

Równanie falowe dla struny

27 kwietnia 2023

W równaniu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$u(x, t)$ oznacza wychylenie struny w punkcie x w chwili t , a c prędkość rozchodzenia się drgań. Przyjmujemy $c = 1$. Rozwiązania (1) podaje się dla warunków początkowych na wychylenie

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (2)$$

i prędkość w chwili początkowej ($t = 0$)

$$v(x, t = 0) \equiv \left. \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x). \quad (3)$$

Struna jest sztywno zamocowana na końcach: $u(x = 0, t) = u(x = 1, t) = 0$.

(położeniowy schemat Verleta)

Równanie (1) rozwiążemy metodą różnic skończonych. Strunę dyskretyzujemy do $N = 101$ punktów, każdy odpowiadający za fragment struny długości $\Delta x = 0.01$. Przyjmiemy $\Delta t = 0.005$. Użyjemy położeniowego schematu Verleta,

$$u(x, t + \Delta t) = 2u(x, t) - u(x, t - \Delta t) + \Delta t^2 a(x, t), \quad (4)$$

gdzie przyspieszenie $a = \frac{d^2 u}{dt^2}$ wyliczamy z prawej strony równania falowego (1) stosując iloraz różnicowy drugiej pochodnej

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_t = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}. \quad (5)$$

W rachunkach potrzebujemy trzech tablic dla kształtu struny w chwilach $t, t \pm \Delta t$.

Warunek początkowy na zerową prędkość struny narzucamy przyjmując $u(x, \Delta t) = u(x, 0)$.

zadanie 1 (sztywne i luźne warunki brzegowe)

Rozwiązać równanie (1) dla warunków początkowych

$$u_0(x) = \exp(-100(x - 0.5)^2), \quad (6)$$

przy sztywnych warunkach brzegowych $u(0, t) = u(1, t) = 0$, oraz dla luźnych warunków brzegowych $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$, dla $t \in (0, 5)$. Luźne warunki wprowadzamy do programu przypisując dla każdej chwili czasowej $u(0, t) := u(\Delta x, t)$ oraz $u(1, t) := u(1 - \Delta x, t)$. Uwaga: trzeba zastosować podstawienie przed każdym wyliczeniem przyspieszenia. Narysować $u(x, t)$ dla sztywnych i luźnych warunków. **50 pkt.**

zadanie 3 (drgania tłumione)

Wracamy do sztywnych warunków brzegowych. Wprowadzamy tłumienie drgań proporcjonalne do prędkości struny

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (7)$$

Prędkość określamy na podstawie dwóch poprzednich chwil czasowych $\frac{du}{dt}|_{(x,t)} = \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t}$. Narysować przebieg drgań $u(x, t)$ dla $\beta = 0.5, 2$ i 4 . **15 pkt.**

zadanie 4 (drgania wymuszone)

Dodajemy wymuszenie nadającą dodatkowe przyspieszenie strunie $a_F(x, t)$. Wymuszenie przykładamy punktowo

$$a_F(x, t) = \begin{cases} \cos(wt) & \text{dla } x = x_0 \\ 0 & \text{dla } x \neq x_0 \end{cases} \quad (8)$$

z $x_0 = 1/2$. Przyspieszenie dane jest teraz wyrażeniem

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x, t), \quad (9)$$

W chwili początkowej struna spoczywa ($v(x, t) = 0$) w równowadze ($u(x, t) = 0$). Wstawimy słabe tłumienie $\beta = 1$ i częstość wymuszenia $w = \pi/2$.

Narysować $u(x, t)$ dla t od 0 do 15. **15 pkt.** Widzimy, że drgania osiągają stan ustalony po pewnym czasie. Jaki jest okres drgań w stanie ustalonym?

zadanie 5 (rezonanse)

Energia struny dana jest wyrażeniem

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (10)$$

Do wyliczenia pochodnych możemy użyć ilorazów różnicowych

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - dt)}{dt}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + dx, t) - u(x - dx, t)}{2dx}. \quad (12)$$

Wyliczyć średnią energię stanu ustalonego jako

$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt, \quad (13)$$

dla $t_1 = 16$, $t_2 = 20$. Narysować $\langle E \rangle$ w funkcji $w \in (0, 10\pi)$. Na rysunku zobaczymy rezonanse dla częstości własnych drgań tłumionych $w = w_n = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}$ (dla $\beta = 1$: $w_n \approx \omega_n = n\pi$) ale tylko dla nieparzystych n . Czy uda się nam wywołać rezonanse dla parzystych n przesuając punkt przyłożenia siły wymuszającej poza środek struny $x_0 = 0.4$? Narysować $\langle E \rangle$. **20 pkt.**