zmlab3_zadania_i_odpowiedzi

January 26, 2024

1 Całkowanie numeryczne

Całość kodu można znaleźć w formie online pod linkiem github.com/KsawerySmoczynski/elementy-metod-numerycznych.

Jest on również dostępny pod tym linkiem w wersji interaktywnej w Google Colab

[ ]:
```
# Żeby odpalić notebook na google colab będziemy musieli zainstalować potrzebne␣
↪pakiety
import subprocess
import sys
import os

REQUIRED_PACKAGES = ["numpy", "matplotlib", "scipy", "sympy"]
RUN_IN_COLAB = "COLAB_JUPYTER_IP" in os.environ

def install(packages):
    subprocess.check_call([sys.executable, "-m", "pip", "install", *packages])

if RUN_IN_COLAB:
    install(REQUIRED_PACKAGES)
```

1.1 Zadanie 1

Znajdź wartości powyższych całek używając funkcji inttrap (scipy.integrate.trapezoid) dla dwóch, trzech i 5 węzłów:

1. $\int_0^4 \frac{x}{x^2+12} dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$
3. $\int_1^3 2^{x^2-3x+1} dx$

Oszacuj błąd otrzymanych przybliżeń.

[1]:
```
from typing import Callable
import numpy as np
import scipy as sp



n = [2, 3, 5]
```

```python
def trapezoid_n_integrations(f:Callable, a:float, b:float, n:list):
    ys = []
    for ni in n:
        x = np.linspace(a, b, ni)
        y = sp.integrate.trapezoid(f(x), x)
        ys.append(y)
    return ys
```

[2]:
```python
# 1
a = 0
b = 4
f = lambda x: x / (x*2 + 12)
trapezoid_n_integrations(f, a, b, n)
```

[2]: [0.4, 0.45, 0.4630952380952381]

[3]:
```python
# 2
a = 0
b = np.pi / 2
f = lambda x: x**2*np.sin(x)
x = np.linspace(a, b)
trapezoid_n_integrations(f, a, b, n)
```

[3]: [1.9378922925187385, 1.3115203415716554, 1.1824792489570735]

[4]:
```python
# 3
a = 1
b = 3
f = lambda x: 2**(x**2 - 3*x + 1)
trapezoid_n_integrations(f, a, b, n)
```

[4]: [2.5, 1.75, 1.5056723114402857]

1.2 Zadanie 2

(3 pkt) Napisz funkcję **Simpson**, która dla danej funkcji f oraz liczb a, b będacych krańcami pewnego przedziału i liczby naturalnej N wylicza przybliżoną wartość całki $\int_a^b f(x)dx$ stosując złożoną kwadraturę Simpsona i podział przedziału $[a, b]$ na N równych części.

[5]:
```python
def simpson(f, a, b, n):
    h = (b-a) / n
    x1 = np.full(n-1, a) + np.linspace(h, (n-1)*h, (n-1))
    x2 = np.r_[np.array([a]), x1.copy()] + h / 2
    return (h / 6) * (f(a) + 2 * np.sum(f(x1)) + 4 * np.sum(f(x2)) + f(b))

f = lambda x: x**1
simpson(f, 0, 2, 100)
```

[5]: 2.0

1.3 Zadanie 3

(2 pkt) Oblicz wartości poniższych całek, używając złożonych wzorów trapezów i Simpsona dla $N \in \{2, 3, ..., 10\}$. Oblicz błędy względne otrzymanych przybliżeń. Dla każdej z tych całek narysuj na jednym wykresie błędy otrzymane w wyniku stosowania obu tych wzorów w zależności od N. Zastosuj skalę logarytmiczną dla tych wartości. Dodaj tytuł i legendę do wykresów. 1. $\int_2^5 \frac{\ln \ln x}{x} dx$, 2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

[6]:
```python
import sympy
n = np.arange(2,11)
```

[7]:
```python
# 1
a = 2
b = 5
f = lambda x: np.log(np.log(x)) / x

x = sympy.Symbol('x')
sympy.integrate(sympy.log(sympy.log(x)) / x, x)
```

[7]: $\log(x)\log(\log(x)) - \log(x)$

[8]:
```python
F = lambda x: np.log(x)*(np.log(np.log(x)) - 1)
true_x = F(b) - F(a)
true_x
```

[8]: 0.10366401910379308

[9]:
```python
trapezoid_output = np.array(trapezoid_n_integrations(f, a, b, n))
trapezoid_errors = np.abs(trapezoid_output - true_x)
trapezoid_errors
```

