

Równanie Poissona: relaksacja i nadrelaksacja

24 lutego 2023

Rozwiązujemy równanie Poissona w 2D

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y), \quad (1)$$

gdzie gęstość ładunku $\rho(x, y) = \exp(-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{d^2}) - \exp(-\frac{(x+x_0)^2+y^2}{d^2})$, $d = 4$, $x_0 = 4$. Pracujemy na siatce $[-N, \dots, N] \times [-N, \dots, N]$ z krokiem $dx = 1$ w obydwu kierunkach. Układ umieszczony jest w metalowym kwadratowym uziemionym pudle, co uwzględniamy wstawiając warunek brzegowy $u(x, y) = 0$ gdy $|x| = N$ lub $|y| = N$. Przyjmujemy $N = 31$.

Warunek początkowy do rozwiązania: przyjmujemy $u = 1$ dla $(x, y) \in [-15, 15] \times [-15, 15]$ i 0 w pozostałej części pudła.

Z dyskretyzacji równania dostajemy przepis relaksacyjny

$$u(i, j) := \frac{u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1) + \rho(i, j)dx^2}{4}. \quad (2)$$

Jedna iteracja procedury relaksacji polega na zastosowaniu wzoru (2) dla wszystkich punktów na siatce poza brzegiem.

Zbieżność iterowanej funkcji do rozwiązania równania Poissona można (wykład) śledzić licząc całkę z lagranżjanu układu ładunek-pole

$$a = \int_S \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho(i, j)u(i, j) \right] dx dy, \quad (3)$$

Ze względu na to, że operator pochodnej jest antyhermitowski, wyrażenie to można przepisać do formy

$$a = - \int_S \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho(i, j)u(i, j) \right] dx dy, \quad (4)$$

czyli w wersji dyskretnej

$$a = - \sum_{i,j=-N+1}^{N-1} \left[\frac{1}{2} u(i,j) \frac{u(i+1,j) + u(i-1,j) - 2u(i,j)}{dx^2} \right. \quad (5)$$

$$+ \frac{1}{2} u(i,j) \frac{u(i,j+1) + u(i,j-1) - 2u(i,j)}{dx^2} \quad (6)$$

$$+ \rho(i,j)u(i,j)]dx^2. \quad (7)$$

Im niższa wartość a tym bliżej jesteśmy dokładnego rozwiązania. Jakość rozwiązania przybliżonego można również ocenić odwracając równanie Poissona. Wstawiamy do równania (1) u jakim dysponujemy i liczymy

$$\rho'(x,y) = - \frac{u(i+1,j) + u(i-1,j) + u(i,j-1) + u(i,j+1) - 4u(i,j)}{dx^2}. \quad (8)$$

Można sprawdzić w jakim stopniu ρ' reprodukuje ρ .

Zadanie 1 (40 pkt) Liczymy do 500 iteracji pętli relaksacyjnej. Startujemy od $u = 0$.

1.1. Narysować a od numeru iteracji.

1.2. Po setnej i pięćsetnej iteracji narysować u oraz:

1.3. ρ' i $\delta(x,y) = \rho'(x,y) - \rho(x,y)$.

Zadanie 2 (40 pkt)

Modyfikacja wzoru relaksacyjnego

$$u(i,j) := (1-w)u(i,j) + w \frac{u(i+1,j) + u(i-1,j) + u(i,j+1) + u(i,j-1) + \rho(i,j)dx^2}{4}, \quad (9)$$

z $w > 1$ daje przepis na iterację nazywaną nadrelaksacją, która bywa szybciej zbieżna od relaksacji dla $w > 1$. Przyjąć $w = 1.9$ i powtórzyć zadanie 1.1.

Zadanie 3 (20 pkt)

Rozwiązanie równania Poissona można uzyskać również minimalizując bezpośrednio funkcjonal a .

W tym celu, zbudujemy iterację, w której będziemy starać się poprawić wartość $u(i,j)$ w każdym punkcie w pudle poza brzegiem.

Wyznamy wartość $a(\delta)$ w zależności od zmiany wartości potencjału w punkcie (i,j) z $u(i,j)$ na $u(i,j) + \delta$. W tym celu policzymy

$$1. \ a_1 = a(\delta_1 = 0)$$

$$2. \ a_2 = a(\delta_2 = 0.5)$$

3. $a_3 = a(\delta_3 = 1)$

Poprowadzimy parabolę przez te 3 punkty i wyznaczymy δ dla którego parabola ma ekstremum $\delta_4 = \frac{1}{4} \frac{3a_1 - 4a_2 + a_3}{a_1 - 2a_2 + a_3}$. Wyznaczamy $a_4 = a(\delta_4)$. a_4 będzie odpowiadać minimum o ile zależność $a(\delta)$ jest paraboliczna i jesteśmy blisko optimum. Niestety nie zawsze tak jest, zwłaszcza na początku rachunku. Dlatego: (a) Wyznaczamy indeks i_{min} najmniejszego $a(\delta_i)$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ i przesuwamy wartość potencjału w punkcie $u(i, j)$ o $\delta_{i_{min}}$.

Do osiągnięcia zbieżności powinno wystarczyć 500 iteracji, przy czym w jednej iteracji staramy się poprawić po kolei każdy punkt siatki (tak jak w przepisach relaksacyjnych).

Uwaga: wyliczenie a jest czasochłonne. Gdy zmieniamy potencjał u w jednym punkcie – nie ma potrzeby wyliczania zmiany a w całym pudle, tylko w jego okolicach, w których następuje lokalna zmiana pola elektrycznego. Lokalny przyczynek do funkcjonału od potencjału w punkcie (i', j') możemy zdefiniować jako

$$a_{loc}(u_{i',j'}) = - \sum_{i=i'-1}^{i'+1} \sum_{j=j'-1}^{j'+1} \left[\frac{1}{2} u(i, j) \frac{u(i+1, j) + u(i-1, j) - 2u(i, j)}{dx^2} \right] \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2} u(i, j) \frac{u(i, j+1) + u(i, j-1) - 2u(i, j)}{dy^2} \quad (11)$$

$$+ \rho(i, j) u(i, j) dx^2 dy^2. \quad (12)$$

Wtedy a przy zmianie wartości $u(i', j')$ o δ można wyznaczyć jako $a(\delta) = a(0) - a_{loc}(u_{i',j'}) + a_{loc}(u_{i',j'} + \delta)$.

Narysować a od numeru iteracji. Porównać tempo zbieżności z zadaniem 1 oraz 2. Warunek początkowy bez zmian.