Brzegowy rozkład prawdopodobieństwa

- **Brzegowym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej X** nazywamy (jednoargumentową) funkcję $P_X(x_i)$:

$$P_X(x_i) \equiv P(X=x_i) = \sum_j P(\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\}) = \sum_j P_{X,Y}(x_i,y_j)$$

- Analogicznie: $P_Y(y_j) = \sum_i P_{X,Y}(x_i,y_j)$
- Przykład: dwukrotny rzut monetą.

X – liczba orłów w pierwszym rzucie
Y – liczba orłów w dwóch rzutach

x_i	0	1
$P_X(x_i)$	1/2	1/2

y_j	0	1	2
$P_Y(y_j)$	1/4	1/2	1/4

y_j \ x_i	0	1	$P_Y(y_j)$
0	**1/4**	**0**	=1/4
1	**1/4**	**1/4**	=1/2
2	**0**	**1/4**	=1/4
$P_X(x_i)$	=1/2	=1/2	=1

Łączna dystrybuanta

- **Łączna dystrybuanta**

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \le x, Y \le y] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

- Własności

1. $F_{X,Y}(-\infty,y) = F_{X,Y}(x,-\infty) = 0$
2. $F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = 1$
3. $dla\ x_1 \le x_2\ i\ y_1 \le y_2 \quad F_{X,Y}(x_1,y_1) \le F_{X,Y}(x_2,y_2)$
4. $\lim_{\delta\to 0^+} F_{X,Y}(x+\delta,y) = \lim_{\delta\to 0^+} F_{X,Y}(x,y+\delta) = F_{X,Y}(x,y)$
5. $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$
6. $P[a < X \le b, c < Y \le d] = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(a,c)$

Łączna dystrybuanta

7. $F_X(x) = P[X \le x] = P[X \le x, Y < +\infty] = F_{X,Y}(x,+\infty)$

$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$

- Prowadzi to do **dystrybuanty brzegowej**
- **Dystrybuanta brzegowa** zmiennej X to

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

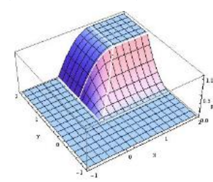
a stąd **brzegowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa**

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}F_{X,Y}(x,+\infty) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,v)\,dv$$

Niezależność zmiennych losowych

Przykład: łączna funkcja gęstości określona na trójkącie



- **Zmienne losowe** X,Y tworzące
- wektor losowy **są niezależne gdy**

$$\forall x,y \quad F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- co jest równoważne

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x,y \quad P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) \\ \forall x,y \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \end{array}}$$

Wektor losowy – przypadek n>2

- Syt.: dany jest n-wymiarowy wektor losowy $\vec{X}$, z którego tworzymy wielowymiarową zmienną losową $\vec{Y}$:

$$\vec{Y} = \vec{Y}(\vec{X})$$

rozwijamy wokół Y=E(X), zostawiając człony liniowe

$$Y_i = \underbrace{Y_i(E(\vec{X}))}_{E(Y_i)} + \sum_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(X_j - E(X_j)\right) + \ldots$$

$$Y_i - E(Y_i) = \sum_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(X_j - E(X_j)\right)$$

Prawo przenoszenia błędów

$$cov(Y_k,Y_q) = E\left[(Y_k - E(Y_k))(Y_q - E(Y_q))\right] =$$

$$= E\left[\sum_l \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_l}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} (X_l - E(X_l)) \sum_m \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} (X_m - E(X_m))\right] =$$

$$= \sum_{l,m} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_l}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} E\left[(X_l - E(X_l))(X_m - E(X_m))\right] =$$

$$= \boxed{\sum_{l,m} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_l}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})} cov(X_l,X_m)}$$

$$[C(X)]_{l,m} \equiv cov(X_l,X_m); \quad [C(Y)]_{k,q} \equiv cov(Y_k,Y_q); \quad T_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j}\right)\Bigg|_{\vec{X}=E(\vec{X})}$$

$$[C(Y)]_{k,q} = \sum_{l,m} T_{k,l}T_{q,m}[C(X)]_{l,m} = \sum_{l,m} T_{k,l}[C(X)]_{l,m}T^T_{m,q}$$

$\boxed{C(Y) = TC(X)T^T} \longleftarrow$ macierzowo

Wektor losowy – przypadek n>2

- Syt.: dany jest n-wymiarowy wektor losowy $\vec{X}$, z którego tworzymy zmienną losową (jednowymiarową) Z:

$$Z = a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

$$E(Z) = a_0 + a_1 E(X_1) + \ldots + a_n E(X_n)$$

$$var(Z) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\, var(X_k)\right] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} a_i a_k cov(X_i, X_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k cov(X_i, X_k)$$

