Контрольная работа. Киселева Кс.
3821Б1ПМоп2

№10

$$i\left(\partial_t u + \frac{\partial_z \omega}{2\omega} u\right) + \frac{D}{\omega^3}\partial_{xx} u + \omega |u|^2 u = 0$$

$$\partial_z \omega^2 = \partial_t n = W(|u|)(1-n)$$

$\exists\ u = \frac{b}{\sqrt{\omega}}$ – замена

$$i\partial_t b + \frac{D}{\omega^3}\partial_{xx} b + |b|^2 b = 0$$

$$\Omega = \frac{\Omega\omega^3}{D} \quad и \quad \beta = \frac{\omega^3}{D}$$

$$b = \frac{\sqrt{2\Omega}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\Omega\omega^3}{D}\xi}} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2\Omega}{\omega}}\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\Omega}{D}}\,\omega^{3/2}\xi}$$

№23

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{e}{m}E, \quad \omega^2 = \omega_0^2(1 - \alpha P^2),$$

$\omega_0, \alpha = const$, P – поляризация среды

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{e}{m}E \;/\cdot -e\cdot N, \quad N \text{ – число осцилляторов}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_0^2(1 + \alpha P^2)P = \varepsilon_0 \Omega^2 E, \quad \Omega^2 = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}$$

Поле электромагнитной волны в поляризующейся среде подчиняется волн. ур. Максвелла

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Решения в виде стац. волн зависят от $\xi = x - Ut$

$$\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)E'' = \mu_0 U^2 P''$$

интегр. с нулевыми н.у.

$$E = \frac{\mu_0 c^2 U^2}{c^2 - U^2}P$$

$$U^2 P'' + \left(\omega_0^2 + \frac{\Omega U^2}{U^2 - c^2}\right) P + 2\omega_0 P^3 = 0$$

$$P < 0 \qquad \frac{\omega_0^2 c^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} < U^2 < c^2$$

$$P = a \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)$$

$$\Delta^2 = \frac{2U^2}{2\omega_0^3 a^2}, \quad a^2 = \frac{2}{2\omega_0^3} \frac{(\Omega^2 + \omega_0^2)U^2 - \omega_0^2 c^2}{c^2 - U^2}$$

№17 Для уравнений „мелкой воды" решить задачу со следующими начальными условиями.

$$v = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$
$$h = 0 \qquad 0 < x < \infty$$
$$h = h_0 \qquad -\infty < x < 0$$

Заметим, что в области, покрываемой характеристиками C_+, кот. выходят из $x<0$, решение носит характер простой волны с характ. C_-, поскольку инвариант Римана r_+ одинаков для всех характеристик и равен

$$r_+ = v + 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gh_0}$$

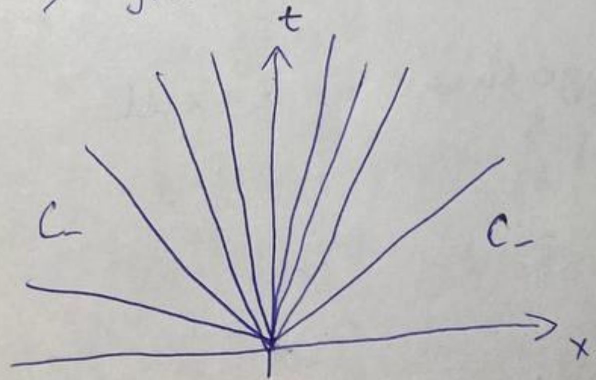
Уравнение характеристик C_-:

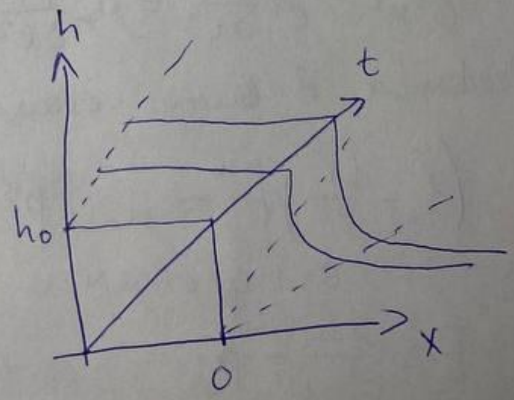
$$\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{gh} = 2\sqrt{gh_0} - 3\sqrt{gh}$$

Рассмотрим характеристики C_-, выходящие из обл. $x<0$

$$r_- = 2\sqrt{gh} - v = 2\sqrt{gh_0} = const \Rightarrow v = 0,\ h = h_0$$

$$x = \xi - \sqrt{gh_0}t$$





Рассмотрим характ., выход. из т. $x=0$:
$x=(2\sqrt{gh_0}-3\sqrt{gh})t$, $0\le h\le h_0$
Область ограничена характеристиками
$x=\sqrt{gh_0}\,t$, $x=2\sqrt{gh_0}\,t$
Решение в области $-\sqrt{gh_0}\le\frac{x}{t}\le 2\sqrt{gh_0}$
$\sqrt{gh}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{gh_0}-\frac{x}{t}\right)$
$v=2\sqrt{gh_0}-2\sqrt{gh}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{gh_0}+\frac{x}{t}\right)$

№19

Рассмотрите масштабное преобразование для уравн. Кортевега – де Вриза

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0$$

и покажите, что автомодельное решение имеет вид
$u=(3t)^{-\frac{2}{3}}\psi(z)$, где $z=\frac{x}{\sqrt[3]{3t}}$.

Получите для функции $\psi(z)$ обыкновенное дифф. ур.

$$\psi'''=2\psi+z\psi'-\psi\psi'$$

$u=(3t)^{-2/3}\psi(z)$
$u(t)=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left((3t)^{-2/3}\psi(z)\right)$
$u(t)=-\frac{2}{3}(3t)^{-\frac{5}{3}}\psi(z)+3t^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$

$\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{2}{3}\frac{x}{(3t)^{4/3}}=-\frac{z}{3t}$

$u_t=-\frac{2}{3}(3t)^{-5/3}\psi(z)-\frac{z}{3t}(3t)^{-\frac{2}{3}}\psi'(z)$

$u_x=(3t)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3t)^{-\frac{1}{3}}\psi'(z)=(3t)^{-1}\psi'(z)$

$uu_x=\left((3t)^{-\frac{2}{3}}\psi(z)\right)\cdot\left((3t)^{-1}\psi'(z)\right)=(3t)^{-\frac{5}{3}}\psi(z)\psi'(z)$

$u_{xx} = (3t)^{-1} \cdot (3t)^{-\frac{1}{3}} \psi''(z) = (3t)^{-\frac{4}{3}} \psi''(z)$

$u_{xxx} = (3t)^{-\frac{4}{3}} \cdot (3t)^{-\frac{1}{3}} \psi'''(z) = (3t)^{-5/3} \psi'''(z)$

Подставим в ур-е:

$$-\frac{2}{3}(3t)^{-\frac{5}{3}}\psi(z) - \frac{z}{3t}(3t)^{-\frac{2}{3}}\psi(z) + (3t)^{-\frac{5}{3}}\psi(z)\psi'(z) + (3t)^{-\frac{5}{3}}\psi'''(z) = 0$$

$$-\frac{2}{3}\psi(z) - \frac{z}{3}\psi'(z) + \psi(z)\psi'(z) + \psi'''(z) = 0$$

Получаем:

$$\psi'''(z) = 2\psi(z) + z\psi'(z) - \psi(z)\psi'(z)$$

№20

Решите задачу, аналогичную предыдущей, для модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

Покажите, что автомодельное решение имеет вид $u = (3t)^{-\frac{1}{3}}\psi(x)$, где по-прежнему $z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$, а функция $\psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi'' = z\psi - \frac{\psi^3}{3} + C$$

Масштабное преобразование: $u(x,t) \to \lambda^a v(\lambda^b x, \lambda^c t)$

Масштабного преобразов., наше ур-е инвариантно относит. масштабного преобразов.,

если $c + a = 2 + b + a = 3b + a$

Выберем $c = 3$, $a = b = 1 \Rightarrow u(x,t) \to \lambda v(\lambda x, \lambda^3 t)$

Выберем $\lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}}$ и рассмотрим решение в виде

$u = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}}\psi(z)$, где $z = \frac{x}{\sqrt[3]{3t}}$

Подст. в ур-е и получим:

$$-\psi(z) - z\psi'(z) + \psi^2\psi'(z) + \psi'''(z) = 0$$

Проинтегрир. по z и получим:

$$\psi'' = z\psi - \frac{\psi^3}{3} + C$$