego kąta oscyluje wokół zera i relaksuje się wokół niego.



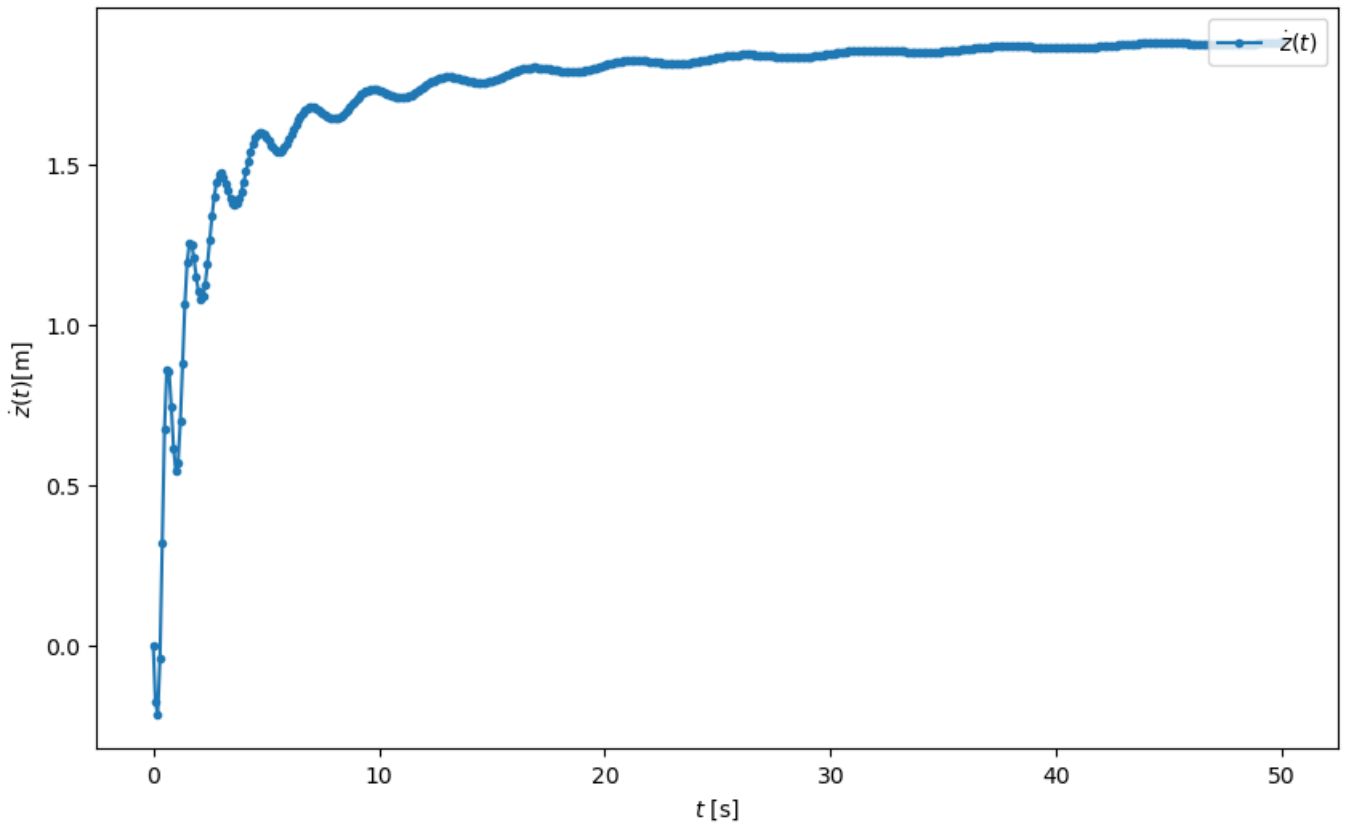
Rys. 3: Wykres funkcji położenia składowej mierzonej wzdłuż osi stożka cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 3 przedstawione zostało położenie cząstki jako zależności położenia cząstki względem osi stożka, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosiło ono  $z(t = 0) = 1.0[m]$ . Wraz z trwającą symulacją wartość tej współrzędnej rośnie w sposób liniowy po pierwszych kilku iteracjach metody.



