ZESTAW 7

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.

2N. Skonstruować wielomian stopnia 10-go o losowych współczynnikach (rzeczywistych) następnie znaleźć jego pierwiastki. Jak zmienią się pierwiastki tego wielomianu gdy jeden z jego współczynników zostanie nieznacznie zaburzony? Powtórzyć ten sam eksperyment dla wielomianu Wilkinsona 10-go stopnia.

3N. Przedstaw graficznie na płaszczyźnie zespolonej baseny atrakcji poszczególnych miejsc zerowych (znalezionych przy pomocy metody Netwona) następujących wielomianów zmiennej zespolonej

   (a) $f(z) = z^3 - 1$,

   (b) $f(z) = z^5 - 1$,

   (c) $f(z) = \frac{1}{4}z^3 - \frac{5}{4}z$

   dla z należącego do kwadratu o przekątnej: (a)-(b) $(-1-i, 1+i)$ oraz (c) $(-10-10i, 10+10i)$. Utworzony obrazek ma mieć minimalną rozdzielczość 800×800 pikseli. Punkty startowe pokolorować kolorami odpowiadających im miejsc zerowych.

4N. Jak zmienią się wyniki poprzedniego zadania, gdy zamiast metody Newtona zostanie wykorzystana metoda Haylley'a.

5N. Znajdź wszystkie wartości x_0, dla jakich metoda Newtona będzie zbieżna do rozwiązania $x^\star$ równania $\arctan(x) = 0$.

6N. Zaimplementuj metody

   (a) bisekcji,

   (b) *reguła falsi*.

   (c) siecznych,

   (d) Newtona,

   (e) Haylley'a,

   Sprawdź jak będą działać dla funkcji

   (a) $f(x) = \sin x$,

   (b) $f(x) = \sin^2 x$,

   (c) $f(x) = (x-1)^5$,

   (d) $f(x) = (x-1)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)$.

7N. Znaleźć z dokładnością do 10^{-6} miejsca zerowe wielomianu

$$f(x) = x^6 + x^5 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 3 \tag{1}$$

   leżące w przedziale $[-3, 0]$ posługując się metodami z poprzedniego zadania. W punktach (a)-(c) jako przedział początkowy wziąć $[-3, 0]$, w punktach (d)-(e) $x_0 = -2$. Ilu iteracji potrzeba w każdym z tych przypadków?

8 Znajdź krotności wszystkich miejsc zerowych funkcji

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \sinh^3 x\,. \tag{2}$$

9 *Algorytm Herona*. Bez posługiwania się pojęciem pochodnej udowodnij, że następująca iteracja

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right), \tag{3}$$

gdzie $a > 0$, jest zbieżna do $\sqrt{a}$ dla wszystkich zespolonych punktów początkowych o dodatniej części rzeczywistej oraz do $-\sqrt{a}$ dla wszystkich zespolonych punktów początkowych o ujemnej części rzeczywistej. *Wskazówka*: rozważyć, jak $r_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a}$ zależy od $r_n = x_n - \sqrt{a}$.

10 Czy korzystając z metody Newtona można znaleźć wartość $1/a$ ($a > 0$), nie wykonując dzielenia? Dla jakich x_0 metoda ta będzie zbieżna do $1/a$, a dla jakich nie?

11 Pokazać, że wielomiam zmiennej rzeczywistej

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x \tag{4}$$

ma w metodzie Newtona dwucykl. Znaleźć punty tworzące ten dwucykl.

12 Skonstruować funkcję, dla której metoda Halley'a może mieć dwucykl. Podać punty tworzące ten dwucykl.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/