26.03.2020

SPRAWOZDANIE

PAMSI

PROJEKT 1

ALGORYTMY SRTOWANIA

Prowadzący:

Mgr inż. Marta Emirsajłow

Dane studenta:

Krzysztof Ragan 249026

Termin zajęć:

Piątek 11:15

1. Zadanie

Celem zadania było zaimplementowanie wybranych algorytmów sortowania. Wybrano następujące algorytmy:

-Sortowanie przez scalanie;

-Sortowanie szybkie;

-Sortowanie introspektywne;

Oprócz implementacji przeprowadzono również badania algorytmów, czasu ich działania dla różnych rozmiarów tabel i różnych stopni ich posortowania.

2. Opis algorytmów

a) Sortowanie przez scalanie(Merge Sort)

Sposób działania algorytmu sortowania przez scalanie wykorzystuje zasadę „dziel i zwyciężaj". Dzieli on problem na mniejsze podproblemy i wywołuje się rekurencyjnie również dla nich. Rekurencja trwa, aż podzielone części tablicy będą miały rozmiar 2. Wtedy zaczynamy proces scalania (Merge). Scalanie odbywa się na dwóch mniejszych, ale już posortowanych ciągach i tworzy jeden większy, również posortowany.

Dzielenie tablicy o długości n na połowy może odbyć się $log2n$ razy. Scalenie na każdym poziomie zajmuje O(n) operacji. Wynika z tego, że całkowita złożoność obliczeniowa algorytmu Merge Sort to O(nlogn).

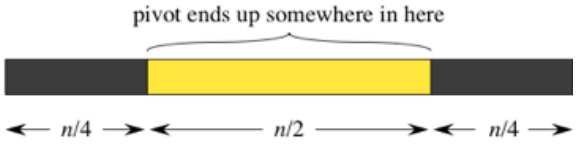
Sortowanie przez scalanie posiada taką samą złożoność obliczeniową zarówno dla najlepszego, średniego jak i najgorszego przypadku.

b) QuickSort (sortowanie szybkie)

Sortowanie szybkie polega na wyborze elementu rozdzielającego, według którego uporządkujemy pozostałe elementy. Wszystkie na lewo od piwota będą od niego mniejsze, a te na prawo-większe. Następnie korzystamy z rekurencji, wywołując sortowanie szybkie dla lewej i prawej strony, piwota zostawiając na swoim miejscu.

W przypadku najgorszym element rozdzielający znajduje się na początku lub końcu tablicy, przez co jedna z partycji ma wielkość 0, a druga jest tylko o jeden mniejsza od wyjściowej tablicy. Suma czasu potrzebnego na wykonanie tych operacji to c(n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+…+1). A zatem wykorzystując wzór na sumę ciągu arytmetycznego otrzymujemy $(n + 1) * n^2$. Złożoność obliczeniowa jest zatem równa O(n^2).

W przypadku średnim mamy do czynienia z czymś pomiędzy najlepszym (czyli podziałem na połowy), a najgorszym przypadkiem. Gdyby piwot lądował zawsze w takim obszarze:



To znaczy, że w najgorszym przypadku podział nastąpiłby na partycje o n/4 i 3n/4 elementach. Aby obliczyć ile wywołań rekurencji wystąpi dla dłuższej partycji należy przeanalizować problem następująco: idąc od dołu (gdzie rozmiar to 1) każdy wyższy poziom będzie miał rozmiar 4/3 raza większy (bo niższy poziom to 3/4 wyższego);

zatem ile razy należy powiększać 4/3 raza wartość 1 aby otrzymać n? Lub inaczej:

$(\frac{4}{3})^{x} = n$;

Po przekształceniu $x=\log_{\frac{4}{3}} n$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla krótszej partycji, jednakże nie jest to niezbędne. Ponadto:

$\log_{\frac{4}{3}} n = \frac{\log_2 n}{\log_2 \frac{4}{3}}$;

Na każdym z poziomów następuje n operacji, zatem złożoność obliczeniowa wynosi O(nlogn).

c) Sortowanie introspektywne (IntroSort)

Jest to algorytm hybrydowy, połączenie dwóch lub trzech algorytmów. Przedstawione później wyniki są wynikami działania algorytmu złożonego z trzech innych: QuickSorta, HeapSorta oraz InsertSorta.

