AGH University of Science and Technology
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek Studiów: Informatyka Stosowana

Metody Numeryczne

Laboratorium 3b

Metoda sprzężonych gradientów dla macierzy wstęgowej

zrealizował
Przemysław Ryś

Kraków, 14 Marzec 2024

1 Cel ćwiczenia

Celem tego zadania jest zaimplementowanie metody sprzężonych gradientów oraz zbadanie jej efektywności i dokładności rozwiązania w kontekście układu równań liniowych opisanego powyżej. Analizujemy wpływ różnych wektorów startowych na liczbę iteracji potrzebną do uzyskania zbieżności oraz badamy dokładność rozwiązania w zależności od wybranych warunków zakończenia iteracji.

2 Opis problemu

Rozważamy problem rozwiązania układu równań liniowych postaci $Ax = b$, gdzie macierz A jest macierzą wstęgową o wymiarach $n \times n$, a wektor b jest wektorem wyrazów wolnych. Macierz A jest zdefinkj,ljkjmjmiowana zgodnie z następującą formułą:

$$A[i][j] = \begin{cases} \frac{1}{1+|i-j|}, & \text{gdy } |i-j| \leq m \\ 0, & \text{gdy } |i-j| > m \end{cases}$$

gdzie $m = 5$. Ta forma macierzy wstęgowej implikuje, że większość jej elementów jest zerowa, co ma istotny wpływ na wydajność i złożoność obliczeniową algorytmów rozwiązujących układ równań.

Gdy mówimy o macierzach wstęgowych, oznacza to, że macierze te mają wiele zer poza główną przekątną. Obydwie metody są efektywne dla takich macierzy ze względu na ich właściwości.

3 Opis metody

Metoda sprzężonych gradientów jest używana do rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$. Polega ona na iteracyjnym wyznaczaniu kolejnych przybliżeń rozwiązania poprzez minimalizację reszty równania. W każdej iteracji obliczana jest nowa wartość wektora rozwiązań na podstawie poprzedniego, przy użyciu odpowiednio dobranego kierunku poszukiwań.

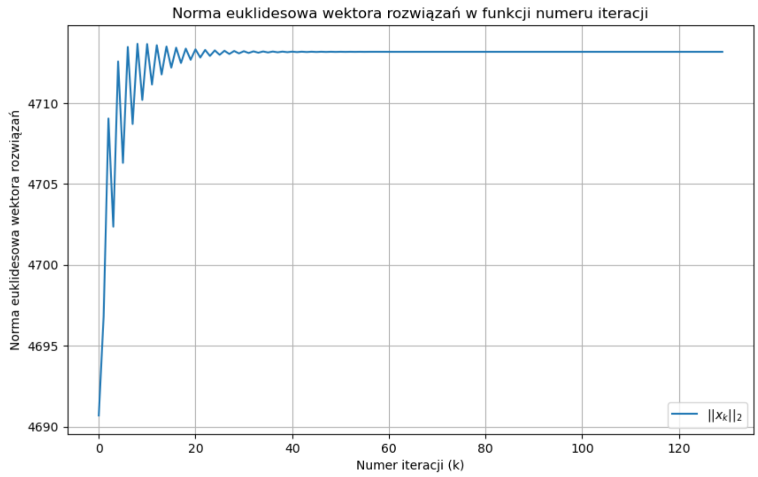
1. **Inicjalizacja:** Inicjalizowany jest wektor startowy x oraz obliczany jest pierwszy wektor residuów r.
2. **Pętla iteracyjna CG:** Następnie w pętli iteracyjnej metoda sprzężonych gradientów minimalizuje residuum w kolejnych krokach. Każda iteracja składa się z obliczenia kierunku poszukiwań (gradientu) oraz wyznaczenia optymalnej długości kroku w tym kierunku. Nowe przybliżenie rozwiązania jest aktualizowane na podstawie otrzymanych informacji.
3. **Warunek zakończenia:** Pętla iteracyjna jest kontynuowana do momentu, gdy norma residuum jest wystarczająco mała, co oznacza, że znalezione przybliżenie jest dostatecznie bliskie rzeczywistemu rozwiązaniu.

