ЛЕКЦИЯ 29

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Функция $\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$ является решением уравнения Лапласа, зависящим от параметров ξ, η, ζ. Интегралы от этой функции по параметрам называются потенциалами и имеют существенное значение с точки зрения непосредственных приложений к физике, а также и с точки зрения развития методов решения краевых задач.

Объёмный потенциал

Пусть в некоторой точке $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ помещена масса m_0. По закону всемирного тяготения на массу m, помещенную в точке M(x,y,z), действует сила притяжения

$$\mathbf{F}=-\gamma\frac{mm_0}{r^2}\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}=\mathbf{r}/r$ - единичный вектор в направлении $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}$, а γ – гравитационная постоянная. Выбирая систему единиц так, чтобы $\gamma=1$, и полагая m=1, получим

$$\mathbf{F}=-\frac{m_0}{r^2}\mathbf{l}.$$

Проекции этой силы на координатные оси будут равны

$$X=F\cos\alpha=-\frac{m_0}{r^3}(x-\xi),\ Y=F\cos\beta=-\frac{m_0}{r^3}(y-\eta),\ Z=F\cos\gamma=-\frac{m_0}{r^3}(z-\zeta), \quad (1)$$

где α, β и γ – углы, образованные вектором **F** с координатными осями.

Введём функцию u, называемую потенциалом силового поля и определяемую равенством

$$\mathbf{F}=\operatorname{grad}u,$$

или

$$X=\frac{\partial u}{\partial x},\ Y=\frac{\partial u}{\partial y},\ Z=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

В нашем случае

$$u=\frac{m_0}{r}.$$

Потенциал поля n материальных точек вследствие принципа суперпозиции силовых полей будет выражаться формулой

$$u=\sum_{i=1}^{n}u_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}.$$

Перейдём к случаю непрерывного распределения массы. Пусть дано тело Ω с плотностью $\rho(\xi,\eta,\zeta)$. Определим потенциал этого тела в точке $M(x,y,z)$. Для этого разобьём тело Ω на достаточно мелкие части $\Delta\omega$. Сделаем естественное предположение, что действие элемента $\Delta\omega$ эквивалентно действию его массы, сосредоточенной в некоторой «средней» точке объёма $\Delta\omega$. Для компонента силы, действующей на точку M, получим, в соответствии с (1), выражение

$$\Delta X=-\frac{\rho\Delta\omega}{r^3}(x-\xi).$$

Интегрирование по всему объёму Ω даёт компоненту полной силы притяжения точки M телом Ω:

$$X=-\iiint_{\Omega}\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\omega,\ d\omega=dxdydz.$$

Потенциал в точке M будет определяться формулой

$$u(M)=\iiint_{\Omega}\rho\frac{1}{r}d\omega\,. \tag{2}$$

Потенциал u вне тела Ω удовлетворяет уравнению Лапласа. Если точка M лежит внутри области Ω, то нельзя утверждать, что $X=\partial u/\partial x$ без дополнительного исследования.

Правая часть равенства (2) называется **объёмным потенциалом**.

Аналогичную формулу получим для потенциала поля заряда, распределенного по объёму Ω и имеющего объёмную плотность ρ.

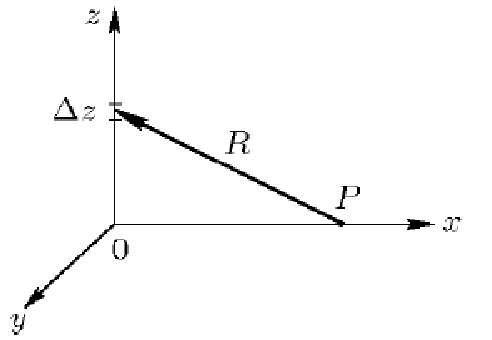
Логарифмический потенциал

Рассмотрим распределение масс в пространстве, зависящее только от двух координат (x,y). В любой плоскости z=const потенциал принимает одно и то же значение. Поэтому достаточно исследовать потенциал точки, лежащей в плоскости z=0.

Определим потенциал однородной бесконечной прямой l. Направим ось z вдоль этой прямой. Пусть погонная плотность (масса единицы длины) равна μ. Сила притяжения элементом Δz точки $P(x,0)$ и её составляющая по оси x равны, соответственно,

$$\Delta F=-\frac{\mu\Delta z}{r^2}=-\frac{\mu\Delta z}{\left(x^2+z^2\right)}\quad,$$

$$\Delta X=\Delta F\cos\alpha=-\frac{\mu\Delta z x}{\sqrt{\left(x^2+z^2\right)^3}}\,.$$



Отсюда

$$X=-\int_{-\infty}^{\infty}\mu x\frac{dz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}=-\mu x^2\frac{1}{x^3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha=-\frac{2\mu}{x},\quad \frac{z}{x}=\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Если $P(x,y)$ – произвольная точка, то сила притяжения точки линией l будет направлена вдоль $\overrightarrow{OP}$ и равна по величине

$$F=-\frac{2\mu}{\rho},\ \text{где}\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Потенциал этой силы называется **логарифмически потенциалом** и равен

$$V=2\mu\ln\frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Логарифмический потенциал является решением уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными, обладающим круговой симметрией вокруг полюса в точке ρ=0, в которой он обращается в бесконечность.

Таким образом, потенциал однородной прямой даёт плоское поле и выражается формулой (3).

Компоненты силы притяжения точки P

$$X=F\cos\alpha=-2\mu\frac{x}{\rho^2},\quad Y=F\sin\alpha=-2\mu\frac{y}{\rho^2},\ \text{где}\ \cos\alpha=\frac{x}{\rho},\ \sin\alpha=\frac{y}{\rho}.$$

Если имеется несколько точек (бесконечных прямых с распределенной вдоль них массой), то в силу принципа суперпозиции силовых полей потенциалы точек (линий) будут складываться.

В случае области S с непрерывно распределённой плотностью μ компоненты силы притяжения точки P выразятся двойными интегралами

$$X = -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\xi d\eta\,,\ Y = -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}d\xi d\eta$$

и потенциал будет равен

$$u(x,y) = 2\iint_S \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\xi d\eta\,.$$

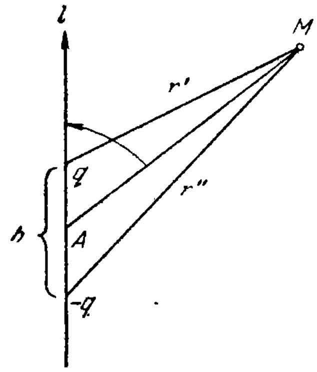
Поверхностные потенциалы

Предположим, заряд распределен по поверхности S с поверхностной плотностью ρ. Тогда потенциал, создаваемый этим зарядом, равен

$$u(M) = \iint_S \frac{\rho}{r}d\gamma\,, \qquad (4)$$

где r – расстояние от точки M до переменной точки поверхности S.

Правая часть (3) называется **потенциалом простого слоя**.



Пусть два заряда, q и $-q$, находясь на оси l на расстоянии h, стремятся к точке A, причём направление от $-q$ к q всегда совпадает с положительным направлением оси l. Тогда потенциал в любой точке, кроме A, является разностью двух величин, стремящихся стать равными друг другу, поэтому этот потенциал стремится к нулю. Если же в процессе движения q меняется так, что $gh=p=\text{const}$, то предел потенциала равен

$$u(M) = \lim_{h\to 0} q\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right) = p\frac{\partial}{\partial l}\frac{1}{r} = p\frac{\cos\left(\overrightarrow{AM},\mathbf{l}\right)}{r^2}.$$

Предельное расположение зарядов называется диполем, величина p – моментом, а ось l – осью этого диполя. При помощи точечных зарядов диполь может быть осуществлен лишь приближенно (два больших заряда на малом расстоянии друг от друга).

Пусть теперь дана ориентированная поверхность S. Пусть на S распределен диполь с плотностью момента μ, причём в каждой точке направление оси диполя совпадает с направлением внутренней нормали к S в этой точке. Тогда потенциал, создаваемый этим диполем, равен

$$w(M) = \iint_S \mu(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{PM},\nu\right)}{r^2}d\gamma\,, \qquad (5)$$

где ν – внутренняя нормаль к S.

Этот интеграл называется **потенциалом двойного слоя**, так как рассматриваемое распределение диполя может быть приближено осуществлено как два наложенных на поверхность S распределения зарядов с плотностью μ/h и $-\mu/h$ на расстоянии h (по нормали к S) друг от друга, если это расстояние достаточно мало. Если считать, что вектор

r направлен от точки M к точке $\underline{P}$ и взять внешнюю нормаль к поверхности S, то потенциал двойного слоя можно записать в виде

$$w(M) = -\iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} d\gamma = \iint_S \mu(P) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\gamma ,$$

где φ – угол между вектором **r**, направленным от M к P, и вектором ν внешней нормали.

Потенциалы простого и двойного слоя в случае двух независимых переменных имеют вид

$$u(M) = \int_C \rho(P) \ln\frac{1}{r} ds, \tag{6}$$

$$w(M) = -\int_C \mu(P) \frac{d}{d\nu}\left(\ln\frac{1}{r}\right) ds = \int_C \mu(P) \frac{\cos\varphi}{r} ds, \tag{7}$$

где C – некоторая кривая, ρ – линейная плотность простого слоя, μ - плотность момента линейного двойного слоя, ν - единичный вектор внешней нормали к С, φ - угол между внутренней нормалью к С и направлением на фиксированную точку, $r = |MP|$.

Если точка наблюдения M находится вне поверхности S, то подынтегральные функции и их производные по x, y, z любого порядка в формулах (4), (5) непрерывны по переменным x, y, z. Поэтому в точках, лежащих вне поверхности, производные поверхностных потенциалов можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Отсюда следует, что поверхностные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа всюду вне поверхности S. Функции (6) и (7) удовлетворяют уравнению Лапласа с двумя независимыми переменными.

Несобственные интегралы

Вспомним понятие несобственного кратного интеграла.

Пусть в области Ω задана функция F, обращающаяся в бесконечность в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Обозначим через K_ε некоторую окрестность точки M_0, диаметр которой не превосходит ε. Тогда в обычном смысле определены интегралы от функции F по области $\Omega \setminus K_\varepsilon$.

Возьмём последовательность $\varepsilon_n > 0$, стремящуюся к 0, и рассмотрим последовательность интегралов

$$I_n = \iiint_{\Omega \setminus K_{\varepsilon n}} F dx dy dz .$$

Если эта последовательность имеет предел при $n \to \infty$, не зависящий от выбора K_{ε_n}, то этот предел называется несобственным интегралом от функции F по области Ω и обозначается

$$I = \iiint_\Omega F dx dy dz .$$

Говорят при этом также, что несобственный интеграл сходится.

Если подынтегральная функция неотрицательна, для сходимости несобственного интеграла достаточно, чтобы существовал предел последовательности I_n хотя бы при одной последовательности окрестностей, стягивающихся к точке M_0.

В самом деле, пусть K_{η_n} и K_{μ_n} - шары радиусов η_n и μ_n с центром в M_0 такие, что

$$K_{\eta_n} \subset K_{\varepsilon_n} \subset K_{\mu_n}, \ \mu_n \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Тогда

$$\iiint_{\Omega \setminus K_{\mu n}} F dx dy dz \le I_n = \iiint_{\Omega \setminus K_{\varepsilon n}} F dx dy dz \le \iiint_{\Omega \setminus K_{\eta n}} F dx dy dz$$

и последовательность I_n сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность интегралов, в которой в качестве окрестностей выбираются шары с центром в M_0.

В общем случае для сходимости несобственного интеграла $\iiint\limits_{\Omega} F dxdydz$ достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная функция G, для которой сходится интеграл $\iiint\limits_{\Omega} G dxdydz$ и $|F| \le G$ в области Ω.

Рассмотрим сходимость интегралов типа

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{C}{r^{\alpha}} dxdydz \ , \tag{8}$$

где C и $\alpha>0$ – некоторые постоянные, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Без ограничения общности можно считать, что $C=1$, а Ω – шар радиуса R с центром в точке M_0. В качестве областей K_{ε_n} возьмём шары радиуса ε_n с центром в точке M_0. Тогда, переходя к сферическим координатам, получаем

$$I_n = \iiint\limits_{\Omega \setminus K_{\varepsilon n}} \frac{dxdydz}{r^{\alpha}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} = 2\pi \cdot 2 \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} ,$$

$$I_n = \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \Big|_{\varepsilon_n}^{R} \text{, если } \alpha \ne 3 \text{, } I_n = 4\pi \ln r \Big|_{\varepsilon_n}^{R} \text{, если } \alpha = 3 .$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_n \to 0$ делаем вывод, что интеграл сходится при $\alpha < 3$, а при $\alpha \ge 3$ предела последовательности I_n не существует.

Используя признак сходимости несобственного интеграла, получаем, что если для некоторой функции $F(M,P)$, где $P(x,y,z)$, обращающейся в бесконечность при $P=M$, имеет место неравенство

$$|F(M,P)| < \frac{C}{r_{MP}^{\alpha}} ,\ \alpha<3,\ C<\infty,$$

то несобственный интеграл по области Ω, содержащей точку M,

$$\iiint\limits_{\Omega} F(M,P) dxdydz ,$$

сходится.

Аналогично можно рассмотреть интеграл типа (8) при другом количестве независимых переменных. Например, для $\Omega \subset R^2$ интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{C}{r^{\alpha}} dxdy$$

сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \ge 2$.

Пусть $F(P,M)$ – функция, обращающаяся в бесконечность при совпадении аргументов и непрерывная по M, $f(P)$ – ограниченная функция.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$V(M) = \int\limits_{\Omega} F(P,M) f(P) d\omega_P \ . \tag{9}$$

Интеграл (6) называется равномерно сходящимся в точке M_0, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что справедливо неравенство

$$|V_{\delta}(M)| = \left| \int\limits_{\Omega_{\delta}} F(P,M) f(P) d\omega_P \right| \le \varepsilon \tag{10}$$

для любой точки M, расстояние которой от M_0 меньше δ, и для любой области Ω_{δ}, содержащей точку M_0 и имеющей диаметр, не превосходящий δ.

Если интеграл равномерно сходится в точке M_0, то функция $V(M)$ непрерывна в точке M_0.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm