Наилучшие приближения
в конечномерных классах гильбертовых пространств
(наилучшие среднеквадратичные приближения)

Задача №2

1) Постройте функцию $\varphi(x)$ – наилучшее приближение функции $f(x) = x^{12}$

в классе **полиномов степени не выше** 2

в метрике гильбертова пространства

интегрируемых с квадратом на отрезке $[0; 1]$ функций

со скалярным произведением

$$(f, g) \quad = \int_0^1 f(x)g(x)dx\,.$$

2) Укажите погрешность найденного наилучшего приближения.

3) Используя on-line сервис или математический пакет, постройте на отрезке $x \in [0; 1]$, указанном в условии задачи, график $f(x) = x^{12}$ и ее наилучшего приближения $\varphi(x)$

(две функции на одном графике).

Решение

О терминах данной задачи

В данной задаче нужно приблизить функцию $f(x) = x^{12}$

выражением вида $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2$

(полиномом степени не выше 2).

Функция $f(x) = x^{12}$ является элементом гильбертова пространства $L_2[0;\ 1]$

интегрируемых с квадратом на отрезке $[0; 1]$ функций

со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2[0;\,1]} = \int_0^1 f(x)g(x)dx\,.$$

Норма любого элемента $f \in L_2[0; 1]$ (из этого пространства) определяется через скалярное произведение:

$$\| f \|_{L_2[0;\,1]} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$$

Расстояние между элементами $f,\ g \in L_2[0;1]$ в этом пространстве определяют через норму разности элементов:

$$\rho(f,g) = \| f - g \|_{L_2[0;\,1]} = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \, dx}$$

Наилучшее приближение необходимо найти в подпространстве, элементами которого являются полиномы степени не выше 2, такие элементы записываются в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2$$

Функции

$$\varphi_0(x) = 1,\ \ \varphi_1(x) = x,\ \ \varphi_2(x) = x^2$$

можно рассматривать как базис подпространства,

а числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ - как коэффициенты при элементах базиса.

Подпространство обозначим K_3, его можно записывать в виде

$$K_3 = \{\, \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 \mid \alpha_i \in R, \quad i = 0, 1, 2 \,\}$$

его размерность равна 3.

Так как каждая из базисных функций $\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2$

является элементом гильбертова пространства $L_2[0;\ 1]$,

любой элемент K_3 (полином степени не выше 2)

также является элементом $L_2[0;\ 1]$.

Подпространство K_3 является подпространством $L_2[0;\ 1]$.

О постановке задачи оптимизации

Наилучшим приближением для $f(x) = x^{12}$ в подпространстве K_3

является такой элемент $\varphi \in K_3$ (такой полином степени не выше 2),

расстояние до которого является минимальным:

$$\rho(f,\varphi) = \| f - \varphi \|_{L_2[0;\,1]} = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - \varphi(x))^2 \, dx} \to \min$$

Для отыскания такого полинома вводится функционал

$$S(\alpha_0,\alpha_1,.\alpha_2)=(f-\varphi, f-\varphi)_{L_2[0;\,1]}=\int\limits_0^1 (f-(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2))^2\,dx$$

и ставится задача минимизации

$$S(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\underset{\alpha\in R^3}{\to}\min$$

Функционал $S(\alpha_0,\alpha_1,.\alpha_2)$ имеет следующий смысл: это квадрат расстояния от элемента $f(x)=x^{12}$ до элемента $\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1\cdot x+\alpha_2\cdot x^2$ по правилам гильбертова пространства $L_2[0;\ 1]$.

Величина $S(\alpha_0,\alpha_1,.\alpha_2)$ **за счет подбора чисел** $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ должна стать **минимальной**.

О решении задачи оптимизации

Для решения задачи оптимизации записывают нормальную систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=0,\ \ i=0,1,2$$

В соответствии с Утверждением 1 (Модуль 14.2, часть II) система записывается в виде СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \int\limits_0^1 dx & \int\limits_0^1 xdx & \int\limits_0^1 x^2dx \\ \int\limits_0^1 xdx & \int\limits_0^1 x^2dx & \int\limits_0^1 x^3dx \\ \int\limits_0^1 x^2dx & \int\limits_0^1 x^3dx & \int\limits_0^1 x^4dx \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int\limits_0^1 x^{12}\cdot 1\cdot dx\\ \int\limits_0^1 x^{12}\cdot x\cdot dx\\ \int\limits_0^1 x^{12}\cdot x^2\cdot dx\end{bmatrix}$$

потому что в соответствии с правилами вычисления скалярных произведений в $L_2[0;\ 1]$

$$(\varphi_0, \varphi_0)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot dx = 1$$

$$(\varphi_0, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 1 \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_0, \varphi_2)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 1 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{3}$$

$$(\varphi_1, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 x \cdot x \cdot dx = \frac{1}{3}$$

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{4}$$

$$(\varphi_2, \varphi_2)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{5}$$

$$(f, \varphi_0)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 x^{12} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{13}$$

$$(f, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 x^{12} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{14}$$

$$(f, \varphi_2)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 x^{12} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{15}$$

В данном случае СЛАУ размерности 3*3 принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{1}{14} \\ \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

Нужно найти решение $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, и эти числа определят для $f(x) = x^{12}$ элемент наилучшего приближения $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2$

в классе полиномов степени не выше 2

в метрике гильбертова пространства $L_2[0;\ 1]$

О погрешности наилучшего приближения

Погрешностью приближения элемента f гильбертова пространства $L_2[0;1]$ элементом φ конечномерного подпространства $K_3 \subset L_2[0;1]$ является элемент $z \in L_2[0;1]$, определяемый как

$$z = f - \varphi$$

Качество приближения характеризуется **нормой погрешности**, то есть значением

$$\| z \|_{L_2[0;1]}$$

которое в данном случае является **корнем квадратным из минимального значения функционала** $S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$:

$$\| z \|_{L_2[0;1]} = \| f - \varphi \|_{L_2[0;1]} = \sqrt{S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}.$$

Если решение СЛАУ найдено, значение функционала $S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ можно найти по формуле

$$S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= (f, f)_{L_2[0;1]} - 2\sum_{i=0}^{2} \alpha_i (f, \varphi_i)_{L_2[0;1]} + \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \alpha_i \cdot \alpha_j \, (\varphi_i, \varphi_j)_{L_2[0;1]}$$

и узнать, велика или мала погрешность.

Смысл **нормы погрешности** в метрике пространства $L_2[0;1]$ таков: **норма погрешности** «отвечает» за абсолютную (без учета знака) **величину площади, заключенной между графиками функции f и наилучшего приближения φ на участке $x \in [0;1]$**.

Если площадь, заключенная между графиками, велика, норма погрешности в метрике пространства $L_2[0;1]$ велика. Если площадь, заключенная между графиками, мала, норма погрешности в метрике пространства $L_2[0;1]$ мала.

«Локальные всплески» (существенные отличия графиков f и φ на небольших участках отрезка $x \in [0;1]$, если такие отличия будут, или в отдельных точках отрезка) в метрике пространства $L_2[0;1]$ «во внимание не принимаются».

При построении графиков f и φ обратите внимание на абсолютную величину площади, заключенной между графиками.