ZESTAW 2

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Rozważmy układ n równań o m niewiadomych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1m}x_m = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nm}x_m = b_n \end{cases}. \tag{1}$$

   (a) Zapisać układ (1) w postaci macierzowej.
   (b) Co można powiedzieć o istnieniu rozwiązań układu (1)?
   (c) Jak i kiedy można skonstruować rozwiązanie (1) wykorzystując:
      i. własności macierzy odwrotnej,
      ii. wzory Cramera,
      iii. metodę eliminacji Gaussa,
      iv. metodę eliminacji Gaussa-Jordana,
      v. rozkład LU.

   Które z powyższych metod i dlaczego są najlepsze do zastosowań numerycznych?

2. Rozważmy następujące układy równań:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ & & \ldots & & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

   oraz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

   Jak można je rozwiązać?

3. Jak można wykorzystać algorytm z poprzedniego zadania do rozwiązywania dowolnych układów równań?

4. Wykorzystujące metody: eliminacji Gaussa, eliminacji Gaussa-Jordana, wzory Cramera oraz rozkład LU rozwiązać następujące układy równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases} \tag{4}$$

   oraz

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}. \tag{5}$$

5. Znaleźć rozkład LU i wyznacznik następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

   oraz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

6N. Rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

7. *Wzór Shermana–Morrisona.* Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą, której odwrotność jest znana, i niech

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{u}\,\mathbf{v}^T , \tag{9}$$

gdzie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ są pewnymi wektorami. Symbol $\cdot^T$ oznacza transpozycję. Znaleźć λ takie, że

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\,\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\lambda}\,. \tag{10}$$

Uwaga: Proszę pamiętać, że napis $\mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{b}$ ***zawsze*** rozumiemy jako umiejętość rozwiązania równania $\mathbf{X}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

8N. Korzystając ze wzoru Shermana–Morrisona rozwiązać układy równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

9N. Dane są następująca macierz i wektory:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -116.66654 & 583.33346 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ 583.33346 & -116.66654 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ -333.33308 & -333.33308 & 133.33383 & 200.00025 & 200.00025 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & 50.000125 & -649.99988 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & -649.99988 & 50.000125 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559856 \\ 1.31947922 \\ -0.09473435 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559855 \\ 1.32655028 \\ -0.10180541 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0.72677951 \\ 0.72677951 \\ -0.27849178 \\ 0.96592583 \\ 0.96592583 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0.73031505 \\ 0.73031505 \\ -0.27142071 \\ 0.96946136 \\ 0.96946136 \end{bmatrix}.$$

Definiujemy $\mathbf{z}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Obliczyć $||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2||$, $||\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4||$, $||\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2||/||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2||$, $||\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4||/||\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4||$. Zinterpretować otrzymane wyniki.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/