Модуль 7. Стационарное уравнение теплопроводности. Оценка вычислительной погрешности. Способы задания граничных условий. Пример отсутствия сходимости. Пример сходящейся неоднородной схемы. Проверка на консервативность

7.1. Модельная задача для оценки вычислительной погрешности

Чтобы получить представление о величине вычислительной погрешности, возникающей в ходе решения разностных схем, рассмотрим пример: первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} 12\cdot u''(x)-5\cdot u(x)=2\,110-450\cdot x^2,\, x\in[0,1] \\ u(0)=10,\, u(1)=100 \end{cases} \tag{7.1}$$

где $k(x)=12,\, q(x)=5,\, f(x)=450\cdot x^2-2\,110,\, \mu_1=10,\, \mu_2=100,\, l=1.$

Решением задачи является $u(x)=10+90\cdot x^2$ (можно проверить подстановкой).

Чтобы построить численное решение, определим на отрезке $[0;1]$ сетку с узлами $x_i=ih,\, i=\overline{0,n}$. Ее размерность (число участков) n, шаг $h=\dfrac{1}{n}$.

В соответствии с методом баланса консервативную разностную схему для решения задачи (7.1) строим на основе коэффициентов

$$a_i=\left(\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}=12,\quad i=\overline{1,n}$$

$$d_i=\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}q(x)\,dx=5,\qquad i=\overline{1,n-1}$$

$$\varphi_i=\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}f(x)\,dx\approx 450\cdot x_i^2-2\,110=\tilde{\varphi}_i\quad i=\overline{1,n-1}$$

(для приближенного вычисления интегралов взята формула средних прямоугольников).

Разностная схема принимает вид

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 2\,110 - 450 \cdot x_i^2, i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = 10\,, v_n = 100 \end{cases} \tag{7.2}$$

и представляет собой СЛАУ с 3-х диагональной матрицей. При любом значении n (на любой равномерной сетке) решение (7.2) существует и единственно, что вытекает из соответствия СЛАУ условиям *Теоремы о применении прогонки*.

Так как $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ является решением дифференциального уравнения, для каждого внутреннего узла $x_i = ih, i = \overline{1, n-1}$ верно

$$12 \cdot u''(x_i) - 5 \cdot u(x_i) = 2\,110 - 450 \cdot x_i^2, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{7.3}$$

В граничных узлах $x_0 = 0$, $x_n = 1$ выполняется $u\,(x_0) = 10$, $u\,(x_n) = 100$.

Задача (7.1) поставлена так, что для ее решения $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ четвертая производная тождественно равна нулю ($u^{IV}(x) \equiv 0$). Поэтому в каждом внутреннем узле сетки, где определен оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$, значение оператора совпадает со значением второй производной:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = u''(x_i), \; x_i = ih, i = \overline{1, n-1} \tag{7.4}$$

В силу (7.3) и (7.4) для $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ верно

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i = 2\,110 - 450 \cdot x_i^2, i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 10\,, u_n = 100 \end{cases} \tag{7.5}$$

Сопоставив (7.2) и (7.5), приходим к выводу, что решением (7.2) является вектор $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$, такой, что

$$v_i = 10 + 90 \cdot x_i^2, i = \overline{0, n}. \tag{7.6}$$

Решение дифференциальной задачи (7.1) и решение разностной схемы (7.2) в узлах сетки совпадают: $v_i = u(x_i) = u_i, i = \overline{0, n}$.

Решая СЛАУ (7.2) методом прогонки, получим вектор $\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots \tilde{v}_n) \in R^{n+1}$, отличный от вектора $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ вследствие погрешности счета.

Далее полагаем, что значения $10 + 90 \cdot x_i^2$, $i = \overline{0,n}$, будут вычислены точно или пренебрегаем погрешностью их вычисления. *Вычислительную погрешность* решения СЛАУ определим следующим образом:

$$z^{вп} = v - \widetilde{v}, \qquad (7.7)$$

где $z^{вп} = (z_0^{вп}, z_1^{вп}, \ldots z_n^{вп}) \in R^{n+1}$ есть *вычислительная погрешность*;

$v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение схемы (7.2), его можно вычислить по формулам (7.6);

$\widetilde{v} = (\widetilde{v}_0, \widetilde{v}_1, \ldots \widetilde{v}_n) \in R^{n+1}$ есть решение (7.2), полученное методом прогонки.

Для оценки вычислительной погрешности можно использовать норму $\| \ \|_\infty$. Компьютерный эксперимент покажет зависимость вычислительной погрешности от шага сетки.

Комментарии

В данном примере погрешность аппроксимации равна нулю:

$$\psi_0 = u_0 - 10 = 0,$$
$$\psi_n = u_n - 100 = 0,$$
$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5 \cdot u_i - 2\,110 + 450 \cdot x_i^2 =$$
$$= 12 \cdot \frac{h^2}{24} (u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)) = 0,$$
$$i = \overline{1, n-1}$$

Компоненты вектора погрешности аппроксимации выписаны по определению.

