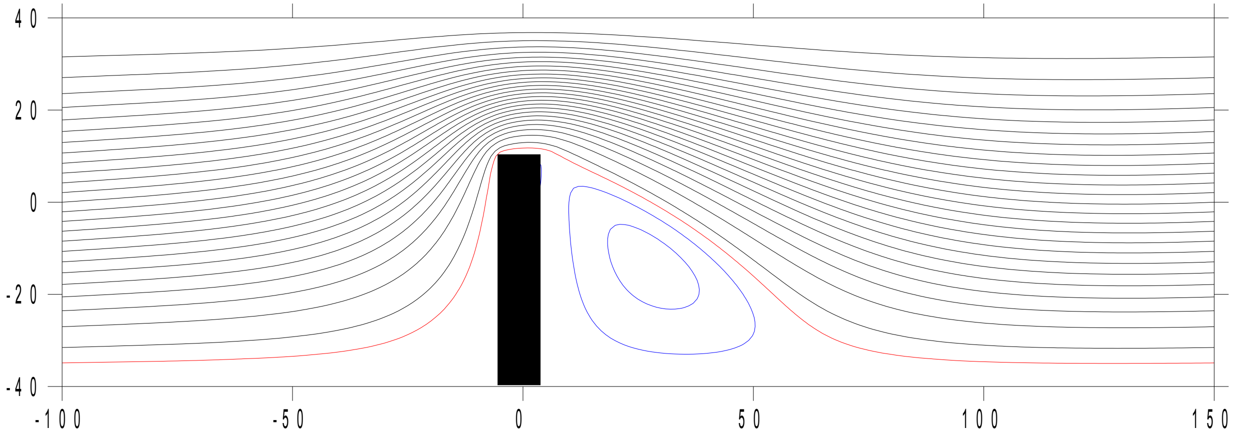
Równanie adwekcji (najprostsze cząstkowe zależne od czasu.
posłuży do wprowadzenia analizy rozwiązań numerycznych równań cząstkowych)

linie strumienia (ψ = const) dla cieczy lepkiej, nieściśliwej



rozwiązania równań
Naviera-Stokesa
(czeka nas laboratorium
i wykład na ten temat)

gradient ciśnienia i kierunek przepływu

(u,v)

lepka: na brzegach prędkość znika

nieściśliwa:

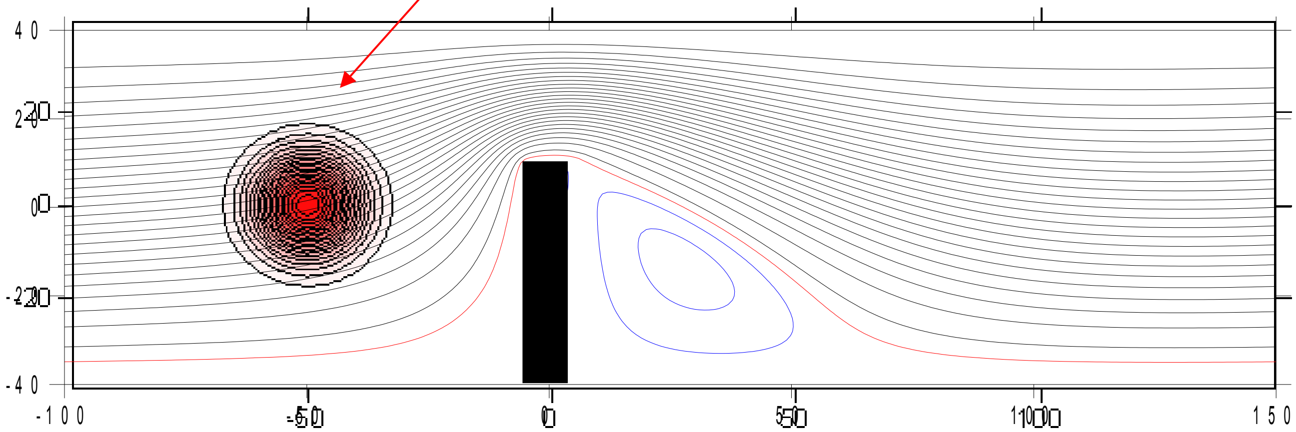
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

im gęściej poziomice ψ w *y*
tym większa szybkość w *x*

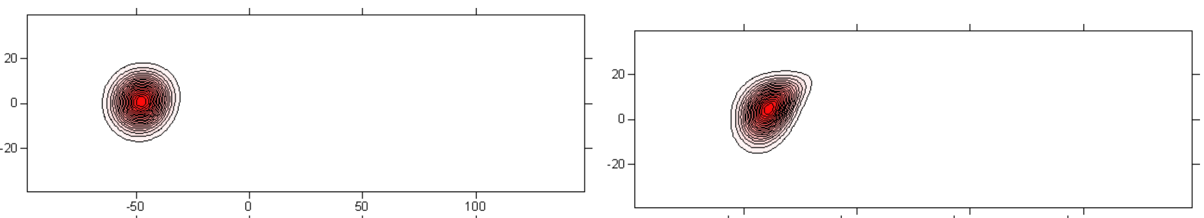
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

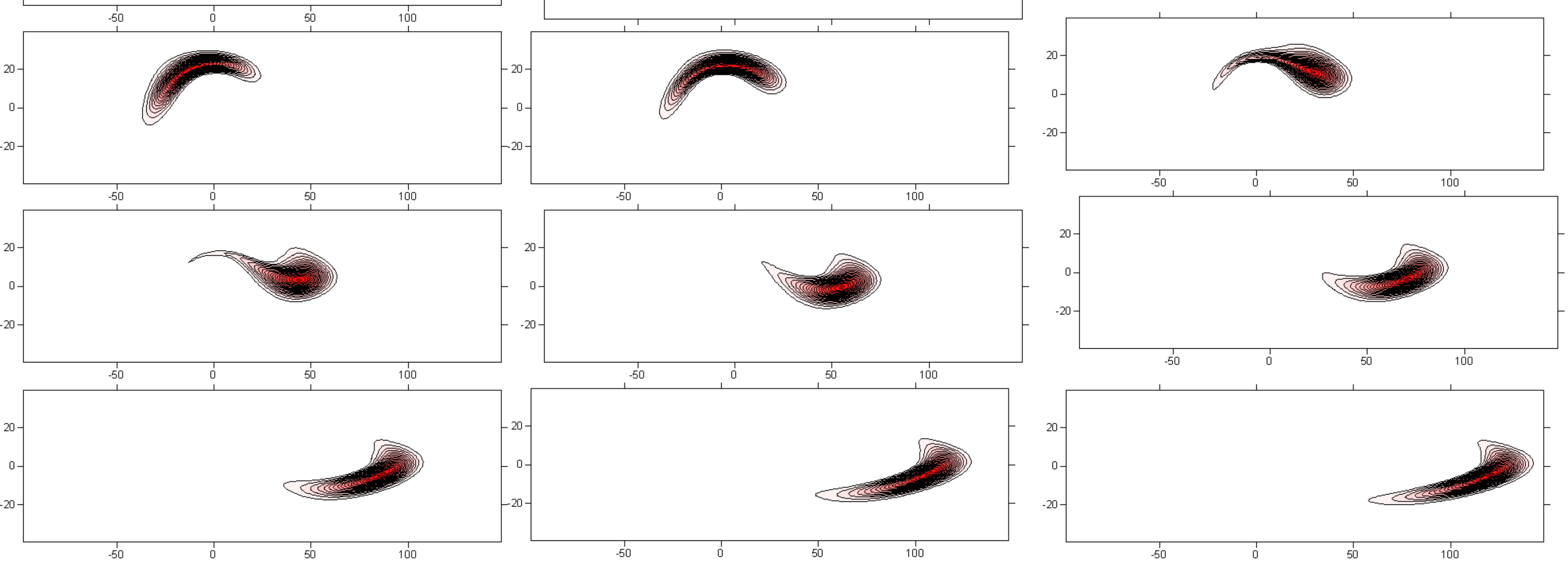
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

rozlana plama z oleju

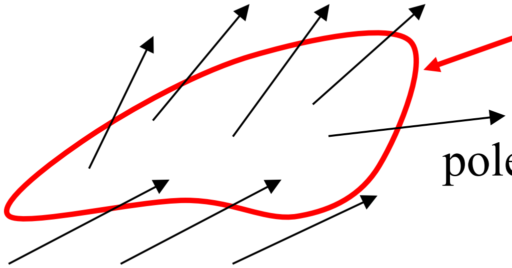


prąd będzie ją unosił:





Równanie, które opisuje unoszenie:



obszar kontrolny *O*
o brzegu *Γ*

pole prędkości **v** (zakładamy, że niezależne od czasu)

zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt}\int_O d^3r\,\rho(\mathbf{r},\mathbf{t}) = -\int_\Gamma d^2r\,\rho(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r})$$

minus: bo w całce powierzchniowej
mnożymy całkowany wektor skalarnie
z normalnym do powierzchni (wychodzącym
z powierzchni)

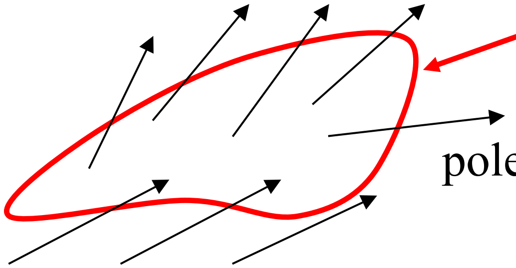
prawo Gaussa:

$$\int_\Gamma d^2r\,\rho(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_O d^3r\,\nabla\cdot[\rho(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r})]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},\mathbf{t}) + \nabla\cdot[\rho(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

równanie adwekcji:
opisuje unoszenie wielkości
skalarnej przez stacjonarne
pole wektorowe

Równanie, które opisuje proces:



obszar kontrolny O
o brzegu Γ

pole prędkości **v** (zakładamy, że niezależne od czasu)

zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt}\int_O d^3r\,\rho(\mathbf{r},\mathbf{t}) = -\int_\Gamma d^2r\,\rho(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},\mathbf{t}) + \nabla\cdot[\rho(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

wersja
1D:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}[\rho(x,t)v(x)] = 0$$

1D: prawo zachowania jako równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(x,t)v(x)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \cancel{\rho\frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

zajmiemy się problemem modelowym, w którym v=const
(np jednowymiarowy przepływ cieczy nieściśliwej)

$$u \equiv \rho \qquad \longrightarrow \qquad u_t + u_x = 0$$

v=1:

---

chcemy wprowadzić pojęcie *charakterystyki równania*: linia *x(t)*, taka, że $u(x(t),t)=const$

różniczka zupełna: $du=u_t dt+u_x dx=(u_t+u_x\, dx/dt)dt$

gdy $dx/dt = 1$ $\qquad du=0\, dt$

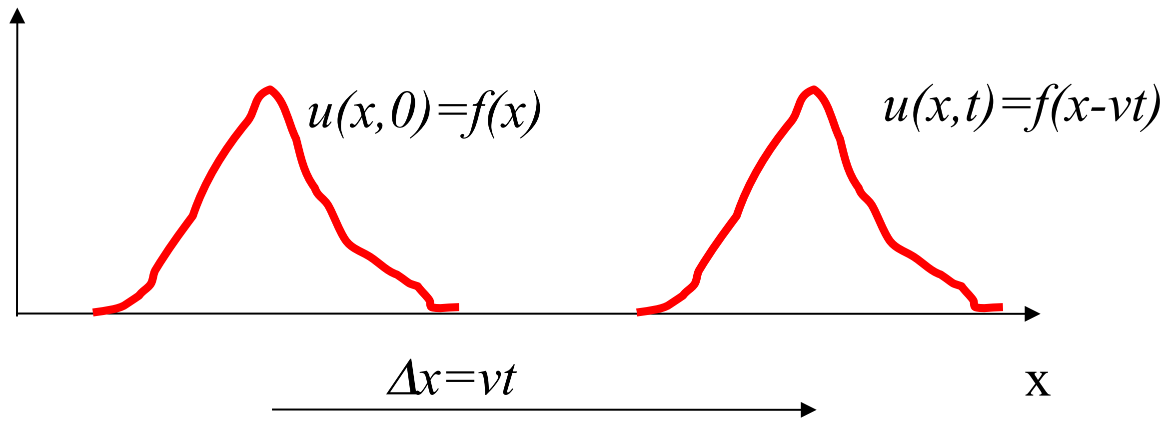
czyli: u spełniające równanie adwekcji jest stałe na charakterystykach $x=t+c$

czyli: $\qquad u(x,t)=f(x-t)$

sprawdzić, że $u(x,t)=f(x-t)$ (rozwiązanie d'Alamberta)

spełnia: $u_t + u_x = 0$

(warunek początkowy „unoszony" z prędkością v bez zmiany kształtu)



równanie adwekcji 1D: $u_t + vu_x = 0$

ośrodek nieskończony, warunek początkowy: $u(x,0) = \phi(x)$

rozwiązanie dokładne: $u(x,t) = \phi(x - vt)$

Po co rozwiązanie numeryczne skoro analityczne tak proste?

1) Numeryczne potrzebne, gdy pole prędkości nieznane (zmienne, będące wynikiem pomiarów lub innych rachunków).

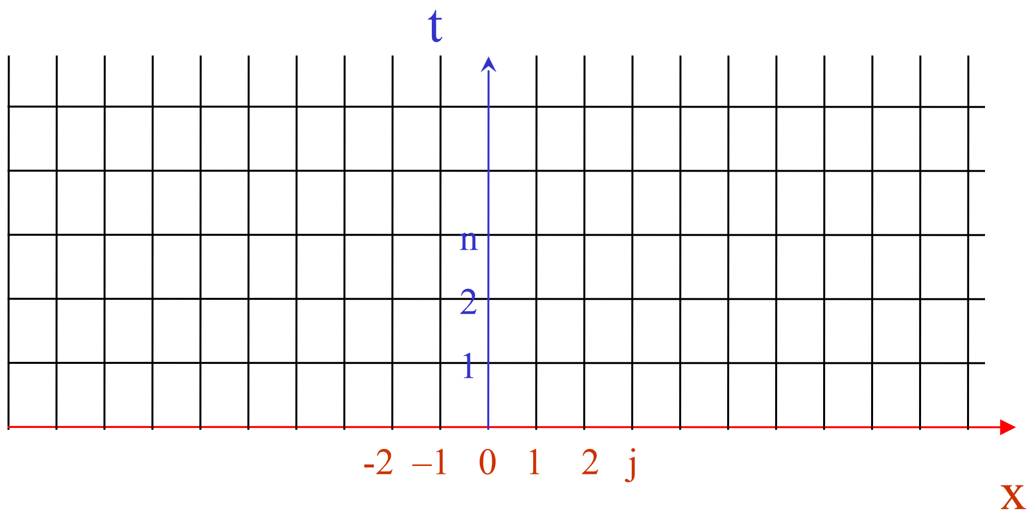
2) Czynnik adwekcyjny (konwekcyjny) ważny w bardziej
złożonych problemach transportu masy / ciepła

3) Najprostsze równanie:
posłuży do wprowadzenia analizy numerycznej równań cząstkowych

schematy jawne/niejawne, analiza stabilności, dyfuzja i dyspersja numeryczna

$$u_t + v u_x = 0 \qquad u(x,t) = \phi(x - vt)$$

metoda różnic skończonych



poszukujemy rozwiązania na siatce o stałych krokach Δx i Δt.

rozwiązanie dokładne $$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

rozwiązanie metody różnic skończonych $$U_j^n \simeq u_j^n$$

W rachunkach numerycznych na siatce ośrodek musi być skończony:

1) wystarczający duży aby w interesującym nas czasie pakiet nie doszedł do końca
2) lub periodyczne warunki brzegowe

$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t) \qquad\qquad U_j^n \simeq u_j^n$$

równania różnicowe na U : z rozwinięcia Taylora

wartość u w funkcji u oraz pochodnych punktu sąsiedniego, ta sama chwila czasowa

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)_j^n \Delta x^k + \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}}\right)_{j+\xi}^n \Delta x^{k+1}$$

ξ w (0,1)

zatrzymajmy dwa pierwsze wyrazy
i wyliczmy pochodną u po x w punkcie j (przedni iloraz różnicowy.)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \underline{- \frac{1}{2}(u_{xx})_{j+\xi}^n \Delta x} \longrightarrow (U_x)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}$$

jeśli rozwiniemy u_{j-1} w j dostaniemy wsteczny iloraz różnicowy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x} \underline{+ \frac{1}{2}(u_{xx})_{j-\eta}^n \Delta x} \longrightarrow (U_x)_j^n = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}$$

na czerwono: błędy dyskretyzacji wzorów po prawej iloraz centralny:

$$(U_x)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x}$$ z błędem dyskretyzacji

$$\tau_j^n = -\frac{1}{6}(u_{xxx})_{j+\xi}^n \Delta x^2$$

z (-1,1)

---

podobnie skonstruujemy przybliżone wyrażenia na pochodną czasową:

z(0,1)

$$(U_t)_j^n = \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t}$$ z błędem dyskretyzacji: $$\tau_j^n = -\frac{1}{2}(u_{tt})_j^{n+\theta}\Delta t$$

$$u_t + v u_x = 0$$

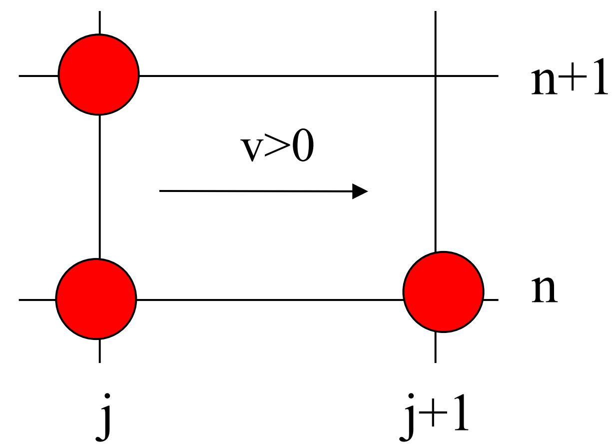
najprostszy wybór: czasowa i przestrzenna pochodna zastąpione przednim ilorazem różnicowym

rozwiązanie dokładne :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + v\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \cancel{(u_t)_j^n} + v(u_x)_j^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_j^{n+\theta} + v\frac{\Delta x}{2}(u_{xx})_{j+\xi}^n$$

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} + v\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

„szablon *(stencil)* obliczeniowy"
„molekuła obliczeniowa"



liczba Courant'a $\alpha = \frac{vdt}{dx}$

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\,U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

dla $v>0$: schemat nazywa się *downwind* schemat jest *spójnym przybliżeniem* równania różniczkowa jeśli jego przepis w granicy zerowych kroków czasowych dąży do równania różniczkowego

spójność definiowana wg. błędu dyskretyzacji:

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności
mówimy, że metoda **spójna** jeśli:
błędy dyskretyzacji czasowy i przestrzenny rzędu co najmniej pierwszego:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+v\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=\cancel{(u_t)_j^n+v(u_x)_j^n}+\underbrace{\frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_j^{n+\theta}+v\frac{\Delta x}{2}(u_{xx})_{j+\xi}^n}_{\text{błąd dyskretyzacji}}$$

schemat jest <u>*spójnym przybliżeniem*</u> równania różniczkowa jeśli jego przepis w granicy zerowych kroków czasowych dąży do równania różniczkowego

spójność definiowana wg. błędu dyskretyzacji:

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności
mówimy, że metoda **spójna** jeśli:
błędy dyskretyzacji czasowy i przestrzenny rzędu co najmniej pierwszego:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+v\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=\cancel{(u_t)_j^n+v(u_x)_j^n}+\underbrace{\frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_j^{n+\theta}+v\frac{\Delta x}{2}(u_{xx})_{j+\xi}^n}_{\text{błąd dyskretyzacji}}$$

często wygodniej używać: lokalnego błędu dyskretyzacji (błędu obcięcia, błędu lokalnego)

$$U_j^{n+1}=(1+\alpha)U_j^n-\alpha U_{j+1}^n \quad +O(\Delta t^2)+O(\Delta x)$$

błąd lokalny: przestrzenny błąd lokalny takiego rzędu jak błąd dyskretyzacji
czasowy błąd lokalny: jeden rząd wyżej niż błąd dyskretyzacji

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\,U_j^n - \alpha U_{j+1}^n \quad +O(\Delta t^2)+O(\Delta x)$$

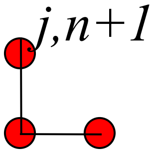
błąd lokalny: czasowy rzędu Δt^2, przestrzenny rzędu Δx

schemat ma szanse być zbieżny

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności
mówimy, że metoda **spójna** jeśli:
lokalny błąd czasowy rzędu co najmniej 2
a lokalny przestrzenny rzędu co najmniej 1

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\,U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



dla v>0

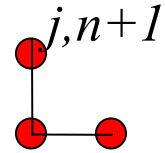
tzw. *downwind*

błąd lokalny: O(Δt²),O(Δx)

---

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\, U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



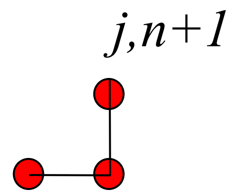
dla v>0
tzw. *downwind*

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

---

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



dla v>0
tzw. *upwind*

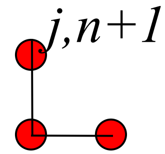
$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

---

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\, U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



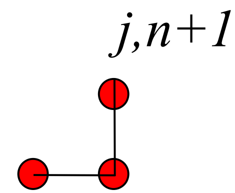
dla v>0
tzw. *downwind*

błąd lokalny: $O(\Delta t^2)$,$O(\Delta x)$

---

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



dla v>0
tzw. *upwind*

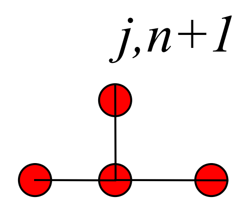
$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2)$,$O(\Delta x)$

---

przedni iloraz czasowy, centralny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



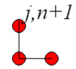
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2)$,$O(\Delta x^2)$

jak się sprawdzają?

