Введение в теорию волновых процессов

В. А. Костин

18 апреля 2023 г.

1. Занятие 10 (на 27 марта 13:00)

1.1. Диспергирующие волны

На предыдущих занятиях мы изучали свойства волновых процессов, которые возникают как следствие некоторых законов сохранения $\rho_t + q_x = 0$ (например, закона сохранения числа движущихся частиц или агентов). Соответствующие уравнения или системы уравнений в частных производных классифицируются как гиперболические. Общим свойством гиперболических систем является то, что решение сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик. Такие гиперболические системы описывают большое численно различных волновых процессов в различных областях (физике, технике, геологии и т. п.).

Однако системы, поддерживающие волновые процессы, не исчерпываются лишь гиперболическими системами. Дж. Уизем выделяет второй существенный класс волновых процессов, называя их диспергирующими волнами. Вообще говоря, свойство дисперсии волн заключается в зависимости скорости волны от пространственного или временного масштаба изменения волнового поля. Очень часто дисперсия волн связана с наличием собственных пространственных или временных масштабов среды, поддерживающей распространение волн, или агентов-переносчиков, плотность (или иные статистические свойства) которых определяют волновое поле. Ниже мы рассмотрим конкретные примеры.

Уизем определяет класс диспергирующих волновых систем сначала для линейных (пространственно однородных и стационарных) систем, а потом расширяет определение по аналогии для нелинейных, неоднородных и нестационарных волн. Опираясь на такой подход, можно распознать диспергирующие волновые системы по тому, что их линеаризованные варианты допускают решения вида $u = Ae^{i\theta}$ или $u = \mathrm{Re} Ae^{i\theta}$, где амплитуда A не зависит от x или t или зависит значительно медленне, чем фаза θ, а локальная частота $\omega = -\theta_t$ и волновое число $\mathbf{k} = \nabla\theta$ связаны между собой нелинейным образом $G(\omega, k) = 0$. В отличие от предыдущего занятия, где Re обозночало число Рейнольдса, здесь и далее Re обозначает как обычно действительную часть.

Чтобы понять суть описанного только что свойства диспергирующих волн, начнём рассмотрения с известного примера. Рассмотрим бесконечную цепочку упруго связанных (пружинами) грузов. Пусть грузы представляют собой одинаковые материальные точки массы m и расположены вблизи точек-узлов $X_p = pa$, где p — целочисленный индекс, нумерующий груз, a — пространственный период цепочки, a. Пружины соединяют между собой соседние грузы (с индексами, отличающимися на единицу). Все пружины одинаковы, невесомы и характеризуются жёсткостью $\kappa > 0$, не зависящей от величины растяжения. Будем рассматривать для простоты только продольные (вдоль оси x) смещения грузов. Тогда второй закон Ньютона даёт для положений грузов x_p бесконечную систему уравнений

$$m\ddot{x}_p = \kappa\big(x_{p+1} - 2x_p + x_{p-1}\big)\,, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Отклонения грузов от соответствующих узлов, $\xi_p = x_p - X_p$, удовлетворяют системе того же вида

$$m\ddot{\xi}_p = \kappa\big(\xi_{p+1} - 2\xi_p + \xi_{p-1}\big)\,, \quad p \in \mathbb{Z}$$

или (после деления правой и левой части на m)

$$\ddot{\xi}_p = \Omega^2\big(\xi_{p+1} - 2\xi_p + \xi_{p-1}\big)\,, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\Omega = \sqrt{\kappa/m}$ — известное выражение для частоты колебаний одного груза массы m, закреплённого на пружине жёсткостью κ.

Общее решение этой системы следует искать в виде линейной суперпозиции решений вида $\xi \propto e^{-i\omega t + iHp}$. Это следует из стационарности системы по времени и однородности по индексу: сдвиг по времени $t \mapsto t + \Delta$ не меняет вида системы, также как и замена индекса $p \mapsto p + q$. По сути, стационарность и однородность означают, что соответствующие операторы сдвигов коммутируют с линейным оператором системы $\hat{\mathbf{L}}$, действующим с нулевым результатом на последовательность функций времени $\Xi = (\xi_p)_{p=-\infty}^{\infty} = (\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$,

$$\hat{\mathbf{L}}\Xi = 0; \quad \hat{\mathbf{L}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Omega^2\left(\hat{\mathbf{T}}_1 - 2\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{T}}_{-1}\right),$$

где $\hat{\mathbf{T}}_{\pm 1}$ — операторы сдвига индекса на единицу в большую и меньшую сторону, $\hat{\mathbf{I}}$ — единичный оператор. Если известно, что коммутирующие операторы в гильбертовом пространстве имеют полные системы собственных функций, то этого достаточно для того чтобы утверждать, что и они имеют общую систему собственных функций. В нашем случае экспоненты $e^{-i\omega t + iHp}$ являются очевидными собственными функциями сдвиговых операторов: экспоненты — это как раз те функции, для которых сдвиг эквивалентен умножению на число. Вопрос о полноте в общем случае достаточно сложный. Во многих конкретных задачах (в том числе и в данной, как мы сейчас увидим) на практике свойство полноты можно получить как следствие хорошо развитой теории рядов и интегралов Фурье и соответствующего аппарата функционального анализа и математической физики (например, теоремы Стеклова). Стоит помнить, что конкретный набор функций $e^{-i\omega t + iHp}$ (то есть набор значений ω и H) и вообще существование такого полного набора зависит от конкрентного типа задачи (начальная, краевая или начально-краевая) и соответствующих начальных и граничных условий. Как мы увидим далее, если оператор $\hat{\mathbf{L}}$ является эрмитовым на заданном классе функций, определяемым краевыми и иными условиями, то задача нахождения полного набора базисных функций существенно упрощается.

Так как мы пока не ставили конкретной задачи и не указывали начальных, граничных и иных условий, единственное, что можно сказать про ω и H, — это то, что эти величины связаны в силу исходной системы уравнений. В самом деле, подставив $\xi \propto e^{-i\omega t + iHp}$ в уравнение (1) и проведя элементарные тригонометрические упрощения, находим

$$\omega^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{H}{2}. \tag{2}$$

Такая связь между временным ω и пространственным H коэффициентами в аргументе экспоненты называется дисперсионным соотношением; ω называют частотой (или, более точно, циклической или круговой частотой), а H — волновым числом на решётке, а саму комбинацию $\theta = -\omega t + Hp$ — фазой. В большом числе задач имеют дело не с дискретным пространственным аргументом (в данной задаче его роль играет индекс p), а с непрерывной пространственной координатой, например x. В таком случае фаза имеет вид $\theta = -\omega t + hx$, где h — волновое число. В рассматриваемой задаче мы также можем вести непрерывную пространственную координату, $x = ap$ и $p = x/a$, и рассмотреть уравнение для волнового поля $\xi(x,t)$, $\xi(ap,t) \equiv \xi_p(t)$. Это поле будет удовлетворять уравнению

$$\xi_{tt}(x,t) = \Omega^2[\xi(x+a,t) - \xi(x,t) + \xi_{x-a,t}]\,,$$

а соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{ha}{2}.$$

Теперь поставим граничные условия на бесконечности $\xi_p \to 0$ при $|p| \to \infty$ в любой момент времени t. В этом случае общее решение можно записать как

$$\xi_p(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[A_+(H)e^{-i\omega_+(H)t+iHp} + A_-(H)e^{-i\omega_+(H)t+iHp}\right] dH, \tag{3}$$