Далее использовано их представление с помощью значений четвертых производных точного решения задачи, вычисленных в некоторых неизвестных средних точках (см. модуль 5).

Затем использовано свойство задачи (7.1), а именно, для $\forall x \ \ u^{IV}(x) = 0$.

Погрешность схемы равна нулю: $z_i = u_i - v_i = 0, i = \overline{0, n}$ (это компоненты z – вектора погрешности схемы).

Общая погрешность решения задачи (7.1) с помощью схемы (7.2) **состоит только из вычислительной погрешности:**

$$z^{общ} = u - \widetilde{v} = u - v + v - \widetilde{v} = z + z^{вп} = z^{вп}$$

7.2. Способы задания граничных условий

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), x \in [a,b] \\ k(x) > 0, x \in [a,b] \\ q(x) \ge 0, x \in [a,b] \end{cases} \qquad (7.8)$$

Оно описывает распределение температуры на тонком и однородном в каждом поперечном сечении стержне.

Если на одной из границ отрезка $[a, b]$ задана температура, данное условие относится к *граничным условиям 1-го рода*; если задан тепловой поток – *граничное условие 2-го рода*; если осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – *граничное условие 3-го рода*.

К *граничным условиям 4-го рода* относятся: условие равенства температур на границе двух сред (торец стержня и окружающая среда), т.е. условие теплового контакта; условие равенства тепловых потоков на границе двух сред (торец стержня и окружающая среда), т.е. *закон теплопроводности*.

Покажем, как записываются граничные условия. **На левой границе отрезка $[a, b]$, то есть при $x = a$:**

– **граничное условие 1-го рода** (температура) имеет вид $u(a) = \mu_1$;

– **граничное условие 2-го рода** (тепловой поток) имеет вид $w(a) = \mathrm{M}_1$
(случай $w(a) = 0$ соответствует теплоизоляции левого торца стержня)

– **граничное условие 3-го рода** (теплообмен) имеет вид $w(a) = -\gamma_1(u(a) - \theta_1)$
где θ_1 температура окружающей среды и $\gamma_1 > 0$ коэффициент теплообмена.

Тепловой поток связан с температурой как $w(x) = -k(x)u'(x)$, поэтому граничные условия 2-го и 3-го рода можно записать через производную температуры

$$k(a)u'(a) = -\mathrm{M}_1$$

$k(a)u'(a) = \gamma_1(u(a) - \theta_1)$, где $\gamma_1 > 0$.

Граничное условие 3-го рода записывают также в виде

$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1$, где $\zeta_1 = \gamma_1 \cdot \theta_1$, $\gamma_1 > 0$.

На правой границе отрезка $[a, b]$, **то есть при** $x = b$:

– **граничное условие 1-го рода** (температура) имеет вид $u(b) = \mu_2$;

– **граничное условие 2-го рода** (тепловой поток) имеет вид $w(b) = \mathrm{M}_2$ (случай $w(b) = 0$ соответствует теплоизоляции правого торца стержня)

– **граничное условие 3-го рода** (теплообмен) имеет вид $w(b) = -\gamma_2(\theta_2 - u(b))$, где θ_2 температура окружающей среды и $\gamma_2 > 0$ есть коэффициент теплообмена.

Граничные условия 2-го и 3-го рода можно записать через производную температуры

$$k(b)u'(b) = -\mathrm{M}_2$$

$-k(b)u'(b) = \gamma_2(u(b) - \theta_2)$, где $\gamma_2 > 0$

Граничное условие 3-го рода записывают также в виде

$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2$, где $\zeta_2 = \gamma_2 \cdot \theta_2$, $\gamma_2 > 0$.

При изучении дифференциального уравнения (7.8) **соответственно способу задания граничных условий различают краевые задачи:**

1) первая краевая задача (задача Дирихле)

$$u(a) = \mu_1$$

$$u(b) = \mu_2$$

2) вторая краевая задача (задача Неймана)

$$k(a)u'(a) = -\mathrm{M}_1$$

$$k(b)u'(b) = -\mathrm{M}_2$$

3) третья краевая задача

$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1$, где $\gamma_1 > 0$,

$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2$, где $\gamma_2 > 0$.

Граничные условия

$$u(a) = \mu_1,\ k(b) \cdot u'(b) = 0$$

означают, что на левом торце стержня задана температура μ_1, а правый торец стержня теплоизолирован. Такая краевая задача является **смешанной**.

Комментарии

Для «разрывной модельной задачи» (см. модуль 4) в точках разрыва параметров поставлены два «граничных» условия 4-го рода: условие теплового контакта $u_+ = u_-$ и закон теплопроводности $w_+ = w_-$. Указанные условия были названы условиями сопряжения.

7.3. Пример аппроксимации граничных условий

Построим численный метод решения третьей краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), x \in [a,b] \\ k(x) > 0,\, x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0,\, x \in [a,b] \\ k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1 \\ -k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2 \end{cases} \tag{7.9}$$

Для этого определим на отрезке $[a;b]$ равномерную сетку с узлами $x_i = a + ih,\, i = \overline{0,n}$, и дополнительными узлами $x_{i+0.5} = a + (i+0.5)h,\ \ i = \overline{0,n-1}$.

Размерность сетки (число участков) равна n, шаг $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Для аппроксимации дифференциального уравнения используем метод баланса и получим уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot v_i = -\varphi_i,\, i = \overline{1,n-1}, \end{cases} \tag{7.10}$$

с коэффициентами

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1},\ \ i = \overline{1,n}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx,\ \ i = \overline{1,n-1}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx,\ \ i = \overline{1,n-1}$$

Для аппроксимации граничных условий применим правый разностный оператор

$$[u_x]_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \approx u'(x_i),$$

заданный в узлах $x_i = ih, i = \overline{0, n-1}$, и левый разностный оператор

$$[u_{\bar{x}}]_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \approx u'(x_i),$$

заданный в узлах $x_i = ih, i = \overline{1, n}$. Каждый из них пригоден приближенного вычисления первой производной.

Запишем один из операторов (правый) в узле $x_0 = a$, другой (левый) – в узле $x_n = b$:

$$[u_x]_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} \approx u'(x_0)$$

$$[u_{\bar{x}}]_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \approx u'(x_n)$$

Заменив в граничных условиях (7.9) значения $u'(a)$ и $u'(b)$ на значения указанных выше операторов, на основе (7.10) получим разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot v_i = -\varphi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ \dfrac{v_1 - v_0}{h} \cdot k(x_0) = \gamma_1 \cdot v_0 - \zeta_1 \\ -\dfrac{v_n - v_{n-1}}{h} \cdot k(x_n) = \gamma_2 \cdot v_n - \zeta_2 \end{cases} \tag{7.11}$$

Точное решение задачи (7.9) в узлах сетки обозначим $u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$.

Точное решение СЛАУ (7.11) обозначим $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$. Рассматриваем v (решение схемы) как численное решение краевой задачи (7.9).

Определение. **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i, i = 0, \ldots n$.

Таким образом, вектор $z = (z_0, z_1, \ldots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

Определение. **Погрешностью аппроксимации** задачи (7.9) разностной схемой (7.11) называют *невязку разностной схемы, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи, а именно:*

$$\begin{cases} \psi_i = \dfrac{u_{i-1} - u_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{u_i - u_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot u_i + \varphi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ \psi_0 = \dfrac{u_1 - u_0}{h} \cdot k(x_0) - \gamma_1 \cdot u_0 + \zeta_1 \\ \psi_n = -\dfrac{u_n - u_{n-1}}{h} \cdot k(x_n) - \gamma_2 \cdot u_n + \zeta_2 \end{cases} \tag{7.12}$$

Таким образом, $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots \psi_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность аппроксимации. Компоненты ψ_0, ψ_n называют *погрешностями аппроксимации граничных условий*. Компоненты $\psi_i, i = \overline{1, n-1}$ называют *погрешностями аппроксимации основного уравнения*.

Основные свойства схемы (7.11) **состоят в следующем.**

В случае гладких коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ *погрешность аппроксимации основного уравнения имеет 2-й порядок:* $\psi_i = O(h^2), i = 1, \dots n-1$, *а погрешность аппроксимации граничных условий имеет 1-й порядок:* $\psi_0 = O(h), \psi_n = O(h)$ (проверить, используя формулу Тейлора).

Схема сходится с 1-м порядком: доказательство приведено в учебной литературе.

7.4. Аппроксимация граничных условий методом баланса

Чтобы улучшить сходимость схемы (7.11), нужна более точная аппроксимация граничных условий. Более точные разностные операторы, пригодные для вычисления производных, используют многоточечный шаблон, из-за которого матрица разностной схемы потеряет 3-х диагональную структуру.

Покажем, как для аппроксимации граничных условий и улучшения сходимости можно использовать метод баланса.

Рассмотрим граничное условие 3-го рода, заданное на левом конце отрезка:

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1$$

Дифференциальное уравнение задачи (7.9) проинтегрируем на участке $[x_0; x_{0.5}]$:

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx - \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)u(x)dx = -\int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)dx \tag{7.13}$$

(в интегральной форме выписан закон сохранения тепла на участке $[x_0; x_{0.5}]$).

