Разберем еще одну задачу по теме «Оптимальное управление»

Найти область управляемости и осуществить синтез оптимальных управлений в задаче о быстрейшем попадании в начало координат для линейной системы

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = u(t),$$

где $-1 \le u(t) \le 1$ в случае, если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$.

В этой задаче необходимо синтезировать оптимальное по быстродействию управление и синтезировать область – множество точек, из которых можно попасть в ноль.

Т.е. требуется перевести систему из начального состояния x^0 в конечное состояние x^1 так, чтобы заданный функционал

$$I = \int_0^T 1\,dt$$

принимал наименьшее значение.

Если сказать более простыми словами (т.к. у нас слишком короткий раздел «оптимальное управление»), надо показать ***графически****, т.е. на фазовом портрете, самый короткий путь в «ноль» и установить область – множество точек, из которых можно попасть в ноль. Кроме того, мы должны показать, что выполняются необходимые условия оптимальности в форме принципа* ***максимума Понтрягина***

Отметим, что характеристическое уравнение для однородного линейного ДУ имеет вид:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$$

и при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ имеем $k = 0, h > 0$

Сведем ДУ к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy + u \end{cases} \tag{1}$$

Будем строить Гамильтониан $H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2)$, где $\psi_0, \psi_1, \psi_2 -$ сопряженные переменные, причем $\psi_0 - const$.

Составим функцию Гамильтона:

$$H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2) = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 \cdot y + \psi_2 \cdot (-2hy + u)$$

Система, которая описывает динамику сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 + 2h \cdot \psi_2 \end{cases}$$

(2)

Мы предполагаем, что оптимальное управление существует. Поэтому рассмотрим необходимые условия оптимальности в форме принципа **максимума Понтрягина,** которые имеют вид:

Необходимые условия оптимальности в форме принципа **максимума Понтрягина** имеют вид:

Для оптимальности в смысле минимума функционала I процесса

$$u^*(t), x^*(t), t_0 \le t \le t_1$$

необходимо существование нетривиального набора

$$\left(\psi_0^*, \psi^*(t)\right),$$

состоящего из константы $\psi_0^* \le 0$ и решения $\psi^*(t), t_0 \le t \le t_1$ *сопряженной системы*, что для любого t, при котором $u^*(t)$ непрерывно, выполняется условие максимума:

$$H\left(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)\right) = \max\{H(x^*(t), \psi^*(t), u) : u \in V\} \equiv 0, t_0 \le t \le t_1$$

причем, если $f_0 > 0, \text{то } \psi_0^* \le 0$. В нашей задаче $f_0 = 1$

Равенство нулю функции Гамильтона можно проверять при одном из значений t, например, при $t = t_1$.

Рассмотрим применение принципа максимума Понтрягина к данной задаче.

$$\max_u H\ (x^*, y^*, \psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, u\ ) = \ H\ (x^*, y^*, \psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, u^*\ );$$

$$\max_{|u|\le 1}\left(\psi_0^* + \psi_1^* y + \psi_2^*(-2hy + u)\right) =$$

$$\psi_0^* + \psi_1^* y^* + \psi_2^*(-2hy^*) + \max_{|u|\le 1}(\psi_2^* u);$$

Пусть $\exists\ t^*, \psi_2^*(t^*) > 0$

$\max_{|u|\le 1}(\psi_2^* u) = \psi_2^* \cdot \max_{|u|\le 1} u = \max_{u=1} \psi_2^* \cdot u^* = \psi_2^*;\ u^* = 1$

Пусть $\exists\ t^{**}, \psi_2^*(t^{**}) < 0$

$$\max_{|u|\le 1}(\psi_2^* u) = \psi_2^* \cdot \max_{|u|\le 1} u = \max_{u=-1} \psi_2^* \cdot u^* = -\psi_2^*; u^* = -1$$

$$\nexists\ (t_1, t_2): \psi_2^*(t) \equiv 0, t \in (t_1, t_2)$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix}\psi_{10}\\ \psi_{20}\end{pmatrix};$$

Т. о. ψ^* обращается в ноль при нулевых начальных условиях. Тогда мы имеем вырожденную задачу.

Итак $$u^* = \begin{cases} 1, \psi_2^* > 0 \\ -1, \psi_2^* < 0 \end{cases} = sign\,\psi_2^*$$

Возникает вопрос, как часто ψ_2 изменяет знак?