Celem hybrydyzacji algorytmu jest wykluczenie najgorszego przypadku dla algorytmu sortowania szybkiego. Wprowadza się licznik, który liczy głębokość wywołań rekurencyjnych algorytmu. Jeśli głębokość jest zbyt duża, zamiast kolejnego QuickSorta wykorzystuje się HeapSorta (sortowanie przez kopcowanie). Ponadto dla partycji o wielkości mniejszej niż 16 wykorzystuje się sortowanie przez wstawianie (Insert Sort).

Złożoność obliczeniowa algorytmu zarówno w najgorszym jak i średnim przypadku wynosi O(nlogn).

3. Przebieg eksperymentu

Do implementacji algorytmów w języku C++ wykorzystano program Qt Creator 4.11.0. Zgodnie z instrukcją, pomiary czasu działania algorytmów wykonano dla różnych typów tabel oraz różnych ich rozmiarów. Poniżej przedstawiono tabele wyników (czas podano w milisekundach) oraz wykresy sporządzone na ich podstawie.

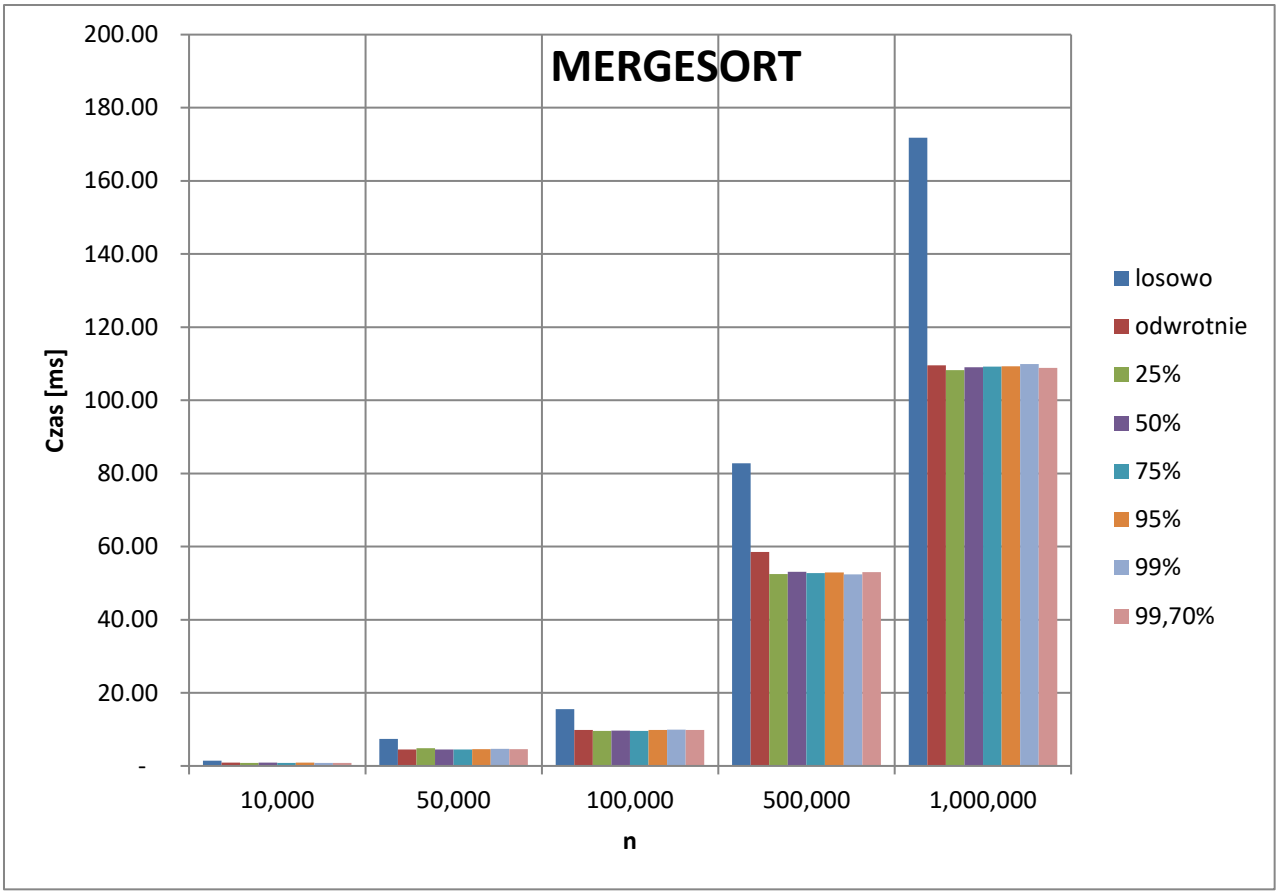
1) Sortowanie przez scalanie

```
template <class Item>
void merge(Item *tab, int left, int mean, int right, Item *temp)
{
    int i, j;
    for(i = mean + 1; i>left; i--)
        temp[i-1] = tab[i-1];
    for(j = mean; j<right; j++)
        temp[right+mean-j] = tab[j+1];
    for(int k=left;k<=right;k++)
        if(temp[j]<temp[i])
            tab[k] = temp[j--];
        else
            tab[k] = temp[i++];
}

template <class Item>
void mergeSortRange(Item *array,int left, int right, Item *temp)
{
    if(right<=left) return;

    int mean = (right+left)/2;

    mergeSortRange(array, left, mean, temp);
    mergeSortRange(array, mean+1, right, temp);

    merge(array, left, mean, right, temp);
}

template <class Item>
void mergeSort(Item *array,int size)
{
    Item *temp=new Item[size];
    mergeSortRange(array,0,size-1,temp);
    free(temp);
}
```

Kod 1. Implementacja algorytmu Mergesort.

Tabela 1. Wyniki pomiarów czasu algorytmu sortowania przez scalanie

n\rodzaj tabeli	losowo	odwrotnie	25%	50%	75%	95%	99%	99,70%
10 000	1,42	0,88	0,80	0,89	0,83	0,88	0,82	0,86
50 000	7,35	4,54	4,84	4,51	4,52	4,57	4,65	4,58
100 000	15,51	9,84	9,62	9,70	9,59	9,83	9,97	9,86
500 000	82,78	58,50	52,48	53,07	52,77	52,92	52,35	53,04
1 000 000	171,82	109,59	108,21	109,06	109,18	109,29	109,89	108,83



Wykres 1. Wyniki pomiarów czasu algorytmu sortowania przez scalanie

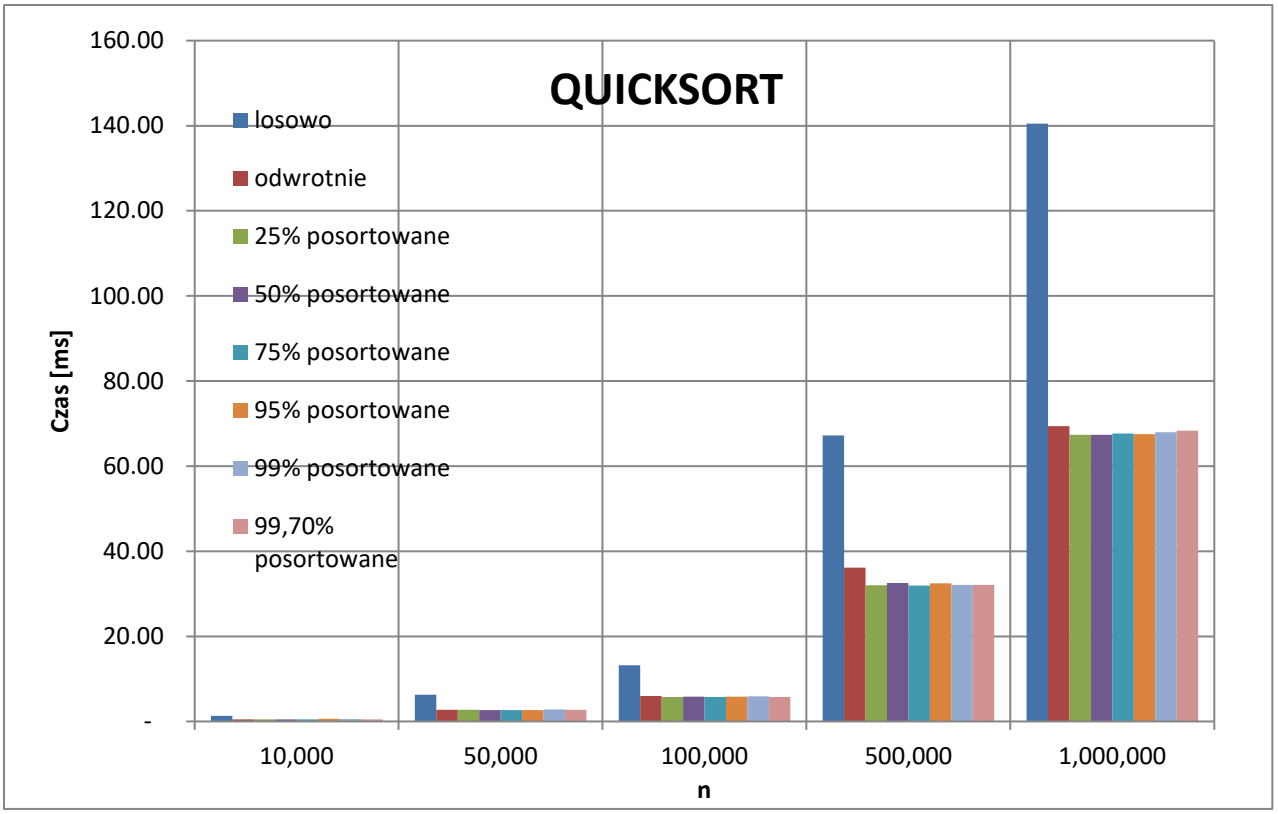
2) Sortowanie szybkie

```
template <class Item>
void quickSortRange(Item *array, int left, int right)
{
    if(right <= left) return;

    int i = left - 1, j = right + 1,
    pivot = array[(left+right)/2];

    while(1)
    {
        while(pivot>array[++i]);
        while(pivot<array[--j]);
        if( i <= j)
            swap(array[i],array[j]);
        else
            break;
    }
    if(j > left)
    quickSortRange(array, left, j);
    if(i < right)
    quickSortRange(array, i, right);
}
#endif // QUICKSORT_H
template <class Item>
void quickSort(Item *array, int size)
{
    quickSortRange(array,0,size-1);
}
```

Kod 2. Implementacja algorytmu Quicksort.

Tabela 2. Wyniki pomiarów czasu algorytmu sortowania szybkiego

n\rodzaj tabeli	losowo	odwrotnie	25%	50%	75%	95%	99%	99,70%
10 000	1,34	0,51	0,50	0,51	0,51	0,61	0,53	0,45
50 000	6,31	2,71	2,73	2,68	2,63	2,64	2,79	2,74
100 000	13,23	5,9	5,75	5,79	5,74	5,80	5,87	5,77
500 000	67,18	36,18	31,97	32,57	31,95	32,44	32,10	32,10
1 000 000	140,49	69,37	67,40	67,36	67,69	67,52	68,00	68,38



Wykres 2. Wyniki pomiarów czasu algorytmu sortowania szybkiego

3) Sortowanie introspektywne

```
template <class Item>
void exchange (Item *array, long i, long j)
{
  Item temp;
  temp=array[i];
  array[i]=array[j];
  array[j]=temp;
}
template <class Item>
void heapify (Item *array, long i, long N)
{
  long j;
  while (i<=N/2)
  {
    j=2*i;
    if (j+1<=N && array[j+1]>array[j])
      j=j+1;
    if (array[i]<array[j])
      exchange(array,i,j);
    else break;
    i=j;
  }
}
template <class Item>
void insertionSort (Item *array, long N)
{
  long i, j;
  Item temp;
  for (i=1; i<N; ++i)
  {
    temp=array[i];
    for (j=i; j>0 && temp<array[j-1]; --j)
      array[j]=array[j-1];
    array[j]=temp;
  }
}

template <class Item>
void heapSort (Item *array, long N)
{
  long i;
  for (i=N/2; i>0; --i)
    heapify(array-1,i,N);
  for (i=N-1; i>0; --i)
  {
    exchange(array,0,i);
    heapify(array-1,1,i);
  }
}
```

