Билет 1: Множества и мощность

Определение 1 (Отображение множеств)**.** *Пусть X, Y — множества.* ***Отображением*** *f из X в Y (обозначается $f : X \to Y$) называется правило, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие* ***единственный*** *элемент $y = f(x) \in Y$. Множество X называется* ***областью определения****, Y —* ***областью значений****.*

Определение 2 (Эквивалентные множества)**.** *Два множества A и B называются* ***эквивалентными*** *(или* ***равномощными****), если существует* ***биекция*** *(взаимно однозначное соответствие) $f : A \to B$. Обозначение: $A \sim B$.*

Определение 3 (Счетное множество)**.** *Множество A называется* ***счетным****, если оно* ***конечно*** *или* ***эквивалентно*** *множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$ ($A \sim \mathbb{N}$).*

Свойство 1 (Свойства счетных множеств)**.**

(1) Любое ***подмножество*** *счетного множества* ***не более чем счетно*** *(т.е. конечно или счетно).*

(2) ***Объединение*** *конечного или счетного числа* ***конечных*** *или* ***счетных*** *множеств* ***не более чем счетно****.*

(3) ***Декартово произведение*** *двух (а значит и любого конечного числа)* ***счетных*** *множеств* ***счетно****.*

(4) Множество всех ***конечных подмножеств*** *счетного множества* ***счетно****.*

(5) Множество всех ***рациональных чисел*** *$\mathbb{Q}$* ***счетно****.*

(6) Множество всех ***алгебраических чисел*** *(корней многочленов с целыми коэффициентами)* ***счетно****.*

Пример 1 (Примеры эквивалентных множеств)**.**

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ *(целые числа). Биекция: $f(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ *(рациональные числа). Упорядочивание по диагоналям.*
- $[0, 1] \sim (0, 1) \sim (0, 1] \sim [0, 1) \sim \mathbb{R}$ *(все интервалы эквивалентны всей прямой). Биекции строятся с помощью линейных дробных преобразований или "сдвига"счетного множества точек.*

- $[0,1] \times [0,1] \sim [0,1]$ *(квадрат эквивалентен отрезку). Используется чередование цифр десятичных дробей.*

Теорема 1 (Кантора)**.** *Множество всех действительных чисел на отрезке* [0,1] ***несчетно****.*

Доказательство (диагональный метод Кантора). Предположим противное: пусть [0,1] счетно. Тогда все его элементы можно занумеровать: $x_1, x_2, x_3, \dots$. Запишем каждое число в виде **бесконечной** десятичной дроби (для чисел вида $0.a_1 a_2 \dots a_n 999\dots$ используем форму с девятками на конце). Получим таблицу:

$$\begin{array}{c} x_1 = 0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots \\ x_2 = 0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots \\ x_3 = 0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \dots \\ \vdots \end{array}$$

Построим число $y = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$, где цифра b_k выбирается так, чтобы $b_k \neq a_{kk}$ и $b_k \neq 0, 9$ (чтобы избежать двойного представления). Например:

$$b_k = \begin{cases} 5, & \text{если } a_{kk} \neq 5 \\ 6, & \text{если } a_{kk} = 5 \end{cases}$$

Тогда $y \in$ [0,1], но $y \neq x_k$ для **любого** k, так как k-я цифра y (b_k) отличается от k-й цифры x_k (a_{kk}). Это противоречит предположению, что все числа из [0,1] были перечислены. Значит, [0,1] несчетно. □

Билет 2: Системы множеств

Определение 4 (Полукольцо множеств)**.** *Семейство $\mathcal{S} \subset 2^X$ называется* ***полукольцом****, если:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(2) $\forall A, B \in \mathcal{S} \quad A \cap B \in \mathcal{S}$ *(замкнутость относительно конечных пересечений).*

(3) Если $A, B \in \mathcal{S}$ и $A \supset B$, то существует такой ***конечный*** *набор* ***попарно непересекающихся*** *множеств $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{S}$, что $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k$.*

Определение 5 (Кольцо множеств)**.** *Семейство $\mathcal{R} \subset 2^X$ называется* ***кольцом****, если:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$ *(замкнутость относительно конечных объединений).*

(3) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$ *(замкнутость относительно разности).*

Замечание: Из (2) и (3) следует замкнутость относительно конечных пересечений: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Определение 6 (Алгебра множеств). *Семейство $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется* ***алгеброй*** *(или* ***булевой алгеброй****), если:*

(1) $X \in \mathcal{A}$.

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ *(замкнутость относительно дополнений).*

(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ *(замкнутость относительно конечных объединений).*

Замечание: Алгебра автоматически является кольцом, содержащим X. Кольцо является алгеброй $\Leftrightarrow$ содержит X.

Определение 7 (σ-кольцо). *Кольцо $\mathcal{R}$ называется* ***σ-кольцом****, если оно замкнуто относительно* ***счетных объединений****: если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.*

Определение 8 (σ-алгебра). *Алгебра $\mathcal{A}$ называется* ***σ-алгеброй****, если она замкнута относительно* ***счетных объединений****: если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Замечание: σ-алгебра автоматически замкнута относительно счетных пересечений (по законам де Моргана).*

Определение 9 (δ-кольцо (кольцо Дедекинда)). *Семейство $\mathcal{D} \subset 2^X$ называется* ***δ-кольцом****, если:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{D}$.

(2) $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(3) Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ и $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ (убывающая цепочка), то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ (замкнутость относительно счетных пересечений убывающих цепочек).

Пример 2 (Примеры).