Для этого построим фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{\psi_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{\psi_2} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 + 2h \cdot \psi_2 \end{cases} \tag{3}$$

Видим, что $\psi_1 = \mathrm{C}$ вдоль фазовой траектории.

Состояния равновесия системы расположены на прямой $-\psi_1 + 2h \cdot \psi_2 \rightarrow$

$$\psi_2 = \frac{\psi_1}{2h}$$

Это прямая, проходящая через начало координат с положительным угловым коэффициентом.

На рисунке 1 – фазовый портрет системы, по которому мы видим, что ψ_2изменяет знак не более одного раза.

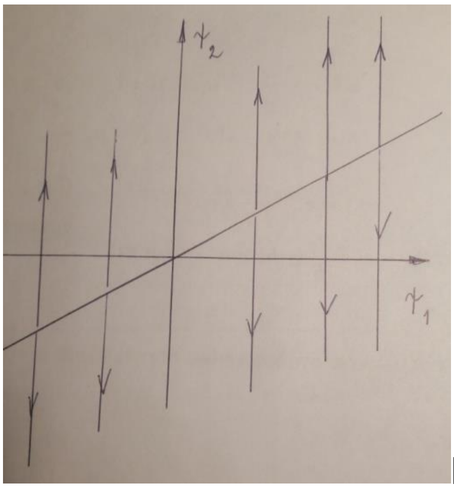

Рис.1

Вернемся к системе (1)

Построим фазовый портрет при $u = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy + 1 \end{cases} \tag{4}$$

Найдем первый интеграл

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2hy}{y} \to \frac{y \cdot dy}{1 - 2hy} = dx \to \int \frac{ydy}{1 - 2hy} = \int dx$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int \frac{ydy}{1 - 2hy} = -\frac{1}{2h} \int \frac{2hy - 1 + 1}{2hy - 1} = -\frac{1}{2h} y - \frac{1}{4h^2} \ln|2hy - 1|;$$

Тогда

$$-\frac{1}{2h} y - \frac{1}{4h^2} \ln|2hy - 1| = x + C$$

Построим график ($C = 0,\ x - \text{функция},\ y - \text{переменная}$).

Пусть

$$2hy - 1 > 0, y > \frac{1}{2h}, \ln|2hy - 1| = ln(2hy - 1)\,;$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2h} - \frac{2hy}{4h^2(2hy - 1)} = -\frac{y}{2hy - 1} < 0 \ (\text{проверьте!})$$

Если

$$2hy - 1 < 0, y < \frac{1}{2h}, \ln|2hy - 1| = ln(1 - 2hy)\,;$$

$$x = -\frac{1}{2h} y - \frac{1}{4h^2} ln(1 - 2hy)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2h} - \frac{-2h}{4h^2(1 - 2hy)} = \frac{y}{2hy - 1} \ (\text{проверьте!})$$

$$\frac{dx}{dy} > 0 \text{ при } \ 0 < y < \frac{1}{2h}$$

$$\frac{dx}{dy} < 0 \text{ при } \ y < 0$$

$$y = 0 - \text{локальный минимум функции}$$

Убедитесь самостоятельно, что

$$y = \frac{1}{2h} - \text{вертикальная асимптота}$$

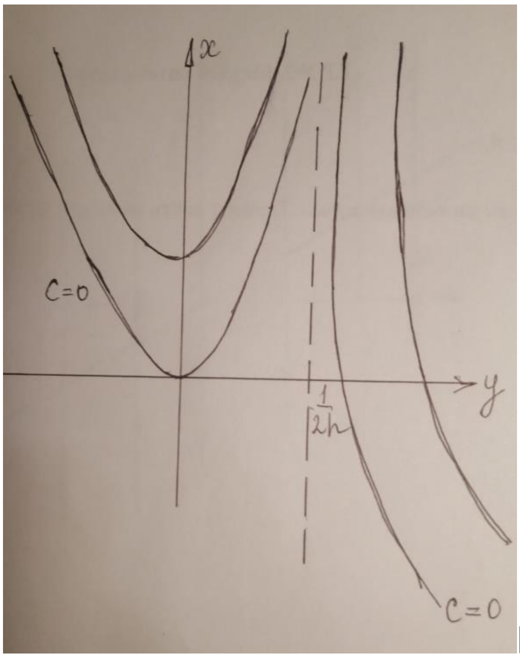

Рис. 2 (и для $\mathrm{C} \neq 0$)

Теперь построим график функции $y = y(x)$.

Надо построить график, симметричный построенному графику относительно биссектрисы $y = x$ (проведем поворот на $90\,°$).

Получаем:

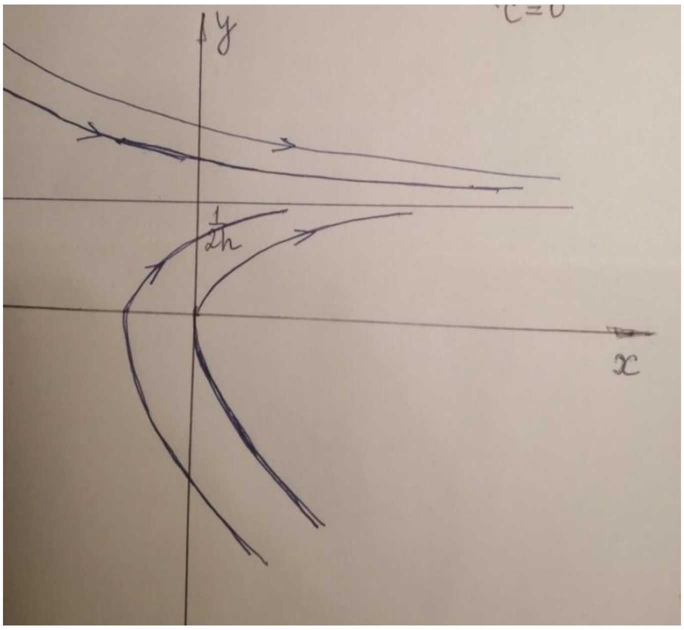

Рис. 3.

Отметим, что фазовый портрет системы (качественный) при $u = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy + 1 \end{cases}$$

можно построить с помощью изоклин и нахождения знаков производной в разных интервалах изменения переменных. Возможно, это будет проще. Выше приведено более точное построение графика путем нахождения первых интегралов.

Построим фазовый портрет при $u = -1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy - 1 \end{cases} \tag{5}$$

Найдем первый интеграл

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + 2hy}{y} \to \frac{y \cdot dy}{1 + 2hy} = -dx \to \int \frac{ydy}{1 + 2hy} = -\int dx$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int \frac{ydy}{1 + 2hy} = \frac{1}{2h}\int \frac{2hy + 1 - 1}{2hy + 1} = \frac{1}{2h}y - \frac{1}{4h^2}\ln|2hy + 1|;$$

Тогда

$$-\frac{1}{2h}y + \frac{1}{4h^2}\ln|2hy + 1| = x + C$$

Построим график ($C = 0,\ x - \text{функция},\ y - \text{переменная}$)

Пусть

$$2hy + 1 > 0,\ \ y > -\frac{1}{2h},\ \ \ln|2hy + 1| = ln(1 + 2hy);$$

$$x = -\frac{1}{2h}y + \frac{1}{4h^2}ln(1 + 2hy)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2h} + \frac{2h}{4h^2(1 + 2hy)} = \frac{-y}{2hy + 1}\ \text{(проверьте!)}$$

$$\frac{dx}{dy} > 0 \text{ при } -\frac{1}{2h} < y < 0$$

$$\frac{dx}{dy} < 0 \text{ при } y > 0$$

$$y = 0 \text{ локальный максимум функции, рис. 4}$$

Если

$$2hy + 1 < 0,\ \ y < -\frac{1}{2h},\ \ \ln|2hy + 1| = ln(-1 - 2hy);$$

$$x = -\frac{1}{2h}y + \frac{1}{4h^2}ln(-1 - 2hy)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2h} + \frac{-2h}{4h^2(-1 - 2hy)} = \frac{-y}{2hy + 1} < 0$$

Убедитесь самостоятельно, что

$$y = -\frac{1}{2h} - \text{вертикальная асимптота}$$

Построим график ($C = 0,\ x - \text{функция},\ y - \text{переменная}$)

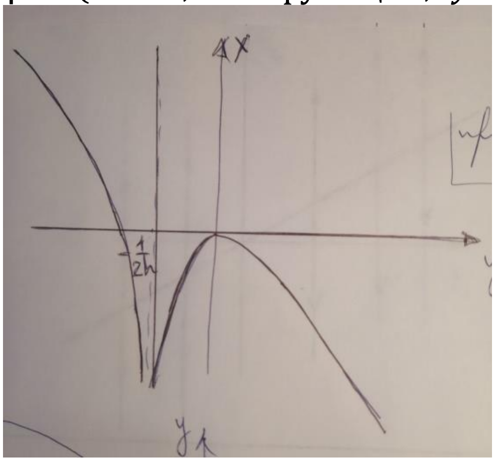

Рис. 4.