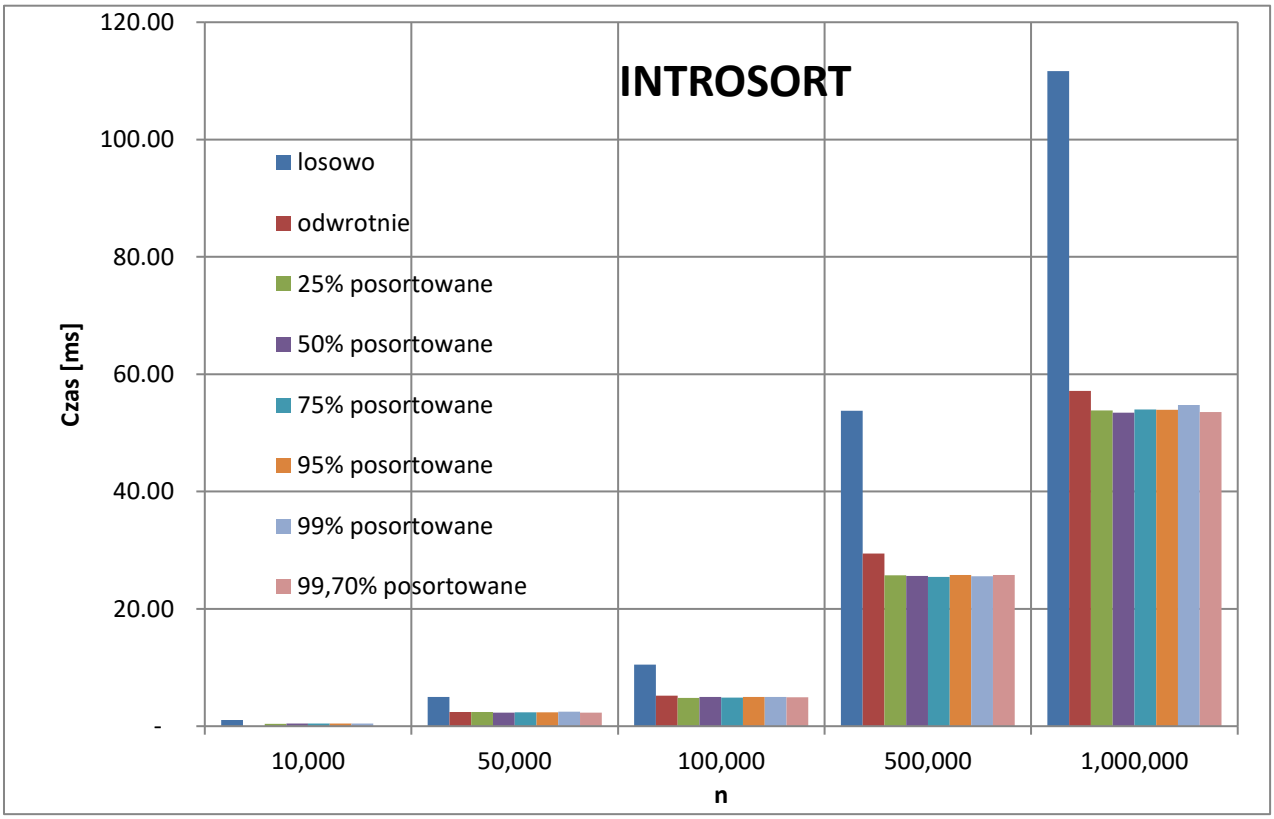
Kod 3. Implementacja algorytmu Introsort.

```
template <class Item>
void medianOfThree (Item *array, long &L, long &R)
{
  if (array[++L-1]>array[--R])
    exchange(array,L-1,R);
  if (array[L-1]>array[R/2])
    exchange(array,L-1,R/2);
  if (array[R/2]>array[R])
    exchange(array,R/2,R);
  exchange(array,R/2,R-1);
}
template <class Item>
long partition (Item *array, long L, long R)
{
  long i, j;
  if (R>=3)
    medianOfThree(array,L,R);
  for (i=L, j=R-2; ; )
  {
    for ( ; array[i]<array[R-1]; ++i);
    for ( ; j>=L && array[j]>array[R-1]; --j);
    if (i<j)
      exchange(array,i++,j--);
    else break;
  }
  exchange(array,i,R-1);
  return i;
}
template <class Item>
void introSort (Item *array, long N, int M)
{
  long i;
  if (M<=0)
  {
    heapSort(array,N);
    return;
  }
  i=partition(array,0,N);
  if (i>9)
    introSort(array,i,M-1);
  if (N-1-i>9)
    introSort(array+i+1,N-1-i,M-1);
}

template <class Item>
void introspectiveSort (Item *array, long N)
{
  introSort(array,N,static_cast<int>(floor(2*log(N)/M_LN2)));
  insertionSort(array,N);
}
```

Kod 4. Implementacja algorytmu Introsort.

