

Wydział WFiIS	Imię i nazwisko 1.Mateusz Kulig 2.Przemysław Ryś		Rok 2021	Grupa 1	Zespół 3
<b>PRACOWNIA FIZYCZNA WFiIS AGH</b>	Temat: Zależność okresu drgań wahadła od amplitudy				Nr ćwiczenia 2
Data wykonania 22.11.2021	Data oddania	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia	OCENA

**W sprawozdaniu opisaliśmy pomiary zależności okresu drgań wahadła od jego amplitudy. W pierwszej części eksperymentu wykonaliśmy siedemnaście pomiarów dla różnych wartości amplitudy. W drugiej części stukrotnie zmierzaliśmy okres wahadła nie zatrzymując jego drgań. W pierwszym przypadku otrzymana zależność okresu od amplitudy pokrywa się z zależnością teoretyczną. W drugim przypadku histogram utworzony z otrzymanych danych jest słuszny z rozkładem Gaussa.**

## 1. Wstęp

Jeśli kulka zawieszona na nitce zostanie wychylona o mały kąt, to zacznie się poruszać ruchem harmonicznym. Dzieje się tak ponieważ dla małych kątów słuszne jest przybliżenie  $\sin \theta = \theta$  i równanie ruchu kulki przyjmuje postać

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mga\theta, \quad (1)$$

gdzie:

$g$  – przyspieszenie grawitacyjne,

$I$  – moment bezwładności,

$m$  – masa,

$a$  - długość wahadła,

$\theta$  – wychylenie.

Dla tego równania ruchu otrzymujemy, że okres drgań wahadła nie jest zależny od amplitudy i przyjmuje postać

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (2)$$

Gdy wychylenie kulki jest na tyle duże, że nie można zastosować powyższego przybliżenia równanie ruchu przyjmuje postać

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mga \sin \theta \quad (3)$$

Jest to równanie różniczkowe nieliniowe, ponieważ zmienna  $\theta$  nie występuje w pierwszej potęgze, lecz jest argumentem funkcji sinus. Równanie to można rozwiązać metodą

analityczną za pomocą rozwinięcia funkcji szereg. W tym przypadku okres drgań wahadła jest zależny od amplitudy początkowej. Ostateczna formuła na okres drgań wahadła przyjmuje postać nieskończonego szeregu danego poniższym wzorem

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 + \frac{11}{3072} \theta_m^4 + \dots \right]. \quad (4)$$

Gdzie  $\theta_m$  jest maksymalnym wychyleniem, a  $T_0$  jest okresem dla małego wychylenia, danym wzorem (2).

## 2. Aparatura

W eksperymencie, mającym na celu wyznaczenie okresu drgań użyliśmy następujących przyrządów:

- Stoper marki Q&Q – użyliśmy go do zmierzenia okresu wahadła. Jego dokładność wynosiła 0,01[s],
- Kątomierz – Jego dokładność wynosiła 1[deg].
- Kulka zawieszona na nitce, reprezentująca wahadło.

## 3. Metodyka doświadczenia

Wykonanie doświadczenia zaczęliśmy od pomiaru długości okresu drgań wahadła dla małych kątów. Pomiar ten wykonaliśmy ze zwiększoną dokładnością mierząc 7-krotnie 40 okresów, podczas gdy kulka wychylona była o nie więcej niż 3 stopnie. Następnie zbadaliśmy zależność długości okresu drgań od amplitudy. W tym celu wykonaliśmy po jednym pomiarze dla każdego wychylenia w zakresie od 6 do 54 stopni z przeskokiem co 3 stopnie. Amplitudę mierzyliśmy przed rozpoczęciem ruchu kulki oraz po wykonaniu ostatniego okresu, a następnie wyciągaliśmy średnią wartość z tych wyników. W drugiej części ćwiczenia zmierzaliśmy stukrotnie dwa okresy użytego wahadła. Nie zatrzymywaliśmy jednak kulki, tylko za pomocą funkcji stopera wykonywaliśmy kolejne pomiary. W tym przypadku amplituda była mniejsza niż 3 stopnie.

## 4. Analiza danych

Dane doświadczalne zebrane zostały w poniższych tabelach .

**Tab.1.** Tabela zestawia wyniki siedmiu pomiarów. W lewej kolumnie zebrane są wyniki 40-stu okresów dla małych wychyleń. W prawej kolumnie natomiast obliczyliśmy wartość pojedynczego okresu.

Lp.	$40T_0$ [s]	$T_0$ [s]
1.	51,683	1,292
2.	51,543	1,289
3.	51,641	1,291
4.	51,759	1,294
5.	51,661	1,292
6.	51,644	1,291
7.	51,721	1,293

Średni okres drgań wahadła dla małego wychylenia wynosi  $\overline{T_0} = 1,292$  [s].