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\, U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



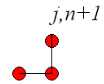
dla v>0
tzw. *downwind*

błąd lokalny: O(Δt²),O(Δx)

---

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



dla v>0
tzw. *upwind*

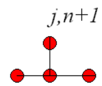
$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny: O(Δt²),O(Δx)

---

przedni iloraz czasowy, centralny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

błąd lokalny: O(Δt²),O(Δx²)

jak się sprawdzają?

jak się sprawdzają?

ten sam błąd czasowy,
przestrzenny: błąd dyskretyzacji *O(Δx²)*, wsteczny i przedni *O(Δx)*

wydawać się może 1) że centralny zawsze lepszy niż pozostałe
2) że *upwind* i *downwind* równie dobre

sprawdźmy:

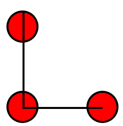
rachunek numeryczny: *v=1*

Δt=1/20, Δx=1/10, α=1/2

warunek początkowy $\phi(x) = \begin{cases} x, x \leq 0 \\ 0, x > 0 \end{cases}$

rozwiązanie dokładne (ruch konika szachowego dwa do góry jeden w prawo):

n \ j	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
5	-0.650	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000
4	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000



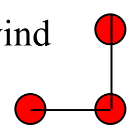
downwind

$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\, U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

5	-0.647	-0.591	-0.253	-0.759	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-0.600	-0.506	-0.338	-0.506	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.338	-0.338	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.225	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

po lewej stronie: nawet nieźle, niestety pakiet nie przechodzi na stronę x>0
niepokojący zachowanie dla j=-1

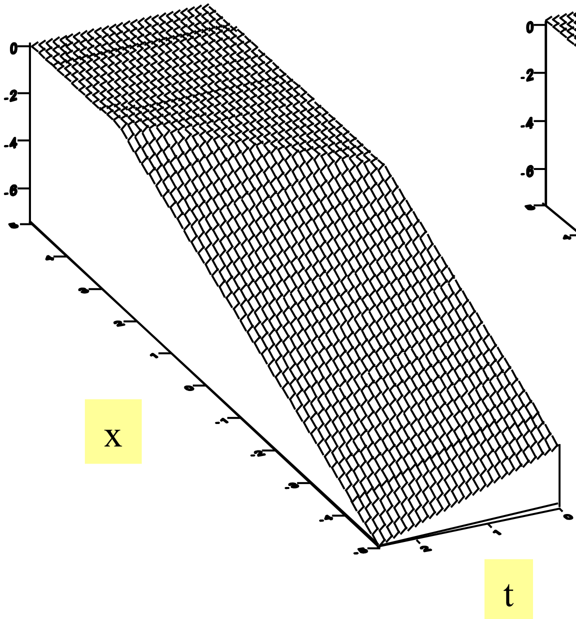
upwind

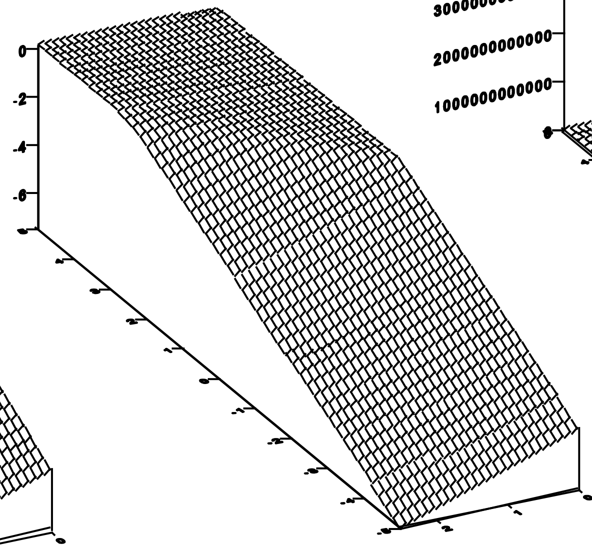


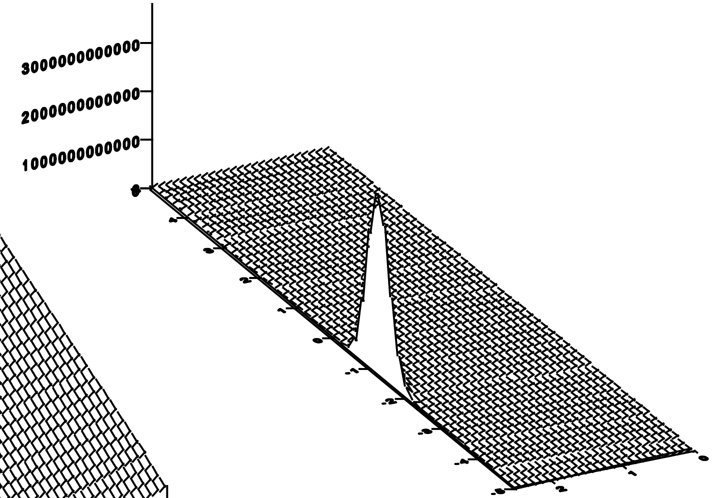
wygląda rozsądnie

5	-0.650	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.153	-0.072	-0.022	-0.003
4	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.106	-0.038	-0.006	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.063	-0.013	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	-0.025	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

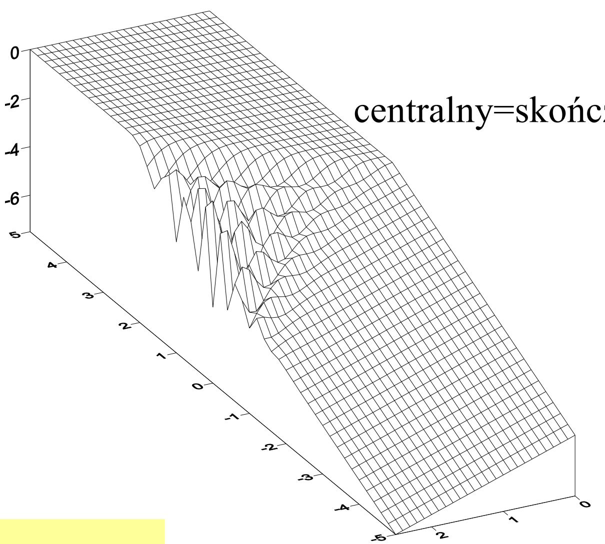
dokładny upwind downwind







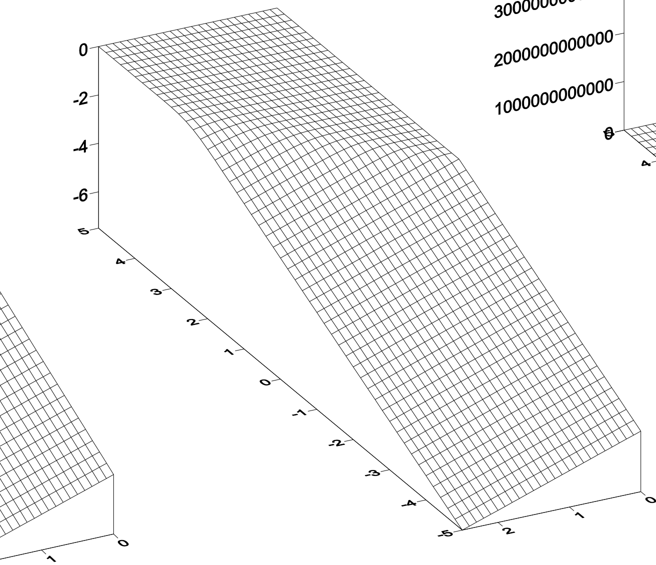
niestabilny ☹



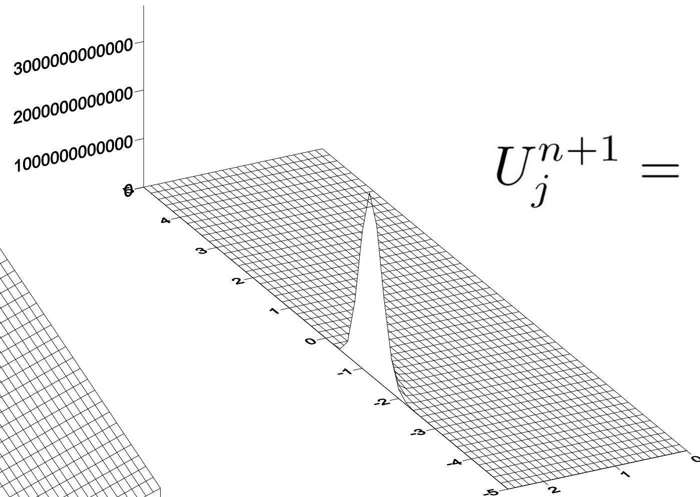
centralny=skończy się eksploizją!

