ЛЕКЦИЯ 30

СВОЙСТВА ОБЪЁМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим потенциал

$$V(M) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\omega_P \quad (1)$$

и компоненты силы притяжения

$$X(M) = -\iiint_{\Omega} \rho(P) \frac{x-\xi}{r_{MP}^3} d\omega_P\ ,\ Y(M) = -\iiint_{\Omega} \rho(P) \frac{y-\eta}{r_{MP}^3} d\omega_P\ ,\ Z(M) = -\iiint_{\Omega} \rho(P) \frac{z-\zeta}{r_{MP}^3} d\omega_P \quad (2)$$

в точках, лежащих внутри притягивающего тела Ω. Пусть плотность ρ ограничена: $|\rho(M)| < C$. Тогда

$$\frac{|\rho|}{r} < \frac{C}{r^\alpha},\ \alpha=1,\ \frac{|\rho|}{r^3}|x-\xi| \le \frac{|\rho|}{r^2} < \frac{C}{r^\alpha},\ \alpha=2.$$

Таким образом, несобственные интегралы (1) и (2) сходятся.

Покажем, что интегралы (1) и (2) равномерно сходятся в любой точке M_0.

Оценим модуль интеграла (1) по области Ω_δ. Пусть K_δ - шар радиуса δ с центром в точке M_0, содержащий область Ω_δ.

Тогда

$$\left| \iiint_{\Omega_\delta} \frac{\rho(x,y,z)}{r_{MP}} dxdydz \right| \le C \iiint_{K_\delta} \frac{dxdydz}{r_{MP}}.$$

Для оценки мажорирующего интеграла перейдём к сферической системе координат с центром в точке M. Пусть K – шар радиуса 2δ с центром в точке M. Тогда $K_\delta \subset K$,

$$C \iiint_{K_\delta} \frac{d\omega}{r_{MP}} \le C \iiint_{K} \frac{d\omega}{r_{MP}} = C 8\pi\delta^2.$$

Если задано некоторое ε>0, то выбрав

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

убедимся в равномерной сходимости интеграла V.

Повторяя аналогичное рассуждение для интеграла

$$X(M) = -\iiint_{\Omega} \rho(P) \frac{x-\xi}{r_{MP}^3} d\omega_P,$$

получаем

$$\left| \iiint_{\Omega_\delta} \frac{\rho(P)}{r_{MP}^2} (x-\xi) d\omega \right| \le C \iiint_{K_\delta} \frac{d\omega}{r_{MP}^2} \le C \iiint_{K} \frac{d\omega}{r_{MP}^2} = 8\pi\delta C \le \varepsilon,$$

если

$$\delta \le \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

Таким образом, потенциал V и компоненты силы притяжения X, Y, Z являются непрерывными функциями во всём пространстве.

Первые производные объёмного потенциала

Функции, стоящие под знаком интегралов (2), являются производными по соответствующим переменным от функции, стоящей под знаком интеграла в (1). Если для функции V законно дифференцирование под знаком интеграла, то

$$X=\frac{\partial V}{\partial x},\ \ Y=\frac{\partial V}{\partial y},\ Z=\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{3}$$

то есть V является потенциалом поля с компонентами X, Y, Z.

Если точка M лежит вне области Ω, то подынтегральные функции в (2) непрерывны по аргументам M и P. Следовательно, в этом случае дифференцирование V под знаком интеграла законно. Повсюду вне тела Ω можно также вычислять производные более высокого порядка от V. Таким образом, вне Ω потенциал V удовлетворяет уравнению Лапласа.

Докажем, что вычисление производных функции V можно осуществлять путём дифференцирования под знаком интеграла и в том случае, когда точка M лежит внутри Ω.

Покажем, что для любого ε можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}\right|<\varepsilon,$$

если $|\Delta x|<\delta$.

Пусть, как и ранее, K_δ - шар радиуса δ с центром в точке M_0. Разобьём V на два слагаемых, $V=V_1+V_2$, где V_1 – интеграл по объёму $\Omega_1=K_\delta$, V_2 – интеграл по объёму $\Omega_2=\Omega\setminus K_\delta$. Тогда

$$\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{V_1(x+\Delta x,y,z)-V_1(x,y,z)}{\Delta x}+\frac{V_2(x+\Delta x,y,z)-V_2(x,y,z)}{\Delta x}.$$

При любых фиксированных размерах области Ω_1

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V_2(x+\Delta x,y,z)-V_2(x,y,z)}{\Delta x}=X_2=\iiint_{\Omega}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}d\omega,$$

так как точка M_0 лежит вне области Ω_2.

Полагая $X=X_1+X_2$, оценим

$$\left|X-\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}\right|\le\left|X_2-\frac{V_2(x+\Delta x,y,z)-V_2(x,y,z)}{\Delta x}\right|+$$

$$+|X_1|+\left|\frac{V_1(x+\Delta x,y,z)-V_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|$$

и покажем, что каждое из слагаемых можно сделать меньше чем $\varepsilon/3$. В самом деле,

$$|X_1|=\left|\iiint_{\Omega_1}\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\omega\right|<C\int_0^\delta\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr}{r^2}=4\pi C\delta<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{4}$$

так как $\left|\frac{x-\xi}{r}\right|<1$ и $|\rho|<C$. Рассмотрим последнее слагаемое

$$|S|=\left|\frac{V_1(x+\Delta x,y,z)-V_1(x,y,z)}{\Delta x}\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint_{\Omega_1}\rho\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)d\omega\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint_{\Omega_1}\rho\left(\frac{r-r_1}{rr_1}\right)d\omega\right|,$$