**Tab.2.** W tabeli w kolejnych kolumnach zestawiono początkową amplitudę wychylenia  $\theta_0$ , końcową amplitudę  $\theta_k$  jak i średnią z nich  $\bar{\theta}$ . Następnie podane są wartości okresu dla 30-stu drgań w zależności od danego kąta oraz obliczona na jego podstawie średnia wartość okresu. W ostatnich dwóch kolumnach otrzymane wartości podstawiliśmy do prawej i lewej strony równania (4).

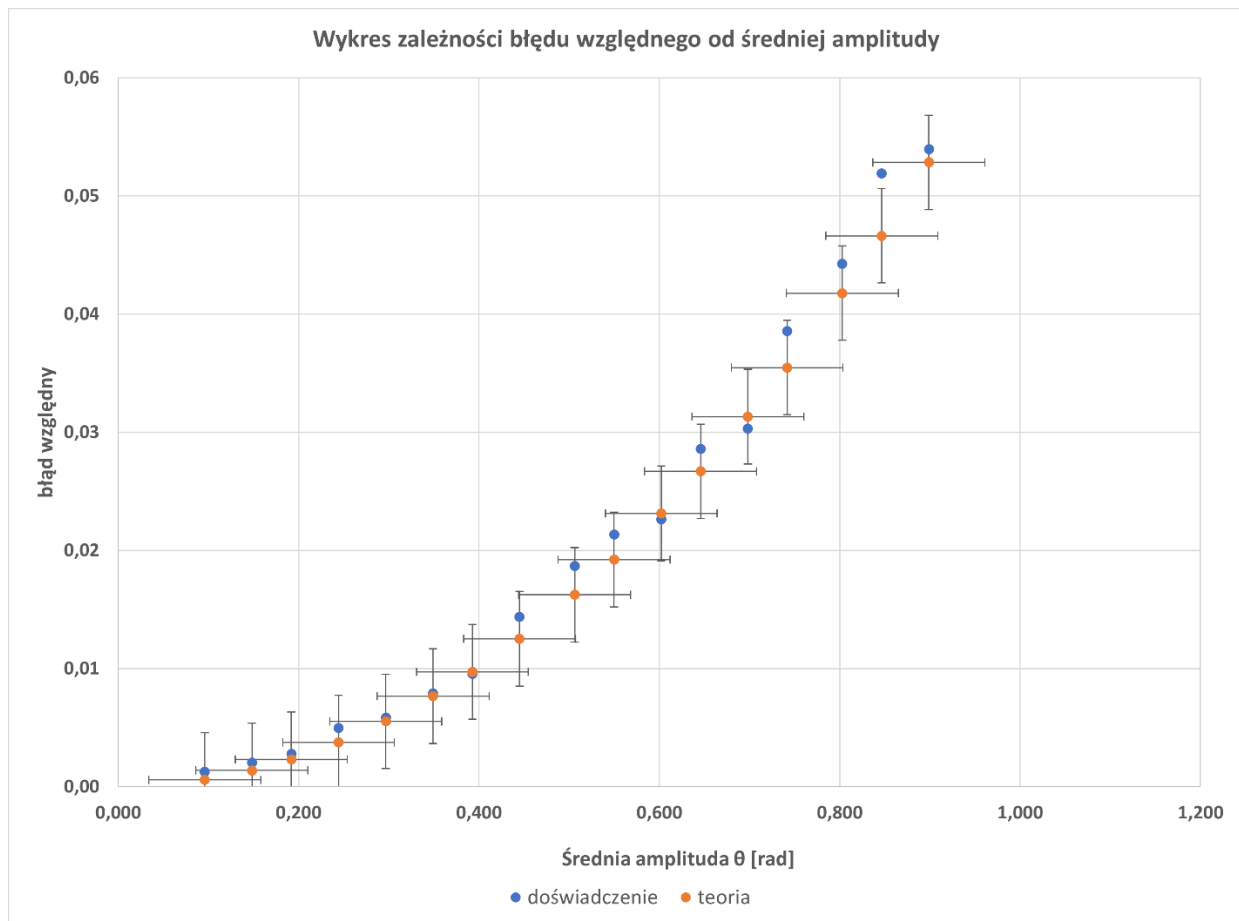
Lp.	$\theta_0$ [°]	$\theta_0$ [rad]	$\theta_k$ [°]	$\theta_k$ [rad]	$\bar{\theta}$ [°]	$\bar{\theta}$ [rad]	30T [s]	T [s]	$\frac{T - T_0}{T_0}$	$\frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4$
1.	6	0,105	5	0,087	5,5	0,096	38,797	1,293	0,0012535	0,0005762
2.	9	0,157	8	0,140	8,5	0,148	38,827	1,294	0,0020277	0,0013773
3.	12	0,209	10	0,175	11,0	0,192	38,856	1,295	0,0027761	0,0023085
4.	15	0,262	13	0,227	14,0	0,244	38,941	1,298	0,0049698	0,0037443
5.	18	0,314	16	0,279	17,0	0,297	38,975	1,299	0,0058472	0,0055299
6.	21	0,367	19	0,332	20,0	0,349	39,054	1,302	0,0078860	0,0076686
7.	24	0,419	21	0,367	22,5	0,393	39,118	1,304	0,0095377	0,0097234
8.	27	0,471	24	0,419	25,5	0,445	39,305	1,310	0,0143637	0,0125203
9.	30	0,524	28	0,489	29,0	0,506	39,472	1,316	0,0186736	0,0162465
10.	33	0,576	30	0,524	31,5	0,550	39,576	1,319	0,0213575	0,0192182
11.	36	0,628	33	0,576	34,5	0,602	39,625	1,321	0,0226221	0,0231314
12.	39	0,681	35	0,611	37,0	0,646	39,856	1,329	0,0285836	0,0266865
13.	42	0,733	38	0,663	40,0	0,698	39,923	1,331	0,0303128	0,0313123
14.	45	0,785	40	0,698	42,5	0,742	40,242	1,341	0,0385453	0,0354725
15.	48	0,838	44	0,768	46,0	0,803	40,463	1,349	0,0442488	0,0417733
16.	51	0,890	46	0,803	48,5	0,846	40,759	1,359	0,0518878	0,0466220
17.	54	0,942	49	0,855	51,5	0,899	40,839	1,361	0,0539524	0,0528324

