zmlab1_zadania_i_odpowiedzi

November 12, 2023

1 Błedy i arytmetyka zmiennopozycyjna

Całość kodu można znaleźć w formie online pod linkiem https://github.com/KsawerySmoczynski/elementy-metod-numerycznych. Jest on również dostępny w google collab

[1]:
```
# Żeby odpalić notebook na google colab będziemy musieli zainstalować potrzebne␣
↪pakiety
import subprocess
import sys
import os

REQUIRED_PACKAGES = ["numpy", "matplotlib", "sympy"]
RUN_IN_COLAB = "COLAB_JUPYTER_IP" in os.environ

def install(packages):
    subprocess.check_call([sys.executable, "-m", "pip", "install", *packages])

if RUN_IN_COLAB:
    install(REQUIRED_PACKAGES)
```

1.1 Zadania

1.1.1 Zadanie1

Oblicz: * $(0.1+0.2)+0.3$ oraz $0.1+(0.2+0.3)$ * $(0.1*0.6)*0.7$ oraz $0.1*(0.6*0.7)$, * $0.1*(0.7-0.6)$ oraz $0.1*0.7-0.1*0.6$

Porównaj otrzymane wyniki.

[2]:
```
a = (.1 + .2) + .3
b = .1 + (.2 +.3)
a == b, a, b
```

[2]:
```
(False, 0.6000000000000001, 0.6)
```

[3]:
```
a = (.1 * .6) * .7
b = .1 + (.6 * .7)
a == b, a, b
```

[3]: (False, 0.041999999999999996, 0.52)

[4]:
```
a = .1 * (.7 - .6)
b = .1 * .7 - .1 * .6
a == b, a, b
```

[4]: (False, 0.009999999999999998, 0.009999999999999995)

1.1.2 Zadanie 2

Niech $a = 1 + eps, b = 1 + \frac{eps}{2}$.

Które z tych liczb są równe 1 w arytmetyce zmiennopozycyjnej?

Czy liczby $a - 1$ i $b - 1$ są równe 0? Czy $\frac{eps}{2} = 0$?

Najpierw uzyskajmy epsilon maszynowy:

[5]:
```
def machineEpsilon(func=float):
    machine_epsilon = func(1)
    ONE = func(1)
    while ONE+machine_epsilon != ONE:
        machine_epsilon_last = machine_epsilon
        machine_epsilon = func(machine_epsilon) / func(2)
    return machine_epsilon_last

machineEpsilon(float)
```

[5]: 2.220446049250313e-16

[6]:
```
import sys
sys.float_info.epsilon
```

[6]: 2.220446049250313e-16

Jak widać uzyskany przez nas epsilon jest równy temu z informacji systemowej

[7]:
```
import numpy as np

np.finfo(np.float64).eps
```

[7]: 2.220446049250313e-16

Który jest równy temu zapenianemu przez pakiet do obliczeń numerycznych na wektorach - `numpy`

[8]:
```
machine_eps = np.finfo(np.float64).eps

a = 1. + machine_eps
b = 1. + machine_eps / 2
```

[9]:
```
a == 1, b == 1
```

[9]: (False, True)

Odpowiedź: Tylko druga liczba (b) jest równa 1 w arytmetyce zmiennopozycyjnej.

[10]:
```
a - 1 == 0, b - 1 == 0
```

[10]: (False, True)

Odpowiedź: Odpowiednio $a - 1 \neq 0$ oraz $b - 1 = 0$

[11]:
```
machine_eps / 2 == 0
```

[11]: False

Odpowiedź: Nie ponieważ epsilon maszynowy nie jest najmniejszą dodatnią reprezentowalną liczbą w systemie 32 bitowym, tylko różnicą między najbliższą reprezentowalną liczbą względem jedynki, a jedynką.

1.1.3 Zadanie 3

Napisz skrypt zliczający sumę argumentów 0.1 do momentu, gdy otrzymana wartość wyniesie 2. Wykorzystaj pętlę while i dwa różne warunki stopu:

1. *while suma* <> 2,
2. \$ while ; abs(suma-2)>0.001\$.

Czy w obu przypadkach otrzymamy to samo?

