Przypisywanie prawdopodobieństwa zdarzeniom:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa $P(A) \equiv \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ to ilość równoprawdopodobnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A,

zaś $\overline{\overline{\Omega}}$ to ilość wszystkich zdarzeń elementarnych w przestrzeni Ω.

Kombinatoryka,

Przykład (kombinatorycznie i drzewkiem) - ćwiczenia

Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo geometryczne – miarą ilość zdarzeń elementarnych odpowiadających zdarzeniu A i przestrzeni zdarzeń Ω są pola (objętości) odpowiednich figur (brył) geometrycznych (np. wyznaczenie liczby π, igła Buffona).

Paradoks Bertranda – problem z wyborem przestrzeni Ω – w każdym przypadku jest inna) – są to różne sposoby losowania.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Sytuacja: A,B – to dwa zdarzenia w przestrzeni próbek Ω związanej z eksperymentem E, P(B)>0. W wyniku przeprowadzenia eksperymentu E stwierdzamy, że zaszło zdarzenie B.

Prawdopodobieństwo warunkowe to liczba

$$\boxed{P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0}$$

Powyższa definicja jest zgodna z definicją aksjomatyczną prawdopodobieństwa.

Odpowiada ona prawdopodobieństwu zdarzenia A w przestrzeni próbek ograniczonej do zdarzenia B.

Zgodność z aksjomatami

- Aksjomat I ($P(A) \geq 0$)

  $P(A|B) \geq 0$ gdyż $P(A \cap B) \geq 0 \wedge P(B) > 0$
- Aksjomat II ($P(\Omega)$=1), teraz *B* jest przestrzenią próbkowania

  $P(B|B) = 1$ gdyż $P(B|B) = \dfrac{P(B \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Aksjomat III (A_k rozłączne: $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$)

  $P((\bigcup_k A_k)|B) = \sum_k P(A_k|B)$ gdyż $P((\bigcup_k A_k)|B) =$

  $$= \frac{P((\bigcup_k A_k) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_k (A_k \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_k P(A_k \cap B)}{P(B)} =$$

  $$= \sum_k \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_k P(A_k|B)$$

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

- Każde prawdopodobieństwo jest warunkowe

  $P(A) = P(A|\Omega)$
- $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A|B) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$
- $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$
- $P(A|B) > P(A) \Rightarrow P(B|A) > P(B)$
- Nie ma zależności pomiędzy wartościami P(A) i P(A|B).
- Można budować bardziej skomplikowane relacje.

Partycja przestrzeni próbek

Zbiór zdarzeń B_k k=1,2,…,n tworzy partycję przestrzeni próbek Ω jeżeli:

I: $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \phi$

II: $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$

np. zdarzenie A i przeciwne do niego zdarzenie Ω\A tworzą partycję przestrzeni Ω.

Zał: zbiory $B_1,\ldots,B_n$ tworzą partycje przestrzeni $\Omega, \forall i : P(B_i) > 0$

a zdarzenie $A \subset \Omega$. Wtedy zachodzi **reguła całkowitego prawdopodobieństwa**:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Wzór Bayesa

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$ dla $P(B) > 0$

$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$ dla $P(A) > 0$

Łącznie otrzymujemy **wzór Bayesa**

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}}$$

Stosując powyższe dla $B = B_k$ tworzącego partycję przestrzeni Ω dostajemy

$$\boxed{P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}}$$

Wzór „łańcuchowy”

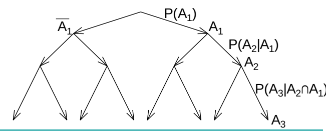
Zał. $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$

Wtedy zachodzi wzór:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times$$
$$\times \ldots \times P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

-dowód – iteracja definicji prawdopodobieństwa warunkowego

-uzasadnia metodę „drzewka”



Wzór Bayesa

Prawdopodobieństwo *a priori* – prawdopodobieństwo zdarzenia przed wprowadzeniem dodatkowej informacji

Prawdopodobieństwo *a posteriori* – prawdopodobieństwo zdarzenia po wprowadzeniu dodatkowej informacji

Przykłady:

I. Losowanie kul z urny

II. Test medyczny (ćwiczenia)