Введение в теорию волновых процессов

В. А. Костин

18 апреля 2023 г.

1. Занятие 11 (на 10 апреля 13:00)

1.1. Дисперсия и дисперсионные соотношения: продолжение

На прошлом занятии мы начали обсуждать дисперсию волн и характеризующие её дисперсионные соотношения. Мы рассмотрели пример цепочки связанных пружинами грузов, динамика смещений этих грузов $\xi_p(t)$ описывается уравнениями

$$\ddot{\xi}_p = \Omega^2\left(\xi_{p+1} - 2\xi_p + \xi_{p-1}\right), \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где Ω — параметр. Мы установили, что общее решение начальной задачи для этой бесконечной системы уравнений является линейной суперпозицией экспонент $\psi_p = e^{-i\omega t + iHp}$ с постоянными коэффициентами, где частота ω и волновое число на цепочке H связаны посредством дисперсионного соотношения

$$\omega^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{H}{2}, \tag{2}$$

причём H пробегает значения в интервале от $-\pi$ до π (с учётом сделанных в конце предыдущей лекции оговорок о точке двукратного вырождения $H = 0, \omega = 0$,— строго говоря, к базису общего решения необходимо также добавить однородное линейно растущее со временем решение t). Так как исходное уравнение было уравнением второго порядка по времени, получившееся дисперсионное соотношение является квадратным уравнением относительно частоты и имеется две ветки дисперсионного соотношения $\omega = \omega_\pm(H)$, а корректная начальная задача требует двух начальных условий: для $\xi_p(0)$ и $\dot{\xi}_p(0)$.

Мы отмечали, что уравнение (1) с помощью замены $x = ap$ можно рассматривать как частный случай уравнения

$$\xi_{tt}(x,t) = \Omega^2[\xi(x+a,t) - 2\xi(x,t) + \xi(x-a,t)]\,. \tag{3}$$

Это уравнение более общее, чем (1), так как x не обязательно является кратным a, где a — расстояние между грузами. Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{ha}{2}, \tag{4}$$

где $h = H/a$ — волновое число. однако общее решение является суперпозицией экспонент $e^{-i\omega t + ihx}$, где h уже пробегает все возможные действительные значение [что как раз и отражает тот факт, что уравнение (3) описывает более общую ситуацию, чем (1)]. Вместо граничных условий при бесконечных x при этом обычно подразумевается условия абсолютной интегрируемости по Лебегу или интегрируемости по Лебегу квадрата модуля для $\xi(x,t)$ по бесконечному интервалу $-\infty < x < \infty$ в любой момент времени.

По сути пара $(H, \pm)$ или $(h, \pm)$ является индексом, нумерующим базисные функции общего решения. В данном случае этот индекс пробегает множество конечной меры в случае уравнения (1) или бесконечной — в случае уравнения (3). Обратим внимание на отличие от линейных систем, состоящих из конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений, где решение было суперпозицией конечного числа экспонент, и множество, которое пробегал индекс было дискретным и конечным и имело нулевую меру. Эти задачи отличаются и от задач для уравнений математической физики на ограниченных интервалах значений x, рассматриваемых в курсе «Уравнения математической физики». В этих задачах дискретный индекс пробегал счётное множество значений, имеющую меру ноль. Континуальное множество индексов возникло в наших задачах из-за неограниченности рассматриваемого интервала значений p или x. В краевых задачах для систем (1) или (3) на ограниченных интервалах p или x базис общего решения будет конечным или счётным соответственно. При этом базисные функции по-прежнему будут экспонентами $e^{-i\omega t+iHp}$ или $e^{-i\omega t+ihx}$ или линейной комбинацией таких экспонент, где частота и волновое число удовлетворяют дисперсионным соотношениям (2) или (4).

Практическое задание 1. Используя сказанное выше определите спектр нормальных частот N связанных пружинами грузов, динамика смещений которых описывается уравнениями

$$\ddot{\xi}_p = \Omega^2\left(\xi_{p+1} - 2\xi_p + \xi_{p-1}\right), \quad p = 1, 2, \dots N,$$
$$\xi_0 \equiv \xi_{N+1} \equiv 0.$$

Эти уравнения соответствует конфигурации, изображённой на рис. 1

Решение. Согласно дисперсионному соотношению (2) одной и той же частоте ω (кроме нулевой) отвечают два значения H, отличающиеся знаком. Поэтому нормальное решение ищем в виде линейной комбинации двух экспонент с двумя волновыми числами, отличающимися знаком, $\xi_p = e^{-i\omega t}(Ae^{iHp} + Be^{-iHp})$, $p = 0, 1, \dots, N$, здесь для определённости $0 < H < \pi$. Удовлетворяя краевым условиям $\xi_0 = \xi_{N+1} = 0$, получаем линейную алгебраическую систему из двух уравнений на A и B,

$$A + B = 0, \quad Ae^{iH(N+1)} + Be^{iH(N+1)} = 0.$$

Условием её разрешимости является равенство детерминанта нулю, $\sin[H(N+1)] = 0$. Отсюда находим N возможных решений для H в интервале $(0, \pi)$, $H_s = \pi s/(N+1)$, $s = 1, 2, \dots N$. Искомые нормальные частоты находятся из дисперсионного соотношения,

$$\omega_s = 2\Omega \sin \frac{\pi s}{2(N+1)}.$$

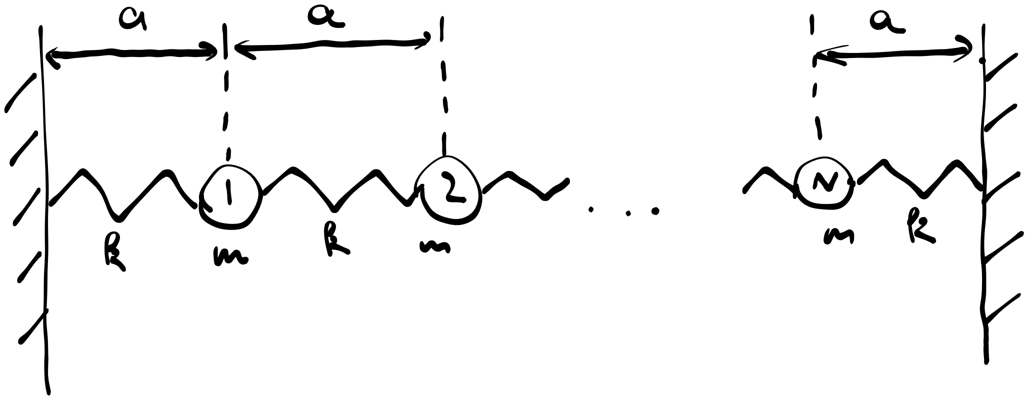

Рис. 1: Иллюстрация к практическому заданию 1: грузы в несмещённых положениях, $\xi_p = 0$.

Отметим, что индекс, нумерующий базисные волны, может быть и многомерным, причём отдельные измерения могут быть дискретными, а другие — континуальными. Собственно рассмотренная задача о цепочке является примером такого случая: индекс — это пара континуальной переменной H и дискретного знака $\pm$, который может принимать два значения. Стоит так же отметить, что в неоднородных задачах на бесконечных интервалах может реализоваться смешанная ситуация, когда базис общего решения состоит из дискретных и континуальных частей.

Рассмотрим теперь общий случай однородного стационарного линейного уравнения $\hat{L}u = 0$ для скалярного волнового поля $u(x,t)$, где $\hat{L}$ — некоторый оператор, коммутирующий с операторами сдвига по времени и координате. Для такого оператора экспоненты $e^{-i\omega t + ihx}$ являются собственными функциями и дисперсионное соотношение $G(\omega, h) = 0$ получается подстановкой $e^{-i\omega t+ihx}$ в уравнение: $G(\omega, h) = e^{i\omega t - ihx}\hat{L}e^{-i\omega t+ihx}$. Уравнение однозначно определяет дисперсионное соотношение. Верно и обратное по дисперсионному соотношению $G(\omega, h) = 0$ можно восстановить уравнение, то есть оператор $\hat{L}$.

Это можно сделать несколькими способами. Наиболее общий основан на том же равенстве $\hat{L}e^{-i\omega t+ihx} = G(\omega, h)e^{-i\omega t+ihx}$, которое однозначно определяет оператор на любой функции $u(x,t)$, квадрат абсолютной величины которой интегрируем по Лебегу. В самом деле с помощью преобразования Фурье любую функцию $u(x,t)$, определённую при всех x и t и с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля, можно представить в виде интеграла по ω и h:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(h,\omega)e^{-i\omega t+ihx}\,dh\,d\omega, \quad \tilde{u}(h,\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\omega t - ihx}\,dx\,dt$$

и

$$\hat{L}u(x,t) = \hat{L}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(h,\omega)e^{-i\omega t+ihx}\,dh\,d\omega =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(h,\omega)\hat{L}e^{-i\omega t+ihx}\,dh\,d\omega =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(h,\omega)G(\omega,h)e^{-i\omega t+ihx}\,dh\,d\omega =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x',t')G(\omega,h)e^{-i\omega(t-t')+ih(x-x')}\,dx'\,dt'\,dh\,d\omega =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x',t')\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega,h)e^{-i\omega(t-t')+ih(x-x')}\,dh\,d\omega\,dx'\,dt'.$$

Таким образом,

$$\hat{L}u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-x',t-t')u(x',t')\,dx'\,dt', \tag{5}$$
$$K(\xi,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega,h)e^{-i\omega\tau+ih\xi}\,dh\,d\omega. \tag{6}$$

Уравнение (5) по сути задаёт общий вид однородного стационарного линейного оператора. При этом интегралы (5) и (6) в общем случае надо понимать в обобщённом смысле и во многих задачах функция $K(\xi,t)$ является обобщённой функцией.

Часто оператор $\hat{L}$ можно восстановить по функции $G(\omega,h)$ без использования интегралов (5) и (6) используя символическую запись

$$\hat{L} = G\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

соответствующее уравнение имеет вид

$$G\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0. \tag{7}$$

В основе этой записи лежит символическая замена

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ih,$$

которую можно использовать для перехода между уравнением и соответствующим дисперсионным соотношением. Особенно легко это сделать в случае уравнений в частных производных, которым соответствуют полиномиальные зависимости $G(\omega,h)$.

Например, уравнению Шрёдингера $iu_t + \alpha u_{xx} = 0$ соответствует дисперсионное соотношение $i(-i\omega) + \alpha(ih)^2 = 0$, то есть $\omega = \alpha h^2$, здесь α — действительная постоянная.

Обратный пример, дисперсионное соотношение уравнения Клейна — Гордона имеет вид $\omega^2 = \Omega^2 + c^2h^2$, где Ω и c — положительные константы. Само уравнение можно получить из этого дисперсионного соотношения:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u = \left[\Omega^2 + c^2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]u$$

или $u_{tt} + \Omega^2 u - c^2u_{xx} = 0$.

Похожим образом, можно действовать в случае некоторых неполиномиальных аналитических зависимостей $G(\omega, h)$. Отметим, что отдельные слагаемые и множители в составе функции $G(\omega, h)$ можно «обрабатывать» отдельно, как показано в следующем примере.

Рассмотрим искусственный пример $G(\omega, h) = \omega \sin h + h^2 + \omega h \exp(-h^2)$ и запишем соответствующее ему уравнение. Кроме полиномиальных множителей и слагаемых в дисперсионное соотношение входят $\sin h$ и $\exp(-h^2)$. Определим, каким операторам они соответствуют. Начнём с синуса

$$\sin h = \frac{e^{ih} - e^{-ih}}{2i} \leftrightarrow \sin\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Как мы уже обсуждали экспоненты вида $\exp(iah)$ соответствуют сдвигам на a по координате и

$$\sin\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = \frac{1}{2i}\left[u(x+1,t) - u(x-1,t)\right].$$

Для гауссовой функции $\exp(-h^2)$ можно использовать формулы (5) и (6) и получить

$$\exp\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', t-t') u(x',t')\,dx'\,dt',$$
$$K(\xi,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2} e^{-i\omega\tau + ih\xi}\,dh\,d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\delta(\tau) e^{-\xi^2/4}.$$

Из-за дельта-функции $\delta(\tau)$ интеграл по t' легко вычислить и получить

$$\exp\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x',t)\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4}\right) dx'.$$

Искомое уравнение имеет вид (7), то есть

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}\sin\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right] u(x,t) = 0.$$

Подставляя сюда найденные выражения для операторов $\sin(-i\frac{\partial}{\partial x})$ и $\exp(\frac{\partial^2}{\partial x^2})$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{u_t(x+1,t) - u_t(x-1,t)}{2} - u_{xx}(x,t) +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} u(x',t)\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4}\right) dx' = 0.$$

или, после вноса производных под интеграл в последнем слагаемом,

$$\frac{u_t(x+1,t) - u_t(x-1,t)}{2} - u_{xx}(x,t) -$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x',t)(x-x')\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4}\right) dx' = 0.$$

Следует отметить, что, как мы уже видели, кратность нуля $G(\omega, h)$ является важным моментом и повторяющиеся сомножители в G сокращать нельзя. Например, дисперсионные соотношения $\omega - h = 0$ и $(\omega - h)^2 = 0$ описывают одну и ту же зависимость $\omega(h)$, но соответствуют разным уравнениям $u_t + u_x = 0$ и $u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx} = 0$: любое решение первого из этих уравнений является и решением второго, но не наоборот.

Практическое задание. Приведите пример решения $u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx} = 0$, которое не является решением $u_t + u_x = 0$.

В случае систем уравнений $\hat{\mathbf{L}}\mathbf{u} = 0$ для векторных волновых полей $\mathbf{u}(x,t)$ дисперсионное соотношение можно получить как условие разрешимости системы алгебраических уравнений $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{C}e^{-i\omega t+ihx}) = 0$, которая получается после подстановки $\mathbf{u} = \mathbf{C}e^{-i\omega t+ihx}$ в исходную систему. Обычно число уравнений совпадает с числом неизвестных и условием разрешимости является равенство детерминанта системы $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{C}e^{-i\omega t+ihx}) = 0$ нулю, то есть $G(\omega,h) = e^{i\omega t-ihx}\det\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{C}e^{-i\omega t+ihx}) = 0$.

Пример, телеграфная система (простейший вариант) имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= v_x, \\ u_x &= v_t. \end{aligned}$$

Подставляем $u = Ae^{-i\omega t+ihx}$ и $v = Be^{-i\omega t+ihx}$ и получаем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \omega A + hB = 0, \\ hA + \omega B = 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости

$$G(\omega,h) = \begin{vmatrix} \omega & h \\ h & \omega \end{vmatrix} = \omega^2 - h^2 = 0.$$

Заметим, что так как по дисперсионному соотношению всегда можно записать одно уравнение для скалярного поля, описанная процедура даёт простой способ сведения линейных систем уравнений к одному уравнению более высокого порядка. В частности, приведённая выше телеграфная система сводится к волновому уравнению $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Понятно, что обратный переход неоднозначен и одному скалярному уравнению и одному дисперсионному соотношению может соответствовать множество различных систем.

В случае полиномиальной зависимости $G(\omega,h)$ от частоты, то есть $G(\omega,h) = C[\omega - \omega_1(h)][\omega - \omega_2(h)]\dots[\omega - \omega_n(h)]$ может иметь смысл выделить систему уравнений первого порядка

$$i\frac{\partial u_p}{\partial t} = \omega_p\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_p, \quad p = 1,2,\dots,n.$$

В этой системе все уравнения оказываются независимы, то есть система распадается на n уравнений первого порядка по времени. Это может быть удобно при рассмотрении многих волновых задач. Например, написанной выше телеграфной системе и волновому уравнению $u_{tt} - u_{xx} = 0$ соответствует система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

При этом общее решение волнового уравнения оказывается суперпозицией решений для u_1 и u_2. Эти решения мы уже выписывали $u_1 = f(x-t)$ и $u_2 = g(x+t)$ где f и g —

произвольные функции. Таким образом, получили решение Даламбера $u = f(x-t) + g(x+t)$. В общем случае однако следует уделять внимание точкам вырождения: получившиеся системы могут оказаться менее общими, чем скалярное уравнение высокого порядка. Во многих волновых задачах (но не во всех) это оказывается неважным, так как множество точек вырождения имеет меру нуль, а отдельные экспоненты и их конечные суммы не удовлетворяют обычным граничным условиям (не спадают на бесконечности и не интегрируются по Лебегу).

Наконец, обсудим обобщение на многомерные пространственные переменные. Это обобщение достаточно прямолинейно: в случае волновых полей, зависящих от нескольких пространственных координат, $u(x_1, x_2, \ldots, x_d, t) \equiv u(\mathbf{r}, t)$ вместо экспонент $e^{-i\omega t + ihx}$ следует брать экспоненты $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \equiv e^{-i\omega t + ik_1x_1 + ik_2x_2 + \ldots + ik_dx_d}$. Здесь d — размерность пространства, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ — радиус-вектор (координатный вектор), $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$ — волновой вектор. Дисперсионное соотношение связывает частоту ω и волновой вектор $\mathbf{k}$, $G(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Соответствие между уравнением для волнового поля и дисперсионным соотношением осуществляется посредством замен

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x_p} \leftrightarrow ik_p,$$

или, в векторной записи,

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \nabla \leftrightarrow i\mathbf{k},$$

где используется символический оператор «набла»

$$\nabla = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \mathbf{e}_d\frac{\partial}{\partial x_d} \leftrightarrow i\mathbf{k},$$

$\mathbf{e}_p$ обозначает единичный орт в направлении оси x_p. Дисперсионному соотношению $G(\omega, \mathbf{k}) = 0$ соответствует оператор $\hat{L} = G(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla)$ и уравнение для волнового поля $G(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla)u(\mathbf{r}, t) = 0$. Всё сказанное выше для одномерных пространственных координат с незначительными изменениями переносится и на многомерный случай.

Индивидуальное задание к зачёту (три варианта разных для трёх студентов). Записать дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ (или волновое число h в одномерном случае), для нижеприведённых уравнений и систем уравнений. Найти решения (с учётом кратных нулей) полученного дисперсионного уравнения относительно частоты ω при действительных $\mathbf{k}$. В случае систем уравнений указать соответствующие отдельным решениям собственные векторы (то есть описать соответствующие подпространства, указав связи между различными переменными в системе для данного нуля дисперсионного уравнения или набора совпадающих кратных нулей в случае вырождения). Сколько решений дисперсионного уравнения (веток) существует для действительных $\mathbf{k}$?

1. Дисперсионное уравнение должно соответствовать (с учётом вырождения) телеграфным уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0,$$
$$\frac{\partial I}{\partial x} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU = 0$$

для тока $I(x,t)$ и напряжения $U(x,t)$ в электрической линии, здесь $L > 0$, $R \geqslant 0$, $C > 0$ и $G \geqslant 0$ — погонная (приходящаяся на единицу длины) индуктивность линии, погонное сопротивление проводников, погонная ёмкость линии и проводимость изоляции соответственно (уравнения записаны в системе единиц СИ).

2. Дисперсионное уравнение должно соответствовать (с учётом вырождения) системе уравнений

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi}\mathbf{E},$$

для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ и плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ в холодной плазме (уравнения записаны в гауссовой системе единиц), здесь $c > 0$ и $\omega_p > 0$ — действительные постоянные (скорость света в вакууме и плазменная частота соответственно).

3. Дисперсионное уравнение должно соответствовать (с учётом вырождения) уравнению Дирака

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + c\gamma^1\frac{\partial}{\partial x} + c\gamma^2\frac{\partial}{\partial y} + c\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{\psi} = mc^2\boldsymbol{\psi}$$

для четырехкомпонентной волновой функции-спинора

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{r},t) \\ \psi_2(\mathbf{r},t) \\ \psi_3(\mathbf{r},t) \\ \psi_4(\mathbf{r},t) \end{bmatrix}$$

свободного электрона или позитрона с массой $m > 0$, здесь $\hbar > 0$ и $c > 0$ — постоянная Дирака и скорость света соответственно, $\gamma^{0,1,2,3}$ — гамма-матрицы Дирака,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Индивидуальное задание к зачёту (три варианта разных для трёх студентов). Записать уравнения для скалярного поля $u(\mathbf{r},t)$ (или $u(x,t)$ в одномерном случае), соответствующие следующим дисперсионным соотношениям (записанным для действительных волновых векторов и волновых чисел).

1. Дисперсионное соотношение $\omega = \Omega \operatorname{sign} h$, где Ω — постоянная.

2. Дисперсионное соотношение $\omega = ck$, где c — постоянная и $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный вектор, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

3. Дисперсионное соотношение $\omega = \alpha\sqrt{k}$, где α — постоянная и $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный вектор, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.