[9]:
```
array([0.23578321, 0.07314441, 0.03469591, 0.02006387, 0.01302358,
       0.00911791, 0.00673296, 0.00517234, 0.0040964 ])
```

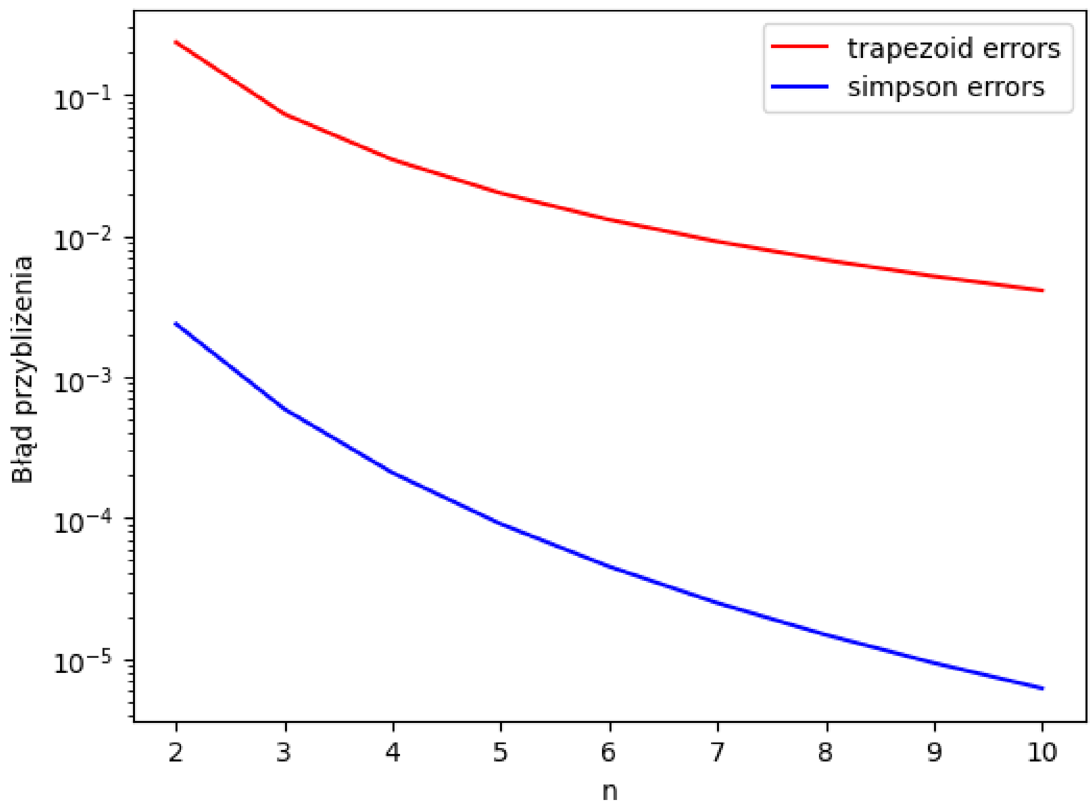
[10]:
```python
simpson_output = np.array([simpson(f, a, b, ni) for ni in n])
simpson_errors = np.abs(simpson_output - true_x)
simpson_errors
```

[10]:
```
array([2.37035818e-03, 5.91911016e-04, 2.08490445e-04, 9.04579457e-05,
       4.51431635e-05, 2.49069766e-05, 1.48179545e-05, 9.34806168e-06,
       6.18034620e-06])
```

[11]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

fix, ax = plt.subplots()
ax.plot(n, trapezoid_errors, c="r", label="trapezoid errors")
```

```python
ax.plot(n, simpson_errors, c="b", label="simpson errors")
ax.set_xlabel("n")
ax.set_ylabel("Błąd przybliżenia")
# ax.set_xscale("log")
ax.set_yscale("log")
# ax.set_xticks(h)
ax.legend()
plt.show()
```



2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

[12]:
```python
# 2
a = 0
b = 1
f = lambda x: 1/ (1 + x**2)

x = sympy.Symbol('x')
sympy.integrate(1 / (1 + x ** 2), x)
```

[12]: $\operatorname{atan}(x)$

[13]:
```
F = lambda x: np.arctan(x)
true_x = F(b) - F(a)
true_x
```

[13]:
```
0.7853981633974483
```

[14]:
```
trapezoid_output = np.array(trapezoid_n_integrations(f, a, b, n))
trapezoid_errors = np.abs(trapezoid_output - true_x)
trapezoid_errors
```

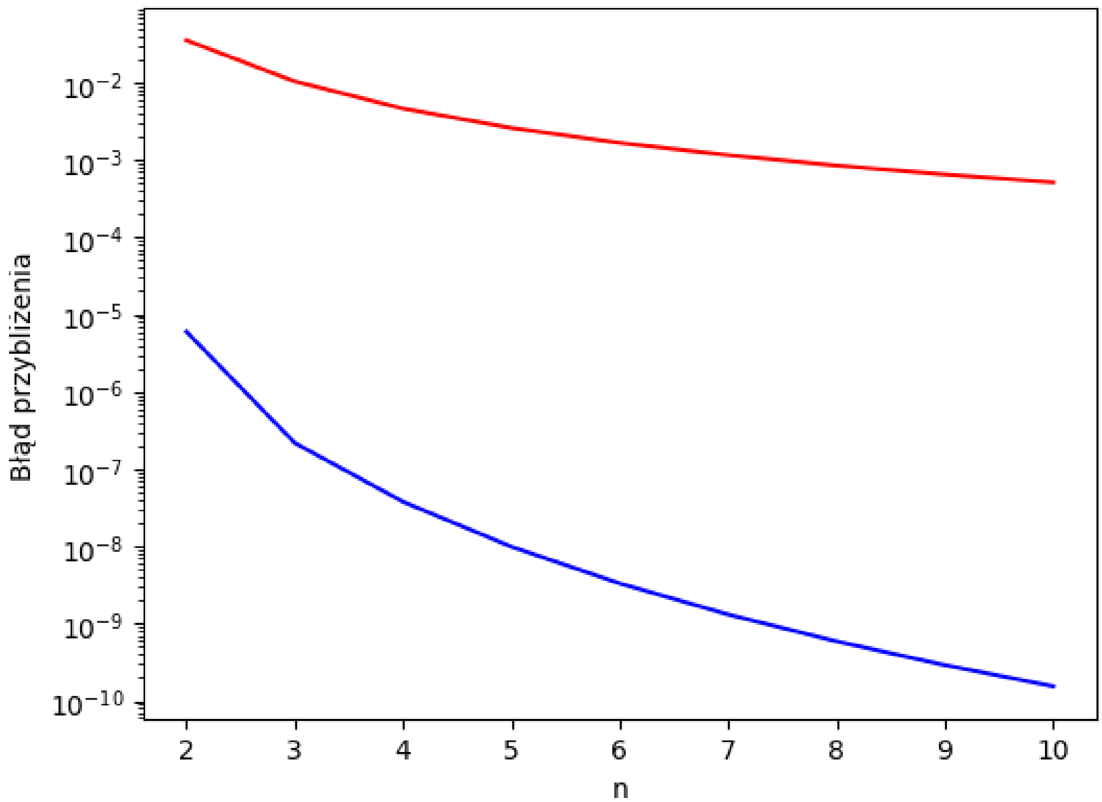
[14]:
```
array([0.03539816, 0.01039816, 0.00462893, 0.00260405, 0.00166663,
       0.0011574 , 0.00085034, 0.00065104, 0.0005144 ])
```

[15]:
```
simpson_output = np.array([simpson(f, a, b, ni) for ni in n])
simpson_errors = np.abs(simpson_output - true_x)
simpson_errors
```

[15]:
```
array([6.00653470e-06, 2.18163438e-07, 3.77827716e-08, 9.91264448e-09,
       3.32110339e-09, 1.31728461e-09, 5.91242832e-10, 2.91656033e-10,
       1.55002011e-10])
```

[16]:
```
import matplotlib.pyplot as plt

fix, ax = plt.subplots()
ax.plot(n, trapezoid_errors, c="r", label="trapezoid errors")
ax.plot(n, simpson_errors, c="b", label="simpson errors")
ax.set_xlabel("n")
ax.set_ylabel("Błąd przybliżenia")
# ax.set_xscale("log")
ax.set_yscale("log")
# ax.set_xticks(h)
plt.show()
```



2 Rozwiązywanie równań nieliniowych

2.1 Zadanie 1

(3 pkt) Napisz funkcję **bisekcja**, która dla danych punktów a, b, funkcji f i parametrów związanych z kryteriami stopu M, δ, ε znajduje przybliżenie zera tej funkcji w przedziale $[a, b]$ metodą bisekcji.

[17]:
```
def bisekcja(f:Callable[[float], float], a:float, b:float, M:int, delta:float,␣
↪epsilon:float) -> float:
    y = a
    z = b
    x_k = float("inf")
    for n in range(M+1):
        x_k1 = (y + z) / 2
        if f(x_k1)*f(y) < 0:
            z = x_k1
        elif f(x_k1)*f(z) < 0:
            y = x_k1
        if abs(f(x_k1)) < delta or abs(x_k-x_k1) < epsilon:
            break
        x_k = x_k1
```

```
    return x_k1, n

f = lambda x: x + 1
a = -5
b = 2
M = 10
delta = 1e-20
epsilon = 1e-20

bisekcja(f, a, b, M, delta, epsilon)
```

[17]: (-0.99755859375, 10)

2.2 Zadanie 2

(3 pkt) Napisz funkcję **styczne**, która dla danego punktu x_0, funkcji f i parametrów związanych z kryteriami stopu M, δ, ε znajduje przybliżenie zera tej funkcji metodą Newtona.

[18]:
```
def styczna(f: Callable[[float], float], x_0:float, M:int, delta:float, epsilon:
 ↪float, f_prime: Callable[[float], float] = None) -> float:
    def _get_f_prime():
        sympy_f_prime = sympy.diff(f(sympy.Symbol("x")))
        return lambda x: float(sympy_f_prime.evalf(subs={"x": x}))
    f_prime = f_prime or _get_f_prime()

    x_k = x_0
    for n in range(M+1):
        try:
            x_k1 = f(x_k) /  f_prime(x_k)
        except ZeroDivisionError:
            # if derivative is equal to 0 we will divide by zero, let's move␣
 ↪away a bit
            x_k += np.sign(x_k) * epsilon
            continue
        if abs(f(x_k1)) < delta or abs(x_k-x_k1) < epsilon:
            break
        x_k = x_k1

    return x_k1, n

f = lambda x: 4 - x ** 2
f_prime = lambda x: 2*x
f = np.exp
f_prime = np.exp
x_0 = -1e-2
M = 100_000_000
delta = 1e-10000
```

```
epsilon = 1e-7

styczna(f, x_0, M, delta, epsilon, f_prime)
# Metoda jest niestabilna
```

[18]: (1.0, 1)

2.3 Zadanie 3

(3 pkt) Napisz funkcję **sieczne**, która dla danych punktów x_0, x_1, funkcji f i parametrów związanych z kryteriami stopu M, δ, ε znajduje przybliżenie zera tej funkcji metodą siecznych.

[19]:
```
def sieczna(f:Callable[[float], float], x_0:float, x_1:float, M:int, delta:
↪float, epsilon:float) -> float:
    # TODO https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_siecznych#Modyfikacja
    if f(x_0) == f(x_1):
        raise ValueError("Function value for x_0 and x_1 is equal, adjust␣
↪values")
    x_k_1 = x_0
    x_k = x_1
    for n in range(M+1):
        f_k = f(x_k)
        f_k_1 = f(x_k_1)
        # if f_k * f_k_1 > 0:
        #     raise ArithmeticError("Method won't converge")
        x_k1 = x_k - ((x_k - x_k_1) / (f_k - f_k_1)) * f_k
        x_k_1 = x_k
        x_k = x_k1
        if abs(f(x_k)) < delta or abs(x_k_1-x_k) < epsilon:
            break
    return x_k1, n

f = lambda x: x ** 2 - 4
x_0 = 3
x_1 = 2
M = 10
delta = 1e-5
epsilon = 1e-5

sieczna(f, x_0, x_1, M, delta, epsilon)
```

[19]: (2.0, 0)

2.4 Zadanie 4

(2 pkt) Znajdź przybliżoną wartość $\sqrt[4]{4}$ stosując metody bisekcji, stycznych i siecznych z dokładnością $\varepsilon \in \{2^{-5}, 2^{-6}, \ldots, 2^{-15}\}$. Porównaj szybkość zbieżności (liczbę iteracji) potrzebnych do uzyskania

zadowalającego przybliżenia w zależności od ε. Przedstaw wyniki na wykresie. Do wykresu dodaj tytuł i legendę.

[20]:
```
epsilons = np.power(2., -np.arange(5, 16))

f = lambda x: x ** 2 - 2
# f = lambda x: 4 * np.log(x) - np.log(4)
f_prime = lambda x: 2*x
# f_prime = lambda x: 4 / x

bisekcje = []
styczne = []
sieczne = []
x_0 = -1
x_1 = 2
M = 30
delta = np.finfo(np.float32).eps # minimalna mozliwa delta, aby warunkiem stopu
 ↪bylo albo M albo epsilon

for epsilon in epsilons:
    bisekcje.append(bisekcja(f, x_0, x_1, M, delta, epsilon))
    # print("bisekcja")
    styczne.append(styczna(f, x_0, M, delta, epsilon, f_prime))
    # print("styczna")
    sieczne.append(sieczna(f, x_0, x_1, M, delta, epsilon))
    # print("sieczna")
    print(f"Epsilon {epsilon:.5f} done")
```