$\Delta t = 1/20$, $\Delta x = 1/10$, $\alpha = 1/2$

upwind



downwind



$$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\,U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

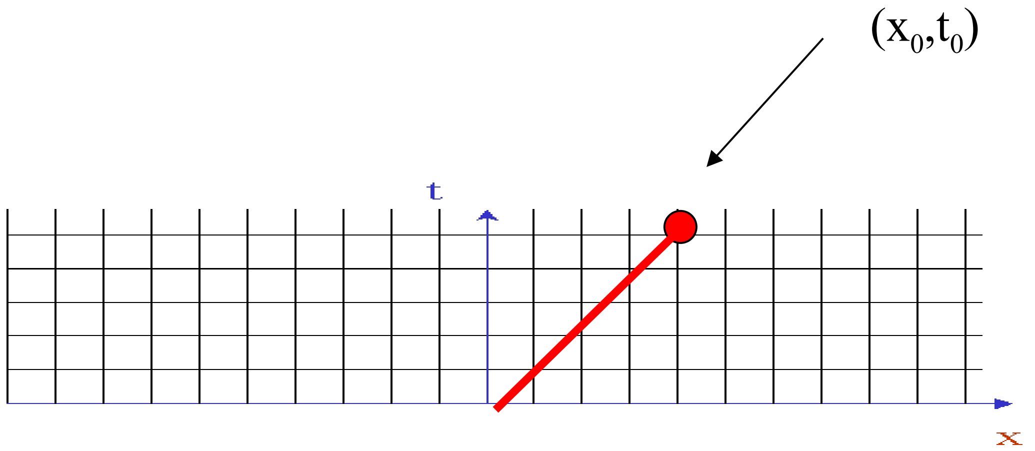
$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

Podobne formuły, dlaczego tak różne działanie?

domena zależności: dla punktu (x0,t0) zbiór wszystkich punktów które mają wpływ na wartość rozwiązania w u(x0,t0)

domena zależności: dla równania adwekcji

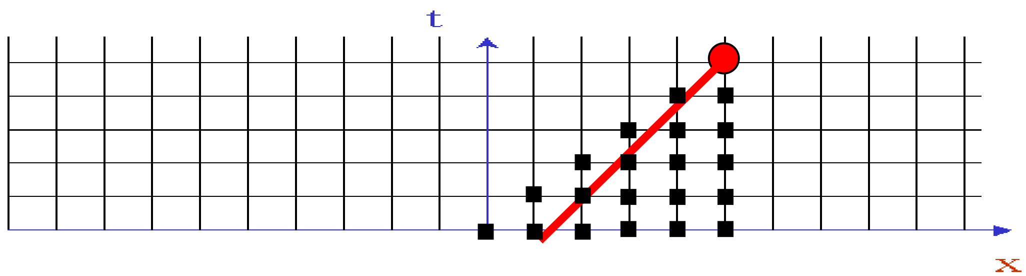
$$u_t + v u_x = 0 \qquad v=1$$

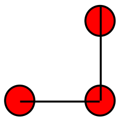


domena zależności to charakterystyka równania adwekcji dana formułą $t=x+C$ z $C=t_0-x_0$

numeryczna domena zależności punktu (j0,n0)
zbiór oczek siatki, które mają wpływ na rozwiązanie w tym punkcie

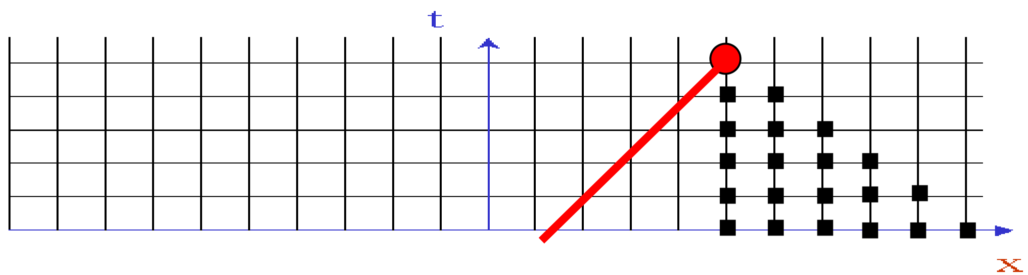
pod wiatr

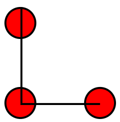




domena numeryczna zawiera w sobie
dokładną domenę zależności

z wiatrem





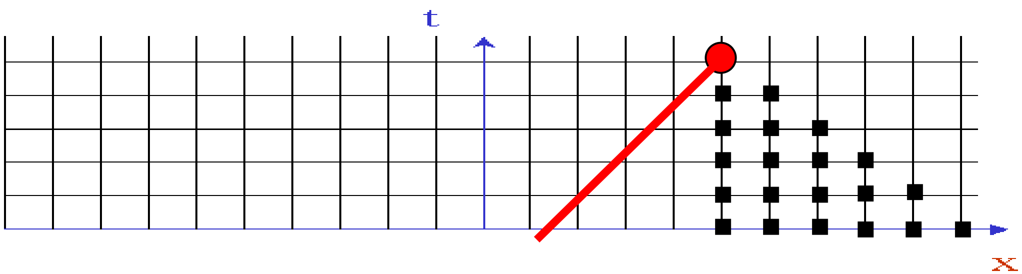
schemat *downwind* zbiera informacje z kierunku przeciwnego
niż dokładny

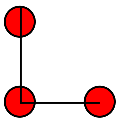
nie może dać dobrego wyniku bo: warunek początkowy nie ma
żadnego wpływu na rezultat

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0<t<T$ jeśli:
$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \to 0,\ n \to \infty,\ \Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0,\ n\Delta t \le T$

$\|*\|$ - norma wektora

z wiatrem

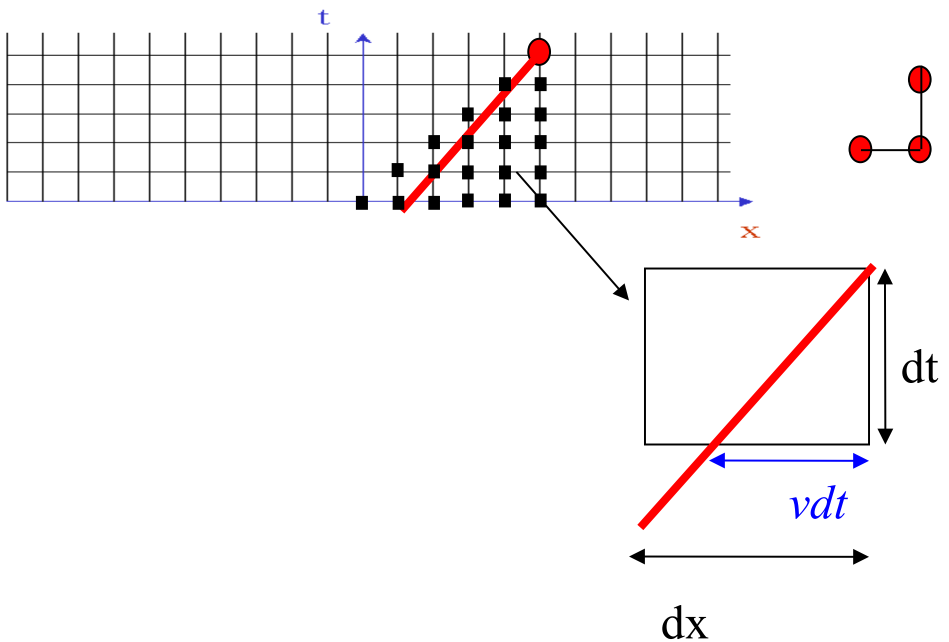




zagęszczanie siatki w dx i dt nie zmieni faktu, że numeryczna domena zależności obejmuje prawy trójkąt zamiast lewej prostej

tw. Courant-Friedrich-Lewy:
warunkiem koniecznym zbieżności schematu różnicowego
(dla dowolnego warunku początkowego) jest aby jego numeryczna domena zależności zawierała w sobie (fizyczną) domenę zależności równania różniczkowego.

zagęszczanie siatki nie pomoże jeśli domena fizyczna pozostaje na zewnątrz numerycznej



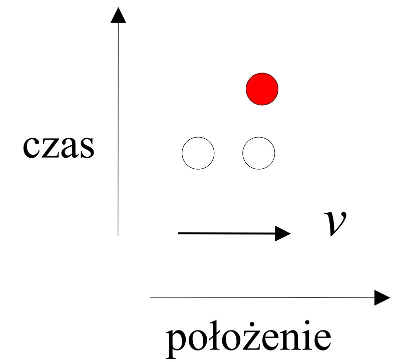
upwind: spełnia warunkowo tw. CFL:
numeryczna dom.zal. zawiera fizyczną
jeśli: $vdt \leq dx \rightarrow \alpha \leq 1$

skok siatki przestrzennej nakłada ograniczenie na skok siatki czasowej
uwaga: jeśli ustalimy Δt a zagęszczać będziemy siatkę w *x*: grozi nam złamanie kryt. CFL

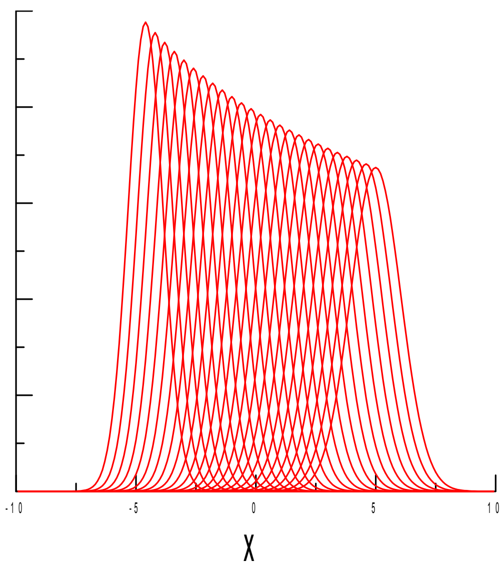
upwind spełnia kryterium CFL gdy : $0 \leq \alpha \leq 1$ $(v>0)$
downwind gdy $(v<0)$: $-1 \leq \alpha \leq 0$

Schemat *upwind* zastosowanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$



$$u(j,n+1) = -v\Delta t \frac{u(j,n) - u(j-1,n)}{\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x)$$



Δx=0.1, Δt=0.04
upwind α=0.4

bez eksplozji ale pakiet się rozpływa = dyfuzja numeryczna
(w dokładnym rozwiązaniu pakiet zachowuje kształt)

spójność, zbieżność, stabilność (podstawowe pojęcia dla problemów zależnych od czasu)

spójność implikuje, że równanie różnicowe jest „dobrym” przybliżeniem równania różniczkowego

zbieżność: że rozwiązanie dokładne w granicy zerowego kroku czasowego / przestrzennego

stabilność: że rozwiązanie numeryczne nie jest zbyt czułe na zaburzenia (np. warunku pocz.)

dobry schemat ma być spójny, stabilny i zbieżny

związek między pojęciami daje: **twierdzenie o ekwiwalencji Laxa**

(odpowiednik tw. Dahlquista dla równań zwyczajnych)

mamy liniowe równanie różniczkowe i jego spójne przybliżenie różnicowe:
warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności jest stabilność schematu

jaka stąd nauka?

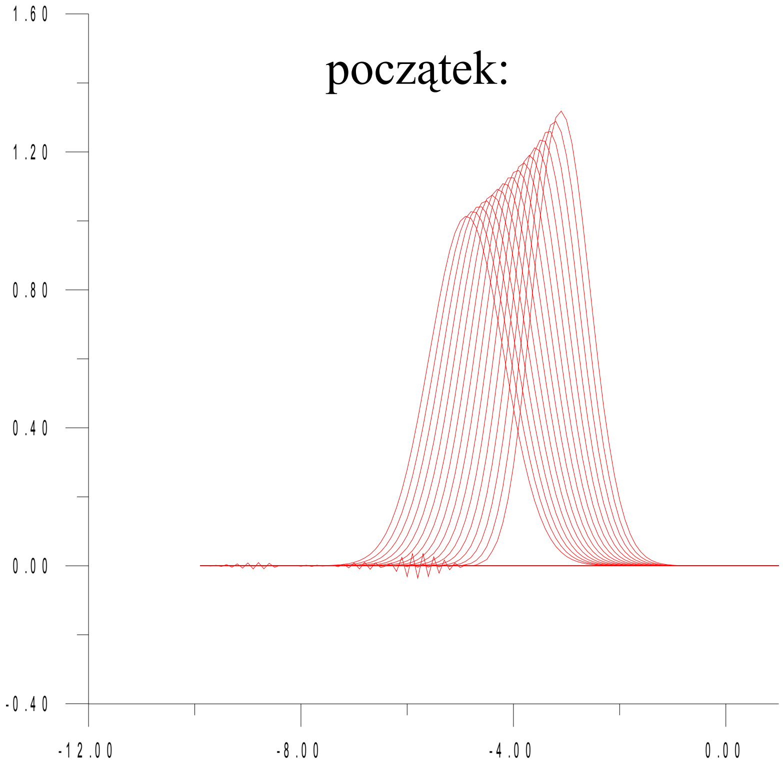
np. upwind nie może być zbieżny dla $\alpha>1$ (CFL)

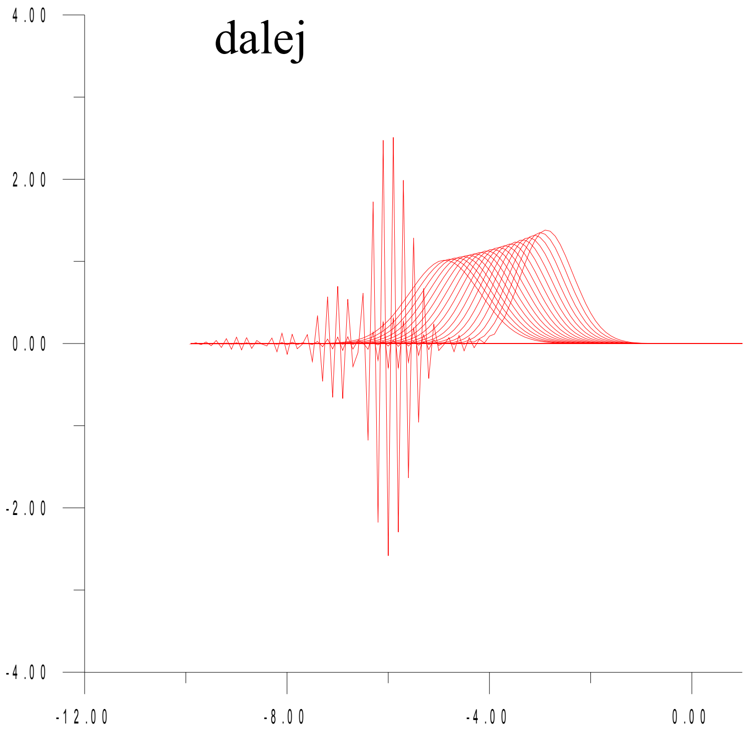
jest spójny, musi więc być niestabilny dla $\alpha>1$

stąd CFL używane dla spójnych jako jak kryterium stabilności

upwind $\alpha=1.1$
$dx=0.1$
$vdt=.11$

jaka stąd nauka?
np. upwind nie może być zbieżny dla $\alpha>1$ (CFL)
jest spójny, musi być więc więc niestabilny dla $\alpha>1$
stąd użycie CFL jak kryterium stabilności





ku ścisłej definicji zbieżności i stabilności

rozwiązanie w chwili *n*
w całej przestrzeni możemy przedstawić jako wektor

$$\mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_N^n \end{pmatrix}$$

powiedzmy, że równanie różniczkowe jest liniowe i jednorodne
wtedy jeden krok schematu różnicowego można przedstawić jako mnożenie
wektora i pewnej macierzy (dla niejednorodności f byłoby z prawej strony $+\mathbf{f}^n$)

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_{\triangle}\mathbf{U}^n$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_{\triangle}\mathbf{U}^{n}$$

przykład dla upwind:

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

$$\mathbf{L}_{\triangle} = \begin{pmatrix} (1-\alpha) & & & & & \\ \alpha & (1-\alpha) & & & & \\ & \alpha & (1-\alpha) & & & \\ & & \alpha & (1-\alpha) & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

definicji zbieżności

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0<t<T$ jeśli:
$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \to 0,\ n \to \infty,\ \Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0,\ n\Delta t \leq T$

---

norma: przyporządkowanie wektor → skalar

1) dodatnio określone $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\|\mathbf{u}\|=0$, jeśli $\mathbf{u}$ – wektor zerowy
2) rozłączne z mnożeniem przez skalar $\|a\mathbf{u}\|=a\,\|\mathbf{u}\|$
3) spełniające nierówność trójkąta $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

norma max:

$$\|\mathbf{U}^n\|_\infty \equiv \max_j |U_j^n|,$$

norma euklidesowa (długość wektora):

$$\|\mathbf{U}^n\|_2 \equiv [\sum_j (U_j^n)^2]^{1/2}.$$

Upwind: wiemy, że spójny

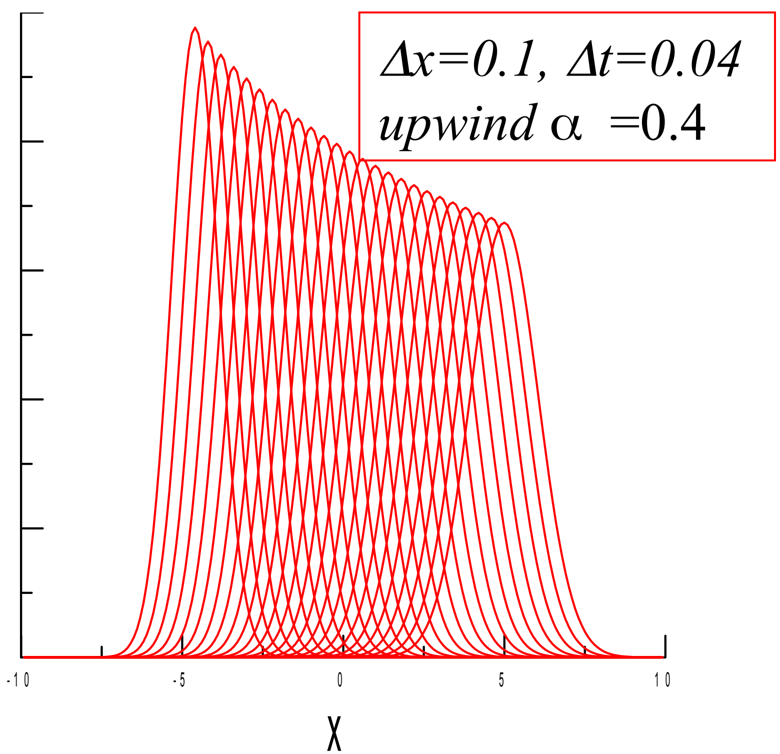
wiemy, że dla $\alpha>1$ niezbieżny, więc niestabilny

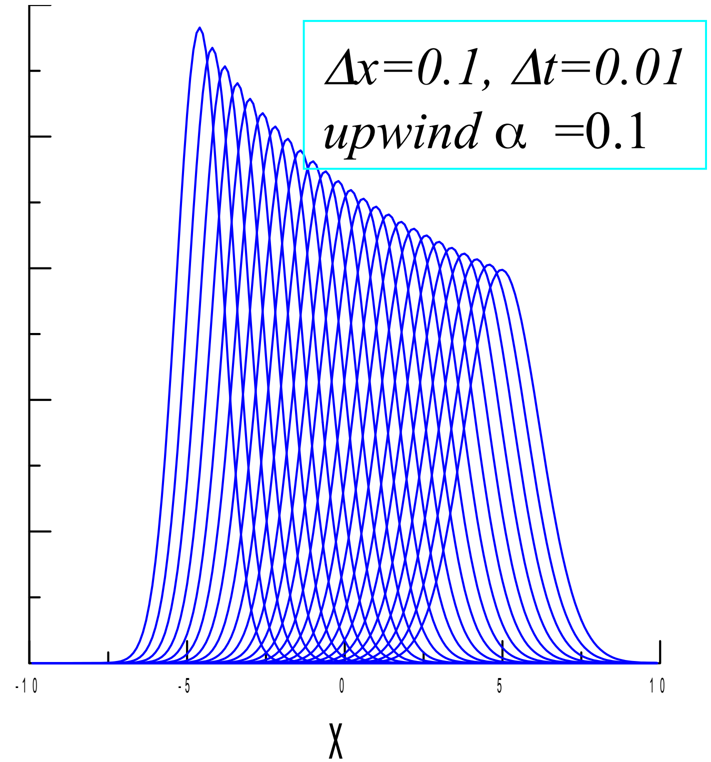
czy zbieżny dla $\alpha \leq 1$? jeśli zbieżny to stabilny
czy stabilny dla $\alpha \leq 1$? jeśli stabilny to zbieżny

sprawdźmy doświadczalnie czy zbieżny

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0<t<T$ jeśli:

$\| \mathbf{u}^n\text{-}\mathbf{U}^n \| \rightarrow 0,\ n \rightarrow\infty,\ \Delta x \rightarrow 0,\ \Delta t \rightarrow 0,\ n\Delta t \leq T$





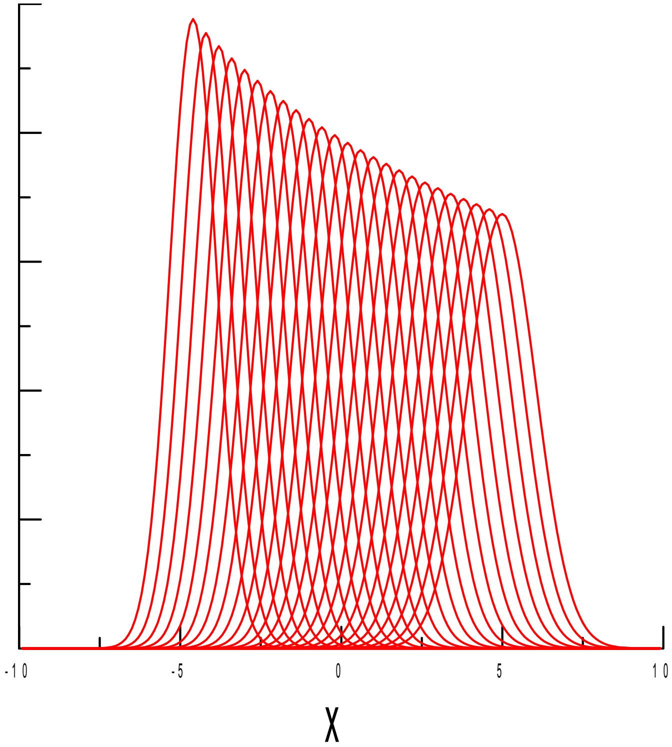
zmniejszamy krok czasowy, wynik równie zły a miał być zbieżny!

