Модуль 12 – Практикум по теме 12.4

Методы численного интегрирования

Пример 1

Значения функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ представлены в таблице

с погрешностью не более половины единицы последнего разряда:

x_i	0.040	0.060	0.080	0.100	0.120	0.140	0.160
$\tilde{f}_i$	0.398623	0.398225	0.397668	0.396953	0.396080	0.395052	0.393868

Аргумент табулирован с шагом 0.004, но в этом фрагменте таблицы аргумент представлен от $x = 0.040$ до $x = 0.160$ с шагом 0.02.

Нужно вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\, dx\,,$$

используя **квадратурную формулу второго порядка** I_2 (Симпсона) и затем **составную квадратурную формулу** $I_{2,\,m}$ (Симпсона).

Провести анализ погрешности.

Сравнить результаты.

Решение

Поскольку $f(x)$ представлена с ошибками, в таблице указан символ $\tilde{f}_i$. По условию задачи погрешность задания функции в узлах сетки не превышает $\delta = 0.5 \cdot 10^{-6}$.

При любом способе применения формулы Симпсона (базовый вариант, составная формула, равномерная или неравномерная сетка) вычислительная погрешность численного интегрирования оценивается величиной

$$\delta \cdot (b-a) = 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot (0.160 - 0.040) = 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 0.6 \cdot 10^{-7}$$

где $a = 0.040,\, b = 0.160$ — пределы интегрирования.

Поэтому при любом способе применения формулы общая погрешность интегрирования будет оценена величиной не менее $0.6 \cdot 10^{-7}$.

Для оценок **погрешности интегрирования** по формуле Симпсона будет нужна величина

$$\max_{x \in [0.040,\, 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| = 1.192044$$

Ее значение приведено с погрешностью не более половины единицы последнего разряда по справочному изданию, поэтому правильно использовать оценку

$$\max_{x \in [0.040,\, 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| \le 1.192044 + 0.5 \cdot 10^{-6}$$

Решая «свои» задачи, для получения таких оценок можно использовать справочные издания или on-line сервис, а в приложениях (напомним) используют таблицы конечных или разделенных разностей.

Часть I

Для вычисления интеграла I используем формулу I_2 (Симпсона) на отрезке $[a, b] = [0.040; 0.160]$.

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_2$$

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{2}$ есть «шаг формулы Симпсона».

Таким образом, из таблицы значений функции нужно взять 3 узла: пределы интегрирования $a = 0.040, b = 0.160$ и середину отрезка $[a, b]$:

$$\frac{a+b}{2} = 0.100$$

Шагом формулы (число h) является половина отрезка интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.06$$

Формулу запишем в виде

$$I_2 = \frac{0.06}{3}(f(0.040) + 4 \cdot f(0.100) + f(0.160)).$$

По табличным данным (они содержат погрешность) вычислим

$$\tilde{I}_2 = \frac{0.06}{3}(0.398623 + 4 \cdot 0.396953 + 0.393868) = 0.04760606$$

Приближенное значение I составит

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\,dx \approx 0.04760606$$

Ход рассуждений можно сразу «отмечать» в таблице:

x_i	**0.040**	0.060	0.080	**0.100**	0.120	0.140	0.160
$\tilde{f}_i$	**0.398623**	0.398225	0.397668	**0.396953**	0.396080	0.395052	0.393868
	Отрезок интегрирования						
	Шаг формулы			Шаг формулы			

Исследуем погрешность интегрирования

$$\psi_2 = I - I_2$$

Для погрешности формулы Симпсона верна оценка

$$|\,\psi_2\,| \le \hat{M}\,h^5,$$

где

$$\hat{M} = \frac{1}{90}\max_{x \in [a,b]}\left|\,f^{IV}(x)\right|,$$

$h = \dfrac{b-a}{2}$ есть шаг формулы Симпсона.

В данной задаче

$$|\,\psi_2\,| \le \hat{M}\,(0.06)^5,$$

где $\hat{M} = \dfrac{1}{90}\max\limits_{x \in [0.040,\,0.160]}\left|\,f^{IV}(x)\right| = \dfrac{1}{90} \cdot 1.1920445 = 0.013244939$

Таким образом,

$$| \psi_2 | \le \hat{M}\ (0.06)^5 = 0.102992645 \cdot 10^{-7}$$

Исследуем общую погрешность интегрирования

$$ОП_2 = I - \tilde{I}_2$$

Для общей погрешности формулы Симпсона выполняется

$$\left| ОП_2 \right| \le \hat{M}h^5 + \delta(b-a)$$

В данной задаче

$$\left| ОП_2 \right| \le 0.102992654 \cdot 10^{-7} + 0.6 \cdot 10^{-7} = 0.702992645 \cdot 10^{-7}$$

Выводы:

1) Оценка погрешности интегрирования имеет такой же порядок (-7), что и оценка вычислительной погрешности интегрирования (-7).

Решение не учитывать сквозную табуляцию с шагом 0.004 и затем «пропустить» еще 4 узла оправдано, потому что оценка погрешности формулы Симпсона

$$| \psi_2 | \le 0.102992645 \cdot 10^{-7}$$

меньше и лучше, чем оценка вычислительной погрешности, инициированной погрешностью данных:

$$\left| ВП_2 \right| \le 0.6 \cdot 10^{-7}$$

2) Общая погрешность интегрирования отражает рост погрешности:

$$\left| ОП_2 \right| \le 0.702992645 \cdot 10^{-7}$$

3) Приближенное значение интеграла

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\, dx \approx 0.04760606$$

Часть II

Для вычисления интеграла I используем составную формулу $I_{2,\,m}$ (Симпсона) на отрезке $[a, b] = [0.040; 0.160]$.

Из таблицы видно, что формулу можно применить на 3-х участках равной длины, поэтому $m = 3$, длина участка $h = 0.040$, шаг формулы на участке $\hat{h} = 0.020$

x_i	**0.040**	0.060	**0.080**	**0.100**	**0.120**	0.140	0.160
$\tilde{f}_i$	**0.398623**	0.398225	**0.397668**	**0.396953**	**0.396080**	0.395052	0.393868
	Отрезок интегрирования						
	Участок 1		Участок 2		Участок 3		
	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	

Составная формула $I_{2,\,m}$ служит для приближенного вычисления интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_{2,\,m}$$

При $m = 3$ на равномерной сетке записывается в виде

$$I_{2,3} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \ ,$$

где $\hat{h} = \dfrac{b-a}{2 \cdot 3}$.

Основными узлами составной формулы и границами ее участков в данной задаче будут

$$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.080,\ x_2 = 0.120,\ x_3 = b = 0.160$$

Участки имеют вид:

$$[x_0, x_1] = [0.040; 0.080]$$

$$[x_1, x_2] = [0.080; 0.120]$$

$$[x_2, x_3] = [0.120; 0.160]$$

Дополнительными узлами (они нужны для применения трехточечной формулы на каждом участке), будут

$$x_{1/2} = 0.060,\ x_{3/2} = 0.100,\ x_{5/2} = 0.140$$

Проверим, соответствует ли значение $\hat{h} = 0.020$, столь очевидное при рассмотрении таблицы, формулам, указанным в описании метода:

$$\hat{h} = \frac{b-a}{2\cdot 3} = \frac{0.160-0.040}{6} = \frac{0.120}{6} = 0.02$$

(соответствует).

Составную формулу $I_{2,3}$ запишем в виде

$$\begin{aligned} I_{2,3} = \frac{0.02}{3}\{&\underbrace{(f(0.040) + 4\cdot f(0.060) + f(0.080))}_{на\ участке\ 1} + \\ &+\underbrace{(f(0.080) + 4\cdot f(0.100) + f(0.120)}_{на\ участке\ 2}) + \ . \\ &+\underbrace{(f(0.120) + 4\cdot f(0.140) + f(0.160)}_{на\ участке\ 3}\} \end{aligned}$$

По табличным данным (они содержат погрешность) вычислим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2,3} = \frac{0.02}{3}\{\ &0.398623 + 4\cdot 0.398225 + 2\cdot 0.397668 + 4\cdot 0.396953 + \\ &+ 2\cdot 0.396080 + 4\cdot 0.395052 + 0.393868\} = 0.047606046667 \end{aligned}$$

Приближенное значение I составит

$$I = \int\limits_{0.040}^{0.160} f(x)\,dx \approx 0.047606046667$$

Исследуем погрешность интегрирования

$$\psi_{2,m} = I - I_{2,m}$$

Для погрешности составной формулы Симпсона на равномерной сетке верна оценка

$$\left|\ \psi_{2,m}\ \right| \le m\cdot \hat{M}\ \hat{h}^5,$$

где m - число участков,

$$\hat{M} = \frac{1}{90} \max_{x \in [a, b]} \left| f^{IV}(x) \right|,$$

$\hat{h} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$ есть шаг формулы на участке равномерной сетки.

В данной задаче

$$\left| \psi_{2,3} \right| \le 3 \cdot \hat{M}\ (0.02)^5,$$

где $\hat{M} = \dfrac{1}{90} \max\limits_{x \in [0.040,\, 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| = \dfrac{1}{90} \cdot 1.1920445 = 0.013244939$

Оценка погрешности составной формулы такова

$$\left| \psi_{2,3} \right| \le 3 \cdot \hat{M}\ (0.02)^5 = 0.12751413 \cdot 10^{-9}$$

Исследуем общую погрешность составной формулы

$$О\Pi_{2,m} = I - \tilde{I}_{2,m}$$

Для общей погрешности составной формулы Симпсона на равномерной сетке верно

$$\left| О\Pi_{2,m} \right| \le m \cdot \hat{M} \cdot \hat{h}^5 + \delta(b - a)$$

В данной задаче

$$\left| О\Pi_{2,3} \right| \le 0.12751413 \cdot 10^{-9} + 0.6 \cdot 10^{-7} = 0.601271514 \cdot 10^{-7}$$

Выводы:

1) Оценка погрешности интегрирования на два порядка лучше (-9), чем оценка вычислительной погрешности интегрирования (-7).

$$\left| \psi_{2,3} \right| \le 0.12751413 \cdot 10^{-9}$$

$$\left| В\Pi_{2,3} \right| \le 0.6 \cdot 10^{-7}$$

2) Общая погрешность интегрирования практически не отражает рост погрешности, потому что в ее структуре погрешность численного интегрирования практически не видна:

$$\left| О\Pi_{2,3} \right| \le 0.601271514 \cdot 10^{-7}$$

3) Приближенное значение интеграла

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\,dx \approx 0.047606046667$$

Сопоставление решений:

1) Оба решения по-своему корректны: первое решение имеет погрешность интегрирования, сопоставимую порядком с вычислительной погрешностью, второе – погрешность интегрирования на 2 порядка меньше, чем вычислительная погрешность.

2) Оба решения с вычислительной точки зрения экономичны, но решение с более низкой (лучшей) оценкой погрешности требует немного больше вычислений.

3) Оба решения подтверждают, что для вычисления искомого интеграла I в силу неточности исходных данных сквозная табуляция с шагом 0.004 не нужна.

4) На основе оценок общей погрешности для искомого значения интеграла I в каждом случае может быть построена интервальная оценка (как это делали в модуле 12.2) или уточненная интервальная оценка с учетом знака погрешностей $\psi_2, \psi_{2,m}$

На Рисунке 1 показаны маркером табличные данные.

На рисунке А) показан полином $\widetilde{P}_2(x)$, интерполирующий данные по 3-м узлам:

$$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = b = 0.160$$

По формуле Симпсона интеграл от $\widetilde{P}_2(x)$ принимается за приближенное значение интеграла от функции $f(x)$.

На рисунке Б) показаны три полинома степени 2 для составной формулы Симпсона, и каждый из них интерполирует данные по 3-м узлам своего участка:

$\widetilde{P}_{2,1}(x)$ для участка $[x_0, x_1]$: узлы $x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.080$, $x_{1/2} = 0.060$;

$\widetilde{P}_{2,2}(x)$ для участка $[x_1, x_2]$: узлы $x_1 = 0.080,\ x_2 = 0.120$, $x_{3/2} = 0.100$;

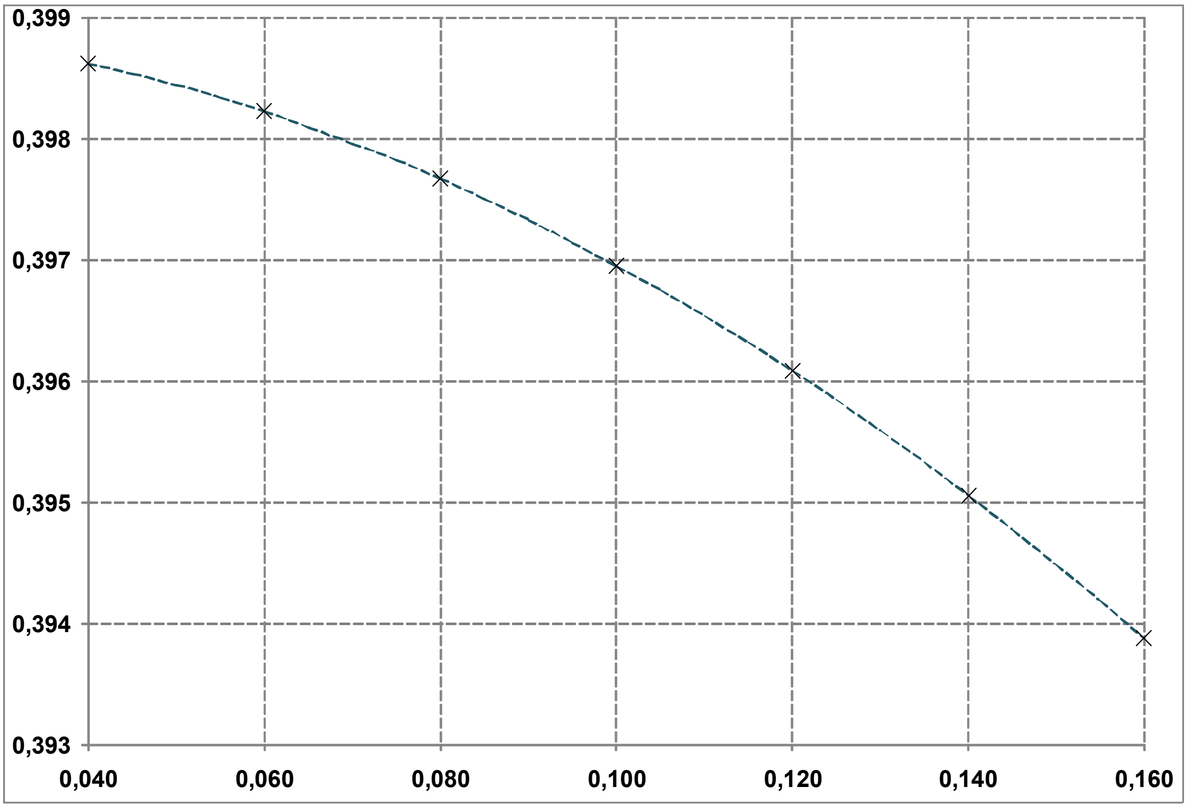
$\widetilde{P}_{2,3}(x)$ для участка $[x_2, x_3]$: узлы $x_2 = 0.120,\ x_3 = b = 0.160$, $x_{5/2} = 0.140$.

По составной формуле Симпсона сумма интегралов указанных полиномов (каждый интегрируется на своем участке) принимается за приближенное значение интеграла от функции.

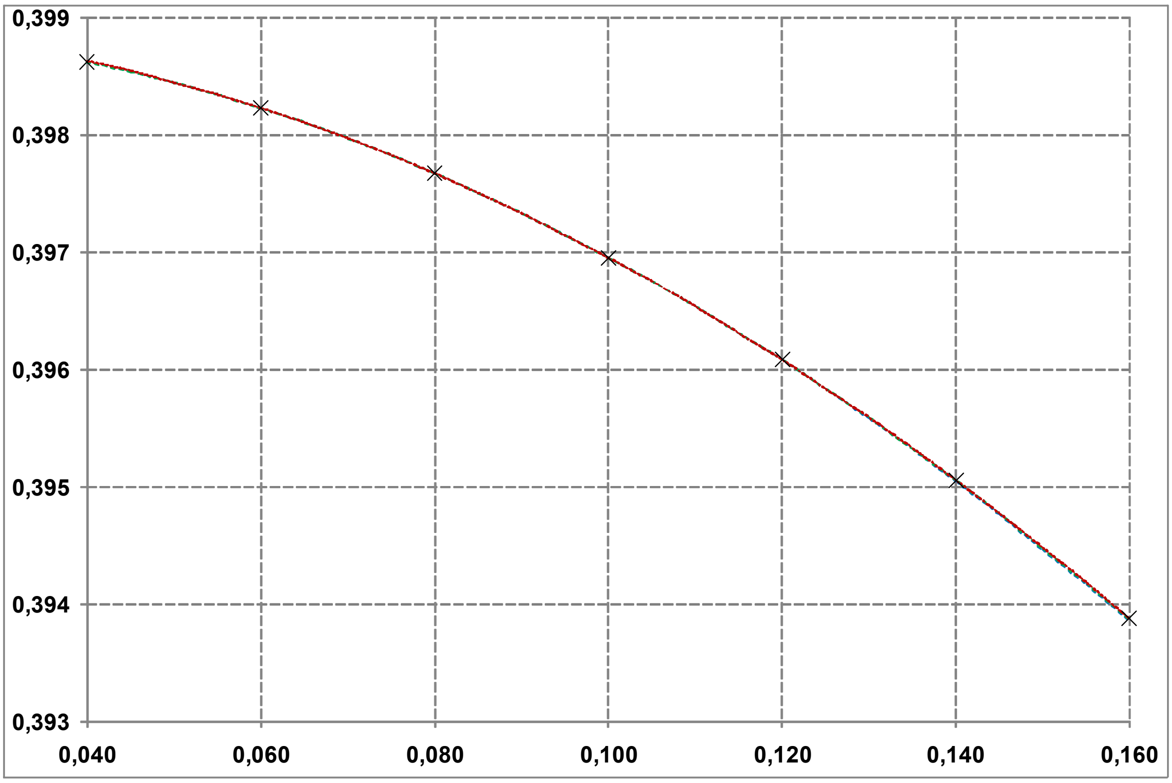
Визуально в силу сходства с функцией все 4 полинома не различимы. Как показывает Рисунок 2, различия полиномов имеют 5-й или 6-й порядок.

Этим объясняется качество и сходство полученных решений.

Значения функции и ее производных приведены по справочному изданию: Таблицы математической статистики. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. М.: Наука, 1983.



А)



Б)

Рисунок 1

На графике маркером показаны табличные данные. На рисунке А) показан интерполяционный полином степени 2 формулы Симпсона (построен по 3 узлам). На рисунке Б) – три интерполяционных полинома степени 2 составной формулы Симпсона (каждый построен по 3-м узлам своего участка). Визуально в силу сходства с функцией полиномы не различимы. Это объясняет качество и сходство полученных решений.

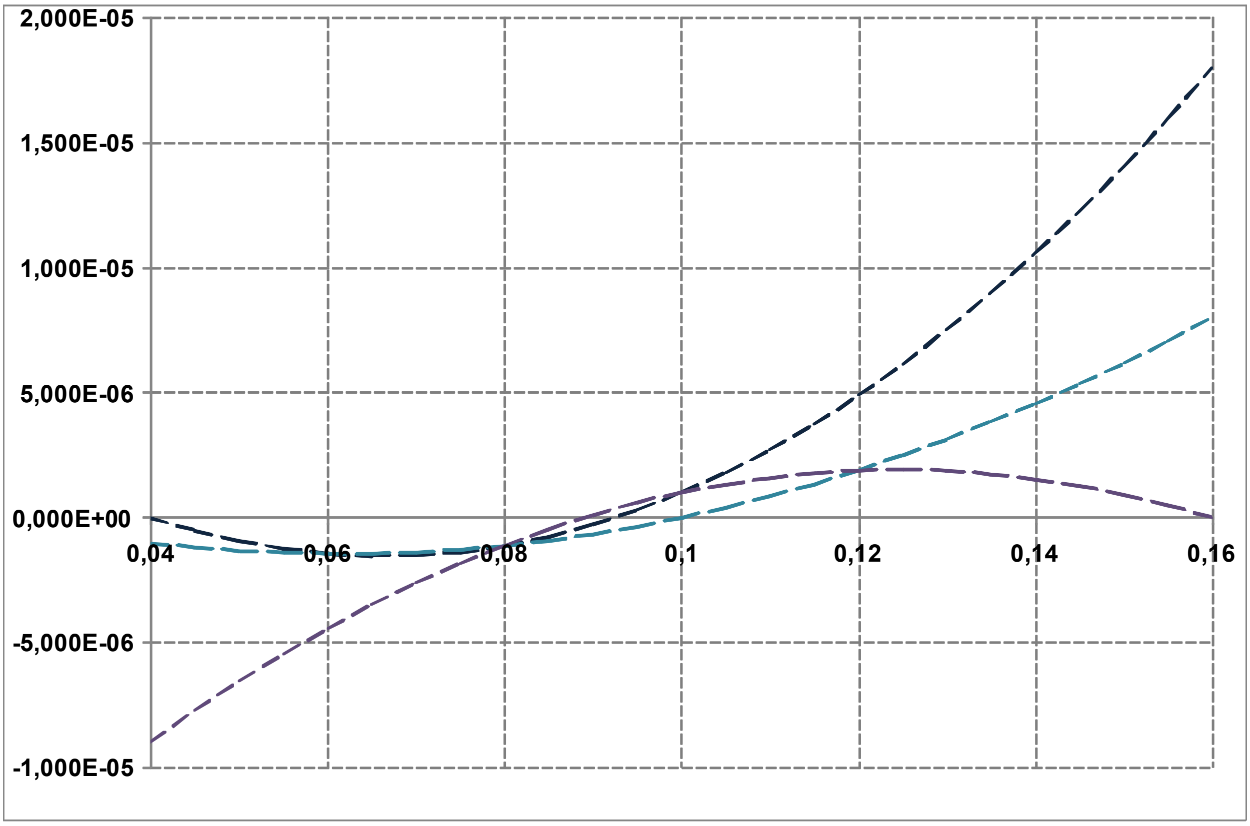


Рисунок 2

На рисунке показана разность интерполяционного полинома $\widetilde{P}_2(x)$ степени 2 формулы Симпсона, построенного по 3-м узлам:

$$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = b = 0.160$$

и каждого из трех интерполяционных полиномов степени 2 составной формулы Симпсона:

$\widetilde{P}_{2,1}(x)$ для участка $[x_0, x_1]$: узлы $x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.080$, $x_{1/2} = 0.060$;

$\widetilde{P}_{2,2}(x)$ для участка $[x_1, x_2]$: узлы $x_1 = 0.080,\ x_2 = 0.120$, $x_{3/2} = 0.100$;

$\widetilde{P}_{2,3}(x)$ для участка $[x_2, x_3]$: узлы $x_2 = 0.120,\ x_3 = b = 0.160$, $x_{5/2} = 0.140$.

(каждый построен по 3-м узлам своего участка).

Полином $\widetilde{P}_2(x)$ с каждым из полиномов $\widetilde{P}_{2,1}(x)$, $\widetilde{P}_{2,2}(x)$, $\widetilde{P}_{2,3}(x)$ в одном из **своих** узлов интерполяции

$$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = b = 0.160$$

естественно, совпадает.

Различия полиномов (на участках их применения) имеют 5-й или 6-й порядок. Это объясняет сходство полученных решений.