[15]:
```
# Uwaga pętla nieskończona
suma_1 = .1
while suma_1 != 2:
    suma_1 += .1
```

[12]:
```
suma_2 = .1
while abs(suma_2 - 2) > .001:
    suma_2 += .1
suma_2
```

[12]: 2.0000000000000004

Odpowiedź: Nie otrzymamy tego samego ponieważ `suma_1` nigdy nie będzie równać się dokładnie 2 w związku z czym pierwsza pętla nigdy nie zakończy swojego działania.

1.1.4 Zadanie 4

Zdefinujmy ciąg całek wzorem

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

Ciąg ten spełnia zależność rekurencyjną $y_n + 5y_{n-1} = \frac{1}{n}$. Korzystając z tej zależności chcemy obliczyć wartości poszczególnych całek.

1. Napisz skrypt, który oblicza przybliżone wartości całek $y_1, \ldots, y_8$, wykorzystując wzór rekurencyjny $y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$ oraz początkowe przybliżenie całki $y_0 \approx 0.182$.
2. Napisz skrypt, który oblicza przybliżone wartości całek $y_7, \ldots, y_0$, wykorzystując wzór rekurencyjny $y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$oraz początkowe przybliżenie całki $y_8 \approx 0.019$.
3. Porównaj otrzymane w powyższych punktach wyniki i spróbuj wyjaśnić powstałe różnice.

1.

[13]:
```
# Sekwencyjna wersja
y_0 = 0.128
y = [y_0]
n = 9
for i in range(1, n):
    n_i = i+1
    y_n = 1/n_i - 5*y[n_i-2] # listy są indeksowane od 0 dlatego odejmujemy 2,␣
 ↪a nie 1
    y.append(y_n)
y
```

[13]:
```
[0.128,
 -0.14,
 1.0333333333333334,
 -4.916666666666667,
 24.783333333333335,
 -123.75,
 618.8928571428571,
 -3094.3392857142853,
 15471.807539682539]
```

[14]:
```
# Wersja rekurencyjna
from functools import lru_cache # Żeby nie przeliczać od nowa wartości dla tych␣
 ↪samych wyrazów użyjemy cacheowania
# w ten sposób po przeliczeniu dla n-tego wyrazu zapamiętujemy jego wartości i␣
 ↪odczytujemy z pamięci dla n+1 wyrazu
# nie wpływa to na wyniki tylko czas wykonywania algorytmu

@lru_cache
def y_n(n):
    if n == 1:
        return 0.128
    else:
        return 1/n - 5*y_n(n-1)
```

[15]:
```
n = 9

y = []
for i in range(0,n):
    n_i = i+1
```

```
    y.append(y_n(n_i))
y
```

[15]:
```
[0.128,
 -0.14,
 1.0333333333333334,
 -4.916666666666667,
 24.783333333333335,
 -123.75,
 618.8928571428571,
 -3094.3392857142853,
 15471.807539682539]
```

2.

[16]:
```
@lru_cache
def y_n(n):
    if n == 9:
        return 0.019
    elif n < 9:
        return 1/(5*n) - (1/5 * y_n(n+1))
    else:
        raise NotImplementedError("Algorithm defined up to 9th term")
```

[17]:
```
y = []
n = 9
while n >= 1:
    y.append(y_n(n))
    n -= 1

list(reversed(y))
```

[17]:
```
[0.1823215572114286,
 0.08839221394285715,
 0.05803893028571428,
 0.04313868190476191,
 0.034306590476190474,
 0.028467047619047618,
 0.02433142857142857,
 0.0212,
 0.019]
```

3. Odpowiedź a - niestablilne numerycznie rozwiązanie - każdy następny wyraz multiplikuje błąd uzyskany w poprzednim

b - stabilne numerycznie rozwiązanie - każdy poprzedni wyraz powoduje dzielenie błędu

1.1.5 Zadanie 5.

Dla $x = 8^{-1}, 8^{-2}, \dots, 8^{-10}$ oblicz wartości funkcji: 1. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$, 2. $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Porównaj otrzymana wartości.

