Interpolacja Lagrange'a

Wyznaczyć wielomian interpolacyjny mając dane węzły

$$(-2,-3),\ (-1,3),\ (1,3),\ (2,3)$$

W przypadku ogólnym mając dane $n+1$ punktów węzłowych (x_i, f_i) $i = 0, \ldots, n$ szukany wielomian interpolacyjny jest postaci

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) \quad \text{gdzie } L_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

W naszym przypadku mamy

$$x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$$

$$f_0 = -3,\ f_1 = 3,\ f_2 = 3,\ f_3 = 3$$

Obliczymy najpierw wielomiany $L_i,\ i = 0, 1, 2, 3$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{-12} = -\frac{1}{12}(x^3-2x^2-x+1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{6} = \frac{1}{6}(x^3-x^2-4x+4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{-6} = -\frac{1}{6}(x^3-x^2-4x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{12} = \frac{1}{12}(x^3+2x^2-x-2)$$

Zatem szukany wielomian ma postać

$$w(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 4$$

Znaleźć wielomian interpolacyjny mając dane węzły

$$(-1,-4),\ (0,-1),\ (1,0),\ (2,5)$$

Skorzystamy z metody wykorzystującej tzw. ilorazy różnicowe.

Ilorazem różnicowym rzędu zerowego opartym na węźle (x_i, f_i) nazywamy liczbę f_i
Ilorazem różnicowym rzędu k opartym na węzłach $(x_{i_0}, f_{i_0}), \ldots, (x_{i_k}, f_{i_k})$ nazywamy liczbę

$$f_{i_0 i_1 \ldots i_k} = \frac{f_{i_1 i_2 \ldots i_k} - f_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Wówczas w ogólnym przypadku mając zadane węzły $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, n$ wielomian interpolacyjny $w(x)$ ma postać Newtona

$$w(x) = f_0 + f_{01}(x - x_0) + f_{012}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f_{01\ldots n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

W naszym przypadku mamy $n = 3$ oraz

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$$

$$f_0 = -4,\ f_1 = -1,\ f_2 = 0,\ f_3 = 5$$

Obliczmy najpierw współczynniki $f_{01},\ f_{12},\ f_{23},\ f_{012},\ f_{123},\ f_{0123}$

$$f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = 3 \qquad f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = 1 \qquad f_{23} = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = 5$$

$$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_0} = -1 \qquad f_{123} = \frac{f_{23} - f_{12}}{x_3 - x_1} = 2$$

$$f_{0123} = \frac{f_{123} - f_{012}}{x_3 - x_0} = 1$$

Wobec tego szukany wielomian interpolacyjny $w(x)$ ma postać

$$w(x) = -4 + 3(x + 1) - x(x + 1) + x(x + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Znaleźć wielomian interpolacyjny mając dane węzły:

$$(0,1),\ (1,2),\ (2,4)$$

Ponieważ punkty x_0, x_1, x_2 są równoodległe użyjemy metody wykorzystującej ten fakt.

Mając dane węzły $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, n$ istnieje takie $h \in R$, że $x_i = x_0 + ih$ dla $i = 1, \ldots, n$. Przedstawiając $x = x_0 + th$ dla pewnego $t \in R$ otrzymujemy wielomian interpolacyjny w postaci Newtona

$$w(x) = w(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} \cdot p_k(t)$$

gdzie $\Delta^k f(x_0)$ jest funkcją (zwaną różnicą progresywną) określoną wzorami

$$\Delta^0 f(x_0) = f(x_0) \qquad \Delta^{k+1} = \Delta^k f(x_0 + h) - \Delta^k f(x_0)$$

natomiast $p_k(t)$, są wielomianami zdefiniowanymi w następujący sposób

$$p_0(t) = 1 \qquad p_k(t) = t(t-1)\ldots(t-(k-1)) = \prod_{j=0}^{k-1}(t-j)$$

W naszym zadaniu mamy $x_0 = 0,\ h = 1,\ n + 2$. Obliczymy najpierw kolejne różnice progresywne

$$\Delta^0 f(x_0) = f(x_0) = 1 \qquad \Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_0 + h) - \Delta^0 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = 1$$
$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_0 + h) - \Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_0 + 2h) - \Delta^0 f(x_0 + h) - 1 = 1$$

Zatem szukany wielomian ma postać

$$w(x_0 + th) = 1 + t + \frac{1}{2}t(t-1) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$$
$$x = x_0 + th \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{h} = x$$

Ostatecznie zatem

$$w(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

Znaleźć wielomian interpolacyjny mając dane punkty węzłowe

$$(0,1),\ (1,1),\ (2,5),\ (3,21)$$

Mamy $x_0 = 0,\ h = 1,\ n = 3$ oraz

$$\Delta^0 f(x_0) = f(x_0) = 1 \qquad \Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_0 + h) - \Delta^0 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = 0$$
$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_0 + h) - \Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_0 + 2h) - \Delta^0 f(x_0 + h) = 4$$
$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0 + h) - \Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_0 + 2h) - \Delta^1 f(x_0 + h) - 4 =$$
$$= \Delta^0 f(x_0 + 3h) - 2\Delta^0 f(x_0 + 2h) + \Delta^0 f(x_0 + h) - 4 = 8$$

Zatem wilomian interpolacyjny ma postać

$$w(x_0 + th) = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \quad \Rightarrow \quad w(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$