1. Znaleźć rozkład *QR* macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

2. Niech $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N : \ \|\mathbf{e}\| = 1$ i niech $\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$. Znaleźć wartości i wektory własne $\mathbf{P}$.

3N. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Przy użyciu metody potęgowej znaleźć jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

4N. Spróbować zastosować metodę potęgową do macierzy

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{19}{12} & -\frac{23}{12} \\ \frac{19}{12} & \frac{7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{17}{12} & \frac{19}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{19}{12} & -\frac{17}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{19}{12} \\ -\frac{23}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{19}{12} & \frac{13}{12} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Czy uzyskuje się zbieżność?

5N. Znaleźć wartości własne i unormowane wektory własne macierzy (niezaznaczone elementy są zerami)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & & & & & & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & & & & & & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

6. Podać, dla jakich liczb a, b, c, d funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 & x \in [1,d] \end{cases} \tag{5}$$

tworzy naturalny splajn kubiczny na przedziale $[0,d]$.

7. W każdym przedziale przedziale $[x_j, x_{j+1}]$ interpolujemy za pomocą wzoru

$$y(x) = A(x)f_j + B(x)f_{j+1} + C(x)f''_j + D(x)f''_{j+1}\,, \tag{6}$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}\,, \qquad C = \tfrac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2\,, \tag{7a}$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\,, \qquad D = \tfrac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2\,. \tag{7b}$$

Pokazać, że $y(x_j) = f_j$, $y(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $y''(x_j) = f''_j$, $y''(x_{j+1}) = f''_{j+1}$. Żądając ciągłości pierwszej pochodnej $y(x)$ w węzłach, wyprowadzić układ równań na nieznane wielkości f''_j.

8N. Zbudować wielomian interpolacyjny oparty na następującej tabelce:

x	-1.2300	-1.1900	-0.7400	0.1100	2.5600
y	1.5129	1.4161	0.5476	0.0121	6.5536

Podać **jawne** współczynniki wielomianu interpolacyjnego.

9N. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1 + 5x^2} \tag{8}$$

w punktach -1, $-1 + \frac{1}{32}$, $-1 + \frac{2}{32}$, $\ldots$, $1 - \frac{1}{32}$, 1, a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (8) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego.

10N. Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 9. Sporządzić jego wykres.

11N. Skonstruować interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 9. Sporządzić odpowiedni wykres.

12. *Interpolacja Hermite'a.* Wielomian interpolacyjny Hermite'a dany jest wzorem

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) f_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{h}_i(x) f'_i\,, \tag{9}$$

gdzie

$$h_i(x) = (1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i))\, l_i^2(x)\,, \tag{10a}$$

$$\bar{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)\,. \tag{10b}$$

l_i, x_j — oznaczają to samo, co w interpolacji Lagrange'a. Pokazać, że $y(x_i) = f_i$, $y'(x_i) = f'_i$.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

PFG