1. (1p) Wykaż, że ortogonalna transformacja podobieństwa:

$$A' = Q^T A Q \qquad \text{gdzie} \qquad Q^T Q = \mathbb{I} \tag{1}$$

   (a) przekształca macierz symetryczną w symetryczną

   (b) przekształca macierz symetryczną i dodatnio określoną w macierz symetryczną i dodatnio określoną

   (c) zachowuje widmo macierzy

2. (1p) Korzystając z powyższych własności, sprawdź, że jeśli ortogonalna transformacja podobieństwa Q przekształca macierz A w macierz trójkątną $T = Q^T A Q$, to wartości własne A muszą znaleźć się na diagonali T (podpowiedź: porównaj wyznaczniki zagadnienia własnego macierzy T i A).

3. (4p) Wykazać, że dla dowolnej macierzy A istnieje unitarna transformacja, taka że:

$$Q^\dagger A Q = T \tag{2}$$

   gdzie T jest macierzą trójkątną, w której wartości własne macierzy A znajdują się na diagonali. *Uwagi*: Dowód ten można znaleźć np. w A. Ralston *Wstęp do analizy numerycznej*.

4. (6p) Dla dowolnej macierzy A można wykonać rozkład QR, tzn. $A = QR$, gdzie $Q^\dagger Q = \mathbf{I}$, a R jest macierzą trójkątną górną. Zbudujmy ciąg rozkładów $Q_n R_n$ tworzonych z macierzy $A_n = R_{n-1} Q_{n-1}$. Pokazać, że transformacja $P_\infty = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n$ pozwala znaleźć wartości własne macierzy A.

   Uwagi: W podręczniku Ralstona można znaleźć dowód dla analogicznego algorytmu LR, który należy zaadaptować na potrzeby tego zadania.

5. (1p) Znaleźć rozkład *QR* macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

6. (3p) Niech $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$: $\|\mathbf{e}\| = 1$ i niech $\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$. Znaleźć wartości i wektory własne $\mathbf{P}$. Dlaczego transformacja ta jest istotna dla numerycznego poszukiwania wartości własnych macierzy?

7. (2p) Wyjaśnij działanie metody potęgowej i metody potęgowej odwrotnej, jako procedur znajdowania ekstremalnych wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych.

8N. (2p) Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Przy użyciu metody potęgowej znaleźć jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

9N. (3p) Stosując dowolny algorytm oparty o zadanie 3 i korzystający z upraszczania postaci macierzy (np. diagonalizacja QR z uprzednią transforamcją Hausholder'a), wyznacz wszystkie wartości własne i wektory własne macierzy z poprzedniego zadania.

10N. (1p) Konstruując odpowiednią macierz symetryczną i rzeczywistą wyznacz wartość i unormowwane wektory własne macierzy hermitowskiej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

11. (1p) *Analitycznie* wyznacz wartości własne dla macierzy z poprzedniego zadania.

12N. (2p) Dana jest macierz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Znajdź jej przybliżony wektor własny do wartości własnej $\lambda = 0.38197$

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

MM i PFG