Введем обозначение

$$\varphi_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f\ (x)\ dx \tag{7.14}$$

и запишем

$$-\int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)dx = -0.5h \cdot \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)\ dx = -\ 0.5h \cdot \varphi_0$$

Введем обозначение

$$d_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} q\ (x)\ dx \tag{7.15}$$

и запишем

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_0) \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)dx = 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0$$

В уравнении (7.13) присутствует разность тепловых потоков, проходящих через сечения с координатами x_0 и $x_{0.5}$: так как $w(x) = -k(x)u'(x)$, видим, что

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx = -\int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx} w(x)\ dx = w(x_0) - w(x_{0.5})$$

Используя (7.14) и (7.15), аппроксимируем баланс тепла (7.13) уравнением

$$w_0 - w_{0.5} - 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0 = -0.5h \cdot \varphi_0\ , \tag{7.16}$$

Тепловой поток, проходящий через сечение с координатой $x_{0.5}$, выразим через разность температур в сечениях с координатами x_0 и x_1 (см. выкладки в модуле 4):

$$w_{0.5} = \frac{u_0 - u_1}{h} a_1 \tag{7.17}$$

Тепловой поток через сечение x_0 получим из граничного условия:

$$w_0 = w(x_0) = w(a) = -k(a)u'(a) = -\gamma_1 u(a) + \zeta_1 = -\gamma_1 u_0 + \zeta_1 \tag{7.18}$$

Подстановкой (7.17) и (7.18) в уравнение (7.16) получим

$$-\gamma_1 u_0 + \zeta_1 - \frac{u_0 - u_1}{h} a_1 - 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0 = -0.5h \cdot \varphi_0 .$$

После корректировки обозначений, а именно: $u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение дифференциальной задачи, $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение разностной схемы, сформулируем

Утверждение 1. Для граничного условия 3-го рода

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1 ,$$

($k(a) > 0$, $\gamma_1 > 0$ и ζ_1 заданы), методом баланса получена аппроксимация

$$\frac{v_1 - v_0}{h} a_1 = (\gamma_1 + 0.5h \cdot d_0) \cdot v_0 - (\zeta_1 + 0.5h \cdot \varphi_0) \tag{7.19}$$

с коэффициентами

$$a_1 = \left(\frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \qquad d_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)\, dx \qquad \varphi_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)\, dx \tag{7.20}$$

Интегрирование дифференциального уравнение на участке $[x_{n-0.5}; x_n]$ и аналогичные выкладки, проведенные на правом конце стержня, позволяют сформулировать

Утверждение 2. Для граничного условия 3-го рода

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2$$

($k(b) > 0$, $\gamma_2 > 0$ и ζ_2 заданы), методом баланса получена аппроксимация

$$-\frac{v_n - v_{n-1}}{h} a_n = (\gamma_2 + 0.5h \cdot d_n) \cdot v_n - (\zeta_2 + 0.5h \cdot \varphi_n) \tag{7.21}$$

с коэффициентами

$$a_n = \left(\frac{1}{h} \cdot \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \qquad d_n = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_{n-0.5}}^{x_n} q(x)\, dx \qquad \varphi_n = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_{n-0.5}}^{x_n} f(x)\, dx \tag{7.22}$$

(Докажите утверждение самостоятельно).

Консервативную разностную схему для решения краевой задачи (7.9) записываем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1}-v_i}{h^2}\cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2}\cdot a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i,\ i=\overline{1,n-1}, \\ \dfrac{v_1 - v_0}{h}\cdot a_1 = (\gamma_1 + 0.5h\cdot d_0)v_0 - (\zeta_1 + 0.5h\cdot\varphi_0) \\ -\dfrac{v_n - v_{n-1}}{h}\cdot a_n = (\gamma_2 + 0.5h\cdot d_n) - (\zeta_2 + 0.5h\cdot\varphi_n) \end{cases} \tag{7.23}$$

Определение. **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i,\ i = 0,\ldots n$.

Вектор $z = (z_0, z_1,\ldots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

Определение. **Погрешностью аппроксимации** называют *невязку разностной схемы* (7.23)*, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи* (7.9)*, а именно:*

$$\begin{cases} \psi_i = \dfrac{u_{i-1}-u_i}{h^2} a_i - \dfrac{u_i - u_{i+1}}{h^2} a_{i+1} - d_i u_i + \varphi_i,\ i=\overline{1,n-1}, \\ \psi_0 = \dfrac{u_1 - u_0}{h}\cdot a_1 - (\gamma_1 + 0.5h\cdot d_0)u_0 + (\zeta_1 + 0.5h\cdot\varphi_0) \\ \psi_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{h}\cdot a_n - (\gamma_2 + 0.5h\cdot d_n)u_n + (\zeta_2 + 0.5h\cdot\varphi_n) \end{cases} \tag{7.24}$$

Таким образом, $\psi = (\psi_0, \psi_1,\ldots \psi_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность аппроксимации. Компоненты ψ_0, ψ_n называют погрешностями аппроксимации граничных условий (на левом и правом концах отрезка соответственно). Компоненты $\psi_i,\ i=\overline{1,n-1}$ называют *погрешностями аппроксимации основного уравнения*.

Свойство схемы (7.23) **состоит в следующем.**

В случае гладких коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ *погрешность аппроксимации основного уравнения имеет 2-й порядок:* $\psi_i = O(h^2), i = 1,\ldots n-1$; *погрешность аппроксимации граничных условий также имеет 2-й порядок:* $\psi_0 = O(h^2), \psi_n = O(h^2)$.

Схему (7.23) называют **схемой с улучшенной аппроксимацией граничных условий***.*

Схема сходится со 2-м порядком: доказательство приведено в учебной литературе.

Комментарии

Свойства схемы (7.23) обеспечены внесением малых поправок в схему (7.11):

– поправки $0.5h \cdot d_0$, $0.5h\varphi_0$ и поправка $a_1 - k(x_0)$ на левом конце отрезка;

– поправки $0.5h \cdot d_n$, $0.5h \cdot \varphi_n$ и поправка $a_n - k(x_n)$ на правом конце отрезка.

Разработка схемы (7.23) не потребовала изменения шаблонов: СЛАУ (7.23) является 3-х диагональной.

7.5. Пример отсутствия сходимости

Под сходимостью схемы понимают сходимость решений разностной схемы к решению исходного уравнения.

Приведем пример, когда решение разностной схемы при сгущении сетки ($n \to +\infty$) сходится к некоторой функции, но эта предельная функция не является решением дифференциального уравнения.

В таких случаях говорят, что схема расходится.

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) = 0, x \in (0,1) \\ u(0) = 1, u(1) = 0 \\ k(x) = \begin{cases} 2, x \in [0,\xi) \\ 1, x \in [\xi,1] \end{cases} \\ u_- = u_+, w_- = w_+ \end{cases} \tag{7.25}$$

Несложно проверить, что решением (7.25) является кусочно-линейная функция

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2-\xi}x, x \in [0,\xi] \\ \dfrac{2}{2-\xi}(1-x), x \in [\xi,1] \end{cases}$$

которая соответствует условиям сопряжения. Действительно,

$$u_- = \lim_{x \to \xi - 0}\left(1 - \frac{1}{2-\xi}x\right) = \frac{2-2\xi}{2-\xi}$$

$$u_+ = \lim_{x \to \xi + 0}\left(\frac{2}{2-\xi}(1-x)\right) = \frac{2-2\xi}{2-\xi}$$

$$w_- = \lim_{x\to\xi-0}\left(-2\cdot\left(1-\frac{1}{2-\xi}x\right)'\right) = -\frac{2}{2-\xi}$$

$$w_+ = \lim_{x\to\xi+0}\left(-1\cdot\left(\frac{2}{2-\xi}(1-x)\right)'\right) = -\frac{2}{2-\xi}$$

Таким образом, $u_- = u_+$, $w_- = w_+$, температура $u(x)$ и тепловой поток $w(x)$ при $x\in[0,1]$ непрерывны и в точке ξ принимают значения

$$u(\xi) = \frac{2-2\xi}{2-\xi} \qquad\qquad w(\xi) = -\frac{2}{2-\xi}$$

Чтобы привести пример схемы, которая расходится, предположим, что разрыв функции $k(x)$ имеет место в точке $\xi\in(0,1)$, где ξ – иррациональное число, и построим на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку с узлами $x_i = ih,\ i=\overline{0,n}$, где шаг сетки $h=\dfrac{1}{n}$.

Число $\xi\in(0,1)$, являясь иррациональным, ни при каком n не будет узлом сетки.

Для дифференциального оператора задачи (7.25) при любом $x\neq\xi$ верно

$$(k(x)u'(x))' = k'(x)u'(x) + k(x)u''(x) \tag{7.26}$$

Используя (7.26), аппроксимируем дифференциальный оператор:

$$(k'u' + ku'')|_{x=x_i} \approx [k_{\dot{x}}]_i[u_{\dot{x}}]_i + k(x_i)[u_{x\bar{x}}]_i \tag{7.27}$$

В (7.27) использованы центральные разностные операторы для вычисления первой и второй производных. Так как в каждом внутреннем узле $x_i = ih,\ i=\overline{1,n-1}$ для решения задачи (7.25) выполняется

$$(k'u' + ku'')|_{x=x_i} = 0,$$

рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases}\dfrac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}\cdot\dfrac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h} + k_i\dfrac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = 0,\ i=\overline{1,n-1}\\ v_0 = 1,\ v_n = 0\end{cases} \tag{7.28}$$

Пусть при некотором значении n (число участков сетки) точка ξ попадает в интервал (x_s, x_{s+1}). Тогда $k_0 = k_1 = \ldots = k_s = 2$ и $k_{s+1} = k_{s+2} = \ldots = k_n = 1$.

