Niezależność zdarzeń

- Dwa zdarzenia A i B (P(A)>0 i P(B)>0) są **niezależne** gdy:

$$\boxed{P(A|B)=P(A) \quad \wedge \quad P(B|A)=P(B)}$$

- Warunek wystarczający i konieczny niezależności:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Niezależność zdarzeń

- Dowód ⇨

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \Big/ \cdot P(B)$$

$$P(A|B)P(B)=P(A\cap B)$$

$$P(A)P(B)=P(A\cap B)$$

- Dowód ⇦

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A|B)P(B)=P(A)P(B) \quad /:P(B)$$

$$P(A|B)=P(A)$$

- Analogicznie dla drugiej równości *P(B|A)=P(B)*

Niezależność zdarzeń

- Tw. Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne to również niezależne są zdarzenia $\bar{A}\wedge B,\ A\wedge\bar{B},\ \bar{A}\wedge\bar{B}$

Dowód:

$$P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)=1-P(A)=P(\bar{A})$$

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}|B)P(B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(\bar{A})P(B)}{P(\bar{A})}=P(B)$$

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(\bar{B}|A)P(A)}{P(\bar{B})}=\frac{(1-P(B|A))P(A)}{P(\bar{B})}=\frac{(1-P(B))P(A)}{P(\bar{B})}=P(A)$$

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=\frac{(1-P(B|\bar{A}))P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=\frac{(1-P(B))P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=P(\bar{A})$$

Niezależność zdarzeń

- Zdarzenia niezależne nie muszą być rozłączne

  Tw. Jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne i niezależne to P(A)=0 lub P(B)=0 lub P(A)=P(B)=0

  Dowód:

  $P(A\cap B)=P(\phi)=0$ (z rozłączności)

  $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ (z niezależności)

  czyli $P(A)P(B)=0$

- Przykład: losowanie liczb całkowitych
- Nie należy mylić **niezależności** zdarzeń z **rozłącznością** zdarzeń!

Niezależność zdarzeń

- Warunek wystarczający i konieczny **niezależności warunkowej**: $P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)$
- Nie należy mylić niezależności zdarzeń z niezależnością warunkową zdarzeń!

- **Zdarzenia** $A_1,A_2,\ldots,A_n$ **są parami niezależne** gdy:

  $$\forall i\neq j: P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$$

  ((n-1)n/2 warunków)
- **Zdarzenia** $A_1,A_2,\ldots,A_n$ **są globalnie niezależne** gdy:

$$\forall k\leq n: P(A_{k1}\cap A_{k2}\cap\ldots\cap A_{kk})=P(A_{k1})P(A_{k2})\ldots P(A_{kk})$$

gdzie A_{kj} to dowolne, różne zdarzenia spośród zdarzeń $A_1,\ldots,A_n$.

Zmienne losowe

Syt. Eksperyment losowy E i związana z nim przestrzeń próbek S, zbudowana ze zdarzeń elementarnych s.

- **Zmienną losową** nazywamy funkcję X, która każdemu zdarzeniu s∈S przyporządkowuje liczbę rzeczywistą X(s)=x

$$\boxed{\forall s\in S \xrightarrow{X(s)} x\in S_X}$$

- X – nazwa zmiennej losowej (funkcji)
- x – wartości zmiennej losowej X
- S_X – zbiór wartości zmiennej losowej X

Np. rzut kostką; X=liczba wyrzuconych oczek; S_X={1,2,3,4,5,6}
Np. rzut kostką; X=kwadrat liczby wyrzuconych oczek; S_X={1,4,9,16,25,36}
Np. rzut kostką; X=odległość od „4”; S_X={3,2,1,0,1,2}={0,1,2,3}
Np. rzut kostką; X=liczba rzutów aż wypadnie sześć oczek; S_X={1,2,3,…}

Zmienne losowe

- Dla jednego eksperymentu można zdefiniować wiele zmiennych losowych
- Zbiór wartości S_X ma nie więcej elementów niż przestrzeń S
- Jeżeli S jest dyskretna to S_X jest dyskretny
- Jeżeli S jest ciągłą przestrzenią to S_X może być ciągły lub dyskretny

