1. Podaj nierówność Czebyszewa-Bienayme (założenia i teza).

Założenie: wariancja $\sigma^2 X$ zmiennej losowej X musi być skończona

Teza: $P(\ |X - E(X)| \geq \varepsilon\ )\ \leq\ \frac{\sigma^2 X}{\varepsilon^2}$

2. Podaj słabe prawo wielkich liczb Bernoulliego.

$$\forall \varepsilon > 0\ \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{Sn}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

3. Podaj mocne prawo wielkich liczb Bernoulliego.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0: \quad P\left(\lim_{n \to \infty}\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1} \qquad \boxed{P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = p\right) = 1}$$

4. Podaj mocne prawo wielkich liczb Kołomogorowa.

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = E(X_1)\right) = 1$$

5. Podaj wniosek płynący z prawa wielkich liczb Kołomogorowa dotyczący interpretacji wartości oczekiwanej.

E(f(x)/g(x))=1/n * sum{i from 1 to n} (f(x_i)/g(x_i)) przy założeniu że całka{od a do b} g(x)dx=1

6. Na czym polega całkowanie metodą Monte Carlo?

Dla danej funkcji f(x), której całkę oznaczoną chcemy policzyć w przedziale całkowania (xp, xk) wyznaczamu prostokąt obejmujący pole pod wykresem tej funkcji o wysokości h i długości podstawy (xk-xp). W dalszej kolejności losujemy n punktów i zliczamy ten punkty nw, które wpadają w pole pod wykresem funkcji. Stosujemy tą metodę gdy ważniejsza od dokładności jest szybkość obliczeń.

7. Podaj centralne twierdzenie graniczne.

Jeśli X_i - niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie takiej samej wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ^2 to zmienna l. w postaci $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ zbiega wg. rozkładu do standardowego rozkładu normalnego gdy $n \to \infty$

8. Co to jest n-wymiarowy wektor losowy?

Jest to funkcja, która każdemu elementowi s należącemu do zbioru S przyporządkowuje wektor n liczb rzeczywistych (X1(s), X2(s), …, Xn(s)) (n zmiennych losowych)

9. Co to jest łączny rozkład prawdopodobieństwa (przypadek dyskretny, n=2)?

$$\forall i, j: P_{x,y}(x_i, y_j) = P\left[\{X = x_i\} \wedge \{Y = y_j\}\right] = P[X = x_i, Y = y_j]$$

10. Co to jest łączny rozkład prawdopodobieństwa (przypadek ciągły, n=2)?

P(A)=całka całka(po obszarze A) f_{x,y}(x,y)dxdy, jest to odwzorowanie takie że każdym X i Y (lub X1,X2,X3..Xn dla n>2) przyporządkowuje liczbę rzeczywistą.

11. Co to jest łączna dystrybuanta (przypadek dyskretny n=2)?

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq X} \sum_{y_j \leq Y} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

12. Co to jest łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (przypadek ciągły, n=2)?

$$f_{X,Y}(x,y) = P\,[\,x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy]$$

13. Co to jest łączna dystrybuanta (przypadek ciągły, n=2)?

$$F(x,y) = P\,(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(\tilde{x}, \tilde{y})\,dx\,dy$$

14. Podaj warunek normalizacji łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa (przypadek ciągły, n=2)?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\,dx\,dy = 1$$

15. Co to jest brzegowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa (przypadek ciągły, n=2)?

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,dy = 1$$

16. Podaj warunek jaki spełnia łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (n=2) dla zmiennych niezależnych.

$$f\,(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

17. Podaj wyrażenie na łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennych V=V(X,Y) i W=W(X,Y) znając łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennych X i Y.

Twierdzenie:

$$\begin{cases} V = g_1(X,Y) \\ W = g_2(X,Y) \end{cases}$$

$\forall x, y$: $g_1(x,y)$ i $g_2(x,y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe

$$jac\, J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Teza:

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(x,y) * |\, J(x,y)\, |^{-1}$$

18. Podaj definicję kowariancji zmiennych X i Y jeżeli znamy łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla zmiennych X i Y.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right) * \left(Y - E(Y)\right) \right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right) f_{X,Y}(x,y)$$

19. Co to jest korelacja zmiennych losowych X i Y?

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{E\left[\left(x - \mu_x\right) * \left(y - \mu_y\right)\right]}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

20. Co to jest współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y?

Jest to miara współzależności X i Y.

21. Wyraź kowariancję zmiennych X i Y przez ich korelację i odpowiednie wartości oczekiwane.

$$cov(X,Y) = corr(X,Y)\sigma x \sigma y = corr(X,Y)[E(x^2) - E^2(x)][E(y^2) - E^2(y)]$$

22. Kiedy wartość współczynnika korelacji zmiennych X i Y wynosi 1 (lub -1) ?

Gdy zmienne X i Y są zależne.

23. Jak zbudowana jest macierz kowariancji?

$$\mathrm{cov} = \begin{vmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cor}(x_2,x_1) & \cdots & \mathrm{cor}(x_n,x_1) \\ \mathrm{cor}(x_1,x_2) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cor}(x_n,x_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cor}(x_1,x_n) & \mathrm{cor}(x_2,x_n) & \cdots & \mathrm{var}(x_2) \end{vmatrix}$$