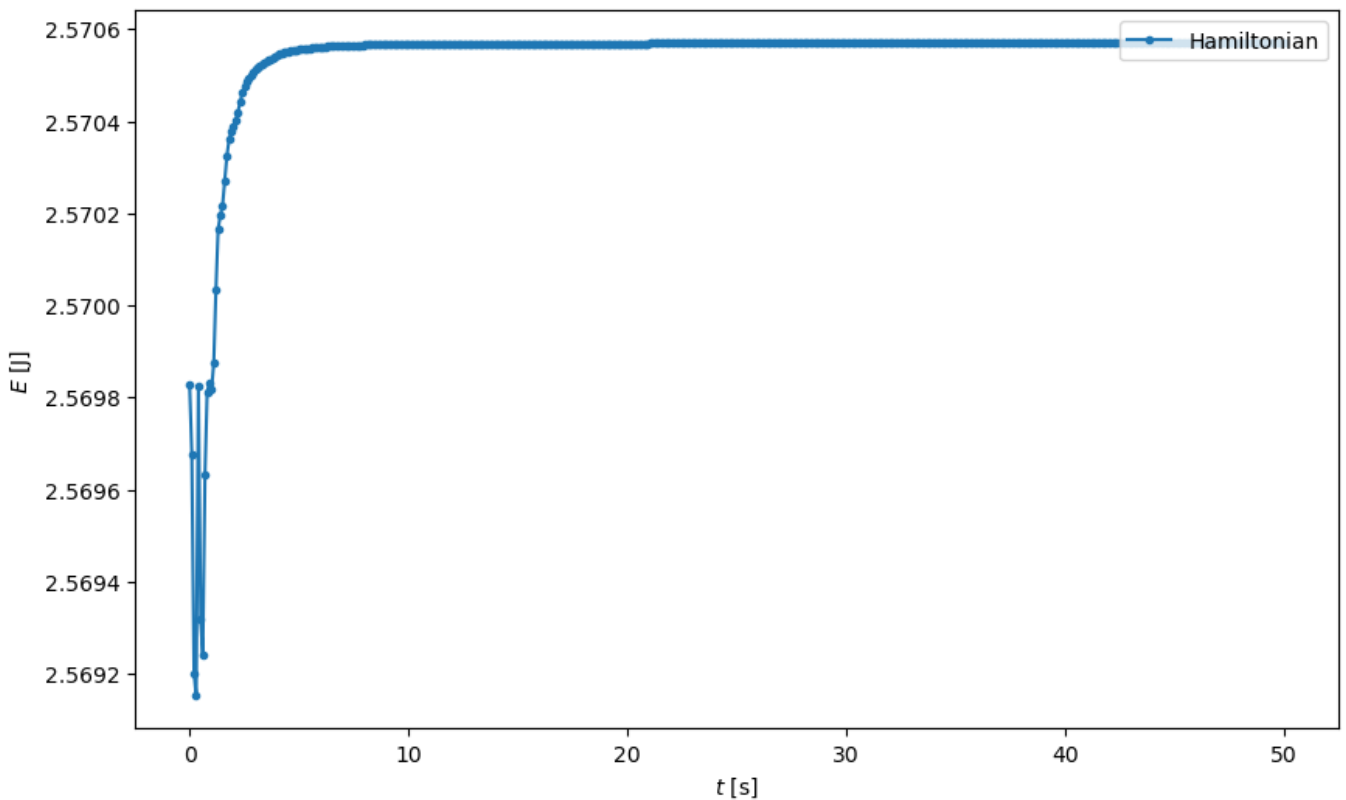
Rys. 4: Wykres funkcji prędkości kątowej azymutalnej cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 4 przedstawiona została prędkość kąta azymutalnego cząstki mierzonego poprzecznie do osi stożka, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosił on  $\dot{\phi}(t = 0) = 0[\text{rad/s}]$ . Wraz z trwającą symulacją wartość tej prędkości oscyluje wokół zera i relaksuje się wokół niego.



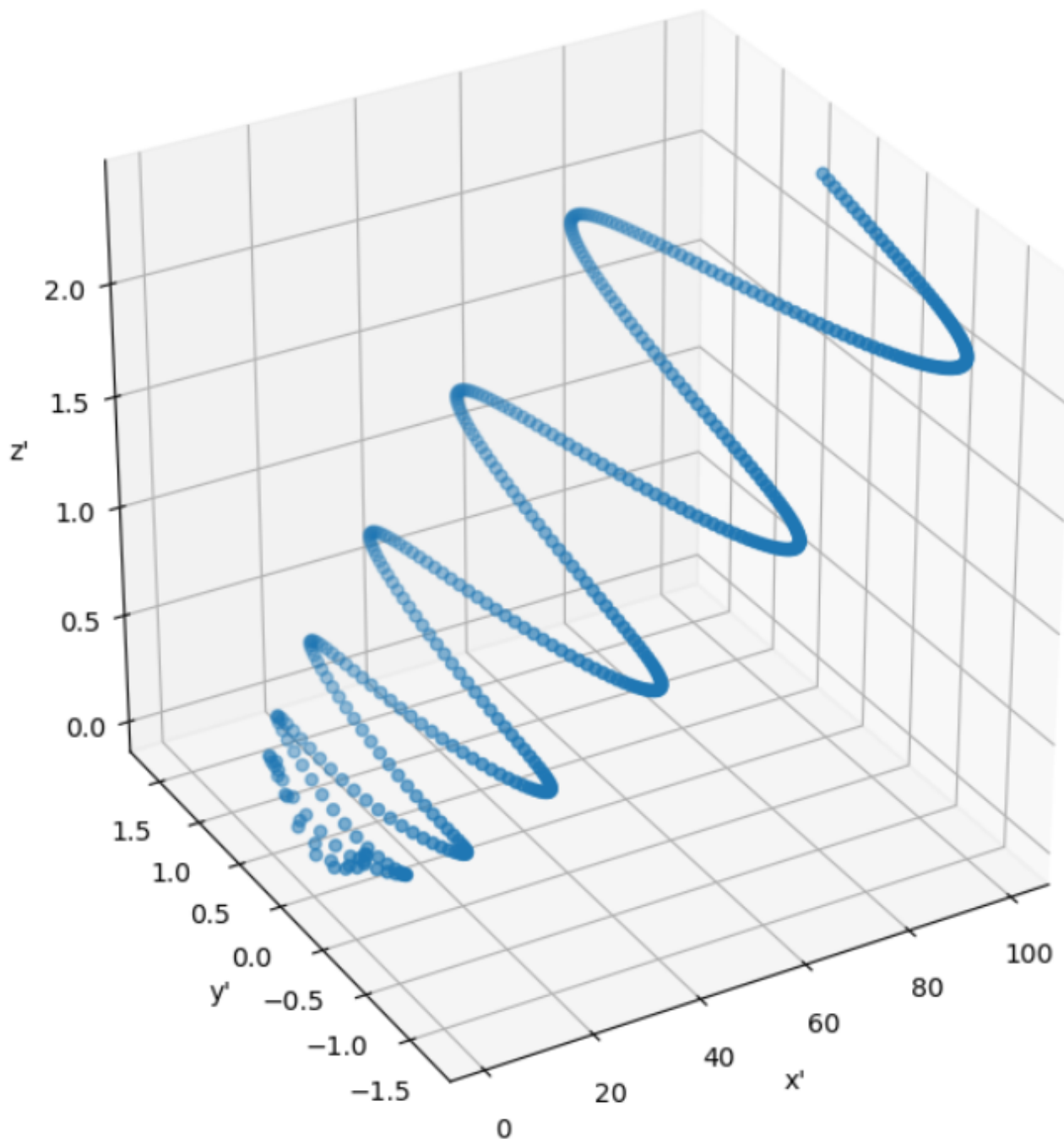
Rys. 5: Wykres funkcji prędkości składowej mierzonej wzdłuż osi stożka cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 5 przedstawiona została prędkość składowej mierzonej wzdłuż osi stożka cząstki, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosił on  $z(t=0) = 0[\frac{m}{s}]$ . Wraz z trwającą symulacją wartość tej prędkości relaksuje się do skończonej, ale niezerowej wartości.



