19.03.24

Заменим λ_i на непрерывный аргумент λ

$$\lambda(\overset{ф}{G}) = (1 - \tau_{k-1}\overset{арг}{\lambda})(1 - \tau_{k-2}\overset{арг}{\lambda})\dots(1 - \tau_1\overset{арг}{\lambda})(1 - \tau_0\overset{арг}{\lambda}) \quad (25^{***})$$

$\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]$ аргумент функции $\lambda(G)$

$$\lambda(G) = (1 - \tau_{k-1}x)(1 - \tau_{k-2}x)\dots(1 - \tau_1 x)(1 - \tau_0 x)$$

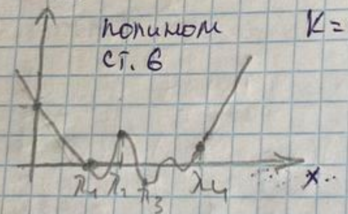
Заменим обозн. арг. λ на x

Это полином ст. k, аргумент x, числа $\tau_0, \dots \tau_{k-1}$ задают конкретный полином

$$\underset{P_k(x)}{\lambda(G)} = \underset{\text{своб. слаг.}}{1} - x(\tau_0 + \dots + \tau_{k-1}) + \dots + x^k\underbrace{(-1)^k(\tau_0 \cdot \dots \cdot \tau_{k-1})}_{\ne 0} \quad (25^{****})$$

с.ч. G представляет собой знач. полинома $P_k(x)$, когда x принимает знач равн с.ч. исходной матрицы A

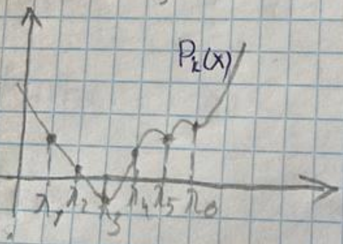
с.ч. $G(\tau_{k-1}, \dots, \tau_0)$ явл. знач. полинома $P_k(x)$, тогда $x = \lambda_i(A)$ $i = \overline{1,n}$ см (25^{****})



$K = 6$

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\lambda(G)| = \lambda_2$$

на графике



$$\max_{i=\overline{1,n}} |\lambda(G)| = \lambda_3$$

на графике

Как найти $\|G(\tau_{k-1}, \ldots, \tau_0)\|_2$ - ? см 23

Аз Мы знаем, как устроены с.ч. $G(\ldots)$

$$\|G(\tau_{k-1}, \ldots, \tau_0)\|_2 = \max_{\text{для } \lambda = \lambda_i(A)} |P_k(x)| \leq$$

min

для λ равным числ. матр. A

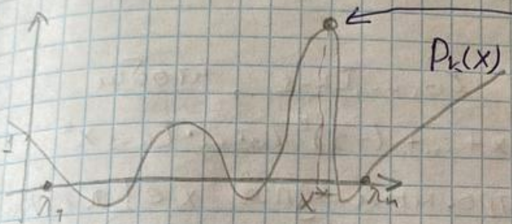
Используем приём как у Шашкова.

Найдём макс. ф. с непрер. аргументом

$\leq \max_{x \in [\lambda_1, \lambda_n]} |P_k(x)|$ — это уклонение полинома $P_k(x)$ от „нуля" на отр. $x \in [\lambda_1, \lambda_n]$

расширили мн-во знач. для подсчёта max

Как же устр. с.ч. $G(\tau_{k-1}, \ldots, \tau_0)$?



$\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}$ выбраны

повезло, что $\lambda_i(A)$ такие $i = \overline{1, n}$

Здесь $\max |P_k(x)| = |P_k(x^*)|$

Здесь $\|G\|_2 = \max |P_k(x)| = P_k(\lambda_n)$

Здесь $|P_k(\lambda_n)| < |P_k(x^*)|$ // меньше, чем уклон полинома

Чтобы построить оптимальный метод, т.е. обеспечить лучшую гарантию убывания нач. погрешность через k шагов, нужно решить задачу: $\|G(\tau_{k-1}, \ldots, \tau_0)\|_2 \to \min$ за счёт выбора τ

обеспеч. мин. знач.

