Zagadnienia do trzeciego kolokwium z wykładu RPiS

1. Jak obliczyć funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej będącą funkcją innej zmiennej losowej, której funkcję gęstości prawdopodobieństwa znamy?

Dla zmiennej losowej dyskretnej: $P_Y(y_k)=\sum_{(i=1)}^{j} P_X(x_i)$ przykład:

$Y=X^2$, $S_x=\{-2;0;2\}$, $P(X=-2)=1/4$, $P(X=0)=1/4$, $P(X=2)=1/2$,
$S_y=\{0;4\}$, $P(Y=0)=P(X=0)=1/4$, $P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=3/4$.

Dla zmiennej losowej ciągłej:

I sposób(przez dystrybuantę): szukamy $F_Y(y)$ i z niej wyliczamy $f_Y(y)$

II sposób: $f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$

ogólny przypadek – sumujemy po przedziałach monotoniczności g(X)

$$f_Y(y)=\sum_k f_{X,(k)}(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

2. Jak numerycznie wygenerować rozkład wielopunktowy o znanych prawdopodobieństwach pi (korzystając z generatora liczb jednorodnych z przedziału (0,1))?

Dla rozkładu ze skończoną (=n) liczbą wartości zmiennej losowej X.
Przedział (0,1) dzielimy na n przedziałów o długości pi :

$$(0,p_1]\cup(p_1,p_1+p_2]\cup...\cup(\sum_{(k=1)}^{(n-1)} p_k,1-\epsilon)$$

Losujemy liczbę Y ∈ (0,1) i znajdujemy dla niej przedział: $(\sum_{(k=1)}^{(j-1)} p_k,p_j]$

Jako wylosowaną wartość zmiennej losowej X przyjmujemy x_j

3. Jakie warunki muszą spełniać eksperymenty aby utworzyć sekwencję prób Bernoulliego?

Muszą być spełnione dwa warunki:

- Powtórzenia są niezależne
- Prawdopodobieństwo sukcesu jest takie samo we wszystkich powtórzeniach.

4. Podaj przykład próby Bernoulliego.

n-krotny rzut monetą.

5. Podaj dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa.

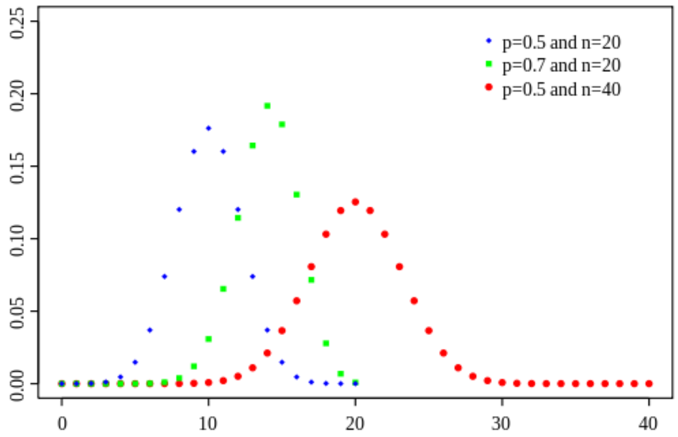
Zmienna losowa X oznacza liczbę osiągniętych sukcesów w n-elementowej próbie Bernoulliego. $S_X=\{0,1,2...n\}$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X, przyjmującej wartości $k\in S_X$ jest postaci

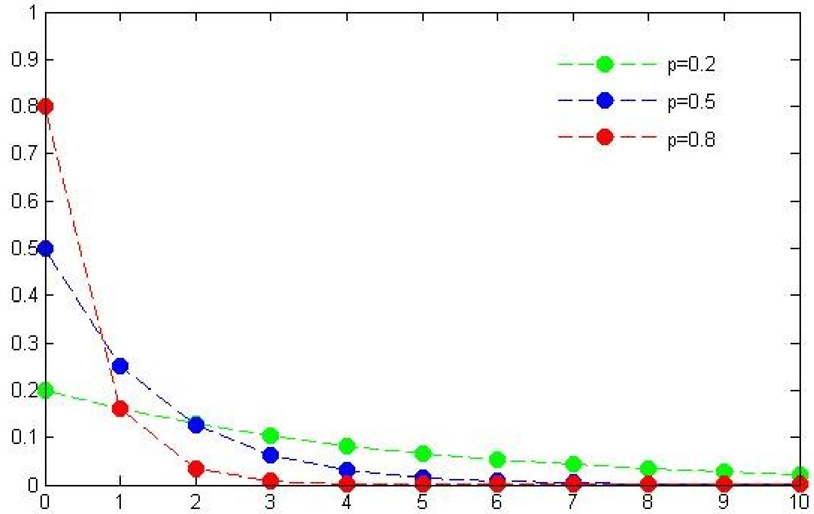
$$P_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}$$

6. Narysuj schematycznie rozkład dwumianowy P(k;n,p) dla zadanych wartości p i n.

Przykład:



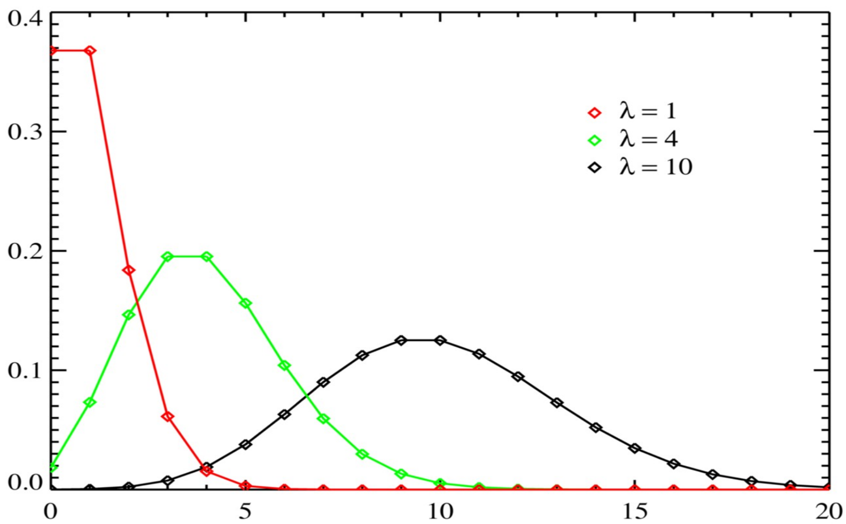
7. Narysuj schematycznie rozkład geometryczny dla zadanej wartości p.
Przykład:



8. Na czym polega własność „braku pamięci” rozkładu geometrycznego?

Zmienna losowa X o rozkładzie geometrycznym posiada własność „braku pamięci” : $\forall_{k,j}\in\{1,2,\ldots\}: P_X(X > k+j | X > j) = P(X>k)$ czyli wcześniejsze wyniki nie wpływają na następne.

9. Narysuj schematycznie rozkład Poissona dla zadanego parametru lambda.
Przykład:



10. Zdefiniuj funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu jednorodnego.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \, w \, przedziale \, x \in \langle a, b \rangle \\ 0 \, dla \, pozostalych \, x \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

11. Wymień trzy typy generatorów rozkładu jednorodnego.

- Metoda kongruencyjna – generator liniowy
- Uogólnione generatory Fibonacciego
- Generatory oparte na mnożeniu z przeniesieniem
- Generatory nieliniowe
- Generatory oparte na rejestrach przesuwnych

12. Na czym polega własność „braku pamięci” rozkładu wykładniczego?

$$\forall_{s,t} > 0 : P_X(X > t+s | X > t) = P(X > s)$$

13. Jaką nową cechę ma rozkład Weibulla w porównaniu do wykładniczego?

Rozkład Weibulla (prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia nie jest stałe w czasie) – wyprowadzenie z rozkładu dwumianowego

14. Zdefiniuj funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx = 1 \quad x \in R$$

15. Podaj znaczenie parametrów rozkładu normalnego. $\sigma^2 = var(X)$ $\mu = E(X)$

16. Zdefiniuj funkcję gęstości prawdopodobieństwa standardowego rozkładu normalnego.

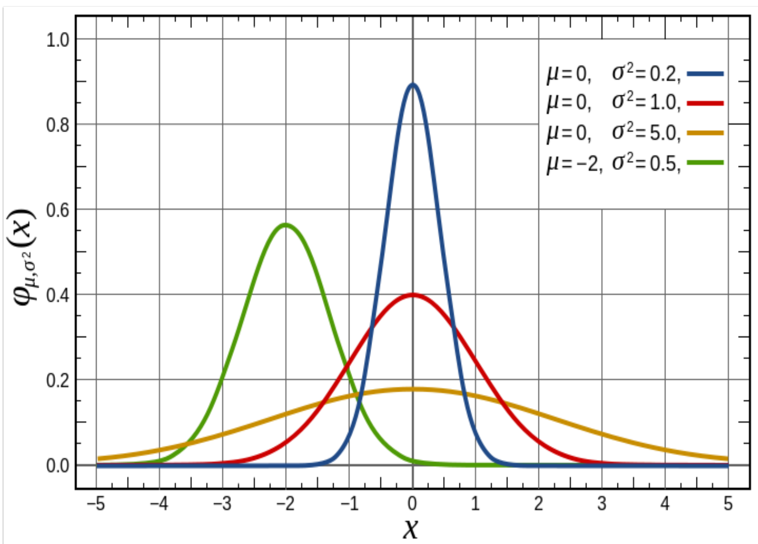
17. Opisz jak policzyć dystrybuantę rozkładu normalnego.

Korzystając z tablic rozkładu normalnego.

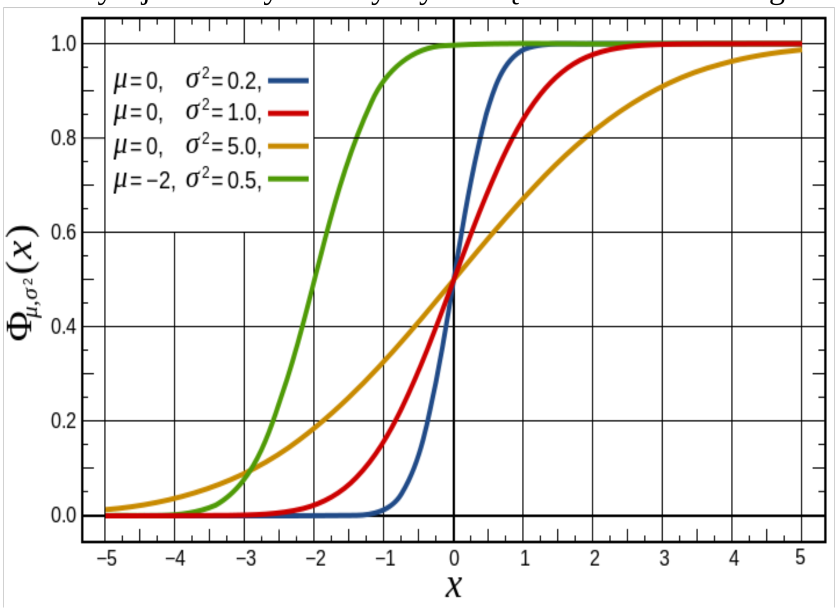
18. Na czym polega reguła „3 sigma” dla rozkładu normalnego?

19. Narysuj schematycznie rozkład Gaussa.

Przykład:



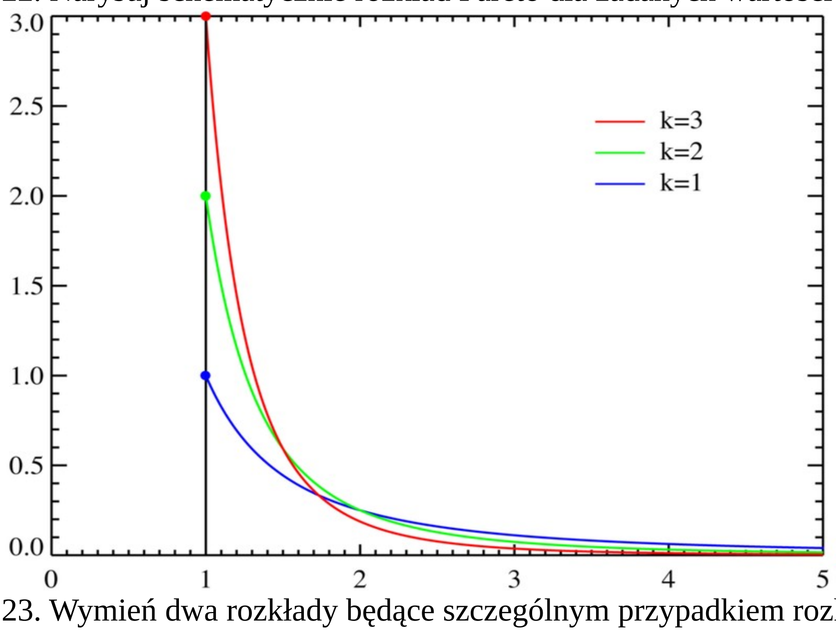
20. Narysuj schematycznie dystrybuantę rozkładu normalnego.



21. Na czym polega procedura standaryzacji rozkładu normalnego?

Standaryzacja dowolnego rozkładu pozwala przechodzić pomiędzy rozkładami normalnymi: Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład $N(\mu,\sigma^2)$ to zmienna losowa $Y=\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ ma rozkład N(0,1).

22. Narysuj schematycznie rozkład Pareto dla zadanych wartości parametrów.



23. Wymień dwa rozkłady będące szczególnym przypadkiem rozkładu gamma.
Poissona i Pareto (?).

24. Narysuj schematycznie rozkład t-Studenta.