Kraków, 14.01.2011

Wstęp do metod numerycznych

Zestaw 8 na 17.01.2011

1. Dany jest pewnie problem różniczkowy:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \lambda e^{u+1} = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\lambda \leq 0$..

(a) Pokazać, że rozwiązanie analityczne ma postać

$$u(t) = -2 \ln \left(\frac{\cosh\left(\frac{2t-1}{4}\theta\right)}{\cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)} \right).$$

N24a Znajdź maksymalną wartość λ, dla której powyższe rozwiązanie istnieje.

N24b Dla pewnego λ mniejszego od wyznaczonej maksymalnej wartości (np. dla $\lambda = 1$) wyznacz wszystkie wartości parametru θ i sporządź wykresy funkcji w przedziale $[0, 1]$.

2. *Metoda Eulera* Dany jest układ równań różniczkowych:

$$y'(t) = F(t, y), \tag{2}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = \vec{y}_0$. Oznaczmy $t_n = nh, y_n = y(nh)$. Jawna metoda Eulera dana jest wzorem

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n). \tag{3}$$

Niejawna metoda Eulera zaś:

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{4}$$

(a) Pokazać, że metody te dają przybliżone rozwiązania równania różniczkowego, wyznaczyć błąd.

(b) Znaleźć analityczne rozwiązania równania $y' = -ky, \;\; k > 0$ oraz iteracji (3) i (4).

(c) Dla jakich h metody te są stabilne, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$?

3. Dane jest równanie

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{5}$$

   (a) Pokazać, że wielkość $E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$ jest stała.

   (b) Sprowadzić równanie do postaci (2) wprowadzając $y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ i napisać w sposób jawny iteracje dla metod Eulera.

   (c) Jak zmienia się wielkość $E(t)$ w trakcie tych iteracji.

   (d) Jak zmienia się wielkość $E(t)$ w trakcie następującej iteracji:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h\dot{x}_n, \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n - hx_{n+1} \end{cases} \tag{6}$$

N25 Rozwiązać równanie

$$y'' = 2y(y^2 - 1) \tag{7}$$

z warunkami $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$ przy pomocy jawnej i niejawnej metody Eulera dla $h = 0.01$ na przedziale $x \in [0, 5]$.

4. Zaproponować metody rozwiązywania równania typu

$$y'' = 2y(y^2 - 1), \tag{8}$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = 0$, $y(5) = 1$.

dr Tomasz Romańczukiewicz