AGH University of Science and Technology

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek Studiów: Informatyka Stosowana

Metody Numeryczne

Laboratorium 3a

Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

zrealizował
Przemysław Ryś

Kraków, 14 Marzec 2024

1 Cel ćwiczenia

Celem tego zadania jest zaimplementowanie metody największego spadku oraz zbadanie jej efektywności i dokładności rozwiązania w kontekście układu równań opisanego powyżej. Analizujemy wpływ różnych wektorów startowych na liczbę iteracji potrzebną do uzyskania zbieżności oraz badamy dokładność rozwiązania w zależności od wybranych warunków zakończenia iteracji.

2 Opis problemu

Rozważamy problem rozwiązania układu równań liniowych postaci $Ax = b$, gdzie macierz A jest macierzą wstęgową o wymiarach $n \times n$, a wektor b jest wektorem wyrazów wolnych.

Macierz A jest zdefiniowana zgodnie z następującą formułą:

$$A[i][j] = \begin{cases} \frac{1}{1+|i-j|}, & \text{gdy } |i-j| \leq m \\ 0, & \text{gdy } |i-j| > m \end{cases}$$

gdzie $m = 5$. Ta forma macierzy wstęgowej implikuje, że większość jej elementów jest zerowa, co ma istotny wpływ na wydajność i złożoność obliczeniową algorytmów rozwiązujących układ równań.

Gdy mówimy o macierzach wstęgowych, oznacza to, że macierze te mają wiele zer poza główną przekątną. Obydwie metody są efektywne dla takich macierzy ze względu na ich właściwości.

3 Opis metody

Metoda największego spadku jest używana do rozwiązania układu równań $Ax = b$. Polega ona na iteracyjnym wyznaczaniu kolejnych przybliżeń rozwiązania poprzez minimalizację reszty równania. W każdej iteracji obliczana jest nowa wartość wektora rozwiązań na podstawie poprzedniego, przy użyciu odpowiednio dobranego kierunku poszukiwań.

4 Wyniki

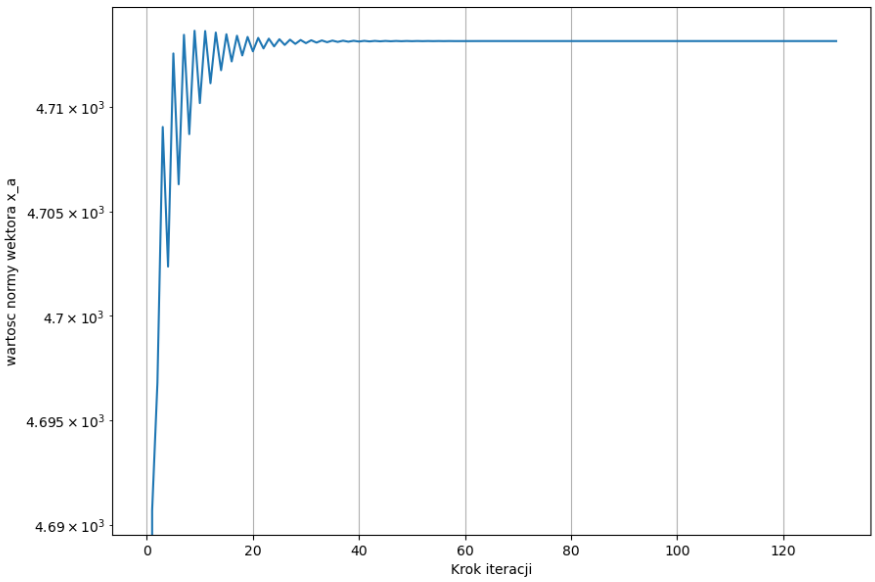
Tab. 1: Wyniki dla $\mathbf{x}_0 = \vec{0}$ normy wektora błędu, parametru α oraz normy wyznaczonego rozwiązania od numeru iteracji

i	r_a norm	α_a	x_a norm
1	482.3034	0	—
2	482.303	0.4969	4696.812
3	211.971	0.45734	4709.05
⋮	⋮	⋮	⋮
128	1.181359e-06	0.49589959226475233	4713.172149673608
129	1.070216e-06	0.47006263445960006	4713.17215001563
130	9.190394e-07	0.495921204109007	4713.172149719358

