

# Interpolacja wielomianowa

różniczkowanie  
numerycz-  
ne

interpolacja  
wielomia-  
nowa

dynamika  
punktu  
material-  
nego

schematy  
Eulera

równania  
nieliniowe

metoda  
bisekcji

metoda  
Newtona

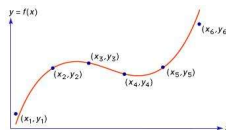
fraktal N.

krok w  
schemacie  
niejawnym

układy  
równań  
nielinio-  
wych

schemat  
trapezów

- wzory na pochodne: zamiast rozwinięcia w szereg Taylora - można wykorzystać interpolację wielomianową (potrzebna do: całkowania Gaussa, metody elementów skończonych, etc.)



© 2005 Encyclopedia Britannica, Inc.

- problem: zbiór punktów  $\{x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ , podać wielomian  $P(x)$ , taki że  $f(x_i) = y_i$
- wielomian węzłowy Lagrange'a:  $l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
- podstawowa własność:  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$
- wielomian interpolacyjny  $P(x) = \sum_{i=1}^N y_i l_i(x)$
- jeśli wartości  $x_i, y_i$  to wynik próbkowania dowolnej funkcji  $f(x) \in C^{n+1}$  w przedziale  $[a, b]$ , to  $f(x) = P(x) + \frac{f^{(N)}(\xi(x))}{(N)!} \prod_{j=1}^N (x - x_j)$ , gdzie  $\xi \in [a, b]$

# pochodne z interpolacji wielomianowej

## ■ 3 punkty

$$■ P(x) = f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$■ l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$■ l_1'(x) = \frac{2x-x_2-x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$■ l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$■ l_2'(x) = \frac{2x-x_1-x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$■ l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$■ l_3'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

■ weźmy równoodległe punkty  $x_1 = x_0$ ,  $x_2 = x_0 + h$ ,  $x_3 = x_0 + 2h$

$$■ f(x) = f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$■ l_1'(x) = \frac{2x-2x_0-3h}{2h^2}$$

$$■ l_2'(x) = \frac{-2x+2x_0+2h}{h^2}$$

$$■ l_3'(x) = \frac{2x-2x_0-h}{2h^2}$$

■ możemy przybliżyć pochodną w każdym z trzech punktów:

$$■ f'(x_0 + h) = \frac{1}{2h} (f(x_0 + 2h) - f(x_0)) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_0)$$

$$■ f'(x_0) = \frac{1}{2h} (-f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h) - 3f(x_0)) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_1)$$

$$■ f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{2h} (3f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + f(x_0)) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2)$$

# pochodne z interpolacji wielomianowej

różniczkowanie  
numerycz-  
ne

interpolacja  
wielomia-  
nowa

dynamika  
punktu  
material-  
nego

schematy  
Eulera

równania  
nieliniowe

metoda  
bisekcji

metoda  
Newtona

fraktal N.

krok w  
schemacie  
niejawnym

układy  
równań  
nielinio-  
wych

schemat  
trapezów

■ 5 punktów:  $x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$

■  $f'(x_0) = \frac{1}{12h} (\mp f(x_0 \pm 2h) \pm f(x_0 \pm h)) + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$

■  $f'(x_0 - 2h) =$

$$\frac{1}{12h} (-25f(x_0 - 2h) + 48f(x_0 - h) - 36f(x_0) + 16f(x_0 + h) - 3f(x_0 + 2h)) + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$$

■ druga pochodna dla 3 punktów:

■  $l_1''(x) = \frac{2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$

■  $l_2''(x) = \frac{2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$

■  $l_3''(x) = \frac{2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$

■ weźmy równoodległe punkty  $x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0, x_3 = x_0 + h$

■  $f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$

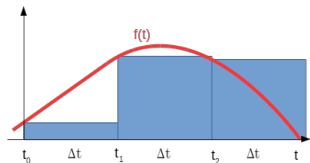
# uzupełnienie: całkowanie numeryczne, kwadratury NC

Bartłomiej Szafran

3 marca 2020

# całkowanie numeryczne

- problem początkowy:  $\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(t_0) = y_0$
- najprostszy przypadek  $\frac{dy}{dt} = f(t) \rightarrow y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(t)dt$
- definicja całki oznaczonej  $\int_a^b f(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f(i\Delta t + t_0)\Delta t$ , gdzie  $\Delta t = \frac{b-a}{N+1}$

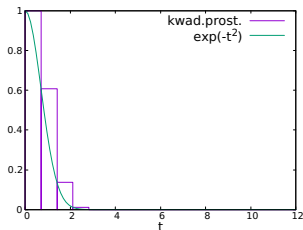


# całkowanie numeryczne

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f(i\Delta t + t_0)\Delta t,$$

$$\text{gdzie } \Delta t = \frac{b-a}{N+1}$$

- pojedynczy segment  $\int_a^b f(t)dt \simeq f(a)\Delta t$  (wzór prostokątów)
- Metoda działa dokładnie dla funkcji stałej. Myli się dla funkcji liniowej, z której całka jest rzędu  $\Delta t^2$  - błąd popełniony  $(b-a)/\Delta t$  razy, ogólnie błąd liniowy z  $\Delta t$



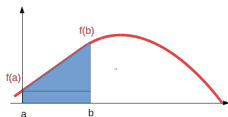
$$f(t) = \exp(-t^2), a = 0, b = 12$$

$$\bullet \frac{\sqrt{\pi}}{2} = .8862269254527580$$

| $N$     | $\Delta t$             | $\int$            |
|---------|------------------------|-------------------|
| 1       | 6.000000000000000      | 6.000000000000000 |
| 2       | 4.000000000000000      | 4.00000045014070  |
| 4       | 2.400000000000000      | 2.40756266807289  |
| 8       | 1.333333333333333      | 1.55977255436901  |
| 16      | 0.705882352941177      | 1.23916810635106  |
| 32      | 0.363636363636364      | 1.06804510727094  |
| 64      | 0.184615384615385      | 0.978534617760450 |
| 128     | 9.302325581395349E-002 | 0.932738553359735 |
| 256     | 4.669260700389105E-002 | 0.909573228954703 |
| 512     | 2.339181286549707E-002 | 0.897922831885506 |
| 1024    | 1.170731707317073E-002 | 0.892080583989343 |
| 2048    | 5.856515373352855E-003 | 0.889155183139435 |
| 4096    | 2.928972418843056E-003 | 0.887691411662180 |
| 8192    | 1.464664957890882E-003 | 0.886959257931702 |
| 16384   | 7.323771742447360E-004 | 0.886593114039878 |
| 32768   | 3.661997619701547E-004 | 0.886410025333736 |
| 65536   | 1.831026748249081E-004 | 0.886318476790162 |
| 131072  | 9.155203588839807E-005 | 0.886272701470678 |
| 262144  | 4.577619256518339E-005 | 0.886249813549008 |
| 524288  | 2.288813993808758E-005 | 0.886238369522645 |
| 1048576 | 1.144408088294899E-005 | 0.886232647493048 |
| 2097152 | 5.722043169954696E-006 | 0.886229786474012 |
| 4194304 | 2.861022267097886E-006 | 0.886228355963241 |

# całkowanie numeryczne

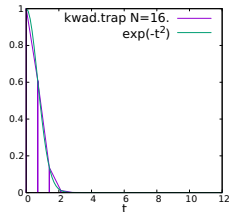
- pojedynczy segment  $\int_a^b f(t) dt$
- $f(t) \simeq f(a) \frac{t-b}{a-b} + f(b) \frac{t-a}{b-a} = g(t)$
- $\int_a^b g(t) dt = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) = \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a)$



- **kwadratura trapezów:** dokładna dla funkcji liniowej, myli się przy paraboli, błąd z jednego segmentu  $O(\Delta t^3)$ , błąd kwadratury złożonej  $O(\Delta t^2)$

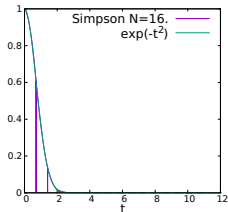
$$\bullet \frac{\sqrt{\pi}}{2} = .8862269254527580$$

| N       | $\Delta t$             | $\int$            |
|---------|------------------------|-------------------|
| 1       | 6.00000000000000       | 3.00000000000000  |
| 2       | 4.00000000000000       | 2.00000045014070  |
| 4       | 2.40000000000000       | 1.20756266807289  |
| 8       | 1.33333333333333       | 0.893105887702342 |
| 16      | 0.705882352941177      | 0.886226929880471 |
| 32      | 0.363636363636364      | 0.886226925452758 |
| 64      | 0.184615384615385      | 0.886226925452758 |
| 128     | 9.302325581395349E-002 | 0.886226925452758 |
| 256     | 4.669260700389105E-002 | 0.886226925452758 |
| 512     | 2.339181286549707E-002 | 0.886226925452758 |
| 1024    | 1.170731707317073E-002 | 0.886226925452758 |
| 2048    | 5.856515373352855E-003 | 0.886226925452757 |
| 4096    | 2.928972418843056E-003 | 0.886226925452757 |
| 8192    | 1.464664957890882E-003 | 0.886226925452757 |
| 16384   | 7.323771742447360E-004 | 0.886226925452754 |
| 32768   | 3.661997619701547E-004 | 0.886226925452754 |
| 65536   | 1.831026748249081E-004 | 0.886226925452748 |
| 131072  | 9.155203588839807E-005 | 0.886226925452743 |
| 262144  | 4.577619256518339E-005 | 0.886226925452714 |
| 524288  | 2.288813993808758E-005 | 0.886226925452676 |
| 1048576 | 1.144408088294899E-005 | 0.886226925452602 |
| 2097152 | 5.722043169954696E-006 | 0.886226925452430 |
| 4194304 | 2.861022267097886E-006 | 0.886226925452103 |

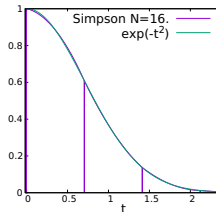


# całkowanie numeryczne

- pojedynczy segment  $\int_a^b f(t)dt$ ,  
 $c = (b + a)/2$
- int.parabolą  $f(t) \simeq f(a) \frac{(t-b)(t-c)}{(a-b)(a-c)} + f(c) \frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b) \frac{(t-a)(t-c)}{(b-a)(b-c)} = g(t)$
- $\int_a^b g(t)dt = \frac{(b-a)}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$
- reguła **Simpsona**
- dokładna dla funkcji kwadratowej, myli się przy funkcji sześcienniej, błąd z jednego segmentu  $O(\Delta t^4)$ , błąd kwadratury złożonej  $O(\Delta t^3)$



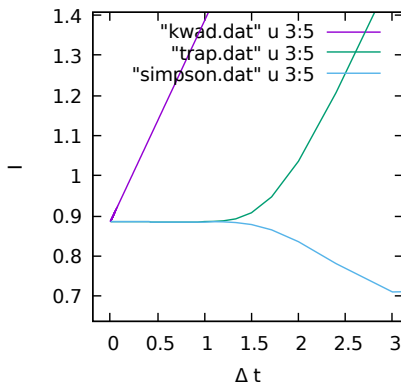
|         |                        |                   |
|---------|------------------------|-------------------|
| 1       | 6.000000000000000      | 1.00049363921635  |
| 2       | 4.000000000000000      | 0.715508520416858 |
| 4       | 2.400000000000000      | 0.781609067369347 |
| 8       | 1.333333333333333      | 0.883933938572404 |
| 16      | 0.705882352941177      | 0.886226923976854 |
| 32      | 0.363636363636364      | 0.886226925452758 |
| 64      | 0.184615384615385      | 0.886226925452758 |
| 128     | 9.302325581395349E-002 | 0.886226925452758 |
| 256     | 4.669260700389105E-002 | 0.886226925452758 |
| 512     | 2.339181286549707E-002 | 0.886226925452758 |
| 1024    | 1.170731707317073E-002 | 0.886226925452758 |
| 2048    | 5.856515373352855E-003 | 0.886226925452759 |
| 4096    | 2.928972418843056E-003 | 0.886226925452758 |
| 8192    | 1.464664957890882E-003 | 0.886226925452757 |
| 16384   | 7.323771742447360E-004 | 0.886226925452754 |
| 32768   | 3.661997619701547E-004 | 0.886226925452753 |
| 65536   | 1.831026748249081E-004 | 0.886226925452748 |
| 131072  | 9.155203588839807E-005 | 0.886226925452741 |
| 262144  | 4.577619256518339E-005 | 0.886226925452720 |
| 524288  | 2.288813993808758E-005 | 0.886226925452674 |
| 1048576 | 1.144408088294899E-005 | 0.886226925452618 |
| 2097152 | 5.722043169954696E-006 | 0.886226925452422 |
| 4194304 | 2.861022267097886E-006 | 0.886226925452109 |





# całkowanie numeryczne

- $\int_0^{12} \exp(-t^2) dt$
- 



# całkowanie numeryczne

- $\int_0^{12} t^2 = 576$  prostokąty

|     |                   |                       |
|-----|-------------------|-----------------------|
| 0   | 12.00000000000000 | 0.00000000000000E+000 |
| 1   | 6.00000000000000  | 216.000000000000      |
| 4   | 2.40000000000000  | 414.720000000000      |
| 9   | 1.20000000000000  | 492.480000000000      |
| 16  | 0.705882352941177 | 526.173010380623      |
| 25  | 0.461538461538462 | 543.195266272189      |
| 36  | 0.324324324324324 | 552.859021183346      |
| 49  | 0.240000000000000 | 558.835200000000      |
| 64  | 0.184615384615385 | 562.775857988166      |
| 81  | 0.146341463414634 | 565.506246281975      |
| 100 | 0.118811881188119 | 567.473777080678      |

- |     |                   |                  |
|-----|-------------------|------------------|
| 0   | 12.00000000000000 | 864.000000000000 |
| 1   | 6.00000000000000  | 648.000000000000 |
| 4   | 2.40000000000000  | 587.520000000000 |
| 9   | 1.20000000000000  | 578.880000000000 |
| 16  | 0.705882352941177 | 576.996539792388 |
| 25  | 0.461538461538462 | 576.426035502959 |
| 36  | 0.324324324324324 | 576.210372534697 |
| 49  | 0.240000000000000 | 576.115200000000 |
| 64  | 0.184615384615385 | 576.068165680473 |
| 81  | 0.146341463414634 | 576.042831647829 |
| 100 | 0.118811881188119 | 576.028232526223 |

- |    |                   |                  |
|----|-------------------|------------------|
| 0  | 12.00000000000000 | 576.000000000000 |
| 1  | 6.00000000000000  | 576.000000000000 |
| 4  | 2.40000000000000  | 576.000000000000 |
| 9  | 1.20000000000000  | 576.000000000000 |
| 16 | 0.705882352941177 | 576.000000000000 |
| 25 | 0.461538461538462 | 576.000000000000 |
| 36 | 0.324324324324324 | 576.000000000000 |

- $\int_0^{12} t^4 = 49766.4$  prostokąty

|     |                   |                       |
|-----|-------------------|-----------------------|
| 0   | 12.00000000000000 | 0.00000000000000E+000 |
| 1   | 6.00000000000000  | 7776.000000000000     |
| 4   | 2.40000000000000  | 28187.6889600000      |
| 9   | 1.20000000000000  | 38153.4105600000      |
| 16  | 0.705882352941177 | 42734.7159157577      |
| 25  | 0.461538461538462 | 45103.8493049963      |
| 36  | 0.324324324324324 | 46464.3882697378      |
| 49  | 0.240000000000000 | 47311.2562728960      |
| 64  | 0.184615384615385 | 47871.9389436280      |
| 81  | 0.146341463414634 | 48261.4670384367      |
| 100 | 0.118811881188119 | 48542.6893036862      |

- |     |                   |                   |
|-----|-------------------|-------------------|
| 0   | 12.00000000000000 | 124416.0000000000 |
| 1   | 6.00000000000000  | 69984.0000000000  |
| 4   | 2.40000000000000  | 53070.8889600000  |
| 9   | 1.20000000000000  | 50595.0105600000  |
| 16  | 0.705882352941177 | 50053.3041510519  |
| 25  | 0.461538461538462 | 49889.0800742271  |
| 36  | 0.324324324324324 | 49826.9828643324  |
| 49  | 0.240000000000000 | 49799.5762728960  |
| 64  | 0.184615384615385 | 49786.0312513203  |
| 81  | 0.146341463414634 | 49778.7353311196  |
| 100 | 0.118811881188119 | 49774.5308878446  |

- |     |                   |                  |
|-----|-------------------|------------------|
| 0   | 12.00000000000000 | 51840.0000000000 |
| 1   | 6.00000000000000  | 49896.0000000000 |
| 4   | 2.40000000000000  | 49769.7177600000 |
| 9   | 1.20000000000000  | 49766.6073600000 |
| 16  | 0.705882352941177 | 49766.4248272890 |
| 25  | 0.461538461538462 | 49766.4045376563 |
| 36  | 0.324324324324324 | 49766.4011064151 |
| 49  | 0.240000000000000 | 49766.4003317760 |
| 64  | 0.184615384615385 | 49766.4001161640 |
| 81  | 0.146341463414634 | 49766.4000458637 |
| 100 | 0.118811881188119 | 49766.4000199269 |

# kwadratury Newtona-Cotesa

- interpolujemy funkcję podcałkową wielomianem Lagrange'a z równoodległymi węzłami, następnie go całkujemy, tzw. kwadratury Newtona-Cotesa
- $\int_a^b f(t) dt \simeq (b-a)f(a)$ , (wzór prostokątów), dokładne dla wielomianu stopnia  $n=0$
- $\int_a^b f(t) dt \simeq \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$ , (trapezów),  $n=1$
- $\int_a^b f(t) dt \simeq \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$ , (wzór Simpsona),  $n=2$
- $\int_a^b f(t) dt \simeq \frac{b-a}{8} (f(a) + 3f(a + (b-a)/3) + 3f(a + 2(b-a)/3) + f(b))$ , (Simpsona 3/8),  $n=3$
- błąd jednego przedziału rzędu  $O((b-a)^{n+2})$
- wielomian Lagrange'a interpolowany na  $(n+1)$ , po scałkowaniu  $n+2$  i to daje rząd błędu
- kwadratury są zamknięte (wywołują funkcję podcałkową na końcach przedziału). Nie nadają się do całkowania osobliwości.
- kwadratury otwarte i bardziej inteligentne niż równoodległe umiejscowienie węzłów - kwadratury Gaussa - w dalszej części wykładu.

## kwadratury Gaussa-Legendra do całkowania elementów macierzowych

Gauss= najbardziej efektywna metoda dla MES  
funkcje kształtu są wielomianami(!), a Gauss całkuje je dokładnie

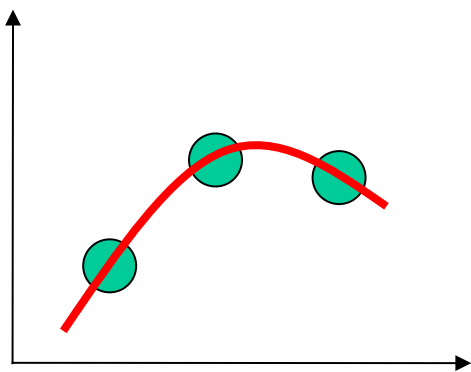
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

ważona suma funkcji podcałkowej  
w wybranych punktach  $x_i$

Chcemy wybrać tak wagi i punkty aby kwadratura była dokładna dla wielomianu jak najwyższego stopnia (funkcje kształtu będą wielomianami)

Na pewno uda nam się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia  $n-1$

Próbkując funkcję w  $n$  dowolnych punktach: na pewno uda się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia  $n-1$



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Na przedziale  $-1,1$  wybieramy (dowolnie)  $n$  – punktów i prowadzimy przez nie wielomian interpolacyjny Lagrange’a funkcji  $f(x)$

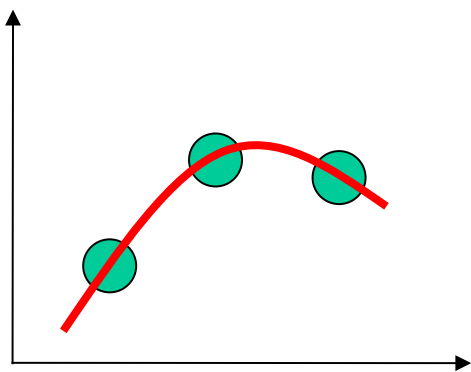
$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

Jeśli  $f(x)$  – wielomian stopnia nie większego niż  $n-1$

$\mathbf{f(x)=y(x)}$  (interpolując wielomian dostaniemy ten sam wielomian)

Dla równoodległych punktów całkowania – dostajemy kwadratury Newtona-Cotesa

Próbkując funkcję w  $n$  dowolnych punktach: na pewno uda się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia  $n-1$



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Na przedziale  $-1,1$  wybieramy (dowolnie)  $n$  – punktów i prowadzimy przez nie wielomian interpolacyjny Lagrange’a funkcji  $f(x)$

$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

Jeśli  $f(x)$  – wielomian stopnia nie większego niż  $n-1$

$f(x)=y(x)$  (interpolując wielomian dostaniemy ten sam wielomian)

Dla równoodległych punktów całkowania – dostajemy kwadratury Newtona-Cotesa

Gauss: na wyborze punktów  $x_i$  można  
zyskać dokładność dla  $n$  stopni  
więcej

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Wybieramy wagi i punkty Gaussa, tak aby dokładnie scałkować wielomian stopnia  $2n-1$

[ $2n$  współczynników,  $2n$  wag i punktów]

Przykład:  $n=2$  – dokładnie scałkujemy wielomian stopnia 3  
Zamiast funkcji liniowej jak w metodzie Newtona-Cotesa

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 \times f(x_1) + w_2 \times f(x_2)$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a \int_{-1}^1 dx + b \int_{-1}^1 x dx + c \int_{-1}^1 x^2 dx + d \int_{-1}^1 x^3 dx$$

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a \int_{-1}^1 dx + b \int_{-1}^1 xdx + c \int_{-1}^1 x^2dx + d \int_{-1}^1 x^3dx$$

$a,b,c,d$  – dowolne. Każda z powyższych całek musi zostać policzona dokładnie.  
wstawiamy po kolei 1 za jeden z  $a,b,c,d$ =reszta 0.

$$\int_{-1}^1 dx = 2 = w_1 \times 1 + w_2 \times 1$$

$$\int_{-1}^1 xdx = 0 = w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 \longrightarrow$$

$$\int_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3} = w_1 \times x_1^2 + w_2 \times x_2^2$$

$$\int_{-1}^1 x^3dx = 0 = w_1 \times x_1^3 + w_2 \times x_2^3$$

$$\int_0^1 f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

[kwadratura ma działać również dla  $f(-x)$ ]  
 $x_1$  oraz  $x_2$  będą rozłożone

symetrycznie względem 0 ( $x_1=-x_2$ )

wtedy z (2)  $w_1=w_2=1$  (z 1)

