

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики

Лабораторная работа №3 по теории управления
Компьютерное управление скоростью вращения вала
электромотора

Выполнили:

Ивлев Александр
Ларин Константин
Медведев Максим
Устинов Александр
Шипилов Артём
группа 382003_3

Нижний Новгород, 2023

Содержание

1	Введение	3
2	Исследование математической модели	4
2.1	Построение математической модели	4
2.2	Мотор как линейное динамическое звено	5
2.3	Управление скоростью вращения с помощью регулятора	6
3	Оценка параметров системы и построение регулятора	9
3.1	Оценка параметров системы	9
3.2	Построение регулятора	10
4	Выводы	13

1 Введение

В лабораторной работе изучается задача управления угловой скоростью вращения вала электромотора. Необходимо поддерживать заданный закон изменения скорости вращения мотора. Строится математическая модель объекта, изучаются устойчивость, точность и характер переходного процесса в отсутствие управления и при его наличии (пропорциональный регулятор, интегральный регулятор, ПИ-регулятор), выводятся условия на параметры регуляторов, чтобы для замкнутой системы выполнялись нужные требования. Затем на основе экспериментальных данных производится оценка физических параметров объекта, на их основе - параметров регулятора.

2 Исследование математической модели

2.1 Построение математической модели

Рассмотрим электрическую и механическую составляющие DC-мотора.

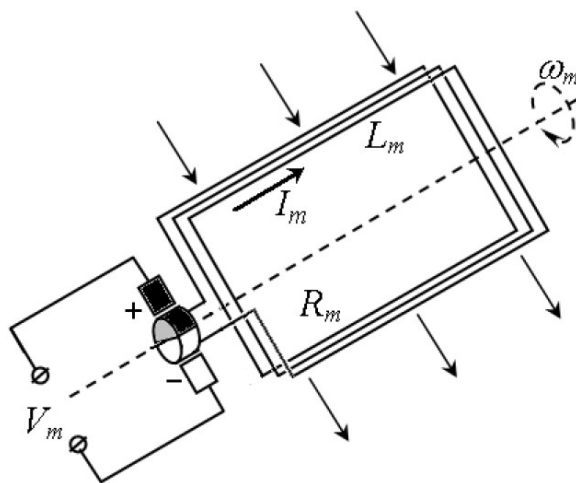


Рис. 1: Модель электрической составляющей мотора.

Как электрическая система он состоит из ротора и статора. Статор есть неподвижный магнит, создающий магнитное поле вокруг ротора. Ротор есть подвижная часть мотора, его обмотка - катушка с индуктивностью L_m и сопротивлением R_m . Через обмотку ротора под действием напряжения $U_m = U_m(t)$ течёт ток I_m , вследствие чего возникает сила Ампера, вращающая ротор. Вращающий момент обозначим $\mu_m = K_t \cdot I_m$, где K_t - коэффициент пропорциональности, связывающий силу тока с вращающим моментом. При вращении ротора магнитный поток через обмотку меняется, вследствие чего в обмотке появляется ЭДС индукции $\varepsilon_m = K_m \cdot \omega_m$, где ω_m - угловая скорость вращения мотора, K_m - коэффициент пропорциональности.

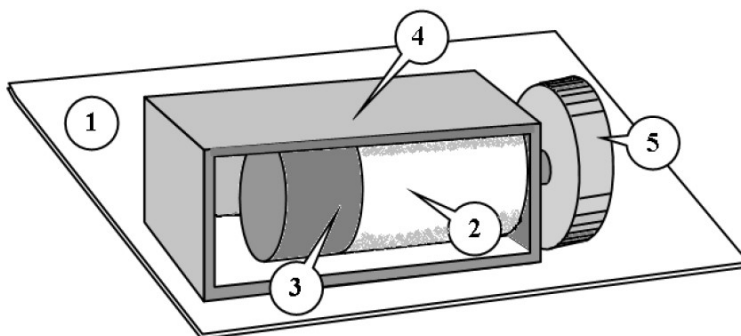


Рис. 2: Модель механической составляющей мотора. Обозначения:

- 1 - интерфейсная плата
- 2 - электромотор
- 3 - датчики поворота вала мотора, скорости вращения, силы тока
- 4 - внешний футляр мотора
- 5 - массивный диск

С механической точки зрения система содержит ротор, вал и насаженный на вал массивный диск, имеющие в совокупности момент инерции J_{eq} . Вращающий момент связан с угловой скоростью и моментом инерции.

Составим систему уравнений, описывающую динамику системы. Для этого нужно воспользоваться вторым законом Кирхгофа и законом изменения момента импульса. По ходу вывода сделаем ряд предположений, упрощающих уравнения. Второй закон Кирхгофа утверждает, что в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС в контуре. В обмотке ротора ЭДС есть внешнее напряжение U_m , ЭДС индукции ε_m и ЭДС самоиндукции вследствие изменения силы тока. ЭДС самоиндукции не будем учитывать, потому что она равна $-L_m \frac{dI_m}{dt}$, а индуктивность катушки L_m мала. ε_m действует противоположно U_m , потому что увеличение U_m влечёт увеличение силы тока, вращающего момента и угловой скорости. Падение напряжения на обмотке равно, по закону Ома, $I_m R_m$. Итого:

$$I_m R_m = U_m(t) - \varepsilon_m.$$

Закон изменения момента импульса гласит: изменение момента импульса тела равно действующему на него моменту силы. В данном случае имеем вращение вокруг оси вала, поэтому момент импульса есть $J_{eq} \omega_m$, его производная - $J_{eq} \dot{\omega}_m$. Трение при вращении учитывать не будем. Значит,

$$J_{eq} \dot{\omega}_m = \mu_m. \quad (1)$$

Если подставить выражения для ε_m и μ_m , получится система:

$$\begin{cases} I_m R_m = U_m(t) - K_m \omega_m \\ J_{eq} \dot{\omega}_m = K_t I_m \end{cases} \quad (2)$$

2.2 Мотор как линейное динамическое звено

Посмотрим на систему как на "чёрный ящик". Входом выступает напряжение $U_m(t)$, выходом - $\omega_m = \omega_m(t)$. Найдём коэффициент передачи от входа к выходу. Применим преобразование Лапласа с нулевыми начальными условиями, учитывая, что $U_m(t)$, I_m и ω_m являются, вообще говоря, функциями времени:

$$\begin{cases} I_m^*(s) R_m = U_m^*(s) - K_m \omega_m^*(s) \\ s J_{eq} \omega_m^*(s) = K_t I_m^*(s) \end{cases}, \quad (3)$$

$$s J_{eq} R_m \omega_m^*(s) = K_t I_m^*(s) R_m = K_t (U_m^*(s) - K_m \omega_m^*(s)), \quad (4)$$

$$K(s) = K_{\omega_m, U_m}(s) = \frac{\omega_m^*(s)}{U_m^*(s)} = \frac{K_t}{K_t K_m + s J_{eq} R_m}. \quad (5)$$

Все параметры положительные, поэтому объект (мотор) является апериодическим звеном первого порядка. Следовательно, объект устойчив (при внешнем импульсном воздействии нулевое решение устойчиво), не обладает точностью (при постоянном внешнем воздействии нулевое решение неустойчиво), характер переходного процесса при постоянном управляющем воздействии можно выяснить по коэффициенту передачи.

Пусть $T = \frac{J_{eq} R_m}{K_t K_m}$, $a = \frac{1}{K_m}$, тогда $K(s) = \frac{a}{1 + Ts}$.

Импульсная переходная функция - $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] = \frac{a}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, переходная функция - $H(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K(s)}{s}\right] = \int_0^t h(\tau) d\tau = a \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \rightarrow a$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому при $a \neq 0$ объект не обладает точностью. Приближение к установившемуся значению асимптотическое, функция оказывается в его ε -окрестности при $a e^{-\frac{t}{T}} < \varepsilon \iff t > T \ln \frac{a}{\varepsilon}$.

Недостатками объекта являются отсутствие точности и невозможность управлять переходным процессом - его нельзя ускорить. Для решения этих проблем введём в систему регулятор.

