ЛЕКЦИЯ 2

Классификация дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть Ω – некоторая область n-мерного пространства R^n (область Ω не обязательно ограничена, в частности, она может совпадать со всем пространством). Рассмотрим в области Ω дифференциальное уравнение второго порядка, линейное относительно старших производных

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \tag{1}$$

Предполагаем, что коэффициенты и свободный член уравнения – достаточно гладкие функции. Матрица $A(x)$ из коэффициентов при старших производных, отлична от нулевой всюду в Ω. Считаем коэффициенты a_{ij} вещественнозначными, матрица A симметрической.

Пусть x_0 - произвольная точка из Ω, $\lambda_1(x_0)$, ..., $\lambda_n(x_0)$ – собственные значения матрицы $A(x_0)$. Число положительных отрицательных и нулевых собственных значений обозначим n_+, n_-, n_0,

$$n = n_+ + n_- + n_0.$$

Уравнение (1) называется уравнением **эллиптического** типа в точке x_0, если $n_+ = n$ или $n_- = n$ (все собственные значения имеют один знак).

Уравнение (1) называется **гиперболическим** в точке x_0, если $n_+ = n-1$, $n_- = 1$ или $n_+ = 1$, $n_- = n-1$ (все собственные значения кроме одного имеют один знак, нулевых собственных значений нет).

Уравнение (1) называется **ультрагиперболическим** в точке x_0, если $n_0 = 0$, $1 < n_+$, $1 < n_-1$.

Уравнение (1) называется **параболическим** в точке, если $n_0 > 0$ (имеются нулевые собственные значения).

Уравнение называется эллиптическим (гиперболическим, параболическим) на множестве $E \subset \Omega$, если оно эллиптическое (соответственно, гиперболическое,параболическое) в каждой точке этого множества.

Примеры

1. Уравнение Пуассона

$$\Delta u = f, \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \text{ оператор Лапласа}$$

является уравнением, эллиптическим в R^n, поскольку в любой точке $x_0 \in R^n$ $A(x_0) = I$ – единичная матрица, $\lambda_i = 1$, $i = 1,...,n$.

2. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f$$

– пример уравнения, гиперболического во всём пространстве ($\lambda_i = 1$, $i = 1,...,n-1$, $\lambda_n = -1$).

3. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = f$$

параболично в R^n.

4. В математической физике встречаются также уравнения смешанного типа, то есть уравнения, имеющие различный тип в разных точках рассматриваемой области. Например, уравнение Трикоми, которое возникает при описании движения тела в газе с околозвуковой скоростью,

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

эллиптическое при $y>0$, гиперболическое при $y<0$ и параболическое при $y=0$. Область гиперболичности соответствует движению с дозвуковой скоростью, а область эллиптичности - движению со сверхзвуковой скоростью.

Пусть x_0 - некоторая точка области Ω. Обозначим через $\xi=\xi(x)$ преобразование, отображающее некоторую окрестность U точки x_0 на окрестность V соответствующей точки $\xi_0=\xi(x_0)$. Будем предполагать, что функции $\xi_i(x)\in C^2(\bar{U})$, $i=1,\ldots,n$, матрица Якоби $J(x)=(\partial\xi_i/\partial x_j)$ не вырождена, то есть якобиан преобразования $\det J(x)\neq 0$ в $\bar{U}$. Тогда преобразование ξ взаимно однозначно и на V определено обратное преобразование $x=x(\xi)$.

Обозначим $v(\xi)=u(x(\xi))$. Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_ix_j}=\sum_{k,s=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_k\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\xi_k}\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Уравнение (1) в результате замены переменных будет иметь вид

$$\sum_{k,s=1}^{n}\bar{a}_{ks}(x(\xi))\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_k\partial\xi_s}=F(\xi,v,\mathrm{grad}\,v),\tag{2}$$

где

$$\bar{a}_{ks}(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_0)\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}=(A(x_0)\,\mathrm{grad}\,\xi_k,\mathrm{grad}\,\xi_s),$$

а F - некоторая функция, не зависящая от вторых производных функции v.

