ZESTAW 3

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.

2N. Dany jest wielomian stopnia n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

przy czym $a_n \neq 0$. Dana jest liczba x_1. Chcemy podzielić wielomian (1) przez czynnik liniowy $x - x_1$, to znaczy znaleźć wielomian P_{n-1} stopnia $n-1$ i liczbę w takie, że

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x) + w. \tag{2}$$

Pokazać, że zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania pewnego układu równań liniowych. Zaproponować efektywny algorytm rozwiązywania tego układu. W szczególności rozpatrzyć przypadek, w którym x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $P_n(x)$.

Pokażać, że ogólne zagadnienie dzielenia wielomianów sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego układu równań liniowych. Jak wyglada ten układ w przypadku dzielenia przez wielomian $P_m(x)$ stopnia m. Zastosować uzyskane wyniki do znalezienia wyników następujących dzieleń:

(a) $P_5(x) = 3 + x + 9x^2 + 18x^3 + 8x^4 + x^5$ przez $P_1(x) = x + 3$

(b) $P_8(x) = 4 + 7x + 3x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 2x^7 + x^8$ przez $P_1(x) = x + 2$

(c) $P_{24}(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 6x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24}$ przez $P_4(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1$

(d) $P_{19}(x) = 1+4x+4x^2+4x^3+4x^4+3x^5+x^{15}+x^{16}+x^{17}+x^{18}+x^{19}$ przez $P_{15} = x^{15}+3x+1$

3 *Metoda gradientów sprzężonych.* Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $||\mathbf{r}_1|| \neq 0$ i niech $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Definiujemy następującą iterację:

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}\,, \tag{3a}$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k\,, \tag{3b}$$

$$\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}\,, \tag{3c}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k\,. \tag{3d}$$

Udowodnić, że dla każdych i, j, $i > j$, zachodzi

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = 0\,, \tag{4a}$$

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{p}_j = 0\,, \tag{4b}$$

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j = 0\,. \tag{4c}$$

Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, gdzie zaś dodatnią określoność macierzy $\mathbf{A}$?

Wskazówka: Dowód przeprowadzić indukcyjnie. Dowód ten jest prosty, ale na ćwiczeniach stracicie na niego mnóstwo czasu, jeśli nie *spróbujecie* go Państwo przeprowadzić samodzielnie.

4 Dane jest równanie liniowe

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{5}$$

przy czym macierz $\mathbf{A}$ spełnia założenia poprzedniego zadania. Niech $\mathbf{x}_1$ będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania (5) i niech $\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1$. W każdym kroku iteracji (3) definiujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \,. \tag{6}$$

Znaleźć związek pomiędzy $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{r}_k$. Pokazać, że $\mathbf{x}_{N+1}$ jest ścisłym rozwiązaniem równania (5) (w arytmetyce dokładnej).

5 Pokazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix} \tag{7}$$

jest dodatnio określona i znaleźć jej rozkład Cholesky'ego.

6N. Znaleźć (nie używając gotowych bibliotek) rozkład Cholesky'ego macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{120\times 120}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{8}$$

7N. Rozwiązać równanie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą z zadania 6, natomiast $\mathbf{e}$ jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

(a) metody Jacobiego,

(b) metody Gaussa-Seidela,

(c) metody gradientów sprzężonych.

Porównać graficznie tempo zbieżności tych metod. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy. Uwaga! Dyskutowana macierz jest rzadka, więc wszystkie procedury iteracyjne należy odpowiednio zaprogramować, aby efektywnie wykorzystać jej strukturę.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/