2.3 Управление скоростью вращения с помощью регулятора

Рассмотрим три вида регуляторов: пропорциональный (П-регулятор), интегральный (И-регулятор) и пропорционально-интегральный (ПИ-регулятор). Коэффициент передачи П-регулятора – $K_r(s) = K_p$, И-регулятора – $K_r(s) = \frac{K_i}{s}$, ПИ-регулятора – $K_r(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$. Можно сказать, ПИ-регулятор представляет собой соединённые параллельно пропорциональный и интегральный регуляторы. Систему замкнём отрицательной обратной связью. Регуляторы будут действовать по ошибке, равной разности эталонной скорости вращения, служащей входом системы, и настоящей скорости вращения мотора.

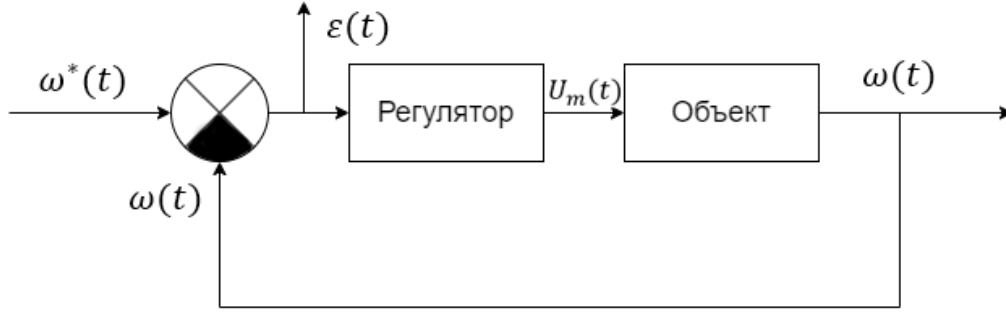


Рис. 3: Структурная схема системы управления скоростью вращения мотора.
 $\omega^*(t)$ - требуемая скорость мотора, $\omega(t)$ - текущая скорость мотора.

Коэффициент передачи объекта – $K_o(s) = \frac{a}{Ts + 1}$.

При коэффициенте передачи регулятора $K_r(s)$ и коэффициенте передачи объекта $K(s)$ коэффициент передачи от входа к ошибке будет равен $K_{\varepsilon, \omega^*}(s) = \frac{1}{1 + K_r(s)K(s)}$.

Если используется пропорциональный регулятор:

- Коэффициент передачи по ошибке $K_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_p a}{Ts + 1}} = \frac{Ts + 1}{Ts + K_p a + 1}$.
- Система устойчива при $aK_r + 1 > 0 \iff K_r > -\frac{1}{a}$.
- Установившееся значение ошибки – $K_1(0) = \frac{1}{1 + K_p a} \neq 0 \forall K_p \in \mathbb{R}$, система не обладает точностью.
- Импульсная переходная функция – $h(t) = \delta(t) - \frac{K_p a}{T} e^{-\frac{K_p a + 1}{T} t}$.
- Переходная функция – $H(t) = \frac{1}{K_p a + 1} + \frac{K_p a}{K_p a + 1} e^{-\frac{K_p a + 1}{T} t}$.
- Переходный процесс асимптотический, отклонение от предельного значения уменьшается в e раз каждые $\frac{T}{K_p a + 1}$ секунд (это **постоянная времени**). Переходный процесс ускоряется/замедляется, если выбирать большие/меньшие значения K_p .

Если используется интегральный регулятор:

- Коэффициент передачи по ошибке $K_2(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{K_i a}} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + K_i a}$.

- Система устойчива при $K_i > 0$.
- Установившееся значение ошибки – $K_2(0) = 0$, система обладает точностью.
- Переходный процесс аperiodический при $1 - 4aTK_i \geq 0 \iff K_i \leq \frac{1}{4aT}$, колебательный – при $1 - 4aTK_i < 0 \iff K_i > \frac{1}{4aT}$.