[18]:
```
x = 1 / (8 ** np.arange(1,11))
x
```

[18]:
```
array([1.25000000e-01, 1.56250000e-02, 1.95312500e-03, 2.44140625e-04,
       3.05175781e-05, 3.81469727e-06, 4.76837158e-07, 5.96046448e-08,
       7.45058060e-09, 9.31322575e-10])
```

[19]:
```
# 1.
f = lambda x: np.sqrt(x**2 + 1) - 1
f(x)
```

[19]:
```
array([7.78221854e-03, 1.22062863e-04, 1.90734681e-06, 2.98023219e-08,
       4.65661287e-10, 7.27595761e-12, 1.13686838e-13, 1.77635684e-15,
       0.00000000e+00, 0.00000000e+00])
```

[20]:
```
# 2.
g = lambda x: x**2 / (np.sqrt(x**2 + 1) - 1)
g(x)
```

```
/var/folders/j_/gy0508_n2w36wpr12gx3tz2m0000gn/T/ipykernel_80666/3292143112.py:2
: RuntimeWarning: divide by zero encountered in divide
  g = lambda x: x**2 / (np.sqrt(x**2 + 1) - 1)
```

[20]:
```
array([2.00778222, 2.00012206, 2.00000191, 2.00000003, 2.        ,
       2.        , 2.        , 2.        ,        inf,        inf])
```

1.1.6 Zadanie 5

Rozważmy funkcję $f(x) = \sin(x)$. Pochodną tej funkcji możemy przybliżyć za pomocą ilorazu różnicowego:

$$f'(x) \approx \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

dla małych wartości h. Dla $h = 10^{-n}$ $(n = 1, \dots, 16)$ i $x = 1$ wyznacz błąd tego przybliżenia.

Dla jakiej wartości h otrzymane przybliżenie jest najlepsze?

Zilustruj wyniki na wykresie, na którym wartości błędu będą prezentowane w skali logarytmicznej.

[21]:
```
x = 1
h = np.array([float(f"1e-{i}") for i in range(1, 17)])
```

[22]:
```
approx_f_prime = lambda x, h: (np.sin(x+h) - np.sin(x)) / h
approx_f_prime(x, h)
```

```
[22]: array([0.49736375, 0.53608598, 0.53988148, 0.54026023, 0.5402981 ,
             0.54030189, 0.54030226, 0.54030229, 0.54030236, 0.54030225,
             0.54030114, 0.54034555, 0.53956839, 0.54400928, 0.55511151,
             0.        ])
```

```
[23]: f_prime = np.cos
      f_prime(x)
```

```
[23]: 0.5403023058681398
```

```
[24]: errors = np.abs(f_prime(x) - approx_f_prime(x, h))
      errors
```

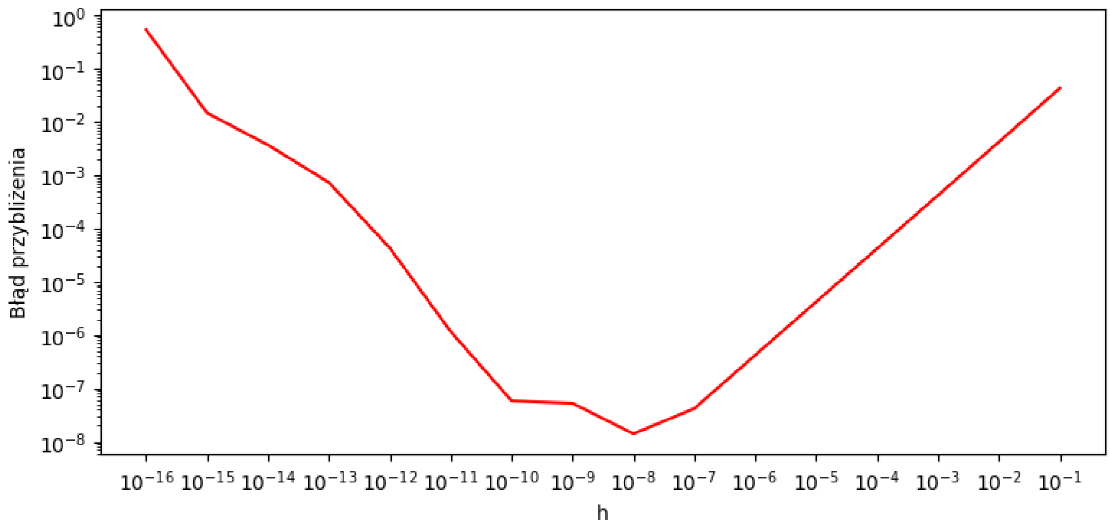
```
[24]: array([4.29385533e-02, 4.21632486e-03, 4.20825508e-04, 4.20744495e-05,
             4.20736228e-06, 4.20746809e-07, 4.18276911e-08, 1.40721155e-08,
             5.25412660e-08, 5.84810365e-08, 1.16870406e-06, 4.32402169e-05,
             7.33915900e-04, 3.70697620e-03, 1.48092064e-02, 5.40302306e-01])
```

```
[25]: h
```

```
[25]: array([1.e-01, 1.e-02, 1.e-03, 1.e-04, 1.e-05, 1.e-06, 1.e-07, 1.e-08,
             1.e-09, 1.e-10, 1.e-11, 1.e-12, 1.e-13, 1.e-14, 1.e-15, 1.e-16])
```

```
[26]: import matplotlib.pyplot as plt

      fig, ax = plt.subplots(figsize=(9, 4))
      ax.plot(h, errors, color="red")
      ax.set_xlabel("h")
      ax.set_ylabel("Błąd przybliżenia")
      ax.set_xscale("log")
      ax.set_yscale("log")
      ax.set_xticks(h)
      plt.show()
```



