1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.

2N. (2p) Dane jest równanie:

$$(x^2-1)\sinh^3 x = 0 \tag{1}$$

Zastosuj algorytm siecznych i algorytm opracowany w zadaniu 8 z poprzedniego zestawu do znalezienia miejsc zerowych równania (1), startując, odpowiednio, z dwu i trzech losowych punktów z przedziału $(0,1)$. Punkty początkowe dla metody siecznych mają być dwoma z trzech punktów początkowych dla algorytmu opartego o interpolację odwrotną. Wyznacz miejsce zerowe z dokładnością do 10^{-8}. Powtórz zadanie dla kilku(nastu) różnych zestawów punktów początkowcyh. Porównaj wyniki.

3. (1p) Przedstaw zarys rozwiązania numerycznych zadań 4N i 5N. Jakie scenariusze przebiegów iteracji będziemy rozróżniać? Jak praktycznie skonstruować mapę basenów atrakcji?

4N. (4p) Przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej baseny atrakcji miejsc zerowych jakiegoś wielomianu skonstruowanego w zadaniu 9 z poprzedniego zestawu.

5N. (1p) Znajdź granice basenów atrakcji w metodzie Halley'a zastosowanej do tego samego wielomianu, którego użyłeś w poprzednim zadaniu.

6. *Metoda Laguerra*: Niech $f(x)$ będzie wielomianem o miejscach zerowych x_i, gdzie $i = 1,\ldots,n$. Rozważ funkcje:

$$\Phi(z) = \left(S(y+x) - \left(\frac{y+x}{x-z}\right)^2\right)(x-z)^2 \tag{2}$$

$$S(y+x) = \sum_i^n \left(\frac{y+x-x_i}{x-x_i}\right)^2 \tag{3}$$

   (a) (3p) Pokaż, że $\Phi(x) < 0$ a $\Phi(x_i) > 0$ dla dowolnego x i każdego x_i. Jaką funkcją jest Φ i w jakim przedziale znajdują się jej miejsca zerowe?

   (b) (3p) Rozważając pierwszą i drugą pochodną wyrażenia $\ln f(x)$ sprowadź funkcję $\Phi(z)$ do postaci:

$$\begin{aligned} f^2\Phi(z) =& y^2\left((x-z)^2(f'^2 - ff'') - f^2\right) + \\ &+ 2y(x-z)f\left((x-z)f' - f\right) + (n-1)(x-z)^2 f^2 \end{aligned} \tag{4}$$

   Przez f, f' i f'' rozumiemy odpowiednie funkcje x.

   (c) (3p) Jeśli wybierzemy z takie, że $\Phi(z) = 0$, to wyrażenie 4 staje się równaniem kwadratowym względem y. Badając wyznacznik tego równania znajdź warunek na $(x-z)$ gwarantujący przyjmowanie ekstremalnej wartości przez to wyrażenie. Wyprowadź stąd z w funkcji x i przedstaw wzór na iteracje w metodzie Laguerra.

   Uwagi: Podpunkty można zgłaszać osobno. Rozwiązanie można znaleźć w podręczniku Ralstona. Obliczenia w c) są wyjątkowo żmudne, więc prawdopodobnie nie wykonamy ich, wystarczy umiejętność zreferowania wyników.

7. (1p) Przedstawić algorytm dzielenia wielomianu przez:

   (a) jednomian

   (b) dwumian

   Dlaczego przypadek b) jest istotny dla metody efektywnej implementacji metody Laguerra?

8N. (4p) Stosując metodę Laguerre'a wraz ze strategią obniżania stopnia wielomianu i wygładzania, znajdź wszystkie rozwiązania równań:

$$z^{10} + z^9 + 3z^8 + 2z^7 - z^6 - 3z^5 - 11z^4 - 8z^3 - 12z^2 - 4z - 4 = 0 \tag{5a}$$

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0 \tag{5b}$$

9. (1p) Dany jest układ równań:

$$2x^2 + y^2 = 2 \tag{6a}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \tag{6b}$$

Oblicz wszystkie rozwiązania tego układu. Oblicz wszystkie wielkości potrzebne do implemetacji metody Newtona dla powyższego układu.

10N. Implementując metodę Newtona, znajdź jak najwięcej rozwiązań układu (6).

MM i PFG

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.