Теперь надо построить график, симметричный построенному графику (рис.4.) относительно биссектрисы $y = x$ (проведем поворот на $90\ °$).

Получаем:

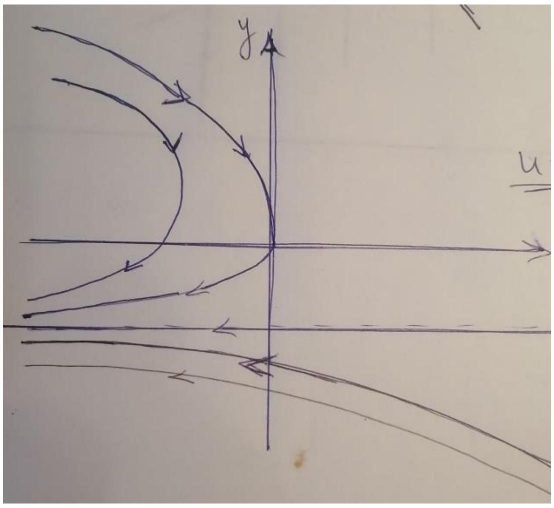

Рис.5

Отметим, что фазовый портрет системы (качественный) при $u = -1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy - 1 \end{cases}$$

можно построить с помощью изоклин и нахождения знаков производной в разных интервалах изменения переменных. Возможно, это будет проще. Выше приведено более точное построение графика путем нахождения первых интегралов.

Объединим эти рисунки. Получим на одном рисунке фазовые траектории системы 4 ($u = 1$, сплошная линия) и системы 5 ($u = -1$, пунктир)

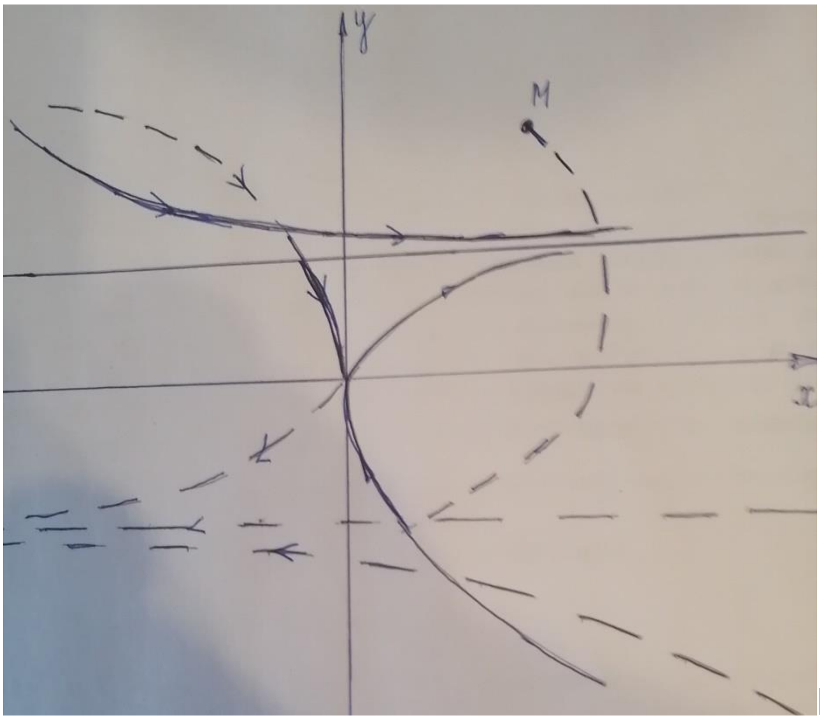

Рис.6

Показано, как из произвольной точки М «движемся» по траекториям системы 2, потом один раз «переключаемся» на траекторию системы 1 и приходим в начало координат.

Убедитесь, что из любой точки можно за одно переключение прийти в (0,0). Т.е. областью управляемости является вся плоскость.