$$\delta_{\max}^{c} = \sup\left\{\delta : \operatorname{Re}\lambda_{\max}(A+\Delta) < 0, \Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}, \|\Delta\|_2 \leqslant \delta\right\}$$

Лемма 3.1. Для любой невырожденной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрица $A+\Delta$ будет также невырожденной, если и любой матрицы $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\|\Delta\|_2 < 1/\|A^{-1}\|_2$ существует такая матрица $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Наконец, рассмотрим случай, когда семейство матриц задаётся с помощью матричной нормы, то есть

$$A = A_0 + B\Delta C, \qquad \|\Delta\|_2 \leqslant \delta$$

Заметим, что радиус робастной устойчивости $\delta(A_0)$, вообще говоря, зависит от того считаем мы матричные возмущения Δ вещественными или комплексными. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующее матричное семейство

$$A(\Delta) = A_0 + \Delta, \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Интуитивно понятно, что радиусом устойчивости $\delta(A_0)$ будет «расстояние» до ближайшей матрицы, имеющей хотя бы одно собственное число на мнимой оси. Пусть возмущения Δ комплексные. Полагая

$$\Delta = \frac{2}{27}\begin{bmatrix} 6+2i & 1+2i \\ -4-4i & -2i \end{bmatrix},$$

получаем, что собственные числа матрицы $A(\Delta)$ есть

$$\lambda_1 = -\frac{14}{9} - \frac{2i}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{2i}{3}.$$

Таким образом, радиус робастной устойчивости удовлетворяет оценке $\delta_c(A_0) \leqslant \|\Delta\|_2 = 2/3$. Чтобы подчеркнуть, что возмущения комплексные, будем в дальнейшем использовать индекс c в обозначении $\delta_c(A)$ и говорить о комплексном радиусе робастной устойчивости. Далее будет получена общая формула для вычисления комплексного радиуса робастной устойчивости из которой будет следовать, что построенная оценка является точной, то есть $\delta_c(A_0) = 2/3$. Теперь предположим, что возмущения Δ являются вещественными. В этом случае потеря устойчивости матрицы $A(\Delta)$ происходит либо когда появляется пара чисто мнимых собственных чисел, либо когда хотя бы одно собственное число становится нулевым. Рассмотрим оба этих случая и выберем тот, в котором норма матрицы Δ будет наименьшей.

матрица

$$A(\Delta) = A_0 + \frac{2}{27}\begin{bmatrix} 6+2i & 1+2i \\ -4-4i & -2i \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 12+4i & 18-8i \\ -52+4i & -54-4i \end{bmatrix}$$

то нетрудно проверить, что 1/2, -(I/2), I/2, 1/2

В тоже время, если считать, что возмущения Δ вещественные, то матрица $A(\Delta)$

Покажем на примерах, как в частном случае одно- и двухпараметрического семейства матриц найти радиусы робастной устойчивости с помощью D-разбиения.

Пример 3.7. Определим вещественный и комплексный радиусы робастной устойчивости однопараметрического семейства матриц

$$\mathcal{A}(\Delta) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1+\Delta \end{bmatrix}, \qquad \Delta \in \mathbb{C}.$$

Матрица $\mathcal{A}(0)$ устойчивая, её собственные числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, поэтому радиус устойчивости отличен от нуля. Для решения задачи перейдём от матрицы $\mathcal{A}(\Delta)$ к её характеристическому многочлену

$$P(z;\Delta) = z^2 + (2-\Delta)z + 5 - \Delta = 0,$$

после чего воспользуемся методом D-разбиения. Так как точки границы D-разбиения соответствуют расположению корней характеристического уравнения на мнимой оси комплексной плоскости, то радиус робастной устойчивости будет равен расстоянию от начала координат до границы D-разбиения (при условии, что начало координат расположено в области устойчивости).

