# Projekt nr 1

Krzysztof Kosz

December 13, 2022

## Contents



## 1 Treść zadania

Metoda Simpsona obliczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x)\,dx$, gdzie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kt.$$

Do obliczania wartości $f(x)$ zastosować metodę Goertzela.

## 2 Opis metody

Do zrealizowania projektu korzystam z metody Goertzela oraz z złożonej kwadratury Simpsona(opartej na prostej kwadraturze Simpsona).

## 2.1 Metoda Goertzela

Algorytm Goertzela możemy wykorzystać do obliczenia wartości wielomianu

$$w(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$$

dla punktu $z = x + iy \in \mathbb{C}$, gdzie $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Jeśli podzielimy ten wielomian przez trójmian $(\lambda - z)(\lambda - \overline{z}) = \lambda^2 - p\lambda - q$. Współczynniki tego trójmianiu to $p = 2x$ i $q = -|z|^2$. Są to liczby rzeczywiste dla każdego $z$. Możemy więc zapisać:

$$w(\lambda) = (\lambda - z)(\lambda - \overline{z}) \sum_{n=2}^{N} b_n \lambda^{n-2} + b_0 + b_1\lambda$$

Więc $w(z) = b_0 + b_1 z$, czyli wartość wielomianu $w$ w punkcie $z$ jest rówa wartości z dzielenia tego wielomianu przez trójmian $\lambda^2 - p\lambda - q$ w punkcie $z$. W naszym algorytmie wyznaczamy wartości współczynników $b_N, b_{N-1}, \ldots, b_1, b_0$, a następnie liczymy wartość tej reszty. Algorytm wygląda następująco:

$p := 2x$
$q := -(x^2 + y^2)$
$b_{N+1} := 0$
$b_N := a_N$
for $n = N - 1, \ldots, 1$
    $b_n := a_n + pb_{n+1} + qbn + 2$
end
$u := a_0 + xb_1 + qb_2$
$v := yb_1$
$w(z) := u + iv$

Aby obliczyć tym algorytmem wartość potrzebnej nam funkcji $f(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \sin nt$, należy zastować ten algorytm do wielomianu $w(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$, obliczając jego wartość w punkcie $z = \cos t + isint$. Wtedy $f(t) = Imw(z)$

## 2.2 Kwadratura prosta Simpsona

W kwadraturze prostej Simpsona mamy 3 węzły $a$, $b$ oraz $\frac{a+b}{2}$. Funkcja f jest wtedy przybliżana wielomianem stopnia 2. Kwadratura ma wtedy postać:

$$S(f) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

## 2.3 Kwadratura złożona Simpsona

Nasz przedział $[a, b]$ dzielimy na N podprzedziałów, długości $H = \frac{b-a}{N}$ i na każdym z nim stosujemy kwadraturę prostą Simpsona. Złożony wzór Simpsona ma wtedy postać

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{H}{6}(f(x_{k-1}) + 4f(x_{k-1} + \frac{H}{2}) + f(x_k)).$$

Natomiast po przekształceniu:

$$S(f) = \frac{H}{6}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f(a + kH + \frac{H}{2})).$$

Błąd złożonej kwadratury Simspona jest równy

$$E(f) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4(b-a)f^{(4)}(\mu)$$

dla pewnego $\mu \in (a, b)$.

# 3 Opis programu

W moim programie stosuję 5 funkcji. 2 do obliczania wartości wielomianu: goertzel.m oraz obliczSin.m, 1 do obliczania przybliżonej wartości całki metodą Simpsona: metodaSimpsona.m oraz 2 do sprawdzania poprawności wyników w skrypcie: bladW.m oraz sprawdzacz.m

## 3.1 Funkcja goertzel

Jako argumenty tej funkcji podajemy z, dla którego chcemy obliczyć $w(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$, oraz wspolczynniki naszego wielomianu jako wektor.

Figure 1: Implementacja algorytu Goertzela

```
function [wynik] = goertzel(z, wspolczynniki)
%funkcja zwraca wartosc wielomianu o w punkcie z
% parametry
% z - argument dla ktorego obliczamy wartosc funkcji
% wspolczynniki - wspolczynniki funkcji

p = 2*real(z);
q = -(real(z).*real(z) + imag(z).*imag(z));

n = length(wspolczynniki);

b = zeros(n+1, 1);
b(n) = wspolczynniki(n);

for k = n-1 : -1 : 1
    b(k)=wspolczynniki(k) + p.*b(k+1) + q.*b(k+2);
end

u = wspolczynniki(1) + real(z)*b(2) + q*b(3);
v = imag(z)*b(2);

wynik = u + 1i*v;
end
```

Następnie na naszej funkcji wykonujemy wcześniej opisany algorytm.

## 3.2 Funkcja obliczSin

Jako argumenty tej funkcji podajemy t, dla którego chcemy obliczyć $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kt$ oraz wspolczynniki naszego wielomianu jako wektor.

Figure 2: Funkcja obliczSin

```
function wynik = obliczSin(t, wspolczynniki)
%funkcja zwraca wartosc wielomianu ktory jest postaci
%sumy sinusow ze wspolczynnikami
%parametry
%t - argument dla ktorego wyliczamy wartosc
%wspolczynniki
wspolczynniki=[0 wspolczynniki];
z = goertzel(cos(t) + 1i*sin(t), wspolczynniki);
wynik = imag(z);
end
```

W ciele naszej funckji dodajemy do naszego wektora wspolczynnikow 0 na samym początku. Musimy to zrobić, bo w funkcji, którą chcemy obliczyć zaczynamy liczenie sumy od $k = 1$, natomiast w algorytmie goertzela następuje to od $k = 0$. Następnie wywołujemy funkcję goertzel, w której podajemy jako argumenty $\cos t + i \sin t$ oraz zmodyfikowaną tablicę współczynników. Aby otrzymać poprawny wynik bierzemy część urojoną naszego wyniku.

### 3.3 Funkcja metodaSimpsona

Jako argumenty tej funkcji przyjmujemy wspolczynniki naszego wielomianu oraz $a$ i $b$ czyli przedział naszego całkowania, a także $N$ czyli liczbe podprzedziałów, na które dzielimy przedział$(a, b)$

Figure 3: Obliczanie wartości całki metodą Simpsona

```
function [wynik] = metodaSimpsona(wspolczynniki, a, b, N)
%Funkcja służąca obliczaniu przybliżonej wartości całki za pomocą metody
%Simpsona
H = (b-a)/N;
f_a = obliczSin(a,wspolczynniki);
f_b = obliczSin(b,wspolczynniki);
suma1 = 0;
for k = 1 : 1 : N-1
    suma1 = suma1 + obliczSin(a + k*H, wspolczynniki);
end
suma1=2*suma1;
suma2=0;
for k = 0 : 1 : N-1
    suma2 = suma2 + obliczSin(a + k*H + H/2, wspolczynniki);
end
suma2=4*suma2;

wynik = (H/6)*(f_a + f_b + suma1 + suma2);
end
```

W ciele naszej funkcji obliczamy więc kolejne wartości potrzebne do podstawienia do wzoru czyli $f(a)$, $f(b)$ oraz $\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH)$, a także $\sum_{k=0}^{N-1} f(a + kH + \frac{H}{2})$ (używając wcześniej napisanych funkcji), a następnie podstawiamy do naszego wzoru na kwadraturę złożoną Simpsona. Dzięki temu otrzymujemy przybliżoną wartość całki.

### 3.4 Funkcja bladW

Jako argumenty tej funkcji przyjmujemy wartość całki wyznaczoną przez funkcję wbudowaną w matlabie oraz wartość wyznaczoną przy pomocy metody Simpsona.

Figure 4: Obliczanie wartości błędu względnego

```
function [wynik] = bladW(wartosc,wartosc2)
%funkcja oblicza wartość błędu względnego wartosci podanych
wynik=abs(wartosc-wartosc2)./abs(wartosc);
end
```

Funkcja ta służy wyznaczeniu błędu względnego naszej metody. Korzystamy do tego z wzoru $bladWzgledny = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1|}$. Użyjemy tej funkcji do sprawdzania poprawności metody.

### 3.5 Funkcja sprawdzacz

Funkcja ta służy do porównania wartości całki oraz jej przybliżonej wartości dla 7 różnych funkcji matematycznych oraz 6 różnych przedziałów całkowania, w zależności od wartości N(argument wejścia). Dla każdej funkcji wypisujemy wtedy tabelę porównującą. W następnej sekcji skupimy się na tej funkcji i sprawdzimy poprawność naszej metody.

## 4 Przykłady

Przedziały, dla których sprawdzamy naszą funkcję są następujące: $(0, \frac{1}{10})$, $(0, \frac{9}{10})$, $(0, 1)$, $(0, \pi)$, $(0, 10)$, $(0, 100)$, natomiast funkcje, które będziemy testować są podane w następnych podrozdziałach.

Kolumny w każdej tabelce oznaczają:

a - wartość a

b - wartość b

WartFunkcjiWbudowanej - Wartość całki wyznaczona za pomocą funkcji wbudowanej w matlabie

WartSimpsona - Przybliżona wartość całki wyznaczona za pomocą metody Simpsona

bladWzgl - Błąd względny metody Simpsona (w odniesieniu do wartości wyznaczonej przez funkcję wbudowaną)

### 4.1 Funkcja nr 1

$$f_1(x) = 3\sin x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-8}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100 i N=10.

Figure 5: Funkcja nr 1 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.014988 | 0.014988 | 0 |
| 0 | 0.9 | 1.1352 | 1.1352 | 2.2784e-12 |
| 0 | 1 | 1.3791 | 1.3791 | 3.4726e-12 |
| 0 | 3.1416 | 6 | 6 | 3.3824e-10 |
| 0 | 10 | 5.5172 | 5.5172 | 3.4733e-08 |
| 0 | 100 | 0.41304 | 0.41319 | 0.00035783 |

Figure 6: Funkcja nr 1 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.014988 | 0.014988 | 3.472e-12 |
| 0 | 0.9 | 1.1352 | 1.1352 | 2.2787e-08 |
| 0 | 1 | 1.3791 | 1.3791 | 3.4733e-08 |
| 0 | 3.1416 | 6 | 6 | 3.3922e-06 |
| 0 | 10 | 5.5172 | 5.5192 | 0.00035783 |
| 0 | 100 | 0.41304 | -1.6394 | 4.9691 |

### 4.2 Funkcja nr 2

$$f_2(x) = 2\sin x + 0,5\sin 2x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-7}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100 i N=10.

Figure 7: Funkcja nr2 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.014975 | 0.014975 | 1.8535e-15 |
| 0 | 0.9 | 1.0636 | 1.0636 | 1.2136e-11 |
| 0 | 1 | 1.2734 | 1.2734 | 1.7953e-11 |
| 0 | 3.1416 | 4 | 4 | 3.3824e-10 |
| 0 | 10 | 3.8261 | 3.8261 | 5.4902e-08 |
| 0 | 100 | 0.40357 | 0.40447 | 0.0022437 |

Figure 8: Funkcja nr 2 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.014975 | 0.014975 | 2.0804e-11 |
| 0 | 0.9 | 1.0636 | 1.0636 | 1.2146e-07 |
| 0 | 1 | 1.2734 | 1.2734 | 1.7971e-07 |
| 0 | 3.1416 | 4 | 4 | 3.3922e-06 |
| 0 | 10 | 3.8261 | 3.8284 | 0.00058743 |
| 0 | 100 | 0.40357 | -2.0049 | 5.9679 |

### 4.3 Funkcja nr 3

$$f_3(x) = \sin x - 4\sin 2x + 0,3\sin 3x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-7}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100 i N=10.

Figure 9: Funkcja nr 3 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.030405 | -0.030405 | 2.8527e-15 |
| 0 | 0.9 | -1.8856 | -1.8856 | 2.8355e-11 |
| 0 | 1 | -2.1736 | -2.1736 | 4.5908e-11 |
| 0 | 3.1416 | 2.2 | 2.2 | 2.7987e-09 |
| 0 | 10 | 0.73981 | 0.73981 | 4.8133e-07 |
| 0 | 100 | -0.78573 | -0.78826 | 0.0032142 |

Figure 10: Funkcja nr 3 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.030405 | -0.030405 | 3.0959e-11 |
| 0 | 0.9 | -1.8856 | -1.8856 | 2.836e-07 |
| 0 | 1 | -2.1736 | -2.1736 | 4.5925e-07 |
| 0 | 3.1416 | 2.2 | 2.2001 | 2.8664e-05 |
| 0 | 10 | 0.73981 | 0.73623 | 0.0048419 |
| 0 | 100 | -0.78573 | 7.7238 | 10.83 |

### 4.4 Funkcja nr 4

$$f_4(x) = 6\sin x + 13\sin 2x - 3,45\sin 3x + 2\sin 4x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-6}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100 i N=10.

Figure 11: Funkcja nr 4 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.030405 | 0.14765 | 1.861e-14 |
| 0 | 0.9 | -1.8856 | 9.0059 | 4.941e-11 |
| 0 | 1 | -2.1736 | 10.501 | 5.8306e-11 |
| 0 | 3.1416 | 2.2 | 9.7 | 6.0793e-09 |
| 0 | 10 | 0.73981 | 14.743 | 4.9004e-07 |
| 0 | 100 | -0.78573 | 3.8462 | 0.026586 |

Figure 12: Funkcja nr 4 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.030405 | 0.14765 | 1.8924e-10 |
| 0 | 0.9 | -1.8856 | 9.0059 | 4.958e-07 |
| 0 | 1 | -2.1736 | 10.501 | 5.8532e-07 |
| 0 | 3.1416 | 2.2 | 9.6994 | 6.2522e-05 |
| 0 | 10 | 0.73981 | 14.868 | 0.0085205 |
| 0 | 100 | -0.78573 | -24.788 | 7.6161 |

### 4.5 Funkcja nr 5

$$f_5(x) = 17\sin x + 0,12\sin 2x + \sin 3x - 3\sin 4x - 5\sin 5x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-4}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100, N=10.

Figure 13: Funkcja nr 5 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.080609 | -0.080609 | 3.8943e-13 |
| 0 | 0.9 | 4.5076 | 4.5076 | 5.3671e-10 |
| 0 | 1 | 6.6066 | 6.6066 | 3.6914e-10 |
| 0 | 3.1416 | 32.667 | 32.667 | 1.2041e-08 |
| 0 | 10 | 30.296 | 30.296 | 3.3111e-07 |
| 0 | 100 | -0.31577 | -1.7472 | 4.5329 |

Figure 14: Funkcja nr 5 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.080609 | -0.080609 | 3.8924e-09 |
| 0 | 0.9 | 4.5076 | 4.5076 | 5.3966e-06 |
| 0 | 1 | 6.6066 | 6.6066 | 3.7159e-06 |
| 0 | 3.1416 | 32.667 | 32.662 | 0.00013031 |
| 0 | 10 | 30.296 | 30.094 | 0.0066973 |
| 0 | 100 | -0.31577 | 328.42 | 1041.1 |

### 4.6 Funkcja nr 6

$$f_6(x) = 11 \sin x - 3 \sin 2x - 8 \sin 3x + 0,11 \sin 4x - 2 \sin 5x + \sin 6x - 3,5 \sin 7x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-5}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100, N=10.

Figure 15: Funkcja nr 6 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.22931 | -0.22931 | 4.3102e-13 |
| 0 | 0.9 | -3.1274 | -3.1274 | 4.7145e-10 |
| 0 | 1 | -2.7317 | -2.7317 | 1.1607e-09 |
| 0 | 3.1416 | 14.867 | 14.867 | 7.5417e-08 |
| 0 | 10 | 17.26 | 17.26 | 3.915e-07 |
| 0 | 100 | -3.2783 | 2.3399 | 1.7138 |

Figure 16: Funkcja nr 6 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -0.22931 | -0.22931 | 4.3115e-09 |
| 0 | 0.9 | -3.1274 | -3.1274 | 4.729e-06 |
| 0 | 1 | -2.7317 | -2.7317 | 1.1692e-05 |
| 0 | 3.1416 | 14.867 | 14.854 | 0.00085486 |
| 0 | 10 | 17.26 | 20.01 | 0.15929 |
| 0 | 100 | -3.2783 | 136.33 | 42.585 |

### 4.7 Funkcja nr 7

$$f_7(x) = 0,1 \sin x - 2 \sin 2x + 10 \sin 3x + 23 \sin 4x - 0,18 \sin 5x + 0,12 \sin 6x - 15 \sin 7x + 3 \sin 8x + 13 \sin 9x$$

Dla N=1000 i większych błąd jest rzędu co najwyżej $10^{-5}$, więc jest pomijalny. Zajmiemy się więc N=100, N=10.

Figure 17: Funkcja nr 7 porównanie dla N=100

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.73882 | 0.73882 | 1.3966e-12 |
| 0 | 0.9 | 17.97 | 17.97 | 1.9849e-09 |
| 0 | 1 | 17.409 | 17.409 | 4.2968e-09 |
| 0 | 3.1416 | 5.3978 | 5.3978 | 5.7582e-07 |
| 0 | 10 | 13.756 | 13.757 | 4.1954e-05 |
| 0 | 100 | 9.6014 | 22.34 | 1.3268 |

Figure 18: Funkcja nr 7 porównanie dla N=10

| a | b | WartFunkcjiWbudowanej | WartSimpsona | bladWzgl |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.73882 | 0.73882 | 1.397e-08 |
| 0 | 0.9 | 17.97 | 17.971 | 2.0169e-05 |
| 0 | 1 | 17.409 | 17.41 | 4.3905e-05 |
| 0 | 3.1416 | 5.3978 | 5.4424 | 0.0082543 |
| 0 | 10 | 13.756 | 9.9712 | 0.27515 |
| 0 | 100 | 9.6014 | 392.93 | 39.924 |

# 5 Analiza uzyskanych wyników

Pamiętamy wzór na błąd złożonej kwadratury Simpsona:

$$E(f) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) f^{(4)}(\mu)$$

Więc tak jak już wcześniej można było z niego wywnioskować im większa wartość $(b-a)$ w odniesieniu do $N$ tym większy będzie błąd. Wiemy, że $H = \frac{b-a}{N}$, więc tak naprawdę we wzorze wystepuje $\frac{(b-a)^5}{N^4}$, więc w największym stopniu błąd rośnie w miarę coraz większego przedziału całkowania. Widzimy również, że w miarę coraz większej ilości składników sumy, dla której liczymy całkę, powoli otrzymujemy większe błędy względne. Końcowe wnioski są więc następujące:

-Im więcej składników sumy tym większy błąd względny,

-Im mniejsze N tym większy błąd względny

-Im większe H tym większy błąd względny.

Używać metody Simpsona można więc na jak najmniejszych przedziałach dla jak największych N