Tabela 3. Wyniki pomiarów czasu algorytmu sortowania introspektywnego

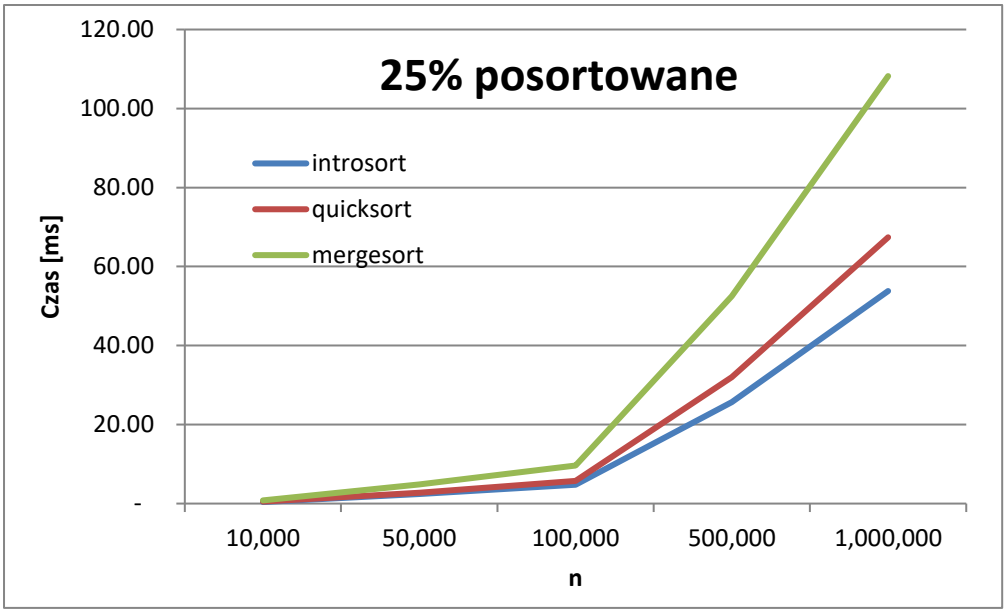
n\rodzaj tabeli	losowo	odwrotnie	25%	50%	75%	95%	99%	99,70%
10 000	1,05	0.43	0,39	0,44	0,44	0,47	0,45	0.45
50 000	5,00	2,42	2,41	2,29	2,35	2,36	2,45	2,29
100 000	10,50	5,18	4,80	4,96	4,86	4,97	5,00	4,91
500 000	53,75	29,45	25,71	25,60	25,44	25,80	25,58	25,78
1 000 000	111,68	57,17	53,80	53,46	54,00	53,96	54,74	53,53



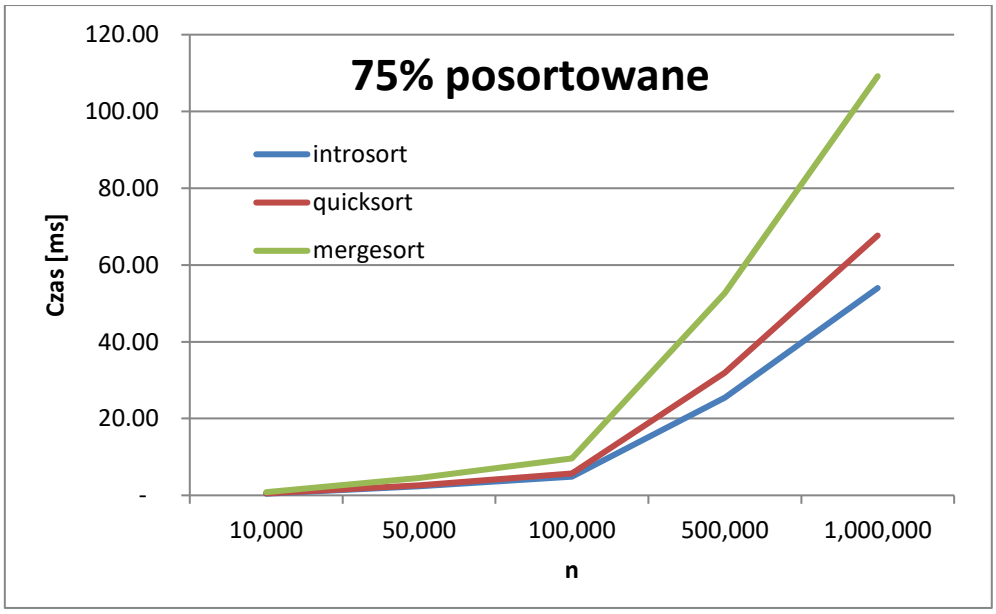
Wykres 3. Wyniki pomiarów czasu algorytmu sortowania introspektywnego

4. Sprawdzenie poprawności eksperymentu

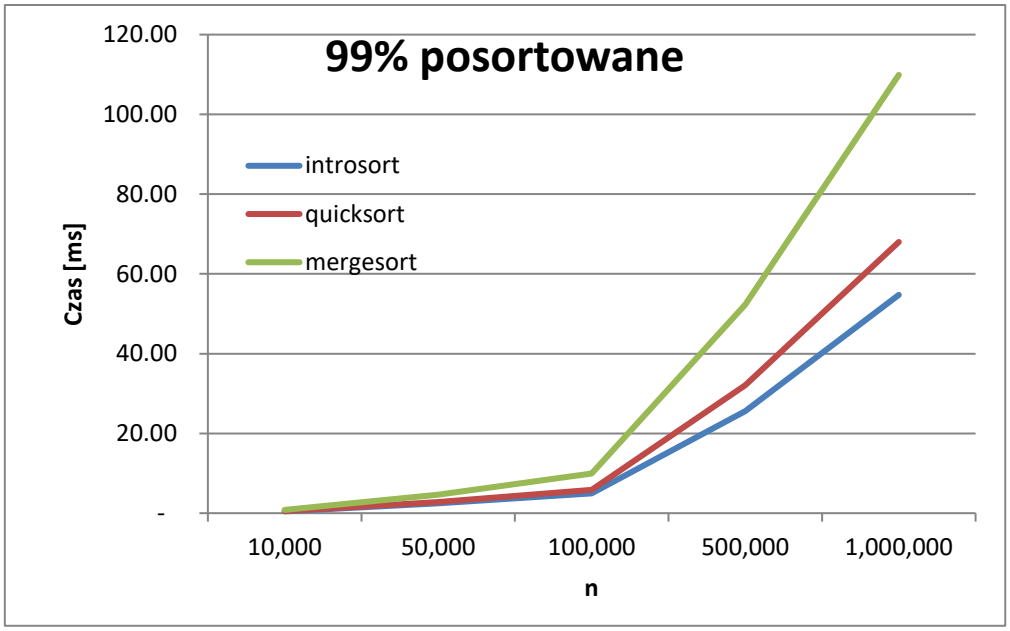
Dla wybranych przypadków posortowania tablic porównano wszystkie 3 typy sortowania:



Wykres 4. Porównanie 3 algorytmów dla przypadku, kiedy 25% początkowych elementów tablicy jest już posortowane



Wykres 5. Porównanie 3 algorytmów dla przypadku, kiedy 75% początkowych elementów tablicy jest już posortowane



Wykres 6. Porównanie 3 algorytmów dla przypadku, kiedy 99% początkowych elementów tablicy jest już posortowane

5. Wnioski

Zgodnie z przewidywaniami najskuteczniejszym typem sortowania okazał się algorytm sortowania introspektywnego, którego złożoność obliczeniowa dla najgorszego przypadku wynosi nlogn. Wykazał się on we wszystkich testach najkrótszym czasem sortowania każdej wielkości tablicy.

Drugi najbardziej optymalny algorytm to quicksort, który jest częścią sortowania introspektywnego. Dlatego czas jego działania jest dłuższy. Można to też zauważyć po jego złożoności obliczeniowej, która dla najgorszego przypadku wynosi n^2.

Najgorszym w eksperymencie okazał się algorytm sortowania przez scalanie, który wykazuje się tą samą złożonością obliczeniową dla każdego przypadku i wynosi ona nlogn.

6. Źródła

https://pl.wikipedia.org/wiki/Sortowanie_introspektywne
https://pl.wikipedia.org/wiki/Sortowanie_szybkie
https://pl.wikipedia.org/wiki/Sortowanie_przez_kopcowanie
http://www.algorytm.org/algorytmy-sortowania/sortowanie-szybkie-quicksort.html
http://www.algorytm.edu.pl/algorytmy-maturalne/sortowanie-przez-scalanie.html