zmlab2_zadania_i_odpowiedzi

December 5, 2023

1 Interpolacja wielomianowa

2 Błedy i arytmetyka zmiennopozycyjna

Całość kodu można znaleźć w formie online pod linkiem github.com/KsawerySmoczynski/elementy-metod-numerycznych.

Jest on również dostępny pod tym linkiem w wersji interaktywnej w Google Colab

[1]:
```
# Żeby odpalić notebook na google colab będziemy musieli zainstalować potrzebne␣
↪pakiety
import subprocess
import sys
import os

REQUIRED_PACKAGES = ["numpy", "matplotlib", "scipy"]
RUN_IN_COLAB = "COLAB_JUPYTER_IP" in os.environ

def install(packages):
    subprocess.check_call([sys.executable, "-m", "pip", "install", *packages])

if RUN_IN_COLAB:
    install(REQUIRED_PACKAGES)
```

2.1 Zadania

2.1.1 Zadanie 1.

Napisz funkcję, która dla zadanego wielomianu w, wektora węzłów $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ oraz wektora odpowiadających im wartości $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ sprawdza, czy podany wielomian jest wielomianem Lagrange'a interpolującym te dane.

[2]:
```
import numpy as np
import numpy.polynomial.polynomial as P

# Example
x = np.array([6., 7., 8., 9.])
y = np.array([-3., 6., 0., 9.])
w = np.array([-2052, 836.5, -112.5, 5])
```

[3]:
```python
def is_lagrange_polynomial(w, x, y) -> bool:
    correct_values = np.allclose(y, P.polyval(x, w))
    # degree of polynomial has to be <= (#x - 1)
    # => len(w) is degree of polynomial + 1, so
    # adding 1 to righthandsize yields #x which is exactly len(x)
    correct_degree = len(w) <= len(x)
    return correct_values and correct_degree
```

[4]:
```python
is_lagrange_polynomial(w, x, y)
```

[4]: True

2.1.2 Zadanie 2.

(* 4 pkt) Napisz funkcję, która dla wektora $n+1$ różnych punktów $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ i wartości pewnej funkcji f w tych punktach zwraca wektor $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ współczynników wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a funkcji f w postaci Newtona opartego na węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$.

[5]:
```python
x = np.array([6., 7., 8., 9.])
y = np.array([-3., 6., 0., 9.])

def get_lagrange_coefficients(x, y):
    matrix = np.zeros((len(x), len(x)))
    matrix[:, 0] = y

    for i in range(len(x)):
        for j in range(len(x)-i-1):
            matrix[j, i+1] = (matrix[j+1, i] - matrix[j, i]) / (x[j+i+1]-x[j])
    lagrange_coefficients = matrix[0, :]
    return lagrange_coefficients
```

2.1.3 Zadanie 3.

($*$3 pkt) Napisz funkcję, która dla danych liczb rzeczywistych a, b $(a < b)$ i liczby naturalnej n oblicza wartości $n+1$ węzłów Czebyszewa w przedziale $[a, b]$, czyli wartości:

$$x_j = \frac{b-a}{2}\cos(\frac{2j+1}{2n+2}\pi) + \frac{a+b}{2} \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n.$$

