

Wydział WFilS	Imię i nazwisko 1.Mateusz Kulig 2.Przemysław Ryś	Rok 2021	Grupa 1	Zespół 3
PRACOWNIA FIZYCZNA WFilS AGH	Temat: Moduł Younga			Nr ćwiczenia 11
Data wykonania 28.11.2021	Data oddania	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia
				OCENA

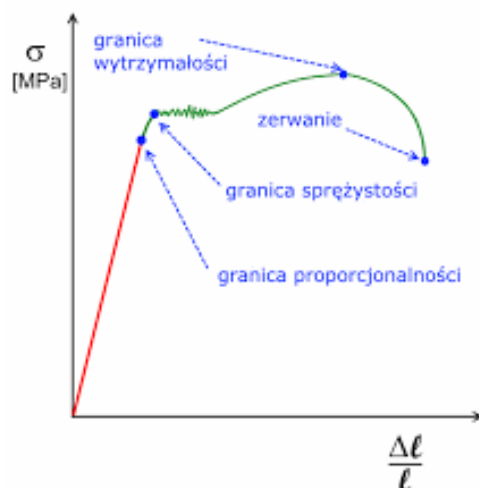
W sprawozdaniu opisaliśmy pomiary wartości modułu Younga dla stali i mosiądzu. Moduł ten obliczyliśmy za pomocą regresji liniowej, mierząc doświadczalnie wydłużanie się drutu wykonanego z danego metalu przy odpowiednim obciążeniu, a następnie korzystając z prawa Hooke’a. Wynik dla stali otrzymaliśmy zgodny w granicach niepewności z wartością tabelaryczną, dla mosiądzu takowej zgodności nie otrzymaliśmy.

1. Wstęp teoretyczny

Ciała zmieniają swój kształt pod wpływem przyłożonych do nich sił. Odształcenie sprężyste ciała następuje wtedy, gdy po usunięciu działającej siły kształt wróci do stanu początkowego. Prawo opracowane przez Hooke’a głosi, że odształcenie sprężyste ciała jest proporcjonalne do przyłożonej siły. Dotyczy ono dowolnego kształtu ciała i konfiguracji sił składowych. Jeśli przyjmiemy, że rozciągany ciałem jest jednorodny pręt o długości l i przekroju S , a działa na niego siła F możemy zastosować wzór

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}, \quad (1)$$

w którym E oznacza moduł Younga. Gdy zastosujemy podstawienie $\frac{F}{S} = \sigma$, $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ prawo Hooke’a możemy zapisać w postaci $\sigma = E\varepsilon$. W rzeczywistości dla metali prawo Hooke’a przestaje być liniowe po odpowiednio dużym rozciągnięciu ciała. Punkt ten nazywany jest granicą sprężystości. Jednak w wykonywanym doświadczeniu użyta siła będzie na tyle mała, że wydłużanie pręta w stosunku do przyłożonej siły możemy uznać za liniowe.



Rys. 1. Wykres zależności naprężenia normalnego σ od normalnego odkształcenia względnego ε . Związek jest liniowy tylko na początku wykresu, a potem prawo Hooke'a przestaje działać. Jednak siła użyta w doświadczeniu była znacznie mniejsza od tej, która byłaby potrzebna do osiągnięcia granicy sprężystości.[1]

Zgodnie z prawem Hooke'a zależność $\Delta l(F)$ jest prosta daną wzorem

$$\Delta l = aF + b. \quad (2)$$

Porównując równanie (2) i (1) otrzymujemy, że

$$a = \frac{l}{ES} \rightarrow E = \frac{l}{aS}. \quad (3)$$

Uwzględniając fakt że pole przekroju pręta S jest kołem o średnicy d wzór roboczy na moduł Younga w tym doświadczeniu przybierze postać

$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a}. \quad (4)$$

2. Aparatura

W celu wykonania doświadczenia użyliśmy następujących przyrządów:

- Śruba mikrometryczna – Zakres użytej śruby wynosi od zera do 25 milimetrów, a jej dokładność 0,01 [mm]. Za jej pomocą zmierzaliśmy średnice pręta.
- Taśma miernicza – Taśma służyła nam do pomiaru długości pręta. Jej dokładność wynosi 0,01[m], czyli tyle ile najmniejsza podziałka.
- Zestaw odważników – W eksperymencie mieliśmy do dyspozycji dziesięć kilogramowych odważników.
- Przyrząd do pomiaru wydłużenia drutu pod wpływem stałej siły zaopatrzony w czujnik mikrometryczny.

