1. Całkując odpowiednie wielomiany interpolacyjne, wyprowadź wzory na kwadratury

   (a) (0.5p) trapezów,

   (b) (0.5p) Simpsona,

   (c) (1p) 3/8,

   (d) (1p) Milne'a.

   Uwagi: całkowanie wielomianu interpolacyjnego $L(x)$ jest prostsze jeśli zastosuje się zamianę zmiennych $x = ht + a$ i $x_j = a + hj$, gdzie a to dolna granica całkowania, x_j to węzły interpolacji a h jest odległością dwóch kolejnych węzłów (patrz: Stoer)

2. Wyprowadź błąd kwadratury Newtona-Cotesa rzędu n:

   (a) (4p) Jeśli $p(x)f^{(n)}(\xi)/n!$ jest błędem interpolacji Lagrange na pewnym przedziale, pokaż, że dla pewnego η z tego samego przedziału zachodzi:
   $$\frac{1}{n!}\frac{d}{dx}f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta) \tag{1}$$

   (b) (4p) Dysponując powyższą równością wyprowadź wzór na błąd kwadratury Newtona-Cotesa dla parzystego n.

   (c) (2p) Przedyskutuj (lub wyprowadź (+2p)) jak przebiegają obliczenia dla n nieparzystego.

   Jaki praktyczny wniosek wynika z powyższych rozważań?

   Uwagi: Rozwiązanie można znaleźć w podręczniku Ralstone'a: a) to dowód twierdzenia 4.1, b) spróbujemy udowodnić w całości, c) wystarczy przedyskutować tak by pokazać skąd bierze się najistotniejsza różnica. Podpunkty można zgłaszać osobno.

3. Dla kwadratury Simpsona wyprowadź:

   (a) (1p) wzór na kwadraturę złożoną i jej błąd (wykorzystaj wzór na błąd interpolacji); zastanów się nad efektywnym algorytmem obliczania złożonej kwadratury Simpsona,

   (b) (2p) odpowiednik interpolacji Richardsona,

   (c) (2p) wyrażenie na błąd obliczania całki po podprzedziale w kwadraturze adaptacyjnej

4. (3p) Znajdź wzór na objętość granaistosłupa ściętego o podstawie w punktach (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) i wierzchołkach, odpowiednio, $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, $f(x_3, y_3)$. Korzystając z tego wzoru, znajdź wzór na kwadraturę złożoną powstałą z podziału podstawy na trzy trójkąty potomne ze wspólnym wierzchołkiem w środku ciężkości podstawy.

5N. (1p) Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę
$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\,dx \tag{2}$$
z dokładnością do 10^{-7}.

6N. (1p) Niech
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \cos\left(\frac{1+t}{t^2+0.04}\right) e^{-t^2}\,dt \tag{3}$$
Narysuj wykres $F(x)$ oraz oblicz $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ z dokładnością 10^{-8}.