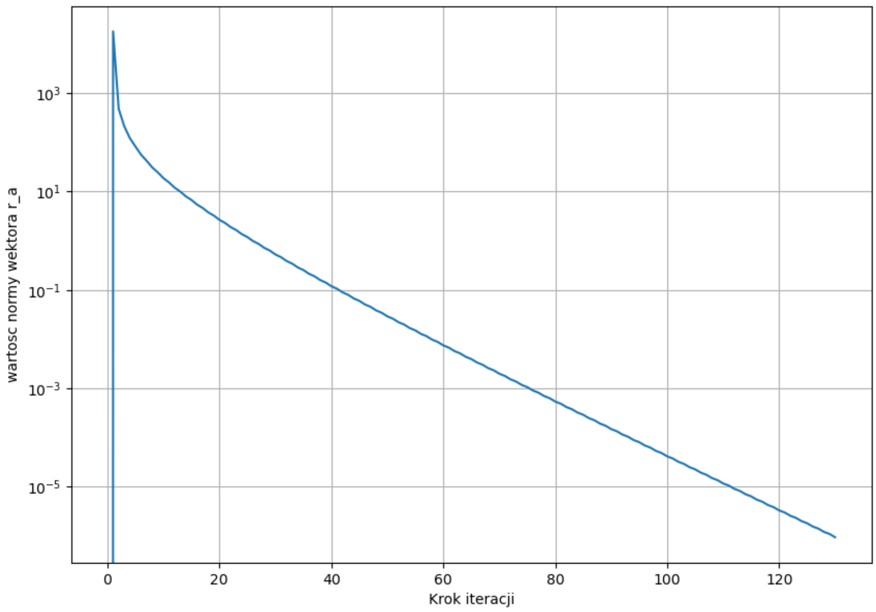
Na załączonych tabelach 1 oraz 2 widzimy, że wybór wektora startowego nie ma wpływu na wcześniejszą zbieżność rozwiązania, gdyż zajmuje to w jednym jak i drugim przypadku tę samą liczbę kroków wynoszącą 130. Ze względu na podaną liczbę wierszy dla obu tabel, wyniki ukazują jedynie trzy pierwsze oraz trzy ostanie iteracje metody. Jak mnożemy zauważyć różnica w module tzrech ostatnich wektorów rozwiązań jest znikomo mała, wynika to z warunku na zakończenie pętli, który zadany był aby zakończyć rozwiązywanie kiedy to norma wektora błędu będzie mniejsza jak $1e - 06$.

Tab. 2: Wyniki dla $\mathbf{x}_0 = \vec{1}$ normy wektora błędu, parametru α oraz normy wyznaczonego rozwiązania od numeru iteracji

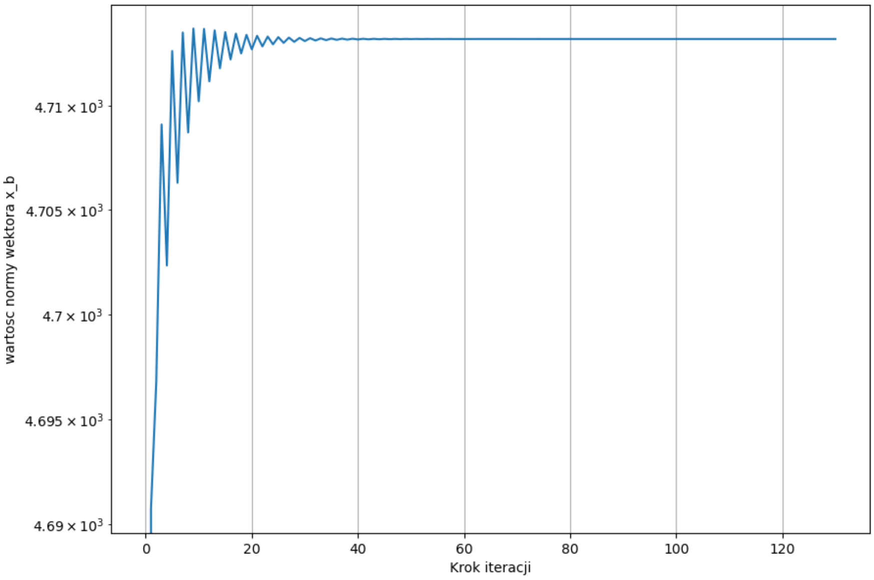
i	r_b norm	α_b	x_b norm
1	18137.245	0	—
2	481.3351	0.49727589	4696.79873
3	211.6846	0.457298698	4709.08308
⋮	⋮	⋮	⋮
128	1.180630e-06	0.49603055479265923	4713.1721496736
129	1.069829e-06	0.46994537005581066	4713.172150015569
130	9.184697e-07	0.49605210015482243	4713.172149719352