- ***Полукольцо:*** *Множество всех* ***интервалов*** *на прямой: $(a,b], [a,b), [a,b], (a,b)$; Множество всех* ***прямоугольников*** *вида $[a,b) \times [c,d)$ на плоскости.*
- ***Кольцо:*** *Конечные объединения* ***непересекающихся*** *интервалов на прямой; Множество всех* ***конечных подмножеств*** *натурального ряда $\mathbb{N}$.*
- ***Алгебра:*** *Множество всех* ***конечных объединений*** *интервалов на прямой* ***и их дополнений*** *(но не σ-алгебра!); Алгебра подмножеств конечного множества.*
- ***σ-кольцо:*** *Множество всех* ***ограниченных*** *подмножеств прямой $\mathbb{R}$; Множество всех подмножеств $\mathbb{N}$* ***с конечной мерой*** *(если мера — число элементов).*
- ***σ-алгебра: Борелевская σ-алгебра*** *$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества в $\mathbb{R}$);* ***σ-алгебра Лебега*** *$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (пополнение борелевской по мере Лебега); σ-алгебра всех* ***измеримых*** *по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$.*
- ***δ-кольцо:*** *Множество всех* ***ограниченных*** *измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$; Множество всех подмножеств $\mathbb{R}$ с* ***конечной мерой Лебега****.*

Билет 3: Мера плоских множеств

Определение 10 (Мера (интуитивно))**.** ***Мера*** *— это функция* $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$*, заданная на некотором классе подмножеств* $\mathcal{M}$ *пространства* X*, которая обобщает понятия:*

- ***Длины*** *интервала на прямой* ($\mu([a,b]) = b - a$)*.*
- ***Площади*** *прямоугольника на плоскости* ($\mu([a,b] \times [c,d]) = (b - a)(d - c)$)*.*
- ***Объема*** *параллелепипеда в пространстве.*
- ***Приращения*** *неубывающей функции* F*:* $\mu_F([a,b]) = F(b) - F(a)$*.*
- ***Количества*** *точек (счетная мера) или* ***вероятности*** *(вероятностная мера).*

Ключевые свойства: ***неотрицательность, аддитивность*** *(для непересекающихся множеств).*

Определение 11 (Элементарные множества на плоскости)**.** *На плоскости* $\mathbb{R}^2$ ***элементарным множеством*** *называется любое множество, которое можно представить как* ***конечное объединение непересекающихся*** *прямоугольников вида* $P = [a,b) \times [c,d)$*. Обозначим класс таких множеств через* $\mathcal{E}$*.*

Свойство 2 (Свойства элементарных множеств)**.**

(1) ***Объединение*** *конечного числа элементарных множеств* ***элементарно*** *(но может потребовать разбиения на непересекающиеся прямоугольники).*

(2) ***Пересечение*** *конечного числа элементарных множеств* ***элементарно****.*

(3) ***Разность*** *двух элементарных множеств* ***элементарна****.*

(4) ***Симметрическая разность*** *двух элементарных множеств* ***элементарна****.*

Теорема 2 (Замкнутость $\mathcal{E}$ относительно операций)**.** *Класс элементарных множеств* $\mathcal{E}$ *на плоскости является* ***кольцом*** *(и даже* ***алгеброй****, так как* $\mathbb{R}^2$ *элементарно).*

Доказательство.

- **Объединение:** Пусть $A, B \in \mathcal{E}$. A и B — конечные объединения непересекающихся прямоугольников. Их объединение $A \cup B$ — тоже конечное объединение прямоугольников, но они могут пересекаться. Чтобы получить представление в виде непересекающихся, нужно разбить все прямоугольники из A и B с помощью сетки, образованной всеми границами прямоугольников из A и B. Получится конечное число непересекающихся прямоугольников, объединение которых равно $A \cup B$. Значит, $A \cup B \in \mathcal{E}$.

- **Пересечение:** $A \cap B$ — пересечение двух конечных объединений прямоугольников. Пересечение двух прямоугольников — прямоугольник (возможно, пустой). Значит, $A \cap B$ можно записать как конечное объединение прямоугольников (результатов попарных пересечений прямоугольников из A и B). Они могут пересекаться только по границам (мере нуль), но для представления в виде непересекающихся достаточно применить процедуру разбиения сеткой, как в пункте (1). Значит, $A \cap B \in \mathcal{E}$.

- **Разность:** $A \backslash B = A \cap B^c$. Так как $\mathcal{E}$ — алгебра (содержит $\mathbb{R}^2$), то $B^c \in \mathcal{E}$. По предыдущим пунктам $A \cap B^c \in \mathcal{E}$.

- **Симметрическая разность:** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. По предыдущим пунктам $A \setminus B \in \mathcal{E}$, $B \setminus A \in \mathcal{E}$, и они дизъюнктны. Значит, их объединение элементарно.

Кроме того, $\emptyset$ (пустой прямоугольник) и $\mathbb{R}^2$ (можно покрыть одним прямоугольником) $\in \mathcal{E}$. Значит, $\mathcal{E}$ — алгебра. □

Определение 12 (Мера элементарного множества)**.** ***Мерой*** *(площадью) элементарного множества A, представленного как объединение* ***непересекающихся*** *прямоугольников $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k$, называется число $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)(d_k - c_k)$, где $P_k = [a_k, b_k) \times [c_k, d_k)$.*

Замечание: Значение $\mu(A)$ не зависит от способа представления A в виде конечного объединения непересекающихся прямоугольников (мера аддитивна и согласована на прямоугольниках).

Определение 13 (Сигма-аддитивность)**.** *Мера μ называется* ***σ-аддитивной****, если для любой последовательности* ***попарно непересекающихся*** *множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathcal{E}$ с $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$ выполняется:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Теорема 3 (Сигма-аддитивность меры для прямоугольников)**.** *Мера μ на классе элементарных множеств $\mathcal{E}$ в $\mathbb{R}^2$ является* ***σ-аддитивной****.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A, A_k \in \mathcal{E}$. Так как A — ограниченное множество, а A_k дизъюнктны, то $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \le \mu(A)$ для любого n. Переходя к пределу, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu(A)$.

Обратно: A можно покрыть конечным числом прямоугольников. Для любого $\varepsilon > 0$ каждое A_k можно покрыть открытым множеством $G_k \supset A_k$ так, что $\mu(G_k) < \mu(A_k) + \varepsilon/2^k$. Тогда $\bigcup_k G_k$ — открытое покрытие компакта A. Выделим конечное подпокрытие $G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}$. Тогда:

$$\mu(A) \le \sum_{j=1}^{m} \mu(G_{k_j}) \le \sum_{j=1}^{m} \left(\mu(A_{k_j}) + \frac{\varepsilon}{2^{k_j}}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Следовательно, $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. □

Определение 14 (Внешняя мера Лебега (для плоских множеств))**.** ***Внешней мерой Лебега*** *произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ называется:*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \mid \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}.$$

*Т.е. это **точная нижняя грань** "площадей"всевозможных **счетных покрытий** A элементарными множествами.*

Свойство 3 (Свойства внешней меры)**.**

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) ***Монотонность:*** $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(3) ***Полуаддитивность*** *(см. теорему ниже).*

