Kraków, 25.11.2010

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 3 na 29.11.2010

1. Jaką ilość operacji arytmetycznych $(+, -, *, /)$ należy wykonać podczas odwracania pełnej macierzy $N \times N$
   - metodą Gaussa,
   - rozkładu LU,
   - rozkładu Choleskiego?

   Ile operacji należy wykonać przy tych metodach dla macierzy trójdiagonalnych?
   Ile operacji należy wykonać korzystając ze wzoru Schermana-Morrisa, jeśli macierz A jest macierzą trójdiagonalną?

N5 Napisać program rozwiązujący problem [N4] metodą rozkładu LU w języku niskopoziomowym (bez użycia bibliotek i gotowych programów). Proszę zoptymalizować algorytm dla macierzy trójdiagonalnych. Narysować rozwiązanie $x = nh, y = u_n$.

2. Wykonać rozkład QR metodą Grama-Schmidta macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Dla układu równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   startując z punktu $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ obliczyć trzy kolejne przybliżenia $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ rozwiązania za pomocą metody Jacobiego i Gaussa-Seidla.

N6 Układ z poprzedniego zadania rozwiązać metodą Gaussa-Seidla. Niech program pozwala na ustalenie żądanej dokładności rozwiązania.

4. *Metoda gradientów sprzężonych.* Niech macierz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $r_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $||r_1|| \neq 0$ i niech $p_1 = r_1$.
   Definiujemy następującą iterację:

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \\
r_{k+1} &= r_k - \alpha_k A p_k, \\
\beta_k &= \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}, \\
p_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_k p_k.
\end{aligned}
$$

Udowodnić, że dla każdych $i, j, i > j$, zachodzi

$$
\begin{aligned}
r_i^T r_j &= 0, \\
r_i^T p_j &= 0, \\
p_i^T A p_k &= 0.
\end{aligned}
$$

Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, a gdzie dodatnią określoność macierzy A?
Wskazówka Dowód przeprowadzić indukcyjnie. Jest prosty i lepiej go wykonać samodzielnie.

5. Dane jest równanie $Ax = b$, przy czym macierz A spełnia założenia z poprzedniego zadania. Niech x_1 będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania i niech $r_1 = Ax_1 - b$. W każdym kroku iteracji z poprzedniego zadania definiujemy $x_{k+1} = x_k - \alpha_k p_k$. Znaleźć związek pomiędzy x_k a r_k. Pokazać, że x_{N+1} jest ścisłym rozwiązaniem równania (w arytmetyce dokładnej).

dr Tomasz Romańczukiewicz