```
Epsilon 0.03125 done
Epsilon 0.01562 done
Epsilon 0.00781 done
Epsilon 0.00391 done
Epsilon 0.00195 done
Epsilon 0.00098 done
Epsilon 0.00049 done
Epsilon 0.00024 done
Epsilon 0.00012 done
Epsilon 0.00006 done
Epsilon 0.00003 done
```

[21]:
```
np.min(np.array(bisekcje)[:,:1]), np.max(np.array(bisekcje)[:,:1]), np.std(np.
 ↪array(bisekcje)[:,:1])
```

[21]:
```
(1.4140625, 1.42578125, 0.003468398596803355)
```

[22]:
```
np.min(np.array(styczne)[:,:1]), np.max(np.array(styczne)[:,:1]), np.std(np.
 ↪array(styczne)[:,:1])
```

[22]: (-0.8302294422420144, -0.8302294422420144, 1.1102230246251565e-16)

[23]:
```
np.min(np.array(sieczne)[:,:1]), np.max(np.array(sieczne)[:,:1]), np.std(np.
    ↪array(sieczne)[:,:1])
```

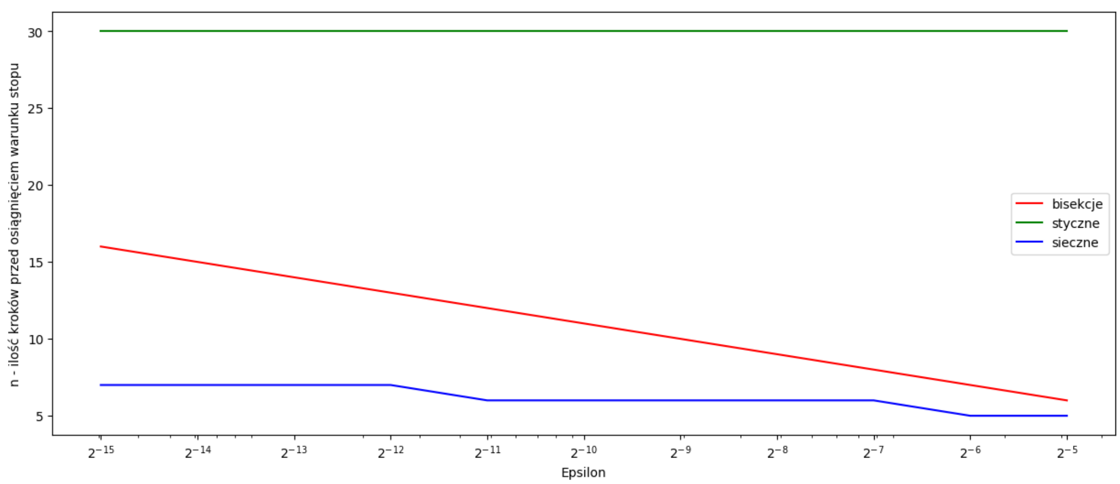
[23]: (1.41421143847487, 1.4146341463414633, 0.00016267492091835448)

[24]:
```
n_bisekcje = np.array(bisekcje)[:, 1]
n_styczne = np.array(styczne)[:, 1]
n_sieczne = np.array(sieczne)[:, 1]
n_bisekcje, n_styczne, n_sieczne
```

[24]:
```
(array([ 6.,  7.,  8.,  9., 10., 11., 12., 13., 14., 15., 16.]),
 array([30., 30., 30., 30., 30., 30., 30., 30., 30., 30., 30.]),
 array([5., 5., 6., 6., 6., 6., 6., 7., 7., 7., 7.]))
```

[25]:
```
import matplotlib.pyplot as plt

fix, ax = plt.subplots(figsize=(15, 6))
ax.plot(epsilons, n_bisekcje, c="r", label="bisekcje")
ax.plot(epsilons, n_styczne, c="g", label="styczne")
ax.plot(epsilons, n_sieczne, c="b", label="sieczne")
ax.set_xlabel("Epsilon")
ax.set_ylabel("n - ilość kroków przed osiągnięciem warunku stopu")
ax.set_xscale("log")
ax.legend()
ax.set_xticks(list(reversed(epsilons)))
ax.set_xticklabels([fr"$2^{{{j:.0f}}}$" for j in reversed(np.log2(epsilons))])
plt.show()
```



Metoda stycznych nie zbiega, jak widać dla metody siecznych oraz bisekcji, wraz ze zmniejszaniem epsilona wzrasta ilość wymaganych kroków do wykonania.