ЛЕКЦИЯ 15

## Общая схема метода Фурье

Рассмотрим схему метода Фурье для решения смешанной задачи для гиперболического уравнения.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \tag{1}$$

где $\rho$, $p$, $p'$ и $q$ – непрерывные на отрезке $[0, l]$ функции, причем

$$p(x) \geq p_0 > 0,\ \rho(x) \geq \rho_0 > 0,\ q(x) \geq 0,$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\alpha u(0,t) + \beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,\ \gamma u(l,t) + \delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где постоянные $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ таковы, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Решим сначала вспомогательную задачу. Будем искать нетривиальные решения уравнения (1) в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4}$$

удовлетворяющие граничным условиям (2). Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$T(t)\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) - q(x)X(x)T(t) = \rho(x)X(x)T''(t)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{5}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от $x$, а правая часть - только от $t$, и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (5 ) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из (5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0. \tag{7}$$

Для того, чтобы решения уравнения (1) вида (4) удовлетворяли граничным условиям (2), необходимо, чтобы функция $X$ удовлетворяла граничным условиям

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0,\ \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, приходим к следующей **задаче Штурма-Лиувилля**: Найти такие значения параметра $\lambda$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8). Такие значения параметра $\lambda$ называются собственными значениями, а соответсвующие нетривиальные решения - собственными функциями задачи (7), (8).

Рассмотрим **основные свойства собственных функций и собственных значений**.

В силу однородности уравнения и граничных условий, собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя.

Всякому собственному значению может соответствовать только одна линейно независимая собственная функция. Действительно, всякая собственная функция определяется однозначно как решение дифференциального уравнения второго порядка по значению самой функции и её первой производной при $x = 0$. Предположим, что при некотором значении $\lambda$ существуют два линейно независимых решения уравнения (7), удовлетворяющих граничным значениям (8). Тогда оказалось бы, что и общее решение уравнения (7) удовлетворяет этим условиям. Но этого быть не может, так как всегда можно найти решение уравнения (7) при таких начальных данных $X(0)$ и $X'(0)$, которые не удовлетворяют первому из граничных условий (8).

Существует счетное множество вещественных собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \ldots .$$

Каждому собственному значению $\lambda_k$ соответствует собственная функция $X_k$, определяемая с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно выбрать так, чтобы

$$\|X_k\| = \int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1. \tag{9}$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (9), называются нормированными.

Собственные функции $X_m$ и $X_n$ при $m \neq n$ ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[0, l]$, то есть

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0, \ n \neq m. \tag{10}$$

Действительно, пусть $\lambda_n$ и $\lambda_m$ – два различных собственных значения, а $X_n$ и $X_m$ – соответствующие им собственные функции, то есть

$$\frac{d}{dx}(p(x)X_n'(x)) + (\lambda_n \rho(x) - q(x))X_n(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)X_m'(x)) + (\lambda_m \rho(x) - q(x))X_m(x) = 0.$$

Умножая первое равенство на $X_m(x)$, второе - на $X_n(x)$ и вычитая почленно, получим равенство

$$X_m(x)\frac{d}{dx}(p(x)X_n'(x)) - X_n(x)\frac{d}{dx}(p(x)X_m'(x)) +$$
$$+ (\lambda_n - \lambda_m)\rho(x)X_n(x)X_m(x) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(\lambda_n - \lambda_m)\rho(x)X_n(x)X_m(x) + \frac{d}{dx}(p(x)(X_m(x)X_n'(x) - X_n(x)X_m'(x))).$$

Интегрируя это равенство по $x$ в пределах от 0 до $l$, получим

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx =$$

$$= p(x)(X_m(x)X_n'(x) - X_n(x)X_m'(x))|_{x=0}^{x=l}.$$

Принимая во внимание граничные условия (8), убеждаемся, что правая часть равна нулю: если $\delta = 0$, то $X_n(l) = X_m(l) = 0$, а если $\delta \neq 0$, то $X_n'(l) = -\gamma\delta^{-1}X_n(l)$, $X_m'(l) = -\gamma\delta^{-1}X_m(l)$ и $X_m(l)X_n'(l) = X_n(l)X_m'(l)$. Аналогично зануляется и подстановка $x = 0$. Таким образом,

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx = 0,$$

и в силу $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\lambda_k$ – собственные значения, а $X_k$ – собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему,

$$\frac{d}{dx}(p(x)X_k'(x)) - q(x)X_k(x) = -\lambda_k\rho(x)X_k(x).$$

Умножим обе части равенства на $X_k(x)$ и проинтегрируем, принимая во внимание (9):

$$\lambda_k = -\int_0^l \{\frac{d}{dx}(p(x)X_k'(x)) - q(x)X_k(x)\}X_k(x)dx.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\lambda_k = \int_0^l (p(x)(X_k'(x))^2 + q(x)X_k^2(x)dx -$$

$$- p(x)X_k(x)X_k'(x)|_{x=0}^{x=l}. \qquad (11)$$

Предположим, что внеинтегральный член не положителен, то есть

$$p(x)X_k(x)X_k'(x)|_{x=0}^{x=l} \leq 0. \qquad (12)$$

Это условие выполняется при наиболее часто встречающихся граничных условиях

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0,$$

$$X'(0) = 0,\ X'(l) = 0,$$

$$X'(0) - h_1X(0) = 0,\ X'(l) + h_2X(l) = 0,\ h_1 > 0,\ h_2 > 0.$$

Так как $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, то из формулы (11) непосредственно следует, что все собственные значения задачи (7), (8) неотрицательны.

Обратимся к уравнению (6). Его общее решение $T_k(t)$ при $\lambda = \lambda_k$ имеет вид

$$T_k(t) = A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t,$$

где $A_k$, $B_k$ – произвольные постоянные. Таким образом, каждая функция

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x)$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \tag{13}$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по $x$ и $t$, то сумма его будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2). Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \tag{15}$$

Таким образом, получена задача о разложении произвольной функции в ряд по собственным функциям $X_n$ граничной задачи (7), (8). Предполагая, что ряды (14) и (15) сходятся равномерно, можно определить коэффициенты $A_n$ и $B_n$, умножив обе части равенств (14) и (15) на $\rho(x)X_n(x)$ и проинтегрировав по $x$ от 0 до $l$. Тогда, принимая во внимание (9), (10), получим

$$A_n = \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)dx, \;\; B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \rho(x)\psi(x)X_n(x)dx.$$

Подставляя эти значения коэффициентов $A_n$ и $B_n$ в ряд (13), получим решение смешанной задачи (1)-(3), если ряд (13 ) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по $x$ и $t$ до двух раз включительно, равномерно сходятся.

# Список литературы


[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.