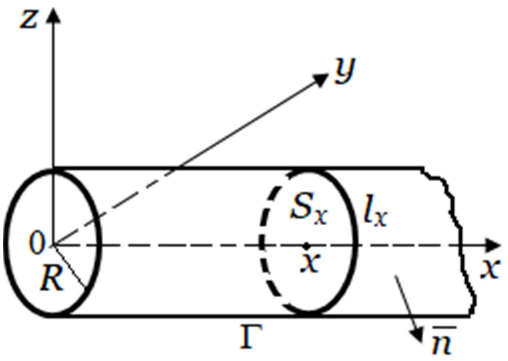
Лекция 22

Уравнение теплопроводности в стержне

Пусть $\Omega = S \times \mathbf{R}$ – круговой цилиндр в пространстве переменных $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, S – круг радиуса R, $S = \{(y, z) \in \mathbf{R}^2 : y^2 + z^2 \le R^2$; l – окружность радиуса R (граница круга S); Г – боковая поверхность цилиндра Ω, $\Gamma = l \times \mathbf{R}$, в каждой точке которой определен единичный вектор нормали $\vec{n}$. Через S_x обозначается круговое сечение цилиндра Ω, проходящее через точку $(x, 0, 0)$; l_x – граница этого сечения.



Предположим, что цилиндр Ω заполнен однородным материалом с постоянными физическими характеристиками, т.е. величины ρ, c, k в уравнении теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t) \quad (1)$$

заданные положительные постоянные. Проинтегрируем уравнение (1) по круговому сечению

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_x} u(x, y, z, t)\,dydz = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_{S_x} u(x, y, z, t)\,dydz + k \iint_{S_x} \left[\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] dydz + \iint_{S_x} F(x, y, z, t)\,dydz. \quad (2)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \iint_{S_x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] dydz,$$

применяя к которому теорему Гаусса–Остроградского (в двумерной области переменных (y, z)), получим

$$I = \iint_{S_x} \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \right] dydz = \int_{l_x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot n_3 \right) dl = \int_{l_x} \frac{\partial u}{\partial n} dl, \quad (3)$$

где, как и ранее, $\vec{n}\{n_1, n_2, n_3\}$; n_1, n_2, n_3 – координаты вектора нормали $\vec{n}$ (его направляющие косинусы), $n_1 = \cos(nx), n_2 = \cos(ny), n_3 = \cos(nz)$; dl – элемент длины окружности l_x.

Обозначим через $U(x,t)$ среднее (среднее арифметическое) значение температуры в сечении S_x, а через $G(x,t)$ – среднее арифметическое источников тепловыделения в этом сечении

$$U(x,t) = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{S_x} u(x,y,z,t)dydz\,, \tag{4}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{S_x} F(x,y,z,t)dydz\,. \tag{5}$$

Тогда уравнение (2) с учетом (3)–(5) запишется в виде

$$c\rho\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{k}{\pi R}\int\limits_{l_x}\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}dl = G(x,t)\,. \tag{6}$$

Рассмотрим два варианта граничных условий на боковой поверхности Г цилиндра Ω.

Пусть на Г выполняются условия Неймана

$$k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n} + q_\Gamma(x,y,z,t) = 0\,. \tag{7}$$

Тогда

$$\int\limits_{l_x} k\frac{\partial u}{\partial n}dl + \int\limits_{l_x} q_\Gamma dl = 0\,,$$

или

$$\int\limits_{l_x} k\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma = -2\pi R Q_\Gamma(x,t)\,, \tag{8}$$

где $Q_\Gamma(x,t)$ – усредненный поток тепла, выходящего из Ω,

$$Q_\Gamma(x,t) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{l_x} q_\Gamma(x,y,z,t)dl\,. \tag{9}$$

Считая функцию $Q_\Gamma(x,t)$ известной, получим из (7)–(9) для средней по сечению S_x температуры $U(x,t)$

$$c\rho\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{2}{R}Q_\Gamma(x,t) + G(x,t)\,. \tag{10}$$

В частном случае, когда боковая поверхность Г стержня Ω теплоизолирована, можно считать, что $Q_\Gamma = 0$ и уравнение (10) запишется в виде

$$c\rho\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = G(x,t)\,, \tag{11}$$

или

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)\,, \tag{12}$$

где $a^2 = k/c\rho,\ f = G/c\rho$.

Пусть на Г выполняются условия Ньютона

$$k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}+h\big(u(x,y,z,t)-T_{\Gamma}(x,y,z,t)\big)=0\,. \qquad (13)$$

Тогда

$$\int\limits_{l_x} k\frac{\partial u}{\partial n}dl=-h\int\limits_{l_x} udl+h\int\limits_{l_x} T_{\Gamma}dl \qquad (14)$$

Считая стержень достаточно тонким, предположим, что средняя температура по сечению S_x совпадает со средней температурой по его границе l_x, т.е.

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{l_x} udl=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{S_x} udydz=U(x,t)\,, \qquad (15)$$

и что средняя температура окружающей среды по l_x равна

$$T(x,t)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{l_x} T_{\Gamma}dl\,; \qquad (16)$$

тогда получим из (6), (14)–(16) уравнение для средней по сечению S_x температуры $U(x,t)$

$$c\rho\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}-k\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}+\frac{2h}{R}\big(U(x,t)-T(x,t)\big)=G(x,t)\,, \qquad (17)$$

или

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}+\alpha\big(U(x,t)-T(x,t)\big)=f(x,t)\,, \qquad (18)$$

где $a^2=k/c\rho, \alpha=2h/c\rho R$, $f=G/c\rho$. Таким образом, если в формулировке задачи говорится, что боковая поверхность стрежня совершает конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру $T(x,t)$, то вместо уравнения (12) следует записывать уравнение (18), считая при этом заданными величину $\alpha>0$ и функцию T.

Отметим, что уравнение (18) формально обобщает уравнение (12) и (12) можно рассматривать как частный случай (18) при $\alpha=0$.

Постановка основных задач для уравнения теплопроводности в стержне

<u>Задача Коши</u> (начальная задача). В этой задаче решение уравнения теплопроводности в стержне (12) (или (18)) ищется в области $x\in\mathbf{R}, t>0$, при этом уравнение теплопроводности дополняется начальными условиями

$$u(x,t)\,|_{t=0}=\varphi(x),\ \ x\in\mathbf{R}\,, \qquad (19)$$

где φ – заданная функция на числовой прямой **R**.

<u>Задача Дирихле</u> (смешанная задача с граничными условиями I рода (условиями Дирихле). В этой задаче решение уравнения теплопроводности в стержне (12) (или (18)) ищется в области $x\in[0,L], t>0$, при этом уравнение теплопроводности дополняется начальными

$$U(x,t)\,|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in[0,L] \qquad (20)$$

и граничными условиями

$$U(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t),\ t \ge 0\,, \qquad (21)$$

$$U(x,t)|_{L=0} = \mu_L(t),\ t \ge 0\,, \qquad (22)$$

μ_0, μ_L – заданные функции в своих областях определения.

Задача Неймана (смешанная задача с граничными условиями II рода (условиями Неймана)). В этой задаче решение уравнения (12) (или (18)) ищется в области $x \in [0, L], t > 0$, при этом уравнение дополняется начальными условиями (20) и граничными условиями

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} - q_0(t) = 0\,, \qquad (23)$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} - q_L(t) = 0\,, \qquad (24)$$

q_0, q_L – заданные функции при $t \ge 0$, имеющие смысл потока тепла, выходящего из стержня через его торцевые границы (сравните условия (23), (24) с (7)).

Задача Ньютона (смешанная задача с граничными условиями третьего рода (условиями Ньютона, или условиями конвективного теплообмена). В этой задача решение уравнения (12) (или (18)) ищется в области $x \in [0, L], t > 0$, при этом уравнение дополняется начальными условиями (20) и граничными условиями

$$\left.\left[k\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - h_0 U(x,t)\right]\right|_{x=0} = q_0 T_0(t)\,, \qquad (25)$$

$$\left.\left[k\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - h_L U(x,t)\right]\right|_{x=L} = q_L T_L(t)\,, \qquad (26)$$

где h_0, h_L – заданные положительные постоянные, T_0, T_L – заданные функции, имеющие смысл температуры окружающей среды на соответствующих торцах стержня (сравните с условиями (13)).

Задачи с граничными условиями смешанного типа. В этих задачах на левом конце стержня ($x = 0$) выполняется любое из предложенных трех типовых граничных условий, а на правом конце ($x = L$) – любое граничное условия другого типа. Всего возможно поставить девять вариантов задач для уравнения (12) (или (18)), комбинируя возможные граничные условия на левом конце стержня (21), (23), (25) с граничными условиями на правом конце (22), (24), (26).

Список литературы

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.