Kraków, 30.11.2010

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 4 na 06.12.2010

1. Dokończyć zadania z zeszłego tygodnia.

N7 Zaimplementować metodę gradientów sprzężonych dla układu z zadania 3 z poprzedniego zestawu.

N8 Znaleźć wartości własne macierzy z dokładnością 10^{-8}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

korzystając z metody iteracyjnej:

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= A, \\ Q^{(n)} R^{(n)} &= B^{(n)}, \\ B^{(n+1)} &:= R^{(n)} Q^{(n)}. \end{aligned}$$

2. Wyjaśnić na czym polegają poniższe metody:
   (a) bisekcji,
   (b) Newtona,
   (c) Halley'a,
   (d) *regula falsi*,
   (e) siecznych.

   Przedstawić graficznie powyższe metody, wyprowadzić wzory na kolejne kroki iteracji, obliczyć rząd zbieżności oraz przedyskutować ich stabilność.

N9 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\det(A - \lambda \mathbb{1})$ wszystkimi metodami z poprzedniego zadania z dokładnością 10^{-8}. Które metody działają najszybciej? A jest macierzą z zadania N8.

3. Korzystając z twierdzenia Banacha o kontrakcji znaleźć warunek kiedy iteracja:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dąży do punktu stałego odwzorowania. Znaleźć punkty stałe odwzorowania logistycznego $f(x) = kx(1-x)$ dla $x \in [0, 1]$. Zbadać dla jakich k iteracja jest zbieżna i do jakiego punktu stałego. Dla jakich wartości k iteracja ma dwucykl tzn $x \neq f(x) \wedge x = f(f(x))$?

N10* Narysować zbiór $\{x_n : n > 100\}$ (atraktor) w zależności od parametru $k \in [2, 4]$ dla odwzorowania logistycznego.
`http://pl.wikipedia.org/wiki/Odwzorowanie_logistyczne`

4. Uzasadnić graficznie istnienie dwucyklu w metodzie Newtona dla równania $f(x) = 0$ dla
$$f(x) = \frac{x^3 - 5x}{4}.$$
Znaleźć ten dwucykl. *Wskazówka*: skorzystać z symetrii funkcji.

N11 Rozwiązać równanie
$$z^3 - 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$
metodą Newtona. Zaznaczyć różnymi kolorami baseny atrakcji poszczególnych rozwiązań na płaszczyźnie $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$.

N12 Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań:
$$\begin{cases} \sin(x + y^2 + 1) & = 0, \\ xy - 1 & = 0 \end{cases}.$$
w kwadracie $(-2, 2) \times (-2, 2)$. Można korzystać z gotowych bibliotek numerycznych, ale nie z gotowych programów typu *Mathematica*.

dr Tomasz Romańczukiewicz