(4) - zawsze spełnione

$$2/3=x_1^2+x_2^2 \text{ z (3)}$$

$$x_2=\pm(1/3)^{1/2} \text{ (jeśli plus to minus w } x_1\text{)}$$

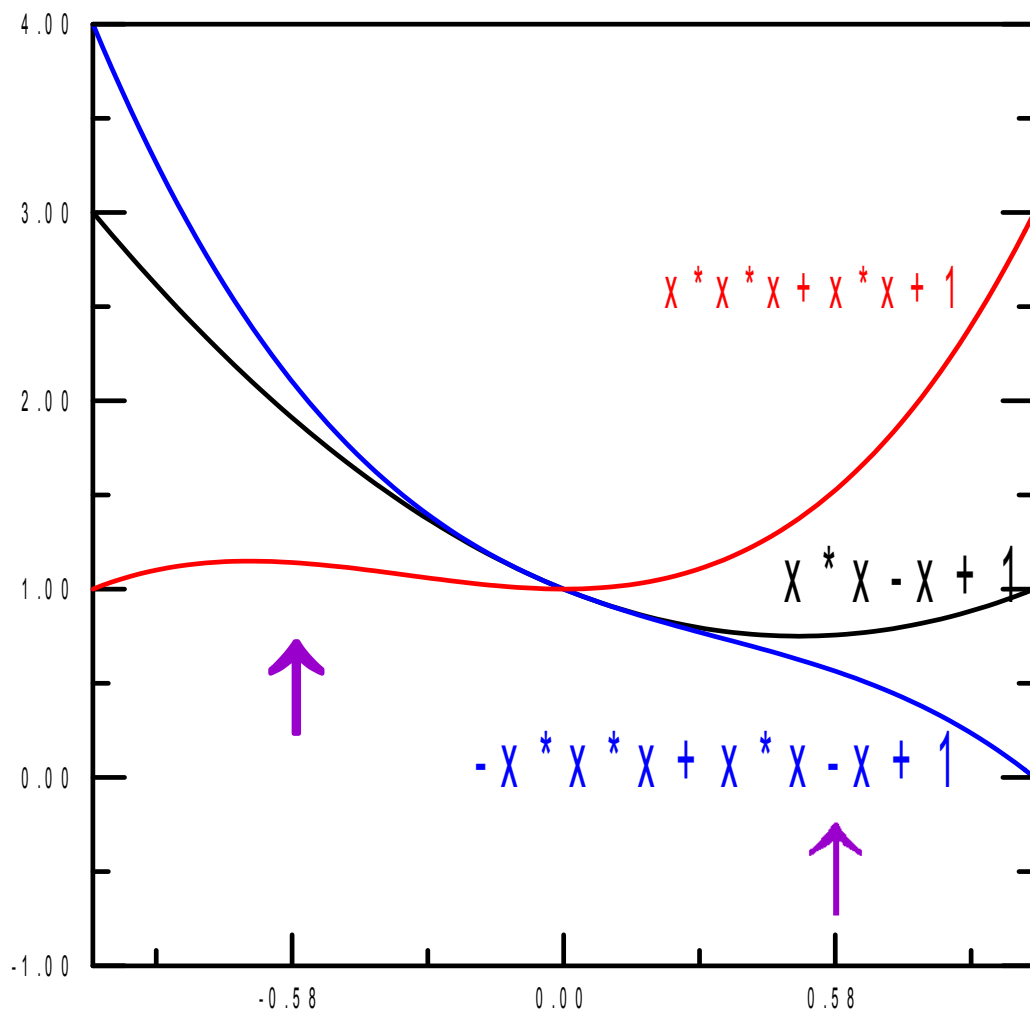

---



kwadratura Gaussa dokładna

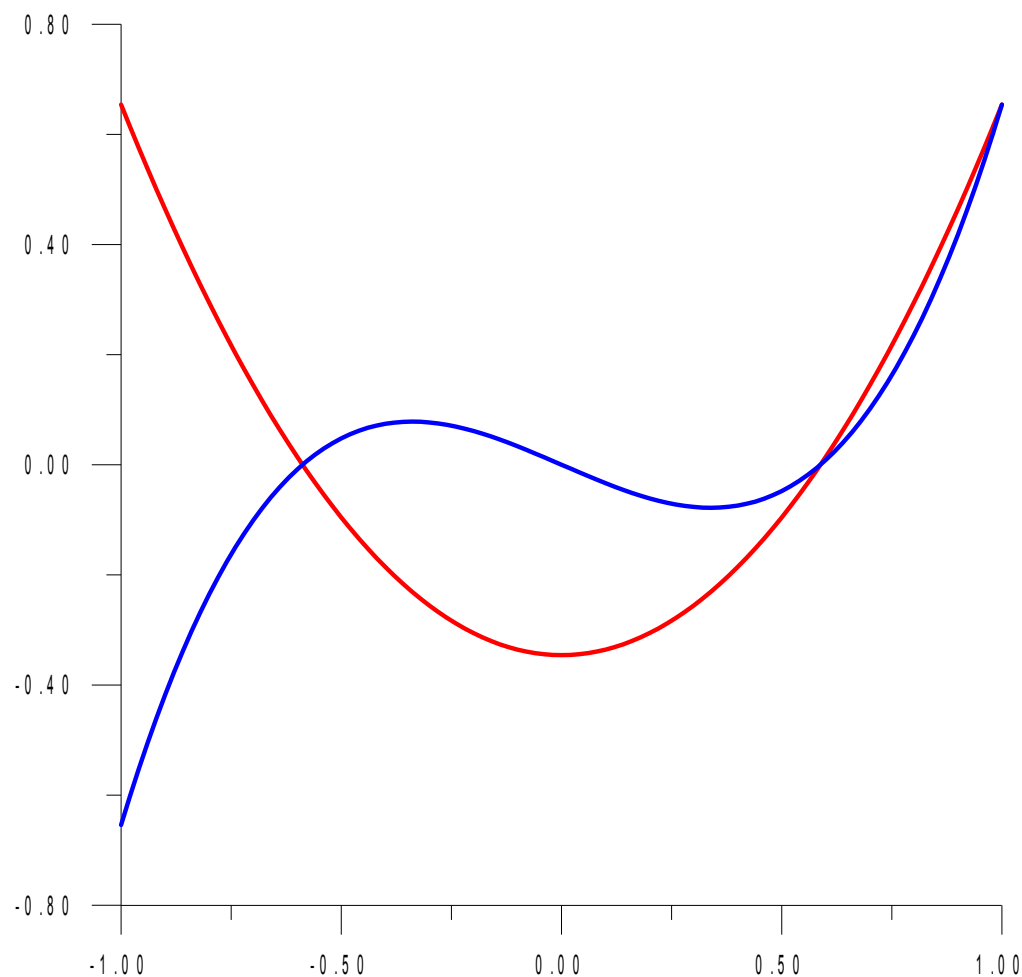
dla wielomianów stopnia 3:

$$w_1=w_2=1, \quad x_1=(1/3)^{1/2} \quad x_2=-(1/3)^{1/2}$$



wystarczy  
dodać wartości  
funkcji w dwóch  
punktach aby uzyskać  
dokładną całkę  
dla wielu różnych wielomianów

w konsekwencji: jeśli dwa wielomiany stopnia  $<4$   
przyjmują te same wartości w punktach Gaussa  
to ich całki po przedziale  $-1,1$  również identyczne: np



$$(x-x_g)*(x+x_g)$$

$$x(x-x_g)*(x+x_g)$$

Dalej o wyborze punktów Gaussa: Tw. Jakobiego:

kwadratura 
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

oparta na wielomianie interpolacyjnym Lagrange'a

$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

jest dokładna dla wielomianów stopnia  $2n-1$ , jeśli punkty  $x_i$  wybrane tak, że wielomian stopnia  $n$

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad \text{jest ortogonalny do wszystkich wielomianów stopnia } (n-1)$$

---

Dla funkcji całkowalnych z kwadratem iloczyn skalarny do całka z iloczynu funkcji:

$$\int_{-1}^1 z(x) p_{n-1}(x) dx = 0 \longrightarrow \int_{-1}^1 f_{2n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f_{2n-1}(x_i)$$

dla dowolnego wielomianu stopnia  $n$  i dowolnej liczby  $r$   
istnieje taki wielomian o stopniu o jeden niższym i taka liczba  $R$ , że:

$$P_n(x) = (x-r) P_{n-1}(x) + R$$


---

przykład:

$$1+x+x^2 = (x-2)(ax+b) + c = c - 2b + (b-2a)x + ax^2 - \text{wyliczymy sobie } a, b, \text{ oraz } c$$


---

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$f_{2n-1}(x) = (x-x_1) f_{n-2}(x) + r_0$$

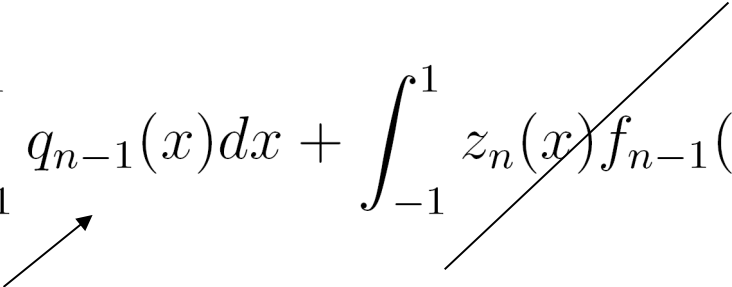
$$f_{2n-1}(x) = (x-x_1) [(x-x_2) f_{n-3}(x) + r_1] + r_0 = (x-x_1)(x-x_2) f_{n-3} + \underbrace{r_0 + r_1(x-x_1)}_{q_1(x)}$$

$$q_1(x)$$

$$f_{2n-1}(x) = z_n(x) f_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)$$


---

$$f_{2n-1}(x) = z_n(x)f_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^1 f_{2n-1}(x) dx = \int_{-1}^1 q_{n-1}(x) dx + \int_{-1}^1 \cancel{z_n(x)f_{n-1}(x)} dx$$


całka oparta o przepis interpolacyjny  
będzie dokładna dla każdego wielomianu stopnia  $n-1$

Problem: jak wybrać  $z(x)$  aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia  $n-1$

Problem: jak wybrać  $z(x)$  aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia  $n-1$

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

wybrać zera znaczy wybrać wielomian (co do stałej multiplikatywnej)

każdy wielomian można zapisać w postaci sfaktoryzowanej

$$P_n(x) = a \prod_{i=1}^n (x - x_i) = az_n(x)$$

---

wielomian Legendra stopnia  $n$

- ortogonalny na przedziale  $[-1,1]$  do wszystkich wielomianów stopnia  $n-1$ .
- zera tego wielomianu wyznaczają optymalne punkty Gaussa

## Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Przedział  $[-1,1]$ .

Mamy zbiór niezależnych liniowo funkcji  $h_0=1$ ,  $h_1=x$ ,  $h_2=x^2$ ,  $h_3=x^3$ , ...

które nie są ortogonalne [iloczyn skalarny określony z funkcją wagową  $w(x)$ ].

Chcemy skonstruować bazę wielomianów ortogonalnych.

funkcje bazowe dla tego przedziału, z wagą  $w(x)=1$  są to wielomiany Legendre'a.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = a + x$$

Jakie  $a$  aby  $(u_0, u_1) = 0$  ? : odp.:  $a=0$

$$u_1 = x$$

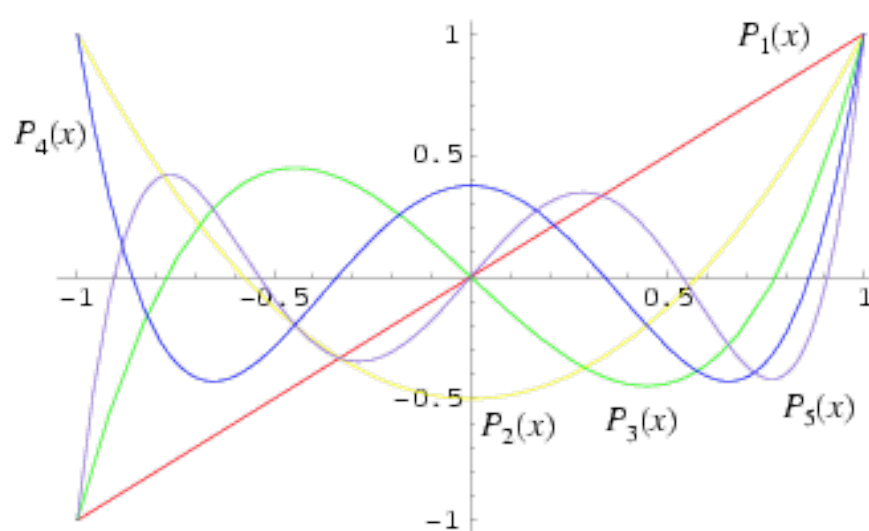
$$u_2 = x^2 + bx + c$$

$$(u_2, u_0) = 2/3 + 2c = 0$$

$$(u_2, u_1) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$u_2 = (x^2 - 1/3)$$

W literaturze wielomiany Legendre'a normalizowane tak aby  $P_k(1)=1$  :  $1, x, 3/2 (x^2 - 1/3)$



ltd.

## kwadratury Gaussa-Legendra

W bazie  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  można opisać wszystkie wielomiany stopnia  $n-1$ ,  
 $P_n$  ortogonalny do wszystkich wektorów bazy,  
więc i do wszystkich wielomianów stopnia  $n-1$

Punkty Gaussa zapewniające maksymalną  
dokładność (do wielomianu stopnia  $2n-1$ ):  
zera  $n$ -tego wielomianu Legendra

$P_2 = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3}) \rightarrow$  Dla  $2n-1=3$  [ punkty Gaussa tam gdzie wcześniej wyliczyliśmy ]

$l_1 = (x + 1/\sqrt{3}) / (2/\sqrt{3})$ . całka z niego od  $-1$  do  $1 = 1$

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

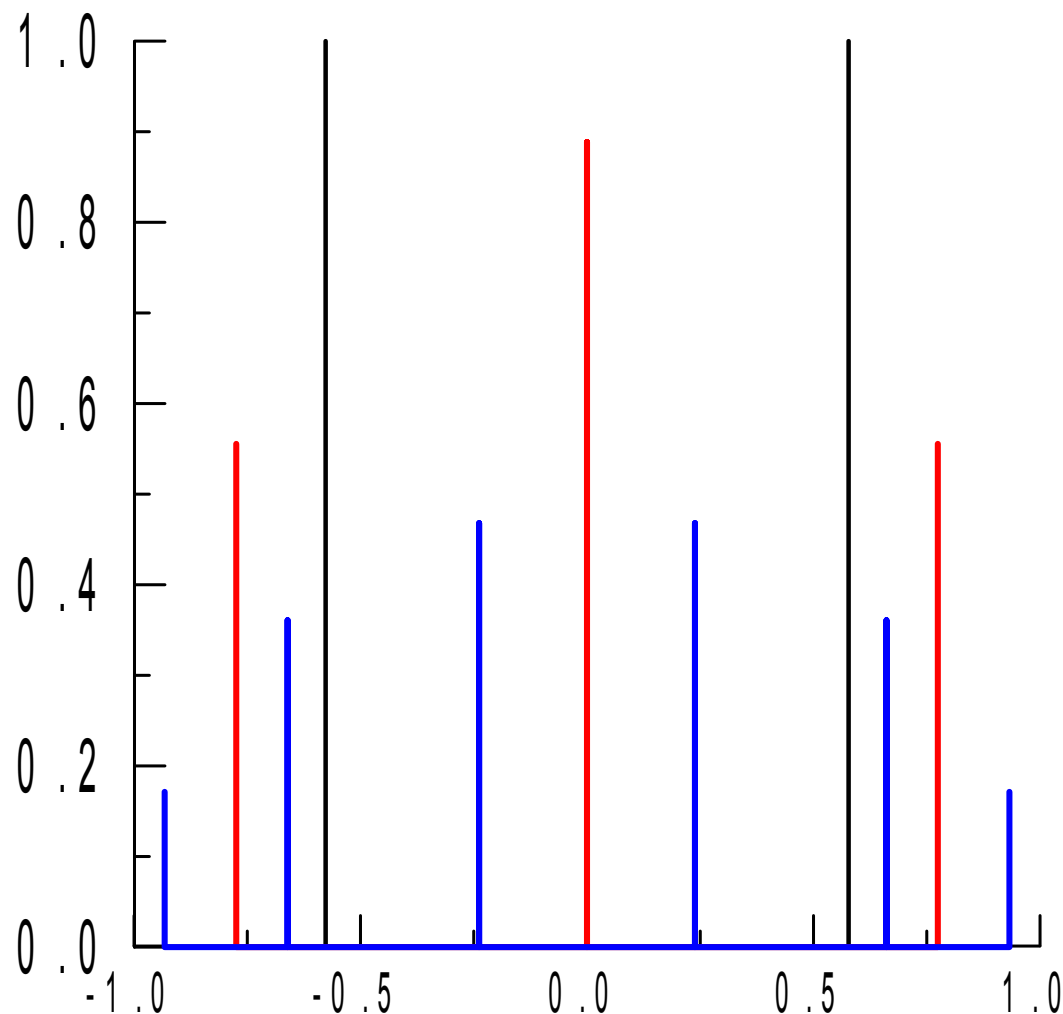


## Wagi i punkty Gaussa

Dokładne do wielomianów stopnia 3

stopnia 5

stopnia 11

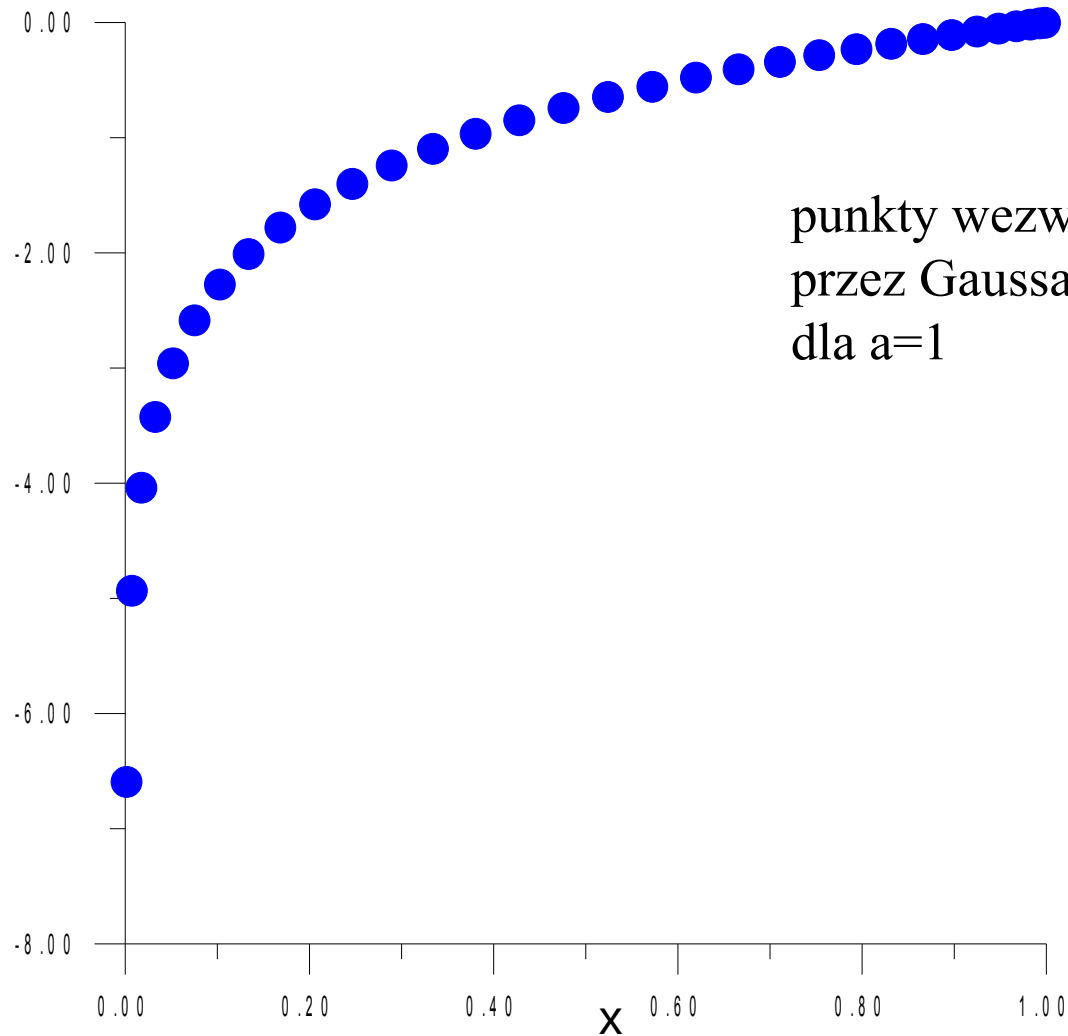


$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Kwadratury Gaussa – otwarte (nie wzywają funkcji na krańcach przedziału całkowania), nadają się do funkcji z całkowalną osobliwością na końcu przedziału :

Całkowanie kwadraturą Gaussa  
funkcji z logarytmiczną osobliwością

$$\int_0^a \ln(x) dx = a(\ln(a) - 1)$$



wynik num:    zamiast:  
-0.9994022    -1

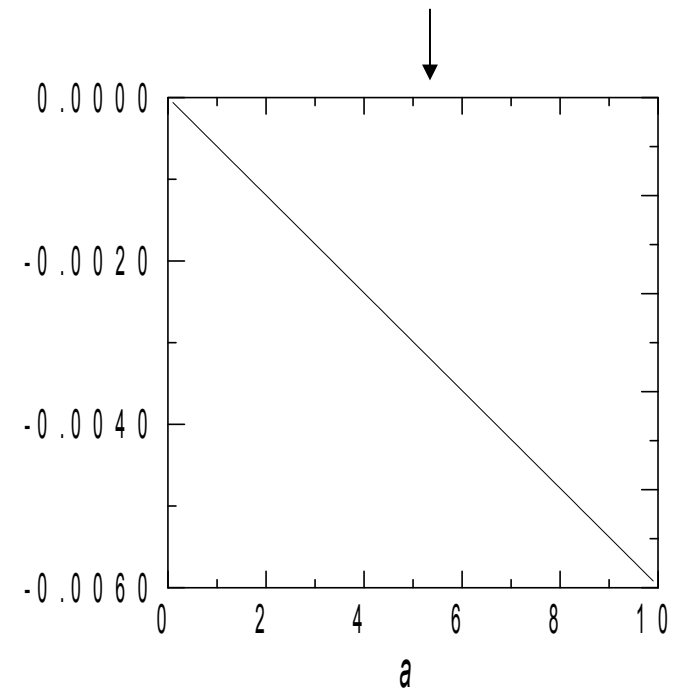
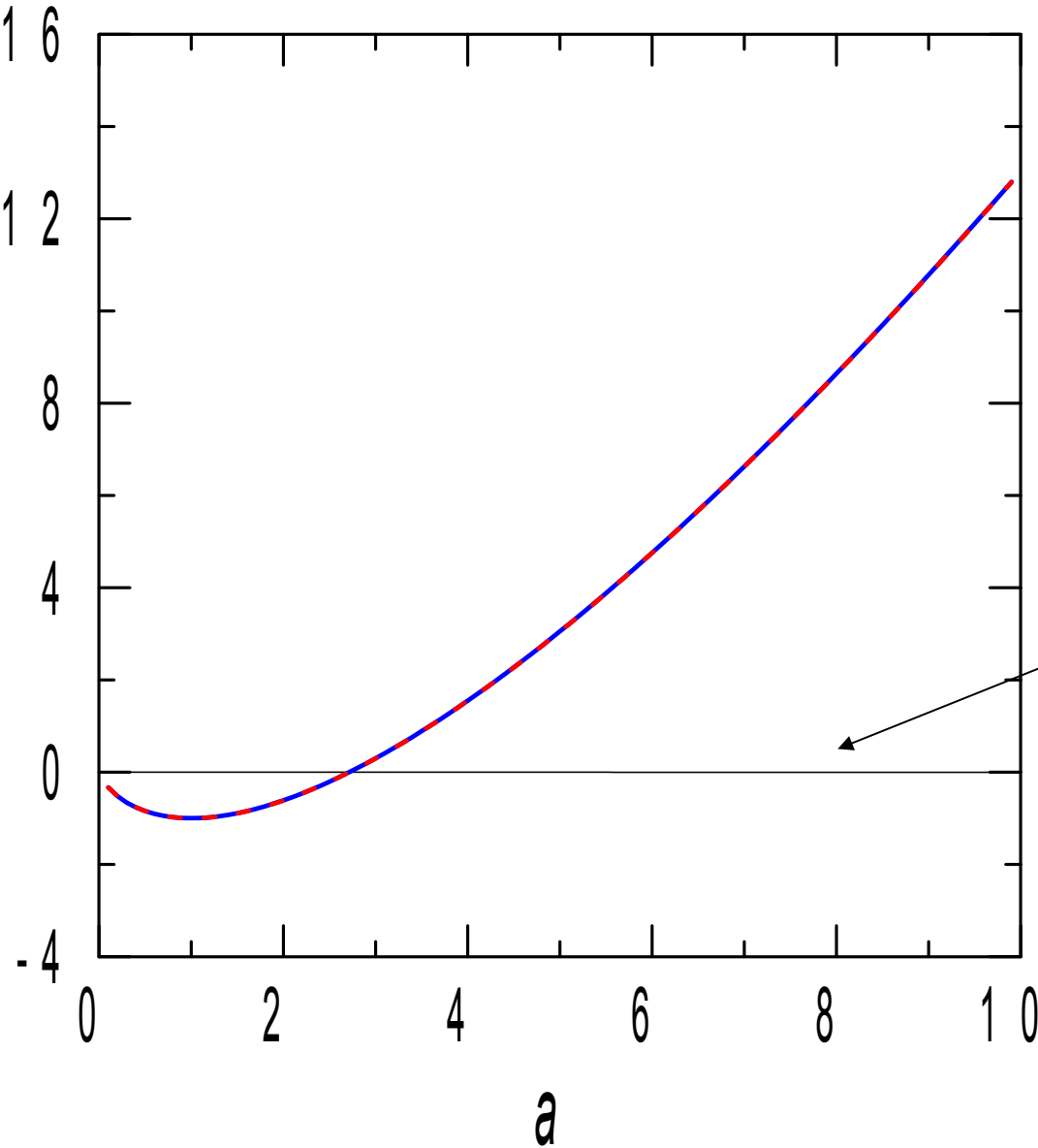
dla a=1

$$\int_0^a \ln(x) dx = a(\ln(a) - 1)$$

niebieski: Gauss numeryczny  
32 punkty

czzerwony: analityczny

czarny: błąd [analityczny-  
numeryczny]



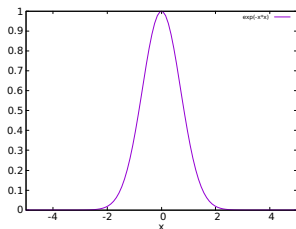
# całkowanie MC

Bartłomiej Szafran

3 marca 2020

# całkowanie Gaussa

- całkowanie Gaussa jest świetną metodą, o ile w przedziale całkowania funkcja daje się opisać przy pomocy wielomianu rzędu  $2n-1$  (ciągła, gładka klasy  $C^n$ , gdzie  $n$  wysokie)
- kilka problemów: (1) Gaussian



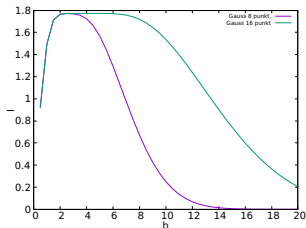
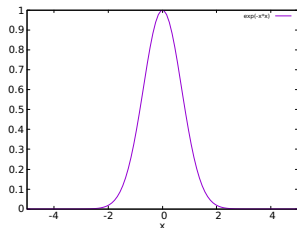
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} = 1.77245$$

- całkowanie Gaussa - wg oryginalnego przepisu - w przedziale  $[-1, 1]$ , dla niego zdefiniowane punkty i wagi

- $$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

- $$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x' = \frac{2x-a-b}{b-a} \\ x = \frac{b-a}{2} x' + \frac{b+a}{2} \end{array} \right| = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} x' + \frac{b+a}{2}\right) dx' \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

# całkowanie Gaussa funkcji Gaussa



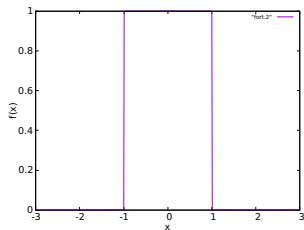
- $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} = 1.77245$

- $\int_{-b}^b \exp(-x^2) dx$

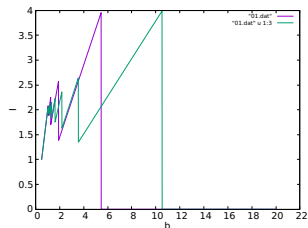
| b   | Gauss 8   | Gauss 16 |
|-----|-----------|----------|
| 1.  | 1.493648  | 1.493648 |
| 2.  | 1.764137  | 1.764163 |
| 2.5 | 1.771277  | 1.771732 |
| 3.  | 1.768831  | 1.772415 |
| 3.5 | 1.756364  | 1.772453 |
| 4.  | 1.723884  | 1.772451 |
| 4.5 | 1.661922  | 1.772427 |
| 5.  | 1.567003  | 1.772279 |
| 5.5 | 1.442495  | 1.771671 |
| 8.  | 0.6735966 | 1.719252 |
| 10. | 0.2507452 | 1.537600 |

- grupa: skąd ten problem i jak go rozwiązać ...

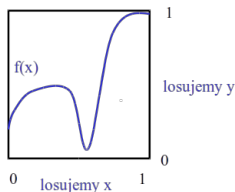
# całkowanie Gaussa funkcji schodkowej



- grupa: skąd ten problem i jak go rozwiązać ...



# całkowanie Monte Carlo: metoda hit or miss

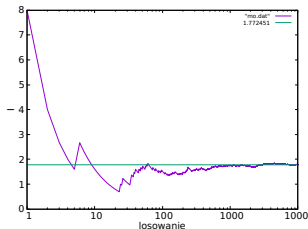


- $p$  szacujemy na podstawie  $N$  losowań.
  - $r = 0$
  - pętla po  $i$  od 1 do  $N$ , losujemy  $x_i, y_i$
  - jeśli  $y_i < f(x_i)$   $r=r+1$
  - koniec pętli
  - oszacowanie  $p = r/N$
- mamy do dyspozycji generator liczb losowych z rozkładem równomiernym
  - chcemy oszacować całkę jako pole pod krzywą  $y = f(x)$  w przedziale zamkniętym
  - metody Monte-Carlo (Stanisław Ulam, Nicholas Metropolis)
  - przedstawienie problemu matematycznego w formie probabilistycznej, rozwiązanie z wykorzystaniem liczb losowych (pseudolosowych)
  - $\int_0^1 f(x)dx = Ap$ , gdzie  $A$  to pole powierzchni prostokąta (rysunek), a  $p$  - prawdopodobieństwo, że dla wylosowanej pary punktów  $x, y$  spełniony jest warunek  $y < f(x)$ .

