

Monte Carlo: całkowanie metodą warstwową

30 marca 2023

1 Wstęp

W projekcie należy użyć metody MC do oszacowania wartości całek

$$C_1 = \int_{-3}^3 (1 + \tanh(x)) dx = 6 \quad (1)$$

$$C_2 = \int_0^{10} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(10) - \arctan(0) \quad (2)$$

$$C_3 = \int_0^1 \cos^{10}(\pi x) dx = 0.24609375 \quad (3)$$

Całki te należy oszacować używając: 1) metody podstawowej, 2) losowania systematycznego, 3) losowania warstwowego.

1.1 Metoda podstawowa

Dla całki postaci

$$C = \int_a^b g(x) dx \quad (4)$$

identyfikujemy fgp jako $f(x) = \text{const}$, z warunku normalizacji dostajemy

$$\int_a^b f(x) dx = \text{const} \int_a^b 1 dx = \text{const}(b-a) = 1 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (5)$$

Modyfikujemy całkę

$$C = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \int_a^b [(b-a)g(x)] f(x) \quad (6)$$

a jej wartość przybliżamy średnią z próby

$$C \approx \bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (b-a) \cdot g(x_i), \quad x_i \sim U(a, b) \quad (7)$$

gdzie losowanie z rozkładu jednorodnego w zakresie $[a, b]$, wykonujemy stosując prostą transformację $x_i = a + (b-a) \cdot U_i$, $U_i \sim U(0, 1)$. $U(0, 1)$ to generator liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym w przedziale $(0, 1)$. Liczymy jeszcze drugi moment

$$\overline{g^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(b-a) \cdot g(x_i)]^2, \quad x_i \sim U(a, b) \quad (8)$$

i wariancję średniej

$$\sigma_{\bar{g}}^2 = \frac{\overline{g^2} - \bar{g}^2}{N} \quad (9)$$

1.2 metoda losowania systematycznego (warstwowe nieoptymalne)

Najpierw dokonujemy podziału obszaru całkowania na M podobszarów. Załóżmy, że mają identyczną szerokość $\Delta x = (b - a)/M$. Wówczas lewą (x_m) i prawą (x_{m+1}) granicę przedziału wyznaczają

$$x_m = a + \Delta x \cdot (m - 1), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

$$x_{m+1} = x_m + \Delta x \quad (11)$$

W metodzie losowania systematycznego (warstwowego nieoptymalnego) określamy prawdopodobieństwo wylosowania zmiennej z danego podprzedziału p_m

$$p_m = \int_a^b f(x) dx \quad (12)$$

co dla **równomiernego podziału i jednorodnego rozkładu fgp** daje $p_m = 1/M$. Dla każdego podprzedziału m -tego określamy liczbę losowań

$$N_m = p_m \cdot N \quad (13)$$

obliczamy $n = 1$ i 2 moment oraz wariancję

$$\bar{g}_m^n = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} [(b - a) \cdot g(x_{i_m})]^n, \quad x_{i_m} \sim U(x_m, x_{m+1}) \quad (14)$$

$$\sigma_m^2 = \bar{g}_m^2 - (\bar{g}_m)^2 \quad (15)$$

Teraz możemy oszacować wartość całki C jako średnią i wariancję średniej

$$C \approx \bar{g} = \sum_{m=1}^M p_m \cdot \bar{g}_m \quad (16)$$

$$\sigma_{\bar{g}}^2 = \sum_{m=1}^M \frac{p_m^2}{N_m} \cdot \sigma_m^2 \quad (17)$$

1.3 metoda losowania warstwowego (optymalnego)

W metodzie tej postępujemy identycznie jak dla losowania systematycznego poza jednym wyjątkiem, liczbę losowań N_m w każdym podprzedziale określamy według wzoru

$$N_m = \frac{p_m \hat{\sigma}_m}{\sum_{j=1}^M p_j \hat{\sigma}_j} N \quad (18)$$

gdzie: $\hat{\sigma}_j$ to prognozowane/szacowane wartości odchylenia standardowego, które obliczamy metodą podstawową dla małej wartości N (np. $N = 10^2, 10^3$) - bo dokładnych wartości nie znamy. Oczywiście w trakcie wykonywania właściwych obliczeń (metoda warstwowa) na bieżąco wyznaczamy "dokładniejsze" wartości σ_m i ich ostatecznie używamy do liczenia wariancji średniej.

2 Zadania do wykonania

1. Zaimplementować metodę podstawową całkowania MC i oszacować wartość całki C_1 , odchylenie standardowe średniej $\sigma_{\bar{g}}$ oraz błąd względny $R = (\sigma_{\bar{g}}/\bar{g}) \cdot 100\%$ dla $N = 10^k$, $k = 2, 3, 4, 5$. Przedział $[a, b]$ podzielić na $M = 10$ podprzedziałów o identycznej szerokości. Dla każdego N określić ilość liczb wpadających do każdego podprzedziału. Wyniki zebrać w tabelce.

2. Zaimplementować metodę losowania systematycznego i powtórzyć obliczenia z zadania 1.
3. Zaimplementować metodę losowania warstwowego i powtórzyć obliczenia z zadania 1. Szacunkowe wartości $\hat{\sigma}_m$ określić przy użyciu metody systematycznej, używając 100 losowań (metoda systematyczna) dla $N = 10^2$ (metoda warstwowa) oraz 1000 losowań (metoda systematyczna) dla $N \geq 10^3$ (metoda warstwowa). (Należy pamiętać, że do szacowania $\hat{\sigma}_m$ stosujemy krótkie serie losowań.)
4. Powtórzyć obliczenia z punktów: 1, 2 i 3 dla całek C_2 i C_3
5. Tabelki z wynikami zamieścić w raporcie, wyniki przeanalizować i skomentować, zamieścić przykładowe (wybrane) histogramy rozkładu ilości losowań dla poszczególnych podprzedziałów, krótko skomentować (uzasadnić) różnice w wysokościach słupków na histogramach dla trzech użytych metod.