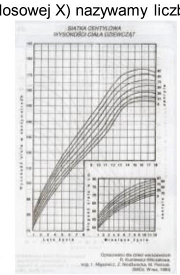
Odwracanie dystrybuanty jako metoda generowania liczb pseudolosowych

- Syt: dana funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$, chcemy uzyskać liczby pseudolosowe przez nią opisywane.

- Obliczamy dystrybuantę $F_X(x)$.
- Znajdujemy funkcję odwrotną do dystrybuanty $F^{-1}_X(x)$.
- Losujemy liczbę *y* z przedziału <0,1> używając „standardowego" (zaimplementowanego) generatora liczb pseudolosowych.
- Obliczmy $z=F^{-1}_X(y)$.
- Tak otrzymane liczby opisane są funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$

Globalny opis dystrybuanty i funkcji gęstości prawdopodobieństwa

- **Kwantylem rzędu p** (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p: $F_X(x_p)=p$ $(0\leq p\leq 1)$



W szczególności:
- **Mediana** to kwantyl rzędu ½
- **Kwartyle** to kwantyle
  rzędu ¼ (pierwszy kwartyl),
  rzędu ½ (drugi kwartyl),
  rzędu ¾ (trzeci kwartyl)
- **Percentyle** to kwantyle
  rzędu 0.01, 0.02, …, 0.99

- **Moda** – wartość najbardziej prawdopodobna czyli x: max{ $f_X(x)$ }

Wartość oczekiwana

- **Wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X)=\sum_k P_X(x_k)\,x_k \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,x\,dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

- Uwaga 1:
  E(X) jest średnią ważoną możliwych wartości zmiennej X z wagą daną przez $P_X(x)$ lub $f_X(x)$.
- Uwaga 2:
  Dla zmiennej typu mieszanego łączymy obie definicje.
- Uwaga 3:
  Spotyka się też warunkową wartość oczekiwaną, wtedy $P_X(x)\rightarrow P_X(x|A)$, $f_X(x)\rightarrow f_X(x|A)$.

Wartość oczekiwana - własności

- Operator E( ) jest liniowy: $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x)\right)=a_k\sum_{k=1}^{n}E(g_k(x))$

  a_k – stałe,
  $g_k(x)$ – funkcje o wartościach rzeczywistych

  Stąd (a,b – stałe):
  E(a)=a
  E(ax+b)=aE(x)+b
- Niech *Y* to nowa zmienna losowa i niech *Y=g(x)* wtedy

$$E(Y)=\sum_k P_X(x_k)\,g(x_k) \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,g(x)\,dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

Wariancja zmiennej losowej

- **Wariancją zmiennej losowej** nazywamy liczbę:

$$\boxed{var(X)\equiv\sigma_X^2\equiv\sigma^2(X)=E\left((X-E(X))^2\right)}$$

- Wariancja jest miarą rozrzutu zmiennej losowej wokół wartości średniej i jest nieujemna
- var(a)=0 dla a=const
- E(X-E(X)) nie jest przydatną wielkością, gdyż

$$E(X-E(X))=E(X)-E(E(X))=E(X)-E(X)=0$$

- **Odchylenie standardowe zmiennej losowej**

$$\sigma_X\equiv\sigma(X)=\sqrt{var(X)}$$

Wariancja zmiennej losowej - własności

- $\boxed{var(aX+b)=a^2\,var(X)}$

Dowód:

$$var(aX+b)=E\left((aX+b-E(aX+b))^2\right)=$$
$$=E\left((aX+b-aE(X)-b)^2\right)=E\left((aX-aE(X))^2\right)=$$
$$=E\left(a^2(X-E(X))^2\right)=a^2E\left((X-E(X))^2\right)=a^2var(X)$$

- $\boxed{var(X)=E(X^2)-(E(X))^2}$

Dowód:

$$var(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E\left(X^2-2XE(X)+(E(X))^2\right)=$$
$$=E(X^2)-2E(XE(X))+E\left((E(X))^2\right)=$$
$$=E(X^2)-2(E(X))^2+(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$$