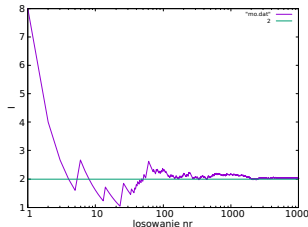


# całkowanie Monte Carlo: hit or miss

- całka z gaussiano : losowanie w przedziale  $[-4, 4] \times [0, 1]$

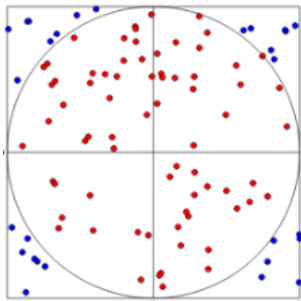


- całka z funkcji schodkowej : losowanie w przedziale  $[-4, 4] \times [0, 1]$



- na rysunkach : losowanie z historią (dokładamy kolejne punkty)
- naszą zmienną losową jest  $C$  estymator dokładnej całki
- wariancja oszacowania  $C$ :  $\sigma^2(C) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (C_i - \langle C \rangle)^2$
- dla dużych  $N$  błąd oszacowania maleje jak  $\frac{1}{\sqrt{N}}$

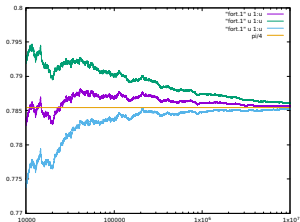
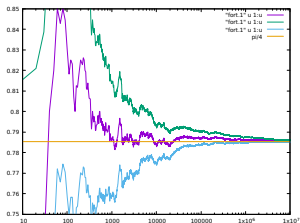
# całkowanie Monte Carlo: hit or miss



- znany przykład: liczymy liczbę  $\pi$  jako czterokrotność całki pod okręgiem jednostkowym w pierwszej ćwiartce  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

# całkowanie Monte Carlo: hit or miss

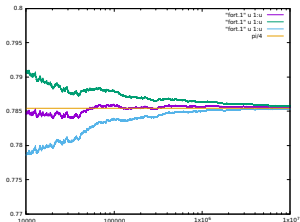
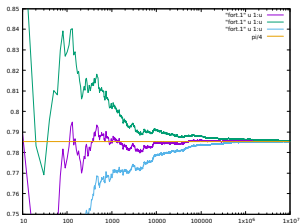
- $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$



- trzy linie: wynik, oraz wynik  $\pm$  sigma

# całkowanie Monte Carlo: metoda wartości średniej

- twierdzenie o wartości średniej,  $f(x)$  - ciągła
- $\int_a^b f(x)dx = (b - a)\langle f \rangle$
- metoda: losujemy  $x$ , liczymy  $f(x)$ , szacujemy średnią, mnożymy przez długość (objętość przedziału), błędy szacujemy jak poprzednio

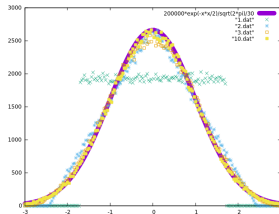


# całkowanie Monte Carlo z generatorem rozkładu niejednorodnego

- $I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- jeśli potrafimy wygenerować zmienną losową o rozkładzie normalnym  $h(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}$
- $I = \langle \sqrt{\pi} x^2 \rangle_{h(x)}$ , czyli średnia wartość z  $\sqrt{\pi} x^2$  dla  $h(x)$  podlegającego rozkładowi normalnemu

# rozkład normalny

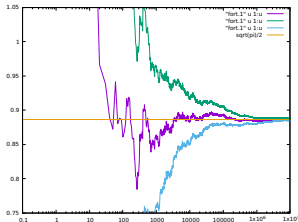
- rozkład gaussowski (normalny)
- $N_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$
- Centralne Twierdzenie Graniczne: próba losowa  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , losowana z rozkładów dających średnia 0 oraz wariancję  $\sigma$
- Średnia  $s_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}s_n = N_\sigma(x)$
- weźmy rozkład jednorodny od  $-a$  do  $a$ ,  $f_j = \frac{1}{2a}$
- wariancja  $\sigma^2 = \int_{-a}^a f_j(x-0)^2 dx = \frac{a^2}{3}$
- dla generacji rozkładu normalnego ze średnią 0 i  $\sigma^2 = 1$  bierzemy  $a = \sqrt{3}$ , i generator  $g \equiv \sqrt{3} \times 2 \times (\text{rand}() - 0.5)$ , gdzie  $\text{rand}()$  jednorodny z rozkładem od 0 do 1



- fioletowa krzywa - oczekiwana liczba zliczeń dla 200k losowań.
- 1 losowanie to wyliczenie przeskalowanej średniej z  $n$ -krotnym użyciem  $\text{rand}()$ .
- punkty łapane w przedziały o długości  $1/30$ .
- $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 10$ .

# całkowanie Monte Carlo z generatorem rozkładu niejednorodnego

- jeśli potrafimy wygenerować zmienną losową o rozkładzie normalnym  $h(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}$
- $I = \langle \sqrt{\pi} x^2 \rangle_{h(x)}$ , czyli średnia wartość z  $\sqrt{\pi} x^2$  dla  $h(x)$  podlegającego rozkładowi normalnemu
- $N_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$
- $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , suma 12 liczb losowych z rozkładu  $[-a, a]$  podzielona przez pierwiastek z 12, średnia wartość  $\sqrt{\pi} x^2$

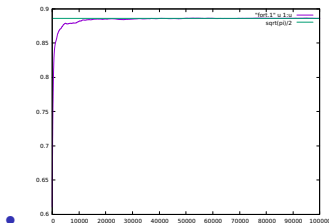


```
r=0
a=sqrt(1.5)
nra=12
pi=4*atan(1.0)
do 1 i=1,nn
  xs=0
  do 12 lkuk=1,nra
    x=(rand()-0.5)*a*2
    xs=xs+x
  12 continue
  xs=xs/sqrt(nra*1.)
  r=r+xs**2*sqrt(pi)
  srednia(i)=r/i
1 continue
```

```
odch=0
do 2 i=2,nn
  odch=odch+(srednia(i)-
srednia(nn))**2
a=srednia(i)
b=srednia(i)+sqrt(1./(i-1))*odch
c=srednia(i)-sqrt(1./(i-1))*odch
if(mod(i,10).eq.0) write(1,3)
i*1.,a,b,c
2 continue
3 format(100f20.12)
end
```

# całkowanie Monte Carlo z generatorem rozkładu niejednorodnego

- jeśli potrafimy wygenerować zmienną losową o rozkładzie normalnym  $h(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}$
- $N_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$
- tutaj: metoda Metropolis, 10 000 wędrówców, zaczynamy od rozkładu jednorodnego, następnie hodowany rozkład normalny

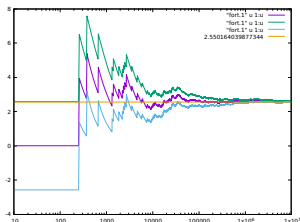


```
r=0
do 1 i=1,nn
do 123 j=1,10000
123 continue
xs=0
do 12 j=1,10000
xo=walkers(j)
fo=exp(-xo**2)
xn=xo+(rand()-0.5)*.2
fn=exp(-xn**2)
if (rand()).lt.fn/fo) then
walkers(j)=xn
endif
xs=xs+walkers(j)**2*sqrt(pi)/10000
12 continue
r=f+xs
srednia(i)=r/i
1 continue
```



# całkowanie Monte Carlo z generatorem rozkładu niejednorodnego

- ogólnie: całkowanie MC atrakcyjne, gdy problem jest wielowymiarowy
- przykład: objętość 10 wymiarowej hiperkuli o promieniu 1 (wynik dokładny:  $\pi^5/5!$ )
- losuje współrzędne punktu w 10 wymiarowej przestrzeni, sprawdzam odległość od początku układu współrzędnych - jeśli mniej niż 1 - wynik losowania 1, jeśli nie 0. prawdopodobieństwo mnożę przed objętość 10 wymiarowego hipersześcianu o boku 2



```
r=0
do 1 i=1,nn
do 7 j=1,10
xxx(j)=2*(rand()-0.5)
7 continue
rod=0
do 8 j=1,10
rod=rod+xxx(j)**2
8 continue
if(rod.lt.1) r=r+1
srednia(i)=r/i*2.**10
1 continue
odch=0
do 2 i=2,nn
odch=odch+(srednia(i)-srednia(nn))**2
a=srednia(i)
b=srednia(i)+sqrt(1./(i-1)*odch)
c=srednia(i)-sqrt(1./(i-1)*odch)
if(mod(i,10).eq.0) write(1,3) i*1.,a,b,c
```

## Błąd interpolacji Lagrange'a

$x_0, x_1, \dots, x_n$  –  $n+1$  różnych węzłów

$f(x)$  – gładka funkcja interpolowana (klasy co najmniej  $n+1$ )

$x$  w przedziale interpolacji

$$\Pi_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x) \qquad l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

odchylenie funkcji interpolowanej od wielomianu Lagrange'a

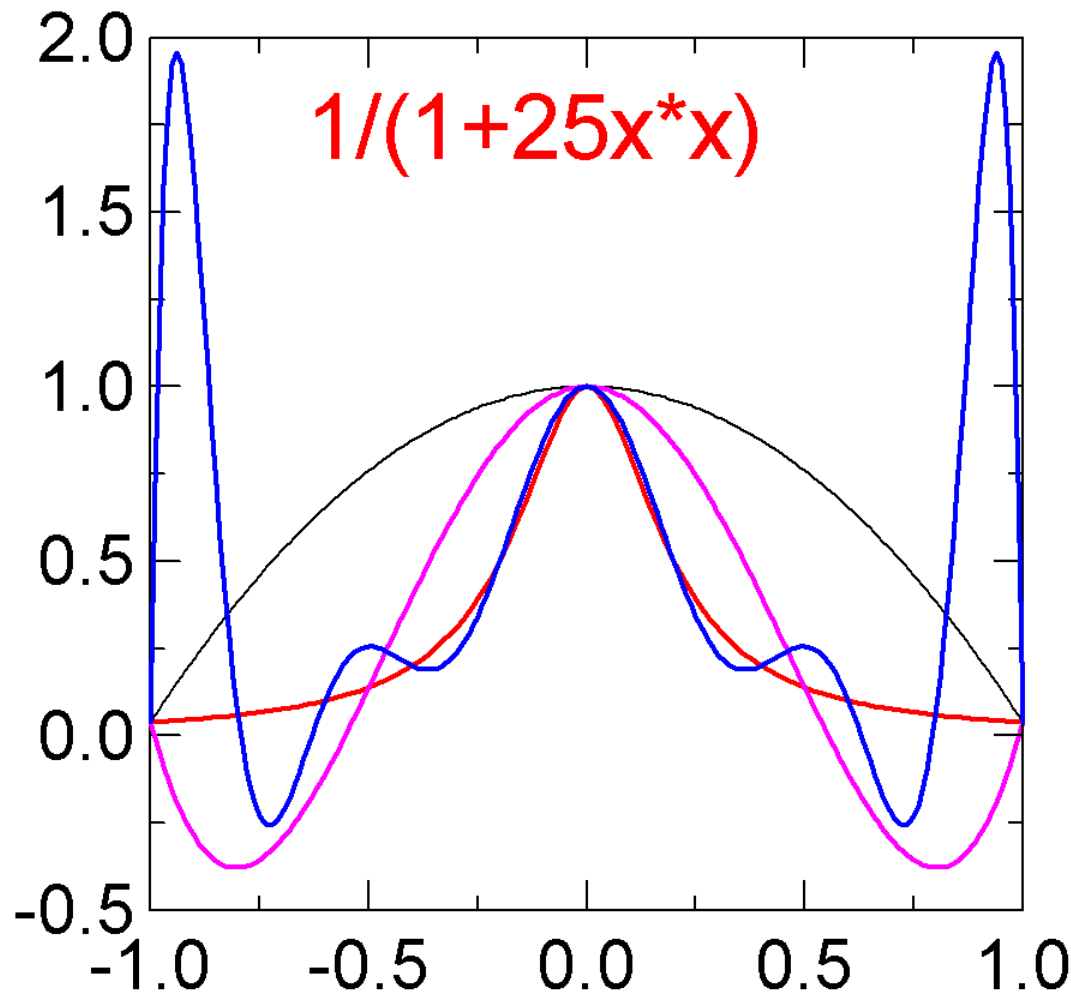
$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

$\xi$  należy do (najmniejszego) przedziału, w którym mieszczą się punkty  $x_i$

Wniosek: jeśli interpolujemy na  $n+1$  punktach wielomian  $n$ -tego rzędu, to  $E_n=0$ ,  
Interpolacja jest jednoznaczna

## Efekt Rungego

nieoptymalność interpolacji na równoodległych węzłach  
robi się drastyczna dla wysokiego rzędu wielomianu interpolacyjnego



3 punkty

5 punktów

11 punktów

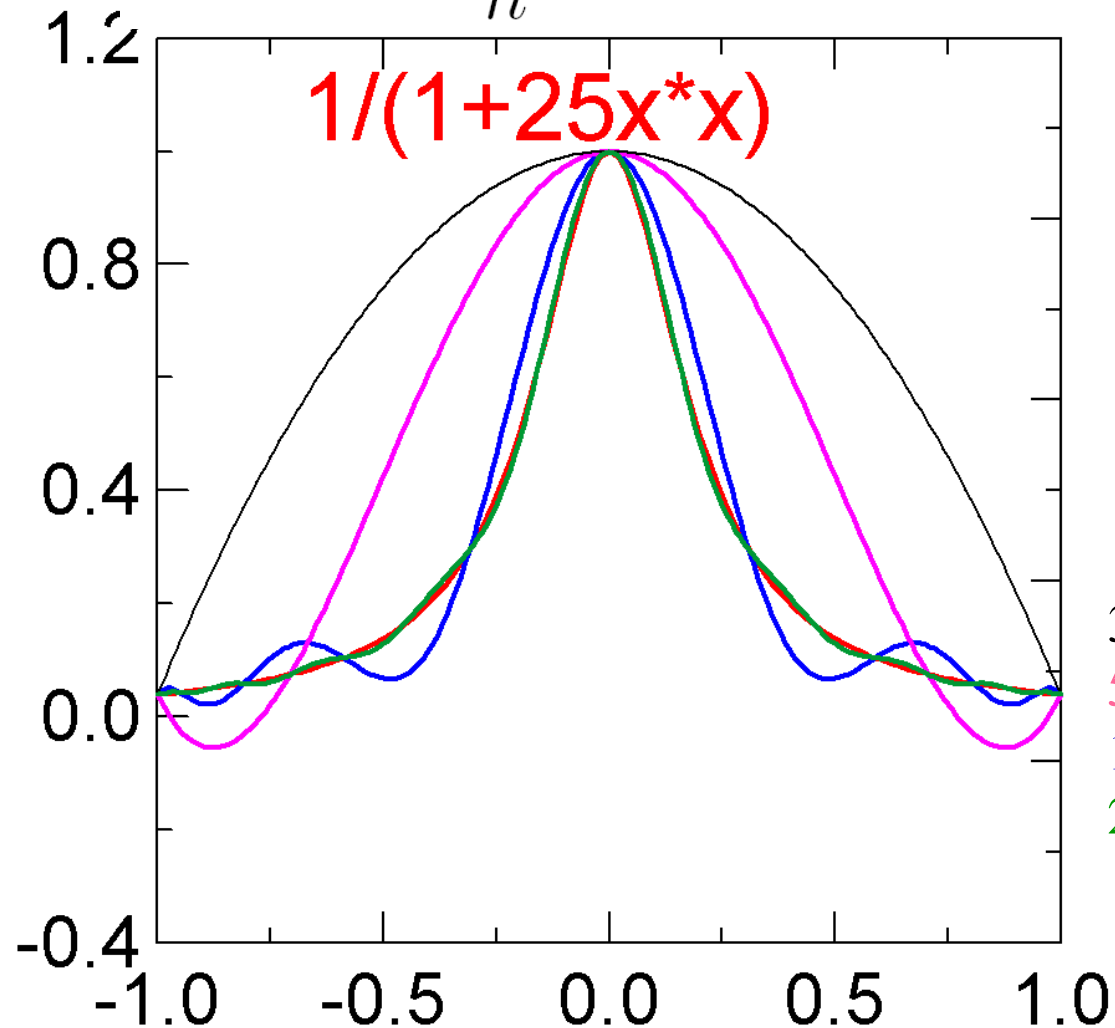
im wyższy stopień wielomianu  
interpolacyjnego  
tym gorsze przybliżenie  
[większa norma nieskończoność  
błędu]

- szczególnie przy  
brzegach przedziału

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

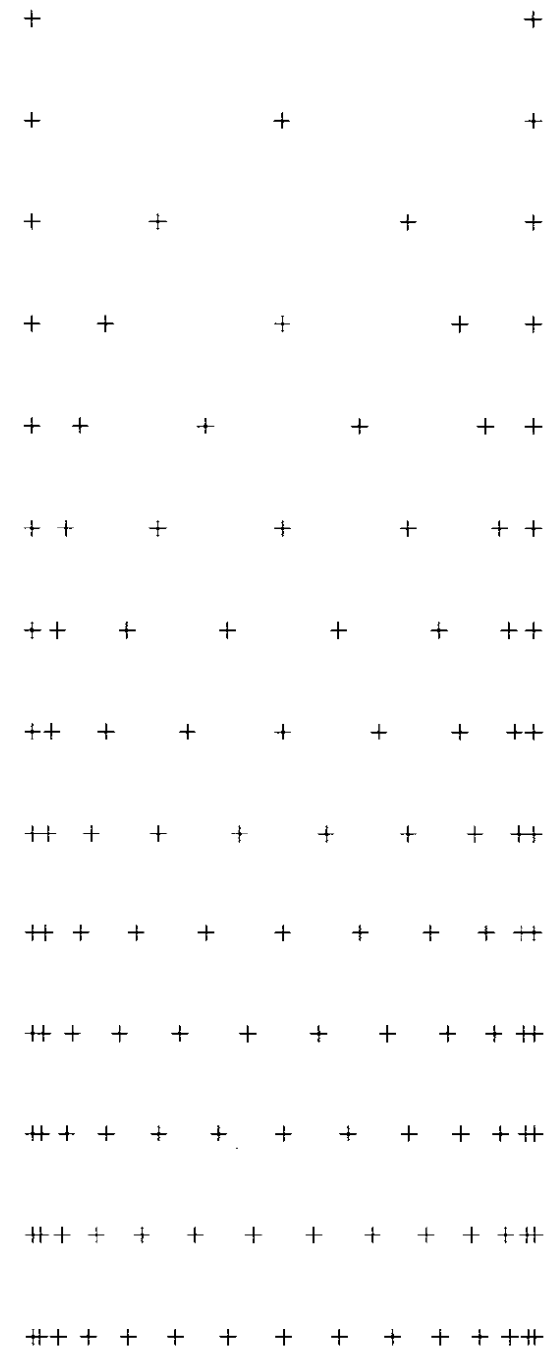
## Węzły Czebyszewa:

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), j = 0, 1, \dots, n$$



[w.czebyszewa: węzły wielomianów ortogonalnych na przedziale  $(-1,1)$  z wagą  $1/\sqrt{1-x^2}$ ]

[waga gęsto punkty przy brzegu, błąd nie urośnie]



więcej węzłów przy brzegach