

Interpolacja wielomianowa

Zadania

1. Napisz funkcję, która dla zadanego wielomianu w , wektora węzłów (x_0, x_1, \dots, x_n) oraz wektora odpowiadających im wartości (y_0, y_1, \dots, y_n) sprawdza, czy podany wielomian jest wielomianem Lagrange'a interpolującym te dane.
2. (* 4 pkt) Napisz funkcję, która dla wektora $n + 1$ różnych punktów (x_0, x_1, \dots, x_n) i wartości pewnej funkcji f w tych punktach zwraca wektor (b_0, b_1, \dots, b_n) współczynników wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a funkcji f w postaci Newtona opartego na węzłach x_0, x_1, \dots, x_n .

3. (* 3 pkt) Napisz funkcję, która dla danych liczb rzeczywistych a, b ($a < b$) i liczby naturalnej n oblicza wartości $n + 1$ węzłów Czebyszewa w przedziale $[a, b]$, czyli wartości:

$$x_j = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{a+b}{2} \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n.$$

4. (* 2 pkt) Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w przedziale $I = [-5, 5]$.
 - (a) Znajdź współczynniki b_i wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a tej funkcji opartego na 6 równoodległych węzłach w przedziale I .
 - (b) Znajdź współczynniki b_i wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a tej funkcji opartego na 11 równoodległych węzłach w przedziale I .
 - (c) Narysuj w jednym oknie wykresy funkcji f i dwóch obliczonych w poprzednich podpunktach wielomianów interpolacyjnych tej funkcji w przedziale I .
5. (* 2 pkt) Dla funkcji f z poprzedniego zadania wyznacz współczynniki wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a w postaci Newtona opartych na 6 i 11 węzłach Czebyszewa w przedziale $[-5, 5]$. Następnie narysuj w jednym oknie wykresy tych wielomianów i wyjściowej funkcji w tym przedziale.