Teoria mnogości

Teoria mnogości to dział matematyki zajmujący się badaniem ogólnych własności zbiorów niezależnie od natury elementów, z których się składają. Twórcą tej teorii był matematyk niemiecki Georg Cantor (1845 - 1918).

Pojęcia pierwotne teorii mnogości to **zbiór** oraz bycie **elementem** zbioru.
Stosujemy następujące zapisy:
$x \in A$ — x jest elementem zbioru A; $x \notin A$ — x nie należy do zbioru A
Definiujemy następujące podstawowe pojęcia:

- $\emptyset$ — **zbiór pusty** (nie ma żadnego elementu, $\forall x\ x \notin \emptyset$)
- Relacja **inkluzji** (zawierania) — $A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$ (A jest podzbiorem B)
- **Równość zbiorów** — $A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Uwaga: Zbiór pusty jest tylko jeden i jest on podzbiorem każdego zbioru.

Podstawowe działania na zbiorach

Niech X będzie zbiorem, a A i B niech będą jego podzbiorami.

- **Suma** — $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$;
- **Iloczyn** (przecięcie) — $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
- **Różnica** — $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$;
- **Dopełnienie** — $A' = -A = X \setminus A = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}$.

Uwaga: Elementy zbioru też mogą być zbiorami.

Sposoby określania zbiorów

- Wypisanie elementów zbioru, np. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
- Określenie zbioru za pomocą funkcji zdaniowej — gromadzenie elementów mających wspólną cechę opisaną pewną funkcją zdaniową. Ogół elementów x, które mają własność $W(x)$ oznaczamy $\{x : W(x)\}$. **Uwaga**: Może się zdarzyć, że opisana w taki sposób klasa obiektów nie jest zbiorem (przykład — antynomia Russela). Aby uniknąć takiej sytuacji wybieramy elementy spełniające określoną własność spośród ustalonego wcześniej zbioru X. Tworzymy nowy zbiór $\{x \in X : W(x)\}$.
- Zbiór jako obraz zbioru wyznaczony przez funkcję – $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$
(więcej na wykładzie o funkcjach).

Własności działań i relacji na zbiorach

Niech X - ustalony zbiór (przestrzeń, tzn. rozważamy tylko elementy i podzbiory tego zbioru) oraz A, B, $C \subseteq X$.

Własności relacji inkluzji

1. $A \subseteq A$ zwrotność
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ przechodniość
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ antysymetryczność

Własności działań

1. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ przemienność
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ łączność
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ rozdzielność
4. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ stąd $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

   prawa de Morgana
5. monotoniczność sumy i iloczynu: $A \subseteq A_1 \wedge B \subseteq B_1 \Rightarrow \begin{array}{l} A \cup B \subseteq A_1 \cup B_1 \\ A \cap B \subseteq A_1 \cap B_1 \end{array}$
6. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \setminus A = \emptyset$, $A \cup A' = X$, $(A')' = A$
   $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \cap A' = \emptyset$
7. $A \subseteq B \Rightarrow\ C \setminus B \subseteq C \setminus A\ \wedge\ B' \subseteq A'$
8. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
9. Następujące warunki są równoważne:
   $A \subseteq B\ \Leftrightarrow\ A \cup B = B\ \Leftrightarrow\ A \cap B = A\ \Leftrightarrow\ A \setminus B = \emptyset$

Uwaga: Powyższe własności można wykazać przy pomocy rachunku zdań.

Zbiór potęgowy

Def. 1. *Niech A będzie dowolnym zbiorem.* ***Zbiorem potęgowym zbioru*** **A** *nazywamy zbiór wszystkich jego podzbiorów. Stosujemy oznaczenia $2^A = \mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.*

Uwaga: Zawsze $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.
Fakt: $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Produkt – iloczyn kartezjański zbiorów

Def. 2. ***Parę uporządkowaną*** *elementów a i b oznaczamy (a, b) lub $\langle a, b\rangle$, a – pierwsza współrzędna, b – druga współrzędna. Para uporządkowana ma własność: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.*

Uwaga: Istotne jest rozróżnienie kolejności elementów. Można wprowadzić inną definicję (Kuratowskiego): $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
Podobnie można zdefiniować n-tki uporządkowane $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jako obiekty rozróżniające swoje kolejne współrzędne.

Def. 3. ***Iloczynem kartezjańskim (produktem)*** *zbiorów A i B nazywamy zbiór*

$$A \times B = \begin{cases} \{(a, b) :\ a \in A \wedge b \in B\}, & \text{gdy } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{gdy } A = \emptyset \vee B = \emptyset \end{cases}$$

Fakt: Jeżeli A i B są zbiorami skończonymi, A ma m elementów, a B ma n elementów, to $A \times B$ ma $m \cdot n$ elementów.

