1. Obowiązują nierozwiązane zadania z poprzednich zestawów.

2. Znajdź krotności wszystkich miejsc zerowych funkcji
$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \sinh^3 x\,. \tag{1}$$

3. Opracuj algorytm poszukiwania rozwiązań nieliniowych równań algebraicznych analogiczny do metody siecznych, ale oparty o interpolację odwrotną na trzech ostatnich punktach monotonicznych.

4N. Zastosuj algorytm siecznych i algorytm oprcowany w poprzednim zadaniu do znalezienia miejsca zerowego (1), startując, odpowiednio, z dwu i trzech losowych punktów z przedziału $(0, 1)$. Punkty początkowe dla metody siecznych mają być dwoma z trzech punktów początkowych dla algorytmu opartego o iterację odwrotną. Wyznacz miejsce zerowe z dokładnością do 10^{-8}. Powtórz zadanie dla kilku(nastu) różnych zestawów punktów początkowcyh. Porównaj wyniki.

5. Niech $z^\star$ będzie k-krotnym miejscem zerowym funkcji $f(z)$. Udowodnij, że metoda Newtona jest zbieżna do $z^\star$ liniowo.

6. Niech $a \in \mathbb{R}\colon a > 0$. Bez posługiwania się pojęciem pochodnej udowodnij, że iteracja
$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right) \tag{2}$$
jest zbieżna do $\sqrt{a}$ dla wszystkich zespolonych punktów początkowych o dodatniej części rzeczywistej oraz do $-\sqrt{a}$ dla wszystkich zespolonych punktów początkowych o ujemnej części rzeczywistej.

7. Skonstruuj wielomian, dla którego metoda Newtona ma dwucykl.
Wskazówki:

   (a) Metoda Newtona ma postać odwzorowania $z_{n+1} = g(z_n)$, gdzie
   $$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \tag{3}$$
   Dwucykl składa się z dwóch punktów, $\{z_1^\star, z_2^\star\}$, o tej własności, że $g(z_1^\star) = z_2^\star$, $g(z_2^\star) = z_1^\star$. Każdy z punktów dwucyklu jest punktem stałym dwukrotnego złożenia odwzorowania Newtona, $z_1^\star = g(g(z_1^\star))$, który nie jest jednocześnie punktem stałym samego odwzorowania Newtona, $z_1^\star \neq g(z_1^\star)$ (dlaczego?) i analogicznie dla $z_2^\star$.

   (b) Skorzystaj z interpolacji Hermite'a.

8^*. Niech $z_1^\star$ będzie elementem dwucyklu w metodzie Newtona. Przy założeniu, że $|\varepsilon| \ll 1$, oblicz $g(g(z_1^\star + \varepsilon)) = z_1^\star + b \cdot \varepsilon$. Liczbę b nazywamy współczynnikiem wzmocnienia. Jeżeli $|b| < 1$, dwucykl $\{z_1^\star, z_2^\star\}$ nazywamy *stabilnym.*
Czy da się tak dobrać swobodne parametry wielomianu skonstruowanego w zadaniu 7, aby dwucykl był stabilny? Jaką najmniejszą wartość b można uzyskać?

9N. Przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej baseny atrakcji miejsc zerowych jakiegoś wielomianu skonstruowanego w zadaniu 7.

10N. Znajdź granice basenów atrakcji w metodzie Halley'a zastosowanej do tego samego wielomianu, którego użyłeś w poprzednim zadaniu.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

PFG