1. (2p) *Twierdzenie interpolacyjne*: Udowodnić, że dla dowolnych $n+1$ punktów węzłowych (x_i, f_i) istnieje dokładnie jeden wielomian P stopnia n, taki, że $P(x_i) = f_i$.

   Uwagi: różne wersje tego dowodu można znaleźć w wielu podręcznikach, np. w J. Stoer "Wstęp dometod numerycznych"t. 1, albo w Z. Fortuna "Metody numeryczne".

2. (3p) *Błąd interpolacji wielomianowej*: Pokazać, że jeśli funkcja f jest $n+1$-krotnie różniczkowalna, a $P_n(x)$ jest jej interpolacją wielomianową na $n+1$ punktach (x_i, f_i), to błąd tej interpolacji w dowolnym punkcie $\bar{x}$ wynosi:

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{\omega(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{1}$$

   gdzie $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, natomiast ξ jest punktem z najmniejszego przedziału $[x_i, \bar{x}]$.

   Uwagi: Patrz *uwagi* w zadaniu 1.

3. (1p) *Interpolacja wielomianami Lagrange'a*: Mając dane $n+1$ punktów (x_i, f_i) zbuduj wielomian $l_i(x)$ o własności $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Następnie użyj wielmianów $l_i(x)$ do konstrukcji wielomianu interpolującego funkcję f na podanych węzłach.

4. (1p) Podać, dla jakich liczb a, b, c, d funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 & x \in [1,d] \end{cases} \tag{2}$$

   tworzy naturalny splajn kubiczny na przedziale $[0, d]$.

5. (3p) W każdym przedziale przedziale $[x_j, x_{j+1}]$ interpolujemy za pomocą wzoru

$$y(x) = A(x) f_j + B(x) f_{j+1} + C(x) f_j'' + D(x) f_{j+1}'' \,, \tag{3}$$

   gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}\,, \qquad C = \tfrac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2\,, \tag{4a}$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\,, \qquad D = \tfrac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2\,. \tag{4b}$$

   Pokazać, że $y(x_j) = f_j$, $y(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $y''(x_j) = f_j''$, $y''(x_{j+1}) = f_{j+1}''$. Żądając ciągłości pierwszej pochodnej $y(x)$ w węzłach, wyprowadzić układ równań na nieznane wielkości f_j''.

6N. (1p) Zbudować wielomian interpolacyjny oparty na następującej tabelce:

x	-1.2300	-1.1900	-0.7400	0.1100	2.5600
y	1.5129	1.4161	0.5476	0.0121	6.5536

   Podać **jawne** współczynniki wielomianu interpolacyjnego.

7N. (1p) Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \tag{5}$$

   w punktach -1, $-1 + \frac{1}{32}$, $-1 + \frac{2}{32}$, $\dots$, $1 - \frac{1}{32}$, 1, a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (5) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego.

8N. (2p) Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 7. Sporządzić jego wykres.

9N. (3p) Skonstruować interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 7. Sporządzić odpowiedni wykres.

10. (2p) *Interpolacja Hermite'a*. Wielomian interpolacyjny Hermite'a dany jest wzorem

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) f_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{h}_i(x) f_i' \,, \tag{6}$$

gdzie

$$h_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)\right) l_i^2(x) \,, \tag{7a}$$

$$\bar{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x) \,. \tag{7b}$$

l_i, x_j — oznaczają to samo, co w interpolacji Lagrange'a. Pokazać, że $y(x_i) = f_i$, $y'(x_i) = f_i'$.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

MM i PFG