ZESTAW 8

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.
2. Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Jaki jest związek pomiędzy formą kwadratową

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c \tag{1}$$

a równaniem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

Dlaczego wymagana jest dodatnia określoność macierzy $\mathbf{A}$?

3. Przypuśćmy, że wykonano $N = 5$ pomiarów pewnej wielkości y, odpowiadających różnym wartościom zmiennej niezależnej x.

x	1	2.5	2.9	3.8	4.2
y	3.3	7.3	9.1	11.3	13.1

Do tych pomiarów chcemy dopasować metodą najmniejszych kwadratów zależność teoretyczną

$$y = Ax + B. \tag{3}$$

(a) Znajdź wzory na współczynniki A i B oraz ich błędy

(b) Oblicz wartości współczynników, ich błędy oraz sporządź wykres przedstawiający punkty pomiarowe oraz dopasowaną linię prostą.

4. Przypuśćmy, że wykonano N pomiarów pewnej wielkości y, odpowiadających N różnym wartościom zmiennej niezależnej x. Pomiary są nieskorelowane i obarczone błędem σ_i — dane są zatem trzy ciągi $\{x_i\}_{i=1}^N$ oraz $\{y_i\}_{i=1}^N$ i $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$. Zakładamy, że zmienna niezależna jest znana z tak dużą dokładnością, że możemy traktować ją jako bezbłędną. Do tych pomiarów chcemy dopasować metodą najmniejszych kwadratów zależność teoretyczną, daną w postaci wielomianu stopnia M:

$$y_{\mathrm{teor}}(x) = \sum_{l=0}^{M} a_l x^l. \tag{4}$$

Wyprowadzić (dokładny) wzór na współczynniki $\{a_l\}_{l=0}^M$. Czy dopasowywana zależność musi być wielomianem? W jakich przypadkach można znaleźć dokładne wartości współczynników $\{a_l\}_{l=0}^M$? Jak obliczyć błędy znalezionych współczynników?

5N. Metodą najmniejszych kwadratów dopasować wielomian 3-go stopnia

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \tag{5}$$

do danych znajdujących się w pliku

`http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/wielomian.dat`

Dane są w postaci trzech kolumn: x_i, y_i, σ_i dla $i = 1, 2, ..., 30$. Ile wynoszą wartości współczynników a_0, a_1, a_2, a_3 oraz ich błędy?

6N. Dany jest pewien problem różniczkowy:

$$\ddot{u} + \lambda e^{u+1} = 0\,, \tag{6a}$$
$$u(0) = u(1) = 0\,, \tag{6b}$$

gdzie $\lambda \geqslant 0$.

(a) Pokazać, że rozwiązanie analityczne ma postać

$$u(t) = -2\ln\left\{\frac{\cosh\left[(t-1/2)\theta/2\right]}{\cosh(\theta/4)}\right\}. \tag{7}$$

(b) Znajdź maksymalną wartość λ, dla której rozwiązanie postaci (7) istnieje.

(c) Dla pewnego λ mniejszego od wyznaczonej powyżej wartości maksymalnej (np dla $\lambda = 1$) wyznacz <u>wszystkie</u> wartości parametru θ i sporządź wykresy funkcji (7) w przedziale $[0, 1]$.

7N. Rozwiąż układ równań

$$4x^2 + y^2 = 2 \tag{8a}$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \tag{8b}$$

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/