Własności produktu

- $X \times Y \neq Y \times X$ brak przemienności
- $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$ brak łączności
- $X \times (Y \star Z) = (X \times Y) \star (X \times Z)$, $\star$ oznacza działanie $\cup$, $\cap$ lub $\setminus$.

Działania nieskończone – uogólnione sumy i iloczyny zbiorów

Niech $X \neq \emptyset$ – dowolna przestrzeń, $T \neq \emptyset$ – dowolny zbiór (zbiór indeksów).

Def. 4. ***Indeksowaną rodziną podzbiorów*** *zbioru X nazywamy każdą funkcję $f : T \to 2^X$, $f : t \mapsto A_t$, gdzie $t \in T$, $A_t \subseteq X$.*
Oznaczenie rodziny indeksowanej: $\{A_t\}_{t\in T} = (A_t)_{t\in T} := f(T) = \{A_t : t \in T\}$.

Def. 5. ***Uogólnioną sumą rodziny zbiorów*** $(A_t)_{t\in T}$ *nazywamy zbiór*

$$\bigcup_{t\in T} A_t := \{x \in X :\ \exists t \in T\ x \in A_t\}.$$

Uogólnionym iloczynem rodziny zbiorów $(A_t)_{t\in T}$ *nazywamy zbiór*

$$\bigcap_{t\in T} A_t := \{x \in X :\ \forall t \in T\ x \in A_t\}.$$

Uwaga: Własności uogólnionej sumy i iloczynu można zapisać następująco:

$$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \exists t\in T\ x \in A_t, \quad x \in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \forall t\in T\ x \in A_t$$

Uogólniona suma rodziny zbiorów jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie zbiory tej rodziny.

Uogólniony iloczyn rodziny zbiorów jest największym zbiorem zawartym w każdym zbiorze tej rodziny.

Uwaga: **Pusta rodzina zbiorów** gdy $T = \emptyset$, $\{A_t : t \in \emptyset\}$, wtedy $\bigcup_{t\in T} A_t = \emptyset$, a $\bigcap_{t\in T} A_t = X$.

Własności działań uogólnionych

Tw. 1. *Jeżeli $(A_t)_{t\in T}$, $(B_t)_{t\in T}$ są indeksowanymi rodzinami podzbiorów zbioru X i $A \subseteq X$, to prawdziwe są następujące zależności:*

1. $\forall t \in T\ A_t \subseteq A \ \Rightarrow \bigcup_{t\in T} A_t \subseteq A$,
2. $\forall t \in T\ A \subseteq A_t \ \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t$,
3. $\bigcup_{t\in T}(A_t \cup B_t) = \bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcup_{t\in T} B_t$,
4. $\bigcap_{t\in T}(A_t \cap B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \cap \bigcap_{t\in T} B_t$,
5. $A \cap \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T}(A \cap A_t)$,
6. $A \cup \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T}(A \cup A_t)$,
7. $A \setminus \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T}(A \setminus A_t)$ *oraz* $A \setminus \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T}(A \setminus A_t)$, *stąd*
   $(\bigcup_{t\in T} A_t)' = \bigcap_{t\in T}(A_t)'$ *oraz* $(\bigcap_{t\in T} A_t)' = \bigcup_{t\in T}(A_t)'$,
8. $S \subseteq T \ \Rightarrow \ \bigcup_{t\in S} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \ \wedge \bigcap_{t\in S} A_t \supseteq \bigcap_{t\in T} A_t$,
9. $\forall t \in T\ A_t \subseteq B_t \ \Rightarrow \ \bigcup_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T} B_t \ \wedge \bigcap_{t\in T} A_t \subseteq \bigcap_{t\in T} B_t$.

Rodziny podwójnie indeksowane

Jeśli $T = I \times J$ jest zbiorem par uporządkowanych, to rodzinę $f(T) = A_{(i,j)}$ oznaczamy A_{ij}.
Możemy zdefiniować działania uogólnione po dwóch indeksach.
Na przykład na początku wyznaczamy dla każdego $i \in I$ zbiory

$$B_i := \bigcap_{j\in J} A_{ij} = \{x : \ \forall j \in J x \in A_{ij}\}.$$

Następnie możemy możemy wyznaczyć zbiór $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{ij} = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J} A_{ij}) = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Mamy więc $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{ij} \Leftrightarrow (\exists i \in I)(\forall j \in J)\ x \in A_{ij}$.

Analogicznie definiujemy inne podwójne działania uogólnione: $\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{ij}$, $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij}$, $\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij}$, $\bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{ij}$, $\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{ij}$, $\bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{ij}$, $\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{ij}$.