1 Матанализ от Виноградова

1.1

Сомнительный вариант:

$$\sin \pi p = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{k^2\pi^2}\right),\ p \in \mathbb{R}$$

Вариант от Виноградова:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),\ z \in \mathbb{C}$$

1.2

Равномерная сходимость степенных рядов. Пусть дан степенной ряд, $R \in (0, +\infty]$ - его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ ряд равномерно сходится в круге $\overline{B}\,(z_0, r)$.

(Абель). О степенных рядах. Пусть дан вещественный степенной ряд, $R \in (0, +\infty)$ - его радиус сходимости. Если ряд сходится при $x = x_0 + R$ или $x = x_0 - R$, то он равномерно сходится на $[x_0, x_0 + R]$ или $[x_0 - R, x_0]$ соответственно, а его сумма непрерывна в точке $x_0 + R$ слева (соответсвенно, в точке x_0 - R справа).

Интегрирование степенных рядов. Пусть дан вещественный степенной ряд, $Rin(0 + \infty]$ - его радиус сходимости. Тогда ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости: если $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, то

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}}{k+1}$$

Если, кроме того, ряд сходится при $x = x_0 + R$ или $x = x_0 - R$, то равенство верно и при $b = x_0 + R$ или $a = x_0 - R$ соответсвенно.

2 Большое задание от доктора Тренча

2.1

$$\frac{3s - 2}{(s^2 - 4s + 5)(s^2 - 6s + 13)} = \frac{A(s-2) + B}{(s-2)^2 + 1} + \frac{C(s-3) + D}{(s-3)^2 + 4}$$

where

$$(A(s-2) + B)((s-3)^2 + 4) + (C(s-3) + D)((s-2)^2 + 1) = 3s - 2$$

$$\begin{aligned} 5B - C + D &= 4 \text{ (set } s = 2\text{)}; \\ 4A + 4B + 2D &= 7 \text{ (set } s = 3\text{)}; \\ -26A + 13B - 15C + 5D &= -2 \text{ (set } s = 0\text{)}; \\ A + C &= 0 \text{ (equate coefficients of } s^3\text{)}. \end{aligned}$$

Solving this system yields $A = 1$, $B = 1/2$, $C = -1$, $D = 1/2$. Therefore,

$$\frac{3s - 2}{(s^2 - 4s + 5)(s^2 - 6s + 13)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2(s-2) + 1}{(s-2)^2 + 1} - \frac{2(s-3) - 1}{(s-3)^2 + 4}\right]$$

$$\leftrightarrow e^{2t}\left(\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right) - e^{3t}\left(\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

.

3 Маленькие задание от доктора Тренча

3.1

$$e^t \int_0^t e^{2\tau} \sin(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{3\tau} \left(e^{(t-\tau)} \sin(t-\tau)\right) d\tau;\ e^{3t} \leftrightarrow \frac{1}{s-3} \text{ and } e^t \sin ht \leftrightarrow \frac{1}{(s-1)^2-1},$$

so $H(s) = \frac{1}{(s-3)((s-1)^2-1)}$.

3.2

Substring $x = t - \tau$ yields $\displaystyle\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = -\int_t^0 f(x)g(t-x)(-dx) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$

3.3

$$te^{2t} \leftrightarrow \frac{1}{(s-2)^2} \text{ and } \sin 2t \leftrightarrow \frac{2}{(s^2+4)},\ \text{so}\ H(s) = \frac{2}{(s-2)^2(s^2+4)}.$$

$\beta_n = 2\left[\int_0^{1/2} x \sin n\pi x\, dx + \int_{1/2}^1 (1-x)\sin n\pi x\, dx\right];$