ЛЕКЦИЯ 8

Метод распространяющихся волн. Неоднородное уравнение. Устойчивость решения.

Неоднородное уравнение.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ -\infty < x < \infty, \ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \ -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Пусть $w_f(x,t,\tau)$ - решение вспомогательной задачи Коши

$$\frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}, \ -\infty < x < \infty, \ t > \tau, \tag{3}$$

$$w_f(x,\tau,\tau) = 0, \ \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \ t = \tau, \ -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Формула Д'Аламбера даёт

$$w_f(x,t,\tau) = w_f(x,t-\tau,0) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi. \tag{5}$$

Пусть функции

$$w_\psi(x,t,0) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \ w_\varphi(x,t,0) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi$$

являются решениями задачи (3), (4) при $\tau = 0$ и $f = \psi$, $f = \varphi$ соответственно.

Непосредственное дифференцирование показывает, что

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t,0) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

Поэтому формула Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi,$$

определяющая решение задачи Коши (1), (2) для однородного уравнения ($f \equiv 0$) может быть записана в виде

$$u(x,t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t,0) + w_\psi(x,t,0). \tag{6}$$

Лемма 1. *Решение неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными данными*

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^t w_f(x,t,\tau)d\tau. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцируя функцию (7) и учитывая условия (4), находим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = w_f(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau + f(x,t),$$

$$u_{xx}(x,t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x,t,\tau)d\tau = \frac{1}{a^2}\int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau.$$

Отсюда видно, что функция (7) удовлетворяет уравнению (1).

Из формул (6) и (7) сразу следует, что решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u(x,t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t,0) + w_\psi(x,t,0) + \int_0^t w_f(x,t,\tau)d\tau. \tag{8}$$

Пользуясь выражением (5), получаем

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\tau. \tag{9}$$

Прямая подстановка (9) в (1) показывает, что функция (9) в самом деле является решением задачи (1), (2) если существуют производные $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ и $\partial f/\partial x$.

Из формулы (4) следует, что функция w_f удовлетворяет уравнению при $t=\tau$, если f дифференцируема по x, то есть представление (8) возможно при тех же условиях, при которых решение задачи Коши существует.

Формула (9) показывает, что решение общей задачи (1), (2) может быть сразу написано, если имеется решение вспомогательной задачи (3), (4).

Устойчивость решения

Решение уравнения (1) однозначно определено начальными условиями (2). Докажем, что это решение меняется непрерывно при непрерывном изменении данных задачи.

Лемма 2. *Пусть $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – решения задач*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x),\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x),\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x)$$

соответственно. Каков бы ни был промежуток времени $[0,t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε , найдётся такое $\delta(\varepsilon,t_0)$, что u_1 и u_2 в течение промежутка времени $[0,t_0]$ будут различаться меньше чем на ε:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon,\ 0 \le t \le t_0,$$

если только начальные значения и правые части уравнений отличаются друг от друга меньше чем на δ:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta;\ |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta,\ |f_1(x,t) - f_2(x,t)| < \delta.$$

Доказательство. Функции u_1 и u_2 связаны со своими начальными значениями и правыми частями формулой (9), так что

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} |f_1(\xi,\tau) - f_2(\xi,\tau)| d\tau,$$

откуда получаем

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \le \delta(1+t_0) + \frac{1}{2a}\delta \cdot at^2 \le \delta(1 + t_0 + \frac{t_0^2}{2}),$$

что и доказывает утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0 + t_0^2/2}.$$

Обобщенные решения уравнения колебаний

Рассмотренные ранее постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения называются классическими, а постановка соответствующей краевой задачи - классической постановкой. Для доказательства существования таких решений требуются довольно жесткие условия на начальные, граничные функции и на правую часть уравнения.

Рассмотрим, например, задачу Коши для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < \infty. \tag{11}$$

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \tag{12}$$

является классическим решением уравнения (10) только в том случае, если функция ψ дифференцируема, а функция φ дифференцируема дважды. Более того, можно утверждать, что решения уравнения колебаний, удовлетворяющего условиям (11), не существует, если функции φ и ψ не имеют нужных производных. Действительно, если решение уравнения колебаний существует, то оно должно представляться формулой (12). Если же функции φ и ψ не дифференцируемы достаточное число раз, то формула (12) определяет функцию, не удовлетворяющую уравнению (10), то есть не существует решения этой задачи.

В наиболее интересных задачах начальные данные могут иметь довольно сильные особенности и условия их гладкости зачастую являются излишними. Например, при рассмотрении малых колебаний струны разумно считать, что ее начальное положение описывается непрерывной, лишь кусочно непрерывно дифференцируемой функцией φ, график которой имеет угловые точки. Считают при этом, что формула Д'Аламбера (12) правильно описывает физический процесс.

Для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требований гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые обобщенные решения и обобщенные постановки задач математической физики. При этом встаёт вопрос о том, какие функции можно называть решениями. Чтобы ответить на него, необходимо существенно обобщить понятие производной и вообще понятие функции, то есть ввести так называемые обобщенные функции. Понятие обобщенных решений, играющее большую роль в физике, было введено С.Л. Соболевым.

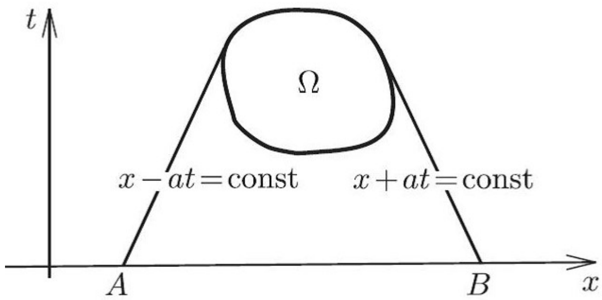
Класс обобщенных решений выбирается шире множества классических решений. Возможны разные варианты выбора такого класса. Естественно требовать при этом, чтобы были выполнены следующие требования.

1. Если классическое решение существует, то оно должно быть также и обобщенным решением задачи.

2. Класс обобщенных решений должен быть шире класса классических решений. Обобщенное решение должно существовать при более слабых ограничениях, чем классическое.

3. Обобщенное решение задачи должно быть единственным.

Дадим определение обобщенного решения задачи (10), (11). Пусть Ω - некоторая ограниченная область в полуплоскости $x \in \mathrm{R}^1$, $t \geq 0$, а отрезок $[A, B]$ на оси x - это множество зависимости решения в области Ω от начальных данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.



Пусть $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ - последовательности дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[A, B]$, которые при $n \to \infty$ равномерно сходятся на этом отрезке к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. Если при этом решения $u_n(x,t)$ начальных задач для уравнения (10) с начальными данными $\varphi_n(x)$ и ψ_n равномерно сходятся в области Ω к функции $u(x,t)$, то эта функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением задачи (10), (11).

Теорема 1. *Обобщенное решение задачи (10), (11) существует и единственно при любых непрерывных функциях* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса существуют последовательности полиномов $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$, которые при $n \to \infty$ равномерно сходятся на отрезке $[A, B]$ к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Функции $u_n(x,t)$, определенные формулами

$$u_n(x,t) = \frac{\varphi_n(x+at) + \varphi_n(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_n(\xi)d\xi, \qquad (13)$$

являются классическими решениями задачи (10), (11) с начальными данными $\varphi_n(x)$ и ψ_n. Эти функции непрерывно зависят от начальных функций (независимо от того, дифференцируемы эти функции или нет). Поэтому функции u_n равномерно сходятся при $n \to \infty$ к некоторой функции $u(x,t)$. Переходя к пределу в формуле (13), получаем, что функция u удовлетворяет равенству (12).

Так как при любом предельном переходе обобщенное решение записывается в виде формулы Д'Аламбера (12), оно единственно.

Список литературы

[1] Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Метод характеристик для одномерного волнового уравнения: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. - 72 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.