Odpowiedź: Jak widać najlepszy błąd przybliżenia uzyskujemy dla $h = 10^{-8}$

1.2 Zadanie 6 (* 2 pkt)

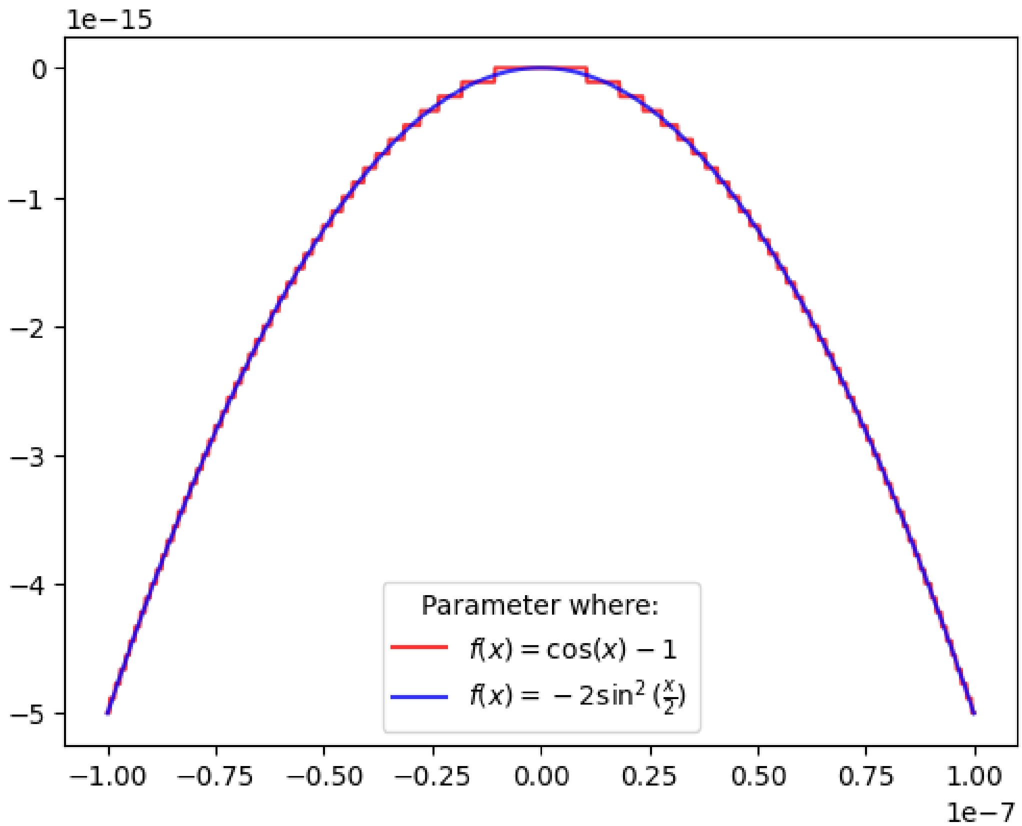
Niech $f(x) = \cos(x) - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2})$. Oblicz wartość podanej funkcji stosując oba podane wzory dla 1000 wartości x równomiernie rozlożonych w \$ (-10$^{\{-7\},10}${-7})\$ i zilustruj otrzymane wyniki na wykresie.

Który wzór wydaje się lepszy? Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak jest.

Oba wykresy powinny być narysowane w jednym oknie i rozróżnialne (poprzez zastosowanie różnych kolorów lub stylów linii). Ponadto, proszę umieścić przy wykresach legendę.