$\max\limits_{i=1,n} |\lambda_i(G)| \to \min$ за счёт выбора $\tau_0, \ldots \tau_{k-1}$ (27)

Никто не умеет решать эту задачу

Но мы умеем решать задачу, когда $\max\limits_{x\in[\lambda_1,\lambda_n]} |P_k(x)|$

$\to \min$ за счёт выбора $\tau_{k-1}, \ldots, \tau_0$ (28)

$P_k(x) = 1 - (\tau_0 + .. + \tau_{k-1})x + .. + (-1)^k(\tau_0 \cdot \ldots \cdot \tau_{k-1})$

Это полином ст. k своб слаг 1

$P_k(x) \in \hat{K} = \{1 + a_1 x + .. + a_k x^k\}$

Решени (28) явл. полином Чебышева из класса $\hat{K}$. $\hat{T}_k(x) \in \hat{K}$

Нужно выбрать также $\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}$, чтобы

$P_k(x) = 1 + (\tau_0 + \ldots + \tau_{k-1})x + \ldots + (-1)^k \tau_0 \cdot \ldots \cdot \tau_{k-1} x^k$

совпадал с $\hat{T}_k(x)$, построенным для $x \in [\lambda_1, \lambda_n]$

Полиномы совпадают, если совпадают их корни

Корни $\hat{T}_k(x)$

$$x_s = \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n+\lambda_1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right), \quad s=\overline{0,k-1}$$

Корни $P_k(x)$

$$P_k(x) = (1-\tau_{k-1}x)(1-\tau_{k-2}x)\ldots(1-\tau_0 x)$$

$$x_s = \frac{1}{\tau_s} \qquad s=\overline{0,k-1}$$

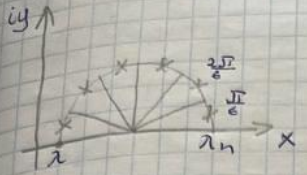
Значит $\dfrac{1}{\tau_s} = \dfrac{\lambda_n+\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_n-\lambda_1}{2} \cdot \cos(\ldots)$, $s=\overline{0,k-1}$

Получим формулу для параметра τ

$$\tau_s = \left[\frac{\lambda_n+\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right)\right] \quad (3)$$

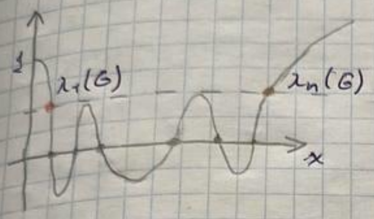
из Т8

Рисунок для „правильной" переходной матрицы $G(\tau_0,\dots,\tau_{k-1})$



$k=6$

$$\frac{2\rho^6}{1+\rho^{12}}\ ;\quad \rho=\frac{\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}+1}$$



При выборе $\tau_0,\dots,\tau_{k-1}$ $(k=6)$ по формуле (3) с.ч. перех. матрицы цикла в (τ_{k-1},τ_0) явл. знач. этого полинома $(P_6(x)=\widehat{T}_6(x))$

т.к. A имеет с.ч. в диапазоне $\left[\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}},\ \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}\right]$ (29)

О задачах (27) и (28)

Никто не умеет решать (27), но в опр. случае мы её решили. Посмотрим на (29), среди с.ч. A есть λ_1 и λ_n, в усл. Т8 они считаются известными. Им соотв. с.ч.

$$G(\tau_0,\dots,\tau_{k-1})\qquad \left.\begin{aligned}\lambda_1(G)&=P_k(\lambda_1(A))\\ \lambda_n(G)&=P_k(\lambda_n(A))\end{aligned}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{i=\overline{1,n}}|\lambda_i(G)| = \max|\lambda_1(G)| = \max|\lambda_n(G)| = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \quad (31)$$

Завершаем док-во Т8:

$$z^k = G(\tau_{k-1},\dots,\tau_0)\,z^{(0)}$$

$$\|z^{(k)}\|_2 = \|G(\dots)z^0\|_2 \le \underbrace{\|G(\dots)\|_2}_{\text{при выборе } \tau_s \text{ по форм. (3) это равно } 2\rho^k/(1-\rho^{2k})}\cdot\|z^{(0)}\|_2$$

Итог: $\|z^{(k)}\|_2 \le \left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}\right)\cdot \|z^{(0)}\|_2$

Обсуждение применения метода:

(1) $Ax = b$

$A = A^T > 0 \Rightarrow \det A \ne 0$

$0 < \lambda_1 \le \dots \le \lambda_n \quad \lambda_1 \ne \lambda_n$

(2) $\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau_s} + Ax^{(s)} = b$

$\forall x^{(0)}$

$$\tau_s = \left(\frac{\lambda_n+\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right)\right)^{-1}$$

По Т8 есть оценка:

$\|z^{(k)}\|_2 \le \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}\|z^{(0)}\|_2$ (13)

Через N циклов

$\|z^{(Nk)}\|_2 \le \left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}\right)^N \cdot \|z^{(0)}\|_2$ (14)

$\searrow 0 \quad N \to +\infty \Rightarrow \|z^{kN}\|_2 \to 0$

① Чтобы подтвердить сходимость, нужно доказать утв.

Утв. 1

Если $0<\lambda_1<\lambda_n$, если $k=1,2,\dots$ тогда $\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \in [0,1)$ (32)

Утв. 2

② Чем длиннее цикл, тем быстрее метод сходится

$\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}$ чем выше знач k, тем меньше это число

Утв. 3

③ Если $k = 1$, то Чебыш. метод совпадает с методом простой итерации (у кот. опт. параметр)

МПИ: $\tau^*_{опт} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ (Т3)

МЧеб ($k=1$): $\tau_0 = \left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)^{-1} = \tau^*_{опт} \to \frac{2\rho}{1+\rho^2} = \frac{\mu_1 - 1}{\mu_n + 1}$ (33)

④ Риск вычислительной неустойчивости при больших k

① программа для выполнения л.р. (Дирихле)

Чеб. $k \approx 40$

Из-за чего? Как исправить?

$x^{(0)}, \; x^{(k)}, \dots x^{(ak)} \dots \to x^*$

$x^{(1)} \dots x^{(k-1)}$ — вспомогат. векторы

Метод простой итерации сх., если $\tau \in \left(0, \frac{2}{\lambda_{max}}\right)$

т.е. $\frac{2}{\lambda_{max}} = \frac{2}{\lambda_n}$

Когда метод исп. $\tau_0, \dots, \tau_{k-1}$ в пределах цикла, некоторые из них слишком большие за пределами диапазона $\left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$

Большие знач., когда $\cos(..) < 0$ (т.е. вторая половина цикла), значит погрешность будет возрастать

Всп. знач. уходят за пределы маш. сетки на каком-то цикле. Чтобы этого не было предложим спец. способ

Модиф. метода такова, что исп. те же параметры (3), только в другом порядке

⑤ Про оптимальность $\tau_0, \dots, \tau_{k-1}$ см (3), k-длина цикла, наилучшие в каком смысле?

