1. Найти аналитически решение задачи линейно-квадратичного регулирования:

$$\dot{x}_1 = x_1 + u, \qquad \dot{x}_2 = -x_2, \qquad \inf_u \int_0^\infty \Big(x_1^2 + x_2^2 + u^2\Big)dt.$$

2. Найти аналитически решение задачи оптимальной стабилизации для системы вида

$$\ddot{x} = u, \qquad \inf_u \int_0^\infty \Big(x^2 + 2\dot{x}^2 + u^2\Big)ds.$$

3. Найти решение задачи обобщенного линейно-квадратичного регулирования:

$$\dot{x}_1 = x_1 + u, \qquad \dot{x}_2 = -x_2 + u, \qquad \inf_u \int_0^\infty \Big(x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \dot{u}^2\Big)dt.$$

4. Вычислить для объекта

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

такой линейный закон управления, который минимизирует критерий

$$J = \int_0^\infty \Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2\Big)dt.$$

5. Вычислить для объекта $x^{IV} + x^{III} + \ddot{x} + \dot{x} + x = u$ такой линейный закон управления, который минимизирует критерий

$$J = \int_0^\infty \Big(5x^2 + 3\dot{x}^2 + 2\ddot{x}^2 + (x^{III})^2 + 10u^2\Big)dt.$$

6. Для линейной системы с квадратичным функционалом

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u, \qquad J = \int_0^\infty e^{2t}\left[x_1^2(t) + u^2(t)\right]dt,$$

покажите, что вещественные части собственных чисел замкнутой оптимальной системы удовлетворяют условию $\max \operatorname{Re} \lambda_k < -1$.

7. Покажите, что квадратичный функционал

$$J = \int_0^\infty \Big[Cx + Du\Big]^\top \Big[Cx + Du\Big]dt, \quad D^\top D > 0,$$

достигает своего наименьшего значения на траекториях линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad u \in \mathbb{R}^{n_u},$$

тогда и только тогда, когда

$$u^*(t) = -\Big(D^\top D\Big)^{-1}\Big(B^\top X + D^\top C\Big)x(t),$$

где матрица $X = X^\top > 0$ является решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати

$$C^\top C + A^\top X + XA - \Big(XB + C^\top D\Big)\Big(D^\top D\Big)^{-1}\Big(B^\top X + D^\top C\Big) = 0.$$