Разберем задачу по теме «Оптимальное управление»

1 . Найти область управляемости и осуществить синтез оптимальных управлений в задаче о быстрейшем попадании в начало координат для линейной системы

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = u(t),$$

где $-1 \le u(t) \le 1$ в случае, если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

Т.е. требуется перевести систему из начального состояния x^0 в конечное состояние x^1 так, чтобы заданный функционал

$$I = \int_0^T 1\, dt$$

принимал наименьшее значение.

Если сказать более простыми словами (т.к. у нас слишком короткий раздел «оптимальное управление»), надо показать ***графически****, т.е. на фазовом портрете, самый короткий путь в «ноль» и установить область – множество точек, из которых можно попасть в ноль. Кроме того, мы должны показать, что выполняются необходимые условия оптимальности в форме принципа* ***максимума Понтрягина***

Отметим, что характеристическое уравнение для однородного линейного ДУ имеет вид:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$$

и при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ имеем $k < 0, h$ может иметь любой знак.

Сведем ДУ к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy - kx + u \end{cases} \tag{1}$$

Будем строить Гамильтониан $H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2)$, где $\psi_0, \psi_1, \psi_2 -$ сопряженные переменные, причем $\psi_0 - const$.

Составим функцию Гамильтона:

$$H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2) = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 \cdot y + \psi_2 \cdot (-2hy - kx + u) \tag{2}$$

Система, которая описывает динамику сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = k\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 + 2h \cdot \psi_2 \end{cases}$$

(3)

Мы предполагаем, что оптимальное управление существует. Поэтому рассмотрим необходимые условия оптимальности в форме принципа **максимума Понтрягина,** которые имеют вид:

Для оптимальности в смысле минимума функционала I процесса

$$u^*(t), x^*(t), t_0 \le t \le t_1$$

необходимо существование нетривиального набора

$$\left(\psi_0^*, \psi^*(t)\right),$$

состоящего из константы $\psi_0^* \le 0$ и решения $\psi^*(t), t_0 \le t \le t_1$

сопряженной системы, что для любого t, при котором $u^*(t)$ непрерывно, выполняется условие максимума:

$$H\left(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)\right) = \max\{H(x^*(t), \psi^*(t), u) : u \in V\} \equiv 0, t_0 \le t \le t_1$$

причем, если $f_0 > 0,$ то $\psi_0^* \le 0$

В нашей задаче $f_0 = 1$

Равенство нулю функции Гамильтона можно проверять при одном из значений $t,$ например, при $t = t_1$

Рассмотрим применение принципа максимума Понтрягина к данной задаче.

$$\max_u H\ (x^*, y^*, \psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, u\ ) = \ H\ (x^*, y^*, \psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, u^*\ );$$

$$\mathrm{Max}_{|u| \le 1} H =$$

$$\max_{|u|\le 1}\left(\psi_0^* + \psi_1^* y + \psi_2^*(-2hy - kx + u^*)\right) =$$

$$\psi_0^* + \psi_1^* y^* + \psi_2^*(-2hy^* - kx^*) + \max_{|u|\le 1}(\psi_2^* u);$$

Пусть $\exists\ t^*, \psi_2^*(t^*) > 0$

$\max_{|u|\le 1}(\psi_2^* u) = \psi_2^* \cdot \max_{|u|\le 1} u = \max_{u=1} \psi_2^* \cdot u^* = \psi_2^*; (u^* = 1)$

Пусть $\exists\ t^{**}, \psi_2^*(t^{**}) < 0$

$$\max_{|u|\le 1}(\psi_2^* u) = \psi_2^* \cdot \max_{|u|\le 1} u = \max_{u=-1} \psi_2^* \cdot u^* = -\psi_2^*; (u^* = -1)$$

$$\nexists\ (t_1, t_2): \psi_2^*(t) \equiv 0, t \in (t_1, t_2)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix};$$

Т. о. ψ^* обращается в ноль только при нулевых начальных условиях. Тогда мы имеем вырожденную задачу.

Итак

$$u^* = \begin{cases} 1, \psi_2^* > 0 \\ -1, \psi_2^* < 0 \end{cases} = sign\, \psi_2^*$$

Возникает вопрос, как часто ψ_2 изменяет знак?

Для этого изучим систему (3).

Систему (3) можно свести к ДУ:

$$\frac{d\psi_2}{d\psi_1} = \frac{-\psi_1 + 2h \cdot \psi_2}{k \cdot \psi_2}$$

Состояние равновесия системы $\psi_1 = \psi_2 = 0$.

Составим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & k \\ -1 & 2h - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2h) + k = 0$$

Т.к. $k < 0$, корни характеристического уравнения имеют разные знаки. Состояние равновесия $\psi_1 = \psi_2 = 0$ – седло.

Угловые коэффициенты сепаратрис седла $\psi_2 = \mu\psi_1$ находятся из уравнения :

$$\mu = \frac{-\psi_1 + 2h \cdot \mu \cdot \psi_1}{k \cdot \mu \cdot \psi_1} \to k\mu^2 - 2h\mu + 1 = 0 \to \mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{1}{k} -$$

Угловые коэффициенты сепаратрис седла имеют разные знаки.

Нарисуйте самостоятельно «несложный» фазовый портрет системы (3) и убедитесь, что ψ_2изменяет знак не более одного раза.