$\max\limits_{x \in [\lambda_1, \lambda_n]} |P_k(x)| \to \min$

норма перех. матр. цикла

Это означает, что $\| G(\tau_{k-1}, \dots, \tau_0) \|_2 \le \max\limits_{x \in [\lambda_1, \lambda_n]}$

её сделали линейной

Если $r^{(s)} = 0$, то точное решение найдено ($x^* = x^{(s)}$) и нужно остановиться

Если $r^{(s)} \neq 0$, то $x^{(s)} \neq x^*$ $\quad \alpha, \beta, \gamma \neq 0$

Можно указать их знаки

$$\tau_s = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2(Ar^{(s)}, r^{(s)})(-1)(-1)}{2(Ar^{(s)}, Ar^{(s)})}$$

см(3)

Мы выяснили как выбирают опт знач. τ

Идея. Обоснование сходимости по т. 3 для МПИ

$$\|r^{(s+1)}\|_2 \overset{\text{см}(7)}{=} \|(E - \tau_s A) r^{(s)}\|_2 \leq \|(E - \tau^* A) r^s\|_2 \leq$$

(7), связь $r^{(s+1)}$ и $r^{(s)}$ верна $\forall \tau$ при τ_s по (3) достиг. (min)

$$\leq \|E - \tau^* A\|_2 \cdot \|r^{(s)}\|_2 = \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1}\right) \cdot \|r^{(s)}\|_2$$

по акс норм

эта норма изв. см. февраль

$\mu_A = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ где $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ собств. числа A

$A = A^T > 0$

$$\|r^{(s+1)}\|_2 \leq \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1}\right) \cdot \|r^{(s)}\|_2 \quad (10)$$ // неравен только для (2)(3)

$$\|r^{(s+1)}\|_2 \leq \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1}\right) \cdot \|r^{(s)}\|_2 \leq \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1}\right) \cdot \|r^{(s-1)}\|_2 \leq \ldots \leq \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1}\right)^{s+1} \cdot \|r^0\|_2 \quad (11)$$

(11) означает сходимость по невязке: при $s \to +\infty$ $\|r^{(s+1)}\|_2 \to 0$, потому что $\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^{s+1} \to 0$, потому что $0 \leq \frac{\mu - 1}{\mu + 1} < 1$

Перейдём к погрешностям

$Az^{(s)} = r^{(s)}$

$Az^{(0)} = r^{(0)} \Rightarrow \|r^{(0)}\|_2 \le \|A\|_2 \cdot \|z^{(0)}\|_2$ (12)

(13) $\|z^{(s+1)}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|r^{(s+1)}\|_2 \le$ потом вычисл. (11)

Сходимость по отношению к погрешности

$$\|z^{(s+1)}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|r^{(s+1)}\|_2 \le \|A^{-1}\| \cdot \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{s+1}$$

$$\|r^{(0)}\|_2 \le \underbrace{\overset{=\lambda_n}{\|A\|_2} \cdot \overset{\frac{1}{\lambda_1}}{\|A^{-1}\|_2}}_{\mu_A} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{s+1} \cdot \|z^{(0)}\|_2$$

$$\|z^{(s+1)}\|_2 \le \mu_A \left(\frac{\mu_A-1}{\mu_A+1}\right)^{s+1} \cdot \|z^{(0)}\|_2$$

// доказали ТБ

Итерационный метод с чебышёвским набором параметров

$Ax = b$ (1) $A = A^T > 0$ ($\Rightarrow \det A \ne 0, \exists!\, x^*$)

$0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ ($\lambda_1 \ne \lambda_n$)

$$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau_s} + Ax^{(s)} = b \quad (2)$$

k – параметр метода, длина цикла

$\forall k = 1, 2, 3, \ldots$

Выбор параметров

$\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\tau_s = \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right)\right)^{-1} \\ s = \overline{0, k-1} \quad \text{чеб набор параметров (3)} \end{array}\right.$$

// для одного цикла

$$\underset{\text{нач. прибл}}{x^{(0)}}, \underbrace{\underset{\tau_0}{x^{(1)}}, \underset{\tau_1}{x^{(2)}}, \ldots,}_{\text{строит набор}} \underset{\tau_{k-1}}{x^{(k)}}, \underset{\tau_0}{x^{(k+1)}}, \underbrace{\underset{\tau_1}{x^{(k+2)}}, \ldots,}_{\text{с.н.}} \underset{\tau_{k-1}}{x^{(2k)}}$$

$x^{(k)}$ – след. прибл, начало нов. цикла

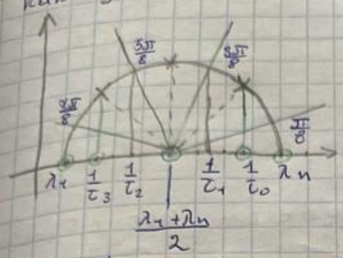
$x^{(2k)}$ – след. прибл. нач. нового цикла

... $x^{(3k)}$ ... $x^{(4k)}$

$x^{(Nk)}$ очередное приближение и начало нового цикла ($N = 0, 1, 2, \dots$)

Под сходимостью понимают $\|x^* - x^{(Nk)}\|_2 \to 0$ при $N \to \infty$ (4)

Как запомнить (3)



$R = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2}$

$\tilde{x}_s$, $s = \overline{0,k}$

$\tilde{x}_0 = \lambda_n$, $\tilde{x}_k = \lambda_1$

Остальные: проекции крест. точек на действ. ось

Рис. 1

Точки $\frac{1}{\tau_0}, \frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \frac{1}{\tau_3}$ на рис. 1 представ. собой корни полинома Чебышёва, который имеет наименьшее уклонение от нуля в классе полиномов степени k ($=4$) на отрезке $[\lambda_1, \lambda_n]$ со свободным слагаемым, равным 1

$\frac{1}{\tau_0}, \frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \frac{1}{\tau_3}$ явл. корнями полинома, имеющего опт. св-ва. В чём эти свойства-?

Запишем математически:

$\forall\, x \in [\lambda_1, \lambda_n]$, $\forall\, P_k(x)$ полином ст. k с арг. x

$\hat{K} = \{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k\}$ $a_k \neq 0$

класс полиномов с 1 $\Rightarrow \forall\, P_k(x) \in K$

$P_k(0) = 1$ – усл. норм в классе $\hat{K}$

Задача Найти в классе $\hat{K}$ такой полином $Q_k(x)$, чтобы $\forall\ P_k(x)\in\hat{K}$ выполнялось неравенство:

$$\max_{x\in[\lambda_1,\lambda_n]}|Q_k(x)| \le \max_{x\in[\lambda_1,\lambda_n]}|P_k(x)| \quad (5)$$

уклонение полиномов от нуля

Перепишем (5)

уклонение $Q_k(x)$ $\le$ уклонение $P_k(x)$ $\quad (5^*)$

Решение задачи (5) называется полиномом, наименее уклоняющимся от нуля $Q_k(x)$

Теорема без док-ва

Решение задачи (5) является полиномом Чебышёва из класса $\hat{K}$ на отрезке $[\lambda_1,\lambda_n]$ и для него есть формула:

(6) $\hat{T}_k(x)$, $x_s = \frac{\lambda_n+\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right)$, $s=\overline{0,k-1}$

$$\hat{T}_k(x) = \underbrace{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\dots\left(1-\frac{x}{x_{k-1}}\right)}_{k\ \text{штук}} \quad \text{т.к. } x_s\ne 0,\ s=\overline{0,k-1} \quad (7)$$

Следствие: уклонение полинома Чебышева можно ~~вы~~ вычислить: $\hat{T}_k(x)$ на $[\lambda_1,\lambda_n]$ равно $\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}$;

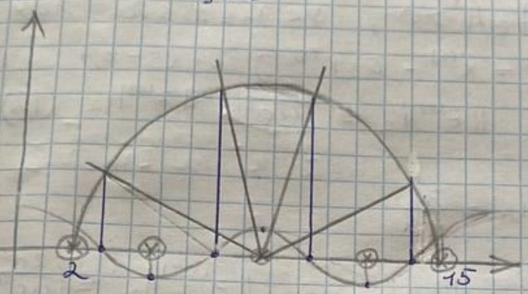
$$\rho = \frac{\sqrt{\lambda_n/\lambda_1}-1}{\sqrt{\lambda_n/\lambda_1}+1} \quad (8)$$

$$\max|\hat{T}_k| = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \quad (8^*)$$

Следствие: уклонение чеб. полинома $\hat{T}_k(x)$ достигается в $k+1$ точке отрезка с чередованием знаков (точки лок. экстр)

$$\tilde{x}_s = \frac{\lambda_n+\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{k}s\right) \quad (9)$$

Нарисуем полином $\hat{T}_4(x)$ на $[\lambda_1, \lambda_n] = [2, 15]$ есть в лекции



$$\frac{\lambda_n+\lambda_1}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

$$R = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2} = \frac{15-2}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

$$x_s = 8{,}5 + 6{,}5\cos\left(\frac{\pi}{8}(1+2s)\right) \quad s = 0, 1, 2, 3$$

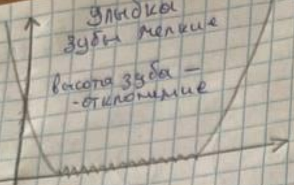
$$\tilde{x}_s = 8{,}5 + 6{,}5\cos\left(\frac{\pi}{4}s\right), \quad s = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$g = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{15}{2}} + 1} \qquad \max|\hat{T}_n(x)| = \frac{2g^4}{1+g^8} \approx 0{,}09334$$

Корни 14,5052 10,9874 6,0126 2,4948

x_0 x_1 x_2 x_3

Э. коэф.: 15 13,9662 8,5 3,9038 2



// возвращаемся к методу

(теорема 8)

$Ax = b$ (1) $\quad A = A^T > 0, \quad 0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \quad \lambda_1 \ne \lambda_n$

Исп (2) $\quad x^{(s+1)} = x^{(s)} - \tau_s r^{(s)}; \quad \tau_s \ (s = 0, 1, \ldots, k-1)$

см. (3) Тогда $\|z^{(k)}\|_2 \le \underbrace{\dfrac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}}_{\text{уклон. полин. Чеб ст. } k \text{ на } [\lambda_1, \lambda_n]} \cdot \|z^{(0)}\|_2$ (12)

$$\rho = \frac{\sqrt{\mu_A} - 1}{\sqrt{\mu_A} + 1}, \quad \mu_A = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

По завершению N циклов $\|z^{(Nk)}\|_2 \le \left(\dfrac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}\right)^N \cdot \|z^{(0)}\|_2$ (13)

Сходимость, т.е. $\|z^{(Nk)}\|_2 \to 0 \ (N \to \infty)$ следует из того $0 \le \dfrac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} < 1$

(П) $A, \ \lambda_1 = 2 \quad \lambda_n = 15$

$k = 4$ (длина цикла)

$T_4(x)$ // уже рассмотрим

$$\tau_0 = \left(8.5 + 6.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^{-1}$$

$$\tau_1 = \left(8.5 + 6,5 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^{-1}$$

$$\tau_2 = \left(8.5 + 6,5 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^{-1}$$

$$\tau_3 = \left(8.5 + 6.5 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)^{-1}$$

$\|z^{(4)}\|_2 \le 0,09334 \cdot \|z^{(0)}\|_2$ // 10 раз

$\|z^{(20)}\|_2 \le (0,0934)^5 \cdot \|z^0\|_2$ // 100 000 раз

Построили
Построить
Теорема
Из в.
форм

Построили метод и спрогнозировали его работу
Построить метод значит найти параметр.
Теорема 9 о методе той ситуации, когда изв. оценки с.ч.

Изв. $m_1 \le \lambda_1$, $\lambda_1 \le M_2$
формулировка в лекции