1. Nierozwiązane zadnai z poprzedniego zestawu (można je wciąż deklarować). Jak najefektywniej użyć wzoru Shermana-Morrisona do rozwiązania zadnia 12N?

2. (3p) *Metoda gradientów sprzężonych.* Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $||\mathbf{r}_1|| \neq 0$ i niech $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Definiujemy następującą iterację:

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T\mathbf{A}\mathbf{p}_k}\,, \tag{1a}$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k\,, \tag{1b}$$

$$\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T\mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}\,, \tag{1c}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k\,. \tag{1d}$$

Udowodnić, że dla każdych i, j, $i > j$, zachodzi

$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_j = 0\,, \tag{2a}$$

$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{p}_j = 0\,, \tag{2b}$$

$$\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j = 0\,. \tag{2c}$$

Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, gdzie zaś dodatnią określoność macierzy $\mathbf{A}$? Podpunkty można zgłaszać osobno.

Wskazówka: Dowód przeprowadzić indukcyjnie.

3. (2p) Dane jest równanie liniowe

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3}$$

przy czym macierz $\mathbf{A}$ spełnia założenia poprzedniego zadania. Niech $\mathbf{x}_1$ będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania (3) i niech $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}$. W każdym kroku iteracji (1) definiujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k\mathbf{p}_k\,. \tag{4}$$

Znaleźć związek pomiędzy $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{r}_k$. Pokazać, że $\mathbf{x}_{N+1}$ jest ścisłym rozwiązaniem równania (3) (w arytmetyce dokładnej).

4. (1p) Dana jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ o następującej strukturze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Jest to macierz rzadka. Jaka będzie szerokość jej czynnika Cholesky'ego? Które operacje w metodzie gradientów sprzężonych i metodzie Gaussa-Seidela mogą być zoptymalizowane przez uwzględnienie struktury macierzy? Dla obu metod zapisać efektywne (tzn. w pełni wykorzystujące tę strukturę) algorytmy rozwiązania układów równań z tą macierzą.

5N. Rozwiązać równanie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą z zadania 4, natomiast $\mathbf{e}$ jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

(a) (1p) metody Gaussa-Seidela,

(b) (3p) metody gradientów sprzężonych.

Wykorzystać efektywne algorytmy (patrz: poprzednie zadanie). Oba algorymy zastartować z tego samego przybliżenia początkowego. Porównać graficznie tempo zbieżności tych metod, tzn.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

MM i PFG