AGH University of Science and Technology

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek Studiów: Fizyka Techniczna

Metody Monte Carlo

Laboratorium 4

Proste całkowanie z szacowaniem wariancji

zrealizował
Przemysław Ryś

Kraków, 18 Marzec 2024

1 Opis zagadnienia

Wstęp

Dla rozkładu jednorodnego w kole K_α, definiujemy funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_\alpha(x,y)$, która jest stała wewnątrz koła i wynosi C:

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} C & \text{dla } (x,y) \in K_\alpha \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Aby zapewnić normalizację, wartość stałej C musi być tak dobrana, aby całkowita gęstość prawdopodobieństwa wynosiła 1. Zatem:

$$1 = \iint_{K_\alpha} f_\alpha(x,y)\, dxdy = C\pi R_\alpha^2 \to C = \frac{1}{\pi R_\alpha^2}$$

1.3 Powierzchnia koła i części wspólnej, wariancja wyniku

Powierzchnia koła S_α jest równa jego powierzchni, czyli πR_α^2. Dla części wspólnej $S_{\alpha,\beta}$, definiujemy funkcję wskaźnikową $\theta_{\alpha,\beta}(x,y)$, która przyjmuje wartość 1 dla punktów należących do obu kół K_α i K_β oraz 0 w przeciwnym przypadku.

$$\theta_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (x,y) \in K_\alpha \cap K_\beta \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Pole powierzchni części wspólnej $S_{\alpha,\beta}$ możemy obliczyć jako średnią z N wartości funkcji $\theta_{\alpha,\beta}(x,y)$, przyjmując N punktów (x_i, y_i) losowanych z rozkładu jednorodnego w kole K_α:

$$\overline{S}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \pi R_\alpha \theta_{\alpha,\beta}(x_i, y_i)$$

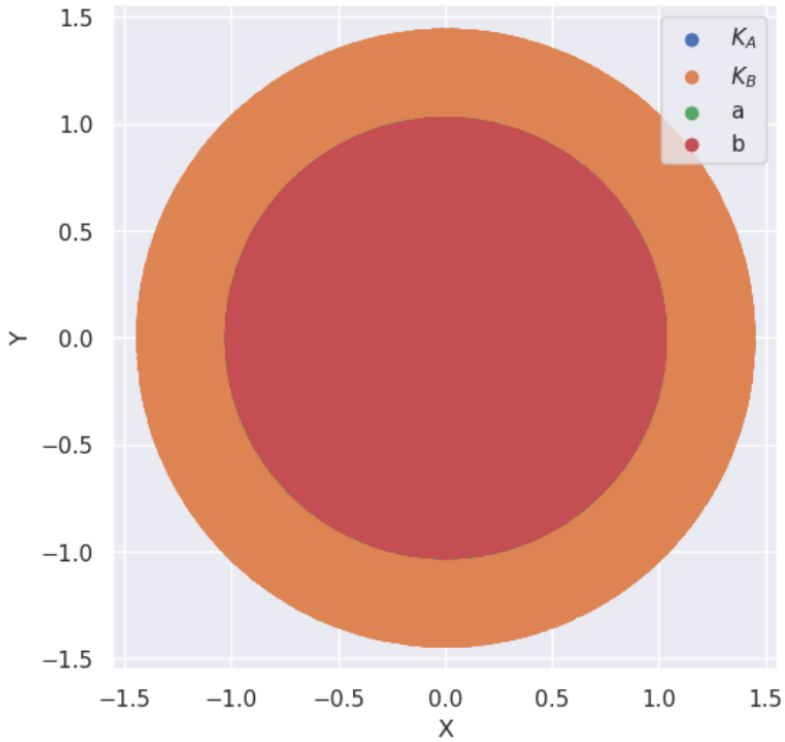
Mając wartości pierwszego i drugiego momentu, możemy obliczyć wariancję wartości średniej $\overline{S}_{\alpha,\beta}$:

$$\sigma_{\overline{S}^2_{\alpha,\beta}} = \mu(2) - N\left(\mu(1)\right)^2$$

oraz odchylenie standardowe wartości średniej:

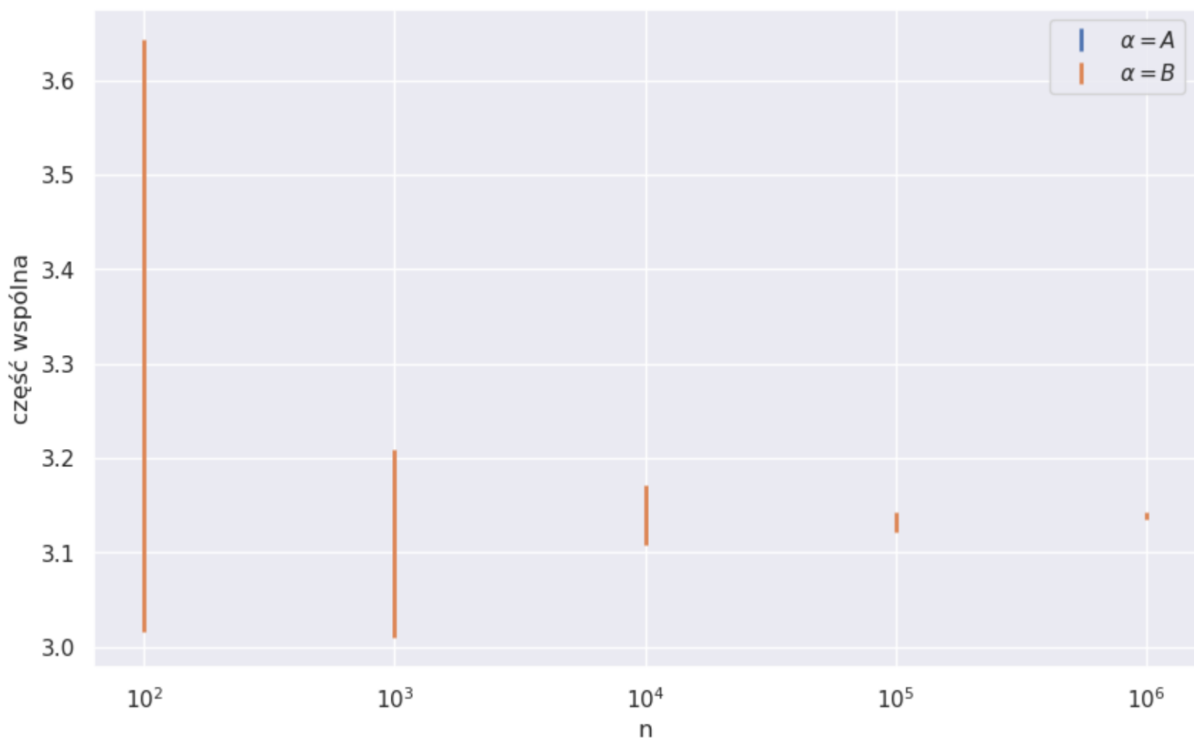
$$\sigma_{\overline{S}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\mu(2) - N\left(\mu(1)\right)^2}$$

2 Wyniki



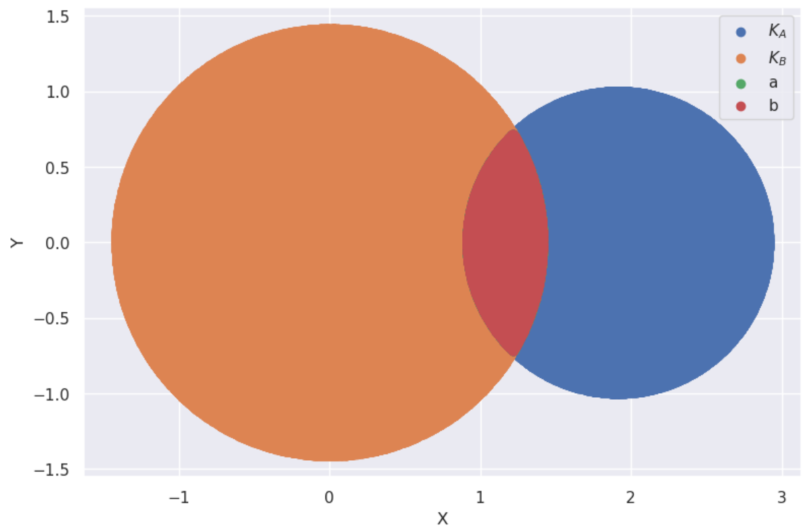
Rys. 1: Wykres położeń punktów wygenerowanych w okręgach dla $x_a = 0$

Na wykresie 1 zauważamy, że przy braku przesunięcia środka pierwszego okręgu, są one w tym samym położeniu.



