ЛЕКЦИЯ 6

Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ – некоторая область. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f(x) = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого вещественны и определены в Ω.

Пусть Γ – гладкая $(n-1)$-мерная поверхность, принадлежащая Ω, заданная уравнением

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что поверхность не имеет особых точек, то есть

$$|\operatorname{grad}\omega(x)| \neq 0 \text{ при всех } x \in \Gamma.$$

С каждой точкой $x \in \Gamma$ связывается некоторое направление $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), ...\lambda_n(x)\}$, где λ_i, $i = 1, ..., n$, – непрерывно дифференцируемые вещественнозначные функции,

$$|\lambda|^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 > 0$$

на Γ. Пусть вектор λ не касается поверхности Γ ни в одной точке, то есть

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial \lambda}\right|_{\Gamma} = \frac{(\lambda, \operatorname{grad}\omega)}{|\lambda|} \neq 0.$$

В качестве λ часто выбирается нормаль к поверхности Γ.

На поверхности Γ задаются значения функции u и её производные первого порядка по направлению λ:

$$u|_{\Gamma} = \varphi, \ \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \psi. \tag{3}$$

Определенные на Γ функции φ, ψ называются **данными Коши**, а Γ – **поверхностью Коши**.

Задача Коши для уравнения (1) ставится так: найти решение уравнения (1) в некоторой окрестности поверхности Γ, удовлетворяющее данным Коши на поверхности Γ.

Будем считать, что φ – непрепрывно дифференцируемая, ψ – непрерывная функция.

Покажем, что уравнение и данные Коши определяют значения производных функции u на поверхности Γ.

Рассмотрим сначала случай, когда начальные данные заданы на гиперплоскости

$$x_n = 0,$$

то есть $\omega(x) = x_n$,

$$u|_{x_n=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|_{x_n=0} = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{5}$$

В уравнениях гиперболического типа часто переменная $x_n = t$ обозначает время, поэтому условия (4), (5) имеют определяют начальное состояние и начальную скорость рассматриваемой системы.

Без ограничения общности можно считать, что $|\lambda| = 1$. Тогда, так как $\operatorname{grad}\omega = (0,...0,1)^T$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}|_\Gamma = \lambda_n \neq 0.$$

Дифференцируя (4), находим на гиперплоскости производные функции u первого порядка по переменным x_1,..., x_{n-1}:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{x_n=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k},\ k = 1,...,n-1. \tag{6}$$

Из равенства (5) можно выразить $\partial u/\partial x_n$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = \frac{1}{\lambda_n}\left(\psi - \lambda_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - ... - \lambda_{n-1}\left.\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right|_{x_n=0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\left(\psi - \lambda_1\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - ... - \lambda_{n-1}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right|_{x_n=0}\right). \tag{7}$$

Используя равенства (6) и (7) можем теперь найти значения всех вторых производных функции u на Γ кроме $\partial^2u/\partial x_n^2$.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$a_{nn}\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2} = -\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_n} - F(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

Если $a_{nn}(x_1,...,x_{n-1},0) \neq 0$, то положив в этом равенстве $x_n = 0$, однозначно определяем $\partial^2u/\partial x_n^2$ на гиперплоскости $x_n = 0$.

Если $a_{nn}(x) = 0$ в некоторой точке $x = (x_1,...,x_{n-1},0)$, то в этой точке получаем равенство, связывающее уже определенные величины u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,n-1$. Так как эти производные функции u определяются на гиперплоскости $x_n = 0$ через данные Коши, значение в точке $x' = (x_1,...,x_{n-1})$ функций φ, ψ и их производных до второго и первого порядка соответственно также связаны некоторым соотношением. Это означает, что вообще говоря, φ и ψ не могут быть произвольными. Если построенное соотношение между начальными данными не выполняется, задача Коши решения не имеет.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x).$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$u(x,y) = f(x) + g(y),$$

где f и g – произвольные функции. Подставляя начальные условия, получаем

$$f(x) + g(0) = \varphi(x),\ g'(0) = \psi(x).$$

Функции f и g, удовлетворяющие этим условиям существуют только если $\psi = a = \text{const}$. Решением задачи будет любая функция вида

$$u(x,t) = \varphi(x) + ay + \int_0^y \int_0^z h(\xi) d\xi dz,$$

где h – произвольная функция. То есть если даже решение задачи существует, оно не единственно.

