1N. (2p) Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla danych z pliku `dane1.txt`. Nastepnie wyznaczyć minimum znalezionego splajnu metodą Brenta, startując z punktów z przedziału $[-1.5, 1.5]$. Powtórzyć obliczenia dla kilku różnych punktów startowych.

2N. (3p) Znaleźć numerycznie (analitycznie można zrobić to bardzo łatwo - jak?) minimum funkcji Rosenbrocka:

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2 \tag{1}$$

Rozpocząć poszukiwania od kilku–kilkunastu różnych, losowo wybranych punktów i oszacować ile trzeba kroków, aby zbliżyć się do minimum na rozsądną odległość. Przedstawić graficznie drogę jaką przebywa algorytm poszukujęcy minimum (to znaczy pokazać położenia kolejnych minimalizacji kierunkowych lub kolejnych zaakceptowanych kroków wykonywanych w metodzie Levenberga–Marquardta).

3N. (3p) Do danych zawartych w pliku `dane2.txt` dopasuj wielomiany niskich stopni, zakładając, że pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Ustal za pomocą kryterium Akaike jaki stopień wielomianu wybrać. Przyjmując

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - w(x_i))^2 \,, \tag{2}$$

gdzie (x_i, y_i) oznaczają punkty pomiarowe, N jest liczbą pomiarów, $w(x)$ dopasowanym wielomianem, znajdź macierz kowariancji estymatorów. (Jest to jeden z niewielu przypadków, w których trzeba explicite znaleźć odwrotność jakiejś macierzy.)

4. (2p) *liniowe zagadnienie najmniejszych kwadratów* Rozważmy dane powiązane równaniem $y_i = \sum_{j=1}^{N_1} a_j x_{ij}$, gdzie y_i to wynik i-tego pomiaru wielkości y a x_{ij} to wynik i-tego pomiaru wielkości x_j. Jeśli wykonano N_2 pomiarów y_i i $N_2 > N_1$ to możemy zapisać nadokreślony układ równań na współczynniki a_j:

$$Xa = y \tag{3}$$

gdzie X to macierz zbudowana z wielkości x_{ij}, natomiast a i y to wektory. Problem ten można rozwiązać w sensie namniejszych kwadratów, tzn. szukając minimum wyrażenia $||Xa - y||^2$ względem wektora a. Pokaż, że takie minimum odpowiada rozwiązaniu liniowego problemu:

$$X^T X a = X^T y \tag{4}$$

5. (2p) *Minimalizacja metodą gradientów sprzężonych* Minimalizacja ta przebiega z założeniem początkowym $r_1 = p_1 = -\nabla f|_{x_1}$, według algorytmu: x_{k+1} jest minimum funkcji f szukanym z punktu x_k w kierunku p_k, skąd obliczamy

$$r_{k+1} = -\nabla f|_{x_{k+1}} \qquad \beta = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \qquad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta p_k \tag{5}$$

Pokaż, że wektor r_{k+1} jest tym samym wektorem który zostałby skostruowany w algebraicznej metodzie gradientów sprzężonych, gdyby funkcję f ograniczyć do rozwinięcia kwadratowego.

Uwaga: Jest to oczywiście twierdzenie 1 z wykładu na temat minimalizacji wielowymiarowej.

6. Dla $x \in [-1, 1]$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

   (a) (1p) Znajdź jawną postać $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.

   (b) (2p) Udowodnij, że dla $n \geqslant 2$

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \,. \tag{6}$$

(c) (1p) Udowodnij, że $T_n(x)$ są wielomianami. Jaki jest stopień wielomianu $T_n(x)$?

$T_n(x)$ noszą nazwę *wielomianów Czebyszewa*.

7. (1p) Oblicz

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx\,, \tag{7}$$

gdzie $T_m(x)$, $T_n(x)$ są wielomianami Czebyszewa.

8. (3p) Funkcję

$$E(x) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin\theta^2}\, d\theta\,, \quad x \in (-1, 1) \tag{8}$$

nazywamy funkcją eliptyczną drugiego rodzaju. Znajdź rozwinięcie Maclaurina tej funkcji do czwartego rzędu, a następnie skonstruuj jej przybliżenie Padé $R_{22}(x)$.

Zadania oznaczone jako N są zadaniami numerycznymi. Ich opracowane wyniki plus kod programu (całość w formacie pdf) należy przysyłać na mój adres e-mail w ciągu dwóch tygodni od daty widniejącej w nagłówku. Rozwiązanie może wykorzystywać dowolne legalnie dostępne biblioteki, języki programowania lub programy narzędziowe. Pozostałe zadania są zadaniami nienumerycznymi, do rozwiązywania przy tablicy.

MM i PFG