В первом случае корни характеристического многочлена – $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4aTK_i}}{2T}$, во втором – $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{4aTK_i - 1}}{2T}$

- При колебательном переходном процессе переходная функция –

$$H(t) = e^{-\frac{t}{2T}} \left(\cos(\nu t) + \frac{1}{\sqrt{4aTK_i - 1}} \sin(\nu t) \right), \quad (6)$$

где $\nu = \frac{\sqrt{4aTK_i - 1}}{2T}$. Управлять скоростью переходного процесса нельзя, потому что постоянная времени равна $2T$ и не зависит от параметра регулятора, зато можно увеличивать/уменьшать частоту колебаний, увеличивая/уменьшая K_i .

- Поскольку $\omega(t) = \omega^*(t) - \varepsilon(t)$, при $\omega^*(t) = \text{const}$ первый локальный максимум $\omega(t)$ есть первый локальный минимум $\varepsilon(t)$. Время его достижения –

$$t_0 = \frac{\pi}{\nu} + \frac{1}{\nu} \arctg \left(\frac{2\alpha\nu T - 1}{2\nu T + \alpha} \right), \quad (7)$$

где $\nu = \frac{\sqrt{4aTK_i - 1}}{2T}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{4aTK_i - 1}}$.

- Перерегулирование при этом есть $p = H(t_0) - 1$.
- При колебательном переходном процессе $|H(t)|$ гарантированно становится меньше ε , если:

$$\left| e^{-\frac{t}{2T}} \left(\cos(\nu t) + \frac{1}{\sqrt{4aTK_i - 1}} \sin(\nu t) \right) \right| \leq e^{-\frac{t}{2T}} \sqrt{1 + \frac{1}{4aTK_i - 1}} < \varepsilon, \\ t > 2T \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{4aTK_i}{4aTK_i - 1}} \right) \quad (8)$$

- При аperiodическом переходном процессе переходная функция –

$$H(t) = 1 - \frac{K_i a}{\sqrt{1 - 4aTK_i}} \left(\frac{1}{\nu_1} \left(1 - e^{-\nu_1 t} \right) - \frac{1}{\nu_2} \left(1 - e^{-\nu_2 t} \right) \right), \quad (9)$$

где $\nu_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4aTK_i}}{2T}$. В таком случае скорость затухания характеризуется величиной $\min\{\nu_1, \nu_2\} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4aTK_i}}{2T} \in \left[0; \frac{1}{2T} \right]$, то есть постоянная времени в каждой из экспонент не меньше $2T$. Значит, колебательный переходный процесс приводит к более быстрому затуханию переходной функции.

Если используется ПИ-регулятор:

- Коэффициент передачи по ошибке $K_3(s) = \frac{1}{a \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right)} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + (1 + aK_p)s + K_i a}$.

- Система устойчива при $K_p > -\frac{1}{a}, K_i > 0$.

- Установившееся значение ошибки – $K_3(0) = 0$, система обладает точностью.

- Переходный процесс аperiodический при $(1 + aK_p)^2 - 4aTK_i \geq 0$, колебательный – при $(1 + aK_p)^2 - 4aTK_i < 0$.

В первом случае корни характеристического многочлена –

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1 + aK_p) \pm \sqrt{(1 + aK_p)^2 - 4aTK_i}}{2T} \quad (10)$$

, во втором –

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1 + aK_p) \pm i\sqrt{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}}{2T} \quad (11)$$

- При колебательном процессе переходная функция –

$$H(t) = e^{-\frac{1+aK_p}{2T}t} \left(\cos(\nu t) + \frac{1 - aK_p}{\sqrt{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}} \sin(\nu t) \right), \quad (12)$$

где $\nu = \frac{\sqrt{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}}{2T}$.

- $|H(t)|$ гарантированно становится меньше ε при

$$\begin{aligned} & \left| e^{-\frac{1+aK_p}{2T}t} \left(\cos(\nu t) + \frac{1 - aK_p}{\sqrt{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}} \sin(\nu t) \right) \right| \leq \\ & \leq e^{-\frac{1+aK_p}{2T}t} \sqrt{1 + \frac{(1 - aK_p)^2}{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}} < \varepsilon, \\ & t > \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{4a(TK_i - K_p)}{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

- Как и в интегральном регуляторе, наискорейшее затухание получается при колебательном переходном процессе. В данном случае $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{1 + aK_p}{2T}$, поэтому можно ускорить затухание, выбирая значения K_p побольше. Вместе с тем, поскольку в мнимой части есть параметр K_i , можно выбрать его так, что модуль мнимой части будет мал.

Очевидны достоинства ПИ-регулятора перед пропорциональным и интегральным регуляторами в отдельности: он позволяет поддерживать заданную скорость, обладая вместе с тем точностью и возможностью выбрать параметры так, чтобы затухание ошибки происходило быстро и с малой частотой колебаний.

3 Оценка параметров системы и построение регулятора

На текущем этапе задача – на основе экспериментальных данных оценить параметры системы, участвующие в математической модели, и построить на их основе ПИ-регулятор, обеспечивающий выполнение ряда условий.

3.1 Оценка параметров системы

Сначала выполним оценку сопротивления R_m . Одно из уравнений системы - $I_m R_m = U_m(t) - K_m \omega_m$. Полагая $\omega_m = 0$, получаем $R_m = \frac{U_m(t)}{I_m}$. Если подавать постоянное напряжение на мотор и останавливать вращение ротора, можно получить значение I_m и посчитать R_m по U_m и I_m . Для получения более точного результата следует провести несколько измерений с разными величинами напряжения и взять в качестве оценки R_m среднее арифметическое всех результатов измерений. В таблице ниже приведены результаты измерений I_m , если менять напряжение с шагом 1 В от -5 В до 5 В, и оценки сопротивления для каждого измерения.

Напряжение V_m , подаваемое на мотор (В)	Значение тока I_{shall} в обмотке ротора при остановленном вращении ротора (А)	Оценка сопротивления R_m (Ом)
-5	-1.70	2.90
-4	-1.27	3.15
-3	-0.90	3.33
-2	-0.63	3.17
-1	-0.26	3.85
1	0.27	3.73
2	0.76	2.64
3	1.05	2.86
4	1.43	2.80
5	4.79	2.79
Среднее значение омического сопротивления R_m		3.12

Рис. 4: Оценивание сопротивления R_m по результатам измерения напряжения и силы тока при неподвижной оси мотора.

Результатом оценки служит значение сопротивления $R_m = 3.12$ Ом.

Из физических соображений значения коэффициентов K_t и K_m равны, поэтому достаточно найти лишь один из них. Выразим K_m из $I_m R_m = U_m(t) - K_m \omega_m$:

$$K_m = \frac{U_m(t) - I_m R_m}{\omega_m} \quad (14)$$

Оценить K_m можно вновь по результатам экспериментов, взяв среднее арифметическое. Данные и оценка представлены в следующей таблице.

Напряжение, подаваемое на мотор, V_m (В)	Угловая скорость вращения оси мотора ω_m (рад/с)	Электрический ток, протекающий в обмотке ротора мотора, I_m (А)	Оценка постоянного коэффициента пропорциональности K_m в выражении ЭДС (В/(рад/с))
-5	-171	-0.189	0.0258
-4	-130	-0.180	0.0264
-3	-89	-0.172	0.0277
-2	-48	-0.169	0.0307
-1	-7	-0.180	0.0626
1	6	0.298	0.0100
2	50	0.217	0.0265
3	91	0.212	0.0257
4	133	0.212	0.0251
5	175	0.217	0.0247
Среднее значение величины K_m			0.0285

Рис. 5: Оценивание коэффициента K_m по результатам измерения напряжения, силы тока и скорости вращения оси мотора.

Получается оценка $K_m = 0.0285$ В/(рад/с).

Общий момент инерции относительно оси вращения вала мотора J_{eq} определяется на основе импульсных переходных функций (функций отклика) модели и настоящего мотора. J_{eq} подбирается при найденных ранее R_m и K_t так, чтобы функции отклика совпали. Это возможно тогда и только тогда, когда совпадают коэффициенты передачи системе, коэффициенты них и, следовательно, моменты инерции.

