Błędy i arytmetyka zmiennopozycyjna

Zadania

1. Oblicz:

   - $(0.1 + 0.2) + 0.3$ oraz $0.1 + (0.2 + 0.3)$
   - $(0.1 * 0.6) * 0.7$ oraz $0.1 * (0.6 * 0.7)$,
   - $0.1 * (0.7 - 0.6)$ oraz $0.1 * 0.7 - 0.1 * 0.6$

   Porównaj otrzymane wyniki.

2. Niech $a = 1 + eps, b = 1 + \frac{eps}{2}$. Które z tych liczb są równe 1 w arytmetyce zmiennopozycyjnej? Czy liczby $a - 1$ i $b - 1$ są równe 0? Czy $\frac{eps}{2} = 0$?

3. Napisz skrypt zliczający sumę argumentów 0.1 do momentu, gdy otrzymana wartość wyniesie 2. Wykorzystaj pętlę while i dwa różne warunki stopu:

   (a) $while\ suma <> 2$,

   (b) $while\ abs(suma - 2) > 0.001$.

   Czy w obu przypadkach otrzymamy to samo?

4. Zdefinujmy ciąg całek wzorem

   $$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx$$

   Ciąg ten spełnia zależność rekurencyjną $y_n + 5y_{n-1} = \frac{1}{n}$. Korzystając z tej zależności chcemy obliczyć wartości poszczególnych całek.

   (a) Napisz skrypt, który oblicza przybliżone wartości całek $y_1, \ldots, y_8$, wykorzystując wzór rekurencyjny $y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$ oraz początkowe przybliżenie całki $y_0 \approx 0.182$.

   (b) Napisz skrypt, który oblicza przybliżone wartości całek $y_7, \ldots, y_0$, wykorzystując wzór rekurencyjny $y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$oraz początkowe przybliżenie całki $y_8 \approx 0.019$.

   (c) Porównaj otrzymane w powyższych punktach wyniki i spróbuj wyjaśnić powstałe różnice.

5. Rozważmy funkcję $f(x) = \sin(x)$. Pochodną tej funkcji możemy przybliżyć za pomocą ilorazu różnicowego:

   $$f^{'}(x) \approx \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

   dla małych wartości h. Dla $h = 10^{-n}$ $(n = 1, \ldots, 16)$ i $x = 1$ wyznacz błąd tego przybliżenia. Dla jakiej wartości h otrzymane przybliżenie jest najlepsze? Zilustruj wyniki na wykresie, na którym wartości błędu będą prezentowane w skali logarytmicznej.

6. (* 2 pkt) Niech $f(x) = \cos(x) - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2})$. Oblicz wartość podanej funkcji stosując oba podane wzory dla 1000 wartości x równomiernie rozłożonych w $(-10^{-7}, 10^{-7})$ i zilustruj otrzymane wyniki na wykresie. Który wzór wydaje się lepszy? Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak jest.
   Oba wykresy powinny być narysowane w jednym oknie i rozróżnialne (poprzez zastosowanie różnych kolorów lub stylów linii). Ponadto, proszę umieścić przy wykresach legendę.

7. (* 2 pkt) Rozważmy wielomian $w(x) = (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Oblicz stosując oba podane wzory wartość tego wielomianu dla 100 wartości x równomiernie rozłożonych w przedziale $(0.9999, 1.0001)$ i zilustruj otrzymane wyniki na wykresie. Który wzór wydaje się lepszy? Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak jest.
   Oba wykresy powinny być narysowane w jednym oknie i rozróżnialne (poprzez zastosowanie różnych kolorów lub stylów linii). Ponadto, proszę umieścić przy wykresach legendę.

Algorytm Hornera

Zauważmy, że wielomian o naturalnej postaci:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

można także zapisać jako:

$$w(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Z postaci tej wynika sposób obliczania wartości wielomianu w punkcie zwany algorytmem Hornera. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0. Definiujemy:

$$\begin{aligned} w_n &= a_n, \\ w_i &= w_{i+1}x_0 + a_i, \text{ dla } i = n-1, n-2, \ldots, 0 \end{aligned}$$

Wtedy $w(x_0) = w_0$. Obliczając wartość wielomianu w punkcie w ten sposób ograniczamy liczbę mnożeń.
Stosując algorytm Hornera możemy także obliczyć wynik dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - c$. Jeśli bowiem

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i)(x - c) + b_0,$$

to porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach otrzymujemy zależność $a_i = b_i - b_{i+1}c$ dla $i = 0, \ldots, n-1$ i $a_n = b_n$. Oznacza to, że $b_i = w_i$ dla $i = 0, \ldots, n$.
Kolejnym zastosowaniem algorytmu Hornera jest obliczanie wartości pochodnych znormalizowanych w punkcie x_0, tzn. wartości:

$$\frac{w^{(j)}(x_0)}{j!} \text{ dla } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Zapiszmy wielomian $w(x)$ w postaci:

$$w(x) = (x - x_0)^j v(x) + r(x),$$

gdzie $r(x)$ jest wielomianem o stopniu mniejszym od j. Różniczkując to wyrażenie j razy i obliczając jego wartość w punkcie x_0 otrzymujemy równość:

$$w^{(j)}(x_0) = j! v(x_0).$$

Zatem chcąc obliczyć wartość j-tej pochodnej znormalizowanej wielomianu wystarczy zastosować algorytm Hornera j razy, żeby podzielić kolejno otrzymywane ilorazy przez $x - x_0$, a następnie obliczyć wartość otrzymanego wielomianu w punkcie x_0.
Ostatnim omawianym zastosowaniem algorytmu Hornera będzie zamiana liczby zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p ($p \neq 10$) na zapis w systemie dziesiętnym. Rozważmy liczbę zapisaną w systemie pozycyjnym o podstawie p:

$$c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0 \,{}_{(p)} = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \ldots + c_1 p + c_0.$$

Zatem chcąc obliczyć wartość tej liczby w systemie dziesiętnym wystarczy obliczyć wartość wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ w punkcie p.
Wielomian możemy też zapisać w tzw. postaci Newtona:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

Mając dany wielomian w tej postaci możemy w łatwy sposób obliczyć jego wartość w punkcie s korzystając z uogólnionego schematu Hornera:

$$\begin{aligned} p_n &= b_n \\ p_i &= p_{i+1}(s - x_i) + b_i, \text{ dla } i = n-1, n-2, \ldots, 0 \end{aligned}$$

Zadania

1. Stosując polecenie *horner* oblicz wartość wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0 dla:
   (a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $x_0 = 1$,
   (b) $w(x) = 8x^3 + 5x^2 + 3x + 1$, $x_0 = -3$.

2. Stosując polecenie *pdiv* wyznacz wielomian będacy wynikiem dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $d(x)$:
   (a) $w(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 11$, $d(x) = x - 2$,
   (b) $w(x) = x^4 - 9x^2 + 3x - 5$, $d(x) = x + 7$.

3. Używając poleceń *horner* i *pdiv*, znajdź wszystkie pochodne znormalizowane wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0:
   (a) $w(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $x_0 = -2$,
   (b) $w(x) = x^4 - x^3 + 3x - 1$, $x_0 = 2$

4. (* 3 pkt) Napisz funkcję, która dla danej liczby p $(2 \leq p \leq 9)$ i liczby zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p oblicza jej wartość w systemie dziesiętnym wykorzystując algorytm Hornera. Zakładamy, że dane wejściowe do funkcji są podane w postaci pary (c, p), gdzie p jest liczbą naturalną z zakresu od 2 do 9, a c jest wektorem kolejnych cyfr w zapisie pozycyjnym danej liczby, przy czym pierwsza współrzędna odpowiada współczynnikowi przy potędze liczby p o wykładniku 0. Przetestuj tę funkcję na poniższych przykładach:
   (a) $([5, 4, 3, 2, 1], 6)$,
   (b) $([8, 5, 3, 2, 1, 1], 9)$,
   (c) $([0, 1, 0, 1, 1, 0, 1], 2)$.

5. (* 4 pkt) Napisz funkcję, która korzystając z uogólnionego schematu Hornera dla wektora n różnych punktów $x = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, wektora $b = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$ współczynników wielomianu wielomianu w danego w postaci Newtona i wektora punktów $s = [s_1, s_2, \ldots, s_k]$ zwraca wektor wartości tego wielomianu interpolacyjnego w punktach $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Przetestuj tę funkcję dla następujących danych:
   (a) $x = [2, 4, 6, 8, 10]$, $b = [-1, 1, 2, 3, -4, 1]$, $s = [3, 5, 7, 9]$,
   (b) $x = [0, 0, -1, -1, -1, -2]$, $b = [3, -3, 3, -3, 2, 0, 2]$, $s = [-1, -2, 0, -1.5, -2.75, 5]$.