§ 10.5. Управляемость и наблюдаемость. Наблюдатели

Управляемость

Для решения задач управления важно знать, обладает ли объект свойством управляемости в смысле возможности его перевода из заданной начальной точки (или области) в заданную конечную точку (или область). Выше при рассмотрении задач оптимального управления предполагалось, что объект таким свойством обладает, иначе не имело бы смысла ставить эти задачи. Кроме того, обычно разработчик, выбирая структуру системы управления, прежде всего заботится о том, чтобы то, что мы называем объектом управления, обладало свойством управляемости, и делает он это на основе инженерных знаний и опыта. Но в сложных случаях не исключена ошибка в выборе структуры системы управления, из-за чего объект не будет обладать указанным свойством. Поэтому возникает проблема управляемости — проблема установления обладания объектом свойства управляемости. Эта проблема впервые была поставлена лишь во второй половине нашего века.

Перейдем к строгому определению свойства управляемости объекта и установлению критерия управляемости.

Пусть объект задается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r.$$

Здесь пока принимается, что допустимое множество $\mathbf{U}_t$ значений управления совпадает со всем пространством R^r и допустимым управлением является любая кусочно-непрерывная вектор-функция, принимающая значения из R^r.

Объект называется вполне или полностью управляемым, если для любой пары точек $\mathbf{x}^0$ *и* $\mathbf{x}^f$ *из* R^n *существует допустимое управление на конечном интервале* $[t_0, t_f]$, *переводящее объект из точки* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ *в точку* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$.

В случае стационарного объекта всегда можно принять $t_0 = 0$. Если объект является линейным, т. е. задается уравнением вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\mathbf{u}; \ \mathbf{x} \in R^n, \ \mathbf{u} \in R^r, \qquad (10.83)$$

в приведенном определении можно одну из точек $\mathbf{x}^0$ или $\mathbf{x}^f$ зафиксировать, например положить $\mathbf{x}^0 = 0$ или $\mathbf{x}^f = 0$. Действительно, так как решение (10.83) при произвольном начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, t_0)\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

и при $x(t_0) = 0$

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)\,d\tau,$$

то задача перевода объекта (10.83) из произвольной начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в точку $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$ равносильна задаче его перевода из начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = 0$ в точку $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f - \mathbf{X}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0$. Аналогично, задача перевода объекта (10.83) из начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в произвольную конечную точку $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$ равносильна задаче его перевода из начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 - \mathbf{X}^{-1}(t_f, t_0)\mathbf{x}(t_f)$ в точку $\mathbf{x}(t_f) = 0$. Таким образом, в случае линейного объекта свойство управляемости можно еще определить следующим образом: *объект* (10.83) *называется вполне управляемым, если для любой точки* $\mathbf{x}^f$ *из* R^n *существует допустимое управление на конечном интервале* $[t_0, t_f]$, *переводящее объект из точки* $\mathbf{x}(t_0) = 0$ *в точку* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$, *или объект* (10.83) *называется вполне управляемым, если для любой точки* $\mathbf{x}^0$ *из* R^n *существует допустимое управление на конечном интервале* $[t_0, t_f]$, *переводящее объект из точки* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ *в точку* $\mathbf{x}(t_f) = 0$.

Управляемость линейных стационарных объектов. Пусть матрица $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в (10.83) постоянны. Введем в рассмотрение так называемую *матрицу управляемости*

$$\mathbf{У} = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \qquad (10.84)$$

которая состоит из столбцов матрицы $\mathbf{B}$ и произведений матриц $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ и имеет размерность $(n \times nr)$. Справедлив следующий критерий управляемости: *линейный стационарный объект* (10.83) *вполне управляем тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости* (10.84) *равен* n.

Ниже при доказательстве этого критерия используется теорема Гамильтона—Кэли, согласно которой любая ($n \times n$)-матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^n - c_1 s^{n-1} - c_2 s^{n-2} - \ldots - c_n = 0.$$

На основании этой теоремы имеем

$$\mathbf{A}^n = c_1 \mathbf{A}^{n-1} + c_2 \mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_n \mathbf{E}. \tag{10.85}$$

Необходимость. Решение уравнения (10.83) при постоянных матрицах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau, \tag{10.86}$$

где матричная экспоненциальная функция $e^{\mathbf{A}t}$ определяется равенством

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots. \tag{10.87}$$

Для $\mathbf{x}(t_f)$ из (10.86) и (10.87) при $\mathbf{x}(0) = 0$ получаем

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{B}\alpha_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\alpha_1 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\alpha_2 + \ldots,$$

где

$$\alpha_k = \int_{t_0}^{t_f} \frac{(t_f - \tau)^k}{k} \mathbf{u}(\tau)\, d\tau, \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Умножив обе части равенства (10.85) справа на $\mathbf{B}$, получим

$$\mathbf{A}^n\mathbf{B} = c_1 \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + c_2 \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \ldots + c_n \mathbf{B}.$$

Умножив обе части последнего равенства слева на $\mathbf{A}$ и подставив выражение для $\mathbf{A}^n\mathbf{B}$, получим

$$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{B} = c_1^{(1)} \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + c_2^{(1)} \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \ldots + c_n^{(1)} \mathbf{B}.$$

Далее, проделав аналогичные операции над получаемыми соотношениями, будем иметь

$$\mathbf{A}^{n+l}\mathbf{B} = c_1^{(l)} \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + c_2^{(l)} \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \ldots$$
$$\ldots + c_n^{(l)} \mathbf{B}, \ l = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, $\mathbf{x}(t_f)$ представляется в виде линейной комбинации векторов, представляющих собой столбцы матрицы управляемости (10.84), и при любом допустимом управлении точка $\mathbf{x}(t_f)$ принадлежит подпространству, порожденному столбцами матрицы управляемости $\mathbf{У}$. Поэтому если ранг матрицы $\mathbf{У}$ меньше n, то существуют точки, не принадлежащие указанному подпространству, куда нельзя перевести объект (10.83) из точки $\mathbf{x}(0) = 0$.

Достаточность. Пусть ранг матрицы $\mathbf{У}$ равен n. Из (10.86) при $\mathbf{x}(0) = 0$ и $t = t_f$ имеем

$$\mathbf{x}(t_f) = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau.$$

Объект (10.83) вполне управляем, если интегральное уравнение

$$\mathbf{x}^f = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

при произвольном $\mathbf{x}^f$ из R^n имеет решение в классе допустимых управлений. Будем искать решение в виде [6]

$$\mathbf{u}(\tau) = (e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B})^T \mathbf{z},$$

где $\mathbf{z}$ — вектор из R^n. Подставив это выражение в интегральное уравнение, получим

$$\mathbf{x}^f = \mathbf{D}\mathbf{z},$$

где

$$\mathbf{D} = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)} \mathbf{B} (e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B})^T\, d\tau.$$

Таким образом, вопрос о существовании решении интегрального уравнения свелся к вопросу о существовании решения алгебраического уравнения. Полученное алгебраическое уравнение имеет решение при произвольном $\mathbf{x}^f$, если $\det \mathbf{D} \neq 0$. Допустим противное: $\det \mathbf{D} = 0$. Тогда соответствующее однородное уравнение имеет ненулевое решение, т. е. существует вектор $x_\perp \neq 0$ такой, что $\mathbf{D}\mathbf{x}_\perp = 0$. Умножив слева на $x_\perp^T$ и подставив выражение для $\mathbf{D}$, получим

$$\mathbf{x}_\perp^T \mathbf{D}\mathbf{x}_\perp = \int_0^{t_f} \mathbf{x}_\perp^T e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\left(e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\right)^T \mathbf{x}_\perp \, d\tau =$$

$$= \int_0^{t_f} \left| \mathbf{x}_\perp^T e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\right|^2 d\tau = 0.$$

В силу непрерывности подынтегрального выражения последнее равенство возможно, если при всех $0 \leqslant \tau \leqslant t_f$

$$\mathbf{x}_\perp^T e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B} = 0. \qquad (10.88)$$

Используя (10.87), нетрудно показать, что

$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

Дифференцируя тождество (10.88) по τ, получим

$$\mathbf{x}_\perp^T \mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B} = 0, \; k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

или при $\tau = t_f$

$$\mathbf{x}_\perp^T \mathbf{A}^k \mathbf{B} = 0, \; k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$. Из последних равенств следует, что ненулевой вектор $x_\perp$ из R^n ортогонален всем вектор-столбцам матрицы управляемости **У**, а это невозможно, так как по условию ранг матрицы **У** равен n. Следовательно, допущение о том, что $\det \mathbf{D} = 0$, неверно. Критерий управляемости полностью доказан.

Управляемость объекта (10.83) полностью определяется матрицами **A** и **B**, поэтому используют еще следующую терминологию: *пара* (**A**, **B**), *в которой* **A** *и* **B** *— матрицы размерности* $n \times n$ *и* $n \times r$ *соответственно, называется вполне управляемой, если объект* (10.83) *вполне управляем.*

Рассмотрим неособое (невырожденное) преобразование

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{x}, \; \det \mathbf{T} \neq 0.$$

В новых переменных уравнение (10.83) принимает вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}u, \qquad (10.89)$$

где $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$. Как легко проверить, $\widetilde{\mathbf{A}}^k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{T}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому матрица управляемости объекта (10.89)

$$\widetilde{\mathbf{У}} = [\widetilde{\mathbf{B}}\ \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{B}}\ \widetilde{\mathbf{A}}^2\widetilde{\mathbf{B}} \ldots \widetilde{\mathbf{A}}^{n-1}\widetilde{\mathbf{B}}] = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{У}.$$

Так как ранг матрицы $\mathbf{T}^{-1}$ равен n, то ранг матрицы $\widetilde{\mathbf{У}}$ совпадает с рангом матрицы $\mathbf{У}$. Таким образом, свойство управляемости не зависит от выбора системы координат.

