ZESTAW 5

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.
2. Podać, dla jakich liczb a, b, c, d funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 & x \in [1,d] \end{cases} \tag{1}$$

tworzy naturalny splajn kubiczny na przedziale $[0, d]$.

3. W każdym przedziale przedziale $[x_j, x_{j+1}]$ interpolujemy za pomocą wzoru

$$y(x) = A(x)f_j + B(x)f_{j+1} + C(x)f_j'' + D(x)f_{j+1}'' \,, \tag{2}$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \,, \qquad C = \tfrac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2 \,, \tag{3a}$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \,, \qquad D = \tfrac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2 \,. \tag{3b}$$

Pokazać, że $y(x_j) = f_j$, $y(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $y''(x_j) = f_j''$, $y''(x_{j+1}) = f_{j+1}''$. Żądając ciągłości pierwszej pochodnej $y(x)$ w węzłach, wyprowadzić układ równań na nieznane wielkości f_j''.

4N. Zbudować wielomian interpolacyjny oparty na następującej tabelce:

x	-1.372	-1.1213	-0.8654	0.0241	1.8742
y	6.64715	4.77194	3.24675	1.00174	11.5379

Podać **jawne** współczynniki wielomianu interpolacyjnego.

5N. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1 + 8x^2} \tag{4}$$

w punktach -1, $-1+h$, $-1+2h$, $\ldots$, $1-h$, 1, dla $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ oraz $\frac{1}{32}$ a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (4) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego.

6N. Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 5. Sporządzić jego wykres. Różniczkując znalezioną funkcję sklejalną, znaleźć numeryczne przybliżenia pochodnej funkcji (4) w węzłach. Porównać znalezione przybliżenia funkcji i jej pochodnej z wartościami dokładnymi.

7N. Skonstruować interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna[1] z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 5. Sporządzić odpowiedni wykres. Różniczkując znalezioną funkcję sklejalną, znaleźć numeryczne przybliżenia pochodnej funkcji (4) w węzłach. Porównać znalezione przybliżenia funkcji i jej pochodnej z wartościami dokładnymi.

[1] `http://cg.in.tu-clausthal.de/papers/hormann/Floater.2007.BRI.pdf`

8. *Interpolacja Hermite'a.* Wielomian interpolacyjny Hermite'a dany jest wzorem

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) f_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{h}_i(x) f_i' \,, \tag{5}$$

gdzie

$$h_i(x) = \left[1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)\right] l_i^2(x) \,, \tag{6a}$$
$$\bar{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x) \,. \tag{6b}$$

x_i są węzłami interpolacji natomiast l_i są wielomianami używanymi w konstrukcji interpolacji Lagrage'a:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \tag{7}$$

Pokazać, że $y(x_j) = f_j$, $y'(x_j) = f_j'$, a zatem za pomocą (5) można skonstruować wielomian interpolacyjny funkcji danej wraz ze swą pochodną w węzłach.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/