1. (1p) Niech liczby $y_1 = 0.9863$ i $y_2 = 0.0028$ będą poprawnie zaokrąglonymi przybliżeniami odpowiednio liczb x_1 i x_2. Znaleźć maksimum różnicy między obliczonymi i dokładnymi wartościami $1/y_1$ i $1/y_2$.

2. (1p) Wyjaśnij, dlaczego odejmowanie dwóch liczb a i b, $a \simeq b$, może prowadzić do bardzo dużego błędu.

3. (1p) Znajdź rozwinięcie binarne liczby $1/3$.

4. (1p) Rozwiąż poniższy układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 6y & = 8 \\ 2x + (6 + \epsilon)y & = 8 + \delta \end{cases} \tag{1}$$

   podstawiając a) $\epsilon = 0.00001$ i $\delta = 0.00001$, b) $\epsilon = -0.00001$ i $\delta = 0.00002$. Porównaj wyniki. Jaki wniosek wynika stąd dla obliczeń numerycznych?

5. (2p) Oblicz współczynnik uwarunkowania (patrz wykłady) dla układu (1). W tym celu znajdź wartości własne macierzy układu (1). Co dzieje się ze współczynnikiem uwarunkowania gdy $\epsilon \to 0$?

6. (1p) Rozwiąż układ równań metodą elimininacji Gaussa:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = & 3 \\ x_2 - x_3 = & -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = & -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_4 = & 9 \end{cases} \tag{2}$$

7. (2p) Znajdź złożoność numeryczną sprowadzania macierzy do postaci trójkątnej metodą eliminacji Gaussa. Porównaj ją ze złożonością wyznaczenia macierzy odwrotnej.

8. (1p) Znaleźć rozkład LU i wyznacznik następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

9. (1p) Znaleźć rozkład Cholesky'ego następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 8 \\ -2 & 10 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -4 \\ 8 & 2 & -4 & 21 \end{bmatrix} \tag{4}$$

   Jakie warunki musi spełniać macierz, by można było wykonać jej rozkład Cholesky'ego?

10N. Rozwiązać układ równań ręcznie implementując metodę Gaussa, Cholesky'ego lub LU:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{5}$$

11. (3p) *Wzór Shermana–Morrisona.* Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą, której odwrotność jest znana, i niech:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{u}\,\mathbf{v}^T\,, \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ są pewnymi wektorami. Symbol $\cdot^T$ oznacza transpozycję. Znaleźć λ takie, że

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\,\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\lambda}\,. \tag{7}$$

Uwaga: Proszę pamiętać, że napis $\mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{b}$ ***zawsze*** rozumiemy jako umiejętość rozwiązania równania $\mathbf{Xy} = \mathbf{b}$.

12N. (2p) Rozwiązać układ równań wykorzystując wzór Shermana-Morrisona (można wykorzystać gotowe algorytmy do rozwiązania układu niezaburzonego):

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{8}$$

13N. (1p) Dane są następująca macierz i wektory:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -116.66654 & 583.33346 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ 583.33346 & -116.66654 & -333.33308 & 100.00012 & 100.00012 \\ -333.33308 & -333.33308 & 133.33383 & 200.00025 & 200.00025 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & 50.000125 & -649.99988 \\ 100.00012 & 100.00012 & 200.00025 & -649.99988 & 50.000125 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559856 \\ 1.31947922 \\ -0.09473435 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -0.33388066 \\ 1.08033290 \\ -0.98559855 \\ 1.32655028 \\ -0.10180541 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0.72677951 \\ 0.72677951 \\ -0.27849178 \\ 0.96592583 \\ 0.96592583 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0.73031505 \\ 0.73031505 \\ -0.27142071 \\ 0.96946136 \\ 0.96946136 \end{bmatrix}.$$

Definiujemy $\mathbf{z}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i$ dla $i = 1,2,3,4$. Obliczyć $||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2||$, $||\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4||$, $||\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2||/||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2||$, $||\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4||/||\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4||$. Zinterpretować otrzymane wyniki, odwołując się do współczynnika uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

MM and PFG