где $\omega_\pm(H) = \pm 2\Omega \sin(H/2)$ — два решения дисперсионного уравнения относительно частоты, $A_\pm(H)$ — произвольные коэффициенты; интеграл понимается в смысле Лебега. То есть утверждается, что набор функций из экспонент $\psi_{\pm,H}(p,t) = e^{-i\omega\pm(H)t+iHp}$, где H пробегает значения от $-\pi$ до π, является полным. По аналогии с конечномерными линейными задачами общее решение представляет собой произвольную линейную комбинацию базисных решений $\psi_{\pm,H}$. При этом пара (s,H), где s — это знак (плюс или минус), является индексом. Индекс двумерный: по одному измерению — дискретный, принимает два значения, по другому — непрерывный, меняется в некотором интервале. Наличие дискретного измерения связано с наличием двух веток решений дисперсионного уравнения относительно частоты, что в свою очередь связано с тем, что исходное уравнение было второго порядка по времени. В разных задачах таких веток может быть всего одна (для уравнений первого порядка по времени), несколько (для уравнений высоких порядков или систем уравнений) или даже счётный набор (например, в уравнениях с запаздыванием, в которое входят значения функции в разные моменты времени).

Убедиться, что набор действительно полный можно, если рассмотреть начальную задачу для уравнений (1) с начальными условиями

$$\xi_p(0) = a_p, \quad \dot{\xi}_p(0) = b_p$$

и явно записать её решение для произвольных a_p и b_p, удовлетворяющих граничным условиям a_p, $b_p \to 0$ при $|p| \to \infty$. То есть явно найдём $A_\pm(H)$. Для этого как обычно подставим общее решение (3) в начальные условия, после чего получим

$$a_p = \int_{-\pi}^{\pi} [A_+(H) + A_-(H)]\, e^{iHp}\, dH,$$
$$b_p = -i\int_{-\pi}^{\pi} \omega_+(H)\, [A_+(H) - A_-(H)]\, e^{iHp}\, dH.$$

Получившиеся выражения совпадают с выражениями для коэффициентов рядов Фурье, что позволяет применить соответствующую теорию и найти

$$A_+(H) + A_-(H) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{-iHp}, \tag{4}$$

$$-i\omega_+(H)\left[A_+(H) - A_-(H)\right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{-iHp}. \tag{5}$$

Эту систему двух алгебраических уравнений для двух неизвестных легко решить и найти $A_\pm(H)$.

К этой процедуре можно сделать три замечания. Все три замечания в своей сущности связаны с пониманием $A_\pm(H)$ не как функций определённых в точке, а как функций интегрируемых по Лебегу.

Во-первых, детерминант получившей системы обращается в ноль при $H = 0$. Эта точка является точкой вырождения, обе ветки дисперсионного соотношеия дают одно и то же значения частоты и $\psi_{+,0} = \psi_{-,0}$ В конечномерном случае систем линейных дифференциальных уравнений при вырождении для полноты системы необходимо кроме соответствующей экспоненты $e^{\lambda t}$ необходимо включить в набор базисных функций и решения вида $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{s-1} e^{\lambda t}$, где s — кратность вырождения. Также можно поступить и в данном случае, например считать, что $\psi_{+,0} = 1$, а $\psi_{-,0} = t$. Однако в большинстве реальных задач (как и в данной) этого не требуется, так как вырождение обычно происходит лишь на множестве точек меры нуль, и при интегрировании по Лебегу это оказывается неважным.

Во-вторых, заметим, что сами функции $\psi_{\pm,H}$, хоть мы их и называли базисными функциями, не удовлетворяют обозначенным выше граничным условиям: это базисные функции в слабом смысле.

В-третьих, условия a_p, $b_p \to 0$ при $|p| \to \infty$ не гарантируют поточечной сходимости соответствующих рядов Фурье. Однако, опять же эти ряды сходятся к функции, интегрируемой по Лебегу, в слабом смысле.

Практическое задание. Выразить явно $A_\pm(H)$. Выразить аналитически $\xi_0(t)$ в случае $a_p = 0$ при $p \neq 0$, $b_p = 0$ для всех p, то есть в случае, когда начальные смещения всех грузов равны 0 для всех грузов кроме нулевого и все грузы имеют нулевую начальную скорость. *Указания:* решить систему (4) и (5), затем применить формулу (3); выразить ответ через функцию Бесселя $J_0(z)$, используя её интегральное представление $J_0(z) = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \cos u)\, du$.