Вернемся к системе (1)

Построим фазовый портрет при $u = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy - kx + 1 \end{cases}$$

(4)

Система имеет одно состояние равновесия $x = \frac{1}{k}, y = 0$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -k & -2h-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2h+\lambda) + k = \lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$$

$$D = h^2 - k > 0, k < 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 - \text{действительные, разных знаков, т. к.}\, k < 0$$

Состояние равновесия $\left(\frac{1}{k}, 0\right) - \text{седло}$

Построим фазовый портрет системы при $u = -1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2hy - kx - 1 \end{cases}$$

(5)

Система имеет одно состояние равновесия $x = -\frac{1}{k}, y = 0$

Характеристическое уравнение такое же, как в предыдущем случае:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -k & -2h-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2h+\lambda) + k = \lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$$

$$D = h^2 - k > 0, k < 0$$

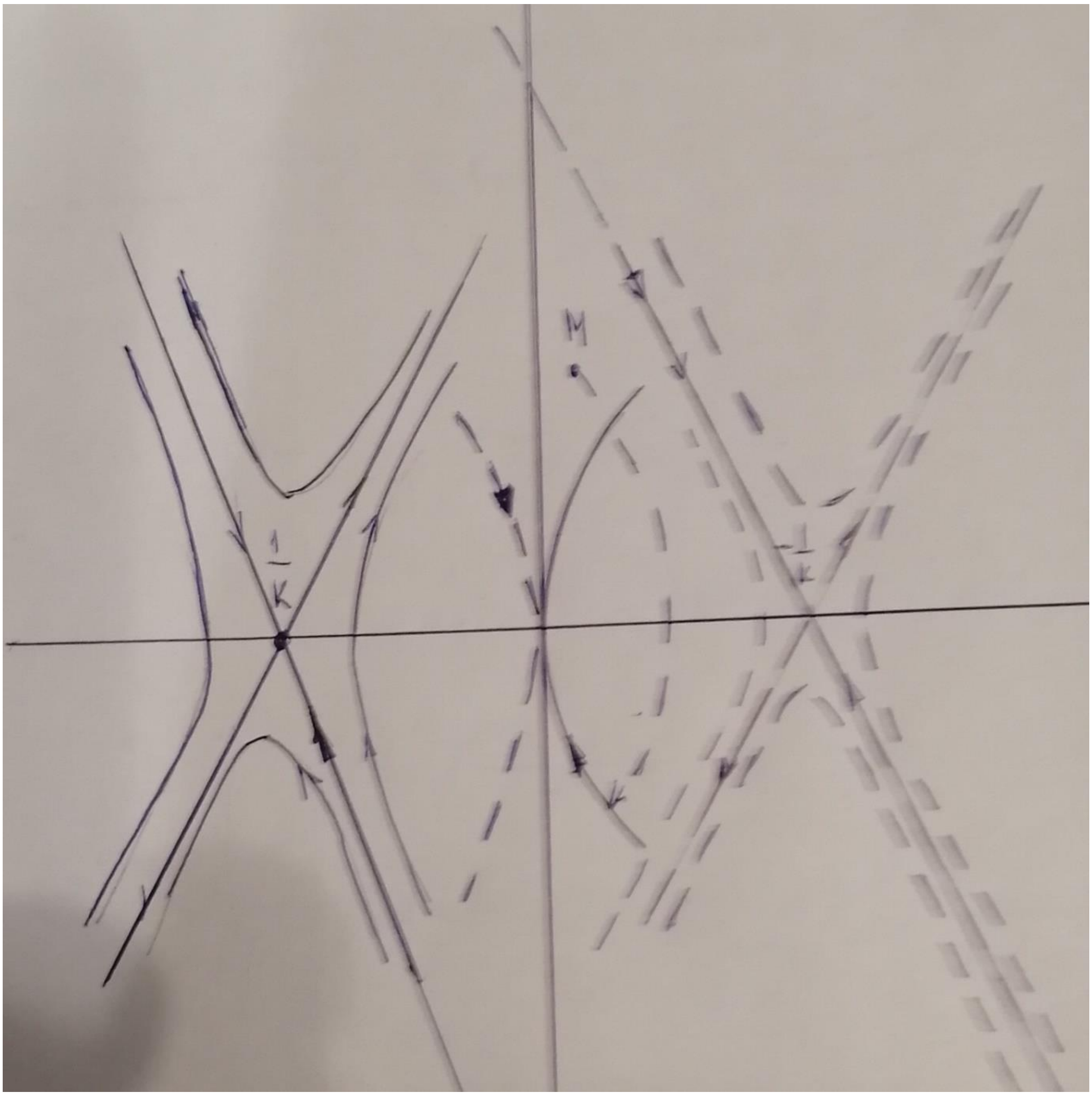
$$\lambda_1, \lambda_2 - \text{действительные, разных знаков, т. к.}\, k < 0$$

Состояние равновесия $\left(-\frac{1}{k}, 0\right) - \text{седло}$

Теперь соединим на одном рисунке фазовые траектории систем (4) и (5). Сплошные линии – траектории (4)

Пунктиры – траектории (5)

Видим, что из точки М за одно переключение «приходим» в ноль.



Итак, видим, что существуют фазовые траектории, по которым можно «попасть» в ноль по этой траектории «без переключения».

Также найдите «способ» попасть в ноль с одним переключением с фазовой траектории, соответствующей $u = 1$, на фазовую траекторию, соответствующую $u = -1$. Также можно попасть в ноль с одним переключением с фазовой траектории, соответствующей $u = -1$, на фазовую траекторию, соответствующую $u = 1$. Нарисуйте эти траектории. Убедитесь также графически, что областью управляемости будет «полоса» между устойчивыми сепаратрисами.