ZESTAW 4

Wstęp do metod numerycznych grupy 1, 2.

1. Nierozwiązane zadania z poprzedniego zestawu.
2. Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Jeżeli istnieje taki wektor niezerowy $\mathbf{x}_R \in \mathbb{C}^N$, że $\mathbf{A}\mathbf{x}_R = \lambda_R \mathbf{x}_R$, to λ_R nazywamy prawą wartością własną macierzy $\mathbf{A}$.

   Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Jeżeli istnieje taki wektor niezerowy $\mathbf{x}_L \in \mathbb{C}^N$, że $\mathbf{x}_L^T\mathbf{A} = \lambda_L \mathbf{x}_L^T$, to λ_L nazywamy lewą wartością własną macierzy $\mathbf{A}$.

   Zbiór wszystkich prawych (lewych) wartości własnych macierzy nazywamy prawostronnym (lewostronnym) widmem macierzy.

   Dwie macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ nazywamy podobnymi, jeśli istnieje taka macierz odwracalna $\mathbf{S}$, że $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$.

   (a) Udowodnić, że prawostronne i lewostronne widma macierzy pokrywają się.

   (b) Udowodnić, że wektory własne odpowiadające różnym prawym i lewy wartościom własnym dowolnej macierzy są ortogonalne.

   (c) Udowodnić, że widma dwu macierzy podobnych są identyczne.

   (d) Udowodnić, że wszystkie wartości własne macierzy hermitowskiej są rzeczywiste.

   (e) Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ będzie pewną macierzą posiadającą N niezależnych prawych wektorów własnych. Niech $\mathbf{X}$ będzie macierzą, której kolumnami są te wektory. Pokazać, że $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ jest macierzą diagonalną.

3. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   oraz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

4. Niech $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N: \ \|\mathbf{e}\| = 1$ i niech $\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$. Znaleźć wartości i wektory własne $\mathbf{P}$.

5N. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

   (a) Przy użyciu metody potęgowej znaleźć wszystkie wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

   (b) Przy użyciu odwrotnej metody potęgowej znaleźć dwie najmniejsze na moduł wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ i odpowiadające im wektory własne.

6N. Dana jest macierz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix} . \tag{4}$$

(a) Przy użyciu metody potęgowej znaleźć wszystkie wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

(b) Przy użyciu odwrotnej metody potęgowej znaleźć dwie najmniejsze na moduł wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ i odpowiadające im wektory własne.

7N. Spróbować zastosować metodę potęgową do macierzy

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{19}{12} & -\frac{23}{12} \\ \frac{19}{12} & \frac{7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{17}{12} & \frac{19}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{19}{12} & -\frac{17}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{19}{12} \\ -\frac{23}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{19}{12} & \frac{13}{12} \end{bmatrix} . \tag{5}$$

Czy uzyskuje się zbieżność?

8. Znaleźć rozkład *QR* macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{6}$$

9N. Znaleźć wartości własne i unormowane wektory własne macierzy (niezaznaczone elementy są zerami)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & & & & & & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & & & & & & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} . \tag{7}$$

10. Niech $\{a_{rs}\}$ będą elementami macierzy symetrycznej rzeczywistej $\mathbf{A}$ i niech

$$S = \sum_{r \neq s} |a_{rs}|^2. \tag{8}$$

Wykonujemy transformację Jacobiego[1] $\mathbf{P}_{pq}$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}_{pq}^T \mathbf{A} \mathbf{P}_{pq}, \tag{9}$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & c & & s & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & -s & & c & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

jest macierzą obrotu, której elementy diagonalne poza $p_{pp} = c$ oraz $p_{qq} = c$ są jedynkami. Elementy niediagonalne, poza $p_{pq} = s$ oraz $p_{qp} = -s$ są zerami. Liczby oznaczają $c = \cos\phi$ oraz $s = \sin\phi$. Transformacja Jacobiego macierzy $\mathbf{A}$ prowadzi do powstania symetrycznej macierzy $\mathbf{A}'$ o składowych

$$\begin{aligned}
a'_{rp} &= ca_{rp} - sa_{rq} \qquad (r \neq p, r \neq p), && \text{(11a)}\\
a'_{rq} &= ca_{rq} + sa_{rp} \qquad (r \neq p, r \neq p), && \text{(11b)}\\
a'_{pp} &= c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sca_{pq}, && \text{(11c)}\\
a'_{qq} &= s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2sca_{pq}, && \text{(11d)}\\
a'_{pq} &= (c^2 - s^2) a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq}). && \text{(11e)}
\end{aligned}$$

Kąt obrotu ϕ dobieramy tak, aby wyzerować pozadiagonalne elementy $a'_{pq} = a'_{qp}$.

(a) Sprawdzić, że wzory definiujące transformację Jacobiego sprowadzają się do

$$\begin{aligned}
a'_{pp} &= a_{pp} - ta_{pq}, && \text{(12a)}\\
a'_{qq} &= a_{qq} + ta_{pq}, && \text{(12b)}\\
a'_{rp} &= a_{rp} - s(a_{rq} + \tau a_{rp}), && \text{(12c)}\\
a'_{rq} &= a_{rq} + s(a_{rp} - \tau a_{rq}), && \text{(12d)}\\
a'_{pq} &= 0, && \text{(12e)}
\end{aligned}$$

gdzie $t = s/c$ jest mniejszym (na moduł) pierwiastkiem równania

$$t^2 + 2t\theta - 1 = 0, \tag{13}$$

czyli

$$t = \frac{\mathrm{sgn}\theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}} \tag{14}$$

oraz $\theta = \mathrm{ctg}\phi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$, $\tau = s/(1+c)$, $c = 1/\sqrt{t^2+1}$ i $s = ct = t/\sqrt{t^2+1}$.

(b) Pokazać, że po tej transformacji

$$S \to S' = S - 2|a_{pq}|^2. \tag{15}$$

[1] `http://www.fizyka.umk.pl/nrbook/c11-1.pdf`

11N. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy z zadania 6 oraz 7 przy użyciu metody Jacobiego. Wielkość S z poprzedniego zadania wliczyć po każdym przemieceniu (*sweep*) macierzy. Ilu przemieceń potrzeba aby

(a) $S < 10^{-4}$,

(b) $S < 10^{-5}$,

(c) $S < 10^{-6}$.

Bartłomiej Dybiec
bartek@th.if.uj.edu.pl
http://th.if.uj.edu.pl/~bartek/metnum/