Kraków, 18.11.2010

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 2 na 22.11.2010

1. Dokonać rozkładu LU poniższego układu równań liniowych i następnie rozwiązać je metodą eliminacji Gaussa

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

2. Obliczyć macierz odwrotną do A metodą Gaussa-Jordana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Udowodnić, że wskaźnik uwarunkowania dla zadania rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b, x = \phi(b) = A^{-1}b$ wynosi:

$$\text{cond} = ||A||\ ||A^{-1}||,$$

gdzie $||\cdot||$ jest normą zgodną z wektorową i multiplikatywną.

4. Skalowanie macierzy.

   (a) Mamy do rozwiązania układ: $Ax = b$. Przemnóżmy macierz A przez dwie dowolne macierze D_1, D_2 i rozwiążmy układ:

   $$D_1\, A\, D_2\, y = c.$$

   Jakie muszą być wektory y i c, żeby z rozwiązania tego układu można było uzyskać wektor x, czyli rozwiązanie układu $Ax = b$?

   (b) Mamy macierz

   $$A = \begin{bmatrix} 100 & 0.01 \\ 99 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

   Rozwiązać układ $Ax = b$ dla

   $$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1.01 \end{bmatrix}$$

   (Policzyć to na komputerze, nie ręcznie), jaka jest różnica pomiędzy obydwoma rozwiązaniami?

(c) Jaki jest wskaźnik uwarunkowania macierzy A w normie $||\cdot||_2$? (Policzyć to na komputerze).

(d) Przemnożyć A przez macierze:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{0.99} & 0 \\ 0 & 1/0.99 \end{bmatrix}, \; D_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.99} & 0 \\ 0 & 9900 \end{bmatrix}.$$

Jaki jest wskaźnik uwarunkowania macierzy $D_1 A D_2$?

5. Jaka jest złożoność rozkładu LU? Ile operacji wymaga rozkład LU macierzy trójdiagonalnej? Jak ekonomicznie zapisać taką macierz w pamięci komputera?

6. Wykonać rozkład macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

metodą Crouta.

7. Pokazać, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określona. Wykonać rozkład A metodą Cholesky'ego.

N4 Znaleźć rozwiązanie układu $(N+1) \times (N+1)$ równań o poniższej strukturze:

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2h^2 \\ -2h^2 \\ -2h^2 \\ \vdots \\ -2h^2 \\ -2h^2 \\ 1 \end{bmatrix} = b,$$

dla $N = 100$ oraz $h = 0.01$. W skrócie

$$A_{nm} = \begin{cases} \delta_{n,m-1} - 2\delta_{n,m} + \delta_{n,m+1} & \text{dla } \; 0 < n < N \\ \delta_{n,m} & \text{dla } \; n = 0, \; n = N \end{cases}$$

oraz

$$b_n = \begin{cases} -2h^2 & \text{dla } \; 0 < n < N \\ 0 & \text{dla } \; n = 0 \\ 1 & \text{dla } \; n = N \end{cases}$$

dr Tomasz Romańczukiewicz