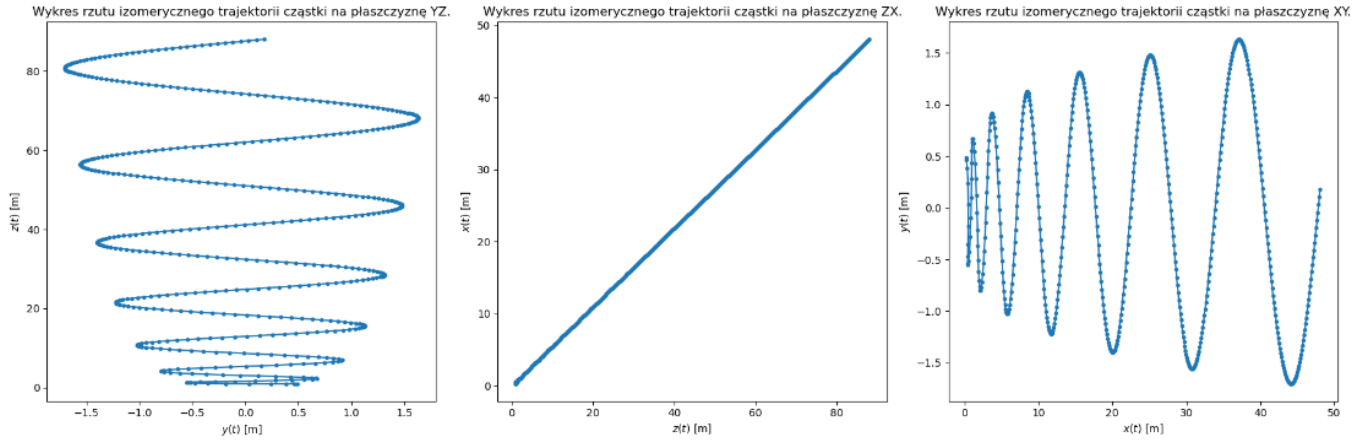
Rys. 6: Wykres funkcji energii całkowitej (Hamiltonianu) cząstki poruszającej się po poboczniczy stożka w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 6 przedstawiona została całkowita energia cząstki poruszającej się po poboczniccy stożka w zależności od czasu. W pierwszych chwilach symulacji jej wartość, jak i pozostałe parametry symulacji zmieniały się chaotycznie, ponieważ krok symulacji jest dość duży w stosunku do początkowego podłoża (promień chwilowej podstawy stożka na której jest cząstka jest względnie mały). Wraz z upływem czasu jej wartość ustala się, tak, że po około 4 sekundach jej wartość jest z dobrym przybliżeniem stała.



Rys. 7: Trajektoria ruchu cząstki w układzie laboratoryjnym widziana z perspektywy.

Na rysunku 7 przedstawiona została trajektoria ruchu cząstki poruszającej się po powierzchni stożka. Można dopatrzeć się na nim kształtu powierzchni stożka, która to stanowi więz jednostronny dla owej cząstki (efektywnie nie wpływa to na liczbę stopni swobody).



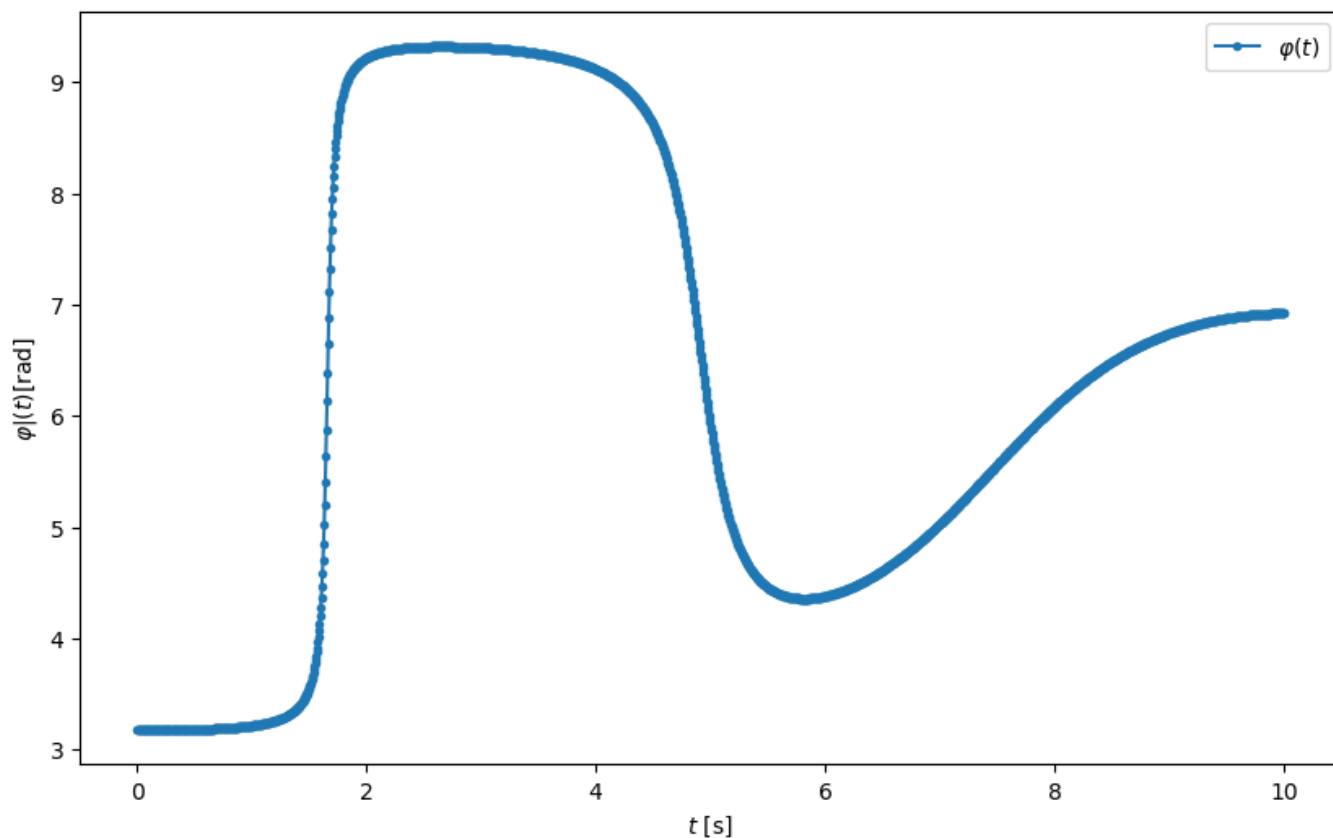
Rys. 8: Rzuty izometryczne na odpowiednie płaszczyzny.

Na rysunku 8 przedstawione zostały rzuty izometryczne trajektorii cząstki poruszającej się po powierzchni stożka na 3 różne (ortogonalne) płaszczyzny.

### 3.2 Parametry dla drugich warunków początkowych.

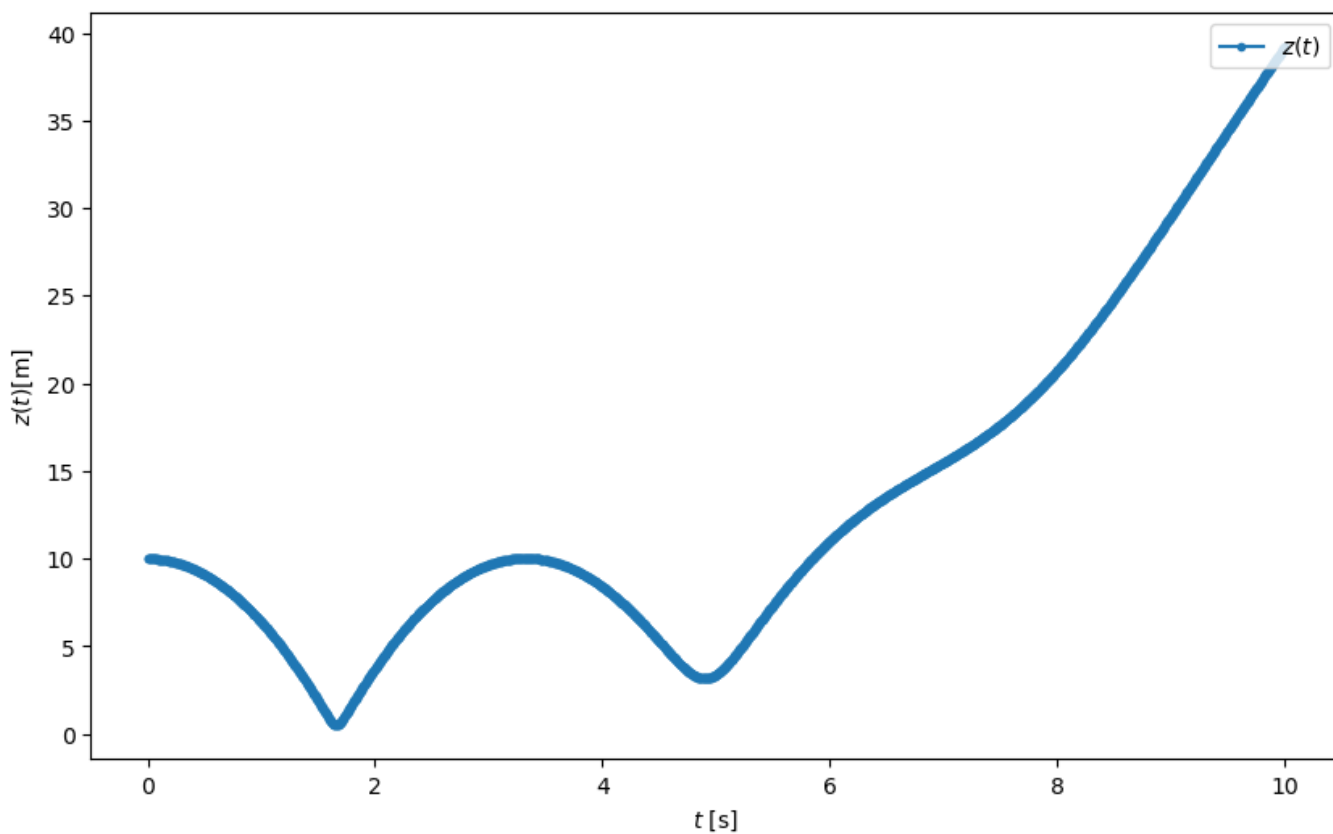
Parametry wykorzystane do przeprowadzenia symulacji ruchu cząstki po powierzchni stożka:

- $\Delta t = 0.005$  [s] - krok czasowy.
- $\alpha = 0.5$  - połowa kąta rozwarcia stożka.
- $N = 2000$  - liczba kroków czasowych.
- $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] - przyspieszenie grawitacyjne.
- $\varphi(t = 0) = \frac{\pi}{0.99}$  [rad] - początkowy kąt azymutalny.
- $z(t = 0) = 1.0$  [m] - początkowe położenie wzdłuż kierunku osi stożka.
- $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$  [rad/s] - początkowa prędkość azymutalna.
- $\dot{z}(t = 0) = 0$  [ $\frac{m}{s}$ ] - początkowa prędkość wzdłuż kierunku osi stożka.



Rys. 9: Wykres funkcji wychylenia kąta azymutalnego cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

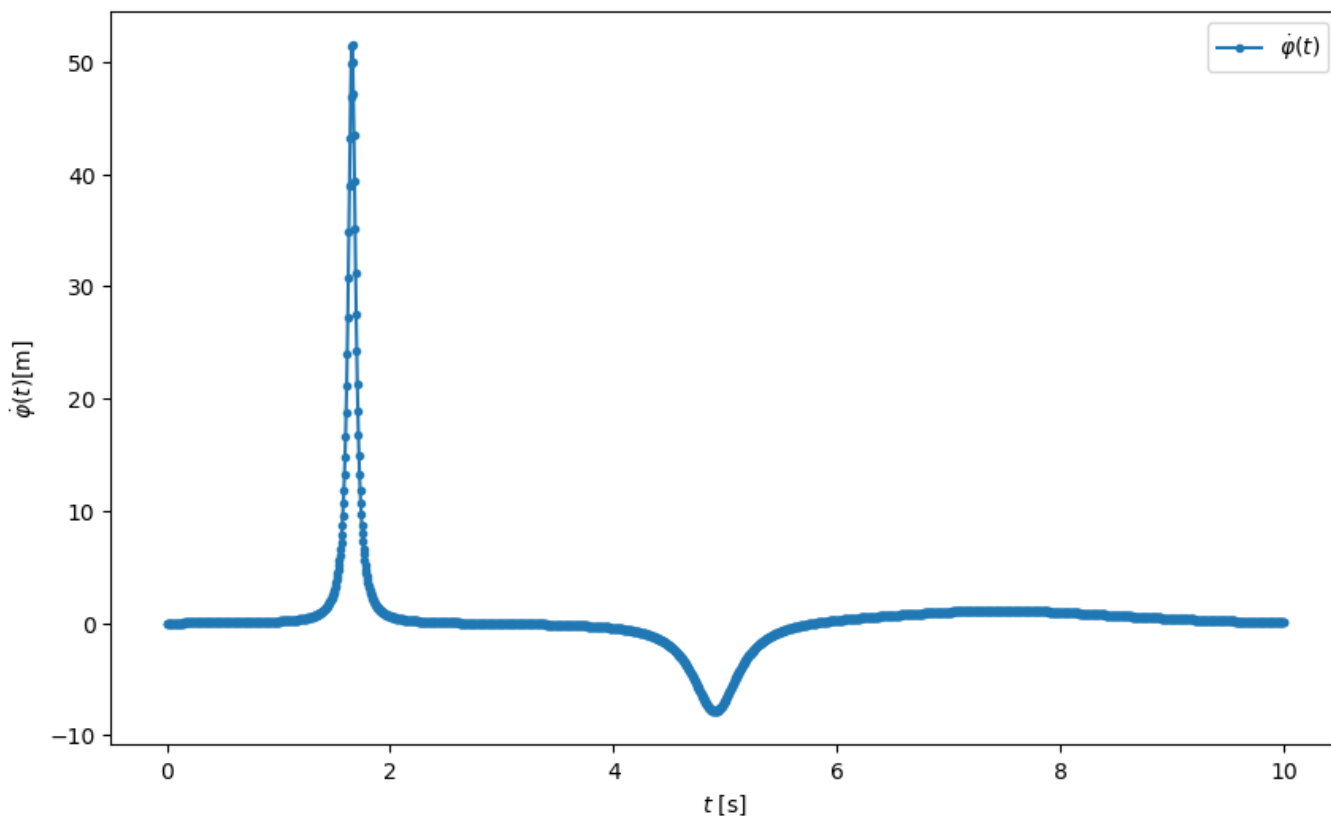
Na rysunku 9 przedstawione zostało położenie cząstki jako zależności kąta azymutalnego mierzonego poprzecznie do osi stożka, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosił on  $\varphi(t=0) = \frac{\pi}{0.99} [rad]$ . Wraz z trwającą symulacją wartość tego kąta oscyluje wokół zera i relaksuje się wokół niego.