Теорема 4 (Полуаддитивность внешней меры)**.** *Внешняя мера Лебега **счетно-полуаддитивна**: для любой последовательности множеств* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ *выполняется:*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Доказательство. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = +\infty$, неравенство очевидно. Пусть сумма конечна. По определению точной нижней грани, для каждого A_n и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое счетное покрытие элементарными множествами $\{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, что $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^{(n)}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Рассмотрим объединение всех этих покрытий: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$. Это счетное покрытие множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ элементарными множествами. Тогда:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, получаем требуемое неравенство: $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. $\square$

Определение 15 (Измеримое по Лебегу множество (на плоскости))**.** *Множество* $A \subset \mathbb{R}^2$ *называется **измеримым по Лебегу**, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие **элементарные** множества* E *и* F*, что:*

$$E \subset A \subset F \quad \text{и} \quad \mu(F \setminus E) < \varepsilon.$$

Эквивалентное определение (Каратеодори): A *измеримо, если для **любого** множества* $T \subset \mathbb{R}^2$ *выполняется:*

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c).$$

Билет 4: Полунепрерывные функции

Определение 16 (Полунепрерывность снизу (п.н.сн.))**.** *Функция* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *называется **полунепрерывной снизу** (п.н.сн.) в точке* $x_0 \in X$*, если для любого числа* $c < f(x_0)$ *существует такая окрестность* $U(x_0)$*, что для всех* $x \in U(x_0)$ *выполняется* $f(x) > c$.
*Функция **п.н.сн.** на* X*, если она п.н.сн. в каждой точке* $x \in X$.

Определение 17 (Полунепрерывность сверху (п.н.св.)). *Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ называется **полунепрерывной сверху** (п.н.св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого числа $c > f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) < c$. Функция **п.н.св.** на X, если она п.н.св. в каждой точке $x \in X$.*

Пример 3 (Примеры).

- ***П.н.сн.:*** *Индикатор открытого множества: $f(x) = \mathbf{1}_U(x)$; Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = +\infty$; Непрерывные функции снизу.*
- ***П.н.св.:*** *Индикатор замкнутого множества: $f(x) = \mathbf{1}_F(x)$; Функция $f(x) = -\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = -\infty$; Целая часть $[x]$; Непрерывные функции сверху.*

Теорема 5 (Характеризация п.н.сн. через надграфик). *Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является **п.н.сн.** на X тогда и только тогда, когда ее **надграфик** $\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ является **замкнутым** подмножеством в $X \times \mathbb{R}$.*

Теорема 6 (Характеризация п.н.св. через подграфик). *Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ является **п.н.св.** на X тогда и только тогда, когда ее **подграфик** $\mathrm{hyp}(f) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\}$ является **замкнутым** подмножеством в $X \times \mathbb{R}$.*

Теорема 7 (Прообраз п.н.сн. функции). *Пусть $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ п.н.сн. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ **замкнуто**.*

Доказательство. Рассмотрим множество $A_c = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$. Докажем, что его дополнение $A_c^c = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ открыто.
Возьмем $x_0 \in A_c^c$, т.е. $f(x_0) > c$. Так как f п.н.сн. в x_0, то для числа c (которое $< f(x_0)$) существует окрестность $U(x_0)$ такая, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) > c$. Значит, $U(x_0) \subset A_c^c$. Следовательно, A_c^c открыто, а A_c замкнуто. □

Замечание 1. *Аналогично, если f п.н.св., то множество $\{x \in X \mid f(x) \geq c\}$ замкнуто для любого $c \in \mathbb{R}$.*

Билет 5: Элементарный интеграл

Определение 18 (Элементарный интеграл). *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, где $\mathcal{A}$ — алгебра (или кольцо) подмножеств X, μ — конечная аддитивная мера на $\mathcal{A}$.*
***Элементарной функцией** называется конечная линейная комбинация индикаторов множеств из $\mathcal{A}$: $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}$, где $A_i \in \mathcal{A}$, A_i попарно не пересекаются, $c_i \in \mathbb{R}$.*
***Элементарным интегралом** от такой функции называется:*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i).$$

Значение не зависит от способа представления f в указанном виде.

Свойство 4 (Свойства элементарного интеграла)**.** *Пусть f, g — элементарные функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:*

(1) ***Линейность:*** $\int(\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$.

(2) ***Монотонность:*** *Если $f \leq g$ п.в., то $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

(3) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

(4) ***Аддитивность по множествам:*** *Если $A \in \mathcal{A}$ и $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}$, то $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A \cap A_i)$.*

Теорема 8 (Леви (о монотонной сходимости) для элементарного интеграла)**.** *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность* ***элементарных*** *функций на X такая, что:*

(i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *для всех n и для всех $x \in X$ (монотонное неубывание).*

(ii) $\sup_n \int f_n d\mu < +\infty$ *(ограниченность интегралов).*

Тогда существует ***конечная*** *предельная функция $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ почти всюду (п.в.) и*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Замечание: В общем случае f может не быть элементарной, но интеграл от нее определен как предел.

Определение 19 (Пренебрежимое множество)**.** *Множество $A \subset X$ называется* ***пренебрежимым*** *(или* ***множеством меры нуль****), если $\mu^*(A) = 0$ (внешняя мера A равна нулю).*

Определение 20 (Пренебрежимая функция)**.** *Функция f называется* ***пренебрежимой****, если $f = 0$ почти всюду (п.в.), т.е. множество $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ пренебрежимо.*

Пример 4 (Примеры)**.**

- ***Пренебрежимое множество:*** *Любое конечное или счетное множество на прямой с мерой Лебега (если мера точки 0); Канторово множество (несчетное, но мера Лебега 0); График непрерывной функции на прямой.*

- ***Пренебрежимая функция:*** *Функция Дирихле $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ на [0,1] (т.к. $\mathbb{Q}$ счетно); Любая функция, отличная от нуля только в конечном числе точек.*

Билет 6: Измеримые множества

Определение 21 (Измеримое множество)**.** *Множество $A \subset X$ называется* ***μ-измеримым*** *(по Лебегу относительно меры μ), если для любого множества $T \subset X$ выполняется равенство* ***Каратеодори****:*

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c).$$

Обозначим класс всех μ-измеримых множеств через $\mathcal{M}_\mu$.

Свойство 5 (Свойства измеримых множеств)**.** *Пусть μ^* — внешняя мера на X. Тогда:*

(1) $\mathcal{M}_\mu$ — σ***-алгебра****.*

(2) μ^* *на* $\mathcal{M}_\mu$ *является* **мерой** *(т.е. σ-аддитивна). Обозначается μ.*

(3) Если $\mu^*(A) = 0$, то $A \in \mathcal{M}_\mu$ (все множества меры нуль измеримы).

(4) ***Пополнение****: Если $\mathcal{A}$ — алгебра, на которой μ σ-аддитивна, то $\mathcal{M}_\mu$ — это пополнение σ-алгебры, порожденной $\mathcal{A}$, по мере μ.*

Доказательства (основные идеи).

- **Замкнутость относительно дополнения:** Следует из симметрии определения (A и A^c входят симметрично).

- **Замкнутость относительно конечных объединений:** Пусть $A, B \in \mathcal{M}_\mu$. Нужно показать $A \cup B \in \mathcal{M}_\mu$. Для любого T:

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) \quad \text{(из-измеримости } A) \\ &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*((T \cap A^c) \cap B) + \mu^*((T \cap A^c) \cap B^c) \quad \text{(из-измеримости } B) \\ &\geq \mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^c) \quad \text{(по полуаддитивности и } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

  Обратное неравенство $\leq$ всегда верно по полуаддитивности. Значит, равенство.

- **Замкнутость относительно счетных объединений:** Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{M}_\mu$, $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Положим $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Тогда $B_n \in \mathcal{M}_\mu$ (по доказанному), B_n дизъюнктны, $A = \bigsqcup_{n=1}^\infty B_n$. Для T:

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_1^c) \quad \text{(измеримость } B_1) \\ &= \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(T \cap B_1^c \cap B_2^c) \quad \text{(измеримость } B_2) \\ &= \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_2) + \mu^*(T \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\ &\ \ \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(T \cap B_k) + \mu^*(T \cap (\bigcup_{k=1}^n B_k)^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mu^*(T \cap B_k) + \mu^*(T \cap A^c) \quad (A^c \subset (\bigcup_{k=1}^n B_k)^c)\end{aligned}$$

  Устремляя $n \to \infty$ и учитывая $\sum_{k=1}^\infty \mu^*(T \cap B_k) \geq \mu^*(T \cap A)$ (полуаддитивность), получаем $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$. Обратное $\leq$ верно всегда. Значит, A измеримо.

- σ**-аддитивность** μ **на** $\mathcal{M}_\mu$**:** Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{M}_\mu$ дизъюнктны, $A = \bigsqcup_{n=1}^\infty A_n$. Тогда для любого n:

$$\mu(\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \quad \text{(конечная аддитивность).}$$

Так как $A \supset \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, то $\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Устремляя $n \to \infty$, $\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Обратное неравенство $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ следует из полуаддитивности внешней меры. Значит, $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

$\square$

Определение 22 (Класс множеств, измеримых по Лебегу ($\mathbb{R}^n$))**.** ***Множеством, измеримым по Лебегу*** *в $\mathbb{R}^n$, называется любое множество $A \subset \mathbb{R}^n$, измеримое относительно* ***меры Лебега*** *m, построенной по внешней мере Лебега. Класс всех таких множеств обозначается $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

- *$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — **σ-алгебра**.*
- *Все **борелевские множества** (элементы $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — σ-алгебры, порожденной открытыми множествами) **измеримы** по Лебегу.*
- *$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — это **пополнение** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ по мере Лебега: $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существуют борелевские множества B_1, B_2 такие, что $B_1 \subset A \subset B_2$ и $m(B_2 \setminus B_1) = 0$.*
- *Существуют **неборелевские** множества, измеримые по Лебегу (например, любое неборелевское подмножество канторова множества меры нуль).*
- *Существуют **неизмеримые** по Лебегу множества (например, **множество Витали**).*

Билет 7: Измеримые функции

Определение 23 (Измеримая функция)**.** *Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется **μ-измеримой**, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ принадлежит $\mathcal{M}$ (т.е. измеримо). Эквивалентные условия: $\{x \mid f(x) \leq c\} \in \mathcal{M}$, $\{x \mid f(x) > c\} \in \mathcal{M}$, $\{x \mid f(x) \geq c\} \in \mathcal{M}$ для всех $c \in \mathbb{R}$.*

Определение 24 (Борелевское множество)**.** *Подмножество $\mathbb{R}^n$ называется **борелевским**, если оно принадлежит **борелевской σ-алгебре** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — наименьшей σ-алгебре, содержащей все открытые (или все замкнутые) подмножества $\mathbb{R}^n$.*

Свойство 6 (Свойства измеримых функций)**.** *Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ — μ-измеримы, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда следующие функции также μ-измеримы:*

(1) αf

(2) $f + g$ *(если нет неопределенностей вида $(+\infty) + (-\infty)$)*

(3) $f \cdot g$

(4) $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$

(5) $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$

(6) Если $g(x) \neq 0$ п.в., то f/g

Доказательство для $f+g$ (без пределов). Нужно показать: $\{x \mid f(x)+g(x) < c\} \in \mathcal{M}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.
Заметим, что $f(x)+g(x) < c$ тогда и только тогда, когда существует **рациональное** число r такое, что $f(x) < r$ и $g(x) < c-r$. Формально:

$$\{x \mid f(x)+g(x) < c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \mid f(x) < r\} \cap \{x \mid g(x) < c-r\}\Big).$$

Так как $\mathbb{Q}$ счетно, это **счетное объединение**. Множества $\{x \mid f(x) < r\}$ и $\{x \mid g(x) < c-r\}$ измеримы по определению. Пересечение измеримых множеств измеримо. Счетное объединение измеримых множеств измеримо. Значит, $\{x \mid f(x)+g(x) < c\} \in \mathcal{M}$. □

Доказательство для $f \cdot g$ (без пределов).

- **Случай $f = g$:** $\{x \mid f^2(x) < c\} = \begin{cases} \{x \mid |f(x)| < \sqrt{c}\}, & c > 0 \\ \emptyset, & c \leq 0 \end{cases}$ — измеримо.
- **Общий случай:** Используем тождество: $f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$. Так как $f+g$ и $f-g$ измеримы (по предыдущему), их квадраты измеримы (по пункту 1), разность измеримых измерима, умножение на константу сохраняет измеримость.

□

Билет 8: Критерий измеримости функции

Теорема 9 (Критерий измеримости функции)**.** *Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой. Для функции $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ эквивалентны:*

(1) f μ-измерима.

(2) Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$.

(3) Для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}$.

(4) Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ прообраз $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

(5) Существуют последовательности $\{u_n\}$ п.н.сн. функций и $\{v_n\}$ п.н.св. функций такие, что $u_n(x) \geq f(x) \geq v_n(x)$ для всех x и $u_n(x) \downarrow f(x)$, $v_n(x) \uparrow f(x)$ для всех x (поточечно).

Доказательство.

- **(1) ⇒ (2):** Любое открытое $U \subset \mathbb{R}$ представимо как счетное объединение открытых интервалов: $U = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k))$. Но $f^{-1}((a_k, b_k)) = \{x \mid a_k < f(x) < b_k\} = \{x \mid f(x) > a_k\} \cap \{x \mid f(x) < b_k\} \in \mathcal{M}$. Счетное объединение измеримых множеств измеримо.

- **(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4):** Следует из того, что σ-алгебра борелевских множеств порождается открытыми (или замкнутыми) множествами, и прообраз сохраняет операции.

- **(1) $\Rightarrow$ (5):** Построим аппроксимации. Для каждого n и каждого целого k определим множества:
$$E_{n,k} = \{x \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}.$$
Эти множества измеримы (разность $\{x \mid f(x) < \frac{k}{2^n}\} \setminus \{x \mid f(x) < \frac{k-1}{2^n}\}$). Определим ступенчатые функции:
$$u_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{E_{n,k}}(x), \quad v_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{E_{n,k}}(x).$$
Тогда $v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x)$ для всех x. При $n \to \infty$, шаг $\frac{1}{2^n} \to 0$, поэтому $u_n(x) \downarrow f(x)$, $v_n(x) \uparrow f(x)$ для всех x. Функции u_n п.н.св. (как ступенчатые, постоянные на множествах), v_n п.н.сн.

- **(5) $\Rightarrow$ (1):** Докажем измеримость f. Зафиксируем $c \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\{x \mid f(x) < c\} \in \mathcal{M}$.
Заметим: $f(x) < c$ тогда и только тогда, когда **существует** n такое, что $v_n(x) < c$ (так как $v_n(x) \uparrow f(x)$). Формально:
$$\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid v_n(x) < c\}.$$
Так как v_n п.н.сн., множество $\{x \mid v_n(x) \geq c\}$ замкнуто, но нам нужно $\{x \mid v_n(x) < c\} = \{x \mid v_n(x) \geq c\}^c$. Это **открытое** множество (дополнение замкнутого). В общем случае, если X — топологическое пространство, а $\mathcal{M}$ содержит борелевские множества, то открытые множества измеримы, значит $\{x \mid v_n(x) < c\} \in \mathcal{M}$. Счетное объединение измеримых множеств измеримо. Значит, $\{x \mid f(x) < c\} \in \mathcal{M}$.

□

Билет 9: Полная мера

Определение 25 (Полная мера)**.** *Пространство с мерой $(X, \mathcal{M}, \mu)$ называется **полным**, если из того, что $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$, следует, что $B \in \mathcal{M}$ (и, конечно, $\mu(B) = 0$). Сама мера μ также называется **полной**.*

Теорема 10 (Об измеримости эквивалентных функций)**.** *Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — **полное** пространство с мерой. Пусть f и g — функции на X такие, что $f(x) = g(x)$ **почти всюду** (п.в.) относительно μ. Тогда если f μ-измерима, то и g μ-измерима.*

Доказательство. Пусть $A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. По условию $\mu(A) = 0$. Так как мера полная, любое подмножество A измеримо и имеет меру нуль.
Зафиксируем $c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество $\{x \mid g(x) < c\}$. Его можно представить в виде:
$$\{x \mid g(x) < c\} = \big[\{x \mid g(x) < c\} \cap A^c\big] \cup \big[\{x \mid g(x) < c\} \cap A\big].$$

- На A^c: $g(x) = f(x)$, поэтому $\{x \mid g(x) < c\} \cap A^c = \{x \mid f(x) < c\} \cap A^c$. Так как f измерима, $\{x \mid f(x) < c\} \in \mathcal{M}$, значит и его пересечение с $A^c \in \mathcal{M}$ (так как $A^c \in \mathcal{M}$).
- $\{x \mid g(x) < c\} \cap A \subset A$. Так как мера полная и $\mu(A) = 0$, любое подмножество A измеримо. Значит, $\{x \mid g(x) < c\} \cap A \in \mathcal{M}$.

Объединение двух измеримых множеств измеримо. Следовательно, $\{x \mid g(x) < c\} \in \mathcal{M}$ для любого c, что означает измеримость g. $\square$

Билет 10: Виды сходимости

Определение 26 (Сходимость почти всюду (п.в.)). *Последовательность функций $\{f_n\}$* ***сходится почти всюду*** *к функции f на X относительно меря μ, если существует множество $E \subset X$ с $\mu(E) = 0$ такое, что для всех $x \in X \setminus E$ выполняется $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Обозначение: $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$.*

Определение 27 (Сходимость по мере). *Последовательность функций $\{f_n\}$* ***сходится по мере*** *к функции f на X относительно меры μ, если для любого $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Обозначение: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Пример 5 (Примеры).

- ***Сх. п.в., но не по мере:*** *Редко. Обычно на пространствах бесконечной меры. Пример: $X = \mathbb{R}$, μ — мера Лебега. $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x)$. Тогда $f_n(x) \to 0$ для* ***каждого*** *x (так как для фикс. x при $n > x$ $f_n(x) = 0$), т.е. $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. Но $\mu(\{x \mid |f_n(x) - 0| \geq 1\}) = \mu([n, n+1]) = 1 \not\to 0$, значит, не сходится по мере.*
- ***Сх. по мере, но не п.в.:*** *Классический пример на $[0,1]$ с мерой Лебега. Построим "бегущий отрезок":*

  $$f_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}, \quad f_2 = \mathbf{1}_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \mathbf{1}_{[1/2,1]}, \quad f_4 = \mathbf{1}_{[0,1/4]}, \quad f_5 = \mathbf{1}_{[1/4,1/2]}, \quad f_6 = \mathbf{1}_{[1/2,3/4]}, \quad f_7 = \mathbf{1}_{[3/4,1]},$$

  Длина носителя f_n стремится к 0. Для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$), $\mu(\{x \mid |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = \mu(\operatorname{supp} f_n) \to 0$, значит $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. Но для любого $x \in [0,1]$, последовательность $f_n(x)$ содержит бесконечно много единиц (так как отрезки покрывают $[0,1]$ бесконечно много раз), значит $f_n(x)$ ***не сходится*** *ни в одной точке! (Хотя есть подпоследовательность, сходящаяся п.в.).*

Теорема 11 (Из сходимости п.в. следует сходимость по мере (при $\mu(X) < \infty$)). *Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mu(X) < \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций, $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ на X. Тогда $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Нужно найти N такое, что для всех $n \geq N$: $\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta$.
По сходимости п.в.: множество $E = \{x \in X \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$ имеет $\mu(E) = 0$.
Определим множества:

$$A_m = \{x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Заметим, что $\{B_n\}$ убывает: $B_1 \supset B_2 \supset \dots$.
Если $x \in X \setminus E$, то $f_n(x) \to f(x)$, значит для этого x существует N_x такое, что для всех $m \geq N_x$: $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. Следовательно, $x \notin A_m$ для всех $m \geq N_x$, а значит $x \notin B_{N_x}$. Это верно для всех $x \in X \setminus E$. Поэтому:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset E.$$

Так как $\mu(E) = 0$ и $\mu(X) < \infty$, можно применить свойство непрерывности меры сверху: $\mu(B_n) \downarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \mu(E) = 0$. Значит, $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.
Выберем N такое, что $\mu(B_N) < \delta$. Тогда для всех $n \geq N$:

$$\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = A_n \subset B_N \quad (\text{так как } n \geq N).$$

Следовательно, $\mu(A_n) \leq \mu(B_N) < \delta$ для всех $n \geq N$, что и означает $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Замечание 2. *Условие $\mu(X) < \infty$ существенно (см. пример выше).*

Билет 11: Теоремы Егорова и Лузина

Определение 28 (Почти равномерная сходимость)**.** *Последовательность функций $\{f_n\}$ **сходится почти равномерно** к функции f на X относительно меры μ, если для любого $\delta > 0$ существует такое множество $E_\delta \subset X$ с $\mu(E_\delta) < \delta$, что $f_n \to f$ **равномерно** на $X \setminus E_\delta$. Обозначение: $f_n \xrightarrow{n.p.} f$.*

Теорема 12 (Егорова)**.** *Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mu(X) < \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность **измеримых** функций, сходящаяся **п.в.** к измеримой функции f на X. Тогда $f_n \xrightarrow{n.p.} f$.*

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$. Нужно найти E_δ с $\mu(E_\delta) < \delta$ такое, что $f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus E_\delta$.
По предыдущей теореме $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (так как $\mu(X) < \infty$). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим:

$$A_n^{(k)} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Так как $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то для каждого k: $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n^{(k)}) = 0$. Значит, для каждого k найдется n_k такое, что $\mu(A_{n_k}^{(k)}) < \frac{\delta}{2^k}$.

Положим $E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^{(k)}$. Тогда:

$$\mu(E_\delta) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n_k}^{(k)}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Теперь докажем, что $f_n \to f$ **равномерно** на $X \setminus E_\delta$.
Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем K такое, что $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Рассмотрим $n \ge n_K$. Для $x \in X \setminus E_\delta$ имеем $x \notin A_{n_k}^{(k)}$ для всех k, в частности, $x \notin A_{n_K}^{(K)}$. Но $A_{n_K}^{(K)} = \{x \mid |f_{n_K}(x) - f(x)| \ge \frac{1}{K}\}$. Значит, для всех $x \in X \setminus E_\delta$:

$$|f_{n_K}(x) - f(x)| < \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Однако, это верно только для $n = n_K$. Нам нужно для всех $n \ge n_K$.
Так как $x \notin E_\delta$, то $x \notin A_n^{(k)}$ для **всех** $n \ge n_k$? Нет! Мы выбрали только конкретные n_k для каждого k, а не для всех n.
Исправим: Определим множества:

$$B_m^{(k)} = \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{1}{k}\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^{(k)}.$$

Так как $f_n \to f$ п.в., то $\mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^{(k)}) = 0$ (множество точек, где сходимость не "портируются"начиная с некоторого места). Так как $\mu(X) < \infty$, $\mu(B_m^{(k)}) \downarrow \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^{(k)}) = 0$. Значит, для каждого k найдется m_k такое, что $\mu(B_{m_k}^{(k)}) < \frac{\delta}{2^k}$.
Положим $E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{m_k}^{(k)}$. Тогда $\mu(E_\delta) < \delta$.
Теперь покажем равномерную сходимость на $X \setminus E_\delta$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем K с $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Пусть $N = m_K$. Для $n \ge N$ и для любого $x \in X \setminus E_\delta$ имеем $x \notin B_{m_K}^{(K)}$. Но $B_{m_K}^{(K)} = \bigcup_{n=m_K}^{\infty} A_n^{(K)}$. Значит, $x \notin A_n^{(K)}$ для всех $n \ge m_K$, т.е. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{K} < \varepsilon$ для всех $n \ge N$ и всех $x \in X \setminus E_\delta$. Это и означает равномерную сходимость. □

Определение 29 (C-свойство). *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает* ***C-свойством*** *(свойством Лузина) на $[a,b]$, если она* ***непрерывна*** *на $[a,b]$ за исключением, возможно, множества меры нуль.*

Замечание: Это означает, что сужение f на некоторое замкнутое подмножество $F \subset [a,b]$ с $m([a,b] \setminus F) < \varepsilon$ непрерывно (но f сама может иметь разрывы вне F).

Теорема 13 (Лузина). *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ —* ***измеримая*** *по Лебегу (конечная п.в.) функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое* ***замкнутое*** *множество $F \subset [a,b]$, что:*

(i) $m([a,b] \setminus F) < \varepsilon$ (мера дополнения мала).

(ii) Сужение $f|_F$ ***непрерывно*** *на F.*

Иными словами, любая измеримая функция обладает ***C-свойством****.*

Формулировка без доказательства.

