ZESTAW 6

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.
2. Całkując odpowiednie wielomiany interpolacyjne, wyprowadź wzory na kwadratury
   (a) trapezów,
   (b) Simpsona,
   (c) 3/8,
   (d) Milne'a.

   Zastanów się jak wyprowadzić wyrażenie na błąd kwadratury w każdym z tych przypadków.
3. Metody Simpsona i 3/8 mają ten sam rząd, jednak metoda 3/8 wymaga obliczania funkcji podcałkowej w czterech punktach, podczas gdy metodzie Simpsona wystarcza obliczanie w trzech punktach. Czy wobec tego stosowanie kwadratury 3/8 może przynieść jakąkolwiek korzyść?
4. Wyprowadź wzory na złożone metody
   (a) trapezów,
   (b) Simpsona,
   (c) 3/8,
   (d) Milne'a.

   Zaprojektować skuteczne algorytmy stosujące te wzory (co trzeba zapamiętywać?).
5. Dla kwadratury Simpsona wyprowadź odpowiednik interpolacji Richardsona.

6N. Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę

$$\int\limits_0^\infty \sin^2\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\, e^{-x^2}\, dx \tag{1}$$

z dokładnością do 10^{-7}.

7N. Niech

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \cos\left(\frac{1+t^2}{t^4+0.01}\right)\, e^{-t^2}\, dt. \tag{2}$$

Narysuj wykres $F(x)$ oraz oblicz $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ z dokładnością 10^{-8}.

8N. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{1+t^2}{t^4+0.01}\right)\, e^{-t^2}\, dt \tag{3}$$

wykorzystując zamianę zmiennych

$$t = \frac{x}{1-x^2} \tag{4a}$$

$$dt = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} dx, \tag{4b}$$

która zamienia całkę na przedziale $(-\infty, \infty)$ na całkę na przedziale $[-1, 1]$. Porównaj wynik z wynikiem uzyskanym metodą z zadania 7.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/