Kraków, 08.12.2010

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 5 na 13.12.2010

N13 Rozwiązać układ równań z zadania 3.3 metodą gradientów sprzężonych.

N14 Stosując metodę potęgową znaleźć wektory własne odpowiadające dwum największym wartościom własnych macierzy z zadania N8. Stosując odwrotną metodę potęgową znaleźć wektor własny dla najmniejszej wartości własnej.

1. Napisać w sposób jawny metodę Newtona dla układu równań z poprzednich zajęć (zad. N12).

2. Wyprowadzić wzór interpolacyjny Lagrange'a.

3. Wyprowadzić wyrażenie na błąd $E(x)$ interpolacji Lagrange'a.

4. Używając poniższej tablicy wartości funkcji obliczyć wartość $\sin(0.6)$ z wzoru interpolacyjnego Lagrange'a. Oszacować również błąd interpolacji i sprawdzić czy różnica pomiędzy prawdziwą i przybliżoną wartością $\sin(0.6)$ mieści się w granicach tego błędu.

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$\sin x$	0.389418	0.479426	0.644218	0.717356

Wskazówka: zadanie zrobione w domu pozwoli zaoszczędzić czas na ćwiczeniach.

5. *Wielomiany Chebysheva* definiujemy jako $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$. Pokazać, że

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

oraz:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

Znaleźć rozkład funkcji $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ jako szereg $f(x) = \sum_n c_n T_n(x)$.

N15 Zastosować wzór interpolacyjny Lagrange'a dla jednorodnie rozmieszczonych $N = 20$ i $N = 40$ punktów w przedziale $[-1, 1]$ dla funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 30\,x^2},$$
$$f_2(x) = \exp\left(-20\,x^2\right).$$

Narysować wykresy tych funkcji oraz ich interpolantów (również dla punktów z poza siatki interpolacji). Przeanalizować wyniki.
Zrobić to samo ale dla siatki

$$x_n = \cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Jaki z tego wniosek?

dr Tomasz Romańczukiewicz