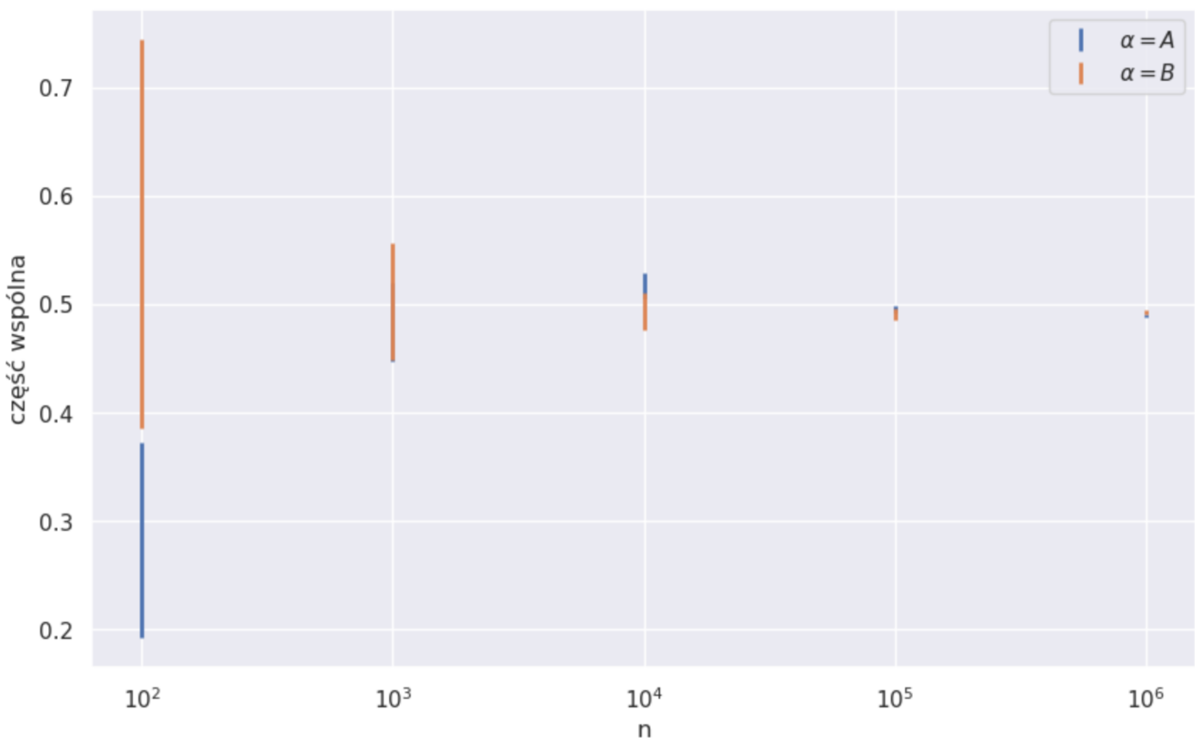
Rys. 2: Wspólna powierzchnia dla częściowego i całkowitego przekrywania się kół dla $x_a = 0$

Na wykresie 2 zauważamy stabilizację wyniku dla pola części wspólnej przekrywających się kół, nie zauważamy danych dla drugiego okręgu ponieważ zawiera się on w pełni w drugim z nich.



Rys. 3: Wykres położeń punktów wygenerowanych w okręgach dla $x_a = R_b + 0.5 * R_a$

Na wykresie 3 zauważamy, że okrąg A uległ przesunięciu, a tym samym losowane punkty.



Rys. 4: Wspólna powierzchnia dla częściowego i całkowitego przekrywania się kół dla $x_a = R_b + 0.5 * R_a$

Na wykresie 4 zauważamy stabilizację wyniku dla pola części wspólnej przekrywających się kół. Tym dane dla obu okręgów są tu widoczne, ponieważ zawierają się one w sobie tylko częściowo.

3 Wnioski

Podsumowując, możemy stwierdzić, że zastosowane efektywne metody obliczeniowe do analizy rozkładu punktów w przestrzeni poprzez obliczenie powierzchni koła oraz części wspólnej dwóch kół, możliwe było uzyskanie informacji na temat ich geometrii i zależności. Dodatkowo, obliczenie wariancji wartości średniej dla części wspólnej dwóch kół pozwala ocenić stabilność wyniku w kontekście zmian losowych. Wykresy położeń wylosowanych punktów ukazują efektywne ich rozmieszczenie, natomiast wykresy zmian pola części wspólnej stabilizują się w miarę wykonywanych kroków metody.