[27]:
```
x = np.linspace(-1e-7, 1e-7, int(1e3))
f_1 = lambda x: np.cos(x) - 1
f_2 = lambda x: -2 * np.sin(x/2)**2
```

[28]:
```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, f_1(x), color="red", alpha=0.8, label=r"$f(x)=\cos (x)-1$")
ax.plot(x, f_2(x), color="blue", alpha=0.8,␣
  ↪label=r"$f(x)=-2\sin^2(\frac{x}{2})$")
plt.legend(title='Parameter where:')
plt.show()
```



1.2.1 Zadanie 7 (* 2 pkt)

Rozważmy wielomian $w(x) = (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

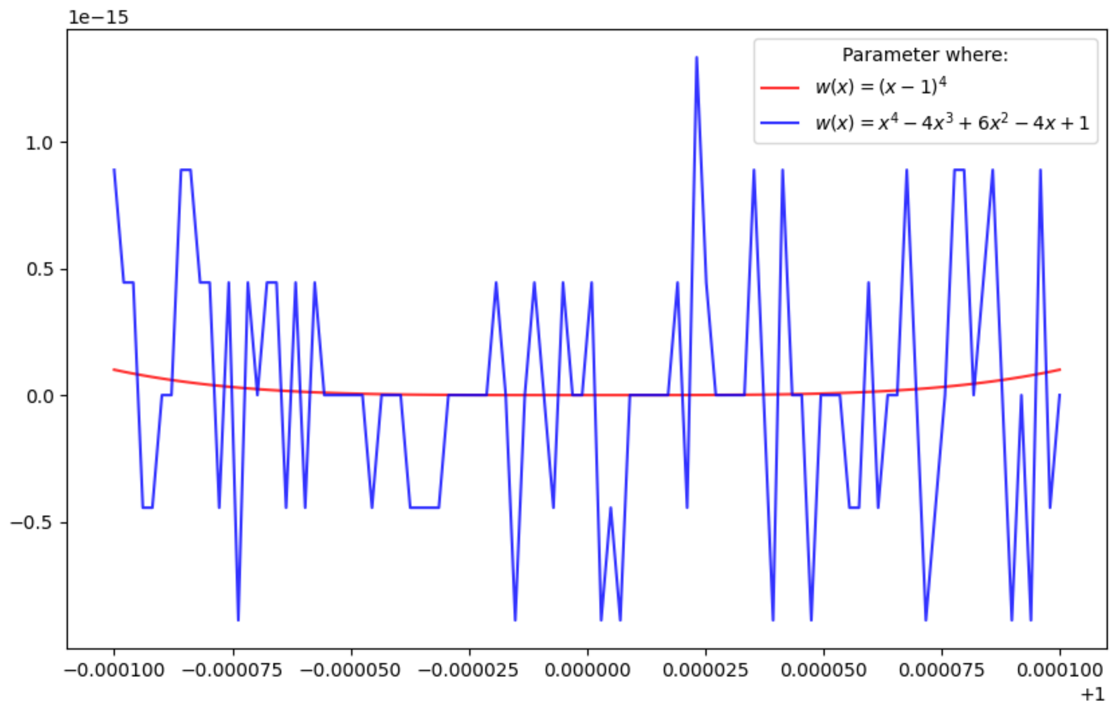
Oblicz stosując oba podane wzory wartość tego wielomianu dla 100 wartości x równomiernie rozłożonych w przedziale $(0.9999, 1.0001)$ i zilustruj otrzymane wyniki na wykresie.

Który wzór wydaje się lepszy? Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak jest.

Oba wykresy powinny być narysowane w jednym oknie i rozróżnialne (poprzez zastosowanie różnych kolorów lub stylów linii). Ponadto, proszę umieścić przy wykresach legendę.

[29]:
```
x = np.linspace(0.9999, 1.0001, 100)
w_1 = lambda x: (x-1)**4
w_2 = lambda x: x**4 - 4*x**3 + 6*x**2 - 4*x + 1
```

[30]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
ax.plot(x, w_1(x), color="red", alpha=0.8, label=r"$w(x)=(x-1)^4$")
ax.plot(x, w_2(x), color="blue", alpha=0.8, label=r"$w(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$")
plt.legend(title='Parameter where:')
plt.show()
```



Odpowiedź: Przy postaci ogólnej wielomianu dokonujemy wielu operacji dodawania/odejmowania bliskich sobie liczb co powoduje narastanie błędu poprzez kolejne utraty liczb znaczących, natomiast w postaci iloczynowej odejmowania dokonujemy tylko raz co powoduje relatywnie mniejszy błąd, stąd wzór w postaci iloczynowej zdaje się być lepszy do obliczania w postaci zmiennoprzecinkowej.

2 Algorytm Hornera

Zauważmy, że wielomian o naturalnej postaci:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

można także zapisać jako:

$$w(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

Z postaci tej wynika sposób obliczania wartości wielomianu w punkcie zwany algorytmem Hornera. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0. Definiujemy:

$$\begin{aligned} w_n &= a_n, \\ w_i &= w_{i+1}x_0 + a_i, \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 0 \end{aligned}$$

Wtedy $w(x_0) = w_0$. Obliczając wartość wielomianu w punkcie w ten sposób ograniczamy liczbę mnożeń. Stosując algorytm Hornera możemy także obliczyć wynik dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - c$. Jeśli bowiem

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i)(x - c) + b_0,$$

to porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach otrzymujemy zależność $a_i = b_i - b_{i+1}c$ dla $i = 0, \dots, n-1$ i $a_n = b_n$. Oznacza to, że $b_i = w_i$ dla $i = 0, \dots, n$.

Kolejnym zastosowaniem algorytmu Hornera jest obliczanie wartości pochodnych znormalizowanych w punkcie x_0, tzn. wartości:

$$\frac{w^{(j)}(x_0)}{j!} \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n.$$

Zapiszmy wielomian $w(x)$ w postaci:

$$w(x) = (x - x_0)^j v(x) + r(x),$$

gdzie $r(x)$ jest wielomianem o stopniu mniejszym od j. Różniczkując to wyrażenie j razy i obliczając jego wartość w punkcie x_0 otrzymujemy równość:

$$w^{(j)}(x_0) = j! v(x_0).$$

Zatem chcąc obliczyć wartość j-tej pochodnej znormalizowanej wielomianu wystarczy zastosować algorytm Hornera j razy, żeby podzielić kolejno otrzymywane ilorazy przez $x - x_0$, a następnie obliczyć wartość otrzymanego wielomianu w punkcie x_0.

Ostatnim omawianym zastosowaniem algorytmu Hornera będzie zamiana liczby zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p ($p \neq 10$) na zapis w systemie dziesiętnym. Rozważmy liczbę zapisaną w systemie pozycyjnym o podstawie p:

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0\ _{(p)} = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0.$$

Zatem chcąc obliczyć wartość tej liczby w systemie dziesiętnym wystarczy obliczyć wartość wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ w punkcie p.

Wielomian możemy też zapisać w tzw. postaci Newtona:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Mając dany wielomian w tej postaci możemy w łatwy sposób obliczyć jego wartość w punkcie s korzystając z uogólnionego schematu Hornera:

$$\begin{array}{rcl} p_n & = & b_n \\ p_i & = & p_{i+1}(s - x_i) + b_i, \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 0 \end{array}$$

[31]:
```
from numpy.polynomial import polynomial as P
```

2.0.1 Zadanie 1

Stosując polecenie `horner` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polyval`) oblicz wartość wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0 dla: 1. $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $x_0 = 1$, 2. $w(x) = 8x^3 + 5x^2 + 3x + 1$, $x_0 = -3$.

[32]:
```
# 1.
x0 = 1
c = np.array([-4, 3, -2, 1])
P.polyval(x0, c)
```

[32]: -2.0

[33]:
```
# 2.
x0 = -3
c = np.array([1, 3, 5, 8])
P.polyval(x0, c)
```

[33]: -179.0

2.0.2 Zadanie 2.

Stosując polecenie `pdiv` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polydiv`) wyznacz wielomian będacy wynikiem dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $d(x)$: 1. $w(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 11$, $d(x) = x - 2$, 2. $w(x) = x^4 - 9x^2 + 3x - 5$, $d(x) = x + 7$.

[34]:
```
# 1.
w = (11, -4, 5, 2)
d = (-2, 1)
q, r = P.polydiv(w, d)
q, r
```

[34]: (array([14., 9., 2.]), array([39.]))

1. $q(x) = 2x^2 + 9x + 14$, $r(x) = 39$

[35]:
```
# 2.
w = (-5, 3, -9, 1)
d = (7, 1)
q, r = P.polydiv(w, d)
q, r
```

[35]: (array([115., -16.,   1.]), array([-810.]))

2. $q(x) = x^2 - 16x + 115$, $r(x) = x + 7$

2.0.3 Zadanie 3.

Używając poleceń `horner` i `pdiv` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polyval` i `np.polynomial.polynomial.polyval`), znajdź wszystkie pochodne znormalizowane wielomianu $w(x)$ w punkcie x_0: 1. $w(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $x_0 = -2$, 2. $w(x) = x^4 - x^3 + 3x - 1$, $x_0 = 2$

[36]:
```
# 1.
x_0 = -2
w = (8, 4, 2, 1)
```

```python
ds = [
    (-x_0, 1),
    (4, 4, 1), # (x-x0)^2
    (8, 12, 6, 1), # (x-x0)^3
]
polynomials = [w]
for d in ds:
    v, _ = P.polydiv(w, d)
    polynomials.append(v)
```

[37]:
```python
import math

derivative = lambda v, j, x_0: math.factorial(j)*P.polyval(x_0, v)
normalized_derivative = lambda v, x_0: P.polyval(x_0, v)
```

[39]:
```python
for derivative_order, v in enumerate(polynomials):
    print(f"Derivative value at x_0 = {x_0} of order {derivative_order} equals␣
 ↪{derivative(v, derivative_order, x_0)}, normalized derivative equals␣
 ↪{normalized_derivative(v, x_0)}")
print(f"(Normalized) Derivatives of order higher than 3 are equal to 0")
```

```
Derivative value at x_0 = -2 of order 0 equals 0.0, normalized derivative equals
0.0
Derivative value at x_0 = -2 of order 1 equals 8.0, normalized derivative equals
8.0
Derivative value at x_0 = -2 of order 2 equals -8.0, normalized derivative
equals -4.0
Derivative value at x_0 = -2 of order 3 equals 6.0, normalized derivative equals
1.0
(Normalized) Derivatives of order higher than 3 are equal to 0
```

[40]:
```python
# Lets find derivatives analyticaly
import sympy as sp

x = sp.symbols('x')
w = x**3 + 2*x**2 + 4*x + 8
w_1 = w.diff(x)
w_1
```

[40]: $3x^2 + 4x + 4$

[41]:
```python
w_1.subs({x: x_0})
```

[41]: 8

[42]:
```python
w_2 = w.diff(x, 2)
w_2
```

[42]: $2 \cdot (3x + 2)$

[43]:
```
w_2.subs({x: x_0})
```

[43]:

-8

[44]:
```
w_3 = w.diff(x, 3)
w_3
```

[44]:

6

[45]:
```
w_3.subs({x: x_0})
```

[45]:

6

Wygląda na to, że policzyliśmy poprawnie!

[46]:
```
# 2.
x_0 = 2
w = (-1, 3, 0, -1, 1)
ds = [
    (-x_0, 1),
    (4, -4, 1), # (x-x0)^2
    (-8, 12, -6, 1), # (x-x0)^3
    (16, -32, 24, -8, 1), # (x-x0)^4
]
polynomials = [w]
for d in ds:
    v, _ = P.polydiv(w, d)
    polynomials.append(v)
```

[47]:
```
# Jako, że zdefiniowaliśmy już funkcję na znormalizowaną pochodną to możemy jej␣
↪teraz użyć
for derivative_order, v in enumerate(polynomials):
    print(f"Derivative value at x_0 = {x_0} of order {derivative_order} equals␣
↪{derivative(v, derivative_order, x_0)}, normalized derivative equals␣
↪{normalized_derivative(v, x_0)}")
print(f"(Normalized) Derivatives of order higher than 4 are equal to 0")
```

```
Derivative value at x_0 = 2 of order 0 equals 13.0, normalized derivative equals
13.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 1 equals 23.0, normalized derivative equals
23.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 2 equals 36.0, normalized derivative equals
18.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 3 equals 42.0, normalized derivative equals
7.0
Derivative value at x_0 = 2 of order 4 equals 24.0, normalized derivative equals
1.0
(Normalized) Derivatives of order higher than 4 are equal to 0
```

[48]:
```
x = sp.symbols('x')
w = x**4 - x**3 + 3*x - 1
w_1 = w.diff(x)
w_1, w_1.subs({x: x_0})
```

[48]: (4*x**3 - 3*x**2 + 3, 23)

[49]:
```
w_2 = w.diff(x, 2)
w_2, w_2.subs({x: x_0})
```

[49]: (6*x*(2*x - 1), 36)

[50]:
```
w_3 = w.diff(x, 3)
w_3, w_3.subs({x: x_0})
```

[50]: (6*(4*x - 1), 42)

[51]:
```
w_4 = w.diff(x, 4)
w_4, w_4.subs({x: x_0})
```

[51]: (24, 24)

Wygląda na to, że policzyliśmy poprawnie!

2.0.4 Zadanie 4 (* 3 pkt)

Napisz funkcję, która dla danej liczby p $(2 \leq p \leq 9)$ i liczby zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p oblicza jej wartość w systemie dziesiętnym wykorzystując algorytm Hornera. Zakładamy, że dane wejściowe do funkcji są podane w postaci pary (c, p), gdzie p jest liczbą naturalną z zakresu od 2 do 9, a c jest wektorem kolejnych cyfr w zapisie pozycyjnym danej liczby, przy czym pierwsza współrzędna odpowiada współczynnikowi przy potędze liczby p o wykładniku 0.

Przetestuj tę funkcję na poniższych przykładach:

1. $([5, 4, 3, 2, 1], 6)$,
2. $([8, 5, 3, 2, 1, 1], 9)$,
3. $([0, 1, 0, 1, 1, 0, 1], 2)$.

Uwaga! Proszę nie używać wbudowanej funkcji `horner` (w numpy `np.polynomial.polynomial.polyval`).

[52]:
```
def eval_positional_notation(c, p):
    value = c[-1]
    for c_i in reversed(c[:-1]):
        value = value * p + c_i
    return value
```

[53]:
```
# 1.
c = np.array([5,4,3,2,1])
p = 6
```

```
eval_positional_notation(c, p)
```

[53]: 1865

[54]:
```
eval_positional_notation(c, p) == P.polyval(p, c)
```

[54]: True

[55]:
```
# 2.
c = np.array([8,5,3,2,1,1])
p = 9
eval_positional_notation(c, p)
```

[55]: 67364

[56]:
```
eval_positional_notation(c, p) == P.polyval(p, c)
```

[56]: True

[57]:
```
# 3.
c = np.array([0,1,0,1,1,0,1])
p = 2
eval_positional_notation(c, p)
```

[57]: 90

[58]:
```
eval_positional_notation(c, p) == P.polyval(p, c)
```

[58]: True

2.0.5 Zadanie 5 (* 4 pkt)

Napisz funkcję, która korzystając z uogólnionego schematu Hornera dla wektora n różnych punktów $x = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$, wektora $b = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ współczynników wielomianu wielomianu w danego w postaci Newtona i wektora punktów $s = [s_1, s_2, \dots, s_k]$ zwraca wektor wartości tego wielomianu interpolacyjnego w punktach $s_1, s_2, \dots, s_k$.

Przetestuj tę funkcję dla następujących danych: 1. $x = [2, 4, 6, 8, 10]$, $b = [-1, 1, 2, 3, -4, 1]$, $s = [3, 5, 7, 9]$, 2. $x = [0, 0, -1, -1, -1, -2]$, $b = [3, -3, 3, -3, 2, 0, 2]$, $s = [-1, -2, 0, -1.5, -2.75, 5]$.

[59]:
```
def generalized_horner_scheme(x, b, s):
    value = b[-1]
    for b_i, x_i in zip(reversed(b[:-1]), reversed(x)):
        value = value * (s - x_i) + b_i
    return value
```

[60]:
```
# 1.
x = [2, 4, 6, 8, 10]
```

```
b = [-1, 1, 2, 3, -4, 1]
s = np.array([3, 5, 7, 9])

generalized_horner_scheme(x, b, s)
```

[60]:
```
array([ 172,  -82,  184, -134])
```

[61]:
```
# 2.
x = [0, 0, -1, -1, -1, -2]
b = [3, -3, 3, -3, 2, 0, 2]
s = np.array([-1, -2, 0, -1.5, -2.75, 5])

generalized_horner_scheme(x, b, s)
```

[61]:
```
array([9.00000000e+00, 4.10000000e+01, 3.00000000e+00, 1.84687500e+01,
       1.80756348e+02, 7.70130000e+04])
```