ВОПРОСЫ к экзамену ПО КУРСУ "МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ" для направления подготовки – ПМИ, 2023-2024 уч. г.

Примечание 1. Вопросы, выделенные красным цветом, в билетах экзамена не представлены. Этот материал может встретиться в качестве дополнительных вопросов (например, в тестовой части).
Примечание 2. Вопросы, текст которых зачеркнут~~: зачеркнут~~, исключены из программы экзамена 2023-24 года.
Примечание 3. Обратите внимание **на последние два раздела** (**ВИ** и **ОУ**)! Вопросы по этим разделам **присутствуют во многих билетах**.
В конце приведен список основных понятий и фактов теории, которые для сдачи экзамена на «удовлетворительно» необходимо знать, а базовые простые факты – обосновывать. Для сдачи экзамена на «хорошо» и выше необходимо не просто знать факты, изложенные в курсе, и давать простые обоснования, но и уметь выводить формулы, доказывать утверждения и теоремы по всем разделам курса (задания такого вида включены в экзаменационные билеты).

0. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

0.1. Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и глобально-оптимального решений, строгого и острого локальных минимумов.

0.2. Обобщение понятий оптимальности на многокритериальные задачи оптимизации. Решения оптимальные по Парето и Слейтеру (эффективные и слабо эффективные решения). Методы линейной свертки и свертки Гермейера, их геометрическая интерпретация. Свойства линейной свертки (с доказательствами), свойства свертки Гермейера (с геометрическим обоснованием в R^2) — по материалам лабораторной работы.

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Задачи с фиксированным временем начала и окончания процесса.

Понятие состояния управляемого динамического процесса. Постановка задачи. Требования, накладываемые на понятие «состояние» в динамическом программировании. Определения функции Беллмана при решении «от конца» и «от начала». Метод рекуррентных уравнений Беллмана при записи «от конца» (вывод, ~~включая лемму о расщеплении инфинума,~~ общая структура уравнений, порядок применения). Принцип Беллмана как необходимое и как достаточное условия, формулируемые как «от начала», так и «от конца», доказательство принципа Беллмана в форме необходимого условия (в аддитивном случае) и его доказательство в форме достаточного условия (для критериев аддитивного и типа максимума). Связь принципа Беллмана с уравнениями Беллмана. Запись рекуррентных уравнений Беллмана от начала процесса. Пример использования соотношений Беллмана (аналитическое решение задачи об оптимальном распределении ресурса с функцией дохода в виде корня квадратного).

1.2. Задачи с нефиксированной длительностью процесса.

Постановка задачи, отличия от постановки с фиксированным временем окончания. Обобщение уравнений Беллмана на задачи с нефиксированной длительностью процесса. Применение к задачам поиска оптимальных путей на графах. Задачи поиска оптимальных путей на графах с неотрицательными весами ребер: алгоритм метода Дейкстры, доказательство оптимальности построенных им путей (по материалам лабораторной работы), связь метода Дейкстры с принципом Беллмана в форме достаточного условия. Задачи на графах с векторными весами ребер. Отыскание оптимальных по Парето и Слейтеру решений методом сверток, согласование вида свертки с видом критерия, скаляризация графа при согласованном выборе (использовать материалы лабораторной работы).

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1. Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции. Отделимость точки и множества, строгая и сильная отделимость, геометрический смысл понятия отделимости, две теоремы об отделимости. Свойства выпуклых функций (с самостоятельно проведенными доказательствами, кроме свойства непрерывности во внутренних точках), включая два критерия выпуклости. Задача выпуклого математического программирования и ее свойства (с доказательствами). Возможность отсечений подмножеств, не содержащих глобального минимума, по измерениям градиента в гладких выпуклых задачах (следствие критерия выпуклости дифференцируемых функций).

2.2. Градиент и производная по направлению, ее вычисление в случае дифференцируемости функции, свойства градиента, множество направлений строгого локального убывания. Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма.

Задачи с ограничениями общего вида, функция Лагранжа для общей задачи математического программирования. Определение понятия регулярности допустимого множества в точке и в целом.

Задачи с ограничениями-равенствами, теорема Лагранжа (метод множителей Лагранжа). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке для ограничений-равенств. Геометрическая интерпретация условий оптимальности из теоремы о методе множителей Лагранжа – геометрический смысл условий ее выполнения.

Запись условий минимума в задачах математического программирования с ограничениями смешанного типа. Теорема о достаточности для глобального минимума условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме, записанных через принцип минимума. Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме, записанных через принцип минимума для выпуклой задачи с регулярным множеством. Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи, записанная через седловую точку функции Лагранжа. Достаточное условие Слейтера регулярности допустимого множества. Теорема о необходимых и достаточных условиях минимума в дифференциальной форме для класса выпуклых регулярных задач. Геометрическая интерпретация условий оптимальности, записанных в градиентной форме для выпуклого регулярного случая. Геометрическая интерпретация ситуации $\lambda_i < 0$ при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств. Направленная коррекция гипотез об активности при решении выпуклых регулярных задач с использованием условий Каруша-Куна-Таккера.

Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для невыпуклых задач – условие оптимальности первого порядка. Конические аппроксимации вспомогательных множеств. Лемма о непересекаемости конических аппроксимаций, построенных для точки условного локального минимума. Формулировка теоремы Люстерника. Лемма о глобальном минимуме в линеаризованной задаче (для основного случая – при непустоте конической аппроксимации допустимого множества). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке (в форме линейной независимости специального набора градиентов). Геометрические примеры недостаточности условий первого порядка для существования локального минимума в невыпуклом случае.

Теорема о достаточных условиях первого порядка для острого локального минимума (без доказательства). Теорема о достаточных условиях второго порядка для строгого локального минимума в задачах со смешанными ограничениями. Теорема о необходимых условиях второго порядка для локального минимума в задачах со смешанными ограничениями (без доказательства).

2.3. Понятие метода поисковой оптимизации. Испытание и порядок испытания. Априорная и поисковая информация. Пассивные и последовательные алгоритмы. Принцип наилучшего гарантированного результата. Оптимальные и ε–оптимальные алгоритмы. Понятие одношаговой последовательной оптимальности. Класс унимодальных функций, правило сокращения интервала по двум и по k измерениям. Построение оптимальных и ε–оптимальных пассивных N–шаговых алгоритмов, их гарантированная эффективность. Симметричные алгоритмы, свойства пропорций деления. Построение ε–оптимального последовательного симметричного N–шагового алгоритма (метод Фибоначчи). Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения и два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.

2.4. Метод поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом многограннике. Вид нижней оценки выпуклой функции по конечному числу ее испытаний первого порядка. Сведение решения задачи к последовательности задач линейного программирования. Теорема об определении решения (без доказательства).

Задачи поиска локального экстремума в задачах без ограничений. Общая структура итерационных методов локального поиска. Понятие порядка метода. Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорости сходимости (определения).

Два критерия выбора шагового множителя, их геометрическая интерпретация. Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации. «Аккуратный» одномерный поиск. Простые методы многомерного локального поиска и их свойства: градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска, и метод Ньютона. Вывод итерационного соотношения метода Ньютона, геометрическая интерпретация. Свойства метода наискорейшего градиентного поиска и метода Ньютона. Теоремы сходимости для этих методов. Методы прямого поиска на примере метода Хука-Дживса.

Более сложные и эффективные методы локальной оптимизации: алгоритм метода Ньютона с регулировкой шага (по одномерной минимизации и по Армихо), модифицированный метод Ньютона с модификацией матрицы Гессе до положительной определенности на основе модифицированного преобразования Холесского (теорема о разложении Холесского, упрощенная схема модифицированного разложения Холесского без учета эффектов вычислительной неустойчивости); квазиньютоновское условие, квазиньютоновский метод Давидона-Флетчера-Пауэлла; понятие сопряженных направлений, понятие метода сопряженных направлений и его поведение на квадратичных строго выпуклых функциях – теорема о конечной сходимости (с обоснованием), алгоритм метода сопряженных градиентов Флетчера–Ривса для квадратичных и неквадратичных функций (по материалам лабораторного практикума). Вывод основного итерационного соотношения метода Флетчера-Ривса для квадратичных функций с положительно определенными матрицами Гессе.

2.5. Решение задач с ограничениями. Метод внешнего штрафа, функция степенного штрафа, влияние показателя степени на гладкость штрафа. Теорема сходимости. Геометрическое и аналитическое объяснение причин необходимости неограниченного возрастания коэффициента штрафа при гладком штрафе. Свойства метода штрафов: плохая обусловленность вспомогательных задач, характер приближения оценок к решению. ~~Теорема об оценке погрешности решения в зависимости от коэффициента штрафа и показателя степени (без доказательства)~~. Критерий останова в методе штрафа.

2.6. Задачи многоэкстремальной оптимизации. Липшицевы функции и их свойства. Метод Пиявского, теорема об определении решения с заданной точностью. Версия метода с использованием оценки константы Липшица. Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломаных. Алгоритм информационно–статистического метода в сравнении с методом ломаных.

~~Методы редукции размерности. Подход 1 – многошаговая схема редукции, построение методов по многошаговой схеме. Подход 2 – использование фрактальных разверток на основе кривых Пеано. Вид редуцированной задачи на отрезке, свойство Гёльдера. Пример приближенного построения в~~ $\cancel{R^2}$ ~~– развертка Гильберта–Пеано. Частичная потеря информации о близости образов точек в многомерном пространстве. Применение вращаемых разверток.~~

Многомерные многоэкстремальные задачи. Нижняя оценка функции на гиперпараллелепипеде по измерению функции в его центре – поточечная оценка и оценка на гиперпараллелепипеде в целом. Метод деления на три: алгоритм для задачи без функциональных ограничений, теорема о свойствах (доказательство — самостоятельно, по аналогии с методом Пиявского). Обобщение метода деления на три на задачи с ограничениями-неравенствами для случая непустого допустимого множества.

~~Эвристические мультистартовые методы многоэкстремальной оптимизации, с использованием метода Монте-Карло.~~

3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.1. Постановка задачи. Понятие оптимального управления, области управляемости и неуправляемости. Функция Беллмана в задаче оптимального управления. Получение условий оптимальности в форме уравнения Беллмана для задачи оптимального управления в предположении справедливости гипотез 1 и 2. Теорема о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, связь принципа максимума с уравнением Беллмана (получение условий оптимальности в форме принципа максимума из уравнения Беллмана в предположении справедливости гипотез 3 и 4).

3.2. Линейные задачи на оптимальное быстродействие. Постановка, преобразование формы записи принципа максимума для этих задач, исходя из теоремы о принципе максимума для общей задачи. Структура оптимального управления в линейных задачах на оптимальное быстродействие. Условие общности положения. Теорема о принципе максимума, как о необходимых и почти всегда достаточных условиях оптимальности управления (достаточность — без доказательства).

3.3. Другие формы постановки задач оптимального управления, изменения формы принципа максимума (с обоснованием): задача с фиксированным временем достижения; ~~неавтономные задачи;~~ задачи оптимального управления со скользящими концами, условие трансверсальности.

4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Простейшие задачи вариационного исчисления (с закрепленными, свободными и скользящими концами) — постановки задач. Формализация понятия близости кривых (на примере задач первого и второго типов). Понятие сильного и слабого локального экстремумов.

Метод вариации Лагранжа. Пробные функции, параметрическая вариация кривой. Первая и вторая вариации функционала. Лемма о необходимых условиях локального экстремума (слабого и сильного) в общей форме. Экстремум и экстремаль функционала (определение экстремали). Основная лемма вариационного исчисления.

4.2. Вычисление первой вариации функционала для задач с закрепленными концами, задач со свободными концами, а также для задач со скользящими концами (требуется умение независимого вывода выражений для первых вариаций). Вывод уравнения Эйлера и граничных условий как необходимых условий первого порядка для экстремума и как необходимых и достаточных условий для экстремалей в трех простейших задачах вариационного исчисления. Естественные граничные условия и условия трансверсальности в задачах со свободными и скользящими концами. Их геометрический смысл. Первые интегралы уравнения Эйлера.

4.3. Экстремали с изломами. Теорема Дюбуа-Реймона (без доказательства). ~~Условия «склейки» Вейерштрасса–Эрдмана при изломе экстремалей (без доказательства).~~

4.4. Вычисление второй вариации в предположении закрепленных концов. Теорема об условии Лежандра, как необходимом условие второго порядка для минимума (максимума) функционала (с доказательством).

4.5. Вариационные задачи с ограничениями.

Изопериметрическая задача, постановка. Особенность применения подхода Лагранжа с параметрическими вариациями. Теорема об условиях экстремума первого порядка в изопериметрических задачах (~~с проведением доказательства~~).

Задачи вариационного исчисления с дифференциальными связями, теорема о сведении к вариационной задаче на безусловный экстремум (без доказательства).

ЛИТЕРАТУРА (краткий список)

Общая по всем разделам 1–3

1. Городецкий С.Ю. Лекции по нелинейному математическому программированию. Учебно-методическое пособие. — 2020. Электронный ресурс: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=794639&idb=0

Общая по всем разделам 1–3

2. Городецкий С.Ю. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Учебно-методическое пособие. — 2020. Электронная форма: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=709375&idb=0

Задачи многокритериальной оптимизации, методы сверток:

1. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. (Глава 1, 1.1-1.3).
2. Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер. Методические указания к выполнению лабораторной работы. — 2004. Электронная форма: http://old.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy/ (в настоящее время страница недоступна).

Динамическое программирование:

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.
2. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М:"Высшая школа",1979.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
4. Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер. Методические указания к выполнению лабораторной работы. — 2004. Электронная форма: http://old.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy/ (в настоящее время страница недоступна).
5. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие. / Авторы: Бирюков Р.С, Городецкий С.Ю., Губина Е.В., Савельев В.П. (Издание 2-е переработанное и дополненное). Раздел 1. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2023. Электронная форма выложена на source.unn.ru.
6. Городецкий С.Ю. Лекции по нелинейному математическому программированию. Учебно-методическое пособие. Глава 2. – Н.Новгород, 2020. Электронный ресурс: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=794639&idb=0

Математическое программирование, включая численные методы:

1. Карманов В.Г. Математическое программирование. – Учеб. Пособие. – М.: Физматлит, 2008.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – Учебное пособие. – М.: Наука.1982.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Вычислительные методы поиска локальных экстремумов функций. Описание лабораторной работы. /Сост. Городецкий С.Ю. - 2000. Электронная форма: http://old.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy/ (в настоящее время страница недоступна)
5. Городецкий С.Ю. Лабораторный практикум по методам локальной оптимизации в программной системе LocOpt / Электронный ресурс. – Н.Новгород, 2007. URL: http://www.unn.ru/e-library/aids.html?pscience=6&posdate=2007.
6. Городецкий С.Ю. Методы поиска глобального экстремума. Методические указания для студентов. Н.Новгород, 1990.
7. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. (Главы: 3, 4, 5, 7)

8. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие. / Авторы: Бирюков Р.С, Городецкий С.Ю., Губина Е.В., Савельев В.П. (Издание 2-е переработанное и дополненное). Разделы 2, 3, 4. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2023. Электронная форма выложена на source.unn.ru.
9. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
10 Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
11. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008 г.
12. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). М.: Наука, 1978.
13. Городецкий С.Ю. Лекции по нелинейному математическому программированию. Учебно-методическое пособие. Главы 3 и 4. – Н.Новгород, 2020. Электронный ресурс: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=794639&idb=0

Оптимальное управление:

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления – М.:Наука, 1969.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М: Физматгиз, 1961.
3. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие. / Авторы: Бирюков Р.С, Городецкий С.Ю., Губина Е.В., Савельев В.П. (Издание 2-е переработанное и дополненное). Раздел 6. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2023. Электронная форма выложена на source.unn.ru.
4. Городецкий С.Ю. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Учебно-методическое пособие. — 2020. Глава 2. Электронная форма: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=709375&idb=0

Вариационное исчисление:

1.Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.,Л.:ГТТИ 1933, т.1 - по вариационному исчислению наиболее простое и ясное изложение. В электронном виде можно найти на сайте http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm.
2.Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз. 1961.
3.Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. Гостехиздат. 1950.
4.Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.:Наука, 1969.
5. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. Изд.стереотипное. --- М.: Изд.группа URSS, 2014.
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.:Наука, 1973.
7. EqWorld. Мир математических уравнений / Разработчик – А. Д. Полянин. – М.: ИПМ РАН, 2004-2014. Электронный ресурс, содержащий электронные версии книг по вариационному исчислению в свободном доступе: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm
8. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие. / Авторы: Бирюков Р.С, Городецкий С.Ю., Губина Е.В., Савельев В.П. (Издание 2-е переработанное и дополненное). Раздел 5. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2023. Электронная форма выложена на source.unn.ru.
9. Городецкий С.Ю. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Учебно-методическое пособие. — 2020. Глава 1. Электронная форма: http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=709375&idb=0

Общая программа сдачи экзамена на оценку «хорошо» и выше предполагает полное владение материалом, включая умение проводить выкладки и доказательства.

===================== =============== ==================

Минимальные требования для ПМИ сдачи экзамена на «удовлетворительно»:

а– умение решать типовые практические задачи из разных разделов курса;
б– знание определений и способность к их содержательной интерпретации;
в– знание основных постановок задач для всех разделов курса;
г– знание и понимание (в основном) формулировок основных свойств, лемм и теорем (простые факты должны обосновываться)**;**
д– описание алгоритмов и расчетных формул основных численных методов и их содержательная трактовка;
е– способность ответить на теоретические и практические вопросы по имеющимся лабораторным задолженностям (при наличии задолженностей)

Перечень определений, понятий, алгоритмов, лемм и теорем по п.п. (б-в-г-д):

0. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

Определение локального и глобального минимума (условного) в скалярных задачах.
Определение решений оптимальных по Парето и Слейтеру (эффективных и слабо эффективных решений).

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи динамического программирования с фиксированной длительностью процесса.
Определение функции Беллмана $S_k(x)$ при решении «от конца»
Определение функции Беллмана $Z_k(x)$ при решении «от начала».
Общий вид рекуррентных уравнений Беллмана при записи «от начала» и «от конца».

Принцип Беллмана как необходимое условие (с обоснованием).
Принцип Беллмана как достаточное условие.
Постановка задачи динамического программирования с нефиксированной длительностью процесса.
Запись обобщенных уравнений Беллмана для задач с нефиксированной длительностью процесса.
Алгоритм метода Дейкстры, условия применимости.
Задачи о поиске оптимальных путей на графе с векторными весами ребер.
Вид линейной свертки и свертки Гермейера. Метод сверток. Основные свойства методов свертки.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Выпуклое множество.
Проекция точки на множество.
Формулировки двух лемм о свойствах проекции.
Определение отделимости точки и множества, строгая и сильная отделимость.
Две теоремы об отделимости (первая – с обоснованием).
Выпуклая, строго выпуклая функция (вогнутая и строго вогнутая).
Свойства выпуклых функций, включая критерии выпуклости (у первого с доказательством – необходимость, у второго – достаточность).
Задача выпуклого математического программирования и ее свойства (глобальность локальных минимумов – с обоснованием).
Правило отсечений по измерению градиента выпуклой функции областей, не содержащих глобального минимума (с обоснованием).
Производная по направлению, ее вычисление для дифференцируемой функции (с обоснованием).
Множество направлений строгого локального убывания дифференцируемой функции в точке (с обоснованием).
Градиент и его свойства (с обоснованием)
Гиперповерхность равного уровня и ее линейная аппроксимация – касательная гиперплоскость
Теорема Ферма (с обоснованием).
Функция Лагранжа для общей задачи мат. программирования.
Активные ограничения. Условие дополняющей нежесткости и его содержательный смысл.
Определение регулярности допустимого множества в точке и регулярности допустимого множества в целом.
Теорема о методе множителей Лагранжа – условия оптимальности в дифференциальной форме для задач с равенствами.
Геометрическая интерпретация условия оптимальности в дифференциальной форме для задач с равенствами.
Достаточные условия регулярности в форме линейной независимости градиентов для задач с равенствами (с доказательством).
Теорема о достаточности для глобального минимума регулярной задачи условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме записи с использованием принципа минимума.
Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме записи с использованием принципа минимума для выпуклой регулярной задаче.
Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера, записанных через седловую точку функции Лагранжа, для выпуклой регулярной задачи.
Достаточное условие регулярности Слейтера.
Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для выпуклого регулярного случая (с обоснованием).
Геометрическая интерпретация условий оптимальности в дифференциальной форме для выпуклого регулярного случая.
Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для общего невыпуклого случая.
Достаточные условия регулярности в форме линейной независимости градиентов в задаче со смешанными ограничениями (с доказательством).
Достаточные условия первого порядка для острого условного локального минимума. Достаточные условия второго порядка для условного локального минимума.
Необходимые условия второго порядка для локального минимума.

Понятие метода поисковой оптимизации.
Определение пассивного алгоритма, последовательного алгоритма.
Принцип наилучшего гарантированного результата.
Определение оптимального и ε–оптимального алгоритма.
Определение унимодальной функции.
Правило сокращения интервала для унимодальных функций (с обоснованием). Гарантированная неопределенность после k измерений в пассивном методе.
Оптимальные и ε–оптимальные пассивные N–шаговые алгоритмы для унимодальных функций.
Симметричные алгоритмы, связи пропорций деления на двух последовательных итерациях (с обоснованием).
Алгоритм метода Фибоначчи. Оптимальные пропорции деления. Формула для его гарантированной эффективности.
Метод золотого сечения (с выводом). Формула для его гарантированной эффективности.
Методы дихотомии. Алгоритмы. Формула для их гарантированной эффективности.
Взаимосвязь метода Фибоначчи и метода золотого сечения.
Вид нижней оценки дифференцируемой выпуклой функции по ее испытаниям первого порядка (с обоснованием).
Метод поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции на ограниченном выпуклом многограннике сведением к последовательности задач линейного программирования.
Общая структура итерационных траекторных методов локального поиска в R^N.
Понятие порядка метода поисковой оптимизации.
Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорость сходимости.

Два основных критерия выбора шагового множителя и их геометрическая интерпретация.
Алгоритмы Армихо, одномерной минимизации.
Алгоритм метода наискорейшего градиентного поиска. Демонстрация применения.
Свойства наискорейшего градиентного поиска, соотношение Канторовича – оценка скорости сходимости, вид траектории метода.
Метод Ньютона (с выводом основного соотношения).
Геометрическая интерпретация метода Ньютона в R^1 (с обоснованием)
Теорема о сходимости и порядке скорости сходимости для метода Ньютона.
Метод прямого поиска: метод Хука-Дживса. Демонстрация применения.
Метод Ньютона-Рафсона и Ньютона с регулировкой шага по Армихо — итерационные соотношения.
Определение A-сопряженной системы векторов.
Методы сопряженных направлений – определение.
Метод Флетчера–Ривса – формулы для основных итерационных соотношений.
Квазиньютоновское условие. Квазиньютоновский метод – общее описание алгоритма.
Метод внешних штрафных функций – описание применения метода, основные соотношения.
Вид степенной функции штрафа.
Влияние показателя степени в степенном штрафе на гладкость функции штрафа.
Теорема сходимости метода внешнего штрафа.
Критерий останова в методе внешнего штрафа.
Определение липшицевой функции.
Формула и геометрический вид верхней и нижней оценок липшицевой функции по результатам k измерений.
Свойства липшицевых функций. Оценки глобального минимума липшицевой функции: по значению функции и координатам (по результатам k измерений).
Метод Пиявского – описание алгоритма.
Теорема сходимости для метода Пиявского (с обоснованием).
Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных. Демонстрация применения.
Вид поточечной и общей нижней оценки липшицевой функции по центральному измерению в гиперпараллелепипеде.
Метод деления на три – описание алгоритма в задаче без функциональных ограничений. Демонстрация применения для случая одной переменной.

3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Постановка задачи оптимального управления.
Определение функции Беллмана в задаче оптимального управления.
Области управляемости и неуправляемости.
Вид уравнения Беллмана для задачи оптимального управления.
Функция Гамильтона, система для сопряженных переменных.
Теорема о принципе максимума Л.С. Понтрягина.
Постановка линейной задачи на оптимальное быстродействие.
Условие общности положения.
Структура оптимального управления в линейной задаче на оптимальное быстродействие.
Теорема о необходимых и (почти всегда) достаточных условиях оптимальности управления в линейных задачах на оптимальное быстродействие.

4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача вариационного исчисления с закрепленными концами — постановка.
Задача вариационного исчисления со свободными концами — постановка.
Задача вариационного исчисления со скользящими концами — постановка.
Нормы нулевого и первого порядков.
Определение сильного и слабого локального экстремумов.
Метод вариации Лагранжа – в чем он заключается.
Понятие первой и второй вариации — определения.
Классы пробных функций для каждой из простейших задач вариационного исчисления.
Лемма о необходимых условиях первого и второго порядков для локального минимума функционала (с обоснованием).
Определение экстремали функционала.
Основная лемма вариационного исчисления (с обоснованием).
Вид первой вариации функционала для задач с закрепленными концами (уметь выводить).
Вид первой вариации функционала для задач со свободными концами.
Вид первой вариации функционала для задач со скользящими концами.
Уравнение Эйлера и его первые интегралы.
Необходимые и достаточные условия экстремали в трех простейших задачах вариационного исчисления.
Необходимые условия экстремума в трех простейших задачах вариационного исчисления.
Естественные граничные условия.
Условия трансверсальности.
Условие Лежандра как необходимое условие второго порядка для минимума функционала.
Постановка изопериметрической задачи.
Теорема об условиях экстремума в изопериметрической задаче.