Назовем областью управляемости линейного стационарного объекта область, состоящую из точек, в которые может быть переведен объект из точки $\mathbf{x}^0 = 0$ за конечное время или, что то же самое, из которых объект может быть переведен в точку $\mathbf{x}^f = 0$ за конечное время. Очевидно, если объект вполне управляем, то его область управляемости совпадает со всем фазовым пространством. Если объект не вполне управляем, то, как было показано при доказательстве критерия управляемости, объект не может быть переведен из точки $\mathbf{x}^0 = 0$ в точку, которая не принадлежит подпространству R_y — подпространству, порожденному вектор-столбцами матрицы управляемости. Можно показать, что область управляемости совпадает с подпространством R_y, поэтому подпространство R_y называют *подпространством управляемости.*

Пусть ранг матрицы управляемости объекта (10.83) равен l ($l \leqslant n$). Сформируем матрицу $\mathbf{T}$ преобразования $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)$, где вектор-столбцы матрицы $\mathbf{T}_1$ образуют базис l-мерного подпространства управляемости (в частности, ими могут быть l независимых столбцов матрицы управляемости), а вектор-столбцы матрицы $\mathbf{T}_2$ вместе с вектор-столбцами матрицы $\mathbf{T}_1$ образуют базис n-мерного пространства. Тогда уравнение (10.83) в новых переменных приобретает вид так называемой *канонической формы управляемости* [10]:

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_{11} & \widetilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \widetilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}^{(1)} &= \widetilde{\mathbf{A}}_{11}\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)} + \widetilde{\mathbf{A}}_{12}\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)} + \widetilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}; \\ \dot{\widetilde{\mathbf{x}}}^{(2)} &= \widetilde{\mathbf{A}}_{22}\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.90)$$

где $\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ — l-вектор; $\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ — $(n-l)$-вектор; $\widetilde{\mathbf{A}}_{11}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{12}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{22}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_1$ — матрицы соответствующей размерности.

Из структуры системы уравнений (10.90) видно, что вектор $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ неуправляем: закон его изменения во времени никак не зависит от управления. Наоборот, вектор $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ и соответственно пара $(\tilde{\mathbf{A}}_{11}, \tilde{\mathbf{B}}_1)$ вполне управляемы: состояния, вида $\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\,(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}0)$ («col» обозначает столбец) принадлежит подпространству управляемости. Используя представление уравнения объекта в канонической форме управляемости, можно сформулировать следующий критерий управляемости: объект вполне управляем в том и только в том случае, если его уравнение нельзя неособым преобразованием привести к виду (10.90), где множество координат вектора $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ не пусто.

Стабилизируемость. Если линейный объект не вполне управляем, то его вектор состояния можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{у}} + \mathbf{x}_{\perp},$$

где $x_{\text{у}}$ — вектор из подпространства управляемости $R_{\text{у}}$; $x_{\perp}$ — вектор, ортогональный всем элементам из $R_{\text{у}}$, т. е. элемент из ортогонального дополнения $R'_{\text{у}}$. Подпространство $R'_{\text{у}}$ называют *подпространством неуправляемости*. Из доказательства критерия управляемости следует, что объект не может быть переведен из точки $\mathbf{x}^0$ в точку $\mathbf{x}^{(1)}$, если $\mathbf{x}^0$ $(\mathbf{x}^0 \neq 0)$ или $\mathbf{x}^{(1)} \times$ $\times\, (\mathbf{x}^{(1)} \neq 0)$ принадлежат подпространству неуправляемости. В связи с этим возникает вопрос, всегда ли необходимо, чтобы объект был вполне управляем, если условия работы синтезируемой системы управления таковы, что она в процессе функционирования попадает в подпространство неуправляемости. Оказывается, что для синтеза устойчивой системы управления важным является не полная управляемость, а стабилизируемость.

Стационарный линейный объект

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

называется стабилизируемым, если в представлении $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{у}} +$ $+\, \mathbf{x}_{\perp}$ *неуправляемая составляющая* $\mathbf{x}_{\perp} \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Непосредственно из определения следует, что вполне управляемый объект является стабилизируемым, так как в этом случае $\mathbf{x}_{\perp} = 0$. Точно так же асимптотически устойчивый объект является стабилизируемым, так как в этом случае $\mathbf{x} \to 0$ при $t \to \infty$, когда $\mathbf{u}\,(t) = 0$.

Если выбрана такая система координат (такой базис), что уравнение объекта принимает вид канонической формы управляемости (10.90), то неуправляемая составляющая имеет вид $\widetilde{\mathbf{x}}_{\perp} = \mathrm{col}\,(0, \widetilde{\mathbf{x}}^{(2)})$. Поэтому в этой системе координат $\widetilde{\mathbf{x}}_{\perp} = 0$ в том и только в том случае, когда $\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)} = 0$. Из канонической формы управляемости (10.90) видно, что *объект является стабилизируемым в том и только в том случае, если матрица* $\widetilde{\mathbf{A}}_{22}$ *является асимптотически устойчивым, т. е. ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.*

Стабилизируемость объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

как и управляемость, полностью определяется матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, поэтому используют еще следующую терминологию: *пара* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, *в которой* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ — *матрицы размерности* $n \times n$ *и* $n \times r$ *соответственно, называется стабилизируемой, если стабилизируемым является соответствующий им объект.*