ЛЕКЦИЯ 28

РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ШАРА

Пусть требуется найти функцию u, гармоническую внутри шара, непрерывную в замкнутом шаре и принимающую на поверхности S этого шара заданные непрерывные значения f. Построим функцию Грина для шара.

Наиболее распространенным методом построения функции Грина является метод электростатических изображений. Идея его состоит в том, что при построении функции

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(M, M_0)$$

функция g представляется как поле зарядов, расположенных вне поверхности S, и выбираемых таким образом, чтобы выполнялось условие

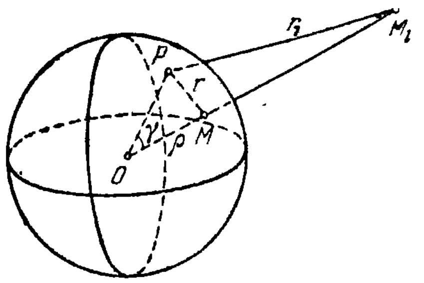
$$g\big|_S = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Эти заряды называются электростатическими изображениями единичного заряда, помещенного в точку M и создающего в отсутствии поверхности S потенциал $1/4\pi r$.

Пусть R – радиус шара с центром в начале координат. Возьмём внутри шара произвольную точку $M(x,y,z)$ и обозначим через ρ расстояние от этой дочки до центра шара. Подвергнем точку M преобразованию инверсии относительно сферы S. Полученная точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ лежит на прямой OM вне шара на расстоянии ρ_1 от центра, причем

$$\rho\rho_1 = R^2. \tag{9}$$

Точка M_1 называется сопряженной с точкой M. Это преобразование взаимно, точку M можно рассматривать как сопряженную с точкой M_1.



Возьмём теперь какую-нибудь точку $P(\xi,\eta,\zeta)$ и обозначим через r и r_1 расстояния от этой точки до точек M и M_1 соответственно.

Рассмотрим случай, при котором точка P лежит на поверхности шара. Треугольники OMP и OM_1P подобны, так как угол при вершине O общий,

$$\frac{OP}{OM} = \frac{R}{\rho} = \frac{\rho_1}{R} = \frac{OM_1}{OP}.$$

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{R}{\rho} = \frac{r_1}{r}$$

или

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1} = 0 \quad (P \in S) \tag{10}$$

Поместим в точку M единичный заряд. Гармоническая функция $g = -R/\rho \cdot 1/r_1$ на сфере принимает то же значение, что и функция $-1/r$. Она представляет потенциал заряда величины $-R/\rho$, помещенного в точку M_1.

Таким образом, функция Грина для шара будет иметь следующий вид:

$$G(P,M)=\frac{1}{4\pi r}-\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}. \tag{11}$$

Действительно, функция G как функция точки P является гармонической внутри шара, за исключением точки M, где она обращается в бесконечность. На поверхности шара функция обращается в ноль, что следует из (10). Таким образом, построенная функция удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функцию Грина задачи Дирихле. Подставим найденную функцию Грина в формулу (8):

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S f(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)d\gamma. \tag{12}$$

Преобразуем полученную формулу. Обозначим через $\mathbf{r}$ единичный вектор, сонаправленный вектору MP: $\mathbf{r}=\frac{1}{r}(\xi-x,\eta-y,\zeta-z)$.

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}=\nu_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}+\nu_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{r}+\nu_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{r}=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\nu_\xi\frac{\xi-x}{r}+\nu_\eta\frac{\eta-y}{r}+\nu_\zeta\frac{\zeta-z}{r}\right]=-\frac{1}{r^2}(\mathbf{r},\nu).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}(\mathbf{r}_1,\nu).$$

Таким образом, на поверхности S

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r^2}(\mathbf{r},\nu)+\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1^2}(\mathbf{r}_1,\nu). \tag{13}$$

Из треугольников OMP и OM_1P имеем

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos(\boldsymbol{r},\nu),\ \rho_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos(\mathbf{r}_1,\nu).$$

Так как $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, ν – единичные векторы, $\cos(\mathbf{r},\nu)=(\mathbf{r},\nu)$, $\cos(\mathbf{r}_1,\nu)=(\mathbf{r}_1,\nu)$. Таким образом,

$$(\boldsymbol{r},\nu)=\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr},(\boldsymbol{r_1},\nu)=\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2Rr_1}.$$

Подставляя в (13), получаем

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2\rho r_1^3}$$

или, в силу (9) и (10),

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)=\frac{\rho^2-R^2}{Rr^3}\ \text{(на S)}.$$

Подставляя в формулу (12), окончательно получим

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi R}\iint_S f(\xi,\eta,\zeta)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma. \tag{14}$$

Формула (14) называется ***формулой Пуассона***.

Таким образом, если решение внутренней задачи Дирихле для шара существует и если оно непрерывно в замкнутом шаре вместе с первыми производными, то это решение представимо по формуле Пуассона (14).

Докажем, что если функция f непрерывна, то формула Пуассона даёт решение внутренней задачи Дирихле для шара. Для этого нужно показать, что интеграл, входящий в формулу (14), есть гармоническая функция внутри шара и что функция u, определенная формулой (14), непрерывна в замкнутом шаре и принимает заданные значения f на поверхности шара, то есть что $u(M)$ при стремлении точки M к произвольно взятой точке

P на поверхности шара стремится к значению f в этой точке. При этом u становится непрерывной функцией в замкнутом шаре, если её соответствующим образом определить на поверхности шара.

Гармоничность функции u следует из того, что при $\rho<R$, $P\in S$

$$\Delta\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=\Delta\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}-\Delta\frac{1}{r}=-2R\Delta\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}=-2R\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\frac{1}{r}=0.$$

Возьмём на поверхности шара произвольную точку N и докажем, что если $M\to N$, то $u(M)\to f(N)$.

Формула (14) справедлива в частном случае $f\equiv1$. Решение задачи Дирихле в этом случае существует, $u\equiv1$. Таким образом, имеет место равенство

$$1=\frac{1}{4\pi R}\iint_S\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma. \tag{15}$$

Умножим обе части равенства (15) на $f(N)$ и вычтем из формулы Пуассона (14). Получим

$$u(M)-f(N)=\frac{1}{4\pi R}\iint_S\big(f(P)-f(N)\big)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma. \tag{16}$$

Пусть $\varepsilon>0$. Окружим точку N шаром радиуса 2δ, причем выберем δ столь малым, чтобы во всех точках поверхности сферы S, которые попадут внутрь этого шара, в силу непрерывности функции f имело место неравенство

$$\left|f(P)-f(N)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Обозначим через σ часть поверхности S, находящейся внутри шара радиуса 2δ с центром в точке N, оставшуюся часть обозначим S_1. Тогда разность (16) можно записать в виде

$$u(M)-f(N)=\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma\big(f(P)-f(N)\big)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma+\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_1}\big(f(P)-f(N)\big)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma$$

Оценим каждое слагаемое в правой части этого равенства. В силу (15) и (17) имеем

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma\big(f(P)-f(N)\big)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma\right|<\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma<\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{4\pi R}\iint_S\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma=\frac{\varepsilon}{2}$$

Это неравенство имеет место при любом положении точки M внутри шара.

Построим шар радиуса δ с центром в точке N. Допустим, при своём приближении к точке N точка M находится уже внутри этого шара. Тогда, если точка P находится на поверхности S_1, $r=|MP|>\delta$. Функция f непрерывна на поверхности S, следовательно, ограничена на ней, то есть $|f(P)|\le K$. Тогда

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_1}\big(f(P)-f(N)\big)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma\right|\le\frac{2KR\left(R^2-\rho^2\right)}{\delta^3}$$

Когда $M\to N$, R^2-$\rho^2\to0$, следовательно,

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_1}\big(f(P)-f(N)\big)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\gamma\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Окончательно получаем

$$\left|u(M)-f(N)\right|<\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности $\varepsilon>0$ следует $\lim\limits_{M\to N}u(M)=f(N)$, что и требовалось доказать.

Введём сферические координаты с центром в точке О. Пусть (θ',φ') – угловые координаты точки P, (ρ,θ,φ) – сферические координаты точки M. Обозначим через γ угол между векторами OP и OM. Тогда формулу Пуассона можно записать в виде

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R^2-\rho^2}{\left(R^2-2R\rho\cos\gamma+\rho^2\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi'.$$

Тем же методом может быть построена функция Грина для области, внешней к сфере:

$$G(P,M)=\frac{1}{4\pi r_1}-\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_1}\frac{1}{r},$$

где $r_1=|M_1P|$ – расстояние от фиксированной точки M_1, лежащей вне сферы, $r=|MP|$ – расстояние от точки M, сопряженной с точкой M_1, ρ_1 – расстояние от центра шара до точки M_1, R – радиус сферы.

Учитывая различие направлений нормалей для внутренней и внешней задач, получим

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{\rho^2-R^2}{\left(R^2-2R\rho\cos\gamma+\rho^2\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi'.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

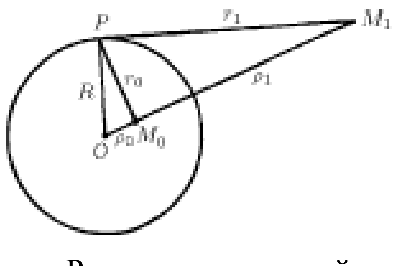
Функция Грина для круга может быть получена таким же способом, как и функция Грина для сферы. В этом случае её следует искать в виде

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+g.$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получим

$$G(P,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right),$$

где $\rho_0=|OM_0|$, $r_0=|M_0P|$, $r_1=|M_1P|$, R – радиус круга.



Решение внутренней задачи Дирихле для круга даётся интегралом Пуассона

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\theta)+r^2}dt.$$

Эта же формула с точностью до знака даёт решение внешней задачи.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Понятие функции Грина и формула

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(M,M_0)$$

имеют место и для неограниченного пространства, если рассматривать функции, регулярные на бесконечности. Найдём функцию Грина для полупространства $z>0$.

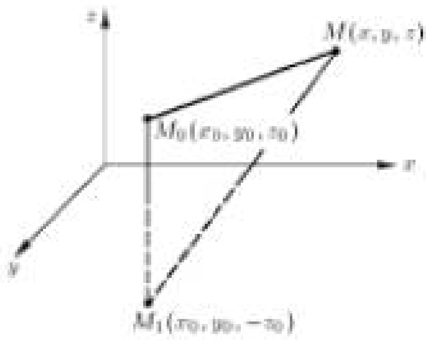
Поместим в точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ единичный заряд, который создаёт в неограниченном пространстве поле, потенциал которого определяется функцией

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0M}}.$$

«Индуцированное поле» g является полем отрицательного единичного заряда, помещенного в точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, являющуюся зеркальным изображением точки M_0 в плоскости z=0. Функция Грина задачи Дирихле равна

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_0} - \frac{1}{4\pi R_1},$$

где $R_0 = |M_0M|$, $R_1 = |M_1M|$.



Вычислим $\partial G/\partial \nu|_{z=0} = -\partial G/\partial z|_{z=0}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{z - z_0}{R_0^3} + \frac{z + z_0}{R_1^3}\right).$$

Полагая z=0, находим

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

Решение первой краевой задачи

$$\Delta u = 0, \qquad u|_S = f,$$

где S – плоскость z=0, даётся формулой

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{z_0}{R_{M_0P}^3} f(P)dS,$$

или

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}} f(x, y)dxdy.$$

Список литературы

∂

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm