ЛЕКЦИЯ 17

Метод Фурье в многомерном случае.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u) \tag{1}$$

где

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)u,$$

коэффициенты которого определены в конечной, связной области $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ и удовлетворяют в Ω условиям

$$a(x) \geq 0,\ a_{ij} = a_{ji},\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha > 0. \tag{2}$$

Второе из неравенств (2) выражает тот факт, что уравнение (1) принадлежит к гиперболическому типу.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую смешанную задачу: определить в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \Omega \tag{3}$$

и граничному условию

$$u(x,t) = 0,\ x \in \Gamma,\ t \in (0,T), \tag{4}$$

где Γ – граница области Ω.

Найдём решение поставленной задачи методом разделения переменных. Рассмотрим основную вспомогательную задачу: найти нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничному условию (4) и представимые в виде произведения

$$u(x,t) = v(x)T(t). \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получим

$$v(x)T''(t) = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - a(x)v\right]T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{L(v)}{v} = -\lambda,$$

откуда

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$L(v) + \lambda v = 0. \tag{7}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (1) вида (5), удовлетворяющие граничному условию (4), необходимо, чтобы функция v удовлетворяла граничному условию

$$v(x) = 0,\ x \in \Gamma. \tag{8}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче о собственных значениях: найти такие значения λ, при которых уравнение (7) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничному условию (8). Эти значения λ называются собственными значениями, а соответствующие решения - собственными функциями краевой задачи (7), (8).

Уравнение для собственных функций представляет собой уравнение с частными производными, поэтому трудно рассчитывать на получение явного представления собственных функций для произвольной области Ω. Перечислим общие свойства собственных функций и собственных значений.

1. Задача (7), (8) имеет бесконечное (счетное) множество собственных значений

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_k \le \dots \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

которым соответствуют собственные функции

$$v_1(x),\ v_2(x), ..., v_k(x), ...$$

Собственные значения λ_k с возрастанием номера k неограниченно возрастают; $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Ввиду однородности уравнения (7) и граничного условия (8) собственные функции v_k определяются с точностью до произвольного постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_\Omega v_k^2(x)dx = 1, \tag{9}$$

то есть будем считать собственные функции нормированными,

$$\|v_k\| = \{\int_\Omega v_k^2(x)dx\}^{1/2} = 1.$$

2. Все собственные значения задачи (7), (8) положительны.

Для доказательства этого свойства запишем

$$L(v_k) = -\lambda_k v_k.$$

Умножая обе части на v_k, интегрируя по области Ω и принимая во внимание (9), получим

$$-\lambda_k = -\lambda_k \int_\Omega v_k^2(x)dx = \int_\Omega v_k(x)L(v_k)dx =$$

$$= \int_\Omega v_k(x)\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) - a(x)v_k\right]dx. \tag{10}$$

Пусть $\nu(x)$ – единичный вектор внешней нормали в точке $x \in \Gamma$. Для всех дифференцируемых функций u_i, $i = 1, ..., n$ справедлива формула Гаусса

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}dx = \int_\Gamma \sum_{i=1}^n u_i(x)\nu_i(x)d\gamma.$$

Используя эту формулу, проинтегрируем первую сумму в (10) по частям:

$$\int_\Omega v_k \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}v_k\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}dx =$$

$$= \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \nu_i d\gamma - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx.$$

Интеграл по границе Γ области Ω равен нулю, так как $v_k|_{\Gamma} = 0$.Таким образом,

$$\lambda_k = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + a(x) v_k^2(x) \right] dx.$$

В силу условия (2)

$$\lambda_k \geq \int_{\Omega} \left[\alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + a(x) v_k^2(x) \right] dx > 0.$$

3. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\int_{\Omega} v_k(x) v_m(x) dx = 0, \ \lambda_k \neq \lambda_m. \tag{11}$$

Это свойство доказывается совершенно так же, как и в одномерном случае. Пусть v_k и v_m – собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_k и λ_m:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) - a v_k + \lambda_k v_k = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \right) - a v_m + \lambda_k v_m = 0.$$

Умножим первое уравнение на v_m и проинтегрируем по области Ω, используя формулу Гаусса. Так как $v_m|_{\Gamma} = 0$,

$$\int_{\Omega} v_m \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} dx,$$

то есть

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a v_m v_k dx = \lambda_k \int_{\Omega} v_k v_m dx.$$

Аналогично, умножая второе равенство на v_k и интегрируя по Ω, получаем

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a v_m v_k dx = \lambda_m \int_{\Omega} v_k v_m dx.$$

Таким образом,

$$(\lambda_k - \lambda_m) \int_{\Omega} v_k v_m dx = 0,$$

откуда и следует ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям.

Одному и тому же собственному значению может соответствовать лишь конечное число линейно независимых собственных функций. Предположим, собственному значению λ_k соответствуют линейно-независимые функции v_{k1},..., v_{km}. Очевидно, что любая линейная комбинация этих функций $v_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_{ki}$ тоже являтеся собственной функцией для того же собственного значения λ_k. Подвергнув функции v_{k1},..., v_{km} процессу ортогонализации, можно построить функции $\bar{v}_{k1}$,..., $\bar{v}_{km}$, которые являются линейными комбинациями исходных функций и ортогональны между собой. Таким образом,если собственные функции, соответствующие некоторому собственному значению, не ортогональны между собой, то их можно ортагонализировать м получить новую систему собственных функций, попарно ортогональных и соответствующих тому же собственному значению.

Следовательно, можно считать, что все собственные функции задачи (7), (8) образуют ортогональную и нормированную систему.

4. **Теорема разложимости**. Произвольная функция $f(x)$, дважды непрерывно дифференцируемая в области Ω и удовлетворяющая граничному условию

$$f(x) = 0,\ x \in \Gamma,$$

разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{v_k\}$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(x), \tag{12}$$

где f_k – коэффициенты разложения.

Умножим (12) на некоторую собственную функцию $v_m(x)$ и проинтегрируем по области Ω. Ввиду ортогональности собственных функций, получаем

$$\int_\Omega f(x) f_m(x) dx = f_m \int_\Omega v_m^2(x) dx,$$

то есть коэффициенты разложения определяются формулой

$$f_m = \frac{\int_\Omega f(x) f_m(x) dx}{\int_\Omega v_m^2(x) dx},\ m = 1, 2, ...$$

В частности, если функции v_m нормированные,

$$f_m = \int_\Omega f(x) f_m(x) dx.$$

Вернёмся к решению основной вспомогательной задачи. Пусть λ_k – собственные значения, а v_k – собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. При $\lambda = \lambda_k$ уравнение (6) имеет решение в виде

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные. Таким образом, согласно (5), каждая функция

$$u_k(x,t) = v_k(x) T_k(x) = (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(x)$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющем граничному условию (4).

Составляем ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(x). \tag{13}$$

Удовлетворяя начальным условиям (3), получим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x),\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} v_k(x).$$

Отсюда, пользуясь теоремой разложимости, находим

$$A_k = \varphi_k = \int_\Omega \varphi(x) v_k(x) dx, \; B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_\Omega \psi(x) v_k(x) dx.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов A_k и B_kв ряд (13), мы, очевидно, получим решение задачи (1), (3), (4), если ряд (13) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x_i и t, равномерно сходятся. Таким образом, формальное построение решения исходной задачи закончено.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.