Rys. 10: Wykres funkcji położenia składowej mierzonej wzdłuż osi stożka cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

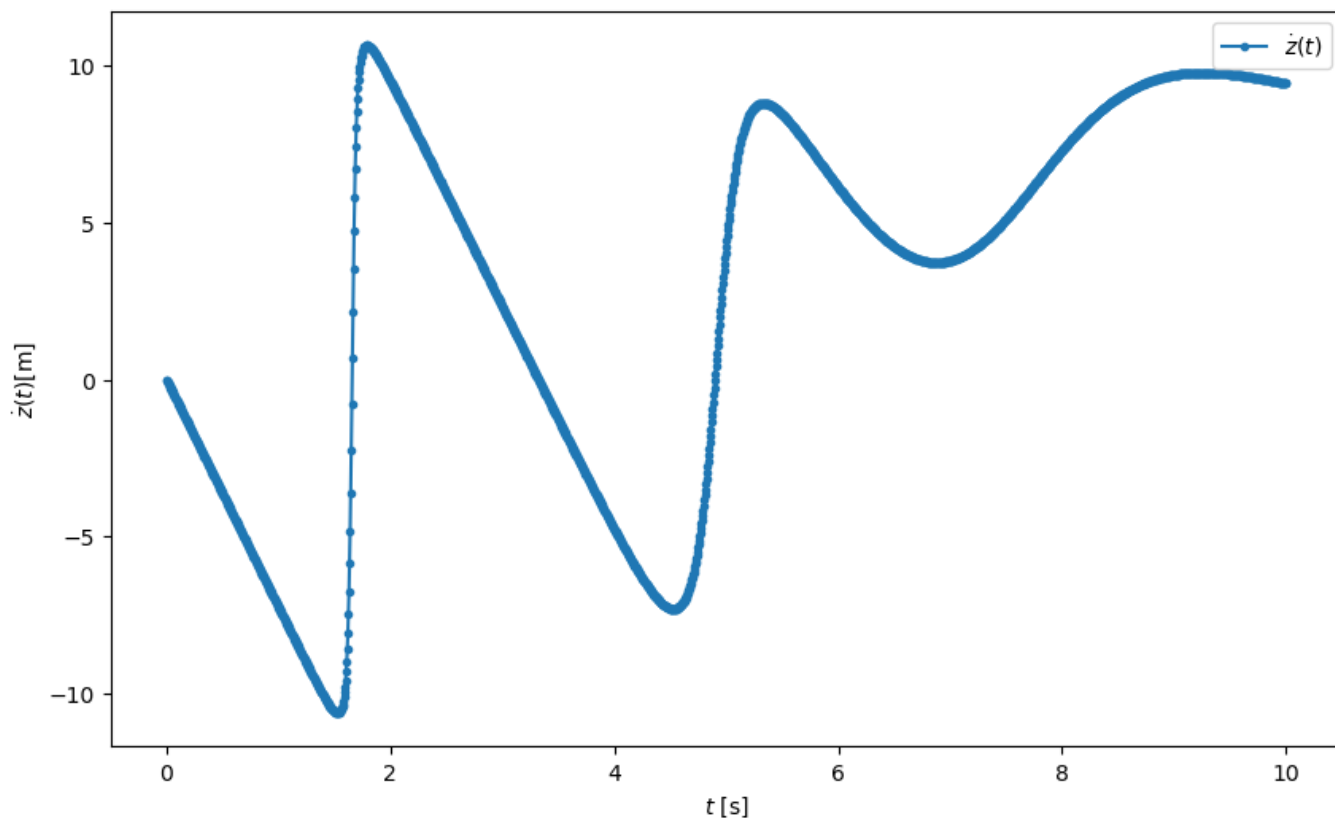


Na rysunku 10 przedstawione zostało położenie cząstki jako zależności położenia cząstki względem osi stożka, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosiło ono  $z(t = 0) = 1.0$  [m]. Wraz z trwającą symulacją wartość tej współrzędnej rośnie w sposób liniowy po pierwszych kilku iteracjach metody.



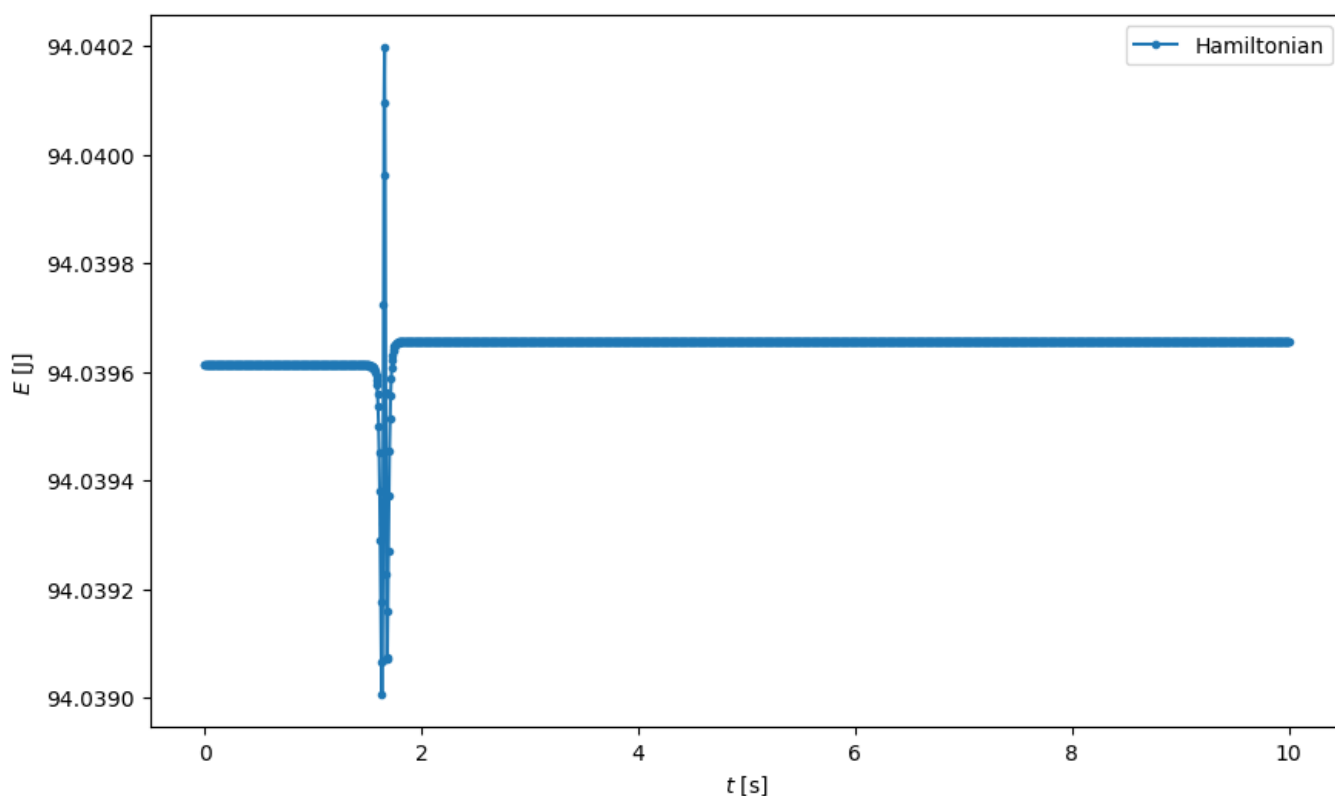
Rys. 11: Wykres funkcji prędkości kątowej azymutalnej cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 11 przedstawiona została prędkość kąta azymutalnego cząstki mierzonego poprzecznie do osi stożka, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosił on  $\dot{\phi}(t = 0) = 0$  [rad/s]. Wraz z trwającą symulacją wartość tej prędkości oscyluje wokół zera i relaksuje się wokół niego.



Rys. 12: Wykres funkcji prędkości składowej mierzonej wzdłuż osi stożka cząstki poruszającej się po powierzchni stożka dla rozwiązania numerycznego.

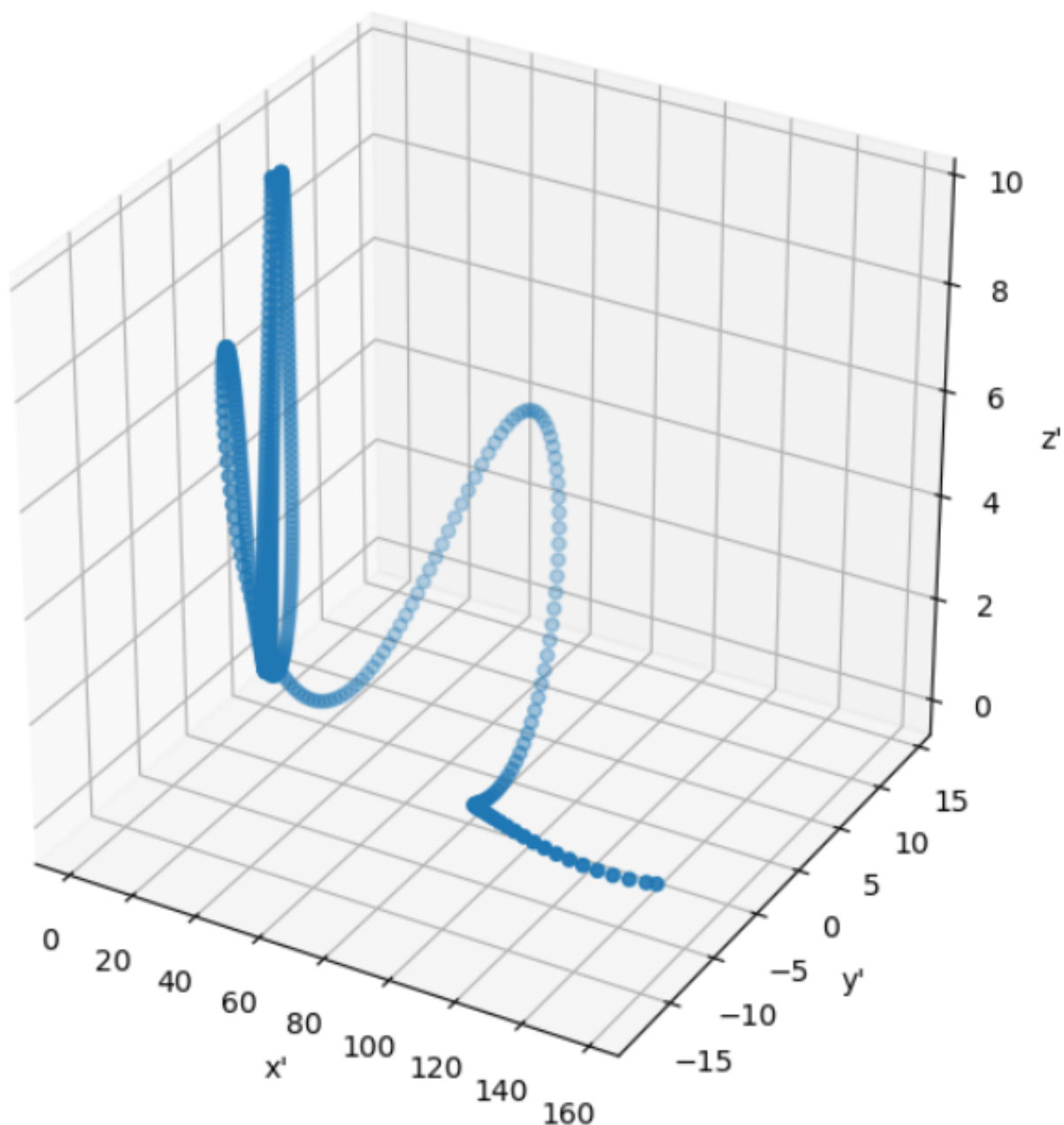
Na rysunku 12 przedstawiona została prędkość składowej mierzonej wzdłuż osi stożka cząstki, w zależności od czasu. W chwili początkowej wynosił on  $z(t = 0) = 0 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ . Wraz z trwającą symulacją wartość tej prędkości relaksuje się do skończonej, ale niezerowej wartości.



Rys. 13: Wykres funkcji energii całkowitej (Hamiltonianu) cząstki poruszającej się po powierzchni stożka w zależności od czasu dla rozwiązania numerycznego.

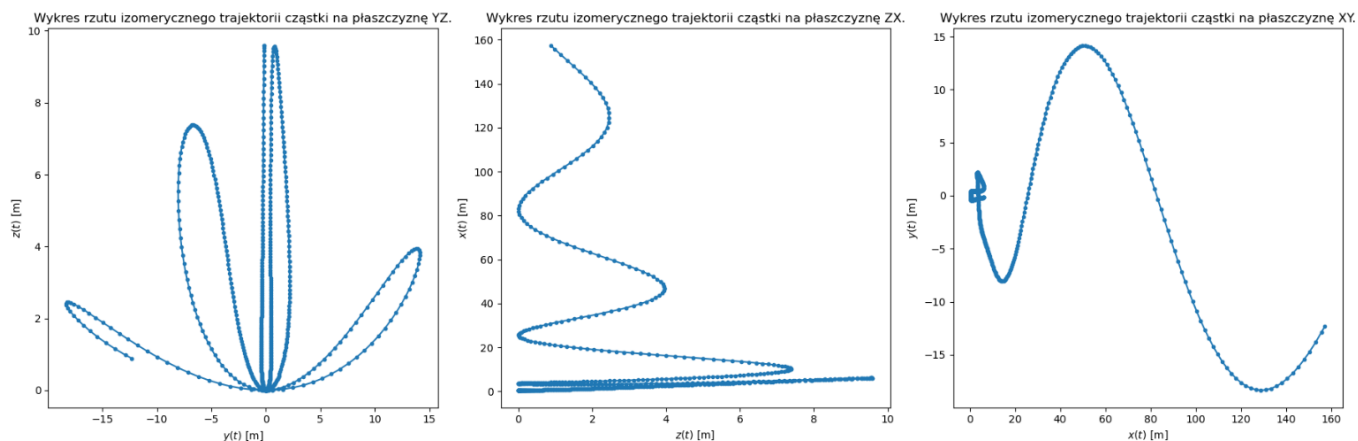
Na rysunku 13 przedstawiona została całkowita energia cząstki poruszającej się po powierzchni stożka w zależności

od czasu. W pierwszych chwilach symulacji jej wartość, jak i pozostałe parametry symulacji zmieniały się chaotycznie, ponieważ u początku ruchu podstawa stożka jest jeszcze względnie mała.



Rys. 14: Trajektoria ruchu cząstki w układzie laboratoryjnym widziana z perspektywy.

Na rysunku 14 przedstawiona została trajektoria ruchu cząstki poruszającej się po powierzchni stożka. dla tak zadanych warunków początkowych ruch ten jest dość chaotyczny, niemniej można dopatrzeć się pewnej oscylacji, którą jednakowoż trudno powiązać byłoby ze stożkiem.



Rys. 15: Rzuty izomeryczne na odpowiednie płaszczyzny.

Na rysunku 15 przedstawione zostały rzuty izomeryczne trajektorii cząstki poruszającej się po powierzchni stożka na 3 różne (ortogonalne) płaszczyzny. Również i tu następuje dosyć chaotyczny ruch symulowanej cząstki.

## 4 Wnioski

Podsumowując, korzystanie z numerycznych metod rachunkowych pozwala na symulowanie i modelowanie różnych zjawisk w sposób dokładny i efektywny. Metoda RK4, będąca jedną z najpopularniejszych i najskuteczniejszych metod numerycznych, pozwala na rozwiązanie równań różniczkowych o różnym stopniu skomplikowania z wysoką dokładnością.

Korzystanie z metody RK4 pozwala na uzyskanie dokładnych wyników symulacji i modelowania zjawisk w sposób bardziej precyzyjny niż przy użyciu innych metod numerycznych. Jednocześnie, złożoność obliczeniowa metody RK4 jest dość niska, co pozwala na stosowanie jej w praktyce na dużą skalę.

Wniosek zatem jest taki, że metoda RK4 jest bardzo przydatnym narzędziem do rozwiązywania różnego rodzaju problemów, a korzystanie z numerycznych metod rachunkowych pozwala na dokładne i efektywne modelowanie zjawisk.