Перейдём теперь к общему случаю.

В окрестности поверхности Γ введём новую систему координат η_1, ..., η_n. Преобразование $\eta = \eta(x)$ должно быть взаимно однозначным, функции η_k, $k = 1, ..., n-1$ дважды непрерывно дифференцируемыми, положим

$$\eta_n = \omega.$$

Один из способов построения такого отображения η следующий. Предположим, уравнение рассматривается в окрестности точки $x^0 \in \Gamma$. Поскольку $\operatorname{grad} \omega \neq 0$, то хотя бы одна из координат вектора $\operatorname{grad} \omega(x^0)$ отлична от нуля, пусть, например, $\partial\omega/\partial x_n \neq 0$ в окрестности x^0. Положим тогда

$$\eta_k = x_k - x_k^0,\ k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\eta_n = \omega.$$

Якобиан такого преобразования равен

$$\det J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \omega_{x_1} & \omega_{x_2} & \ldots & \omega_{x_{n-1}} & \omega_{x_n} \end{vmatrix} = \omega_{x_n}.$$

Пусть $v(\eta) = u(x(\eta))$. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k,s=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_k \partial \eta_s} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\eta_k} \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Уравнение (1) в новых переменных имеет вид

$$\sum_{k,s=1}^n \bar{a}_{ks}(x(\eta)) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_k \partial \eta_s} = F(\xi, v, \operatorname{grad} v), \tag{8}$$

где

$$\bar{a}_{ks}(x(\eta)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(\eta)) \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} = (A(x(\eta)) \operatorname{grad} \eta_k, \operatorname{grad} \eta_s).$$

Поверхность Коши Γ переходит в гиперплоскость $\eta_n = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = (\operatorname{grad} u, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial \eta_k} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}.$$

Пусть l – векторное поле на Γ с компонентами

$$l_k = (\lambda, \operatorname{grad} \eta_k) = \frac{\partial \eta_k}{\partial \lambda}.$$

По условию, $l_n = (\lambda, \operatorname{grad} \omega) \neq 0$. Начальные условия принимают вид

$$v|_{\eta_n=0} = \varphi(x(\eta)),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial l}\right|_{\eta_n=0} = \frac{1}{|l(x(\eta))|}\psi(x(\eta)).$$

Из полученных ранее результатов вытекает, что значения производных первого и второго порядка функции u на поверхности Γ однозначно восстанавливаются по данным Коши и уравнению, если в точках Γ

$$\bar{a}_{nn} = (A \operatorname{grad} \omega, \operatorname{grad} \omega) \neq 0.$$

Можем, таким образом, утверждать, что для того, чтобы начальные данные Коши на поверхности $\omega = 0$ приводили к несовместности или неопределенности при нахождении производных второго порядка на поверхности Γ, необходимо и достаточно, чтобы функция ω удовлетворяла условию

$$\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} \frac{\partial \omega}{\partial x_l} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = (A \operatorname{grad} \omega, \operatorname{grad} \omega) = 0, \qquad (9)$$

причем это условие должно быть удовлетворено при $\omega = 0$, то есть, иначе говоря, в силу уравнения (2).

Точка $x \in \Gamma$ называется **характеристической точкой** для уравнения (1), если в этой точке выполнено равенство (9). Поверхность Γ называется **характеристической** для уравнения (1) или характеристикой (для) уравнения (1), если все её точки характеристические.

Если уравнение (1) эллиптично в Ω, то матрица $A(x)$ является положительно или отрицательно определенной в каждой точке $x \in \Omega$. Это означает, что равенство (9) может иметь место только при $|\operatorname{grad} \omega| = 0$. Следовательно, эллиптические уравнения не имеют вещественных характеристических поверхностей (более того, никакая поверхность не содержит ни одной характеристической точки эллиптического уравнения).

Если уравнение (1) гиперболическое в Ω, то можно показать, что через любую точку области Ω можно провести характеристическую поверхность. Например, в случае волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

уравнение (9) имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_{n-1}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0.$$

Этому уравнению, в частности, удовлетворяет функция

$$(x - x^0, m),$$

где x^0 - произвольная точка, а вектор m, $|m| = 1$, подчинен условию $m_1^2 + \dots + m_{n-1}^2 = m_n^2$. Уравнению удовлетворяет также функция

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 - (x_n - x_n^0)^2,$$

где x^0 - произвольная точка. Следовательно, плоскость и коническая поверхность являются характеристиками волнового уравнения.

