1. Динамическая система. Фазовое пространство. Состояние равновесия. Периодические и квазипериодические траектории.

Динамическая система — это математическая модель, описывающая эволюцию состояния системы во времени. Она может быть задана дифференциальными уравнениями (непрерывное время) или итерационными отображениями (дискретное время). Пример: движение маятника, описываемое уравнением $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = 0$.

Фазовое пространство — множество всех возможных состояний системы. Каждая точка в нём соответствует определённому набору переменных состояния (например, координата и скорость для маятника). Размерность пространства равна числу независимых переменных. В консервативных системах фазовый объём сохраняется (теорема Лиувилля).

Состояние равновесия — точка в фазовом пространстве, где система остаётся неизменной во времени. Для системы $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ это точки, где $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Пример: маятник в положении покоя ($\theta = 0$, скорость $= 0$). Устойчивость определяется линеаризацией:

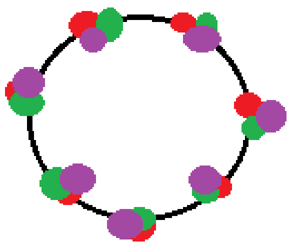
- **Устойчивый узел/фокус** — траектории стремятся к точке.
- **Седло** — неустойчивая точка.
- **Центр** — нейтральная устойчивость (в консервативных системах).

Периодические траектории — замкнутые кривые в фазовом пространстве, соответствующие повторяющемуся движению с периодом T. Пример: колебания маятника без трения. Визуально это **предельный цикл** (для диссипативных систем) или замкнутая орбита (для консервативных).

Квазипериодические траектории — движение, складывающееся из нескольких периодических компонентов с несоизмеримыми частотами ($\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$). В фазовом пространстве такие траектории заполняют поверхность тора и никогда не замыкаются. Пример: движение в системе с двумя независимыми осцилляторами ($\theta_1(t) = \omega_1 t$, $\theta_2(t) = \omega_2 t$). От хаотических траекторий отличаются предсказуемостью и отсутствием экспоненциальной чувствительности к начальным условиям.

У квазипериодических траекторий нет точного периода, но есть квазипериод:

$$|x^*(t+T) - x^*(t)| < \varepsilon$$



2. Системы ОДУ. Точечные отображения. Гомео- и диффеоморфизм, Решение ДС, траектория. Поток. Решение точечного отображения. Векторное поле. Пространство ДС. Пространство параметров. Топологическая эквивалентность. Грубые системы. Неблуждающие траектории.

Системой ОДУ n-го порядка называется совокупность ДУ каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0, \end{cases}$$

2. Точечные (рекуррентные) отображения. Если в динамической системе независимая переменная (время) t изменяется дискретно, то приходим к *дискретной* динамической системе:

$$\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_n), \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}(t_j). \qquad (3)$$

Такие системы называют обычно *отображениями*, а иногда *каскадами*. В этом случае оператор эволюции представляет собой некоторую функцию, которая сопоставляет набор динамических переменных в момент времени t_n набору переменных в момент времени t_{n+1}.

Опр. Вектор-функцию F с областью определения в пространстве U и значениями V F: U -> V вместе со своей обратной функцией F^{-1} называют гомеоморфизмом, если эта функция непрерывна и задаёт взаимо-однозначное отношение между U и V.
Опр. Если функция ещё и гладкая (дифференцируема хотя бы один раз), то F называют диффеоморфизмом.

Решение ДС, траектория

- **Решение** — функция $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющая системе ОДУ.
- **Траектория** — кривая в фазовом пространстве, соответствующая решению.

Решение ДС: $\varphi: R \times M \to M, t \in R, x_0 \in M, x(t) = \varphi(t, x_0)$, где φ-поток.

Решение точечного отображения

Последовательность точек $\{x_n\}$, полученная итерацией отображения $x_{n+1} = F(x_n)$. Пример: $x_n = F^n(x_0)$.

Векторное поле

Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, задающая направление и скорость изменения состояния в каждой точке фазового пространства. Для системы $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, векторное поле — это $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Diff(M) – пространство ДС, где Diff - диффеоморфизм

Пространство ДС

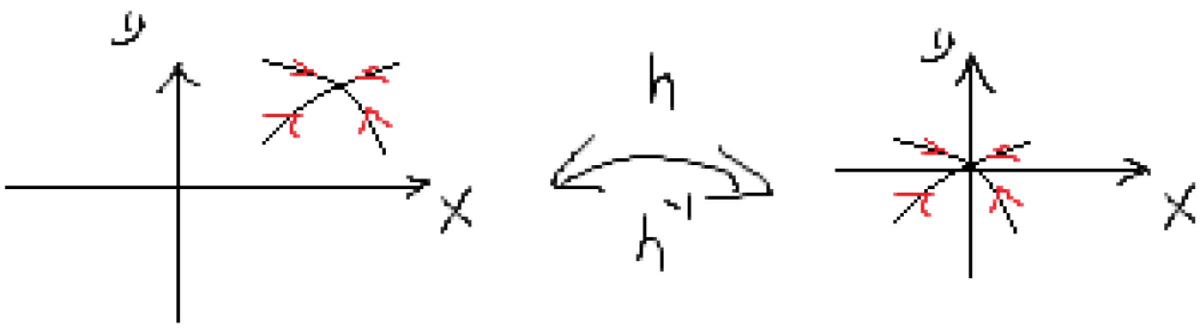
Фазовое пространство — множество всех возможных состояний системы. Например, для маятника: $(\theta, \dot{\theta})$.

Пространство параметров

Множество значений параметров, влияющих на поведение системы. Например, в логистическом отображении параметр r управляет переходом от стабильности к хаосу.

Топологическая эквивалентность

Две системы топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм, переводящий траектории одной в траектории другой с сохранением направления времени. Пример: маятник с трением и без трения не эквивалентны.



$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "f_2"] & M \end{tikzcd} \text{ — коммутативно}$$

$$\Downarrow$$

$$f_1 \sim f_2$$

Грубые системы — это системы дифференциальных уравнений, у которых топологическое поведение траекторий не меняется при малых возмущениях правой части. Согласно общепринятой точке зрения только

F_0 - груб, если в $Diff(M)$ $\exists$ окр. $U_0(F_0)$:

$\forall F_1 \in U_0(F_0)$: $F_1 \sim F_0$

Точки, которые возвращаются в свою окрестность бесконечно часто при $t \to \infty$. Включают:

- Периодические орбиты,
- Состояния равновесия,
- Хаотические аттракторы.

Опр. Траектория для любой окрестности которой u(x) существует такое n, что $F^n(u) \cap u \neq \emptyset$.

$x(t)$ - неблуж.

$\exists\ n/T : \forall\ U$ окр. $x(t)$ $\begin{matrix} F^n(U) \cap U \neq \emptyset \\ \varphi^T U \cap U \neq \emptyset \end{matrix}$

3. Состояния равновесия и неподвижные точки, k-кратные циклы. Диссипация. Консервативность. Устойчивость (по Ляпунову, орбитная, асимптотическая, по Лагранжу). Инвариантное многообразие. Системы первого порядка. Грубые и негрубые системы.

Состояния равновесия и неподвижные точки

- **Состояние равновесия** — точка в фазовом пространстве непрерывной системы ($\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$), где $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Пример: маятник в покое.
- **Неподвижная точка** — точка в дискретной системе ($x_{n+1} = F(x_n)$), где $F(x^*) = x^*$. Пример: $x = 0$ для отображения $x_{n+1} = x_n$.

k-кратные циклы

Цикл периода k в дискретных системах — последовательность из k точек $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, где:

$$F(x_1) = x_2,\ F(x_2) = x_3,\ ...,\ F(x_k) = x_1.$$

Пример: цикл периода 2 в логистическом отображении при $r > 3$.