Np. losujemy liczbę a z przedziału <0,10); $X=a^2$; S_X=<0,100)
Np. losujemy liczbę a z przedziału <0,10); X=część całkowita a; $S_X=\{0,1,2,\ldots,9\}$

Typy zmiennych losowych
- **Dyskretna zmienna losowa** – zmienna, która przyjmuje co najwyżej przeliczalnie nieskończoną liczbę wartości
- **Ciągła zmienna losowa** - zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości
- **Mieszana zmienna losowa** - zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości, a niektóre spośród jej wartości są wielkościami dyskretnymi. Jest zdefiniowana jednocześnie na dyskretnym zbiorze zdarzeń (skończonym lub przeliczalnie nieskończonym) i ciągłym zbiorze zdarzeń (nieprzeliczalnie nieskończonym)

RPiS 2013/2014 7

Zmienne losowe

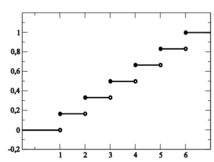
Zdarzeniem ze względu na S_X nazywamy podzbiór S_X.
- Zdarzenie $A\in S$ i zbiór wartości $A_X\in S_X$ są równoważne (ekwiwalentne) gdy
$$\boxed{\begin{array}{l}\forall s\in A: X(s)\in A_X\\ \forall s_X\in A_X:\exists s\in S: X(s)\in A_X\end{array}}$$
- Inaczej mówiąc zdarzenie A i zdarzenie (ze względu na S_X) A_X są równoważne, wówczas $P(A)=P(A_X)$
- Czyli **zamiast operować na zdarzeniach możemy operować na zbiorach wartości w przestrzeni S_X**

Przykład: Eksperyment: rzucamy trzy razy uczciwą monetą
S={OOO,OOR,ORO,ORR,ROO,RRO,ROR,RRR}, zdarzenia elementarne równoprawdopodobne
Zdarzenie A: wypadła parzysta liczba orłów
Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: {OOR,ORO,ROO,RRR}
P(A)=4/8=1/2
Zmienna losowa X – liczba orłów w trzech rzutach
Zbiór wartości X: S_X={0,1,2,3}, P(X)=(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)
Zdarzenie ze względu na S_X: A_X – liczba orłów w trzech rzutach jest parzysta: {0,2}
$P(A_X)$=1/8+3/8=1/2
Czyli zdarzenie „wypadła parzysta liczba orłów" jest równoważne w tym eksperymencie zdarzeniu „liczba orłów wynosiła 0 lub 2"

RPiS 2013/2014 8

Dystrybuanta

- **Dystrybuantą** zmiennej losowej X nazywamy funkcję dającą prawdopodobieństwo otrzymania wartości zmiennej losowej mniejszej bądź równej od danej wartości x: $\boxed{F_X(x)=P(X\le x)}$
- Przykład:
Dystrybuanta
w rzucie kostką



RPiS 2013/2014 9

Dystrybuanta - własności

- $0\le F_X(x)\le 1$ (gdyż $F_X(x)$ jest sumą prawdopodobieństw)
- $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x)=1$ (gdyż zdarzenie x≤+∞ jest pewne)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ (gdyż zdarzenie poniżej min{x} jest niemożliwe)
- $F_X(x)$ jest niemalejąca tzn. $x_1<x_2\Rightarrow F_x(x_1)\le F_x(x_2)$ gdyż zdarzenie $\{X\le x_1\}\subset\{X\le x_2\}$
- $F_X(x)$ jest ciągła prawostronnie $\lim\limits_{\delta\to 0^+}(F_X(x+\delta)-F_X(x))=0$
- $F_X(x)$ jest ciągła dla ciągłych zmiennych losowych
- $F_X(x)$ jest bezwymiarowa

RPiS 2013/2014 10

Związek dystrybuanty z prawdopodobieństwem

- Tw. $\boxed{P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)}$
- Dow:

rozłączne

Zdarzenie $\{X\le b\}\equiv\{X\le a\}\cup\{a<X\le b\}\qquad /P(\,)$
$$P(\{X\le b\})=P(\{X\le a\})+P(\{a<X\le b\})$$
$$F_X(b)=F_X(a)+P(\{a<X\le b\})$$
$$P(\{a<X\le b\})=F_X(b)-F_X(a)$$

RPiS 2013/2014 11

Związek dystrybuanty z prawdopodobieństwem - wnioski

- Wniosek 1
Weźmy $a=x-\delta,\quad b=x$
$$P(x-\delta<X\le x)=F_X(x)-F_X(x-\delta)\qquad \Big/\lim_{\delta\to 0}$$
$$P(X=x)=F_X(x)-\lim_{\delta\to 0}F_X(x-\delta)$$
ale dla ciągłej zmiennej losowej $\lim\limits_{\delta\to 0}F_X(x+\delta)=F_X(x)$
zatem $\forall x:\ P(X=x)=F_X(x)-F_X(x)=0$
- Wniosek 2 (z Wniosku 1)
$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b)$$
(związek z prawdopodobieństwem geometrycznym)

RPiS 2013/2014 12

Dystrybuanta warunkowa

Syt:

X-zmienna losowa,

A – zdarzenie takie, że P(A)>0

- **Dystrybuantą warunkową** zmiennej losowej X pod warunkiem, że zaszło zdarzenie A nazywamy funkcję $$F_X(x\,|\,A)=\frac{P(\{X\le x\}\cap A)}{P(A)}$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

- Syt:

  X – **dyskretna** zmienna losowa

  S_X – odpowiedni zbiór wartości zmiennej X
- **Funkcją rozkładu prawdopodobieństwa** $P_X(x_k)$ nazywamy funkcję przyporządkowującą wartościom zmiennej losowej prawdopodobieństwo jej wystąpienia

  $$\forall k:\ P_X(x_k)=P(X=x_k)$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa - własności

- $P_X(x_k)\ge 0$ (własność prawdopodobieństwa)
- $\sum_k P_X(x_k)=1$ gdyż $P(S_X)=P(S)=1$
- dla $x_1<x_2<\ldots$ oraz $k>1$ mamy

  $$P_X(x_k)=F_X(x_k)-F_X(x_{k-1})$$
- $P_X(x_k)$ jest bezwymiarowe

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

- Syt:

  X – **ciągła** zmienna losowa o różniczkowalnej dystrybuancie

  S_X – odpowiedni zbiór wartości zmiennej X
- **Funkcją gęstości prawdopodobieństwa** $f_X(x)$ nazywamy funkcję $$\boxed{f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)}$$

$$P(x<X\le x+\varepsilon)=F_X(x+\varepsilon)-F_X(x)=$$
$$=\frac{F_X(x+\varepsilon)-F_X(x)}{\varepsilon}\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{lim} \frac{dF_X(x)}{dx}\varepsilon$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa - własności

- $f_X(x)\ge 0$
- $P(x<X\le x+dx)=P(x\le X<x+dx)=\ldots=f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{d}{dt}F_X(t)dt=F_X(t)\big|_{-\infty}^{x}=F_X(x)-0=F_X(x)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt=F_X(t)\big|_{-\infty}^{+\infty}=1-0=1$
- $P(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)=\int_a^b f_X(t)dt$
- $[\,f_X(t)\,]=\frac{1}{[x]}$ (wymiar)

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa własności

- Uwaga 1:

  Jeżeli zmienna losowa X przybiera wartości tylko z pewnego obszaru to poza tym obszarem definiujemy $f_X(x)=0$
- Uwaga 2:

  Zarówno funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jak i funkcja gęstości prawdopodobieństwa muszą być znormalizowane, gdy tak nie jest należy przeprowadzić normalizację $f_X(x)\to N\cdot f_X(x)$
- **Warunkową funkcją gęstości prawdopodobieństwa** nazywamy funkcję

  $$f_X(x\,|\,A)=\frac{d}{dx}F_X(x\,|\,A)$$