Задача 1 (8 баллов)

Записать слабое решение уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины при $t > 0$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -1, \\ 0 & \text{при } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Построить пространственно-временную диаграмму с характеристиками и положениями разрывов слабого решения.

Задача 2 (8 баллов)

Записать слабое решение уравнения $u_t + u^2 u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины при $t > 0$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -1, \\ 0 & \text{при } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Построить пространственно-временную диаграмму с характеристиками и положениями разрывов слабого решения. Примечание: необходимо лишь записать алгебраическое уравнение для положений разрывов, а выражать координаты разрывов в радикалах необязательно, однако необходимо найти асимптотики положений разрывов при $t \to \infty$ (главный и следующий за ним члены).

Задача 3 (7 баллов)

Записать слабое решение уравнения $u_t + u^2 u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины при $t > 0$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ -1 & \text{при } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Построить пространственно-временную диаграмму с характеристиками и положениями разрывов слабого решения. Примечание: необходимо лишь записать алгебраическое уравнение для положения разрыва, а выражать координату разрыва в радикалах необязательно, однако необходимо записать асимптотики положений разрывов при $t \to \infty$ (главный и следующий за ним члены).

Задача 4 (6 баллов)

Записать слабое решение уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины при $t > 0$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Построить пространственно-временную диаграмму с характеристиками и положениями разрывов слабого решения.

Задача 5 (7 баллов)

Записать слабое решение уравнения $u_t + u + u^2 u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ распадающихся частиц (с периодом полураспада $\ln 2$) при $t > 0$ с начальным условием $u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Построить пространственно-временную диаграмму с характеристиками и положениями разрывов слабого решения. Выразить зависимости положения разрыва и амплитуды волны от времени t.
Указания: после получения решения методом характеристик удобно ввести новое время $\tilde{t} = \frac{1-\exp(-2\,t)}{2}$; можно использовать системы компьютерной алгебры для упрощения аналитических выражений при нахождении положения разрыва.

Задача 6 (4 балла)

Найти время и координату первого опрокидывания фронта в решении уравнения $u_t + u(1-u)\,u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} a\left(1 - x^2\right) & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Задача 7 (3 балла)

Пусть $u(x, t)$ есть слабое решение уравнения $u_t + u^k\,u_x = 0$ для плотности сохраняющейся величины с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$, $k > 0$. Доказать, что $v(x, t) = e^{-\nu t}\,u\left(x, \frac{1-e^{-k\nu t}}{k\nu}\right)$ есть слабое решение уравнения $v_t + \nu v + v^k\,v_x = 0$ для плотности распадающейся величины с тем же начальным условием $v(x, 0) = f(x)$.

Задача 8 (5 баллов)

Записать слабое решение уравнения $u_t + \nu u + u u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ распадающихся частиц при $t > 0$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| > 1, \\ 2 - |x| & \text{при } |x| < 1 \end{cases}$$

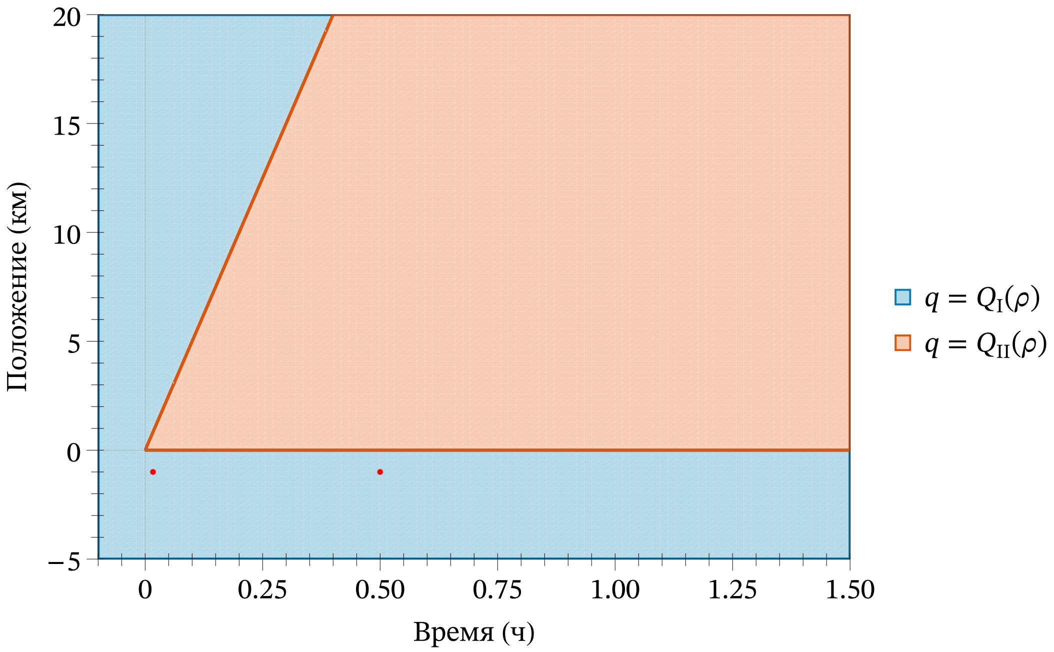
и значениями параметра ν: а) $\nu = \frac{1}{2}$, б) $\nu = 2$ (значение ν определяется период полураспада частиц $\frac{\ln 2}{\nu}$). Построить пространственно-временные диаграммы с характеристиками и положениями разрывов слабых решений. Выразить зависимости положения разрыва и амплитуды волны от времени t.

