Kraków, 11.11.2010

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 1 na 15.11.2010

1. Wyjaśnij, dlaczego odejmowanie dwóch liczb a i b, $a \simeq b$ może prowadzić do bardzo dużego błędu.

2. Znajdź rozwinięcie binarne liczby 1/3.

3. Dlaczego standardowa forma rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
jest niekorzystna do obliczeń numerycznych? Pokaż, że poniższy algorytm:
$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{2}\left(b + \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\right), \\ x_1 &= q/a, \\ x_2 &= c/q \end{aligned}$$
daje poprawne rozwiązania z mniejszym błędem.

4. Korzystając wprost z definicji pochodnej:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
podaj numeryczny przepis na jej obliczanie. Jak dobrać h aby błąd był najmniejszy? Czy można prosto zwiększyć dokładność obliczeń?

N1 Napisz program testujący metody liczenia pochodnej dla różnych wartości h (najlepiej zrobić wykres w skali logarytmicznej) dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ w punkcie $x = 1$.

5. Rozwiąż poniższe układy równań:
$$\begin{cases} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 6.00001y &= 8.00001 \end{cases},$$
$$\begin{cases} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 5.99999y &= 8.00002 \end{cases}$$
i skomentuj otrzymane rozwiązania.

6. Znaleźć rozkład LU i wyznacznik następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Udowodnij wzór Shermana-Morrisona:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u},$$

gdzie A jest macierzą, której odwrotność jest znana, oraz $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$.

N2 Rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Skorzystać z faktu, że macierz jest macierzą trójdiagonalną.

N3 Korzystając ze wzoru Shermana-Morrisona rozwiązać poniższy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Uwagi:

- Zadania oznaczone literką N są zadaniami numerycznymi. Każde zadanie numeryczne należy przesłać przez formularz upload *http://prunus.if.uj.edu.pl/Upload/index.php* w ciągu 2 tygodni od daty ćwiczeń, na które był przewidziany zestaw. Zadania powinny być spakowane w formacie `tar.gz`, w którym powinny znajdować się opracowane wyniki wraz z kodem programu (wszystko w pdf) oraz działający kod (najlepiej z Makefilem).

- Do zadań numerycznych można korzystać z gotowych bibliotek numerycznych (np. *GNU Scientific Library* w C/C++). Warto zapoznać się również z gotowymi programami do obliczeń numerycznych (*Octave* ewentualnie *Maple, Mathematica*).

- Do opracowań wyników polecam LaTeX'a wraz z pakietem `lstlisting`.

Literatura:

[1] *Numerical Recipes http://www.nrbook.com/a/bookcpdf.php* rozdz. 1.3, 2.3, 2.4, 5.6, 5.7

[2] A. Ralston, P. Rabinowitz, *A first course in numerical methods*

[3] Źródło szybkie, ale nie zawsze godne zaufania: *wikipedia*.

dr Tomasz Romańczukiewicz