3. Metodyka doświadczenia

W eksperymencie obliczyliśmy za pomocą prostej regresji moduł Younga dla stali i mosiądzu. Ćwiczenie rozpoczęliśmy od zmierzenia długości drutów przy pomocy taśmy mierniczej. Następnie sprawdziliśmy średnice obu drutów śrubą mikrometryczną w pięciu różnych miejscach. Po zamocowaniu drutu ze stali wykalibrowaliśmy czujnik mikrometryczny tak aby wskazywał zero. Następnie obciążaliśmy szalkę dokładając po jednym odważniku, za każdym razem notowaliśmy wydłużenie pręta. Stalowy drut obciążaliśmy łączną masą 10 kilogramów. Z szalki odbieraliśmy po jednym odważniku, cały czas zapisując wskazania widoczne na mierniku. Z drutem z mosiądzu postąpiliśmy identycznie, jedyną różnicą było maksymalne obciążenie w tym przypadku równe 6 kilogramów.

4. Analiza danych

Przed rozpoczęciem doświadczenia zmierziliśmy początkowe długości drutów stalowego oraz mosiężnego, wynoszą one odpowiednio:

$$l_s = 107,5 \text{ [cm]},$$

$$l_m = 107,3 \text{ [cm]}.$$

Za niepewność pomiaru długości każdego z drutów przyjmujemy dokładność podziałki $\Delta x \cong u(x) = 1 \text{ [mm]}$.

Pomiaru średnicy każdego drutu dokonaliśmy pięciokrotnie w różnych punktach co zostało zebrane w poniższej tabeli **Tab. 1.**

Tab. 1. Tabela zestawiająca kolejne pomiary średnicy drutu stalowego i mosiężnego.

Lp.	Średnica drutu stalowego d_s [mm]	Średnica drutu mosiężnego d_m [mm]
1.	0,7	1,17
2.	0,71	1,17
3.	0,69	1,19
4.	0,7	1,15
5.	0,68	1,16

Średnie średnic wynoszą odpowiednio:

$$\overline{d_s} = 0,696 \text{ [mm]},$$

$$\overline{d_m} = 1,168 \text{ [mm]}.$$

Korzystając z niepewności standardowej typu B przyjmujemy, iż wynoszą one odpowiednio $u(\overline{d_s}) = 0,01 \text{ [mm]}$ oraz $u(\overline{d_m}) = 0,01 \text{ [mm]}$.

Przystępując do mierzenia wydłużeń drutu sukcesywnie dodawaliśmy dodatkowe obciążenie, następnie ściągaaliśmy kolejne ciężarki, w taki sposób, by pozbyć się wszystkich z wagi, dla odpowiedniej z wag wyciągaaliśmy średnie wydłużenie.

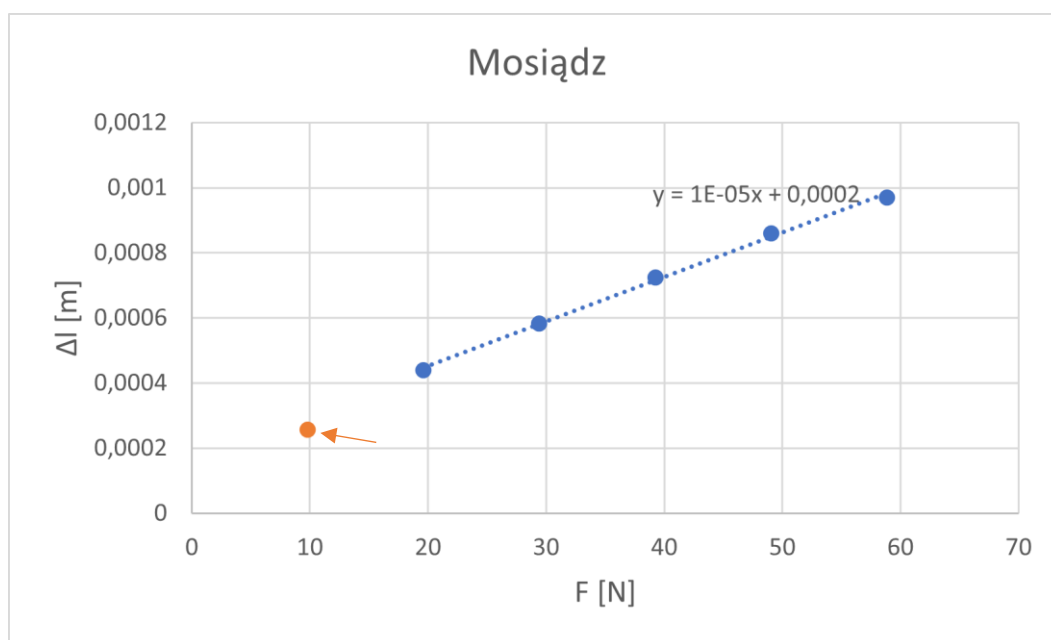
Dane przeprowadzonego doświadczenia znajdują się w poniższych tabelach **Tab.2.** oraz **Tab.3.**.

Tab.2. Tabela wyników dla drutu stalowego.

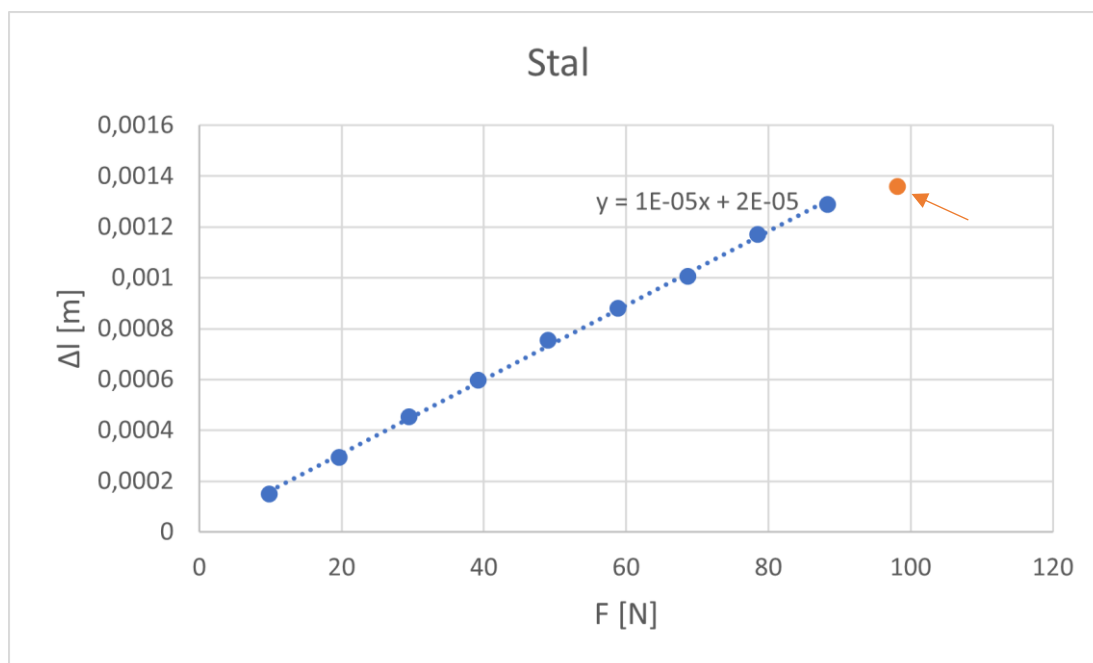
M [kg]	F [N]	$\Delta l_s \uparrow$ [1e-5 m]	$\Delta l_s \downarrow$ [1e-5 m]	$\overline{\Delta l_s}$ [1e-5 m]
1	9,81	0,00029	0,00031	0,00015
2	19,62	0,00055	0,00062	0,0002925
3	29,43	0,00089	0,00092	0,0004525
4	39,24	0,00116	0,00123	0,0005975
5	49,05	0,00144	0,00158	0,000755
6	58,86	0,00168	0,00184	0,00088
7	68,67	0,00195	0,00207	0,001005
8	78,48	0,00225	0,00243	0,00117
9	88,29	0,00255	0,00261	0,00129
10	98,1	0,00272	0,00272	0,00136

Tab.3. Tabela wyników dla mosiądzu.

M [kg]	F [N]	$\Delta l_s \uparrow$ [1e-5 m]	$\Delta l_s \downarrow$ [1e-5 m]	$\overline{\Delta l_s}$ [1e-5 m]
1	9,81	0,00052	0,00051	0,0002575
2	19,62	0,00085	0,00091	0,00044
3	29,43	0,00116	0,00117	0,0005825
4	39,24	0,00142	0,00148	0,000725
5	49,05	0,00172	0,00172	0,00086
6	58,86	0,00194	0,00194	0,00097



Rys.2. Punktowy wykres zależności zmiany długości od siły dla mosiądzu.



Rys.3. Punktowy wykres zależności zmiany długości od siły dla stali.

W wyniku zastosowania funkcji „REGLINP()” otrzymujemy wartość współczynnika nachylenia prostej regresji jak i jego niepewność, dla obu typów drutów. Wynoszą one kolejno:

$$A_s = 1,486 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{kg}} \right], \quad u(A_s) = 0,93 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{kg}} \right],$$

$$A_m = 1,772 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{kg}} \right], \quad u(A_m) = 7,3 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{kg}} \right].$$

Następnie wykorzystując wzór (4) obliczamy wartość modułu Younga dla obu typów metali.

$$E_s = 1,9 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$E_m = 0,565 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

Niepewność owego współczynnika obliczymy stosując prawo przenoszenia niepewności względnej zastosowanego do wzoru (4)

$$\frac{u(E)}{E} = \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l} \right)^2 + \left(-2 \frac{u(d)}{d} \right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a} \right)^2}.$$

W wyniku otrzymujemy następujące niepewności względne:

$$\frac{u(E_s)}{E_s} = 0,029,$$

$$\frac{u(E_m)}{E_m} = 0,045.$$

Mnożąc przez mianownik otrzymujemy niepewności otrzymanych wyników.

$$u(E_s) = 5,6 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right],$$

$$u(E_m) = 2,5 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right].$$

Możemy podać wynik końcowy przy zastosowaniu niepewności rozszerzonej o czynniku skalującym $k = 2$.

$$E_s = (1,94 \pm 0,11) \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$E_m = (0,57 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

Wartości tablicowe [2] współczynnika Younga dla stali oraz mosiądzu wynoszą kolejno

$$E_{\text{tab}_s} = (2 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right],$$

$$E_{\text{tab}_m} = (1,14 \pm 0,11) \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right].$$

Obliczone niepewności między różnicami wartości wyznaczonych doświadczalnie, a tych wyznaczonych za pomocą wzorów liczymy stosując prawo przenoszenia niepewności, co daje nam poniższy wzór:

$$u(E_x - E_{\text{tab}_x}) = \sqrt{(u(E_x))^2 + (u(E_{\text{tab}_x}))^2}.$$

Podstawiając wartości dla przypadku stali oraz mosiądzu otrzymujemy:

$$u(E_s - E_{\text{tab}_s}) = 0,15 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right],$$

$$u(E_m - E_{\text{tab}_m}) = 0,12 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right].$$

Natomiast różnice między wartościami otrzymanymi eksperymentalnie, a tablicowymi wynoszą odpowiednio

$$|E_s - E_{\text{tab}_s}| = 0,06 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right],$$

$$|E_m - E_{\text{tab}_m}| = 0,57 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right].$$

5. Podsumowanie

W wyniku zastosowania prawa Hooke'a w celu wyznaczenia wartości modułu Younga otrzymaliśmy wartość dla stali $E_s = (1,94 \pm 0,11) \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$, dla mosiądzu natomiast $E_m = (0,57 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$. Następnie korzystając z prawa przenoszenia niepewności zastosowanego do sumy niepewności rozszerzonej wyznaczonej przez nas oraz tej podanej jako tabelaryczna otrzymujemy w przypadku stali niepewność $u(E_s - E_{\text{tab}_s}) = 0,15 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$, gdzie różnica między wartością wyznaczoną oraz tabelaryczną wynosi $|E_s - E_{\text{tab}_s}| = 0,06 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$, mieści się ona zatem w podanym zakresie. W przypadku mosiądzu otrzymujemy ową niepewność wyniku równą $u(E_m - E_{\text{tab}_m}) = 0,12 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$, gdzie różnica między wartościami wynosi $|E_m - E_{\text{tab}_m}| = 0,57 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$. Oznacza to, iż w przypadku tego metalu nie otrzymujemy zgodności otrzymanych wyników.

6. Literatura

[1]- <http://lpf.wppt.pwr.edu.pl/opisy/cw010.pdf> - 29.11.2021

[2] - https://pl.wikipedia.org/wiki/Modu%C5%82_Younga - 29.11.2021