[6]:
```python
[a, b] = [-1, 1]
n = 1000
[a, b], n
```

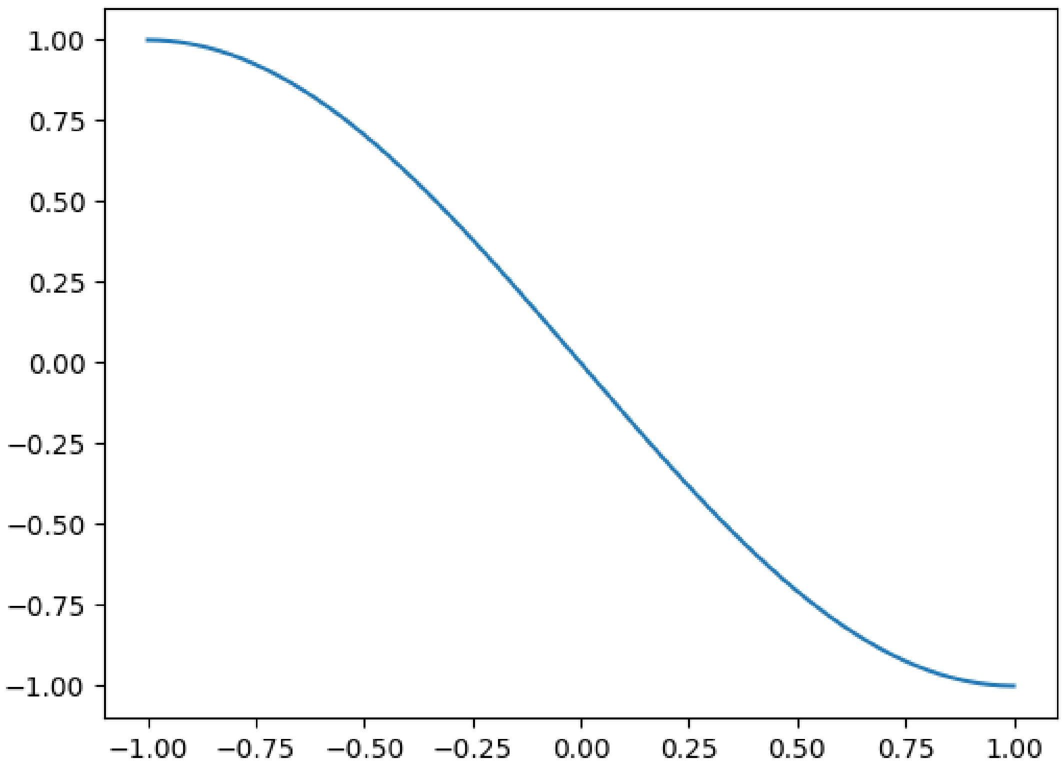
[6]: ([-1, 1], 1000)

[7]:
```python
def get_chebyshev_nodes(a, b, n):
    j = np.arange(n+1)
    chebyshev_nodes = (b - a) / 2 * np.cos((2*j + 1) / (2*n + 2) * np.pi) +
 ↪(a+b) / 2
```

```
    return chebyshev_nodes
```

[8]:
```
chebyshev_nodes = get_chebyshev_nodes(a, b, n)
```

[9]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(np.linspace(a,b,n+1), chebyshev_nodes)
plt.show()
```



2.1.4 Zadanie 4.

(* 2 pkt) Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w przedziale $I = [-5, 5]$.

1. Znajdź współczynniki b_i wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a tej funkcji opartego na 6 równoodległych węzłach w przedziale I.
2. Znajdź współczynniki b_i wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a tej funkcji opartego na 11 równoodległych węzłach w przedziale I.
3. Narysuj w jednym oknie wykresy funkcji f i dwóch obliczonych w poprzednich podpunktach wielomianów interpolacyjnych tej funkcji w przedziale I.

[10]:
```
def evaluate_lagrange_base_polynomials(x, x_nodes):
    d0 = np.ones_like(x)
    d1_n = x[:, np.newaxis] - x_nodes[:-1]
```

```
    d0_n = np.column_stack([d0, d1_n])
    p0_n = np.cumprod(d0_n, axis=1)
    return p0_n