4 Wyniki

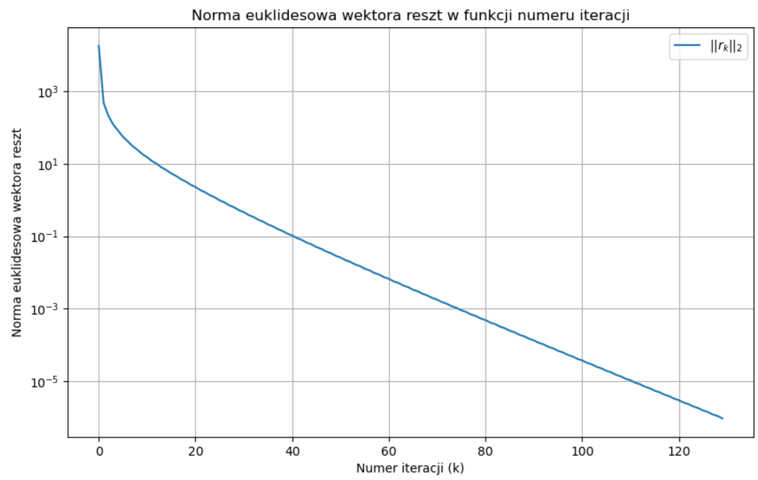
Tab. 1: Wyniki normy wektora błędu, parametru α oraz normy wyznaczonego rozwiązania od numeru iteracji

i	r_a norm	α_a	x_a norm
1	482.3034	0.4969	—
2	211.9717	0.4573	4696.812
3	121.6065	0.47743	4709.05
⋮	⋮	⋮	⋮
127	1.181359e-06	0.49589959	4713.172149673608
128	1.070216e-06	0.47006263	4713.17215001563
129	9.190394e-07	0.49592120	4713.172149719358

Na załączonej tabeli 1 widzimy, że analogicznie jak dla metody największego spadku dla macierzy wstęgowej (Raport z laboratorium 3a) potrzebujemy 130 iteracji metody dla uzyskania rozwiązania z dokładnością rzędu $1e-06$. W powyższej tabeli jest o jedną iterację mniej ponieważ ich odliczanie rozpoczyna się po uzyskaniu pierwszego rozwiązania, natomiast w poprzednim dokumencie jeszcze przed pierwszym wyliczeniem. Widzimy że z każdą iteracją moduł wektora błędu maleje, do momentu osiągniecia warunku przerwania pętli, tj osiągnięcia do kładności rzędu $1e-06$.



Rys. 1: Wartość normy wektora rozwiązań w numerze iteracji



Rys. 2: Wartość normy wektora błędu w numerze iteracji

Rysunki 1 oraz 2 przedstawiają zmianę wartości normy w argumencie numeru iteraji. Rysunek związany z rozwiązaniem zagadnienia są w skali liniowej, zauważamy duże oscylacje metody w pierwszych 20 iteracjach, następnie wynik się relaksuje do otoczenia dokładnego wyniku. W przypadku normy wektora błędu, przedstawiono oś y w skali logarytmicznej. Jak można zauważyć w tej skali błąd wygasza się w miarę postępujących iteracji.

5 Podsumowanie

Metoda sprzężonych gradientów dla macierzy wstęgowej jest potężnym narzędziem do rozwiązywania układów równań liniowych. Polega na iteracyjnym podejściu, gdzie w każdej iteracji obliczane są nowe przybliżenia rozwiązania poprzez minimalizację reszty równania. Analiza danych oraz rysunków potwierdza, że metoda ta, mimo początkowych oscylacji, stabilizuje się i zbliża do dokładnego rozwiązania. Wartości normy błędu wykazują charakterystyczny wzrost na początku, który następnie stopniowo maleje, co wskazuje na skuteczność metody.