Схема (7.28) принимает вид

$$
\begin{cases}
v_0 = 1 \\
2 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = 1, s-1 \\
\dfrac{(1-2)}{2h} \cdot \dfrac{v_{s+1} - v_{s-1}}{2h} + 2 \cdot \dfrac{v_{s-1} - 2v_s + v_{s+1}}{h^2} = 0, \\
\dfrac{(1-2)}{2h} \cdot \dfrac{v_{s+2} - v_s}{2h} + \dfrac{v_s - 2v_{s+1} + v_{s+2}}{h^2} = 0, \\
\dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = s+2, n \\
v_n = 0
\end{cases}
\qquad (7.29)
$$

При любом значении n решение схемы (7.29) **существует и единственно.** (Потому что выполняются условия *Теоремы о применении прогонки*).

При конкретном значении n найдем решение (7.29), то есть найдем вектор $v = (v_0, v_1, \dots v_n) \in R^{n+1}$.

Затем рассмотрим предельное численное решение $\overline{v}(x)$, формирующееся при $n \to \infty$.

Для этого, во-первых, выделим из (7.29) уравнения

$$
\begin{cases}
2 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = 1, s-1 \\
\dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = s+2, n
\end{cases}
$$

Они показывают, что решение (7.29) должно быть линейной функцией на участке $[x_0, x_s]$ и линейной функцией на участке $[x_{s+1}, x_n]$.

С учетом того, что $v_0 = 1$ и $v_n = 0$, компоненты вектора $v = (v_0, v_1, \dots v_n) \in R^{n+1}$ можно найти в виде

$$
v_i = \begin{cases}
1 - \alpha^{(n)} x_i, i = 0, s, \\
\beta^{(n)} (1 - x_i), i = s+1, n
\end{cases}
\qquad (7.30)
$$

(потому что $v_0 = 1 - \alpha^{(n)} x_0 = 1$ и $v_n = \beta^{(n)} (1 - x_n) = 0$).

Запишем оставшиеся два уравнений схемы (7.29), а именно:

$$
\begin{cases}
-\dfrac{v_{s+1}-v_{s-1}}{4h^2}+2\cdot\dfrac{v_{s-1}-2v_s+v_{s+1}}{h^2}=0, \\
-\dfrac{v_{s+2}-v_s}{4h^2}+\dfrac{v_s-2v_{s+1}+v_{s+2}}{h^2}=0
\end{cases}
\tag{7.31}
$$

Используем (7.30) и для индексов $i = s-1,\, s,\, s+1,\, s+2$ запишем

$$v_{s-1}=1-\alpha^{(n)}x_{s-1}, \qquad v_s=1-\alpha^{(n)}x_s$$

$$v_{s+1}=\beta^{(n)}(1-x_{s+1}) \qquad v_{s+2}=\beta^{(n)}(1-x_{s+2}).$$

Тогда на основе (7.31) получим два уравнения для коэффициентов $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$:

$$
\begin{cases}
\alpha^{(n)}=\dfrac{1-\beta^{(n)}(1-x_{s+1})}{\dfrac{16}{7}\cdot h+x_{s-1}}, \\
1-\alpha^{(n)}\cdot x_s=\beta^{(n)}\cdot(1-x_{s+1})
\end{cases}
$$

Если значение n задано, решением являются коэффициенты

$$\alpha^{(n)}=0 \qquad \beta^{(n)}=\frac{1}{1-x_{s+1}}.$$

У т в е р ж д е н и е . Если значение n задано и точка ξ попадает в интервал (x_s, x_{s+1}), решением схемы (7.29) является $v=(v_0, v_1, \ldots v_n)\in R^{n+1}$ такой, что

$$
v_i=\begin{cases}
1,\ i=0,s, \\
\dfrac{1}{1-x_{s+1}}\cdot(1-x_i),\, i=s+1,n
\end{cases}
\tag{7.32}
$$

С л е д с т в и е . При сгущении сетки, т.е. при $n\to\infty$, существуют предельные значения

$$\bar{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)}=0, \qquad \bar{\beta}=\lim_{n\to\infty}\beta^{(n)}=\frac{1}{1-\xi}$$

Пределом численных решений при $n\to\infty$ является кусочно-линейная функция

$$
\bar{v}(x)=\begin{cases}
1,\, x\in[0,\xi] \\
\dfrac{1}{1-\xi}(1-x), x\in[\xi,1]
\end{cases}
\tag{7.33}
$$

Выводы

1) Решение разностной схемы сходится к функции, не являющейся решением исходной задачи: $\overline{v}(x) \neq u(x)$.

