zmlab1_zadania

November 17, 2023

1 Błedy i arytmetyka zmiennopozycyjna

Całość kodu można znaleźć w formie online pod linkiem github.com/KsawerySmoczynski/elementy-metod-numerycznych.

Jest on również dostępny pod tym linkiem w wersji interaktywnej w Google Colab

[ ]:
```
# Żeby odpalić notebook na google colab będziemy musieli zainstalować potrzebne␣
 ↪pakiety
import subprocess
import sys
import os

REQUIRED_PACKAGES = ["numpy", "matplotlib", "sympy"]
RUN_IN_COLAB = "COLAB_JUPYTER_IP" in os.environ

def install(packages):
    subprocess.check_call([sys.executable, "-m", "pip", "install", *packages])

if RUN_IN_COLAB:
    install(REQUIRED_PACKAGES)
```

1.1 Zadania

1.1.1 Zadanie1

Oblicz:

- $(0.1 + 0.2) + 0.3$ oraz $0.1 + (0.2 + 0.3)$
- $(0.1 * 0.6) * 0.7$ oraz $0.1 * (0.6 * 0.7)$,
- $0.1 * (0.7 - 0.6)$ oraz $0.1 * 0.7 - 0.1 * 0.6$

Porównaj otrzymane wyniki.

[1]:
```
# 1.
a = # zdefiniuj a
b = # zdefiniuj b

a == b, a, b
```

[1]: (False, 0.6000000000000001, 0.6)

[2]:
```
# 2.
a = # zdefiniuj a
b = # zdefiniuj b

a == b, a, b
```

[2]: (False, 0.041999999999999996, 0.52)

[3]:
```
# 3.
a = # zdefiniuj a
b = # zdefiniuj b

a == b, a, b
```

[3]: (False, 0.009999999999999998, 0.009999999999999995)

1.1.2 Zadanie 2

Niech $a = 1 + eps, b = 1 + \frac{eps}{2}$.

Które z tych liczb są równe 1 w arytmetyce zmiennopozycyjnej?

Czy liczby $a - 1$ i $b - 1$ są równe 0? Czy $\frac{eps}{2} = 0$?

Najpierw uzyskajmy epsilon maszynowy:

[8]:
```
# Algorytm uzyskujący epsilon maszynowy na skutek dodawania liczby do 1 i␣
↪jeżeli wynik nie jest równy 1 dzielenia tej liczby przez 2.
```

[8]: 2.220446049250313e-16

[9]:
```
# Epsilon maszynowy z informacji systemowej
import sys

# wypełnij
```

[9]: 2.220446049250313e-16

Jak widać uzyskany przez nas epsilon jest równy temu z informacji systemowej

[10]:
```
# Epsilon maszynowy z paczki numpy
import numpy as np

# wypełnij
```

[10]: 2.220446049250313e-16

Który jest równy temu zapenianemu przez pakiet do obliczeń numerycznych na wektorach - `numpy`

[ ]:
```
machine_eps = np.finfo(np.float64).eps

a = # zdefiniuj a
b = # zdefiniuj b

a == 1, b == 1
```

Odpowiedź: (wypełnij)

[13]:
```
a - 1 == 0, b - 1 == 0
```

[13]: (False, True)

Odpowiedź: (wypełnij)

[14]:
```
machine_eps / 2 == 0
```

[14]: False

Odpowiedź: (wypełnij)

1.1.3 Zadanie 3

Napisz skrypt zliczający sumę argumentów 0.1 do momentu, gdy otrzymana wartość wyniesie 2. Wykorzystaj pętlę while i dwa różne warunki stopu:

1. *while suma* <> 2,
2. $ while ; abs(suma-2)>0.001$.

Czy w obu przypadkach otrzymamy to samo?

[15]:
```
# 1 pętla
```

[16]:
```
# 2 pętla
```

[16]: 2.0000000000000004

Odpowiedź: (wypełnij)

1.1.4 Zadanie 4

Zdefinujmy ciąg całek wzorem

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

Ciąg ten spełnia zależność rekurencyjną $y_n + 5y_{n-1} = \frac{1}{n}$. Korzystając z tej zależności chcemy obliczyć wartości poszczególnych całek.

1. Napisz skrypt, który oblicza przybliżone wartości całek $y_1, \ldots, y_8$, wykorzystując wzór rekurencyjny $y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$ oraz początkowe przybliżenie całki $y_0 \approx 0.182$.
2. Napisz skrypt, który oblicza przybliżone wartości całek $y_7, \ldots, y_0$, wykorzystując wzór rekurencyjny $y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$oraz początkowe przybliżenie całki $y_8 \approx 0.019$.
3. Porównaj otrzymane w powyższych punktach wyniki i spróbuj wyjaśnić powstałe różnice.

1.

[18]:
```python
def y_n(n):
    # zdefiniuj funkcję
```

[19]:
```python
n = 9

y = []
for i in range(0,n):
    n_i = i+1
    y.append(y_n(n_i))
y
```

[19]:
```
[0.128,
 -0.14,
 1.0333333333333334,
 -4.916666666666667,
 24.783333333333335,
 -123.75,
 618.8928571428571,
 -3094.3392857142853,
 15471.807539682539]
```

2.

[ ]:
```python
def y_n(n):
    # zdefiniuj funkcję
```

[20]:
```python
y = []
n = 9
while n >= 1:
    y.append(y_n(n))
    n -= 1

list(reversed(y))
```

[20]:
```
[0.1823215572114286,
 0.08839221394285715,
 0.05803893028571428,
 0.04313868190476191,
 0.034306590476190474,
 0.028467047619047618,
 0.02433142857142857,
 0.0212,
 0.019]
```

3. Odpowiedź a - niestablilne numerycznie rozwiązanie - każdy następny wyraz multiplikuje błąd uzyskany w poprzednim

b - stabilne numerycznie rozwiązanie - każdy poprzedni wyraz powoduje dzielenie błędu

1.1.5 Zadanie 5.

Dla $x = 8^{-1}, 8^{-2}, \dots, 8^{-10}$ oblicz wartości funkcji:

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$,
2. $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Porównaj otrzymana wartości.

[21]:
```
x = # zdefiniuj x
x
```

[21]:
```
array([1.25000000e-01, 1.56250000e-02, 1.95312500e-03, 2.44140625e-04,
       3.05175781e-05, 3.81469727e-06, 4.76837158e-07, 5.96046448e-08,
       7.45058060e-09, 9.31322575e-10])
```

[22]:
```
# 1.
f = lambda x: # zdefiniuj funkcję
f(x)
```

[22]:
```
array([7.78221854e-03, 1.22062863e-04, 1.90734681e-06, 2.98023219e-08,
       4.65661287e-10, 7.27595761e-12, 1.13686838e-13, 1.77635684e-15,
       0.00000000e+00, 0.00000000e+00])
```

[23]:
```
# 2.
g = lambda x: # zdefiniuj funkcję
g(x)
```

```
/var/folders/j_/gy0508_n2w36wpr12gx3tz2m0000gn/T/ipykernel_4169/3292143112.py:2:
RuntimeWarning: divide by zero encountered in divide
  g = lambda x: x**2 / (np.sqrt(x**2 + 1) - 1)
```

[23]:
```
array([2.00778222, 2.00012206, 2.00000191, 2.00000003, 2.        ,
       2.        , 2.        , 2.        ,        inf,        inf])
```

1.1.6 Zadanie 5

Rozważmy funkcję $f(x) = \sin(x)$. Pochodną tej funkcji możemy przybliżyć za pomocą ilorazu różnicowego:

$$f'(x) \approx \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

dla małych wartości h. Dla $h = 10^{-n}$ $(n = 1, \dots, 16)$ i $x = 1$ wyznacz błąd tego przybliżenia.

Dla jakiej wartości h otrzymane przybliżenie jest najlepsze?

Zilustruj wyniki na wykresie, na którym wartości błędu będą prezentowane w skali logarytmicznej.

[24]:
```
x = # zdefiniuj x
h = # zdefiniuj h
```

[25]:
```python
approx_f_prime = lambda x, h: # zdefiniuj funkcję
approx_f_prime(x, h)
```

[25]:
```
array([0.49736375, 0.53608598, 0.53988148, 0.54026023, 0.5402981 ,
       0.54030189, 0.54030226, 0.54030229, 0.54030236, 0.54030225,
       0.54030114, 0.54034555, 0.53956839, 0.54400928, 0.55511151,
       0.        ])
```

[26]:
```python
f_prime = # zdefiniuj funkcję
f_prime(x)
```

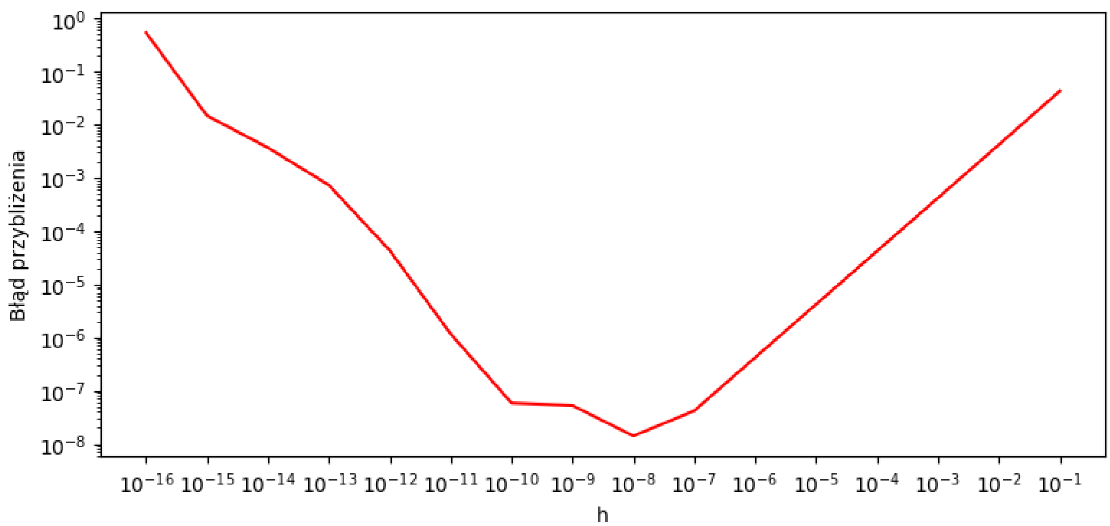
[26]:
```
0.5403023058681398
```

[27]:
```python
errors = # oblicz błędy
errors
```

[27]:
```
array([4.29385533e-02, 4.21632486e-03, 4.20825508e-04, 4.20744495e-05,
       4.20736228e-06, 4.20746809e-07, 4.18276911e-08, 1.40721155e-08,
       5.25412660e-08, 5.84810365e-08, 1.16870406e-06, 4.32402169e-05,
       7.33915900e-04, 3.70697620e-03, 1.48092064e-02, 5.40302306e-01])
```

[29]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

fig, ax = plt.subplots(figsize=(9, 4))
# Zdefiniuj wykres
plt.show()
```



Odpowiedź: (wypełnij)

1.2 Zadanie 6 (* 2 pkt)

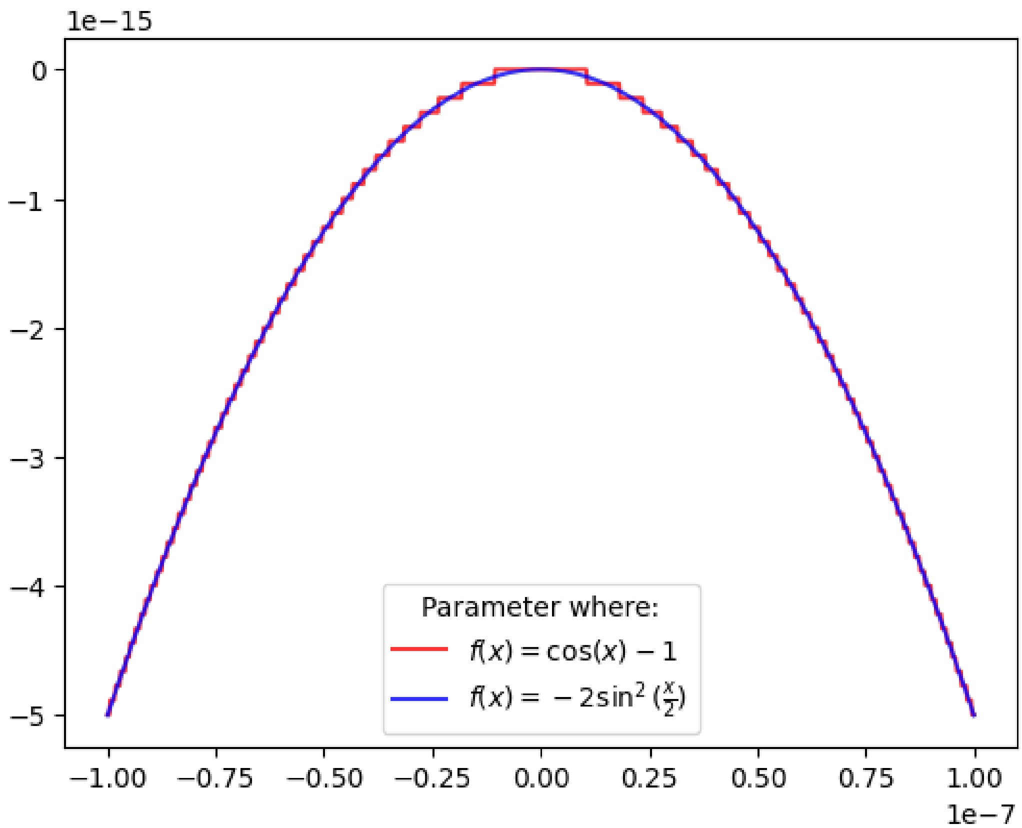
Niech $f(x) = \cos(x) - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2})$. Oblicz wartość podanej funkcji stosując oba podane wzory dla 1000 wartości x równomiernie rozlożonych w \$ (-10$^{\{-7\},10}$\{-7\})\$ i zilustruj otrzymane wyniki na wykresie.

Który wzór wydaje się lepszy? Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak jest.

Oba wykresy powinny być narysowane w jednym oknie i rozróżnialne (poprzez zastosowanie różnych kolorów lub stylów linii). Ponadto, proszę umieścić przy wykresach legendę.

[30]:
```
x = # zdefiniuj x
f_1 = lambda x: # zdefiniuj funkcję
f_2 = lambda x: # zdefiniuj funkcję
```

[31]:
```
fig, ax = plt.subplots()
# zdefiniuj wykres
plt.show()
```



1.2.1 Zadanie 7 (* 2 pkt)

Rozważmy wielomian $w(x) = (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

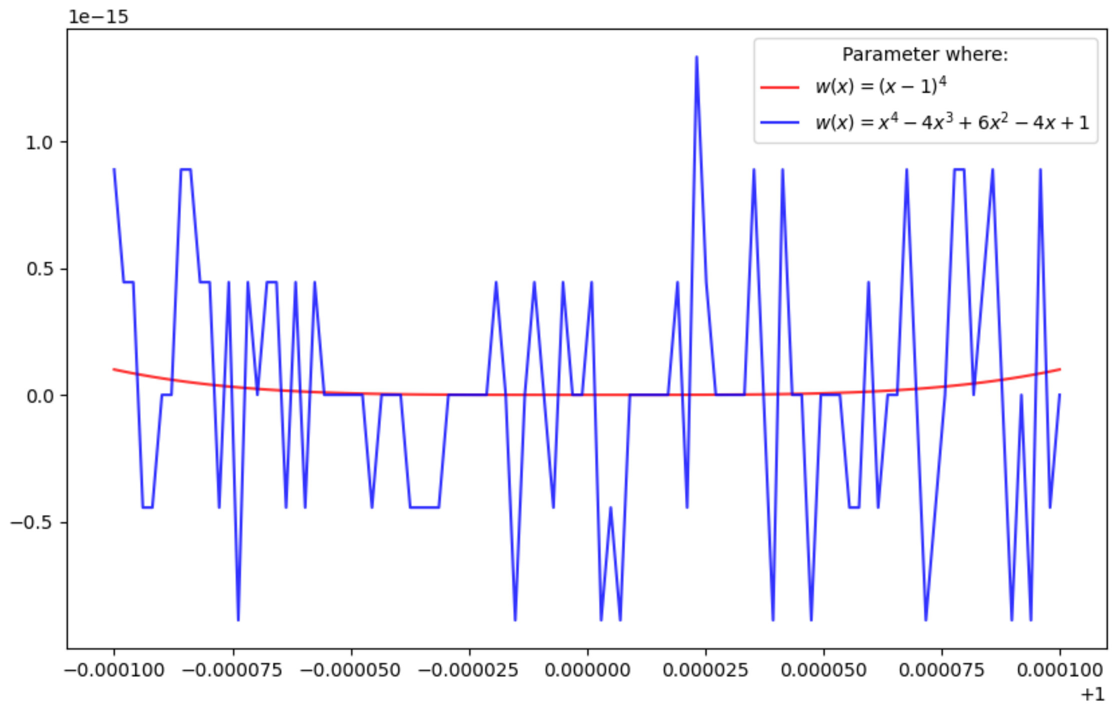
Oblicz stosując oba podane wzory wartość tego wielomianu dla 100 wartości x równomiernie rozłożonych w przedziale $(0.9999, 1.0001)$ i zilustruj otrzymane wyniki na wykresie.

Który wzór wydaje się lepszy? Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak jest.

Oba wykresy powinny być narysowane w jednym oknie i rozróżnialne (poprzez zastosowanie różnych kolorów lub stylów linii). Ponadto, proszę umieścić przy wykresach legendę.

[32]:
```
x = # zdefiniuj x
w_1 = lambda x: # zdefiniuj funkcję
w_2 = lambda x: # zdefiniuj funkcję
```

[33]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
# zdefiniuj wykres
plt.show()
```



Odpowiedź: (wypełnij)

2 Algorytm Hornera

Zauważmy, że wielomian o naturalnej postaci:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

można także zapisać jako:

$$w(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

Z postaci tej wynika sposób obliczania wartości wielomianu w punkcie zwany algorytmem Hornera. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0. Definiujemy:

$$\begin{aligned} w_n &= a_n, \\ w_i &= w_{i+1}x_0 + a_i, \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 0 \end{aligned}$$

Wtedy $w(x_0) = w_0$. Obliczając wartość wielomianu w punkcie w ten sposób ograniczamy liczbę mnożeń. Stosując algorytm Hornera możemy także obliczyć wynik dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - c$. Jeśli bowiem

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i)(x-c) + b_0,$$

to porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach otrzymujemy zależność $a_i = b_i - b_{i+1}c$ dla $i = 0, \dots, n-1$ i $a_n = b_n$. Oznacza to, że $b_i = w_i$ dla $i = 0, \dots, n$.

Kolejnym zastosowaniem algorytmu Hornera jest obliczanie wartości pochodnych znormalizowanych w punkcie x_0, tzn. wartości:

$$\frac{w^{(j)}(x_0)}{j!} \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n.$$

Zapiszmy wielomian $w(x)$ w postaci:

$$w(x) = (x - x_0)^j v(x) + r(x),$$

gdzie $r(x)$ jest wielomianem o stopniu mniejszym od j. Różniczkując to wyrażenie j razy i obliczając jego wartość w punkcie x_0 otrzymujemy równość:

$$w^{(j)}(x_0) = j! v(x_0).$$

Zatem chcąc obliczyć wartość j-tej pochodnej znormalizowanej wielomianu wystarczy zastosować algorytm Hornera j razy, żeby podzielić kolejno otrzymywane ilorazy przez $x - x_0$, a następnie obliczyć wartość otrzymanego wielomianu w punkcie x_0.

Ostatnim omawianym zastosowaniem algorytmu Hornera będzie zamiana liczby zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p ($p \neq 10$) na zapis w systemie dziesiętnym. Rozważmy liczbę zapisaną w systemie pozycyjnym o podstawie p:

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0\,_{(p)} = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0.$$

Zatem chcąc obliczyć wartość tej liczby w systemie dziesiętnym wystarczy obliczyć wartość wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ w punkcie p.

Wielomian możemy też zapisać w tzw. postaci Newtona:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Mając dany wielomian w tej postaci możemy w łatwy sposób obliczyć jego wartość w punkcie s korzystając z uogólnionego schematu Hornera:

$$\begin{aligned} p_n &= b_n \\ p_i &= p_{i+1}(s - x_i) + b_i, \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 0 \end{aligned}$$

[34]:
```
from numpy.polynomial import polynomial as P
```

2.0.1 Zadanie 1

Stosując polecenie `horner` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polyval`) oblicz wartość wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0 dla: 1. $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $x_0 = 1$, 2. $w(x) = 8x^3 + 5x^2 + 3x + 1$, $x_0 = -3$.

[35]:
```
# 1.
x0 = # zdefiniuj x
c = # zdefiniuj c

# oblicz
```

[35]:
```
-2.0
```

[36]:
```
# 2.
x0 = # zdefiniuj x
c = # zdefiniuj x
# oblicz
```

[36]:
```
-179.0
```

2.0.2 Zadanie 2.

Stosując polecenie `pdiv` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polydiv`) wyznacz wielomian będacy wynikiem dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $d(x)$:

1. $w(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 11$, $d(x) = x - 2$,
2. $w(x) = x^4 - 9x^2 + 3x - 5$, $d(x) = x + 7$.

[37]:
```
# 1.
w = # zdefiniuj w
d = # zdefiniuj d
q, r = # oblicz
q, r
```

[37]:
```
(array([14.,  9.,  2.]), array([39.]))
```

1. $q(x) = 2x^2 + 9x + 14$, $r(x) = 39$

[38]:
```
# 2.
w = # zdefiniuj w
d = # zdefiniuj d
q, r = # oblicz
q, r
```

[38]:
```
(array([115., -16.,   1.]), array([-810.]))
```

2. $q(x) = x^2 - 16x + 115$, $r(x) = x + 7$

2.0.3 Zadanie 3.

Używając poleceń `horner` i `pdiv` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polyval` i `np.polynomial.polynomial.polyval`), znajdź wszystkie pochodne znormalizowane wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0:

1. $w(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $x_0 = -2$,
2. $w(x) = x^4 - x^3 + 3x - 1$, $x_0 = 2$

[39]:
```
# 1.
x_0 = # zdefiniuj x_0
w = # zdefiniuj w
ds = # zdefiniuj listę d

polynomials = [w] # przechowuje współczynniki wielomianów v
for d in ds:
    # oblicz
    polynomials.append(v)
```

[40]:
```
import math

normalized_derivative = lambda v, j, x_0: # zdefiniuj funkcję
```

[41]:
```
for derivative_order, v in enumerate(polynomials):
    print(f"Derivative value at x_0 = {x_0} of order {derivative_order} equals␣
 ↪{normalized_derivative(v, derivative_order, x_0)}")
```

```
Derivative value at x_0 = -2 of order 0 equals 0.0
Derivative value at x_0 = -2 of order 1 equals 8.0
Derivative value at x_0 = -2 of order 2 equals -8.0
Derivative value at x_0 = -2 of order 3 equals 6.0
```

[48]:
```
# 2.
x_0 = # zdefiniuj x_0
w = # zdefiniuj w
ds = # zdefiniuj listę wielomianów d

polynomials = [w] # przechowuje współczynniki wielomianów v
for d in ds:
    # oblicz
    polynomials.append(v)
```