Następnie wyznaczamy niepewność kąta  $\bar{\theta}$  za pomocą standardowej niepewności typu A, w tym celu korzystamy z wbudowanej funkcji „ODCH.STANDARD.PRÓBK()” w programie Excel i dzielimy przez pierwiastek z liczby pomiarów. Otrzymujemy w ten sposób niepewność równą

$$u_A(\bar{\theta}) = 0,062 \text{ [rad]} .$$

Analogicznie postępujemy w przypadku obliczania niepewności  $\frac{T-T_0}{T_0}$ . Wynosi ona

$$u_A\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right) = 0,0043$$



**Rys.1.** Wykres przedstawiający zależność błędu względnego okresu od średniej amplitudy. Wyniki oznaczone kolorem pomarańczowym są wynikami wynikającymi z rozwinięcia równania na okres z dokładnością do trzeciego składnika. Niebieskim natomiast oznaczone zostały wyniki otrzymane z przeprowadzonego doświadczenia.

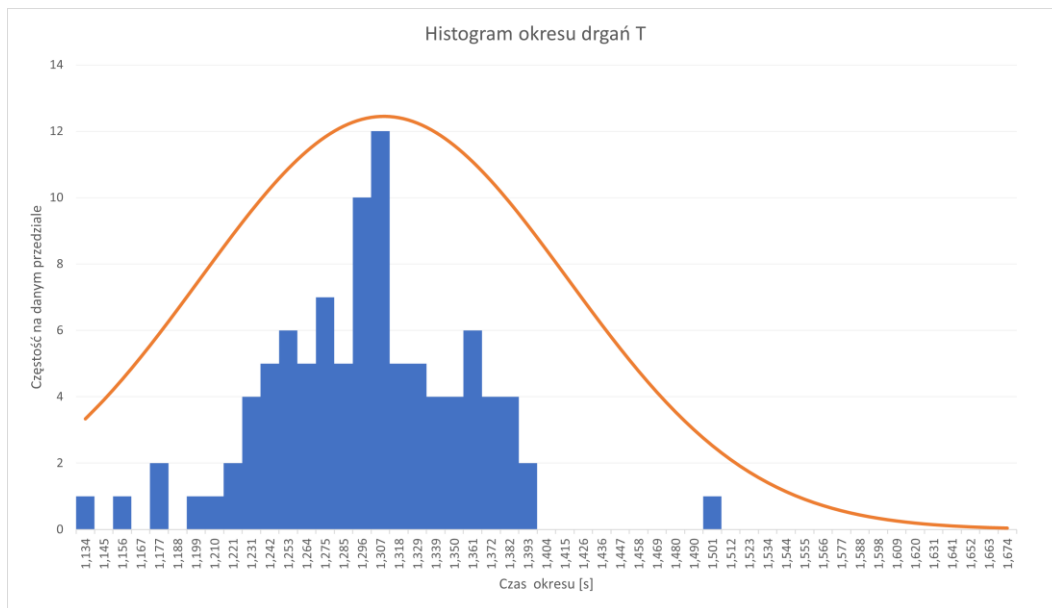
Znaczna większość wyników otrzymanych doświadczalnie pokrywa się z wynikami teoretycznymi w granicach niepewności. Po zastosowaniu niepewności rozszerzonej są to wszystkie wyniki.

W drugiej części doświadczenia otrzymaliśmy wyniki dla stu pomiarów okresu wahadła dla małego wychYLENIA. Zostały one zestawione w poniżej tabeli

**Tab.3.** W tabeli w kolumnach przedstawiono naprzemiennie zmierzoną wartość  $2T$  i wartość obliczoną dla pojedynczego okresu.

Lp.	$2T$	$T$	Lp.	$2T$	$T$	Lp.	$2T$	$T$	Lp.	$2T$	$T$
1.	2,732	1,366	26.	2,632	1,316	51.	2,601	1,3005	76.	2,422	1,211
2.	2,700	1,35	27.	2,526	1,263	52.	2,694	1,347	77.	2,756	1,378
3.	2,247	1,1235	28.	2,481	1,2405	53.	3,657	1,8285	78.	2,335	1,1675
4.	2,446	1,223	29.	2,693	1,3465	54.	2,528	1,264	79.	2,549	1,2745
5.	2,626	1,313	30.	2,606	1,303	55.	2,659	1,3295	80.	2,741	1,3705
6.	2,493	1,2465	31.	2,609	1,3045	56.	2,653	1,3265	81.	2,479	1,2395
7.	2,576	1,288	32.	2,476	1,238	57.	2,703	1,3515	82.	2,697	1,3485
8.	2,743	1,3715	33.	2,663	1,3315	58.	2,540	1,27	83.	2,451	1,2255
9.	2,458	1,229	34.	2,619	1,3095	59.	2,558	1,279	84.	2,621	1,3106
10.	2,493	1,2465	35.	2,509	1,2545	60.	2,605	1,3025	85.	2,534	1,267
11.	2,534	1,267	36.	2,408	1,204	61.	2,484	1,242	86.	2,585	1,2925
12.	2,772	1,386	37.	2,606	1,303	62.	2,567	1,2835	87.	2,588	1,294
13.	2,391	1,1955	38.	2,347	1,1735	63.	2,672	1,336	88.	2,549	1,2745
14.	2,581	1,2905	39.	2,989	1,4945	64.	2,502	1,251	89.	2,774	1,387
15.	3,715	1,8575	40.	2,564	1,282	65.	2,646	1,323	90.	2,578	1,289
16.	2,754	1,377	41.	2,563	1,2815	66.	2,600	1,3	91.	2,481	1,2405
17.	2,606	1,303	42.	2,710	1,355	67.	2,704	1,352	92.	2,621	1,3105
18.	2,524	1,262	43.	2,499	1,2495	68.	2,597	1,2985	93.	2,511	1,2555
19.	2,637	1,3185	44.	2,552	1,276	69.	2,455	1,2275	94.	2,431	1,2155
20.	2,590	1,295	45.	2,758	1,379	70.	2,612	1,306	95.	2,746	1,373
21.	2,491	1,2455	46.	3,579	1,7895	71.	2,515	1,2575	96.	2,495	1,2475
22.	2,600	1,3	47.	2,677	1,3385	72.	2,602	1,301	97.	2,712	1,356
23.	2,576	1,288	48.	2,548	1,274	73.	2,644	1,322	98.	2,640	1,32
24.	2,574	1,287	49.	2,574	1,287	74.	2,704	1,352	99.	2,613	1,3065
25.	2,727	1,3635	50.	2,721	1,3605	75.	2,308	1,154	100.	2,592	1,296

Na ich podstawie sporządzono histogram wraz z rozkładem normalnym. Przedstawione zostały one na **rys. 2.**.



**Rys.2.** Wykres przedstawiający histogram (niebieskie kolumny) wyników pomiaru stu okresów. Krzywa oznaczona kolorem pomarańczowym Jest rozkładem normalnym dla danych zawartych w histogramie.

## 5. Podsumowanie

W wyniku pomiaru okresów dla różnych wartości wychylenia i następnym porównaniu wartości wynikowych wraz ze wzorem z poprawką zawierającą rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy otrzymujemy zgodność wyników z dokładnością do niepewności. Wartości obu funkcji, jednej zawierającej poprawkę o dwa kolejne składniki rozwinięcia i drugiej reprezentującej błąd względny rosną wraz ze zwiększaniem amplitudy wychylenia. Świadczy to o słuszności wyprowadzonego wzoru i jednocześnie poucza przed stosowaniem uproszczonej formuły na okres w przypadku kątów większych jak 3 [deg]. Na sam koniec przeprowadzono sto pomiarów i w konsekwencji centralnego twierdzenia granicznego średnie pomiary owego okresu ułożyły się na kształt krzywej Gaussowskiej (dzwonowej).