2) Предельное численное решение $\overline{v}(x)$ **соответствует условию теплового контакта** $\overline{v}_+ = \overline{v}_-$:

$$\overline{v}_- = \lim_{x \to \xi - 0} \overline{v}(x) = \lim_{x \to \xi - 0} (1) = 1$$

$$\overline{v}_+ = \lim_{x \to \xi + 0} \overline{v}(x) = \lim_{x \to \xi + 0} \left(\frac{1}{1-\xi}(1-x) \right) = \frac{1-\xi}{1-\xi} = 1$$

(температура непрерывна).

3) Предельное численное решение $\overline{v}(x)$ **не соответствует закону теплопроводности** $\overline{w}_+ = \overline{w}_-$. Действительно,

слева от точки $\xi \in (0,1)$ тепловой поток отсутствует:

$$\overline{w}_- = \lim_{x \to \xi - 0} \left(-k(x)\overline{v}'(x) \right) = \lim_{x \to \xi - 0} \left(-2 \cdot (1)' \right) = 0$$

справа от точки $\xi \in (0,1)$ тепловой поток составит

$$\overline{w}_+ = \lim_{x \to \xi + 0} \left(-k(x)\overline{v}'(x) \right) = \lim_{x \to \xi + 0} \left(-1 \cdot \left(\frac{1}{1-\xi}(1-x) \right)' \right) = \frac{1}{1-\xi}$$

4) Предельному численному решению соответствует расположенный в точке $\xi \in (0,1)$ **точечный источник тепла с положительной мощностью**

$$\overline{w}_+ - \overline{w}_- = \frac{1}{1-\xi} > 0 \qquad (7.34)$$

5) Схема расходится.

Задание

1) Объясните, что не учтено при построении схемы (7.29).

2) Напишите консольное приложение для проверки того, что схема расходится.

7.6. Пример сходящейся неоднородной схемы

Разностная схема называется **однородной,** если запись схемы, разработанной для решения некоторого класса задач, не зависит от выбора задачи из указанного класса и не зависит от выбора сетки. Во всех узлах сетки разностные уравнения однородной схемы записываются одинаково. Разностная схема, построенная методом баланса, является **однородной** (см. модуль 4).

Приведем пример **сходящейся неоднородной схемы**. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \;\; x \in (0,2) \\ u(0) = 13 \\ u(2) = 19 \end{cases} \qquad (7.35)$$

$$k(x) = \begin{cases} 3, \; x \in (0, \xi) \\ 7, \; x \in (\xi, 2) \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} 0, \; x \in (0, \xi) \\ 5, \; x \in (\xi, 2) \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 10, \; x \in (0, \xi) \\ -15, \; x \in (\xi, 2) \end{cases}$$

В точке разрыва $\xi = 0.4$ указываются условия сопряжения.

При $x < \xi$ дифференциальное уравнение задачи (7.35) имеет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} = -10, \;\; x \in (0, \xi) \\ u(0) = 13 \end{cases}$$

При $x > \xi$ дифференциальное уравнение задачи (7.35) имеет вид

$$\begin{cases} 7 \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} - 5 \cdot u(x) = 15, \;\; x \in (\xi, 2) \\ u(2) = 19 \end{cases}$$

При $x = \xi$ поставлены условия теплового контакта $u_- = u_+$, где

$$u_- = \lim_{x \to \xi - 0} u(x) \qquad\qquad u_+ = \lim_{x \to \xi + 0} u(x)$$

и записан закон теплопроводности $w_- = w_+$, где

$$w_- = \lim_{x \to \xi - 0} \left(-3 \cdot u'(x)\right) \qquad\qquad w_+ = \lim_{x \to \xi + 0} \left(-7 \cdot u'(x)\right)$$

Для решения (7.35) построим на отрезке $[0;2]$ равномерную сетку с узлами $x_i = ih,\ i = \overline{0,n}$, где шаг сетки $h = \dfrac{2}{n}$. Число n выбираем так, чтобы точка $\xi = 0.4$ совпадала с узлом сетки, такой узел обозначим x_s.

Очевидно, что при $x_i < x_s$ и при $x_i > x_s$ разностный оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$ аппроксимирует вторую производную $u''(x_i)$ с порядком 2:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \approx u''(x_i),\ x_i = ih, i = \overline{1, n-1}, i \neq s$$

Поэтому разностные уравнения

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -10,\ \ i = 1,...s-1 \\ 7 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 15,\ \ i = s+1,...n \end{cases}$$

аппроксимируют дифференциальное уравнение (7.35) при значениях x левее и правее точки разрыва, аппроксимация с порядком 2.

Разностное уравнение

$$-3 \cdot \frac{v_s - v_{s-1}}{h} = -7 \cdot \frac{v_{s+1} - v_s}{h}$$

аппроксимирует условие $w_+ = w_-$ (использованы левый и правый разностные операторы для аппроксимации предельных слева и справа значений производной в точке $\xi = 0.4$). Данная аппроксимация имеет 1-й порядок.

Учитываем граничные условия и записываем схему:

$$\begin{cases} v_0 = 13 \\ 3 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -10,\ \ i = 1,...s-1 \\ -3 \cdot \dfrac{v_s - v_{s-1}}{h} = -7 \cdot \dfrac{v_{s+1} - v_s}{h},\ \ i = s \\ 7 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 15,\ \ \ i = s+1,...n \\ v_n = 19 \end{cases} \qquad (7.36)$$

Схема (7.36) применяется на равномерных сетках, для которых точка $\xi = 0.4$ является узлом сетки: $\xi = x_s$.

Утверждение 1. При любом значении n решение схемы (7.36) **существует и единственно.** (Доказательство следует из выполнения условий *Теоремы о применении прогонки).*

Утверждение 2. Схема (7.36) **сходится с 1-м порядком.** (Доказательство провести самостоятельно).

Задание

Объясните, почему схема (7.36) не классифицируется как однородная.

7.7. Проверка на консервативность. Дисбаланс

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \tag{7.37}$$

решением которой является функция $u(x), x \in [a,b]$. Коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ и значения μ_1 и μ_2 считаем заданными, они соответствуют условиям

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a,b] \end{cases}.$$

На отрезке $[a;b]$ строим равномерную сетку с узлами $x_i = a + ih, i = \overline{0,n}$, и дополнительными узлами $x_{i+0.5} = a + (i+0.5)h, \ i = \overline{0,n-1}$. Размерность сетки равна n, шаг сетки $h = \frac{b-a}{n}$.

Интегрируем основное уравнение задачи (7.37) на участке $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$:

$$\int\limits_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx - \int\limits_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} q(x)u(x)dx + \int\limits_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} f(x)dx = 0 \tag{7.38}$$

Это уравнение представляет собой запись закона сохранения тепла на участке $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$ в интегральной форме.

Первый из интегралов вычислим, используя формулы теплового потока (см. модуль 4), следующие два интеграла запишем как сумму интегралов по участкам $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$

$$w(x_{0.5}) - w(x_{n-0.5}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(-\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx + \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx\right) = 0 \tag{7.39}$$

Используя обозначение

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f\,(x)\,dx\ ,\quad i = \overline{1, n-1} \tag{7.40}$$

для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$-\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx = -h \cdot \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\,dx = -\varphi_i h\,.$$

Используя обозначение

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q\,(x)\,dx\,,\quad i = \overline{1, n-1} \tag{7.41}$$

для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) u(x) dx \approx u(x_i)\, d_i h$$

Используя построенную ранее разностную аппроксимацию функции теплового потока

$$w_{i-0.5} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} a_i\,,\ i = \overline{1, n}\,, \text{ где } a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1},\ i = \overline{1, n}\,, \tag{7.42}$$

перепишем (7.39) в виде

$$\frac{u_0 - u_1}{h} a_1 - \frac{u_{n-1} - u_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} \left(-d_i u_i + \varphi_i \right) = 0 \tag{7.43}$$

Уравнение (7.43) является разностным аналогом закона сохранения тепла на отрезке $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$.

О п р е д е л е н и е . Пусть $\hat{v} \in R^{n+1}$ есть численное решение задачи (7.37), полученное с помощью некоторой разностной схемы, заданной на сетке с узлами $x_i = a + ih,\ i = \overline{0, n}$, и дополнительными узлами $x_{i+0.5} = a + (i + 0.5)h,\ \ i = \overline{0, n-1}$. Величину

$$R = \frac{\hat{v}_0 - \hat{v}_1}{h} a_1 - \frac{\hat{v}_{n-1} - \hat{v}_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} \left(-d_i \hat{v}_i + \varphi_i \right) \tag{7.44}$$

с коэффициентами (7.40)-(7.42), называют **дисбалансом схемы**.

Утверждение. Дисбаланс схемы (4.14), построенной методом баланса с целью численного решения задачи (7.37), равен нулю: $R = 0$.

Доказательство. Пусть $v \in R^{n+1}$ есть численное решение задачи (7.37), полученное с помощью (4.14). Дисбалансом схемы является число

$$R = \frac{v_0 - v_1}{h} a_1 - \frac{v_{n-1} - v_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} \left(- d_i v_i + \varphi_i \right).$$

где коэффициенты заданы формулами (7.40)-(7.42). Коэффициенты схемы (4.14) совпадают с коэффициентами (7.40)-(7.42) для расчета R. Вектор $v \in R^{n+1}$ удовлетворяет каждому из уравнений (4.14). Просуммировав уравнения (4.14), получим $R = 0$.

Комментарии

Дисбаланс и его свойства, проявляющиеся при сгущении сетки, используются при проверке схемы на консервативность. Если $R = 0$, схема называется консервативной. Малые значения R, стремящиеся к нулю при сгущении сетки, не мешают сходимости.

При решении прикладных задач рекомендуется использовать консервативные схемы.