Для получения уравнения кривой D-разбиения подставим $z = i\omega$, $-\infty < \omega < +\infty$, в характеристическое уравнение $P(z;\Delta) = 0$ и разрешим его относительно параметра $\Delta = u + iv$, тогда:

$$u = \frac{5+\omega^2}{1+\omega^2}, \qquad v = \frac{\omega^3 - 3\omega}{1+\omega^2}.$$

В данном случае, для построения границы D-разбиения удобнее перейти от параметрического задания кривой к неявному:

$$v^2 = \frac{(u-5)(u-2)^2}{1-u}. \tag{3.43}$$

Легко проверить, что кривая определена при $u \in (1, 5]$ и пересекает ось абсцисс в точках $u = 2$ и $u = 5$. Кроме этого, она имеет вертикальную асимптоту $u = 1$ и симметрична относительно оси абсцисс. Наконец, точка $u = 2$ является точкой самопересечения, то есть кривая в этой точке имеет две различные касательные, уравнения которых можно найти, если разложить правую часть уравнения (3.43) в ряд Тейлора в окрестности $u = 2$ и отбросить члены, старше второго порядка:

$$v = \pm\sqrt{3}(u - 2).$$

Итоговый вид кривой показан на рисунке 3.5 синим цветом. Штриховка на кривой D-разбиения наносится слева при движении по ней в сторону возрастания ω. При $\Delta = 0$ многочлен $P(z; \Delta)$ имеет корни $z_{1,2} = -1 \pm 2i$, следовательно, область D_2 является областью устойчивости. Сигнатуры остальных областей легко вычисляются, но для определения радиуса робастной устойчивости они не представляют интереса.

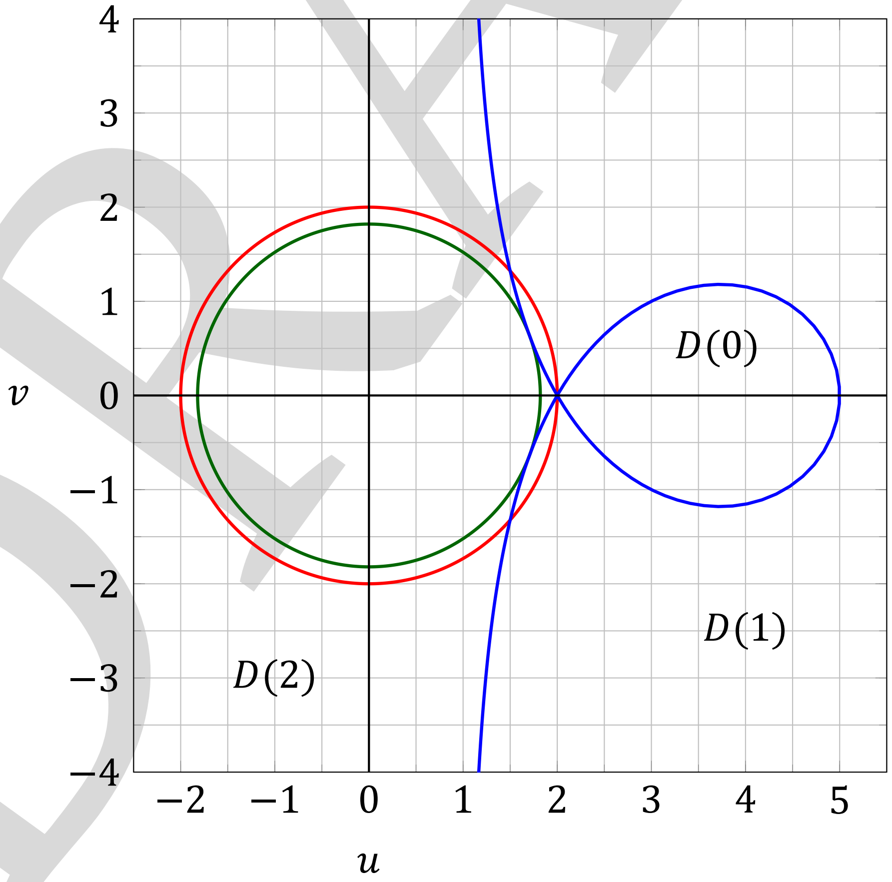

Рис. 3.5. Выделение области устойчивости на плоскости параметра $\Delta \in \mathbb{C}$.

