

AGH UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ
KIERUNEK STUDIÓW: FIZYKA TECHNICZNA



METODY MONTE CARLO

Laboratorium 5

całkowanie metodą warstwową

zrealizował
Przemysław Ryś

Kraków, 25 Marzec 2024

1 Opis zagadnienia

Wstęp

W projekcie należy użyć metody MC do oszacowania wartości całek

$$C_1 = \int_{-3}^3 (1 + \tanh(x)) dx = 6 \quad (1)$$

$$C_2 = \int_0^{10} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(10) - \arctan(0) \quad (2)$$

$$C_3 = \int_0^1 \cos(10\pi x) dx = 0.24609375 \quad (3)$$

1.1 Metoda podstawowa

Dla całki postaci

$$C = \int_a^b g(x) dx \quad (4)$$

identyfikujemy $f(x)$ jako $f(x) = \text{const}$, z warunku normalizacji dostajemy

$$\int_a^b f(x) dx = \text{const} \cdot \int_a^b 1 dx = \text{const}(b-a) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (5)$$

Modyfikujemy całkę jako

$$C = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \int_a^b (b-a)g(x) f(x) dx \quad (6)$$

i jej wartość przybliżamy średnią z próby

$$C \approx \bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (b-a) \cdot g(x_i), \quad x_i \sim U(a, b) \quad (7)$$

gdzie losowanie z rozkładu jednorodnego w zakresie $[a, b]$, wykonujemy stosując prostą transformację $x_i = a + (b-a) \cdot U_i$, $U_i \sim U(0, 1)$. Liczymy jeszcze drugi moment

$$g^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(b-a) \cdot g(x_i)]^2, \quad x_i \sim U(a, b) \quad (8)$$

i wariancję średniej

$$\sigma_{\bar{g}}^2 = \frac{g^2 - \bar{g}^2}{N} \quad (9)$$

1.2 Metoda losowania systematycznego (warstwowe nieoptymalne)

Najpierw dokonujemy podziału obszaru całkowania na M podobszarów. Załóżmy, że mają identyczną szerokość $\Delta x = \frac{b-a}{M}$. Wówczas lewą (x_m) i prawą (x_{m+1}) granicę

przedziału wyznaczają

$$x_m = a + \Delta x \cdot (m - 1), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

$$x_{m+1} = x_m + \Delta x \quad (11)$$

W metodzie losowania systematycznego (warstwowego nieoptymalnego) określamy prawdopodobieństwo wylosowania zmiennej z danego podprzedziału p_m jako

$$p_m = \frac{1}{M} \quad (12)$$

Dla każdego podprzedziału m -tego określamy liczbę losowań

$$N_m = p_m \cdot N \quad (13)$$

obliczamy $n = 1$ i 2 moment oraz wariancję

$$g_m^n = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} [(b - a) \cdot g(x_{im})]^n, \quad x_{im} \sim U(x_m, x_{m+1}) \quad (14)$$

$$\sigma_m^2 = g_m^2 - (\bar{g}_m)^2 \quad (15)$$

Teraz możemy oszacować wartość całki C jako średnią i wariancję średniej

$$C \approx \bar{g} = \sum_{m=1}^M p_m \cdot \bar{g}_m \quad (16)$$

$$\sigma_{\bar{g}}^2 \approx \sum_{m=1}^M p_m^2 \cdot N_m \cdot \sigma_m^2 \quad (17)$$

1.3 Metoda losowania warstwowego (optymalnego)

W metodzie tej postępujemy identycznie jak dla losowania systematycznego poza jednym wyjątkiem, liczbę losowań N_m w każdym podprzedziale określamy według wzoru

$$N_m = \frac{p_m \sigma_b M}{\sum_{j=1}^M p_j \sigma_j} N \quad (18)$$

gdzie: σ_j to prognozowane/szacowane wartości odchylenia standardowego, które obliczamy metodą podstawową dla małych wartości N (np. $N = 10^2, 10^3$) - bo dokładnych wartości nie znamy. Oczywiście w trakcie wykonywania właściwych obliczeń (metoda warstwowa) na bieżąco wyznaczamy "dokładniejsze" wartości σ_m i ich ostatecznie używamy do liczenia wariancji średniej.

2 Wyniki

Metoda	Średnia				Odchylenie standardowe			
Metoda podstawowa	5.491	5.644	6.025	5.988	0.490	0.153	0.049	0.016
Losowanie systematyczne	6.009	5.997	6.001	6.000	0.043	0.016	0.005	0.002

Tab. 1: Porównanie średnich i odchyleń standardowych dla różnych metod

Metoda	Błąd (%)			
Metoda podstawowa	8.916	2.719	0.814	0.259
Losowanie systematyczne	0.711	0.260	0.082	0.026

Tab. 2: Błąd procentowy dla różnych metod

3 Wnioski

Otrzymane wyniki pokazują, że obie metody, zarówno metoda podstawowa, jak i losowanie systematyczne, są skuteczne w oszacowaniu wartości całek. Metoda podstawowa wydaje się być bardziej wrażliwa na liczbę próbek, gdzie zwiększenie liczby próbek znacząco poprawia dokładność estymacji. Z kolei losowanie systematyczne charakteryzuje się mniejszym odchyleniem standardowym dla większości przypadków, co sugeruje, że może być bardziej stabilne dla danej liczby próbek. W praktyce wybór odpowiedniej metody zależy od wymagań dotyczących precyzji i równomierności próbkowania.