Вариант 7. Остывание разогретого тела, помещенного с целью охлаждения в поток жидкости или газа, имеющего постоянную температуру ϑ, описывается дифференциальным уравнением

$$du/dx = -a\,(u - \vartheta);\ u\,(0) = u_0 .$$

Здесь **a** – постоянный, положительный коэффициент пропорциональности, **u (x)** – температура тела в момент времени **x**, u_0 – температура тела в начальный момент времени. Исследуйте численно зависимость температуры от времени. Сравните результаты (траектории) с вариантом № 8. Параметры системы: **a**, ϑ.

Явный метод Рунге-Кутта 4-го порядка

$$\frac{du}{dx} = f(x,u)$$

$$u(x_0) = u_0$$

$$\begin{cases} x_0,\ v_0 = u_0 \\ x_{n+1} = x_n + h_n \\ v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{6}\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, v_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, v_n + \frac{h_n}{2}\cdot k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, v_n + \frac{h_n}{2}\cdot k_2\right) \\ k_4 = f(x_n + h_n, v_n + h_n\cdot k_3) \end{cases}$$

Наша задача

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = -a(u-\theta); & a = const,\ a>0 \\ & \theta = const \\ u(0) = u_0; \end{cases}$$

Перепишем метод

$$\begin{cases} x_0,\ v_0 = u_0 \\ x_{n+1} = x_n + h_n \\ v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{6}(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4) \\ k_1 = -a(v_n - \theta) \\ k_2 = -a\left(v_n + \frac{h_n}{2}\cdot k_1 - \theta\right) \\ k_3 = -a\left(v_n + \frac{h_n}{2}k_2 - \theta\right) \\ k_4 = -a\left(v_n + h_n\cdot k_3 - \theta\right) \end{cases}$$

Аналитическое решение

$$\frac{du}{dx} = -a(u-\Theta)$$

$$\frac{du}{u-\Theta} = -a\,dx$$

$$\ln|u-\Theta| = -ax + \ln|C|$$

$$u = Ce^{-ax} + \Theta \;;\; C = \frac{u-\Theta}{e^{-ax}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f(x,u) \\ u(x_n) = v_n \end{cases}$$ – вспомог. задача

$\hat{u}^{(n)}(x_{n+1}) = \hat{u}^{(n)}_{n+1}$ – реш. вспом. з. в т. x_{n+1}

$e_{n+1} = u^{(n)}_{n+1} - v_{n+1}$ – лок. погр.

$$S = \frac{\hat{v}_{n+1} - v_{n+1}}{2^p - 1}$$

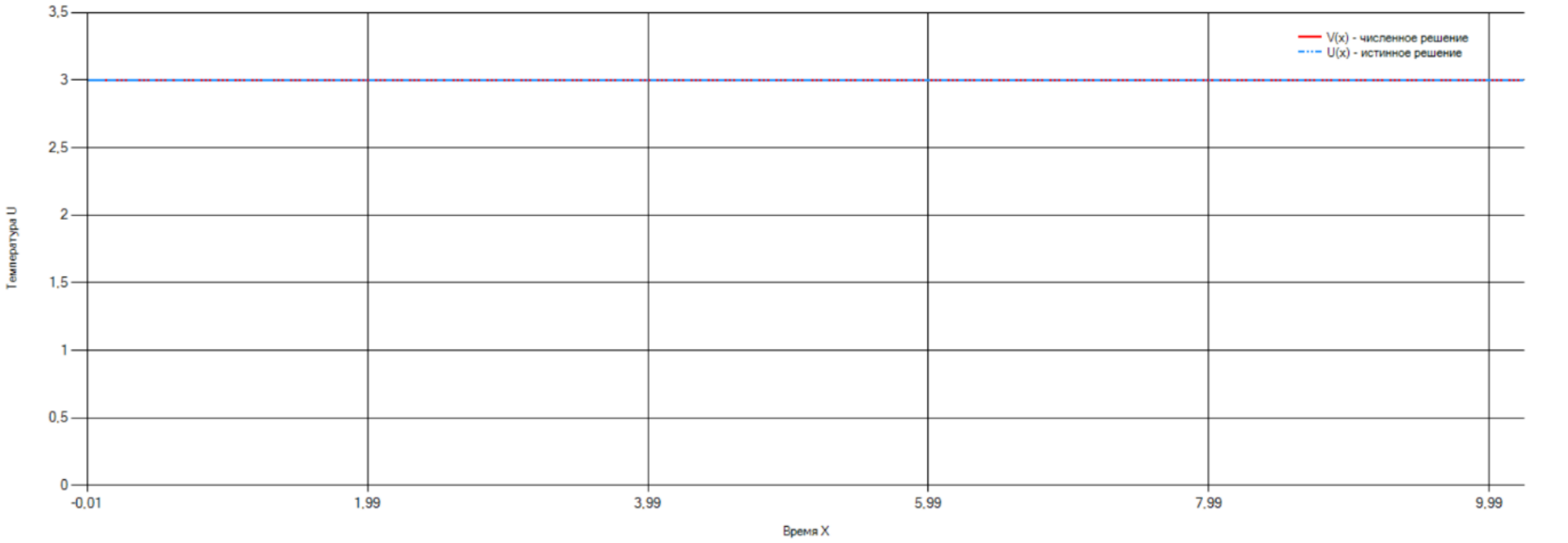
$v_{n+\frac{1}{2}}$ получ. из v_n с шаг. $\frac{h}{2}$

$\hat{v}_{n+1}$ получ. из $v_{n+\frac{1}{2}}$ с шагом $\frac{h}{2}$

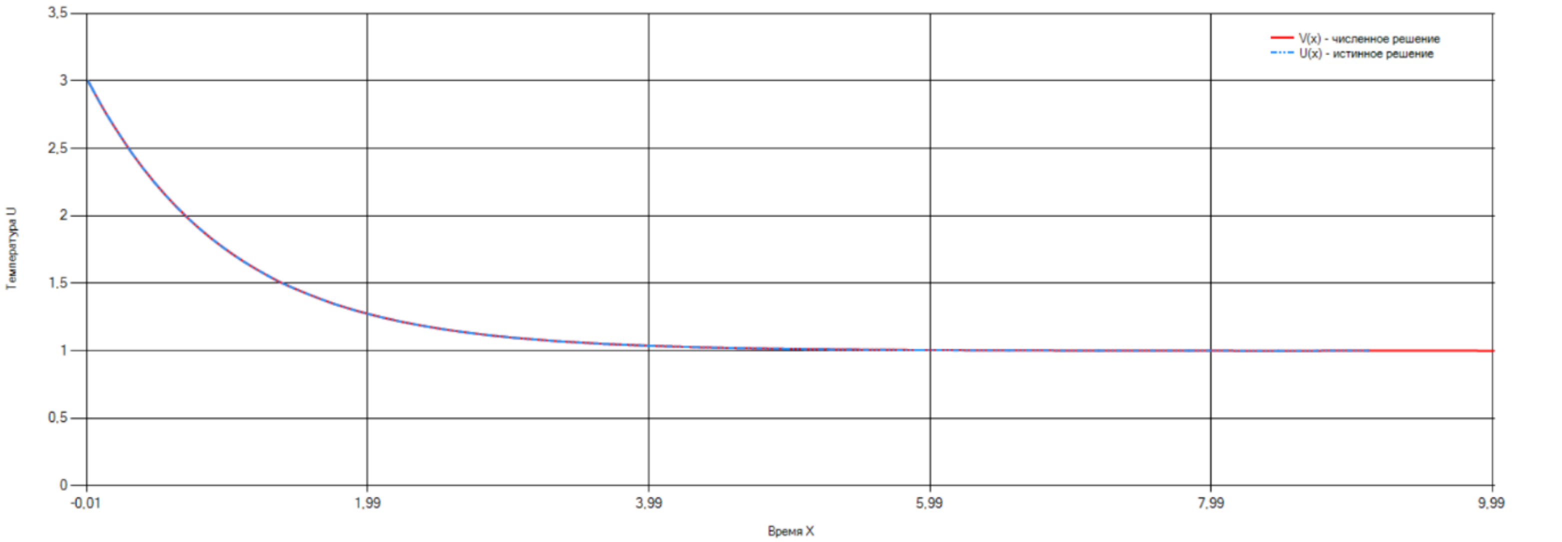
p – порядок метода

В нашем случае

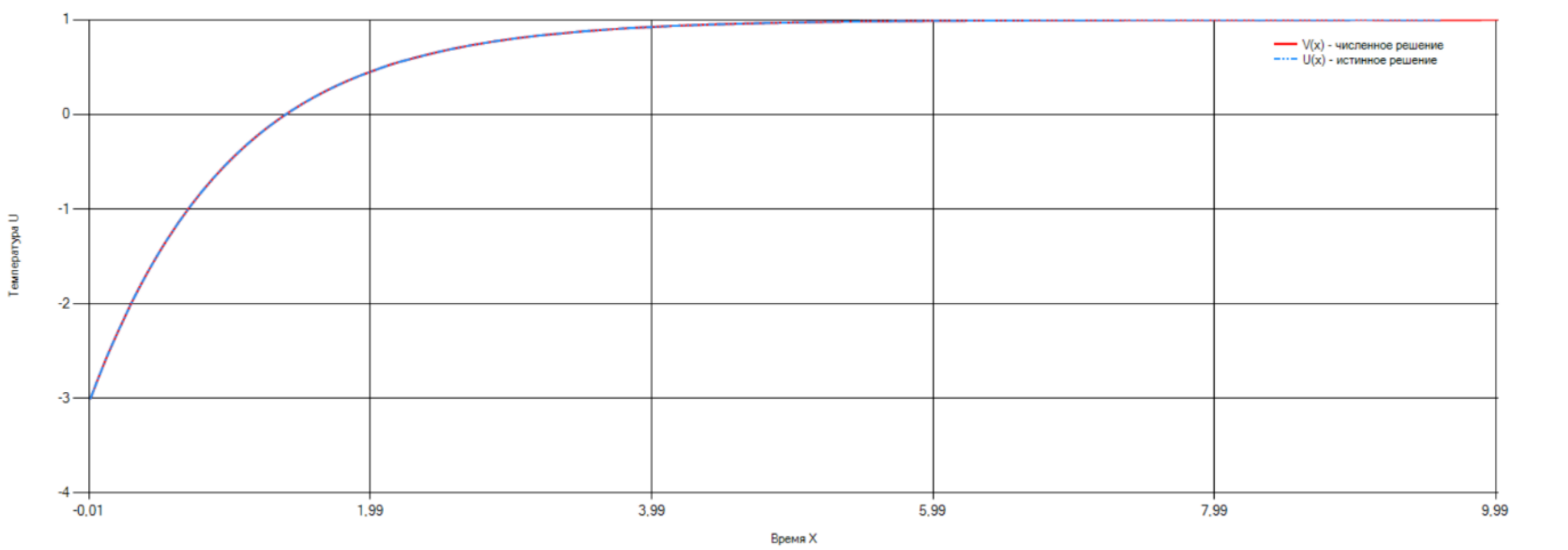
$$S = \frac{\hat{v}_{n+1} - v_{n+1}}{2^4 - 1} = \frac{1}{15}\left(\hat{v}_{n+1} - v_{n+1}\right)$$



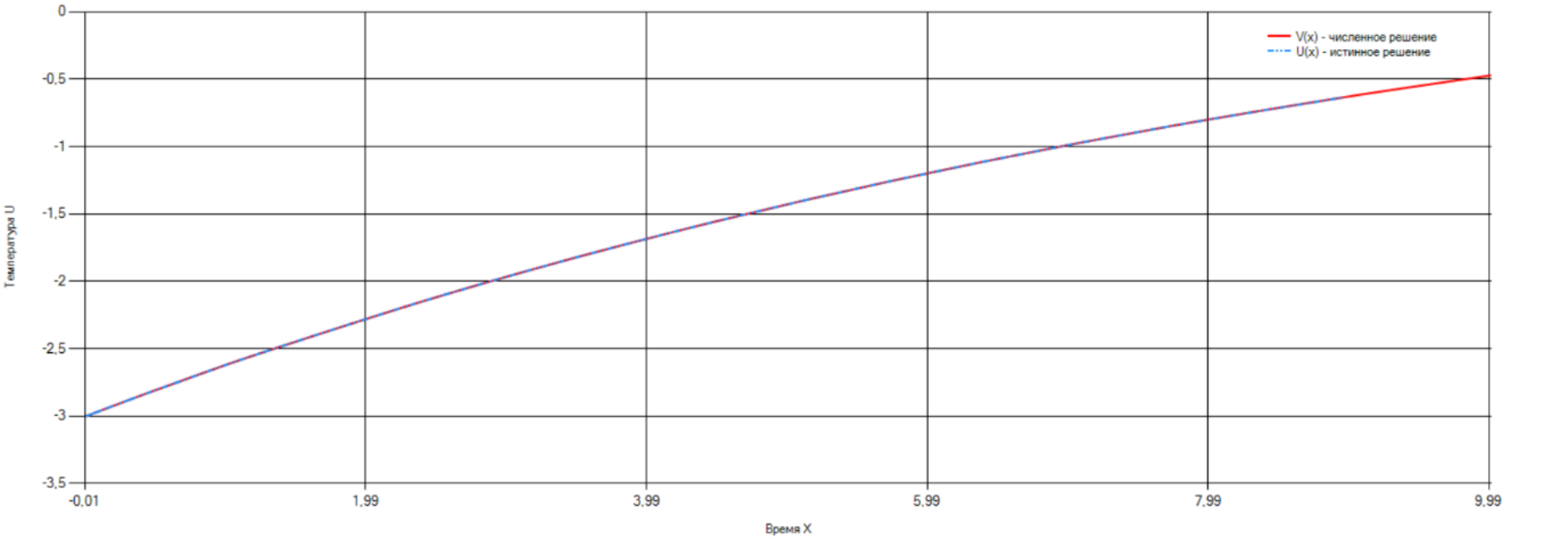
$u_0 = \vartheta$



$u_0 > \vartheta$

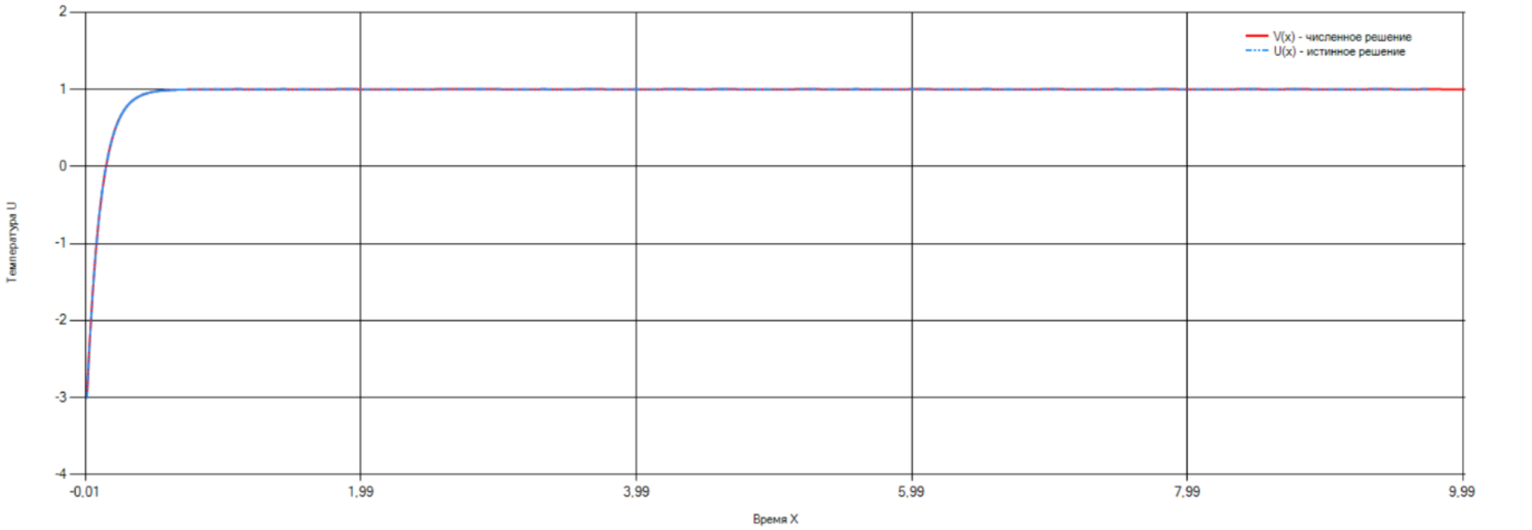


$u_0 < \vartheta$



$$0 < a \ll 1;$$

$$(a = 0{,}1)$$



$$a \gg 1;$$

$$(a = 10)$$

От параметра *a* зависит скорость изменения температуры