Радиус робастной устойчивости матрицы $\mathcal{A}(\Delta)$ находится как максимальный радиус круга, целиком лежащего внутри области устойчивости $D(2)$. Из геометрических соображений ясно, что величина $\delta^c_{\max}$ также может быть найдена как минимальное значение δ при котором окружность радиуса δ имеет точки пересечения с границей D-разбиения:

$$\delta^c_{\max} = \inf\left\{\delta : u^2 + v^2 = \delta^2, v^2 = \frac{(u-5)(u-2)^2}{1-u}\right\}$$

Найдём точки пересечения окружности радиуса δ с границей D-разбиения. Для этого выразим из уравнения окружности переменную v, подставим в уравнение границы D-разбиения и упростим:

$$8u^2 - (24 + \delta^2)u + (20 + \delta^2) = 0.$$

Квадратное уравнение имеет вещественные корни, когда дискриминант неотрицательный, то есть $\delta^4 + 16\delta^2 - 64 = (\delta^2 + 8)^2 - 128 \geqslant 0$. Таким образом, получаем

$$\delta^c_{\max} = \inf\left\{\delta \geqslant 0 : (\delta^2 + 8)^2 - 128 \geqslant 0\right\} = 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2} \approx 1.8204.$$

Окружность радиуса $\delta^c_{\max}$, ограничивающая комплексную область робастной устойчивости семейства $\mathcal{A}(\Delta)$, изображена на рис. 3.5 зелёным цветом.

Если рассматривать только вещественные Δ, то областью устойчивости будет луч $\Delta \in (-\infty, 2)$, поэтому вещественный радиус робастной устойчивости есть

$$\delta^r_{\max} = \sup\left\{\Delta \geqslant 0 : -\infty < \Delta < 2\right\} = 2.$$

Для наглядности на рис. 3.5 граница вещественной области робастной устойчивости $\mathcal{A}(\Delta)$ изображена также в виде окружности, но красного цвета. □

Пример 3.8. Для матрицы $\mathcal{A}(\Delta)$ из предыдущего примера вычислим комплексный радиус робастной устойчивости, используя формулу (3.50):

$$\delta^c_{\max} = \frac{1}{\sqrt{K_{\max}}}, \qquad K_{\max} = \sup_{\omega} \left\|K(i\omega)\right\|^2.$$

. Так как $\mathcal{A}(\Delta) = A + B\Delta C$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то вспомогательная функция $K(p)$ имеет вид:

$$K(p) = C\big(pI - A\big)^{-1}B = \frac{p+1}{p^2+2p+5}.$$

Выделим вещественную и мнимую части, а также вычислим квадрат модуля $K(i\omega)$, тогда получим следующие выражения:

$$\operatorname{Re} K(i\omega) = \frac{\omega^2+5}{\omega^4-6\omega^2+25}, \qquad \operatorname{Im} K(i\omega) = \frac{3\omega-\omega^3}{\omega^4-6\omega^2+25},$$

$$\big\|K(i\omega)\big\|^2 = K(i\omega)K(-i\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4-6\omega^2+25}.$$

Для вычисления комплексного радиуса устойчивости $\delta^c_{\max}$ используем формулу (3.50), тогда:

$$\delta^c_{\max} = \frac{1}{\sqrt{K_{\max}}}, \qquad K_{\max} = \sup_\omega \big\|K(i\omega)\big\|^2.$$

Поскольку выражение $\big\|K(i\omega)\big\|^2$ как функция переменной ω определена при всех вещественных значениях и является непрерывно-дифференци
Найдём точную верхнюю грань выражения в Максимум $\big\|K(i\omega)\big\|^2$ достигается при $\omega = \sqrt{4\sqrt{2}-1}$

Подставляя полученное выражение в формулу (3.50), получаем:

Максимум выражения достигается при $\omega = \sqrt{4\sqrt{2}-1}$

Найдём максимальное значение

$$\delta^c_{\max} = \frac{1}{\sup_\omega \big\|G(i\omega)\big\|}, \qquad G(p) = C\big(pI - A\big)^{-1}B$$

что, естественно, совпадает с результатом полученным ранее.

максимальный радиус круга, целиком лежащего внутри области устойчивости

наименьшее возможное положительное значение δ равно $2\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

. граница Видно, что Для вычисления радиуса

«расстояние» до ближайшей матрицы, имеющей хотя бы одно собственное число на мнимой оси.

Предположим, что параметр принимает комплексные значения $\Delta =$ $u+iv$ и Для получения уравнения кривой .D-разбиения сделаем подстановку A = juj и разрешим его относительно параметра /i, обозначив его, когда он принимает комплексное значение, через p