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} = \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

уравнение (9) имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_{n-1}}\right)^2 = 0.$$

Очевидно, что любое решение этого уравнения имеет вид

$$\omega = \Phi(x_n),$$

где Φ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция ($\Phi' \neq 0$). Поэтому характеристики уравнения теплопроводности суть плоскости $x_n = \text{const}$.

Теорема Коши-Ковалевской

Приведём результат о корректности постановки задачи Коши в классе аналитических функций.

Функция $g(x)$ называется аналитической в точке $x^0 \in \Omega$, если в некоторой окрестности U этой точки она представляется абсолютно сходящимся степенным рядом

$$g(x) = \sum_{\alpha} g_\alpha (x - x^0)^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$. Функция g называется аналитической в области, если она аналитична в каждой точке этой области.

Предположим, что данные задачи аналитичны, то есть коэффициенты и свободный член уравнения (1) и функция ω, задающая уравнение поверхности Γ, – аналитические в Ω, а функции $\lambda_1,\dots, \lambda_n$, φ, ψ – аналитические на Γ.

Теорема 1. *(Теорема Ковалевской) Пусть данные задачи аналитичны и поверхность* Γ *не имеет характеристических точек для уравнения (1). Тогда для любой точки* $x^0 \in \Gamma$ *существует такая окрестность* U *этой точки, в которой эта задача имеет аналитической решение, и ни в какой окрестности точки* x^0 *не может быть более одного аналитического решения этой задачи.*

Из теоремы вытекает

Теорема 2. *Пусть данные задачи аналитичны и поверхность* Γ *не имеет характеристических точек. Тогда существует такая содержащая поверхность* Γ *область* $\Omega' \subset \Omega$*, в которой эта задача имеет аналитическое решение, и ни в какой области, содержащей поверхность* Γ*, не может быть более одного аналитического решения этой задачи.*

Известная в теории обыкновенных дифференциальных уравнений теорема Коши утверждает, что обыкновенное уравнение с аналитическими на интервале $a < x < b$ коэффициентами и свободным членом в некоторой окрестности точки x^0, в которой задаются начальные условия, $a < x^0 < b$, имеет единственное аналитическое решение, удовлетворяющее этим начальным условиям. Теорема Ковалевской является обобщением теоремы

Коши на случай уравнения в частных производных: если поверхность Γ, на которой задаются начальные условия, не имеет характеристических точек и данные задачи аналитичны, то в некоторой окрестности поверхности Γ задача имеет единственное аналитическое решение. В случае, когда на поверхности Γ имеются характеристические точки, существования аналитического (и даже дважды непрерывно дифференцируемого) решения задачи Коши гарантировать нельзя: если точка $x^0 \in \Gamma$ характеристическая, то существуют такие гладки и даже аналитические начальные функции φ и ψ, что ни в какой окрестности этой точки не существует решения задачи.

Задача Гурса

Возможна постановка краевой задачи для гиперболического уравнения, краевые условия в которой заданы на характеристиках уравнения.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа с двумя независимыми переменными в каноническом виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cy = f(x, y). \tag{10}$$

Предполагается, что коэффициенты a, b, c непрерывны в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$, $\Omega = (0, x_0) \times (0, y_0)$, функция f непрерывна в Ω.

Задача Гурса ставится следующим образом. Требуется найти непрерывную в $\bar{\Omega}$ и непрерывно дифференцируемую в функцию u, обладающую непрерывной в Ω производной u_{xy}, удовлетворяющую уравнению (10) в прямоугольнике Ω и принимающую заданные значения на его сторонах $y = 0$, $0 \le x \le x_0$ и $x = 0$, $0 \le y \le y_0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u(0, y) = \psi(y). \tag{11}$$

При этом необходимо функция φ непрерывна на отрезке $[0, x_0]$, функция ψ непрерывна на отрезке $[0, y_0]$ и выполнено условие согласованности

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

Отметим, что в задаче Гурса задаётся одно краевое условие на двух пересекающихся характеристиках уравнения (10).

Существование и единственность решения задачи Гурса могут быть доказаны методом последовательных приближений.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.