Zad. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x & +y & & +t & -3u & = & 1 \\ 2x & & -z & & -2u & = & 1 \\ x & -y & -2z & +t & -2u & = & 1 \\ 2x & & +z & & +u & = & -1 \\ -3x & -y & +z & +2t & +2u & = & 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Macierz odpowiadająca powyższemu układowi równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Naszym zadaniem jest przekształcić tą macierz do postaci macierzy "trójkątnej górnej", tzn. uzyskać zera pod przekątną macierzy (wygodnie jest również uzyskać jedynki na przekątnej).
W tym celu możemy wykonywać następujące operacje na **wierszach** macierzy: mnożenie przez niezerową liczbę, dodawanie do danego wiersza kombinacji liniowych innych wierszy, zmiana kolejności wierszy.

W pierwszym kroku, za pomocą pierwszego wiersza zerujemy elementy pod pierwszym elementem przekątnej macierzy.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \\ (-2)\cdot[1] \\ (-1)\cdot[1] \\ (-2)\cdot[1] \\ 3\cdot[1] \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

W drugim kroku zerujemy elementy pod drugim elementem przekątnej (można też najpierw podzielić drugi wiersz przez (-2), ale wtedy otrzymamy ułamki i rachunki mogą się skomplikować).

$$\left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -7 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \\ (-1)\cdot[2] \\ (-1)\cdot[2] \\ 1\cdot[2] \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Postępując analogicznie dla trzeciego wiersza dostajemy:

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ (-3)\cdot[4]+4\cdot[5] \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 12 \end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy elementy zerowe pod przekątną.
Teraz wystarczy zauważyć, że ostatni wiersz odpowiada równaniu:
$-3u = 12$, czyli $u = -4$.
Przedostatni wiersz odpowiada równaniu: $4t - 3u = 0$. Wstawiając $u = -4$, dostajemy $t = -3$.
Trzeci wiersz odpowiada równaniu: $-z + 2t - 3y = 1$. Wstawiamy $u = -4$, $t = -3$ i dostajemy $z = 5$.

Podobnie otrzymujemy $y = -7$ i $x = -1$. Czyli rozwiązanie jest postaci: $x = -1,\ y = -7,\ z = 5,\ t = -3,\ u = -4$.
Czyż to nie jest proste? :)