def evaluate_lagrange(b, p):
    return np.sum((b[np.newaxis, :] * p), axis=1)
```

[11]:
```
f = lambda x: 1/(1+x**2)
```

[12]:
```
# 1. 6 równoodległych węzłów
x1_nodes = np.linspace(-5, 5, 6)
y1_nodes = f(x1_nodes)
b1 = get_lagrange_coefficients(x1_nodes, y1_nodes)
```

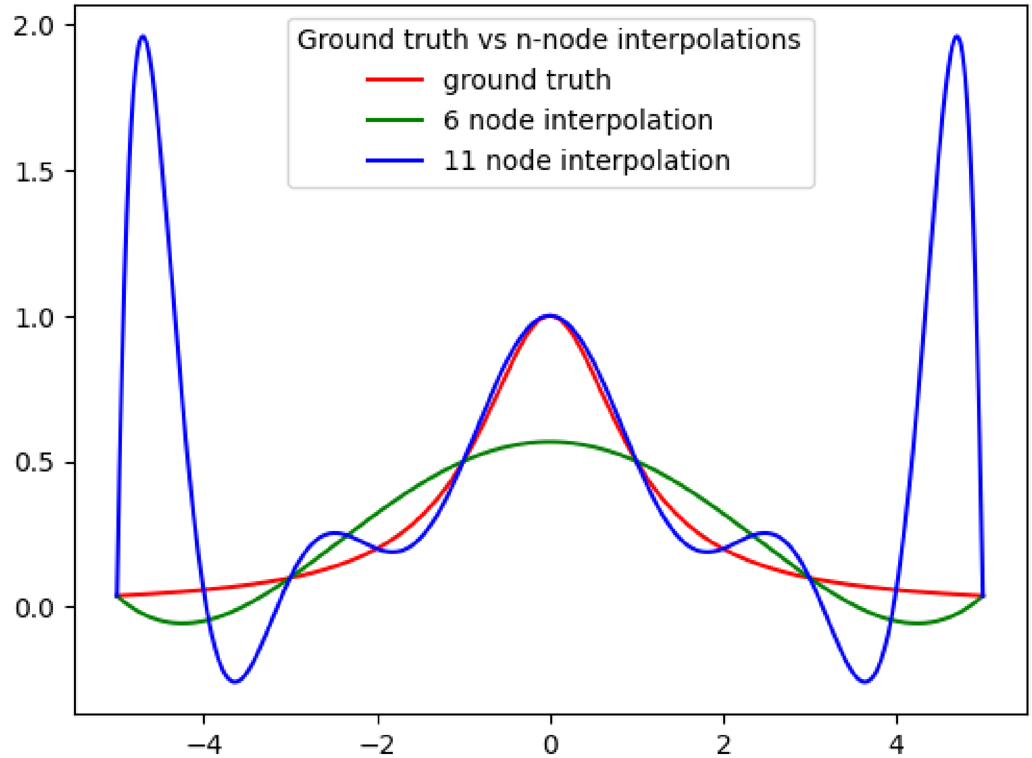
[13]:
```
# 2. 11 równoodległych węzłów
x2_nodes = np.linspace(-5, 5, 11)
y2_nodes = f(x2_nodes)
b2 = get_lagrange_coefficients(x2_nodes, y2_nodes)
```

[14]:
```
# 3. Wykresiki
x = np.linspace(-5, 5, 10_000)
# f(x) - czerwony
y_ground_truth = f(x)

# 6 węzłów - zielony
p1 = evaluate_lagrange_base_polynomials(x, x1_nodes)
y_6_nodes_interpolation = evaluate_lagrange(b1, p1)

# 11 węzłów - niebieski
p2 = evaluate_lagrange_base_polynomials(x, x2_nodes)
y_11_nodes_interpolation = evaluate_lagrange(b2, p2)
```

[15]:
```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, y_ground_truth, color="r", label="ground truth")
ax.plot(x, y_6_nodes_interpolation, color="g", label="6 node interpolation")
ax.plot(x, y_11_nodes_interpolation, color="b", label="11 node interpolation")
plt.legend(title='Ground truth vs n-node interpolations')
plt.show()
```

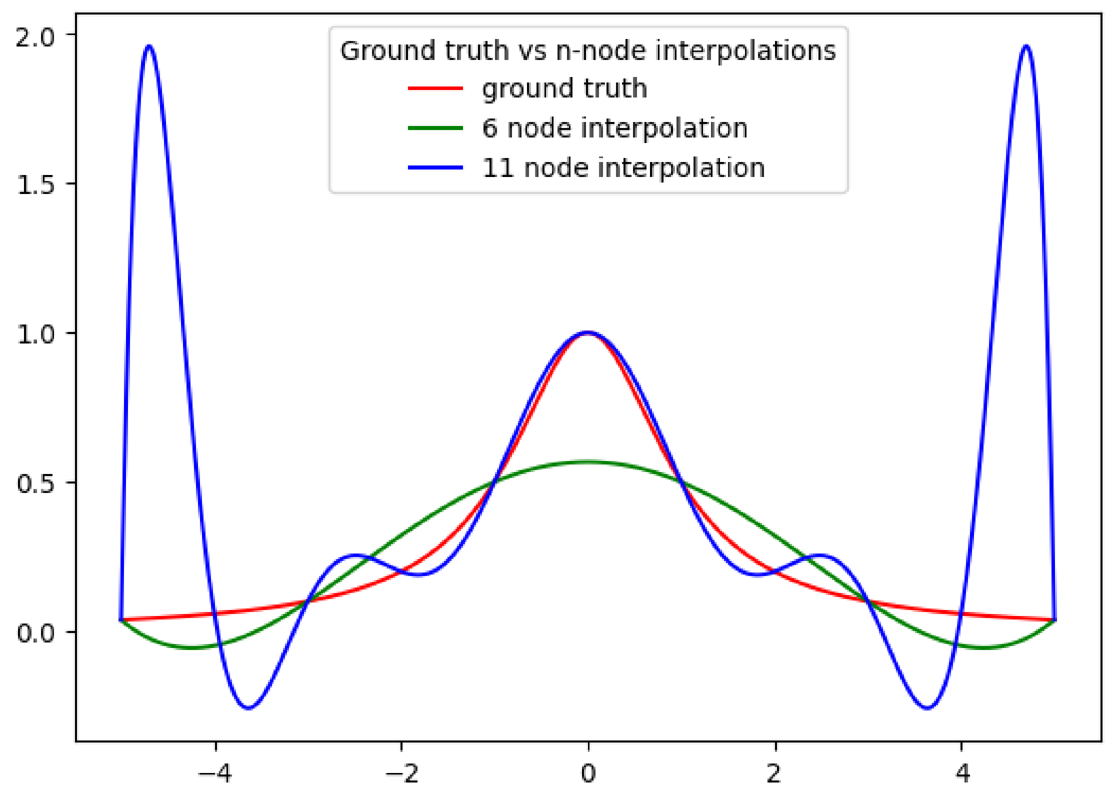


[16]:
```
# Verify with lagrange from scipy
from scipy.interpolate import lagrange
y_6_nodes_interpolation_scipy = P.polyval(x, lagrange(x1_nodes, y1_nodes).coef[:
 ↪:-1])
y_11_nodes_interpolation_scipy = P.polyval(x, lagrange(x2_nodes, y2_nodes).
 ↪coef[::-1])

np.allclose(y_6_nodes_interpolation_scipy, y_6_nodes_interpolation), np.
 ↪allclose(y_11_nodes_interpolation_scipy, y_11_nodes_interpolation)
```

[16]: (True, True)

[17]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7,5))
ax.plot(x, y_ground_truth, color="r", label="ground truth")
ax.plot(x, y_6_nodes_interpolation_scipy, color="g", label="6 node␣
 ↪interpolation")
ax.plot(x, y_11_nodes_interpolation_scipy, color="b", label="11 node␣
 ↪interpolation")
plt.legend(title='Ground truth vs n-node interpolations')
plt.show()
```



2.1.5 Zadanie 5.

($*$ 2 pkt) Dla funkcji f z poprzedniego zadania wyznacz współczynniki wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a w postaci Newtona opartych na 6 i 11 węzłach Czebyszewa w przedziale $[-5, 5]$.

Następnie narysuj w jednym oknie wykresy tych wielomianów i wyjściowej funkcji w tym przedziale.

[18]:
```
f = lambda x: 1/(1+x**2)
```

[19]:
```
# 1. 6 węzłów
[a, b] = [-5, 5]
n1 = 6
x1_nodes = get_chebyshev_nodes(a, b, n1)
y1_nodes = f(x1_nodes)
b1 = get_lagrange_coefficients(x1_nodes, y1_nodes)
```

[20]:
```
# 2. 11 węzłów
[a, b] = [-5, 5]
n2 = 11
x2_nodes = get_chebyshev_nodes(a, b, n2)
y2_nodes = f(x2_nodes)
```

```
b2 = get_lagrange_coefficients(x2_nodes, y2_nodes)
```

[21]:
```
# 3. Wykresiki
x = np.linspace(-5, 5, 10_000)
# f(x) - czerwony
y_ground_truth = f(x)

# 6 węzłów - zielony
p1 = evaluate_lagrange_base_polynomials(x, x1_nodes)
y_6_nodes_interpolation = evaluate_lagrange(b1, p1)

# 11 węzłów - niebieski
p2 = evaluate_lagrange_base_polynomials(x, x2_nodes)
y_11_nodes_interpolation = evaluate_lagrange(b2, p2)
```

[22]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(11.5,5))
ax.plot(x, y_ground_truth, color="r", label="ground truth")
ax.plot(x, y_6_nodes_interpolation, color="g", label="6 node interpolation")
ax.plot(x, y_11_nodes_interpolation, color="b", label="11 node interpolation")
plt.legend(title='Ground truth vs chebyshev n-node interpolation')
plt.show()
```