Krzysztof Gołuchowski - Sformułowanie wariacyjne

4.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału

$$-u''(x) - u = \sin x \qquad \Omega = [0,2]$$

$$u(0) = 1$$

$$u'(2) - u(2) = 5 \Rightarrow u'(2) = 5 + u(2)$$

Mnożymy przez funkcję testową v spełniającą warunek $v(0)=0$ i całkujemy

$$\int_0^2 -u''\cdot v\,dx + \int_0^2 -u v\,dx = \int_0^2 \sin x\cdot v\,dx$$

$$-\int_0^2 u'' v\,dx - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\cdot v\,dx$$

$$-[u'v]_0^2 + \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\cdot v\,dx$$

$$-\left(u'(2)\cdot v(2) - \underbrace{u'(0)\cdot v(0)}_{v(0)=0}\right) + \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\cdot v\,dx$$

$$-u'(2)\cdot v(2) + \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\cdot v\,dx$$

Korzystając z warunku w $x=2$: $u'(2) = 5 + u(2)$

$$-5v(2) - u(2)\cdot v(2) + \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\cdot v\,dx$$

$$\underbrace{\int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uv\,dx - u(2)v(2)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^2 \sin x\cdot v\,dx + 5v(2)}_{L(v)}$$

gdzie $u = w + \bar{u}$, $w \in V$, zaś $\bar{u}$ (shift) to pewna funkcja spełniająca warunek brzegowy, tzn. $\bar{u}(0) = 1$. Możemy przyjąć $\bar{u} = e_0$

Powyższą równość można zapisać jako:

$$B(w+\bar{u}, v) = L(v)$$

Korzystając z liniowości względem u mamy:

$$B(w,v) = L(v) - B(\bar{u}, v)$$