1. *Metoda gradientów sprzężonych.* Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $||\mathbf{r}_1|| \neq 0$ i niech $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Definiujemy następującą iterację:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}\,, &\text{(1a)}\\
\mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k\,, &\text{(1b)}\\
\beta_k &= \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}\,, &\text{(1c)}\\
\mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k\,. &\text{(1d)}
\end{aligned}$$

Udowodnić, że dla każdych i, j, $i > j$, zachodzi

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j &= 0\,, &\text{(2a)}\\
\mathbf{r}_i^T \mathbf{p}_j &= 0\,, &\text{(2b)}\\
\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j &= 0\,. &\text{(2c)}
\end{aligned}$$

Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, gdzie zaś dodatnią określoność macierzy $\mathbf{A}$?

Wskazówka: Dowód przeprowadzić indukcyjnie. Dowód ten jest prosty, ale na ćwiczeniach stracicie na niego mnóstwo czasu, jeśli nie *spróbujecie* go Państwo przeprowadzić samodzielnie.

2. Dane jest równanie liniowe

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3}$$

przy czym macierz $\mathbf{A}$ spełnia założenia poprzedniego zadania. Niech $\mathbf{x}_1$ będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania (3) i niech $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}$. W każdym kroku iteracji (1) definiujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k\,. \tag{4}$$

Znaleźć związek pomiędzy $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{r}_k$. Pokazać, że $\mathbf{x}_{N+1}$ jest ścisłym rozwiązaniem równania (3) (w arytmetyce dokładnej).

3N. Znaleźć rozkład Cholesky'ego macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1\\
\dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0\\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0\\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1\\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{bmatrix} \tag{5}$$

4N. Rozwiązać równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą z zadania 3, natomiast $\mathbf{e}$ jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

(a) metody Jacobiego,

(b) metody Gaussa-Seidela,

(c) metody gradientów sprzężonych.

Porównać graficznie tempo zbieżności tych metod. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy. Uwaga! Dyskutowana macierz jest rzadka, więc wszystkie procedury iteracyjne należy odpowiednio zaprogramować, aby efektywnie wykorzystać jej strukturę.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

PFG