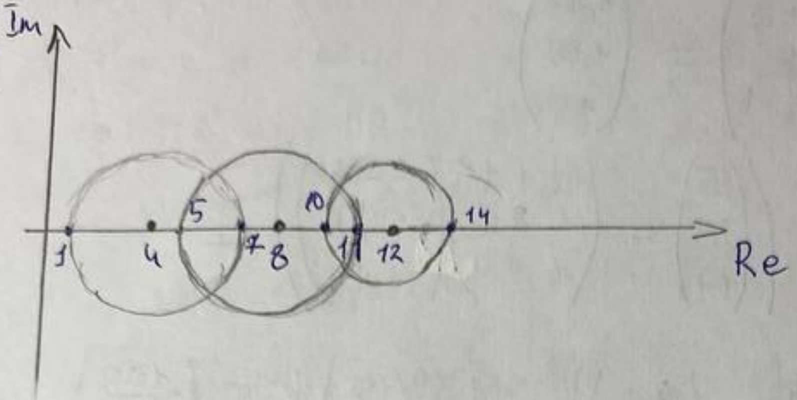
Модуль 11 Вариант 5 Киселева Кс.

3821Б1ПМоп2

Задание 1

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1)



$A = A^T \Rightarrow$ с.ч. действительны $\Rightarrow$ лежат они на оси Re на отрезке $[1, 14]$; $(0,0) \notin$ кругам $\Rightarrow |A| \neq 0$

Все с.ч. > 0

$A = A^T$, с.ч. $> 0 \Rightarrow A$ - положительно определена $\Rightarrow \forall h \neq 0 \ (h \in \mathbb{R}^n)$

$(Ah; h) > 0$

$$\left. \begin{aligned} & 1 \le \|A\|_2 \le 14 \\ & \mu_A = \frac{14}{1} = 14 \\ & \mu_A = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{14}{14} \le \|A^{-1}\|_2 \le \frac{14}{1} \qquad 1 \le \|A^{-1}\| \le 14$$

2) Метод простой итерации

$$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau} + A x^{(s)} = b, \quad s = 0, 1, \dots$$

τ - постоянный параметр метода

$$\tau^*_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \qquad \tau^*_{opt} \sim = \frac{2}{1+14} = \frac{2}{15}$$

3) 1. $x^{(1)} = x^{(0)} + \tau^*_{opt}(b - Ax^{(0)}) = x^{(0)} - \tau \cdot r^{(0)}$

$r^{(0)} = Ax^{(0)} - b$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\left(\begin{pmatrix}15\\13\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12 & 1 & 1\\1 & 8 & 2\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\left(\begin{pmatrix}15\\13\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}13\\3\\5\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\begin{pmatrix}2\\10\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{4}{15}\\ \frac{4}{3}\\ \frac{4}{5}+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,2(6)\\1,(3)\\1,8\end{pmatrix}$$

2.

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix}1,2(6)\\1,(3)\\1,8\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\left(\begin{pmatrix}15\\13\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12 & 1 & 1\\1 & 8 & 2\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,2(6)\\1,(3)\\1,8\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}19/15\\4/3\\9/5\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\left(\begin{pmatrix}15\\13\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}55/3\\233/15\\167/15\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}19/15\\4/3\\9/5\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\begin{pmatrix}-3\frac{1}{3}\\-2\frac{8}{15}\\-\frac{2}{15}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}19/15\\4/3\\9/5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4/9\\-76/255\\-4/225\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}37/45\\224/225\\1\frac{176}{225}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8(2)\\0,995559\\1,48(2)\end{pmatrix}$$

4) $r^{(1)} = \begin{pmatrix}-2\\-10\\-6\end{pmatrix}$ $\|r^{(1)}\|_\infty = 10$

$\varepsilon_1 = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 0,8$

$r^{(2)} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{3}\\2\frac{8}{15}\\\frac{2}{15}\end{pmatrix}$ $\|r^{(2)}\|_\infty = 3,(3)$

$\varepsilon_2 = \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = 0,(4)$

5) 1. по тек. невязке

$$\|z^{(2)}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|r^{(2)}\|_2$$

$$\|r^{(2)}\|_2 \approx 0,558517$$

$$\|z^{(2)}\|_2 \le 14 \cdot 0,558517 \approx 7,819238$$

2. По т. о сх-ти

а) $\|z^{(0)}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|r^{(0)}\|_2$

$$\|r^{(0)}\|_2 = 11,83216$$

$$\|z^{(0)}\|_2 \le 11,83216 \cdot 14 = 165,65023$$

б) $\|z^{(2)}\| \le \left(\frac{14-1}{14+5}\right)^2 \|z^{(0)}\|_2$

$$\|z^{(2)}\| \le 124,42172$$

6) s - ?

0,0001 - требуемая точность

$\|z^{(s)}\|_2 \le \left(\frac{13}{15}\right)^s \|z^{(0)}\|_2 \le 0,0001 \Rightarrow$

$$s \ge 101$$

Задание 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $\cdot\ x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 h^{(0)}$

$$h^{(0)} = -r^{(0)} = Ax^{(0)} - b = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = -\frac{(Ax^{(0)} - b; h^{(0)})}{(Ah^{(0)}; h^{0})} = -\frac{81+1}{37\cdot 9 + 19} = -0{,}2528409$$

$$Ah^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36-1 \\ -9-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}25284(09)\begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}27556(81) \\ -0{,}74715(90) \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 h^{(1)}$$

$$r^{(1)} = Ax^{(1)} - b \qquad r^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2{,}27556(81) \\ -0{,}74715(90) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} =$$

$$h^{(1)} = -r^{(1)} + \beta h^{(0)} \qquad = \begin{pmatrix} -18{,}8494314 \\ -21{,}7471581 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{(Ah^{(0)}; r^{(1)})}{(Ah^{(0)}; h^{(0)})}$$

$$\beta_1 = \frac{37\cdot 18{,}8494314 + 19\cdot 21{,}7471581}{37\cdot 9 + 19\cdot 1} \approx 3{,}15518$$

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 18{,}8494314 \\ 21{,}7471581 \end{pmatrix} + 3{,}15518\begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9{,}5471886 \\ 18{,}5919781 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = -\frac{(Ax^{(1)} - b; h^{(1)})}{(Ah^{(1)}, h^{(1)})} = -\frac{18{,}8494314\cdot 9{,}5471886 - 21{,}7471581\cdot 18{,}5919781}{19{,}5967763\cdot 9{,}5471886 + 176{,}3725924\cdot 18{,}5919781} = 0{,}0647318$$

$$Ah^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9{,}5471886 \\ 18{,}5919781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19{,}5967763 \\ 176{,}3725924 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -2{,}2755681 \\ -0{,}7471590 \end{pmatrix} + 0{,}0647318\begin{pmatrix} -9{,}5471886 \\ 18{,}5919781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}893575 \\ 0{,}456333 \end{pmatrix}$$

2) $\|r^{(0)}\|_\infty = 9$

$\|r^{(1)}\|_\infty = 24{,}7471581$

$r^{(2)} = Ax^{(2)} - b = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2{,}893575 \\ 0{,}456333 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20{,}117967 \\ -10{,}330245 \end{pmatrix}$

$\|r^{(2)}\|_\infty = 20{,}117967$

$\varepsilon_1 = \|x^{(1)} - x^{(0)}\| = 2{,}2755681$

$\varepsilon_2 = \|x^{(2)} - x^{(1)}\| = 1{,}203492$

3) $F(x^{(s)} + \alpha_s h^{(s)}) \to \min$

$F(x^{(s)} + \alpha_s h^{(s)}) = F(x^{(s)}) + \alpha_s^2 (Ah^{(s)}; h^{(s)}) + 2\alpha_s (Ax^{(s)} - b; h^{(s)})$

$h^{(0)} \dots h^{(s)}$ взаимно сопряжены относит. A

4) $r^{(0)}, \dots, r^{(s)}$ – взаимно ортогональны

$(r^{(2)}; r^{(1)}) = -20{,}117967 \cdot (-18{,}8494314) - 10{,}330245 \cdot 24{,}7471581 \approx 0$

$(r^{(2)}, r^{(0)}) \approx 0$

Задание 3

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau_s} + Ax^{(s)} = b$$

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} - \tau_s r^{(s)} \qquad r^{(s)} = Ax^{(s)} - b$$

$$\tau_s = \left(\frac{Ar^{(s)}, r^{(s)}}{Ar^{(s)}, Ar^{(s)}}\right)$$

$$x^1 = x^0 - \tau_0 r^{(0)}$$

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$Ar^0 = \begin{pmatrix} -40 \\ -94 \\ -46 \end{pmatrix} \qquad \tau_0 \approx 0,10325$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0,10325\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,54875 \\ -1,34225 \\ -0,13575 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \tau_1 r^{(1)}$$

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5,4875 \\ -0,34225 \\ -0,13575 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81,328 \\ -21,497 \\ -20,715 \end{pmatrix}$$

$$Ar^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -80,328 \\ -21,497 \\ -20,715 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1006,148 \\ -293,734 \\ -206,182 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \frac{1006,148 \cdot 81,328 + 293,734 \cdot 21,497 + 206,182 \cdot 20,715}{1006,148^2 + 293,734^2 + 206,182^2} \approx 0,0809846$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,54875 \\ -1,34225 \\ -0,13575 \end{pmatrix} - 0,0209846 \begin{pmatrix} -81,328 \\ -21,497 \\ -20,715 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,157886 \\ -0,891144 \\ 0,298946 \end{pmatrix}$$

3) $\|r^{(1)}\|_\infty = 81,328$

$\|r^{(0)}\|_\infty = 94$

$\varepsilon_1 = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 1,54875$

$\varepsilon_2 = \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = 1,706636$

4) 1. По тек. невязке

$$r^{(2)} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,157886 \\ -0,891144 \\ 0,298946 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,694566 \\ -18,373374 \\ -10,428618 \end{pmatrix}$$

$\|z^{(2)}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|r^{(2)}\|_2$

$\|z^{(2)}\|_2 \le 14 \cdot 21,1978 = 296,72691$

2. По т. о сх-ти

$$\|z^{(2)}\| \le 14 \left(\frac{14-1}{14+1}\right)^2 \|z^{(0)}\|_2 = 1741,90424$$

$\|z^{(0)}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|r^{0}\|_2 = 14 \cdot 11,832 = 165,65023$

5) $14 \left(\frac{14-1}{14+1}\right)^S \cdot 165,65023 \le 0,0001 \Rightarrow S \ge 119$

6)

	МПИ	МНН
$\|r^{(2)}\|_\infty$	3,(3)	18,373374
$\|z^{(2)}\|_2$	7,819238	296,72691
S	101	119

МПИ сходится быстрее.