Указание: после получения решения методом характеристик удобно ввести новое время $\tilde{t} = \frac{1-\exp(-\nu t)}{\nu}$.

Задачи 9 а), б) (9 баллов)

Поток автомобилей на шоссе описывается уравнением неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, где ρ — линейная плотность автомобилей на шоссе (среднее количество автомобилей на единицу длины), q — плотность потока в направлении увеличения x. Изначально, при $t \to -\infty$, поток стационарен со средней скоростью автомобилей а) $v_0 = 50$ км / ч, б) $v_0 = 75$ км / ч. Вне пространственно-временной области (клина) $0 < x < v_0\, t$ на шоссе открыты 4 полосы для движения и плотность потока связана с плотностью посредством функциональной зависимости $q = Q_{\mathrm{I}}(\rho)$, $Q_{\mathrm{I}}(\rho) = a\rho \ln \frac{\rho_j}{\rho}$, где ρ_j — максимальная плотность данного шоссе (при которой поток перестаёт двигаться) и $a = 25$ км / ч — некоторые постоянные параметры. В момент $t = 0$ в точке $x = 0$ половина — 2 из 4 — полос движения перекрываются для ремонта, так что в клине $t > 0$ и $x > v_0\, t$ плотность потока связана с плотностью иной функциональной зависимостью $q = Q_{\mathrm{II}}(\rho)$, $Q_{\mathrm{II}}(\rho) = a\rho \ln \frac{\rho_j}{2\,\rho}$. Построить пространственно-временные диаграммы с характеристиками и положениями разрывов слабых решений. На диаграммах отобразить движения двух автомобилей, находившихся в моменты времени $t = 1$ мин, 30 мин в позиции $x = -1$ км и рассчитать время, за которое эти автомобили проедут 15 км и достигнут позиции $x = 14$ км.

Out[•]=



Задача 10 (7 баллов)

Определить, при каких условиях неоднородное уравнение Хопфа $u_t + u u_x = \frac{A}{a^2 + (x - U t)^2}$ имеет гладкое решение для $u(x, t)$ при начальном условии $u(x, t \to -\infty) = u_0$. Записать это гладкое решение. Считать $U > 0$, $a > 0$. Построить волновые профили при значениях параметров $A = 1$, $a = 2\pi$, $u_0 = 1$, $U = 2, 3, 10$. Построить соответствующие пространственно-временные диаграммы с характеристиками. Указание: рассмотреть автомодельное решение в виде стационарной волны со скоростью U.

Задача 11 (3 балла)

Записать слабое решение уравнения Хопфа $u_t + u u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины при $t > 0$ и $x = 0$ с начальным и граничным условиями

$u(x, 0) = 0$ при $x > 0$

и

$u(0, t) = t$ при $t > 0$.

Построить пространственно-временную диаграмму с характеристиками и положениями разрывов слабого решения.

Задача 12 (7 баллов)

Найти положение разрыва в слабом решении уравнения Хопфа $u_t + au^\alpha u_x = 0$ для плотности $u(x, t)$ сохраняющейся величины при $t > 0$ и $x = 0$ с начальным и граничным условиями

$u(x, 0) = 0$ при $x > 0$

и

$u(0, t) = bt^\beta$ при $t > 0$,

где $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Указание: рассмотреть задачу как обобщение задачи 11.

Задача 13 (6 баллов)

Записать решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ для плотности волнового поля $c(x, t)$ с начальным условием $c(x, 0) = A \sin kx$, где ν, A и k — положительные константы. Записать главный член асимптотики решения при $t \to \infty$. Построить графики, качественно описывающие эволюцию поля $c(x, t)$ во времени для различных начальных значений эффективного числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{A}{2\nu k} = 0.1$, 1 и 10.

Указания: использовать замену Коула — Хопфа, уравнение теплопроводности решать методом разделения переменных, выразить ответ через модифицированные функции Бесселя $I_n(z)$, используя их интегральное представление $I_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta$ (для целых n).

Задача 14 (5 баллов)

Записать решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ для плотности волнового поля $c(x, t)$ с начальным условием

$$c(x, 0) = \begin{cases} c_- & \text{при } x < 0, \\ c_+ & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $\nu > 0$ и $c_\pm$ — константы. Записать главный член асимптотики решения при $t \to \infty$ и фиксированных значениях $x - \frac{c_+ + c_-}{2}\, t$. Построить графики, качественно описывающие эволюцию поля $c(x, t)$ во времени при $c_- < c_+$ и $c_- > c_+$.

Указания: использовать замену Коула — Хопфа, выразить ответ через функцию ошибок.

Задача 15 (5 баллов)

Записать решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ для плотности волнового поля $c(x, t)$ с начальным условием $c(x, 0) = c_0 + A\delta(x)$, где $\nu > 0$, c_0 и A — константы и $\delta(x)$ — дельта-функция. Построить графики решений (серию зависимостей от x при разных t) для начальных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{A}{2\nu} = 0.1$, 1 и 10 при $c_0 = 1$. Найти зависимость числа Рейнольдса от времени. Записать главный член асимптотики решения при $t \to \infty$ и фиксированных значениях $x - c_0\, t$.

Указания: использовать замену $c = c_0 + \tilde{c}$, $x = c_0\, t + \tilde{x}$; использовать замену Коула — Хопфа; выразить ответ через функцию ошибок.

Задача 16 (5 баллов)

Записать решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = c_{xx}$ для плотности волнового поля $c(x, t)$ с начальным условием $c(x, 0) = \frac{2+e^{20+x/2}}{1+e^{20+x/2}+e^{20+x}}$. Построить графики, качественно описывающие эволюцию поля $c(x, t)$ во времени. Найти зависимость мощности потерь $\int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 \, dx$ от времени.

Записать главный член асимптотики решения при $t \to \infty$ и фиксированных значениях $x - t$.

Задачи 17 а), б), в)

Записать интегро-дифференциальные уравнения для скалярного поля $u(r, t)$ (или просто $u(x, t)$ в одномерном случае), соответствующие следующим дисперсионным соотношениям (записанным для циклической частоты ω при действительных волновых векторах k или волновых числах h): а) $\omega = \Omega \operatorname{sign} h$, б) $\omega = ck$, в) $\omega = \alpha \sqrt{k}$, где Ω, c, α — постоянные и $k = |k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, k — двумерный волновой вектор.

Задачи 18 а), б), в), г), д)

С помощью метода стационарной фазы определить главный член асимптотического разложения скалярного волнового поля $u(x, t)$ при $t \to +\infty$ с начальными условиями $u(x, t = 0) = A e^{-x^2/2a^2}$, $u_t(x, t = 0) = 0$ и дисперсионными соотношениемя:

а) $\omega^2 = gh$ (гравитационные волны на поверхности глубокой воды, g — ускорение свободного падения);

б) $\omega^2 = \alpha h^3$ (капиллярные волны на поверхности глубокой воды, $\alpha = T/\rho$ — отношение коэффициента поверхностного натяжения T и плотности ρ);

в) $\omega^2 = c^2 h^2 + \Omega^2$ (электромагнитные и электростатические волны в плазме, Ω — плазменная частота, c — скорость света для поперечных электромагнитных волн и тепловая скорость электронов для продольных электростатических волн; волны в волноводах и световодах: Ω — критическая частота, c — скорость света);

г) $\omega^2 = c^2 h^2 \left(1 + l^2 h^2\right)$ (гравитационные и капиллярные волны на поверхности мелкой воды, $c = \sqrt{gH}$ — корент из произведения ускорения свободного падения g и глубины H, $l = \sqrt{T/\rho g H^2 - 1/3}$, T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность);

д) $\omega^2 = c^2 h^2 / \left(1 + l^2 h^2\right)$.

Считать A, a, c, g, l, Ω, и α положительными константами. Построить пространственно-временные волновые диаграммы с линиями постоянной фазы и групповыми линиями, определить характерные скорости распространения переднего и заднего (если есть) волновых фронтов, оценить характерное количество волновых горбов в зависимости от времени t; определить, как движутся волновые горбы относительно волновых фронтов.