В частности, если уравнение (1) линейное, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f,$$

то осуществляя замену переменных, снова получаем линейное уравнение

$$\sum_{k,s=1}^{n}\bar{a}_{ks}(x(\xi))\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_k\partial\xi_s}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\frac{\partial v}{\partial\xi_i}+cv=f_1,$$

где $f_1=f_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)=f(x(\xi))$,

$$\bar{b}_i=\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\sum_{k,s=1}^{n}a_{ks}\frac{\partial^2\xi_i}{\partial x_k\partial x_s}.$$

Матрицы $\bar{A}(x) = (\bar{a}_{ks}(x))$ и $A(x)$ связаны равенством

$$\bar{A} = JAJ^T.$$

Поскольку, по предположению, матрица $J(x_0)$ невырождена, число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений для матрицы $\bar{A}$ совпадает с соответствующими числами для матрицы A. Это означает, что в любой точке $y \in V$ уравнение (2) имеет тот же тип, что и уравнение (1) в соответствующей точке $x \in U$. Таким образом, приведенная выше классификация уравнений второго порядка инвариантна относительно гладких взаимно однозначных невырожденных преобразований независимых переменных. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения уравнения (1).

Введём ассоциированную с уравнением квадратичную форму

$$(A(x_0)y, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) y_i y_j. \tag{3}$$

коэффициенты которой равны коэффициентам исходного уравнения в некоторой точке. Пусть $B = (b_{ij})$ – некоторая невырожденная матрица. Выполним линейное преобразование переменных

$$y = B\eta, \; y_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k.$$

Для квадратичной формы получим выражение

$$(y, A(x_0)y) = (B\eta, A(x_0)B\eta) = (\eta, B^T A(x_0)B\eta, \eta) = (\eta, \bar{A}\eta) = \sum_{k,s=1}^{n} \bar{a}_{ks}\eta_k\eta_s,$$

где $\bar{A} = B^T A(x_0)B$,

$$\bar{a}_{ks} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) b_{ik} b_{js}.$$

Следовательно, коэффициенты квадратичной формы (3) при линейном преобразовании изменяются аналогично коэффициентам главной части уравнения (1). Замене переменных $x = x(\xi)$ в уравнении (1) соответствует замена переменных $y = J^T(x_0)\eta$ в квадратичной форме (3).

Пусть S – такая невырожденная матрица, что

$$S^T A(x_0) S = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix},$$

где первые n_+ диагональных элементов равны 1, следующие n_- элементов равны -1, остальные δ_i равны 0.

Замена переменных $y = S\eta$ приводит квадратичную форму (3) к каноническому виду

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \eta_k^2 = \eta_1^2 + \dots + \eta_{n_+}^2 - \eta_{n_+ + 1}^2 - \dots - \eta_{n_+ + n_-}^2.$$

Соответственно, линейная замена независимых переменных $\xi = S^T x$ (матрица Якоби этого преобразования $J = S^T$) в уравнении (1) приведёт к уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n_+}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n_++1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n_++n_-}^2} = F_1,$$

функция F_1 не зависит от вторых производных функции v. Это уравнение называется **каноническим видом** уравнения (1) в точке x_0.

Таким образом для любой точки $x = x_0 \in \Omega$ можно указать неособое линейное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение (1) при $x = x_0$ к каноническому виду.

Можем теперь классифицировать уравнения второго порядка, используя их канонический вид.

Уравнение принадлежит эллиптическому типу в точке x_0, если в этой точке квадратичная форма знакоопределенная.

Уравнение принадлежит гиперболическому типу в точке x_0, если в этой точке квадратичная форма при приведении её к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.

Уравнение принадлежит ультрагиперболическому типу в точке x_0, если в этой точке квадратичная форма при приведении её к сумме квадратов имеет больше одного положительного коэффициента и больше одного отрицательного, причём все коэффициенты отличны от нуля.

Уравнение принадлежит параболическому типу в точке x_0, если в этой точке квадратичная форма при приведении её к сумме квадратов имеет хотя бы один коэффициент, равный нулю.

Поскольку преобразование зависит лишь от значений коэффициентов при старших производных в (1) при $x = x_0$, то в случае, когда эти коэффициенты постоянные в Ω, линейное преобразование, которое приводит уравнение (1) к каноническому виду в точке x_0, приводит это уравнение к каноническому виду в каждой точке области Ω.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, приведенное к каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{4}$$

где δ_i принимают значения 1, -1 или 0. Предположим, не все коэффициенты b_i равны нулю.

Введём новую неизвестную функцию по формуле

$$u = ve^{\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} + \gamma_i v \right) e^{\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\gamma_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \gamma_i^2 v \right) e^{\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n}.$$

Подставляя в уравнение, получаем, разделив на $e^{\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} (2\delta_i \gamma_i + b_i) \frac{\partial v}{\partial x_i} + (c + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \delta_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \gamma_i) v = f e^{-(\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n)}.$$

Если $\delta_i \neq 0$, то полагая $\gamma_i = -b_i/(2\delta_i)$, можно занулить коэффициент перед $\partial v/\partial x_i$. Предположим, $\delta_i \neq 0$ для $i = 1, ..., r$, $r = n_+ + n_- \leq n$. Уравнение примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=r+1}^{n} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + (c - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{r} b_i^2 \delta_i + \sum_{i=r+1}^{n} b_i \gamma_i) v = f e^{-(\gamma_1 x_1 + ... + \gamma_n x_n)}. \qquad (5)$$

Таким образом, уравнение эллиптического типа приводится к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + c_1 v = f_1,$$

где $c_1 = c - b_1^2/4 - ... - b_n^2/4$ и $f_1 = f e^{-(\gamma_1 x_1 + ... + \gamma_n x_n)}$, уравнение гиперболического типа – к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} + c_1 v = f_1,$$

где $c_1 = c - b_1^2/4 - ... - b_{n-1}^2/4 + b_n^2/4$.

Пусть уравнение относится к параболическому типу ($r < n$) и хотя бы один коэффициент b_s при $s = r+1, ..., n$ отличен от нуля. Для определенности, пусть $b_n \neq 0$. Тогда полагая в (5) $\gamma_i = 0$, $i = r+1, ..., n-1$, $\gamma_n = (\sum_{i=1}^{r} b_i^2 \delta_i/4 - c)/b_n$, можно избавить от коэффициента перед v и уравнение примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=r+1}^{n} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = f_1.$$

Пусть уравнение (1) имеет переменные коэффициенты и принадлежит к одному типу в некоторой окрестности U точки $x_0 \in \Omega$. Как отмечено выше, существует невырожденное преобразование независимых переменных $x = \xi(x)$, приводящее уравнение к каноническому виду в точке x_0. Для того, чтобы это же преобразование приводило уравнение к каноническому виду в U, функции ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, должны удовлетворять дифференциальным соотношениям $\bar{a}_{ks} = 0$, $k \neq s$, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} = 0.$$

Число таких условий равно $n(n-1)/2$, что при $n > 3$ превосходит n - число определяемых функций. Для $n = 3$ недиагональные элементы матрицы A, вообще говоря, можно было бы обратить в нуль, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными. Следовательно, при $n \geq 3$ уравнение, вообще говоря, нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки. Приведение уравнения к каноническому виду в случае $n = 2$ будет рассмотрено на следующей лекции.

Упражнения

1. Определите тип уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t),$$

уравнения диффузии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t),$$

и уравнения

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + qu = F(x,t).$$

2. Выполните замену переменных в уравнении Трикоми, приводящую его к каноническому виду в точке $(1, 4)$.

Список литературы

[1] Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970. mathematics/pde.htm.

[4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.