ZESTAW 1

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Niech liczby $y_1 = 0.9863$ i $y_2 = 0.0028$ będą poprawnie zaokrąglonymi przybliżeniami odpowiednio liczb x_1 i x_2. Znaleźć maksimum różnicy między obliczonymi i dokładnymi wartościami $1/y_1$ i $1/y_2$.
2. Załóżmy, że danych jest n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie a_i jest poprawnie zaokrąglone do d_i cyfr po kropce. Chcemy obliczyć sumę tych liczb, zachowując w wyniku $d = \min_i d_i$ cyfr po kropce. Czy istotne jest czy najpierw zaokrąglimy wszystkie liczby do d cyfr po kropce a później dodamy, czy też najpierw dodamy, a później wynik zaokrąglimy?
3. Niech liczby x i y, mniejsze co do modułu od 1, będą poprawnie zaokrąglonymi odpowiednio do $2d$ i d cyfr dziesiętnych po kropce. Załóżmy, że $|x| < |y|$ i że chcemy obliczyć x/y i uzyskać d-cyfrowy iloraz. Pokazać, że lepiej jest najpierw zaokrąglić x do d cyfr, a następnie wykonać dzielenie. Czy wynik zmieniłby się, gdyby $|x| > |y|$?
4. Wyjaśnij dlaczego odejmowanie dwóch liczb a i b ($a \approx b$) może prowadzić do bardzo dużego błędu? Czy takie samo zagrożenie występuje w przypadku dodawania tych liczb?
5. Reprezentacją binarną liczby $x \in [0, 1]$ nazywamy szereg

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}, \tag{1}$$

gdzie $\forall n : \alpha_n = 1$ lub $\alpha_n = 0$. Znaleźć reprezentacje binarne liczby

(a) $\frac{1}{10}$,

(b) $\frac{1}{3}$.

6N. Dany jest generator liczb pseudolosowych

$$x_{n+1} = 7x_n \mod 1,$$

(w celu znalezienia x_{n+1} mnożymy x_n przez 7 i zachowujemy tylko część ułamkową wyniku). Startując z $x_0 = 0.16336377$ podać x_{2010} z dokładnością do ośmiu cyfr dziesiętnych (proszę to policzyć!).

7. Rozwiązać dwa poniższe układy równań

(a)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 6y & = & 8 \\ 2x & + & 6.00001y & = & 8.00001 \end{array} \right. ,$$

(b)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 6y & = & 8 \\ 2x & + & 5.99999y & = & 8.00002 \end{array} \right. .$$

Porównać rzędy wielkości różnicy współczynników i rozwiązań tych układów. Co jest przyczyną takiego stanu rzeczy?

8N. Sporządzić i porównać wykresy następujących funkcji

(a) $f_1(x) = -1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$,

(b) $f_2(x) = (x - 1)^5$.

Porównania dokonać dla $x \in [0, 2]$ oraz $x \in [1 - 10^{-3}, 1 + 10^{-3}]$. Jaki jest związek zasadniczego twierdzenia algebry z zaobserwowanymi wynikami?

9. Rozpatrzmy następujący kod

```c
#include <stdio.h>
#define N 2010

int main(void)
{
  float x;
  unsigned int i;

  x = 0.0;
  for(i = 1; i <= N; i++)
    x = x + 1/(i*i);
  printf("Suma wynosi %g\n", x);
  return(0);
}
```

Czy uzyskany wynik jest prawidłowy?

10N. Obliczyć

(a) $10 * (1.2 - 1) - 2$,

(b) $5.2 - (5 + 0.2)$ oraz $(5.2 - 5) - 0.2$,

(c) wartości $n!$ dla kolejnych liczb naturalnych n używając typu całkowitoliczbowego,

(d) wartości $n!$ dla kolejnych liczb naturalnych n używając typu zmiennoprzecinkowego pojedynczej i podwójnej precyzji.

11N. Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Lagrange'a obliczyć wartości funkcji $\exp(x)$ dla róznych wartości argumentu x i ustalonej dokładności ε, np. $\varepsilon = 10^{-6}$ lub mniejszej. Sporządzić wykres liczby wyrazów rozwinięcia N jako fukcję x.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/