- Macierz kowariancji dla n>2

$$K_{X_1,\ldots,X_n} = \begin{pmatrix} var(X_1) & cov(X_1,X_2) & \ldots & cov(X_1,X_n) \\ cov(X_1,X_2) & var(X_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov(X_1,X_n) & \ldots & \ldots & var(X_n) \end{pmatrix}$$

Wielowymiarowy rozkład normalny

- Łączna gęstość prawdopodobieństwa

$$\boxed{f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \left(\frac{\det(K^{-1})}{(2\pi)^n}\right)^{1/2} e^{\frac{-1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a})}}$$

$\vec{X}$ – wektor n zmiennych losowych
K – macierz kowariancji n×n
$\vec{a}$ – stały wektor n liczb
($E(\vec{X})=\vec{a}$)

- dla n=2

$$K^{-1} = \frac{1}{var(X_1)var(X_2) - (cov(X_1,X_2))^2}\begin{pmatrix} var(X_2) & -cov(X_1,X_2) \\ -cov(X_1,X_2) & var(X_1) \end{pmatrix}$$

- Standaryzacja $U_i = \frac{X_i - a_i}{\sigma(X_i)}$ dla n=2 prowadzi do

$$f_{\vec{U}}(u_1,u_2) = \left(\frac{\det(K^{-1})}{(2\pi)^2}\right)^{1/2} e^{\frac{-1}{2}\vec{u}^T K^{-1}\vec{u}}$$

ρ to współczynnik korelacji u_1 i u_2

$$K^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Wielowymiarowy rozkład normalny - elipsa kowariancji

- Łączna gęstość prawdopodobieństwa

$$f_{\vec{U}}(u_1,u_2) = const \rightarrow \vec{u}^T K^{-1}\vec{u} = const \rightarrow$$

$$\frac{1}{1-\rho^2}(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2\rho) = const \rightarrow$$

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{(\sigma(X_1))^2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{(\sigma(X_2))^2} - 2\rho\frac{(x_1-a_1)}{\sigma(X_1)}\frac{(x_2-a_2)}{\sigma(X_2)}\right) = const$$

- Jest to równanie elipsy zwanej dla const=1 elipsą kowariancji. Prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennych losowych wewnątrz elipsy kowariancji jest niezależna od $\sigma(X_1)$,$\sigma(X_2)$ i ρ.

Transformacje wektorów losowych

- Syt. $\vec{Z} = g(\vec{X})$
- Przypadek dyskretny: grupujemy te wartości $\vec{X}$, które dają te same wartości $\vec{Z}$ i dodajemy prawdopodobieństwa. Otrzymujemy rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego $\vec{Z}$.
- Przypadek ciągły:

I sposób: (zał. Z jest jednowymiarowe czyli $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$)

$$F_Z(z) = \underbrace{\int\ldots\int}_{\substack{po\ wszystkich\ zdarzeniach\\ dla\ których\ Z(A)\le z}} f_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

Znając dystrybuantę obliczamy (łączną) funkcję gęstości prawdopodobieństwa.

Dla Z n-wymiarowej całkujemy po wszystkich zdarzeniach dla których $Z_1(A) \le z_1 \wedge Z_2(A) \le z_2 \wedge \ldots \wedge Z_n(A) \le z_n$.

Transformacje wektorów losowych

- Przypadek ciągły:

II sposób:

zał.:

1. n=2 czyli (X,Y)→(V,W) czyli V=g_1(X,Y), W=g_2(X,Y)
2. istnieją jednoznaczne funkcje h_1: X=h_1(V,W) i h_2:Y=h_2(V,W)
3. dla każdego x,y funkcje g_1 i g_2 mają ciągłe pochodne cząstkowe
4. Jacobian

$$J_{(X,Y)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix} \ne 0$$

Wtedy

$$\boxed{f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(x(v,w), y(v,w))\left|J_{(X,Y)}\right|^{-1}}$$

Transformacja Box-Mullera

- X_1, X_2 mają rozkłady jednorodne na przedziale (0,1); wtedy

$$Y_1 = \sqrt{-2ln(X_1)}\,cos(2\pi X_2) \quad i \quad Y_2 = \sqrt{-2ln(X_1)}\,sin(2\pi X_2)$$

mają rozkłady N(0,1).