где

$$r_1=\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\ r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Стороны треугольника M_0MM_1 равны r, r_1 и $|\Delta x|$. Отсюда следует, что

$$|r-r_1|\le|\Delta x|.$$

Поэтому

$$|S|\le C\iiint_{\Omega_1}\frac{d\omega}{rr_1}\le\frac{C}{2}\left(\iiint_{\Omega_1}\frac{d\omega}{r_1^2}+\iiint_{\Omega_1}\frac{d\omega}{r^2}\right).$$

При этом
$$\iiint\limits_{\Omega_1} \frac{d\omega}{r^2} = 4\pi\delta \quad \text{и} \quad \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{d\omega}{r_1^2} \le \iiint\limits_{K_1} \frac{d\omega}{r_1^2} = 8\pi\delta ,$$
где K_1 – шар радиуса 2δ с центром в точке M_1.

При соответствующем выборе δ можно обеспечить неравенство
$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta = 6\pi C\delta < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{5}$$
Выбирая δ из условия (5), мы удовлетворим неравенствам (5) и (4).

Равенство (3) в применении к области Ω_2 означает, что для любого ε можно найти δ' такое, что
$$\left| X_2 - \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| < \frac{\varepsilon}{3} , \text{ если } |\Delta x| < \delta' .$$

Переобозначая через δ минимум между δ и δ', получаем
$$\left| \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right| < \varepsilon , \text{ если } |\Delta x| < \delta .$$
Тем самым доказано, что существует производная $\partial V / \partial x$, равная X. Остальные формулы в (3) доказываются аналогично.

Таким образом, дифференцирование под знаком интеграла законно и компоненты силового поля X, Y, Z являются компонентами grad$V$.

Вторые производные объёмного потенциала

Предположим далее, что плотность ρ непрерывно дифференцируема в области Ω. Установим формулы, по которым вычисляются вторые производные функции V внутри Ω.

Опять считаем, что $V=V_1+V_2$, где V_1 – интеграл по объёму $\Omega_1 = K_\delta$. Так как точка M_0 лежит вне области Ω_2, вторую производную от V_2 можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла:
$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \iiint\limits_{\Omega_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} d\omega .$$

Первая производная V_1 по x равна
$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iiint\limits_{\Omega_1} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\omega = -\iiint\limits_{\Omega_1} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\omega . \tag{6}$$

Преобразуем интеграл (6), пользуясь формулой Гаусса-Остроградского:
$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\iiint\limits_{\Omega_1} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\omega = -\iiint\limits_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) d\omega =$$
$$= -\iint\limits_{S_\delta} \frac{\rho}{r} \cos\alpha d\gamma + \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\omega ,$$
где S_δ - поверхность сферы, ограничивающая объём Ω_1, α – угол между внешней нормалью к поверхности S_δ и осью x. Первое слагаемое – дифференцируемая функция в точке M_0. Второе слагаемое в окрестности точки M_0 является также дифференцируемой функцией, поскольку функция ρ имеет производную в Ω_1. Отсюда следует, что в точке M_0 существует вторая производная функции V_1.
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = -\iint\limits_{S_\delta} \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos\alpha d\gamma + \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\omega .$$

Для второго слагаемого в точке M_0 имеет место оценка
$$\left| \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\omega \right| < C_1 \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{d\omega}{r^2} = C_1 4\pi\delta ,$$

если $\left|\dfrac{\partial\rho}{\partial\xi}\right| < C_1$.

Применив к поверхностному интегралу теорему о среднем, получим

$$-\iint_{S_\delta} \rho \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\cos\alpha d\gamma = -\iint_{S_\delta} \rho \frac{\cos^2\alpha}{r^2} d\gamma = -\rho^* \frac{4\pi}{3}.$$

Здесь ρ^* - значение плотности в некоторой точке поверхности,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x-\xi}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\cos\alpha$$

и, кроме того,

$$\iint_{S_\delta} \frac{\cos^2\alpha}{r^2} d\gamma = \frac{1}{3}\iint_{S_\delta} \frac{1}{r^2}\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\eta\right) d\gamma = \frac{4\pi}{3}.$$

Переход к пределу при $\delta \to 0$ даёт

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\iint_{S_\delta} \rho \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\cos\alpha d\gamma\right] = -\frac{4\pi}{3}\rho(M_0).$$

Равенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

верно при всяком δ, и левая часть его не зависит от δ, поэтому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right) = -\frac{4\pi}{3}\rho(M) + \lim_{\delta\to 0}\iiint_{\Omega_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega.$$

Из существования второй производной функции V следует существование

$$\lim_{\delta\to 0}\iiint_{\Omega_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega = \iiint_{\Omega} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega.$$

Последний интеграл получен при специальном выборе окрестностей точки M_0 и называется главным значением интеграла.

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_0) = -\frac{4\pi}{3}\rho(M_0) + \iiint_{\Omega_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega.$$

Для производных $\partial^2 V/\partial y^2$ и $\partial^2 V/\partial z^2$ получаются аналогичные выражения. Поскольку $1/r$ – гармоническая функция, получаем

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho(M_0).$$

Таким образом, объёмный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho \text{ внутри тела}$$

и уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \text{ вне тела.}$$

Неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f \qquad (7)$$

при условии дифференцируемости f внутри некоторой области Ω имеет частное решение

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} \frac{f}{r} d\omega .$$

Отсюда следует, в частности, что решение краевой задачи для неоднородного уравнения (7) можно свести к решению аналогичной краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$, если искомую функцию представить в виде суммы $u = u_0 + v$.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.

2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm