Лабораторная работа №4

Научное программирование

Леонтьева Ксения Андреевна | НПМмд-02-23

Содержание

1	Цель работы	4
2	Теоретическое введение	5
3	Выполнение лабораторной работы	7
4	Вывод	12
Список литературы		13

Список иллюстраций

3.1	Mетод Гаусса	8
3.2	Метод Гаусса	8
3.3	Iевое деление	9
3.4	.U-разложение	0
3.5	.UP-разложение	1

1 Цель работы

Изучить встроенные в Octave алгоритмы, необходимые для решения систем линейных уравнений.

2 Теоретическое введение

Метод Гаусса

Запишем исходную систему

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

в матричном виде: Ax=b. Матрица A называется основной матрицей системы, b- столбцом свободных членов. Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа:

- на первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна;
- на втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений.

Для приведения матрицы к треугольному виду для системы уравнений Ax=b используют расширенную матрицу.

LU-разложение

 ${
m LU}$ -разложение — это вид факторизации матриц для метода Гаусса. Цель состоит в том, чтобы записать матрицу ${
m A}$ в виде A=LU, где ${
m L}$ — нижняя треугольная матрица, а ${
m U}$ — верхняя треугольная матрица. Эта факторизованная форма может быть использована для решения уравнения Ax=b.

Если известно LU-разложение матрицы A, то исходная система может быть записана как LUx=b. Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система Ly=b. Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой. На втором шаге решается система Ux=y. Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

LUP-разложение

Если используются чередования строк, то матрица A умножается на матрицу переста- новок, и разложение принимает форму PA=LU.

Более подробно см. в [1] и [2].

3 Выполнение лабораторной работы

Для системы линейных уравнений:

$$Ax = b o egin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 построим расширенную матрицу вида

$$B = [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим ее поэлементно, например, выведем элемент, стоящий на пересечении 2й строки и 3го столбца. Также можем извлечь целый вектор строки или вектор столбца, например, выведем первую строку.

Реализуем явно метод Гаусса. Сначала добавим к третьей строке первую строку, умноженную на -1. Далее добавим к третьей строке вторую строку, умноженную на –1.5. Выведем явно решение системы, а затем воспользуемся встроенной командой. Можем поменять формат вывода значений, чтобы отображалось более пяти десятичных знаков. Затем вернем изначальный формат представления (рис. fig. 3.1) и (рис. fig. 3.2).

```
Диспетчер файлов
                           >> diary on
/Desktop/Octave labs_2 ×
                        🔯 >> B = [ 1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6; 1 -1 0 0 ]
                           в =
  Имя
                                2 3
-2 -4
                              1
                                         4
  diary
                              0
                                         6
                                -1
                             1
                           >> B(2, 3)
                           ans = -4
                           >> B(1, :)
                           ans =
                             1 2 3 4
                           >> B(3, :) = (-1) * B(1, :) + B(3, :)
                             1 2 3 4
0 -2 -4 6
0 -3 -3 -4
                           >> B(3, :) = (-1.5) * B(2, :) + B(3, :)
                           B =
                                  2 3 4
                              >> X3 = -13/3
                           x3 = -4.3333
                           >> X2 = (6 + 4 * X3) / (-2)
                           X2 = 5.6667
                           >> X1 = 4 - 3 * X3 - 2 * X2
                           x1 = 5.6667
```

Рис. 3.1: Метод Гаусса

Рис. 3.2: Метод Гаусса

Встроенная операция для решения линейных систем вида Ax=b в Octave

называется левым делением и записывается как $A \setminus b$. Это концептуально эквивалентно выражению $A^{-1}b$. Выделим из расширенной матрицы В матрицу А и вектор b. После чего найдем вектор x (рис. fig. 3.3).

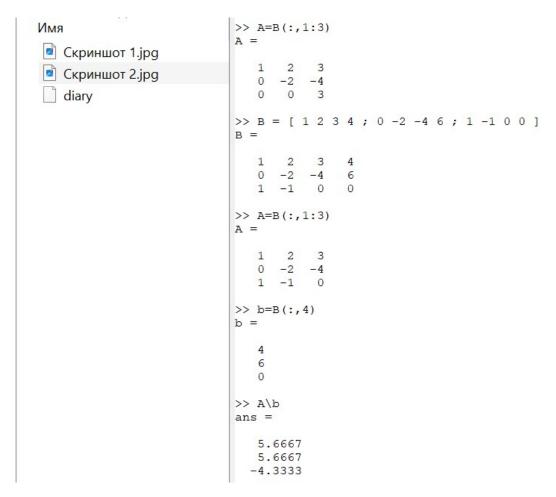


Рис. 3.3: Левое деление

Пусть дана матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

С помощью Octave распишем её LU-разложение и найдем вектор x (рис. fig. 3.4).

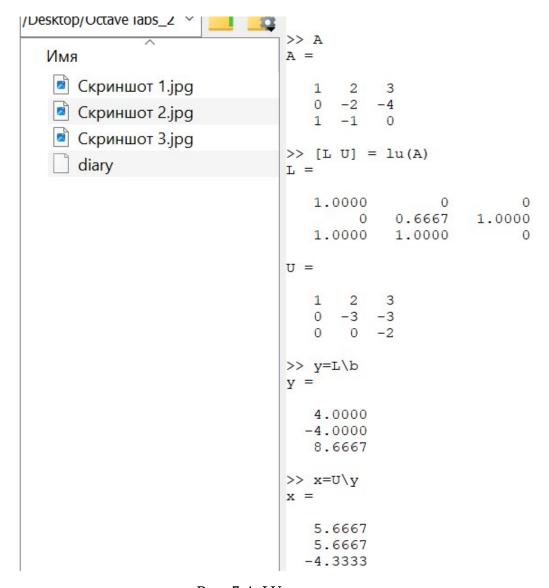


Рис. 3.4: LU-разложение

Для этой же матрицы A распишем LUP-разложение (рис. fig. 3.5).

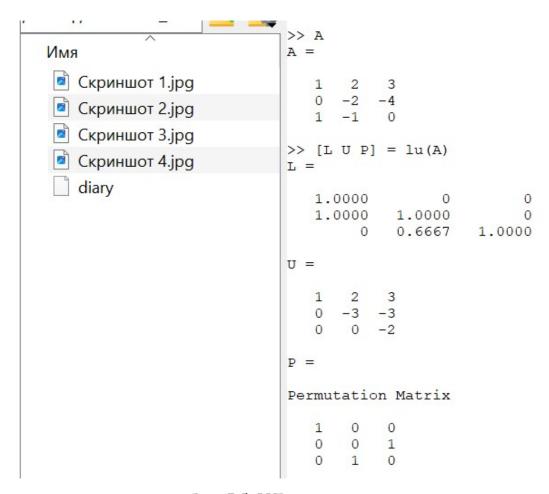


Рис. 3.5: LUP-разложение

4 Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я изучила встроенные в Octave алгоритмы, необходимые для решения систем линейных уравнений.

Список литературы

- Метод Гаусса [Электронный ресурс]. URL: http://mathprofi.ru/metod_gauss a_dlya_chainikov.html.
- 2. LU и LUP-разложение [Электронный ресурс]. URL: https://matworld.ru/matrix/LU-decomposition.php.