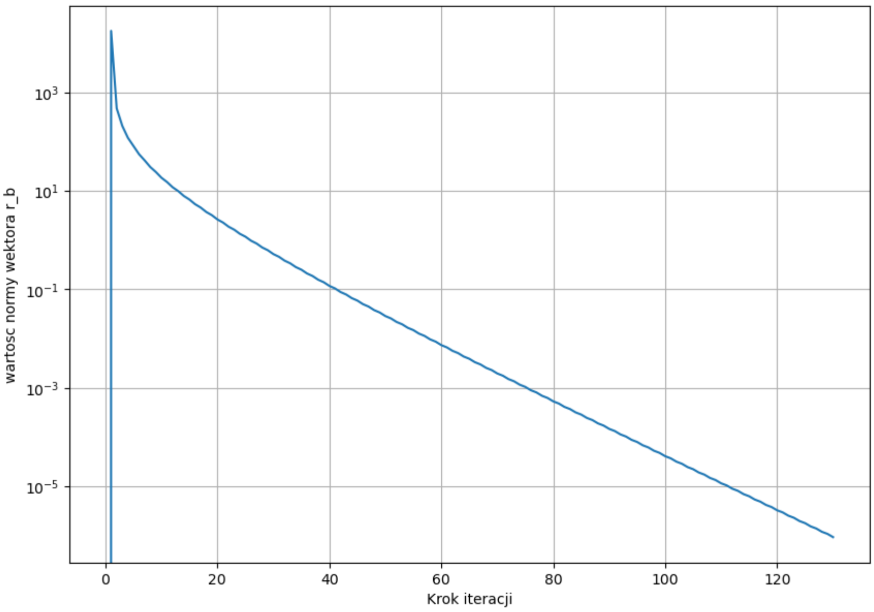
Rys. 1: Wartość normy wektora rozwiązań dla $\mathbf{x}_0 = \vec{0}$ w numerze iteracji



Rys. 2: Wartość normy wektora błędu dla $\mathbf{x}_0 = \vec{0}$ w numerze iteracji



Rys. 3: Wartość normy wektora rozwiązań dla $\mathbf{x}_0 = \vec{1}$ w numerze iteracji



Rys. 4: Wartość normy wektora błedu dla $\mathbf{x}_0 = \vec{1}$ w numerze iteracji

Rysunki 1, 2, 3 oraz 4 przedstawiają zmianę wartości normy w argumencie numeru iteraji. Rysunki związane z rozwiązaniem zagadnienia są w skali liniowej, zauważamy duże oscylacje metody w pierwszych 20 iteracjach, następnie wynik się relaksuje do otoczenia dokładnego wyniku. W przypadku normy wektora błędu, przedstawiono oś y w skali logarytmicznej. Jak można zauważyć w tej skali błąd się wygasza w miarę postępujących iteracji. Nagły skok spowodowany jest przyjęciem pierwszego rozwiązania jako wartości przed iteracją, pomijając go błąd w iteracji ciągle maleje.

5 Podsumowanie

Metoda największego spadku jest potężnym narzędziem do rozwiązywania układów równań liniowych. Polega na iteracyjnym podejściu, gdzie w każdej iteracji obliczane są nowe przybliżenia rozwiązania poprzez minimalizację reszty równania. Warto zauważyć, że wybór wektora startowego nie ma znaczącego wpływu na szybkość zbieżności rozwiązania. Analiza danych oraz rysunków potwierdza, że metoda ta, mimo początkowych oscylacji, stabilizuje się i zbliża do dokładnego rozwiązania. Wartości normy błędu wykazują charakterystyczny wzrost na początku, który następnie stopniowo maleje, co wskazuje na skuteczność metody.