

Dynamika punktu materialnego

B. Szafran

9 marca 2023

Ciało o masie $m = 1\text{kg}$ porusza się w potencjale

$$V(x) = -\exp(-x^2) - 1.2 \exp(-(x-2)^2) [J] \quad (1)$$

W chwili początkowej ciało znajduje się w spoczynku $v = 0$ w punkcie $x = 2.8\text{m}$.

Definicja prędkości:

$$\frac{dx}{dt} \equiv v \quad (2)$$

II zasada Newtona:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \quad (3)$$

Jawny Schemat Eulera.

Dla $x_n \equiv x(n\Delta t)$, $v_n \equiv (v(n\Delta t))$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \quad (4)$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx}|_{x_n} \Delta t \quad (5)$$

zadanie 1. całkowanie równań ruchu jawnym schematem Eulera (25 pkt).

Narysować $x(t)$, $v(t)$, energię kinetyczną $E_k(t) = mv(t)^2/2$, potencjalną $V(x(t))$, oraz całkowitą $E_k(t) + V(t)$ dla $t \in (0, 30)$ dla $\Delta t = 0.01\text{s}$ oraz $\Delta t = 0.001\text{s}$

Opory ruchu

Do wzoru (3) dodajemy czynnik oporów ruchu: $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} - \alpha v$ z parametrem tłumienia $\alpha > 0$. Schemat (5) przybiera formę

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx}|_{x_n} \Delta t - \alpha v_n \Delta t. \quad (6)$$

zadanie 2. całkowanie równań z oporami ruchu (25 pkt).

Wstawiamy $\Delta t = 0.01\text{s}$ oraz $\alpha = 0.5, 5, 201$. Powtarzamy rachunki z zadania (2).

Całkowanie równań ruchu wzorem trapezów

We wzorze trapezów zmiana położenia i prędkości brana jest na podstawie średniej arytmetycznej z chwil n oraz $n+1$

- $x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (v_{n+1} + v_n)$
- $v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1} - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n \right)$

Ze względu na obecność prędkości z chwili $n + 1$ po prawej stronie równania wykonanie kroku czasowego wymaga rozwiązania układu równań nieliniowych $F_1 = 0$ oraz $F_2 = 0$ dla

- $F_1(x_{n+1}, v_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - \frac{\Delta t}{2} v_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} v_n$
- $F_2(x_{n+1}, v_{n+1}) = v_{n+1} - v_n - \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \Big|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1} \right) - \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \Big|_{x_n} - \alpha v_n \right)$

x_{n+1} oraz v_{n+1} wyznaczymy metodą iteracyjną, przy czym x_{n+1}^μ oraz v_{n+1}^μ oznacza wartości w μ -tej iteracji. Przy tych oznaczeniach przepis metody Newtona dla układu równań ma postać:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial v_{n+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial v_{n+1}} \end{pmatrix} \Big|_{x_{n+1}^\mu, v_{n+1}^\mu} \begin{pmatrix} x_{n+1}^{\mu+1} - x_{n+1}^\mu \\ v_{n+1}^{\mu+1} - v_{n+1}^\mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x_{n+1}^\mu, v_{n+1}^\mu) \\ F_2(x_{n+1}^\mu, v_{n+1}^\mu) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

która przy naszym układzie równań redukuje się do

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2m} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x_{n+1}^\mu} & 1 + \frac{\Delta t}{2} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1}^{\mu+1} - x_{n+1}^\mu \\ v_{n+1}^{\mu+1} - v_{n+1}^\mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x_{n+1}^\mu, v_{n+1}^\mu) \\ F_2(x_{n+1}^\mu, v_{n+1}^\mu) \end{pmatrix} \quad (8)$$

zadanie 3. Iteracja we wzorze trapezów (25 pkt).

Wstawić $\alpha = 0$, $\Delta t = 0.01s$. Iterujemy równanie kilka razy aż osiągniemy $F_1 = F_2 = 0$ z zadowalającą dokładnością. Udokumentować zbieżność dla pierwszego kroku czasowego.

zadanie 4. Całkowanie równań ruchu metodą trapezów (25 pkt).

Powtórzyć zadanie 1 (dla $\alpha = 0$) oraz 2 (dla $\alpha = 201$) wzorem trapezów.