Kraków, 16.12.2010

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 6 na 20.12.2010

1. *Interpolacja Hermite'a.* Wielomian interpolacyjny Hermite'a dany jest wzorem
$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) f_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{h}_i(x) f_i' \tag{1}$$
gdzie
$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)]\, l_i^2(x),$$
$$\bar{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x),$$
gdzie x_i są węzłami a $l_i(x)$ wielomianami używanymi w interpolacji Lagrange'a.

   Pokazać, że $y(x_i) = f_i$ oraz $y'(x_i) = f_i'$, a zatem, że za pomocą (1) można skonstruować wielomian interpolacyjny funkcji danej wraz z pochodnymi.

2. *Całkowanie numeryczne.* Wyprowadzić wzór trapezów, Simpsona i regułę 3/8. Jakie są błędy tych metod?

3. Jak zmienia się błąd przy podzieleniu przedziału całkowania na 2 równe podprzedziały?
Jak zmienia się błąd przy podzieleniu przedziału całkowania na n równych podprzedziałów?

N16 Obliczyć całkę
$$\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2}$$
z dokładnością do 10^{-6} za pomocą złożonej metody trapezów, Simpsona i reguły 3/8, stosując iteracyjne zagęszczanie podprzedziałów (proszę zwrócić uwagę, że tutaj nie wszystko trzeba liczyć na nowo w kolejnej iteracji).

N17 Obliczyć całkę
$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
z dokładnością do 10^{-6} dowolną metodą.
Wskazówka: zmienić zmienne tak aby pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału.

N18 Stosując złożoną metodę trapezów dla N przedziałów i odpowiednie relacje ortogonalności (na przedziale $[0,\pi]$) znaleźć pierwsze N współczynników rozwinięcia funkcji $f(x)$ w bazie cosinusów:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cos(nx) \tag{2}$$

dla funkcji

$$f_1(x) = \exp\left(-x^2\right), \tag{3}$$

$$f_2(x) = \exp\left(-\cos^2 x\right). \tag{4}$$

Narysować współczynniki w skali logarytmicznej $(n, \log c_n)$. Korzystając z rozwinięcia obliczyć pierwszą pochodną w punktach używanych przy obliczaniu całek metodą trapezów i porównać z wartościami dokładnymi. Opisać wnioski.

dr Tomasz Romańczukiewicz