[49]:
```
# Jako, że zdefiniowaliśmy już funkcję na znormalizowaną pochodną to możemy jej␣
 ↪teraz użyć
for derivative_order, v in enumerate(polynomials):
    print(f"Derivative value at x_0 = {x_0} of order {derivative_order} equals␣
 ↪{normalized_derivative(v, derivative_order, x_0)}")
```

```
Derivative value at x_0 = 2 of order 0 equals 13.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 1 equals 23.0
```

```
Derivative value at x_0 = 2 of order 2 equals 36.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 3 equals 42.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 4 equals 24.0
```

2.0.4 Zadanie 4 (* 3 pkt)

Napisz funkcję, która dla danej liczby p $(2 \leq p \leq 9)$ i liczby zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p oblicza jej wartość w systemie dziesiętnym wykorzystując algorytm Hornera. Zakładamy, że dane wejściowe do funkcji są podane w postaci pary (c, p), gdzie p jest liczbą naturalną z zakresu od 2 do 9, a c jest wektorem kolejnych cyfr w zapisie pozycyjnym danej liczby, przy czym pierwsza współrzędna odpowiada współczynnikowi przy potędze liczby p o wykładniku 0.

Przetestuj tę funkcję na poniższych przykładach:

1. $([5, 4, 3, 2, 1], 6)$,
2. $([8, 5, 3, 2, 1, 1], 9)$,
3. $([0, 1, 0, 1, 1, 0, 1], 2)$.

Uwaga! Proszę nie używać wbudowanej funkcji `horner` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polyval`).

[54]:
```
def eval_positional_notation(c, p):
    # zdefiniuj funkcję
    return value
```

[55]:
```
# 1.
c = # zdefiniuj c
p = # zdefiniuj p

eval_positional_notation(c, p)
```

[55]: 1865

[56]:
```
eval_positional_notation(c, p) == P.polyval(p, c)
```

[56]: True

[57]:
```
# 2.
c = # zdefiniuj c
p = # zdefiniuj p

eval_positional_notation(c, p)
```

[57]: 67364

[58]:
```
eval_positional_notation(c, p) == P.polyval(p, c)
```

[58]: True

[59]:
```python
# 3.
c = # zdefiniuj c
p = # zdefiniuj p

eval_positional_notation(c, p)
```

[59]: 90

[60]:
```python
eval_positional_notation(c, p) == P.polyval(p, c)
```

[60]: True

2.0.5 Zadanie 5 (* 4 pkt)

Napisz funkcję, która korzystając z uogólnionego schematu Hornera dla wektora n różnych punktów $x = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, wektora $b = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$ współczynników wielomianu wielomianu w danego w postaci Newtona i wektora punktów $s = [s_1, s_2, \ldots, s_k]$ zwraca wektor wartości tego wielomianu interpolacyjnego w punktach $s_1, s_2, \ldots, s_k$.

Przetestuj tę funkcję dla następujących danych:

1. $x = [2, 4, 6, 8, 10]$, $b = [-1, 1, 2, 3, -4, 1]$, $s = [3, 5, 7, 9]$,
2. $x = [0, 0, -1, -1, -1, -2]$, $b = [3, -3, 3, -3, 2, 0, 2]$, $s = [-1, -2, 0, -1.5, -2.75, 5]$.

[61]:
```python
def generalized_horner_scheme(x, b, s):
    # zdefiniuj funkcję
    return value
```

[62]:
```python
# 1.
x = # zdefiniuj x
b = # zdefiniuj b
s = # zdefiniuj s

generalized_horner_scheme(x, b, s)
```

[62]: array([172, -82, 184, -134])

[63]:
```python
# 2.
x = # zdefiniuj x
b = # zdefiniuj b
s = # zdefiniuj s

generalized_horner_scheme(x, b, s)
```

[63]:
```
array([9.00000000e+00, 4.10000000e+01, 3.00000000e+00, 1.84687500e+01,
       1.80756348e+02, 7.70130000e+04])
```

[ ]:
```python

```