Лекция 1. Метод прогонки. Вычислительная устойчивость методов

1.1. Введение: вопросы погрешности, устойчивости и сходимости

1. Вычислительная погрешность.
2. Вычислительная устойчивость алгоритма.
3. Сходимость.

Определение 1:

M_∞ - машинная бесконечность – наибольшее положительное число, которое можно представить в машине.

Определение:

M_0 – машинный нуль – наименьшее положительное число, которое можно представить в машине.

Определение 2:

Численный алгоритм называется вычислительно устойчивым, если вычислительная ошибка, возникающая на каждом его шаге, в дальнейшем не возрастает.

3. Lu=f – дифференциальная задача, u – неизвестная функция (не решается аналитически) ставим задачу 2, которую мы можем решить:
Lv=φ v – бедем рассматривать как приближение функции u.
За счет подбора параметров v подгоняют к u за счет параметров стараются добиться сходимости функции v к u.

На самом деле задачу 2 ставят как семейство задач, зависящих от некоторого параметра. При каждом значении параметра находят решение v. За счет выбора параметра стараются добиться сходимости v к u.

1-я проблема зависит от машины. 2, 3–я – проблемы математиков.

Пример: Вычисление дисперсии:

$$\exists x_i \quad i=1,n \qquad D_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n} \qquad D_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2-n\left(\bar{x}\right)^2}{n}$$ может дать $D_1 \neq D_2$

Пример: 87365432+0.06=87365432.06 если есть только 8 разрядов – получим тоже самое число.

1.2. Прогонка: описание метода

Ax=b

Методы решения линейных систем:

- прямые
- итерационные

Определение

Методы, которые решают задачу за конечное число арифметических действий, называются прямыми.

Определение

Методы, которые генерируют последовательность, каждый элемент которой может рассматриваться как приближение, называются итерационными.

Правило Крамора, метод Гаусса – прямые методы.

В практическом смысле прямых методов не бывает из-за вычислительной погрешности.

На практике часто встречаются задачи большой размерности, с матрицей определенной структуры. Для них придумывают специальные прямые или итерационные методы.

Метод прогонки – это прямой метод решения линейных систем с 3-х диагональной матрицей.

$(y_0, y_1, \dots, y_n) \in R^{n+1}$

$$(1)\begin{cases} y_0 - \chi_1 y_1 = \mu_1 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i \\ -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \end{cases}$$ Коэффициенты χ_1, χ_2, A_i, C_i, B_i, $i=1,n-1$ - известны.

Правая часть: μ_1, μ_2, φ_i, $i=1,n-1$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \bullet & n-1 & n \\ \hline 0 & 1 & -\chi_1 & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ 1 & A_1 & -C_1 & B_1 & \bullet & 0 & 0 \\ 2 & 0 & A_2 & -C_2 & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \bullet & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ n & 0 & 0 & 0 & \bullet & -\chi_2 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \bullet \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \bullet \\ -\varphi_{n-1} \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (1*)$$

Прогонка: $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ $i=0,n-1$ (2)

$\left.\begin{matrix} \alpha_1 \bullet & \alpha_n \\ \beta_1 \bullet & \beta_n \end{matrix}\right|$ рассматриваются как параметры

Нужно вывести формулы для α и β, вычислить их, а затем по формулам (2) вычислить компоненты

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \\ y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1 = \chi_1$, $\beta_1 = \mu_1$ подставляем y_{i-1} из (2) в систему (1).

$A_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - C_i y_i + \beta_I y_{i-1} = -\varphi_i$

$y_i(A_i \alpha_i - C_i) + B_i y_{i+1} = -\varphi_i - A_i \beta_i$

$y_1 = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$

$$\boxed{(3**)\ \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\varphi_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad i = 1, n-1}$$ (3*),(3**) – это прямой ход прогонки, эти вычисления позволяют вычислить все α_i и β_i.

y_{n-1}, y_n – неизвестны μ_2, χ_2, α_n, β_n – известны

$$\begin{cases} -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \end{cases}$$ Из это системы можно выразить $y_n = \dfrac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1}$ (4)

Используя формулу (4) и формулу (2) получим все остальные y. Эти вычисления называются обратным ходом прогонки.

$$\boxed{\begin{cases} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, 0 \\ y_n = \dfrac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \end{cases}}$$

Оценка числа действий.

	прямой ход	обратный ход	всего
Умножение	2n-2	n+2	3n
Деление	2n-2	1	2n-1
Слож./Выч.	2n-2	n+2	3n

Размерность системы (1) (n+1)*(n+1). Обозначим m=n+1, тогда число действий в методе прогонки выражается через размерность линейной системы, как $\boxed{8m - 9}$.

Замечание: для систем с 3-х диагональной матрицей большой размерности, прогонка требует числа действий порядка ~ 8m, а метод Гаусса ~m^3.

1.3. Условия применения метода

$$\begin{cases} y_0-\chi_1 y_1=\mu_1 \\ A_i y_{i-1}-C_i y_i+B_i y_{i+1}=-\varphi_i \\ -\chi_2 y_{n-1}+y_n=\mu_2 \end{cases}$$

Прямой ход прогонки: $\alpha_1=\chi_1$, $\beta_1=\mu_1$ $\alpha_{i+1}=\dfrac{B_i}{C_i-A_i\alpha_i}$ $\beta_{i+1}=\dfrac{\varphi_i+A_i\beta_i}{C_i-A_i\alpha_i}$ $i=1,n-1$

Обратный ход: $y_n=\dfrac{-\chi_2\beta_n-\mu_2}{\chi_2\alpha_n-1}$ $y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\quad i=n-1,0$

Есть много однотипных теорем, гарантирующих выполнения метода прогонки. Эта теорема, как и многие теоремы линейной алгебры использует диагональное преобладание.

$A_{m\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & \bullet & a_{1m} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{m1} & \bullet & a_{mm} \end{bmatrix}$ Диагональное преобладание: $|a_{ij}|>\sum_{i\neq j\ j=1}^{m}|a_{ij}|$ $i=1,m$, если выполнено со знаком $\geq$ - нестрогое диагональное преобладание.

		0	0	0
			0	0
0				0
0	0			
0	0	0		

Теорема Гершгорина

Все собственные числа квадратной матрицы, расположены на комплексной плоскости в кругах следующего вида: $\left|z-|a_{ii}|\right|\leq\sum_{i\neq j\ j=1}^{m}|a_{ij}|$

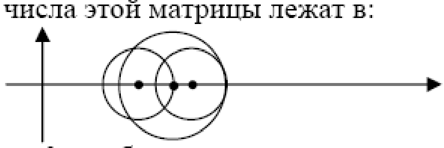
Пример, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ $5>2$ $8>3$ $9>2$ - матрица удовлетворяет строгому условию диагонального преобладания.

Все собственные числа этой матрицы лежат в:

$|z-5|\leq 2$

$|z-8|\leq 3$

$|z-9|\leq 2$



У этой матрицы нет 0-х собственных чисел $\Rightarrow$ эта матрица точно не вырожденая.

На практике часто используют условие диагонального преобладания, чтобы дать гарантию, что матрица не вырождена.

Теорема о применимости прогонки:

Пусть в системе (1) все $A_i \neq 0$, все $B_i \neq 0$,

(*) $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i=1,n-1$, $|\chi_1| \leq 1$, $|\chi_2| < 1$

Тогда при любой правой части μ_1, μ_2, φ_i, $i=1,n-1$ система (1) имеет единственное решение и его можно найти методом прогонки.

Доказательство: 1) доказать знаменатель $\neq 0$

2) доказать существование решения.

1) $|\alpha_1| = |\chi_1| \leq 1 \Rightarrow |C_i - \alpha_1 A_i| \geq ||C_i| - |\alpha_i| \cdot |A_i|| \geq ||C_i| - |A_i|| > 0$, т.к. $B_i \neq 0$ и $|C_i| \geq |A_i| + |B_i| > |A_i|$

$$|\alpha_2| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq \frac{|B_i|}{\left||C_i| - |\alpha_i||A_i|\right|} \leq \frac{|B_i|}{\left||C_i| - |A_i|\right|} \leq \frac{|B_i|}{|B_i|} = 1$$

для всех остальных α_i, β_i по индукции доказывается, что знаменатель $\neq 0$ и все $|\alpha_i| \leq 1$.

$$|1 - \alpha_n \chi_2| \geq \left||1| - |\alpha_n||\chi_2|\right| \geq \underset{\text{по усл.т.}}{\left||1| - |\chi_2|\right|} > 0$$ - знаменатель не обращается в 0!

2) По способу построению полученные y_n являются решениями системы.

по теореме Гержгорина возможно, что система вырождена.

в курсе ГА – Альтернатива Фредгольма:

1) $A_{m \times m}$ $Ax=b$, $\det A \neq 0 \Rightarrow \forall\, b\ \exists! x$

2) $Ax=b$, $\det A=0 \Rightarrow$ для некоторых b не $\exists\, x$ и для некоторых b $\exists$ много решений.

По Альтернативе Фредгольма линейная система с 3-х диагональной матрицей, удовлетворяет условию (*) не вырождена. (Система имеет решение при $\forall\, b \Rightarrow$ возможен только 1-й вариант Альтернативы).

1.4. Вычислительная устойчивость прогонки

Определение:

Численный метод называется вычислительно устойчивым, если вычислительная погрешность возникшая на некотором шаге больше не возрастает.

Теорема:

При условиях теоремы о применимости прогонки, этот метод вычислительно устойчив.

Доказательство: обратный ход прогонки: y_n={по формуле} $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ $i=n-1,0$ предположим, что на некотором шаге машина вместо y_k, за счет округления, вычислила $\tilde{y}_k$. $|y_k - \tilde{y}_k|$ - вычислительная погрешность шага. $\delta_k = |y_k - \tilde{y}_k|$ на следующем шаге должны вычислить $y_{k-1} = \alpha_k y_k + \beta_k$ а вычислим $\tilde{y}_{k-1} = \alpha_k \tilde{y}_k + \beta_k = \alpha_k (y_k - \delta_k) + \beta_k = y_{k-1} - \delta_k \alpha_k$, вычислительная погрешность следующего шага при этом составит: $\delta_{k-1} \overset{def}{=} y_{k-1} - \tilde{y}_{k-1} = \delta_k \alpha_k$.

Мы рассуждаем, что новые вычислительные погрешности не появляются, а просто вычисляем последствия старой погрешности. $|\delta_{k-1}| \leq |\delta_k|$, т.к. в условиях теоремы о применимости прогонки $|\alpha_k| < 1$.

Выводы:

1) Есть много разных вариантов теорем об условиях применения метода прогонки.
2) Есть много разных вариантов самой прогонки (циклическая прогонка).
3) Есть матричная прогонка с блочной 3-х диагональной матрицей, на диагоналях стоят не нулевые блоки.

К истокам:

- проблемы вычислительной устойчивости – решена (теорема)
- проблема сходимости не ставиться, т.к. прогонка дает точное решение линейной системы.