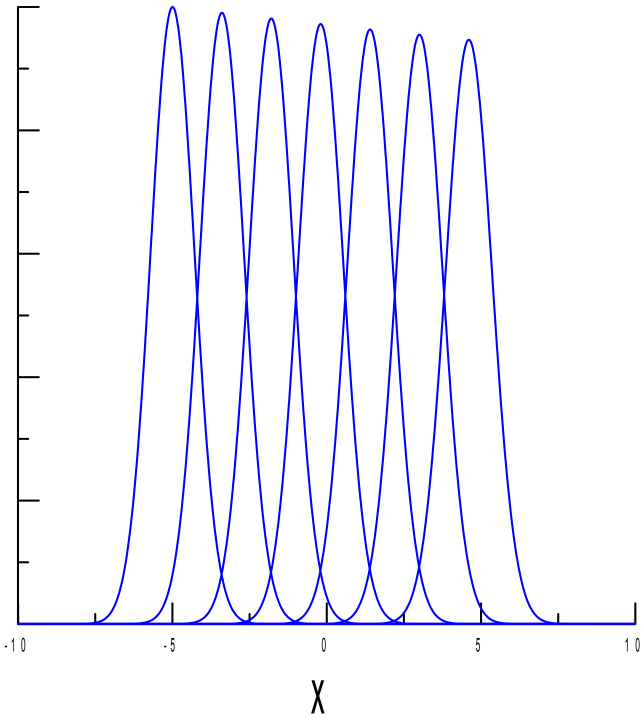
[zobaczymy, że dla upwind współczynnik dyfuzji numerycznej proporcjonalny jest do Δx i niezależny od Δt]

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0<t<T$ jeśli:
$\| \mathbf{u}^n\mathbf{-U}^n \| \to 0$, $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, $n\Delta t \leq T$

$\Delta x=0.1,\ \Delta t=0.04$
upwind α =0.4

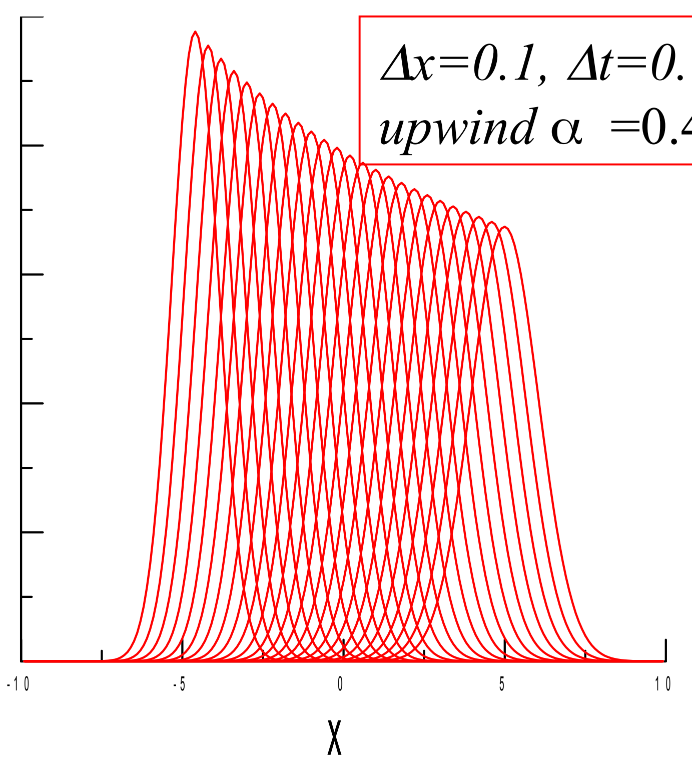
$\Delta x=0.01,\ \Delta t=0.004$
upwind α =0.4

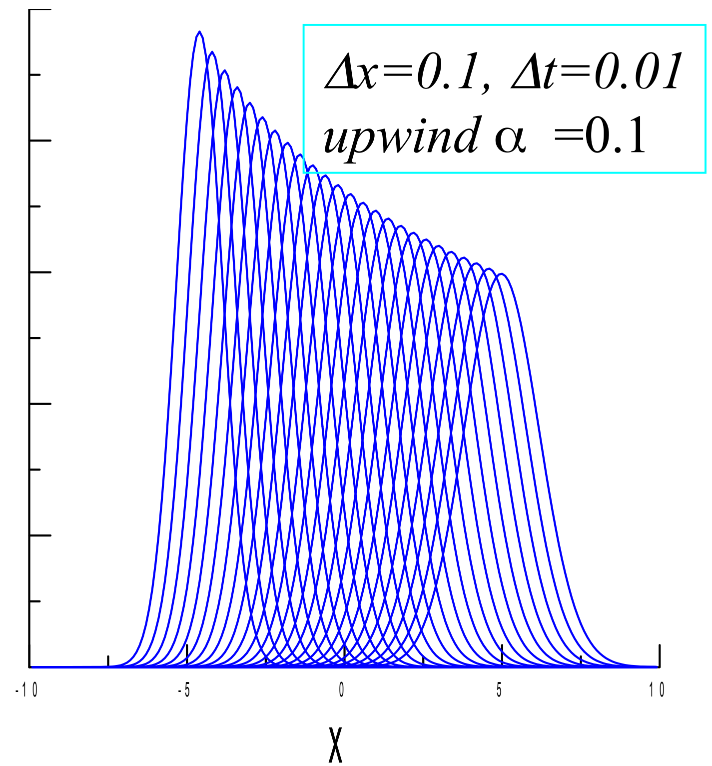




zbieżność dla równań cząstkowych: Δt do zera , **ale również Δx do zera**
zmniejszenie tylko jednego z kroków **nie** gwarantuje poprawy

wniosek: upwind wygląda na zbieżny
aby podać ścisły dowód – zamiast eksperymentów numerycznych – wykazać stabilność





zmniejszamy krok czasowy przy stałym dx, a brak poprawy wyniku

[zobaczymy, że dla upwind współczynnik dyfuzji numerycznej proporcjonalny jest do Δx i niezależny od Δt]

definicji stabilności

mamy liniowe jednorodne równanie różniczkowe.
oraz schemat różnicowy (z odpowiednią macierzą **L**)

schemat różnicowy jest **stabilny** jeśli skończone zaburzenie warunku początkowego prowadzi do skończonej różnicy między rozwiązaniami:

to jest: jeśli istnieje takie C (niezależne od kroku siatki)
że dla każdej pary warunków początkowych

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \qquad \mathbf{U}^0 = \boldsymbol{\phi},$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \qquad \mathbf{V}^0 = \boldsymbol{\psi}.$$

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \le C\|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

dla: $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, $n\Delta t \le T$

alternatywna definicji stabilności

dla liniowych schematów różnicowych

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\triangle \mathbf{U}^n, \qquad \mathbf{U}^0 = \boldsymbol{\phi},$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\triangle \mathbf{V}^n, \qquad \mathbf{V}^0 = \boldsymbol{\psi}.$$

$$\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\triangle \left(\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\right)$$

przy oznaczeniu W=U-V warunek

$$||\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n|| \leq C||\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0||$$

całkiem dowolny WP

zapiszemy jako:

$$||W^n|| \leq C||W^0||$$

czytać: schemat jest stabilny jeśli norma pozostaje skończona przy

$n \to\infty$, $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, $n\Delta t \leq T$

def 2:

$$||W^n|| \leq C||W^0||$$

czytać: schemat jest stabilny jeśli norma pozostaje skończona

dla: n $\rightarrow\infty$, Δx $\rightarrow$0, Δt $\rightarrow$0, nΔt$\leq$T

Uwaga: dla stabilności nie wystarczy zmniejszyć Δt
przy stałym Δx i uzyskać skończone rozwiązanie dla t<T.
Również Δx ma dążyć do zera.

---

def 1:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \qquad \mathbf{U}^0 = \boldsymbol{\phi},$$

definicje równoważne
dla problemów liniowych

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \qquad \mathbf{V}^0 = \boldsymbol{\psi}.$$

dla równań nieliniowych:
każda ma inny sens.

$$||\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n|| \leq C||\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0||$$

pokażmy, że schemat *upwind* jest stabilny dla liczby Courant'a spełniającej kryterium CFL α z (0,1]

wykorzystamy definicję 2: $$||W^n|| \leq C||W^0||$$

oraz normę maksimum

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

średnia ważona!

$$|U_j^{n+1}| \leq ||\mathbf{U}^n||_\infty$$

z def normy max

$$\begin{aligned} |U_j^n| &\leq ||\mathbf{U}^n||_\infty \\ |U_{j-1}^n| &\leq ||\mathbf{U}^n||_\infty \end{aligned}$$

dla każdego jot, więc:

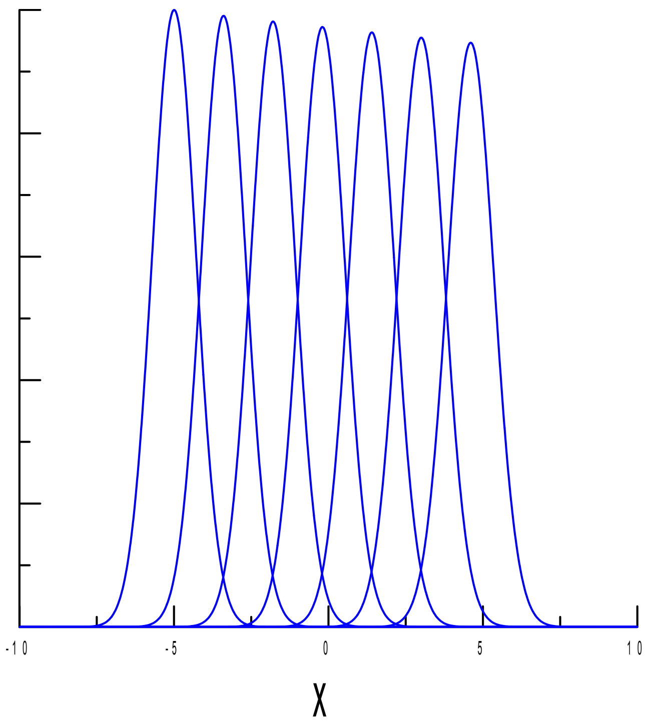
$$||\mathbf{U}^{n+1}||_\infty \leq ||\mathbf{U}^n||_\infty$$

cbdu

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

średnia ważona: nie ma punktu, w którym schemat upwind wygenerowałby większą wartość w kolejnym kroku czasowym

Δx=0.01, Δt=0.004
upwind α =0.4



Uogólnienie: warunkiem wystarczającym aby schemat typu:

$$U_j^{n+1} = \sum_{|s|\leq S} c_s U_{j+s}^n$$

zasada maximum
(ogólne r.r.cz., nie tylko adwekcji)

był stabilny wg normy max jest aby: wszystkie współczynniki
c były dodatnie i sumowały się do jedynki

dowód: podobny do wyżej pokazanego

---

dla adwekcji:

upwind: $$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

downwind: $$U_j^{n+1} = (1+\alpha)\, U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

centralny: $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

sumę do 1 mamy
zawsze (spójność),
ale dla v>0 tylko upwind
z $0\leq\alpha\leq 1$
spełnia założenie
tw. o zasadzie maksimum

stabilność schematu: dotyczy małych kroków oraz skończonych czasów

$n \to \infty$, $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, $n\Delta t \leq T$

stabilność bezwzględna schematu dla równania cząstkowego:
wyniki mają pozostawać skończone dla stałego Δt i Δx i dla nieskończonego *n*

w: praktyce to stabilność bezwzględna jest ważna

stabilność bezwzględna jest silniejszym warunkiem niż stabilność
(znaczy: schemat stabilny bezwzględnie jest zawsze stabilny
a stabilny nie zawsze jest bezwzględnie stabilny)

Analiza stabilności bezwzględnej von Neumanna

zakładamy, że rozwiązanie schematu różnicowego U_j jest periodyczne w j z okresem J

w praktyce nie jest to ważne - można przyjąć, że J >> obszaru, który nas interesuje

U – funkcja w przestrzeni położeń
A – funkcja w przestrzeni częstości (przestrzennych) [wektora falowego]

$$U_j^n = \sum_k A_k^n \exp(ikx)$$

k-wektor falowy 2π/λ

dyskretna TF

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \ldots, J-1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

uwaga: dla U i A: n w indeksie górnym to chwila czasowa, dla w – indeks górny to potęga

$$A_k^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n \left(w_j^k\right)^*$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \qquad A_k^n = \frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n \left(w_j^k\right)^* \qquad w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

wielkość fizyczna
w przestrzeni *r*

wielkość w przestrzeni *k*

normy euklidesowe wektorów **U** oraz **A** wiąże twierdzenie Parsevala:

$$||\mathbf{U}^n||_2^2 = J||\mathbf{A}^n||_2^2$$

$$||\mathbf{A}^n||_2^2 = \sum_{k=0}^{J-1} |A_k^n|^2$$

analiza stabilności von Neumanna:
jeśli pokażemy że norma transformaty Fouriera jest skończona to wystarczy dla udowodnienia stabilności (i np. wybrania bezpiecznego kroku czasowego)

analiza w przestrzeni *k* jest bardzo prosta

Przykład: analiza von Neumanna dla schematu upwind z α z (0,1]

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n \qquad w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \ldots, J-1$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k + \alpha \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_{j-1}^k$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} \left[(1-\alpha)\,A_k^n w_j^k + \alpha A_k^n w_j^k \exp(-2\pi i k/J)\right]$$

równość ma być dla każdego A_k^0 (dla wszystkich warunków początkowych)
co oznacza, że wyrazy w sumie po *k* muszą być identyczne

$$A_k^{n+1} \cancel{w_j^k} = \left[(1-\alpha) + \alpha \exp(-2\pi i k/J)\right] A_k^n \cancel{w_j^k}$$

$$A_k^{n+1} = \underline{M_k} A_k^n$$

wsp. wzmocnienia modu *k*

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n$$ wsp. wzmocnienia modu k

$$A_k^{n+1} = (M_k)^{n+1} A_k^0$$

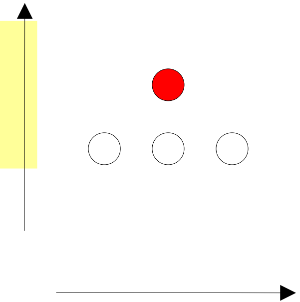
norma transformaty pozostanie skończona gdy $|M_k| \leq 1$ dla każdego *k*

$$M_k = 1 - \alpha + \alpha \exp(-2\pi i k/J)$$

$|M_{\mathbf{k}}|$<=|**1-alpha**|+|**alpha**|=**1** (nierówność trójkąta)

nie ma modu który by rósł: wniosek -
schemat *upwind* jest stabilny dla α z (0,1]

dokładniejszy schemat: Eulera z centralnym ilorazem przestrzennym:



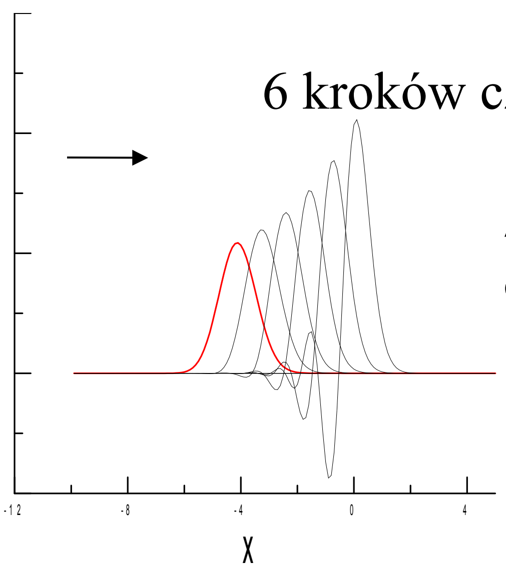
$$\frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\Delta t} = -v\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

położenie

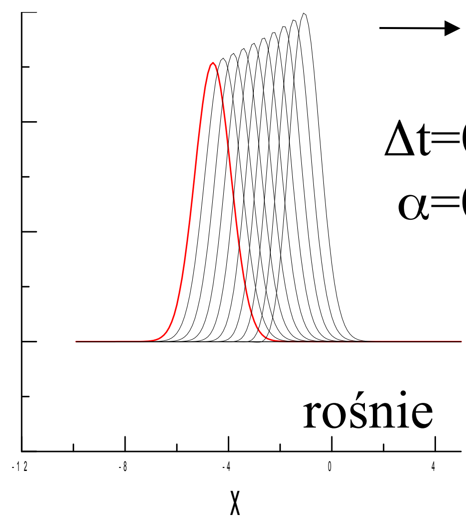
$$u(j,n+1) = -v\Delta t\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

Weźmy Δx=0.1

6 kroków czasowych:



Δt=0.09
α=0.9



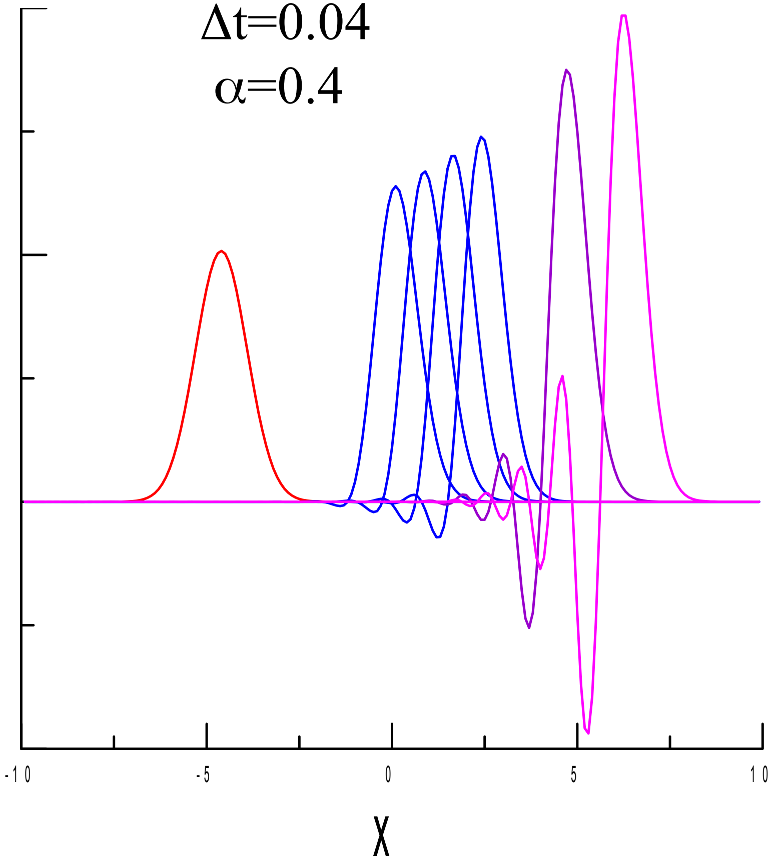
Δt=0.04
α=0.4

czas

rośnie

tu niedobrze

Euler z centralnym ilorazem przestrzennym

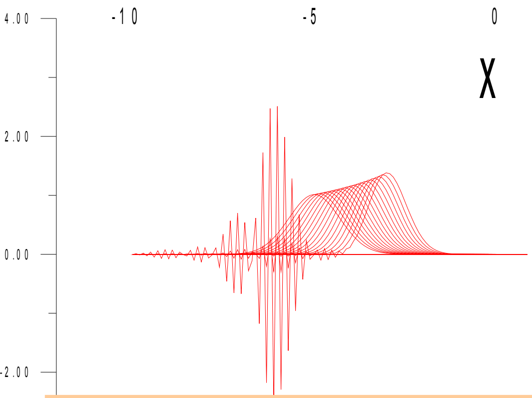


drastyczna zmiana kształtu pakietu nastąpiła, tylko później

ujemne wartości gęstości ☹

upwind: zmienia kształt,
ale dyfuzyjnie (na ujemne wartosci nie przechodzi, nie eksploduje)

dokładniejszy – centralny – fajerwerki i eksplozja



Uwaga: widzimy, że wyższe częstości są wzmacniane i że spóźniają się za pakietem: zrozumiemy to przy analizie dyfuzji w przestrzeni *k* oraz przy relacji dyspersji numerycznej

Symulacja dla odpowiednio wysokiego t: zawsze skończy się eksplozją
można zaryzykować twierdzenie, że schemat centralny nie jest bezwzględnie stabilny dla r.adw.

analiza von Neumanna dla schematu z centralną pochodną przestrzenną

$$u(j,n+1) = -v\Delta t\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_k^0(x) = \sum_k A_k^0 \exp(ikx)$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ijk\Delta x)$$

$\Delta x = 2\pi/J$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0,1,2,\ldots,J-1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$$A_k^1 = A_k^0 - \frac{\alpha}{2}\left(\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)\right) A_k^0$$

$$M_k = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(2i\sin(k\Delta x)\right)$$

$$|M_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \longrightarrow$$

widzimy, że mody *k* na ogół są wzmacniane
wyobraźmy sobie gęstą siatkę (*dx* małe):
wzmacniane będą większe *k, co widzieliśmy w numerycznym eksperymencie*
metoda = niestabilna bezwzględnie i dlatego bezużyteczna w praktycznym zastosowaniu

Ustaliliśmy, że do rozwiązywania równania adwekcji lepiej nadaje się mniej dokładny schemat upwind niż ten z ilorazem centralnym

upwind: $$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

centralny: $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

warunek wystarczający dla stabilności wg.normy max:
wszystkie współczynniki dodatnie i sumują się do jedynki

w centralnym = sumują się do jedynki, ale nie są dodatnie

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

zastąpić średnią arytmetyczną sąsiadów

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

schemat Laxa-Friedrichsa

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^n \frac{1+\alpha}{2} + U_{j-1}^n \frac{1-\alpha}{2}$$

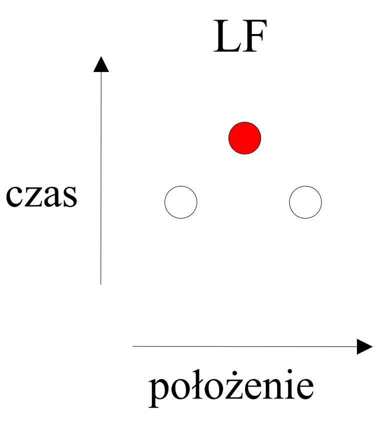
dla α (-1,1) spełnione WW stabilności w sensie normy max

Ale czy spójna?

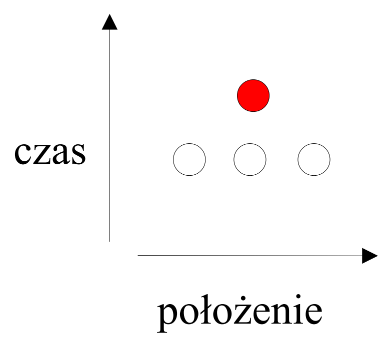
$$u(j,n+1) = -v\Delta t\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u(j,n) = \frac{1}{2}\left(u(j-1,n) + u(j+1,n)\right) + O(\Delta x)$$

metoda pozostanie spójna, obniżymy rząd dokładności przestrzennej zyskamy stabilność



zamiast



metoda Laxa-Friedrichsa : analiza von Neumanna

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

$\Delta x = 2\pi/J$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$$A_k^{n+1} = \left[\frac{\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)\right)\right] A_k^n$$

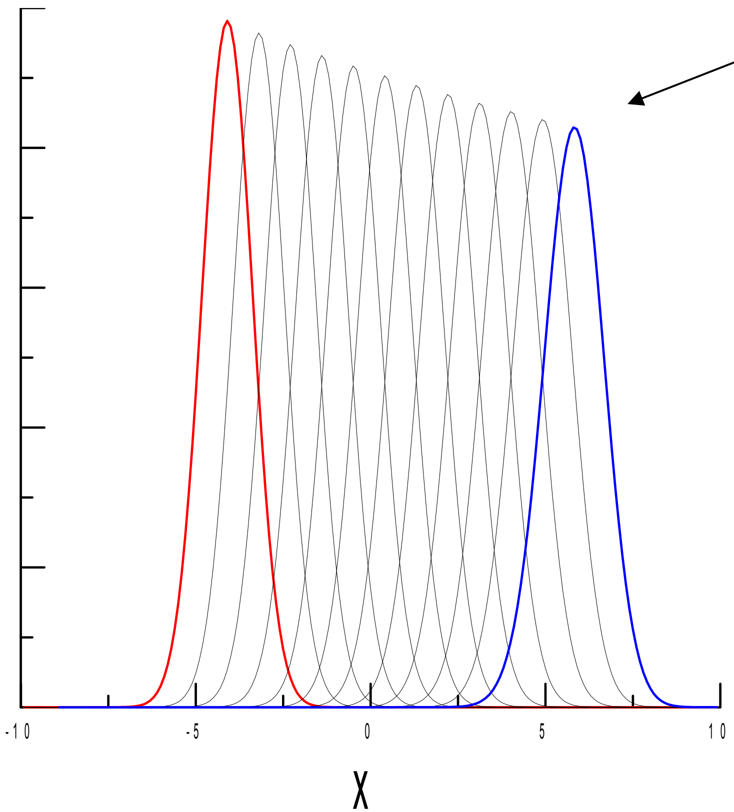
$$M_k = \cos(k\Delta x) - i\alpha\sin(k\Delta x)$$

$$|M_k|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2\sin^2(k\Delta x)$$

$|M_k|^2 \le 1$ gdy $\alpha^2 \le 1$ Kryterium CFL !

Metoda Laxa-Friedrichsa = zastosujmy

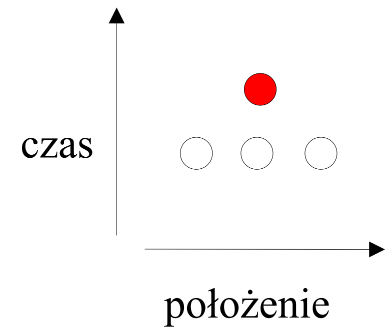
$\Delta t=0.09$



stabilna (uniknęliśmy eksplozji),
ale pakiet nie zachowuje się jak powinien.

niebieski z czerwonego rozpłynął się
(większa szerokość kosztem wysokości)
dyfuzja numeryczna.

schemat Laxa-Wendroffa



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{(a)}$$

ma być jednokrokowy i z błędem lokalnym Δx^2, Δt^3

$$u(x_j, t+\Delta t) = u(x_j, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}|_{x_j,t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{x_j,t} + O(\Delta t^3)$$

pochodne czasowe zastępujemy równaniem (a)

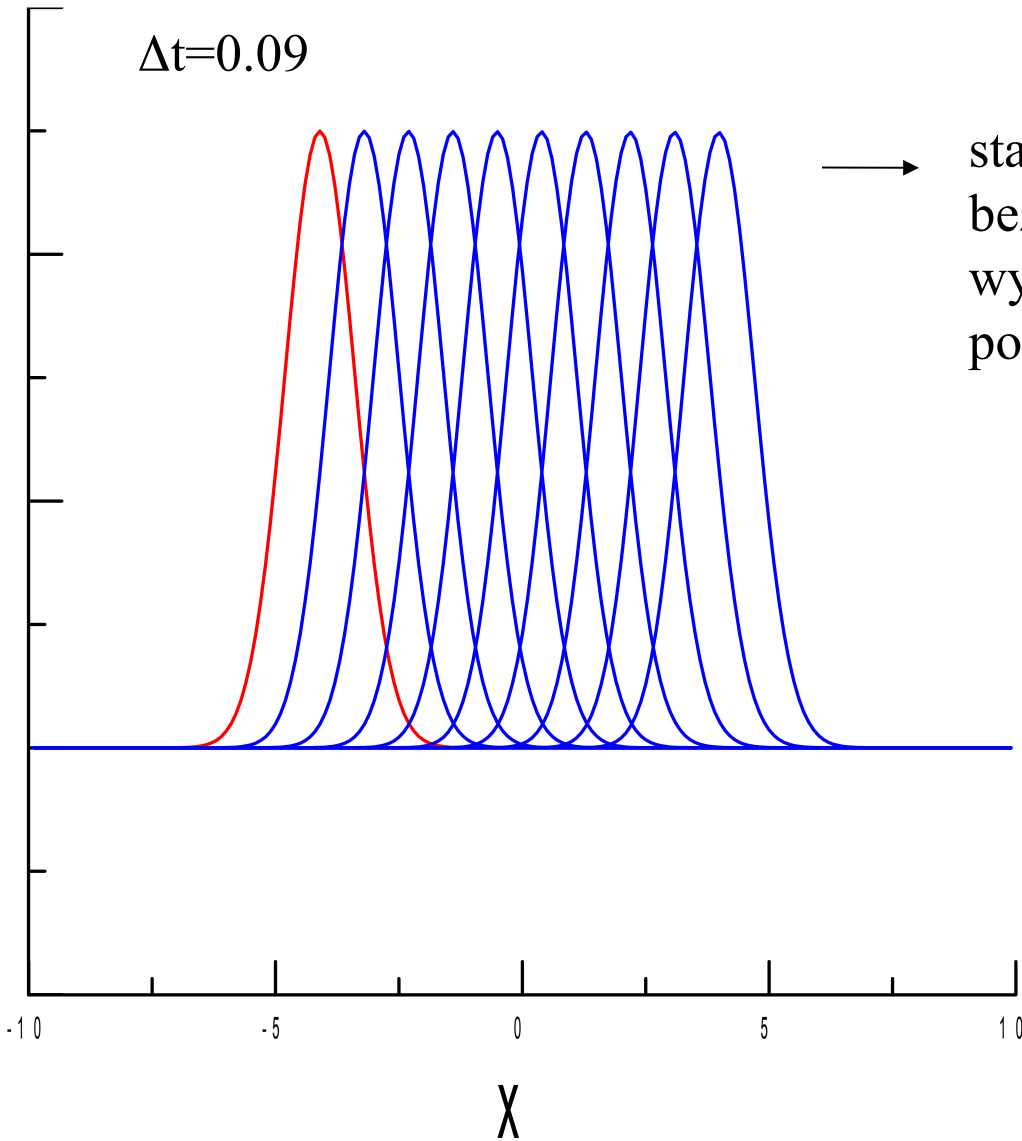
$$u(x_j, t+\Delta t) = u(x_j, t) - v\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_j,t} + v^2\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x_j,t} + O(\Delta t^3)$$

z centralnymi ilorazami pochodnych:

błąd p: $O(\Delta x^2)$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n\right)$$

Wynik:



stabilna
bez *widocznej* dyfuzji
wyższa dokładność niż wszystkie pozostałe