WSTĘP DO METOD NUMERYCZNYCH, EGZAMIN, 14.06.2010

UJ, FAIS, rok 2009/2010, semestr letni

1. Wiedząc, że wektory $q_1 = (2, 1, 1)^T$, $q_2 = (1, -3, 1)^T$ oraz $a_3 = (1, 0, 0)^T$ są liniowo niezależne wyznaczyć za pomocą metody Grama-Schmidta wektor q_3 prostopadły do wektorów q_1 i q_2.

2. Podać postać Newtona wielomianu P stopnia 3 spełniającego warunki: $P(1) = 2$, $P'(1) = 4$, $P''(1) = 0$, $P(2) = 5$. Obliczyć $P(3)$.

3. Wyznaczyć przybliżone położenie minimum funkcji f wykonując jeden krok metody interpolacji parabolicznej Brenta dla danych $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$.

4. Korzystając z twierdzenia mówiącego, że jeśli metoda Φ spełnia warunki $\Phi(\xi) = \xi$ oraz $\Phi'(\xi) = 0$ to jest to metoda co najmniej rzędu drugiego, wykazać, że metoda Newtona szukania zer funkcji $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest metodą rzędu drugiego. Należy dodać odpowiednie założenia na temat funkcji f oraz jej zer.

5. Wykazać, że jeśli λ jest wartością własną macierzy $A^T A$ to $\|A\|_2 \geqslant \sqrt{\lambda}$, gdzie $\|\cdot\|_2$ jest normą macierzową indukowaną przez normę euklidesową $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

6. Obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ za pomocą metody Simpsona z krokiem $h = 0.25$. Obliczyć wartość dokładną całki oraz błąd względny wartości przybliżonej.

7. Rozważamy odwzorowanie $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ określone wzorem $f(x) = 1 - |1 - 2x|$. Odwzorowanie g jest n-krotnym złożeniem f, gdzie $n \geqslant 1$. Zakładając, że $g(x) \in (0, 1)$ obliczyć $|g'(x)|$ przy ustalonym n. Na tej podstawie oszacować od dołu wartość bezwzględną wskaźnika uwarunkowania zadania wyznaczenia $g(x)$ dla $n = 50$, $x > 0.25$, $g(x) \in (0, 1)$ oraz stwierdzić, czy to zadanie jest dobrze uwarunkowane.

8. Wyznaczyć $x = (x_1, x_2)^T$ tak, aby wyrażenie $(Ax - b)^T(Ax - b)$ przyjmowało wartość minimalną

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$