Билет 12: Интеграл по мере

Определение 30 (Интегрируемая по мере функция)**.** *Пусть* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *— пространство с мерой. Функция* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *называется* ***интегрируемой по мере*** μ*, если:*

1. f *μ-измерима*
2. $\int_X |f| d\mu < +\infty$

Множество таких функций обозначается $\mathcal{L}^1(X, \mu)$*.*

Определение 31 (Интеграл по мере)**.** ***Интегралом*** *от* f *по мере* μ *называется:*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

где $f^+ = \max(f, 0)$*,* $f^- = -\min(f, 0)$*.*

Свойство 7 (Свойства интеграла)**.**

(1) ***Линейность****:* $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$ *для* a*,*$b \in \mathbb{R}$*.*

(2) ***Монотонность****: Если* $f \le g$ *п.в., то* $\int f d\mu \le \int g d\mu$*.*

(3) ***Аддитивность****: Если* $A \cap B = \emptyset$*, то* $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$*.*

(4) $|\int f d\mu| \le \int |f| d\mu$*.*

(5) Если $f = g$ *п.в., то* $\int f d\mu = \int g d\mu$*.*

Теорема 14 (Критерий интегрируемости (лемма о сходимости ряда))**.** *Функция* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность* ***простых*** *функций* $\{s_n\}$ *такая, что:*

(i) $s_n \to f$ ***п.в.***

(ii) $|s_n| \le |f|$ *п.в.*

(iii) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |s_n - s_{n-1}| d\mu$ *сходится (полагаем* $s_0 = 0$*).*

При этом $\int f d\mu = \lim \int s_n d\mu$*.*

Билет 13: Интеграл Лебега

Определение 32 (Интеграл Лебега)**.** ***Интегралом Лебега*** *от измеримой функции* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *называется:*

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{s \text{ — простая} \\ 0 \le s \le f}} \int s d\mu - \sup_{\substack{s \text{ — простая} \\ 0 \le s \le f^-}} \int s d\mu$$

при условии, что хотя бы один из супремумов конечен.

Свойство 8 (Свойства интеграла Лебега)**.**

(1) ***Линейность:*** $\int(af+bg)d\mu = a\int f d\mu + b\int g d\mu$.

(2) ***Монотонность:*** *Если* $f \le g$ *п.в., то* $\int f d\mu \le \int g d\mu$.

(3) ***Теорема Леви (монотонная сходимость):*** *Если* $0 \le f_n \uparrow f$ *п.в., то* $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

(4) ***Теорема Лебега (мажорированная сходимость):*** *Если* $f_n \to f$ *п.в.,* $|f_n| \le g$ *п.в.,* $g \in \mathcal{L}^1$, *то* $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

(5) ***Лемма Фату:*** *Если* $f_n \ge 0$ *п.в., то* $\int \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim} \int f_n d\mu$.

Теорема 15 (Связь интегралов Лебега и Римана)**.**

(i) *Если функция* f ***интегрируема по Риману*** *на отрезке* $[a,b]$, *то она* ***интегрируема по Лебегу*** *на* $[a,b]$ *(относительно меры Лебега), и значения интегралов совпадают:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

(ii) *Обратное неверно: существуют функции, интегрируемые по Лебегу, но не интегрируемые по Риману. Пример:* ***функция Дирихле*** $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. *Она не интегрируема по Риману (разрывна всюду), но интегрируема по Лебегу:* $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} dm = m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$, *так как* $\mathbb{Q}$ *счетно.*

(iii) *Критерий интегрируемости по Риману:* f *интегрируема по Риману на* $[a,b] \Leftrightarrow f$ ***ограничена*** *и множество ее* ***точек разрыва*** *имеет* ***меру Лебега нуль****.*

Билет 14: Канторово множество

Определение 33 (Канторово множество (стандартное))**.** *Построение на* $[0,1]$*:*

1. *Шаг 0:* $C_0 = [0,1]$.
2. *Шаг 1: Удаляем* ***среднюю треть*** $(1/3, 2/3)$. *Остается* $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$.
3. *Шаг 2: Удаляем средние трети оставшихся интервалов:* $(1/9, 2/9)$ *и* $(7/9, 8/9)$. *Остается* $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$.
4. *Продолжаем процесс: На шаге* n *имеем* 2^n *замкнутых интервалов длины* 3^{-n}, *удаляем среднюю треть каждого. Получаем* C_n.

Канторово множество $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

Свойство 9 (Свойства канторова множества)**.**

(1) *C **непусто**: Содержит все концы удаляемых интервалов (0,1,1/3,2/3,1/9,2/9,7/9,8/9,...).*

(2) *C **замкнуто**: Как пересечение замкнутых множеств C_n.*

(3) *C **совершенно**: Замкнуто и не имеет изолированных точек (любая точка — предельная).*

(4) *C **нигде не плотно**: Его замыкание $\overline{C} = C$ не содержит интервалов (внутренность пуста).*

(5) ***Мера Лебега**: $m(C_n) = (2/3)^n$, так как на каждом шаге удаляется треть длины. Тогда $m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$.*

(6) ***Мощность**: $|C| = \mathfrak{c}$ (континуум). Доказательство: Каждой точке $x \in C$ соответствует последовательность выборов (левая или правая треть на каждом шаге), т.е. элемент $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, мощность которого $\mathfrak{c}$. Биекция: $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, где $a_k \in \{0,2\}$.*

(7) ***Несчетность** (следует из мощности $\mathfrak{c}$).*

(8) ***Все точки** C являются **точками конденсации** (каждая окрестность содержит несчетно много точек C).*

Билет 15: Пространство L^1

Определение 34 (Банахово пространство $L^1(X,\mu)$)**.** *Пусть $(X,\mathcal{M},\mu)$ — пространство с мерой. Рассмотрим множество всех **интегрируемых** функций $f : X \to \mathbb{R}$ (т.е. $\int |f| d\mu < \infty$).*
Факторизуем его по отношению эквивалентности: $f \sim g$ если $f = g$ п.в.
***Пространство** $L^1(X,\mu)$ — это множество **классов эквивалентности** интегрируемых функций.*
Норма в L^1: $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$.
***Основные свойства**:*

(1) *L^1 — **полное нормированное пространство** (Банахово).*

(2) ***Линейность**: $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$, $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$.*

(3) *$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ п.в.*

(4) ***Теорема Рисса-Фишера**: L^1 **полно** (любая фундаментальная последовательность сходится к элементу L^1).*

(5) ***Плотные множества**: Непрерывные финитные функции; Простые интегрируемые функции; Ступенчатые функции (если $X \subset \mathbb{R}^n$).*

Билет 16: Пространство L^2

Определение 35 (Гильбертово пространство $L^2(X,\mu)$)**.** *Факторизуем по отношению $f = g$ п.в.*
Пространство *$L^2(X,\mu)$ — множество классов эквивалентности таких функций.*
Скалярное произведение: $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu$ (для $\mathbb{R}$: $\int fgd\mu$).
Норма: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$.
Основные свойства:

*(1) L^2 — **полное пространство со скалярным произведением** (Гильбертово).*

*(2) **Неравенство Коши-Буняковского:** $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2\|g\|_2$.*

*(3) **Теорема Рисса-Фишера:** L^2 **полно**.*

*(4) **Плотные множества:** Те же, что и в L^1 (непрерывные финитные, простые, ступенчатые).*

*(5) **Сходимость в среднем квадратичном:** $f_n \to f$ в L^2 означает $\|f_n - f\|_2 \to 0$.*

Определение 36 (Всюду плотное множество)**.** *Подмножество D топологического пространства Y называется **всюду плотным**, если его замыкание $\overline{D} = Y$, т.е. любая точка $y \in Y$ является пределом некоторой последовательности точек из D.*

Билет 17: Ортогональные системы в L^2

Определение 37 (Ортогональная система)**.** *Система функций $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(X,\mu)$ называется **ортогональной**, если $\langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0$ для всех $n \ne m$.*

Определение 38 (Ортонормированная система (ОНС))**.** *Ортогональная система называется **ортонормированной**, если $\|\phi_n\|_2 = 1$ для всех n, т.е. $\langle \phi_n, \phi_m\rangle = \delta_{nm}$.*

Определение 39 (Ряд Фурье)**.** *Пусть $\{\phi_n\}$ — ОНС в $L^2(X,\mu)$, $f \in L^2(X,\mu)$. **Рядом Фурье** функции f по системе $\{\phi_n\}$ называется ряд:*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \quad \text{где } c_n = \langle f, \phi_n\rangle = \int_X f\overline{\phi_n}d\mu.$$

*Коэффициенты c_n называются **коэффициентами Фурье**.*

Пример 6 (Тригонометрическая система)**.** *На $X = [-\pi, \pi]$ с мерой Лебега, нормированной: $d\mu = \frac{dx}{2\pi}$.*
Система функций:

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_n(x) = \cos(nx), \quad \psi_n(x) = \sin(nx) \quad (n = 1{,}2{,}3,\dots)$$

Не *ортонормирована.*
Стандартная ***ортонормированная тригонометрическая система:***

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

Или в комплексном виде на $[-\pi, \pi]$ *с* $d\mu = \frac{dx}{2\pi}$*:*

$$\phi_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Тогда $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \delta_{nm}$.

Билет 18: Ряды Фурье

Теорема 16 (Равенство Парсеваля)**.** *Пусть* $\{\phi_n\}$ *—* ***ортонормированная система*** *в* $L^2(X,\mu)$*. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Система $\{\phi_n\}$ ***полна*** *(замыкание ее линейной оболочки совпадает с* L^2*).*

(ii) Для любой $f \in L^2$*:* $\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *(равенство Парсеваля), где* $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$*.*

(iii) Ряд Фурье f *сходится к* f *в* L^2*:* $\left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k\right\|_2 \to 0$.

Определение 40 (Разложение по базису Фурье)**.** *Если ОНС* $\{\phi_n\}$ ***полна****, то она образует* ***ортонормированный базис*** *в* L^2*. Любая функция* $f \in L^2$ *разлагается в ряд Фурье, сходящийся к ней в* L^2*:*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \quad c_n = \langle f, \phi_n \rangle,$$

где равенство понимается в смысле сходимости в L^2*.*

Билет 19: Вейвлеты

Определение 41 (Вейвлет (всплеск))**.** ***Вейвлетом*** *(всплеском) называется функция* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$*, удовлетворяющая следующим условиям (часто):*

(i) ***Нулевое среднее:*** $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$.

(ii) ***Нормированность:*** $\|\psi\|_2 = 1$.

(iii) ***Допускает порождающую ортонормированную систему:*** *Система функций*

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z}$$

образует ***ортонормированный базис*** *в* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Свойство 10 (Основные свойства вейвлетов)**.**

- ***Локализация****: Вейвлеты хорошо локализованы и в* **времени** *(пространстве), и в* **частоте** *(в отличие от синусоид Фурье, локализованных только в частоте).*
- ***Мультимасштабный анализ****: Позволяют анализировать сигналы на разных масштабах (частотах) и в разных положениях.*
- ***Ортогональность****:* $\langle \psi_{j,k}, \psi_{m,n} \rangle = \delta_{jm}\delta_{kn}$.
- ***Эффективность****: Быстрые алгоритмы разложения (быстрое вейвлет-преобразование).*

Пример 7 (Виды вейвлетов)**.**

- ***Вейвлет Хаара****: Простейший вейвлет с компактным носителем.*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2 \\ -1, & 1/2 \le x < 1 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

- ***Вейвлет Добеши (Daubechies)****: Семейство гладких вейвлетов с компактным носителем.*
- ***Вейвлет Мейера (Meyer)****: Гладкий вейвлет с бесконечным носителем, хорошей локализацией в частоте.*
- ***Мексиканская шляпа (Ricker wavelet)****:* $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}(1 - x^2)e^{-x^2/2}$.

Замечание 3 (Сравнение с преобразованием Фурье)**.**

- ***Фурье****: Идеально для* **периодических/стационарных** *сигналов. Плохо локализован во времени (не показывает* **когда** *произошло событие).*
- ***Вейвлеты****: Идеально для* **нестационарных** *сигналов,* **локальных особенностей** *(разрывы, всплески). Показывают* **и частоту, и время** *события. Эффективны для сжатия данных.*

Пример 8 (Применение вейвлетов)**.**

- *Сжатие изображений (JPEG 2000).*
- *Очистка сигналов от шумов (вейвлет-пороги).*
- *Анализ временных рядов (финансы, геофизика).*
- *Распознавание образов.*
- *Решение дифференциальных уравнений.*