Диссипация и консервативность

- **Диссипативные системы** — теряют энергию (например, из-за трения). Фазовый объём сжимается. Пример: затухающий маятник.
- **Консервативные системы** — сохраняют фазовый объём (теорема Лиувилля). Пример: идеальный маятник без трения.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x = f(x,y) \\ \dot{y} &= -y = g(x,y) \end{aligned}\right] \vec{F}(x,y)$$

$\mathrm{Tr}(J)$ $\qquad$ J

$$\operatorname{div}\vec{F} = \mathrm{Tr}(J) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 2 + (-1) = 1$$

$$\operatorname{div}\vec{F} > 0 \to \text{фаз } V \uparrow$$

$$\bar{x} = F(x)$$

$$\det(F'_x(x)) \vee 0$$

Типы устойчивости

1. **Устойчивость по Ляпунову** — малое возмущение начальных условий не приводит к уходу траектории далеко от точки.
2. **Асимптотическая устойчивость** — траектории не только остаются близко, но и стремятся
точке равновесия.
3. **Орбитная устойчивость** — устойчивость всей траектории (например, предельного цикла).
4. **Устойчивость по Лагранжу** — траектории остаются в ограниченной области фазового пространства. Пример: движение планет в Солнечной системе.

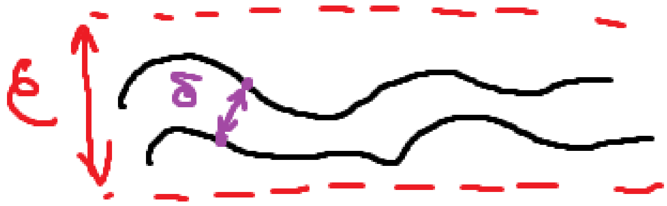
$\{\gamma = x \mid x = x^*(t)\}$ – уст. по Ляп., если:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x(t, x_0)\ d(x_0, x^*(0)) < \delta$

$\Rightarrow d(x(t, x_0), x^*(t)) < \varepsilon$

Уст асимпт.: $d(x(t), \gamma) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

Уст. орбит.: $d(x_0, x_0^*) < \delta \Rightarrow d(x(t), \gamma) < \varepsilon$



Уст по Лагранжу: $\|x^*(t)\| < R \quad t \to \pm\infty$

Инвариантное многообразие

Подмножество фазового пространства, которое система переводит сама в себя.

- **Устойчивое многообразие** — траектории стремятся к точке равновесия.
- **Неустойчивое многообразие** — траектории удаляются от точки.

  Пример: сепаратрисы в системе с седловой точкой.

$W_p \subseteq M$

$x_0 \in W_p \Rightarrow \forall t \quad x(t) \in W_p$

Системы первого порядка

Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Пример: экспоненциальный рост $\frac{dx}{dt} = rx$.

Грубые и негрубые системы

- **Грубые системы** — их качественное поведение (например, тип устойчивости) не меняется при малых возмущениях параметров. Пример: осциллятор с устойчивым предельным циклом.
- **Негрубые системы** — малые изменения параметров приводят к качественным изменениям (бифуркациям). Пример: система вблизи точки бифуркации Хопфа.

4. Осциллятор Ван-дер-Поля.

Уравнение осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

где:

- x — координата,
- $\mu > 0$ — параметр нелинейности и демпфирования.

Особенности

1. **Самовозбуждающиеся колебания**:
   - При малых x член $-\mu(1 - x^2)\dot{x}$ работает как отрицательное демпфирование, увеличивая амплитуду.
   - При больших x ($|x| > 1$) демпфирование становится положительным, уменьшая амплитуду.
   - Система стремится к **устойчивому предельному циклу** — периодической траектории с постоянной амплитудой.

2. **Фазовый портрет**:
   - При $\mu = 0$ — гармонический осциллятор (эллиптические орбиты).
   - При $\mu > 0$ — рождение предельного цикла (замкнутая кривая в фазовом пространстве).
3. **Устойчивость**:
   - Точка равновесия $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ является **неустойчивым фокусом** при $\mu > 0$.
   - Все траектории, кроме начала координат, притягиваются к предельному циклу.

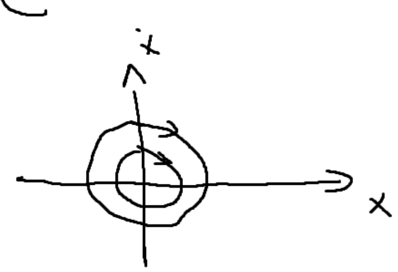
$$\ddot{x} + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\varepsilon(1 - x^2)y - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

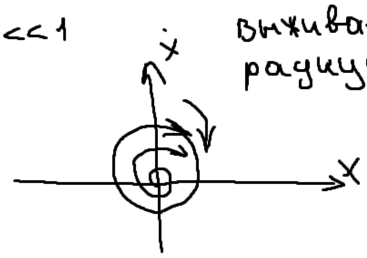
$\longrightarrow$ метод усредн. $\longrightarrow \dot{\rho} \approx \frac{\varepsilon\rho}{8}(4 - \rho^2)$

$\varepsilon = 0$



$\varepsilon << 1$

выживает орбита радиуса 2



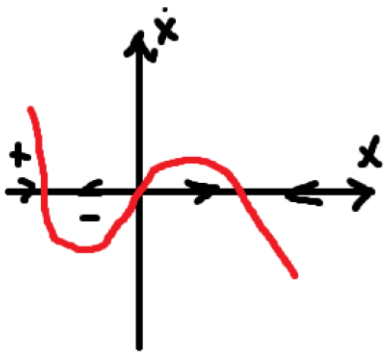
5. Бифуркации одномерных систем (биф. вилка, транскритическая биф.). Одномерные отображения.

1. Типы бифуркаций в одномерных системах:

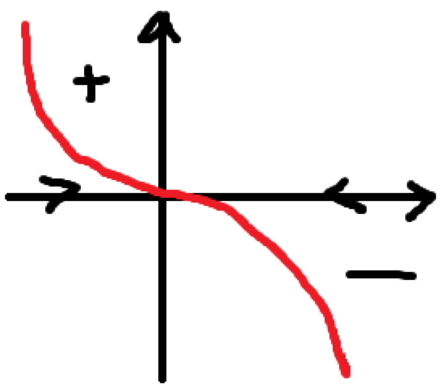
- **Бифуркация вилка**:
  Возникает, когда при изменении параметра одна точка равновесия разделяется на две новые.
  Пример: Уравнение $\frac{dx}{dt} = rx - x^3$.
  - При $r < 0$: одна устойчивая точка в $x = 0$.
  - При $r > 0$: точка $x = 0$ становится неустойчивой, появляются две устойчивые точки $x = \pm\sqrt{r}$.
- **Транскритическая бифуркация**:
  Происходит обмен устойчивостью между двумя точками равновесия.
  Пример: Уравнение $\frac{dx}{dt} = rx - x^2$.
  - При $r = 0$: точка $x = 0$ единственная.
  - При $r \neq 0$: точки $x = 0$ и $x = r$.
  - При $r < 0$: $x = 0$ устойчива, $x = r$ неустойчива.
  - При $r > 0$: наоборот.

Вилка: $\dot{x} = \lambda x + Lx^3 + \varepsilon$

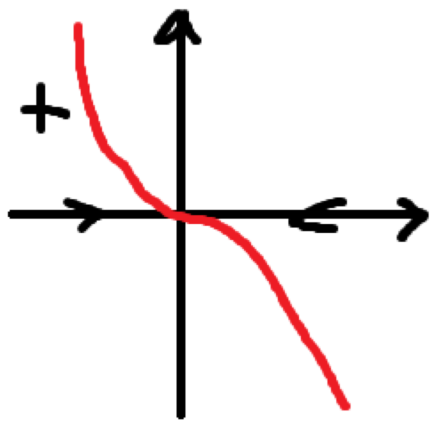
L<0, λ>0



L<0, λ=0

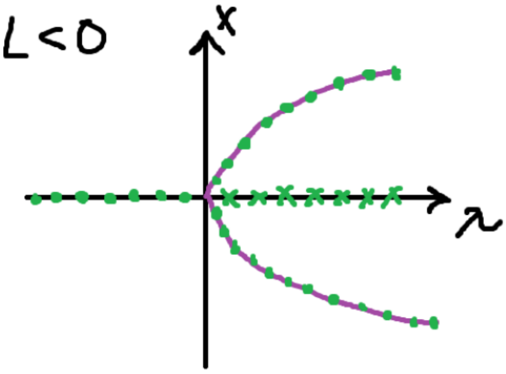


L<0, λ>0



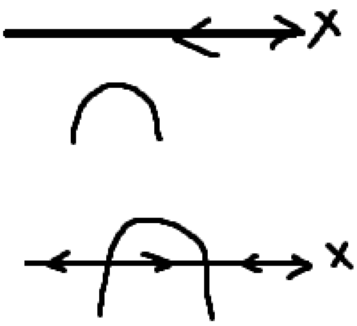
Седло-узловая:

$L<0$

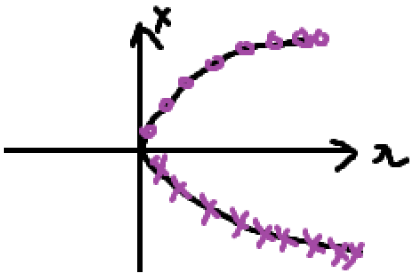


$\dot{x} = \lambda - x^2$

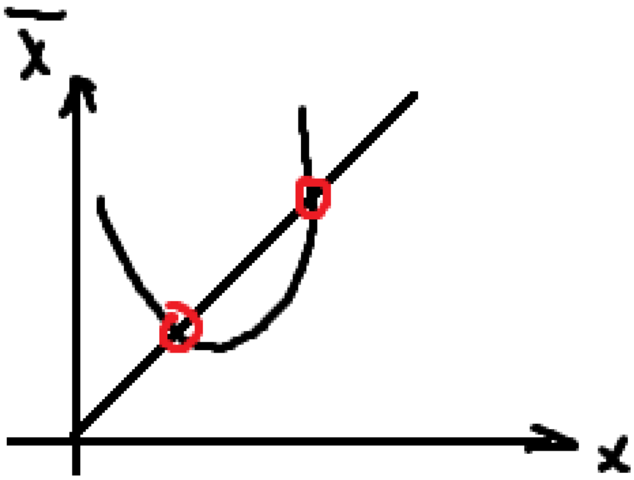
$\lambda < 0$



$\lambda = 0$



$\bar{x} = \lambda + x + x^2$



2. Одномерные отображения:

Это дискретные системы вида $x_{n+1} = f(x_n)$.
Пример: Логистическое отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.

- При увеличении параметра r возникают бифуркации удвоения периода (например, переход от устойчивой точки к циклу периода 2).
- Диаграмма бифуркаций показывает переход от порядка к хаосу через каскад бифуркаций.

---

3. Ключевые моменты:

- **Устойчивость**: Определяется через производную $f'(x)$ в точке равновесия.
  - $|f'(x)| < 1$: точка устойчива.
  - $|f'(x)| > 1$: точка неустойчива.

6. Грубое отображения, Бифуркации отображения, Двумерные ДС и состояния равновесия в них, Бифуркации двумерных систем (Седлоузла, Андронова-Хопфа, Гомоклиническая).

Грубое отображение — это отображение, структурно устойчивое к малым возмущениям параметров. Его качественное поведение (например, количество и тип периодических точек) не меняется при небольших изменениях.
Бифуркации отображений — изменения структуры отображения при вариации параметра.

Двумерные ДС: $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$.

Состояния равновесия находятся из $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$.

Типы СР: узел(λ_1,λ_2 действительны, различны, одного знака), седло(λ_1,λ_2 действительны, различны, разных знаков), фокус (λ_1,λ_2 комплексны, различны, одного знака), центр(λ_1,λ_2 комплексны, действительная часть равна 0, разных знаков)

1. **Седлоузловая бифуркация**: Слияние седла и узла с последующим исчезновением.
2. **Бифуркация Андронова-Хопфа**: Рождение предельного цикла из устойчивого фокуса при изменении параметра.
3. **Гомоклиническая бифуркация**: Возникновение сложной динамики при пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий седла.

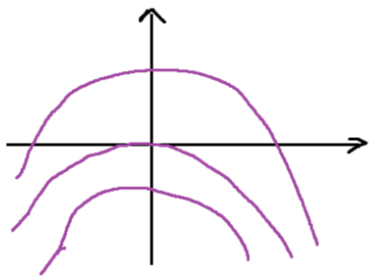
Седло-узел:

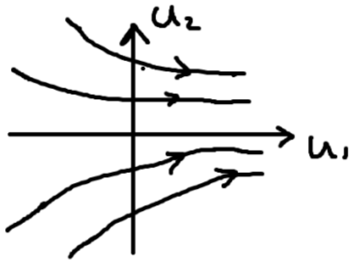
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$ седло-узел

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + u_1^2 \\ \dot{u}_2 = \lambda_1 u_2 \end{cases}.$$

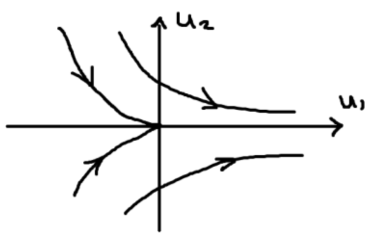
Бифуркация происходит в одном многообразии

μ < 0

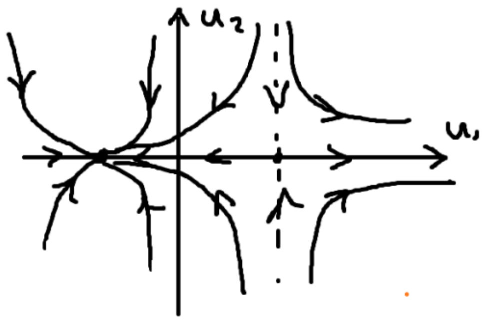




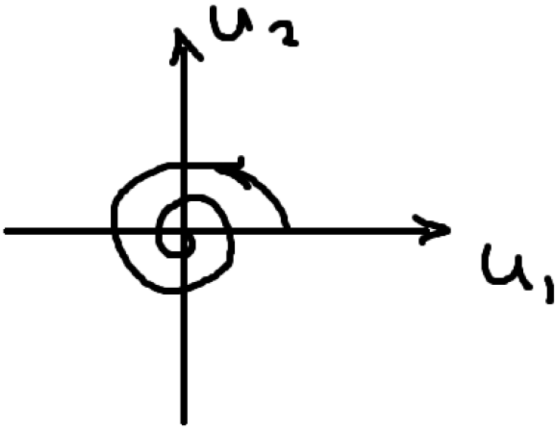
μ = 0

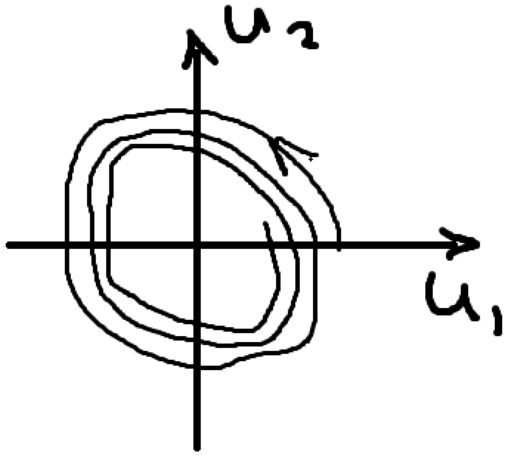


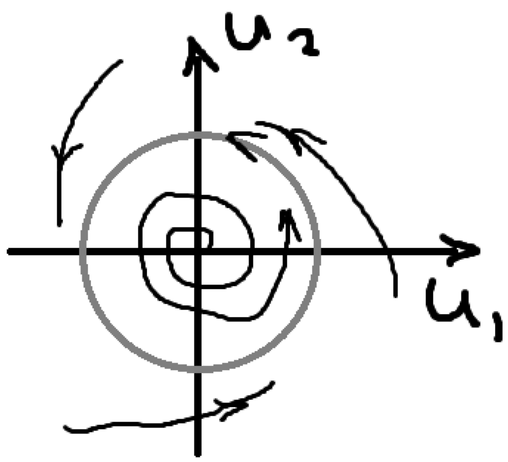
μ > 0

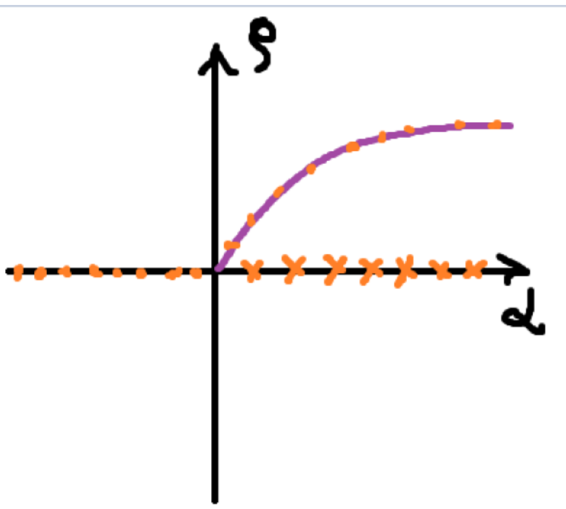


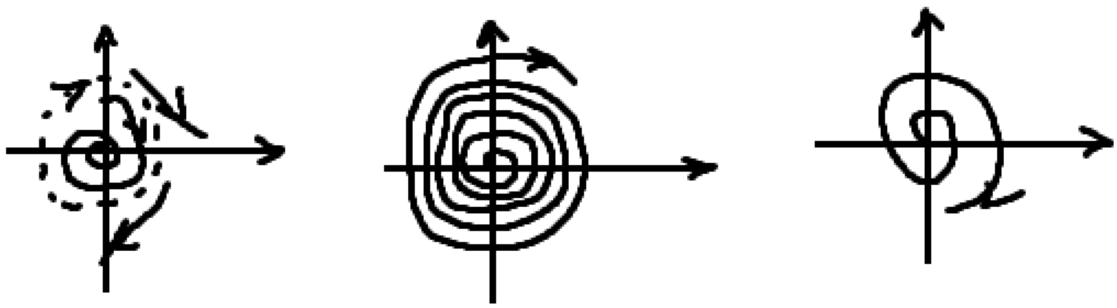
Андронова-Хопфа:





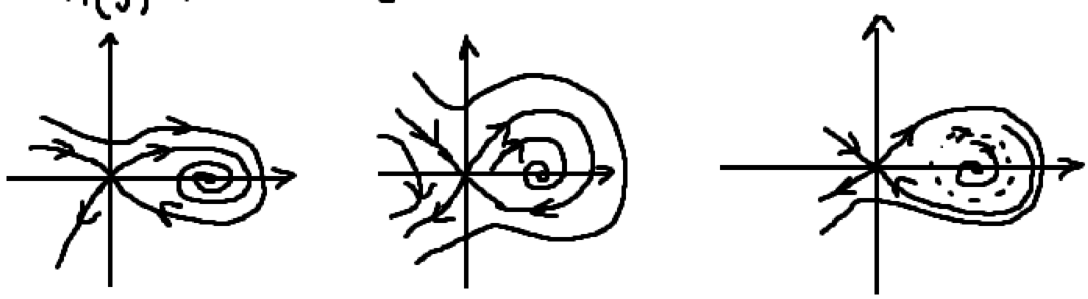




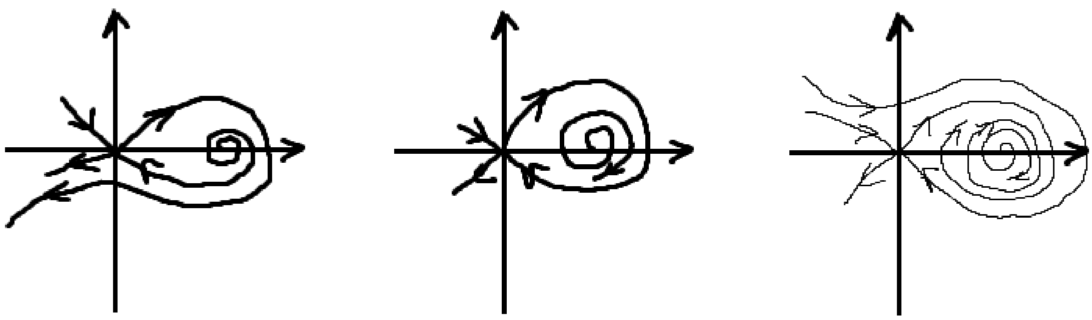


Биф Андр.-Леонтовича

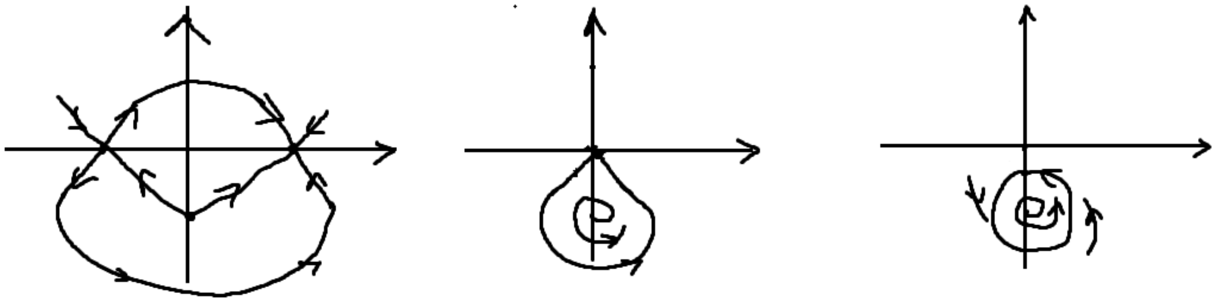
$\delta = Tr(J) > 0$ – седловая величина



$\delta < 0$



Гомоклиническая:



8. Поворот поля. Кривая Трикоми в уравнении математического маятника.

Поворот поля

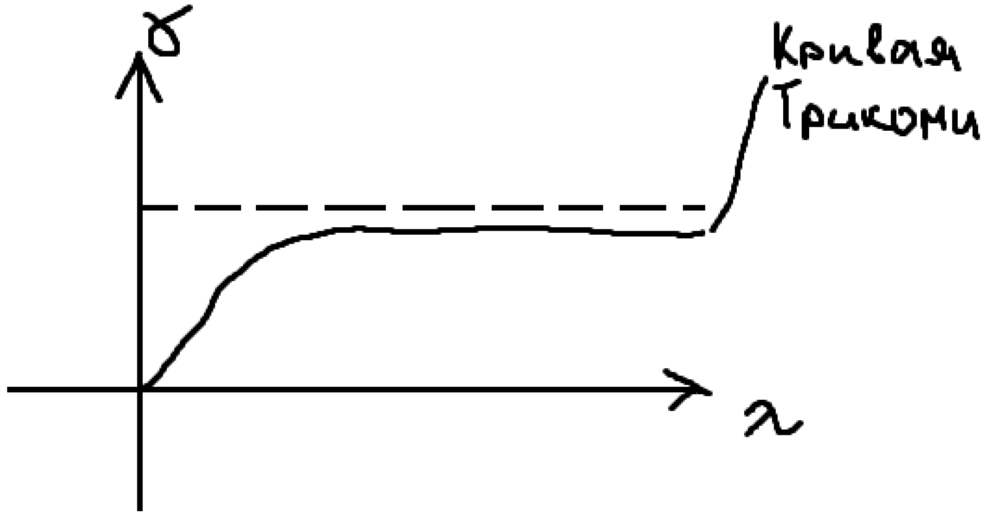
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,\mu) \\ \dot{y} = g(x,y,\mu) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} = \underbrace{k(x,y,\mu)}_{\text{угл. коэф.}}$$

$k'_\mu > 0$ – поле повор <u>против</u> часов. стр. с рост μ

$k'_\mu < 0$ – по часовой

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \sin x = \gamma \text{ – мат. маятн.}$$

С помощью поворота поля можно доказать, что в мат. Маятнике существует петля Трикоми(петля сепаратрисс седла). λ - поворачивает поле, γ - сближает корни



9. Метод функции Ляпунова, Критерий Бендиксона-Дюлака.

$\dot{x} = f(x)$, $f(0)=0$, $x=0$ – сост. рав.

$V = V(x)$, $V(0)=0$, $V(x)>0 \ \forall x \neq 0$

$\dot{V} = (\nabla \vec{V}, \vec{F}(x))$

$\dot{V}|_{V(x)=c} < 0$ $\quad V=c$ – пов без конт.
лин. ур. поле ориент внутрь

$\dot{V}|_{V(x)=c} > 0$ $\quad V=c$ – поле наружу

$\dot{V}|_{V(x)<c} < 0$, $x=0$ уст. в диске $V(x) \leq c$

$\dot{V}|_{V(x)>c} < 0$, $x=0$ неуст в диске $V(x) \leq c$

Если D не меняет знак в области, то в этой области нет замкнутых интегральных кривых или не более одной кривой, охватывающей особенность. Обратное не значит, что они есть. Справедливо для 2D-систем.

Крит. Бендиксона-Дюлака

$B(x,y) \in C^k$, $k>1$

$$D = \frac{\partial(Bf_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial y}$$

10. Уравнения на торе.

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1, \varphi_2) \\ \dot{\varphi}_2 = f_2(\varphi_1, \varphi_2) \end{cases}$$

лин. случ.

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = f(\varphi_1, \varphi_2) = r$$

т.к. тор

$$\varphi_2 = r\varphi_1 + \varphi_2^0 = 2\pi \quad / : 2\pi$$

$\bar{x} = r + x$ (отобр. окружн.)

1) $r \in \mathbb{Q}$, период. орбита

2) $r = \frac{p}{q}$ $\quad \varphi\left(t + q\frac{2\pi}{\omega}\right) = \varphi(t) + p\frac{2\pi}{\omega}$

3) $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ весь тор

11. Число вращения Пуанкаре.

$$\varphi = \omega t$$

$$\dot{\varphi} = f(\varphi, \omega t)$$

$$r = \lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(\varphi_0, t)}{\omega t}$$

Св-ва

1) r не зависит от φ_0

2) $r = \frac{q}{p}$ т.е. $r \in \mathbb{Q} \iff$ сист. имеет период. реш

$\varphi(t + p\frac{2\pi}{\omega}) = \varphi(t) + q2\pi$

3) φ - иррац $\Rightarrow \exists$ квазипериод. обмотка

4) $h(\varphi_0) = \varphi^*(p\frac{2\pi}{\omega}, \varphi_0) - 2\pi q - \varphi_0$ - меняет знак, то такое r - уст.

5) ур-е грубое, если r-уст, $h(\varphi_0)$ - простой (нет кратных корней)

12. Системы третьего порядка и состояния равновесия в них.

$$z^3 + \ldots = 0$$

1) 3 действ. корня

2) 2 комплексных + 1 действ.

13. Теорема Адамара-Перрона, теорема о центральном многообразии. Бифуркации трёхмерных систем. Периодические движения в двухмерной неавтономной системе. Матрица монодромии. Теорема Флоке.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$ есть такая система

$X^*(t+\tau) = X^*(t)$ если есть периодическая траектория

линеаризуем её в окрестности этой траектории

$\dot{u} = A(t)u$, $A(\tau)$ - матр. монодромии

период. матр

$$\det A(\tau) = \exp \int_0^\tau Tr(A(t))dt$$

$\exists$ с.з. $\rho_{1,2}$

Т. Флоке утв., что можем записать решение в следующем виде:

$u(t) = p(t)e^{\lambda t}$, где $\lambda = \frac{1}{\tau}\ln\rho$

1. **Теорема Адамара-Перрона и центральное многообразие**

Теорема Адамара-Перрона утверждает, что в окрестности гиперболической неподвижной точки динамическая система локально топологически сопряжена своей линеаризации. Это позволяет разделить фазовое пространство на:

- **Устойчивое многообразие** W^s: траектории стремятся к точке.
- **Неустойчивое многообразие** W^u: траектории удаляются от точки.

т.е. с.р касается плоскости, заданной двумя близжайшими к нему собств. числами.

Теорема о центральном многообразии дополняет это, вводя третье многообразие:

- **Центральное многообразие** W^c: содержит траектории с нейтральной устойчивостью (например, периодические или квазипериодические).
  Уравнение для W^c вблизи точки равновесия:

$$\dot{z} = Az + f(z, y), \quad \dot{y} = By + g(z, y),$$

где A имеет собственные значения с нулевой вещественной частью, а B — гиперболические.

2. **Бифуркации трёхмерных систем**

В трёхмерных системах возникают сложные бифуркации, такие как:

- **Бифуркация Хопфа** в 3D: рождение предельного цикла из равновесия.
  Условие: пара комплексных собственных значений пересекает мнимую ось.
- **Седло-узловая бифуркация**: исчезновение/рождение пары равновесий.
- **Бифуркация удвоения периода**: переход от периодического движения к хаосу.

Пример для системы Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases}$$

где ρ — параметр, при критическом значении которого происходит бифуркация.

3. Периодические движения в двумерной неавтономной системе

Рассмотрим систему с периодическим возмущением:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) + \epsilon \cos(\omega t), \\ \dot{y} = g(x, y) + \epsilon \sin(\omega t). \end{cases}$$

Для анализа используются:

- **Метод усреднения**: замена быстрых осцилляций на средние значения.
- **Теория Пуанкаре-Бендиксона**: в двумерных автономных системах гарантирует существование предельных циклов, но для неавтономных систем требуется модификация.

4. Матрица монодромии и теорема Флоке

Матрица монодромии M строится для периодической траектории с периодом T. Она описывает эволюцию малых возмущений за один период:

$$M = \Phi(T),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений линеаризованной системы.

Теорема Флоке утверждает, что решение линейной системы с периодическими коэффициентами можно представить в виде:

$$X(t) = P(t)e^{Rt},$$

где $P(t)$ — периодическая матрица с периодом T, а R — постоянная матрица.

Мультипликаторы Флоке — собственные значения матрицы M. Если все мультипликаторы лежат внутри единичной окружности, периодическое движение устойчиво.

5. Взаимосвязь концепций

- **Центральное многообразие** упрощает анализ бифуркаций в 3D, сводя задачу к меньшей размерности.
- **Матрица монодромии** и **теорема Флоке** используются для исследования устойчивости периодических решений в неавтономных системах.
- **Бифуркации** в трёхмерных системах часто связаны с изменением структуры центрального многообразия.

Пример: В системе Ван-дер-Поля с шумом:

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = \epsilon\gamma\cos(\omega t),$$

бифуркация Хопфа и теория Флоке помогают предсказать переход от хаотических колебаний к синхронизированным.

14. Двумерное отображение в общем виде, типы и расположение неподвижных точек.

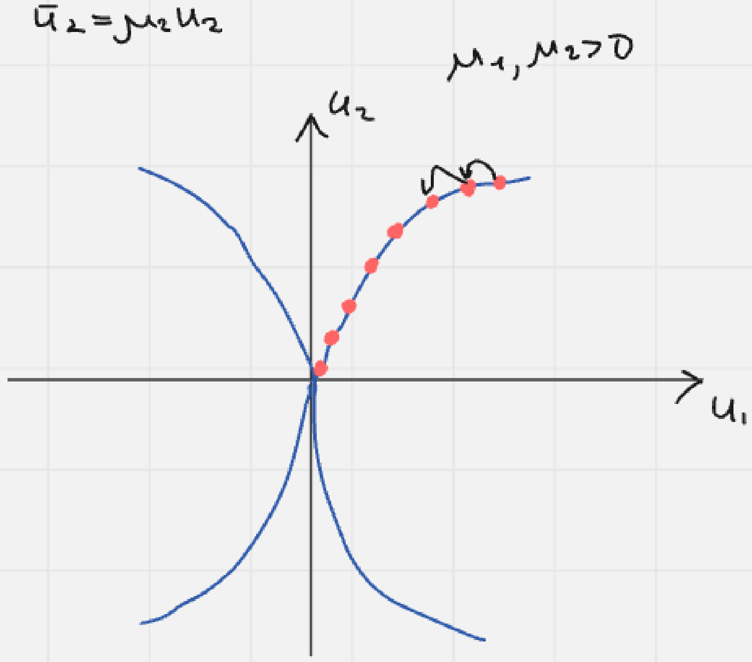
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = a x_1 + b x_2 \\ \bar{x}_2 = c x_1 + d x_2 \end{cases}$$

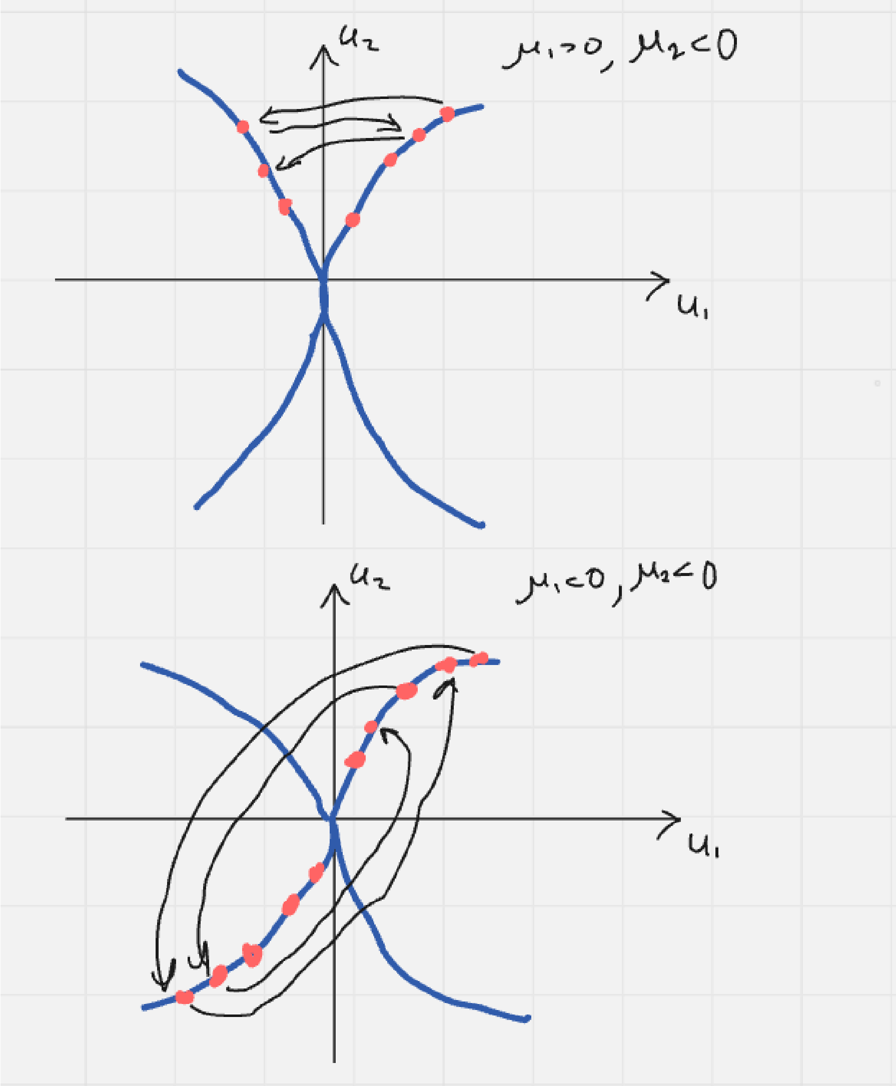
$$\bar{x} = A x$$

Смотрим относительно единичной окружности
В остальном совпадает с потоком

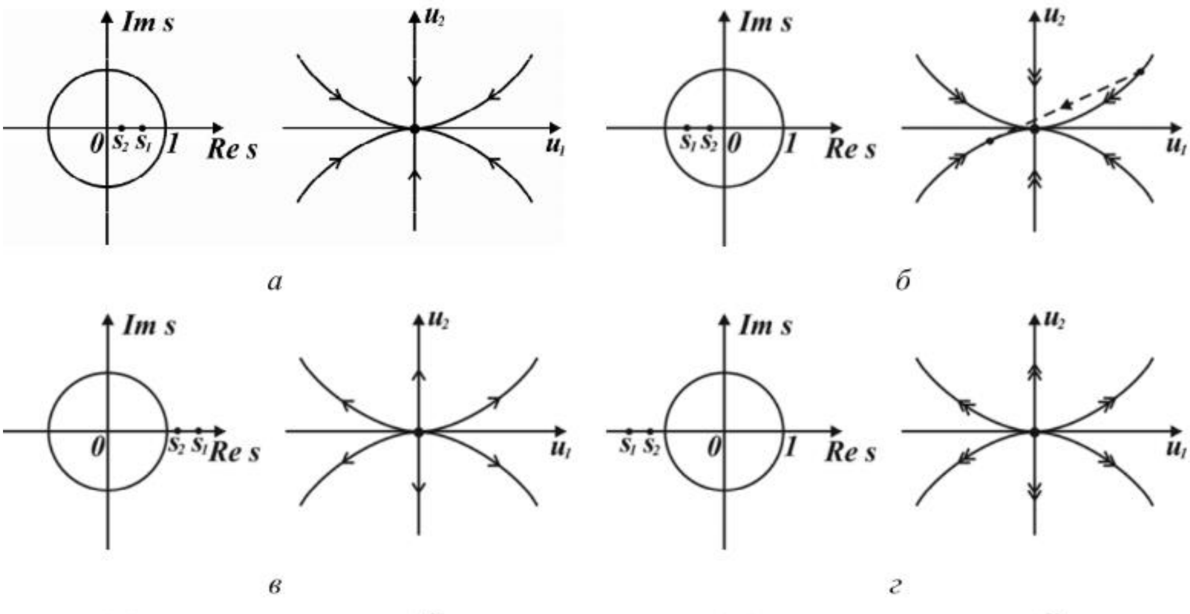
Так же важны знаки. От этого зависит как мы прыгаем по веткам

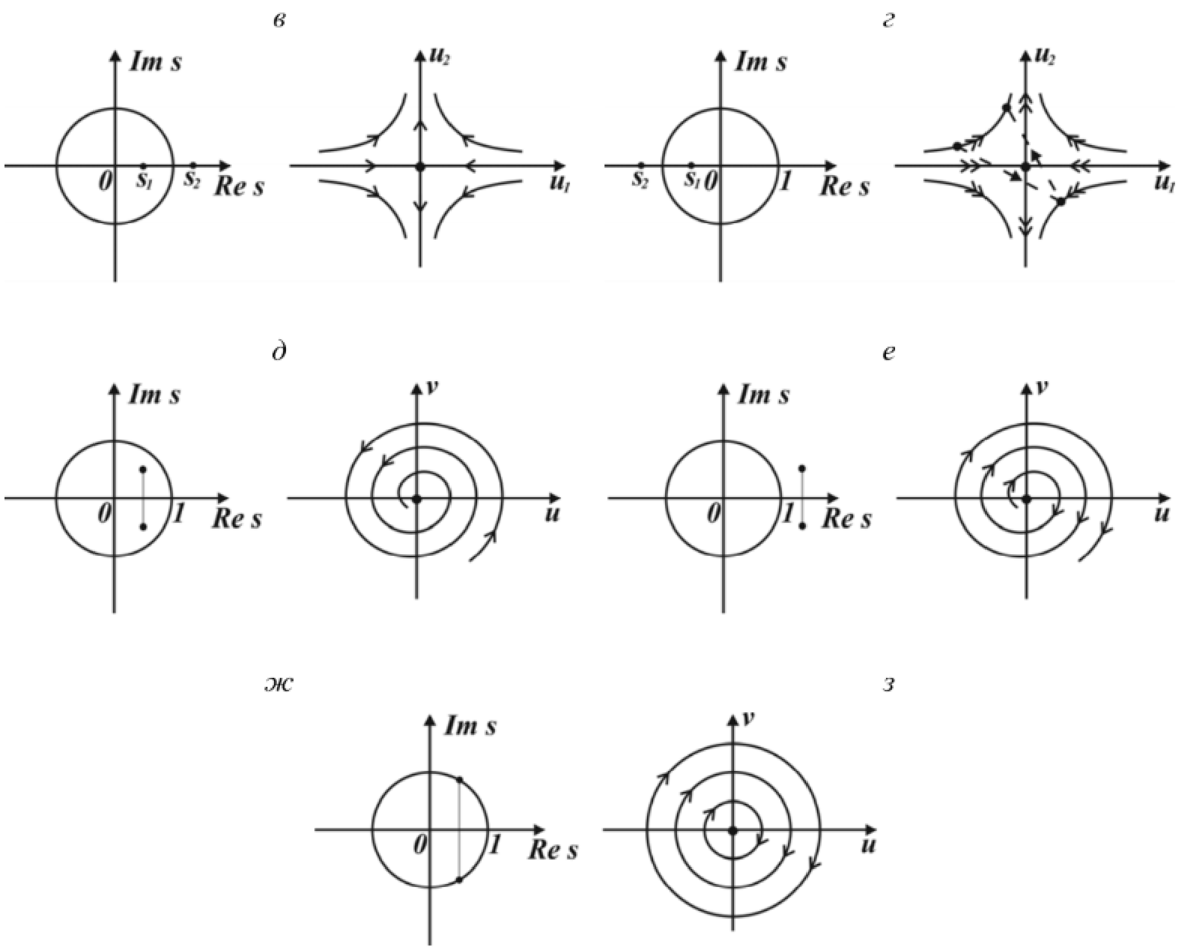
$$\bar{u}_1 = \mu_1 u_1$$
$$\bar{u}_2 = \mu_2 u_2$$





С фокусами будет мракобесие, но примерно похожее на это





15. Бифуркация Неймарка-Сакера. Осциллятор Стюарта-Ландау.

В системе не должно быть сильных резонансов

$\mu = e^{ik\theta}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \varepsilon) \\ \bar{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \varepsilon) \end{cases}$$

Тригонометрическая замена

$$\bar{z} = (1+\varepsilon)e^{i\theta} z + C(\varepsilon) z|z|^2 + \dots$$

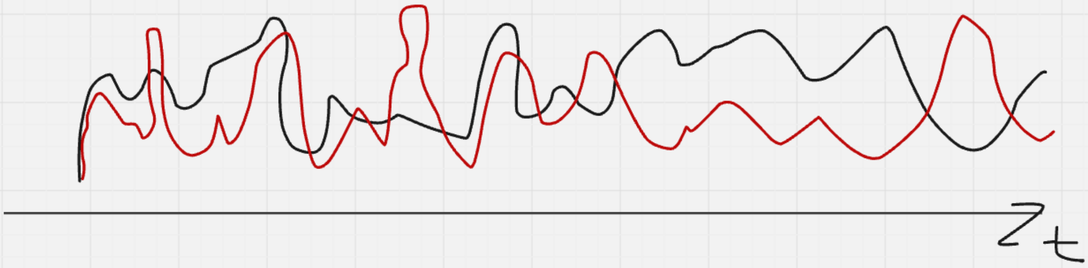
$$L = \mathrm{Re}\{e^{-i\theta(0)} C(0)\}$$ Аналог первой ляпуновской величины

Аналог бифуркации Андр-Хопф, только тут она происходить в двумерном подпространстве, и рождается(умирает) тор

16. Динамический хаос. Детерминированная система. Отображения растягивающие, топологически транзитивные, чувствительно-зависимые от начальных условий.

Динамический хаос — это явление в детерминированных нелинейных системах, при котором их поведение кажется случайным и непредсказуемым, несмотря на полное отсутствие стохастических воздействий. Это свойство возникает из-за экспоненциальной чувствительности к начальным условиям и сложной структуры фазового пространства.

Динамический хаос



Нет ни периода, ни квази периода. Вообще хз как это всё предугадывать
+чуть-чуть поменяли начальные условия, система ведет себя совсем подругому

Детерминированная система — это система, в которой будущее состояние полностью определяется её текущим состоянием и заданными законами эволюции, без участия случайных факторов.

1. **Растягивающие отображения**

Это отображения, которые увеличивают расстояние между близкими точками в фазовом пространстве. В контексте динамического хаоса это свойство обеспечивает экспоненциальное расхождение траекторий.

- **Пример**: Логистическое отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ при $r > 3.57$.
- **Математически**: Для двух близких начальных условий x_0 и $x_0 + \delta$:

$$|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \delta)| \approx \delta \cdot e^{\lambda n},$$

где $\lambda > 0$ — показатель Ляпунова.

опр. Отображение F называется расстягивающим на множестне J, если существует такое δ >0, что для любых x,y из J существет n: d(F^n(x), F^n(y))>= δ

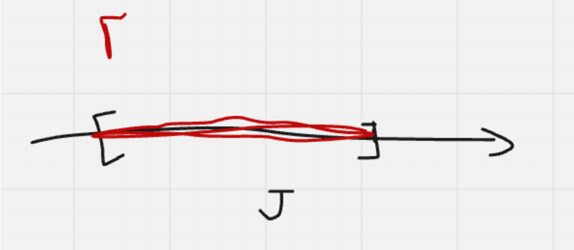
2. **Топологическая транзитивность**

Система называется топологически транзитивной, если для любых двух открытых множеств U и V в фазовом пространстве существует момент времени n, такой что:

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Это означает, что траектории могут попасть из любой области фазового пространства в любую другую.

Опр. Отображение F на J(вроде инвариантное множество) называется топологически транзитивным, если существует такая орбита, что её замыкание равно всему онвариантному интервалу.



3. Чувствительная зависимость от начальных условий

Существует константа $\delta > 0$, такая что для любой точки x и её окрестности U найдётся точка $y \in U$ и момент времени n, для которых:

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Это формализует "эффект бабочки": малые различия в начальных данных приводят к значительным изменениям в будущем.

Опр. Отображение F имеет чувствительную зависимость от начальных условий, если $\exists\alpha > 0\ \forall x_0 \in J\ \forall\varepsilon > 0\ \exists y_0 \in \varepsilon: d(x,y) < \varepsilon, d\big(x(t), y(t)\big) > \alpha, \forall t$

17. Целая траектория. Аттрактор. Максимальный аттрактор. Устойчивые и неустойчивые множества. Множество Кантора.

Целая траектория – траектория принадлежащая аттрактору и при t->+inf и при t->-inf

1. Целая траектория

Целая траектория в динамической системе — это функция $\gamma : \mathbb{R} \to X$, где X — фазовое пространство, удовлетворяющая уравнению эволюции системы для всех моментов времени $t \in \mathbb{R}$.

Аттрактор – прирьягивающее подмножество фазового пространства. Притягивает в какой-то окрестности

2. Аттрактор

Аттрактор — это компактное инвариантное множество $A \subset X$, обладающее свойствами:

- **Притяжение**: Существует окрестность $U \supset A$, такая что все траектории, начинающиеся в U, стремятся к A при $t \to \infty$.
- **Неразложимость**: Аттрактор минимален — не содержит меньших аттракторов.

Максимальные аттрактор. Пусть D-поглощающая область динамической системы fD⊂D, тогда множество $A = \bigcup_{t\geq 0} f^t D$ – это максимальный аттрактор в множестве D.

3. Максимальный аттрактор

Максимальный аттрактор — это наибольший по включению аттрактор в системе, который притягивает все траектории из всего фазового пространства (или его значительной части).

- **Формально**: $A_{\max} = \bigcap_{t\geq 0} \Phi^t(X)$, где Φ^t — поток системы.

4. Устойчивые и неустойчивые множества

- **Устойчивое множество $W^s(A)$:**
  Множество точек $x \in X$, таких что $\Phi^t(x) \to A$ при $t \to \infty$.

$$W^s(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(\Phi^t(x), A) = 0 \right\}.$$

- **Неустойчивое множество $W^u(A)$:**
  Множество точек $x \in X$, таких что $\Phi^t(x) \to A$ при $t \to -\infty$.

$$W^u(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}(\Phi^t(x), A) = 0 \right\}.$$

Канторово множество(пыль)
Берём отрезок, делим на три, середину выкидываем
Отстатки делим на три, середину выкидываем и т.д.

18. Странный ~~и квазистранный~~ аттракторы. Показатель Ляпунова, Отображение "тент". ~~Соленоид Смейла-Вильямса~~.

Странные аттрактор - притягивающее множество целых неустойчивых траекторий.

Показатель Ляпунова показывает степень расхождения изначально близких траекторийю. Для точечных отображений:

$$\Lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_n| = \ldots = \lim \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} f'(x_n)$$

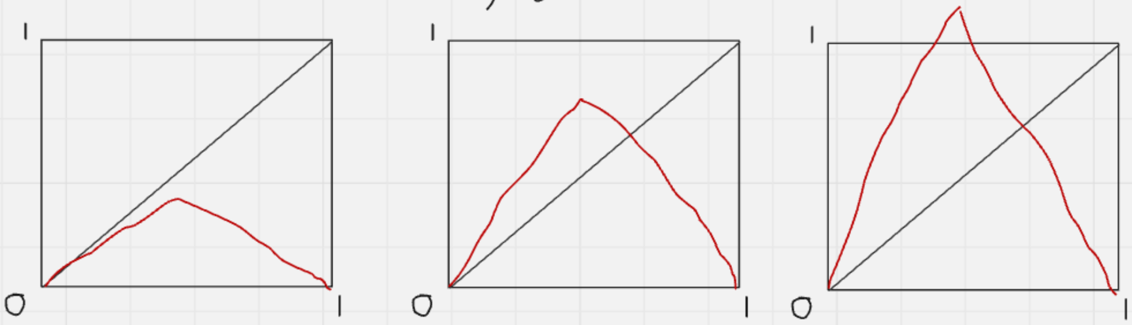
$\Lambda > 0$ – хаос

Зуб пилы, равномерное перемешивание, есть орбиты всех периодов.
Если число действительное, то ему соответствует периодиеская орбита, если комплексное – квазипереодиеская.
Соответствует сдвигу запятой в двоичном числе.

20. Лоренцевское отображение.

$$\bar{x} = \begin{cases} 2\alpha x, & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 2\alpha(1-x), & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$\alpha > 1$



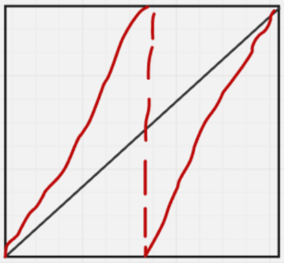
Просто уст точка

инвариантный интервал
странный аттрактор

через окошко убегут почти
все траектории, останется
Канторова пыль
Вроде тут динамический хаос

$2\alpha = 1$ континум устойчивых точек

$$\bar{x} = 2x \pmod 1$$



$\Lambda = \ln 2 > 0$

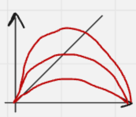
Хаос

19. Отображение “сдвиг Бернулли”.

21. Логистическое отображение (орбита периода 2, каскад удвоений, хаос) и замена для получения отображения “тент”.

Логист. отобр

$\bar{x} = ax(1-x)$

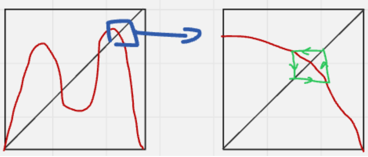


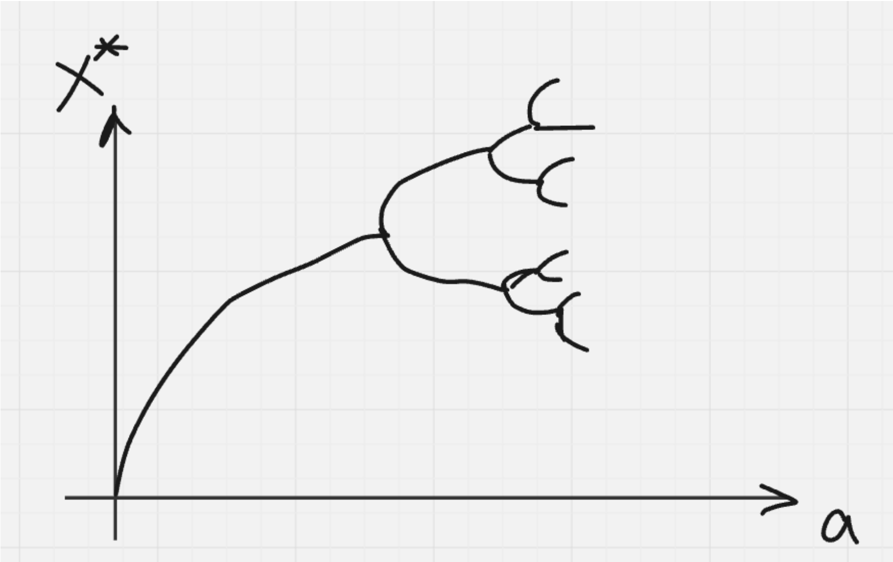
При возникновении второго корня:
седло-узловая бифуркация\транскритическая $a = 1$

При $a=2$ $x_1^* = \frac{1}{2}$ $\mu_{x_1^*} = 0 \Rightarrow x_1$ — суперустройчива

В какой-то момент возникнет
орбита периода 2 $a = 3$

Дальше бифуркация удвоения периода





Задача 4.8.8. При каком a отображение окружности $\bar{\varphi} = \phi + a\sin\varphi$ является гомеоморфизмом?

Обоснование:

1. **Производная отображения**:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = 1 + a\cos\varphi.$$

Для сохранения монотонности (инъективности) производная должна быть положительна для всех φ:

$$1 + a\cos\varphi > 0 \quad \forall\varphi.$$

2. **Экстремальные значения**:
   - При $\cos\varphi = 1$:

$$1 + a > 0 \implies a > -1.$$

   - При $\cos\varphi = -1$:

$$1 - a > 0 \implies a < 1.$$

Объединяя эти условия, получаем:

$$-1 < a < 1.$$

3. **Последствия**:
   - Если $|a| < 1$, отображение строго возрастает, биективно и имеет непрерывное обратное.
   - Если $|a| \geq 1$, производная обращается в ноль или отрицательна, что нарушает инъективность (например, при $a = 1$, в точке $\varphi = \pi$: $\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = 0$).

Задача 4.8.9. При каком k отображение

$$\begin{aligned} &\bar{x} = kx, && \text{при} \quad 0 \le x \le \tfrac{1}{2}, \\ &\bar{x} = 4(1-k)x^2 + (5k-4)\,x - k + 1, && \text{при} \quad \tfrac{1}{2} < x \le 1, \end{aligned}$$

является диффеоморфизмом отрезка $[0,1]$?

Обоснование:

1. **Непрерывность и дифференцируемость в точке $x = \frac{1}{2}$:**
   - Значение функции слева и справа:

$$\bar{x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2}.$$

   - Производная слева: k, производная справа: k.

     Условия выполняются при любом k.

2. **Монотонность (положительность производной):**
   - Для $0 \le x \le \frac{1}{2}$:

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = k > 0 \implies k > 0.$$

   - Для $\frac{1}{2} < x \le 1$:
     Производная $\frac{d\bar{x}}{dx} = 8(1-k)x + (5k-4)$ должна быть положительна на всём интервале.
     Минимум достигается при $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{d\bar{x}}{dx}\left(\frac{1}{2}\right) = k > 0.$$

     Максимум при $x = 1$:

$$\frac{d\bar{x}}{dx}(1) = 4 - 3k > 0 \implies k < \frac{4}{3}.$$

3. **Биективность:**
   При $0 < k < \frac{4}{3}$ отображение строго возрастает и переводит $[0,1]$ в $[0,1]$, что гарантирует биективность.
4. **Обратимость:**
   Положительная производная на всём отрезке обеспечивает существование дифференцируемой обратной функции.