В результате применения этого метода получено значение $J_{eq} = 1.93 \cdot 10^{-5}$ кг · м².

Теперь рассчитаем по параметрам системы a и T :

$$a = \frac{1}{K_m} \approx 35.088, \quad (15)$$

$$T = \frac{J_{eq} R_m}{K_t K_m} \approx 0.074. \quad (16)$$

Значит, коэффициент передачи объекта - $K_o(s) = \frac{35.088}{0.074s + 1}$.

3.2 Построение регулятора

Построим теперь ПИ-регулятор. Предъявим к нему следующие требования:

- Время достижения максимума – не более 0.15 секунд;
- Перерегулирование по значению не превышает 5%;
- Время установления (попадание в окрестность установившегося значения C , составляющую $(0.99C; 1.01C)$);
- Установившаяся ошибка равна нулю.

Условие равенства нулю установившейся ошибки выполняется автоматически при наличии устойчивости:

$$K_p > -\frac{1}{a} = -0.0285, \quad K_i > 0. \quad (17)$$

Вывести условия из остальных требований можно на основе переходной функции ошибки:

$$H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (\cos(\nu t) + \alpha \sin(\nu t)), \quad (18)$$

где $\tau = \frac{2T}{1 + aK_p}$, $\alpha = \frac{1 - aK_p}{\sqrt{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}}$, $\nu = \frac{\sqrt{4aTK_i - (1 + aK_p)^2}}{2T}$.

Первый максимум скорости достигается при первом минимуме ошибки. Это

$$t_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{\nu} + \frac{1}{\nu} \arctg \frac{\alpha\nu\tau - 1}{\nu\tau + \alpha}, & 2TK_i - K_p(1 + aK_p) \geq 0 \\ \frac{1}{\nu} \arctg \frac{\alpha\nu\tau - 1}{\nu\tau + \alpha}, & 2TK_i - K_p(1 + aK_p) < 0 \end{cases}. \quad (19)$$

Выкладки, содержащие вывод условий на K_p и K_i , чтобы выполнялось $t_0 \leq 0.15$, $t \leq 0.25$ и $1 - H(t_0) \leq 1.05$ (условие малости перерегулирования, выраженное через $H(t)$), достаточно велики, поэтому сразу приведём подходящие значения параметров.

Все условия выполняются при $(K_p, K_i) = (0.095, 2)$.

Для подтверждения результата построим структурную схему мотора с регулятором в Simulink (рис. 6) и посмотрим на выход (рис. 7 и 8).

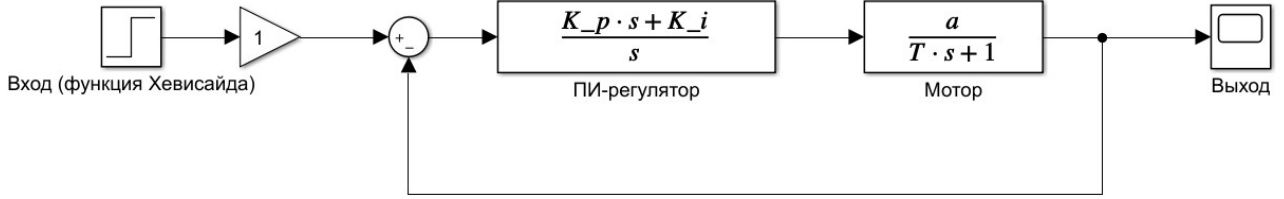


Рис. 6: Структурная схема мотора с ПИ-регулятором, построенная в Simulink.

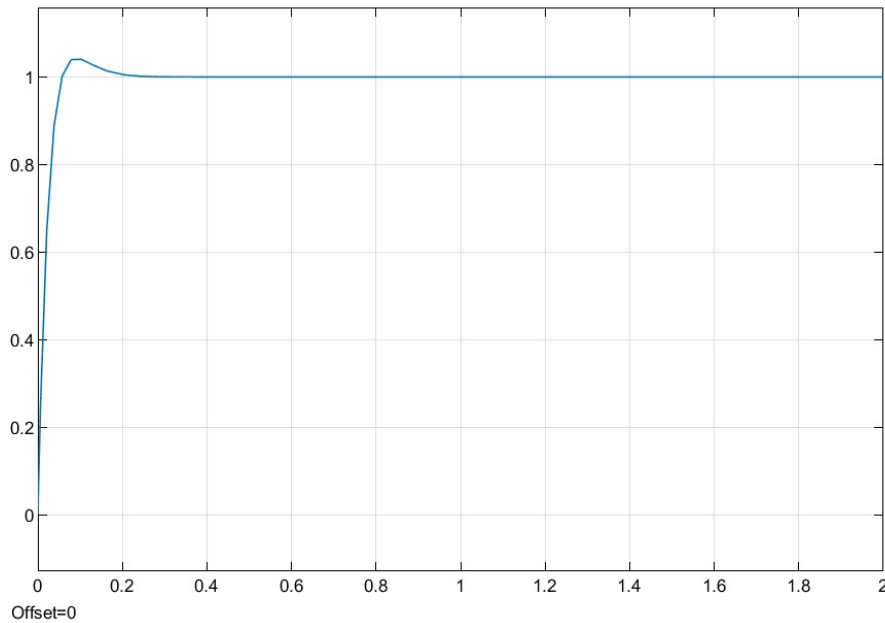


Рис. 7: График скорости вращения вала мотора с ПИ-регулятором.

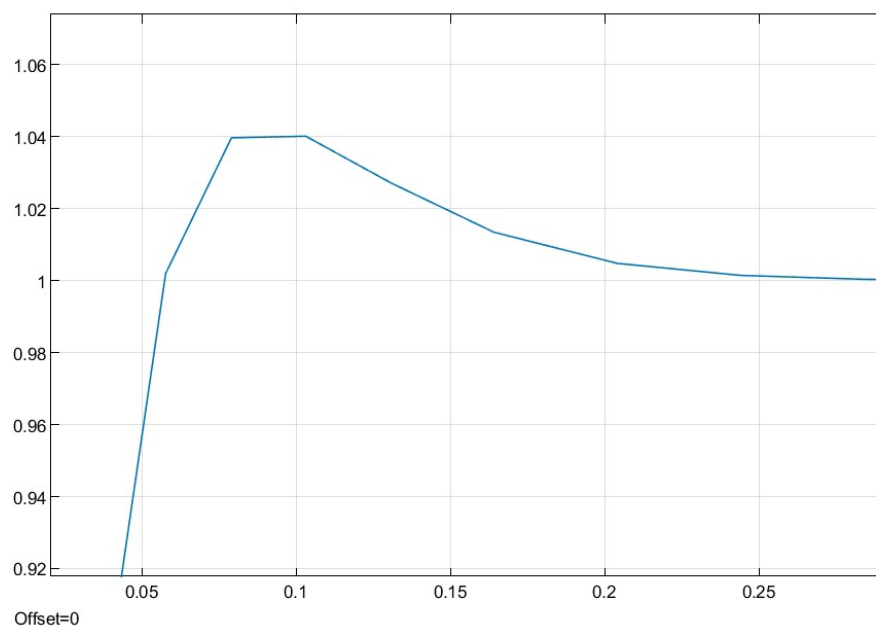


Рис. 8: График скорости вращения вала мотора с ПИ-регулятором (приближена окрестность значения $\omega = 1$ и $x \in [0; 0.25]$).

Легко увидеть, что все требования к переходному процессу выполнены.

4 Выводы

В лабораторной работе была построена математическая модель мотора с цифровым управлением, были изучены свойства мотора как линейного динамического звена с электрическим напряжением на входе и скоростью вращения вала на выходе. Мотор устойчив, но не обладает точностью: он может выйти на постоянную скорость, но её величина необязательно будет желаемой.

Для поддержания желаемой скорости и достижения определённых характеристик переходного процесса был введён пропорционально-интегральный регулятор. Он позволяет добиться точности, а также управлять характеристиками переходного процесса.

Параметры регулятора удалось подобрать так, чтобы все требования к переходному процессу выполнялись. Результат подтверждается экспериментом на компьютере.