

1. Podaj definicję zmiennej losowej.

Zmienną losową nazywamy funkcję  $X$ , która każdemu zdarzeniu  $s \in S$  przyporządkowuje liczbę rzeczywistą  $X(s)=x$   
 $\forall s \in S \rightarrow x \in S_x$

2. Podaj przykład zmiennej losowej dla rzutu kostką, której zbiór wartości jest dyskretny i nieskończony.

dyskretny ale skończony: Np. losujemy liczbę  $a$  z przedziału  $(0,10)$ ;  $X=a^2$ ;  $S_x=(0,100)$

3. Podaj przykład zmiennej losowej dla rzutu kostką, której zbiór wartości jest dwuelementowy.

$X$ =odległość od „2”;  $S_x=\{0,1\}$

4. Podaj przykład zmiennej losowej o wartościach dyskretnych, dla której odpowiednia przestrzeń próbek eksperymentu jest ciągła.

5. Kiedy zdarzenia  $A$  (w przestrzeni próbek eksperymentu) i  $A_x$  (w przestrzeni wartości zmiennej losowej) są równoważne?

Zdarzenie  $A \in S$  i zbiór wartości  $A_x \in S_x$  są równoważne (ekwiwalentne) gdy

$$\forall s \in A: X(s) \in A_x$$

$$\forall s_x \in A_x: \exists s \in S: X(s) \in A_x$$

Inaczej mówiąc zdarzenie  $A$  i zdarzenie (ze względu na  $S_x$ )  $A_x$  są równoważne, wówczas  $P(A)=P(A_x)$

Czyli zamiast operować na zdarzeniach możemy operować na zbiorach wartości w przestrzeni  $S_x$

6. Jeśli zdarzenia  $A$  (w przestrzeni próbek eksperymentu) i  $A_x$  (w przestrzeni wartości zmiennej losowej) są równoważne to jak się mają do siebie ich prawdopodobieństwa?

7. Co to jest dyskretna zmienna losowa?

zmienna, która przyjmuje co najwyżej przeliczalnie nieskończoną liczbę wartości

8. Co to jest ciągła zmienna losowa?

zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości

9. Co to jest mieszana zmienna losowa?

zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości, a niektóre spośród jej wartości są wielkościami dyskretnymi. Jest zdefiniowana jednocześnie na dyskretnym zbiorze zdarzeń (skończonym lub przeliczalnie nieskończonym) i ciągłym zbiorze zdarzeń (nieprzeliczalnie nieskończonym)

10. Podaj typy zmiennych losowych.

Dyskretna/ciągła/mieszana zmienna losowa.

11. Podaj definicję dystrybuanty.

Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$  nazywamy funkcję dającą prawdopodobieństwo otrzymania wartości zmiennej losowej mniejszej bądź równej od danej wartości  $x$ :

$$F_x(X) = P(X \leq x)$$

12. Podaj 3 dowolne własności dystrybuanty.

$$0 \leq F_x(x) \leq 1 \quad (\text{gdyż } F_x(x) \text{ jest sumą prawdopodobieństw})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_x(X) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(X) = 0$$

$F_x(x)$  jest ciągła dla ciągłych zmiennych losowych

$F_x(x)$  jest bezwymiarowa

13. Narysuj dystrybuantę dla zmiennej losowej, której wartościami jest liczba oczek w rzucie kostką.

14. Narysuj schematycznie dystrybuantę zmiennej losowej, dla której znamy wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa (podany na kolokwium).

15. Podaj związek pomiędzy dystrybuantą a prawdopodobieństwem dla dyskretnej zmiennej losowej.  $P(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

16. Podaj związek pomiędzy dystrybuantą a funkcją gęstości prawdopodobieństwa dla ciągłej zmiennej losowej.

17. Podaj definicję rozkładu prawdopodobieństwa (zmienna dyskretna).

Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa to w probabilistyce rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dający się opisać przez podanie wszystkich przyjmowanych przez nią wartości, wraz z prawdopodobieństwem przyjęcia każdej z nich.

18. Podaj definicję funkcji gęstości prawdopodobieństwa (zmienna ciągła).  $f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$

19. Podaj 3 własności funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

$$f_x(x) \geq 0$$

$$P(a < X < b) = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_x(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) dt = F_x(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

20. Narysuj schematycznie funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej, dla której znamy wykres dystrybuanty (podany na kolokwium).

21. Podaj definicję warunkowej funkcji gęstości.  $f_x(x|A) = \frac{d}{dx} F_x(x|A)$

22. Co to jest kwantyl rzędu  $p$ ?

Kwantylem rzędu  $p$  (dla zmiennej losowej  $X$ ) nazywamy liczbę  $x_p$ :

23. Co to jest moda funkcji gęstości prawdopodobieństwa? wartość najbardziej prawdopodobna czyli  $x: \max\{f_x(x)\}$

24. Co to jest mediana funkcji gęstości prawdopodobieństwa? Mediana to kwantyl rzędu  $1/2$

25. Podaj definicję wartości oczekiwanej dla zmiennej dyskretnej.

$$E(X) = \sum_k P_x(x_k) x_k$$

26. Podaj definicję wartości oczekiwanej dla zmiennej ciągłej.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) x dx$$

27. Podaj definicję wartości oczekiwanej dla zmiennej mieszanej. 25+26 tj. obie definicje
28. Jak się wyraża wartość oczekiwana zmiennej  $Y=aX+b$  poprzez wartość oczekiwaną zmiennej  $X$  (a i b to stałe)?
29. Podaj definicję wariancji zmiennej losowej.  
Wariancja jest miarą rozrzutu zmiennej losowej wokół wartości średniej i jest nieujemna  

$$\text{var}(X) = \sigma_x^2 = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$$
30. Jak się wyraża wariancja zmiennej  $Y=aX+b$  poprzez wartość oczekiwaną zmiennej  $X$  (a i b to stałe)?
31. Ile wynosi  $\text{var}(c)$  dla stałej  $c$ ?  $\text{var}(c)=0$  dla  $c=\text{const.}$
32. Jak się wyraża wariancja zmiennej  $X$  poprzez wartości oczekiwane odpowiednich zmiennych?
33. Podaj definicję odchylenia standardowego zmiennej losowej.  $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$
34. Podaj definicję momentu rzędu  $k$  względem początku układu dla zmiennej losowej  $X$ .  

$$\tilde{\mu}_k = E(X^k) \text{ dla } k=0,1,2 \dots \text{ czyli } \tilde{\mu}_0 = 1 \wedge \tilde{\mu}_1 = E(X)$$
35. Podaj definicję momentu centralnego rzędu  $k$  dla zmiennej losowej  $X$ .  

$$\tilde{\mu}_k = E((X - E(X))^k) \text{ dla } k=0,1,2 \dots \text{ czyli } \mu_0 = 1 \wedge \tilde{\mu}_1 = 0 \wedge \mu_2 = \text{var}(X)$$