Модуль 12 – Практикум по теме 12.3

Операторы численного дифференцирования

Пример 1

Значения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ представлены в таблице

с погрешностью не более половины единицы последнего разряда:

x_i	0.040	…	0.096	0.100	0.104	…	0.160
$\tilde{f}_i$	0.398623	…	0.397108	0.396953	0.396791	…	0.393868

Аргумент табулирован с шагом 0.004, но в этом фрагменте показан только аргумент $x=0.100$ и его ближние и дальние соседи.

В данной задаче нужно:

Вычислить приближенно $f''(0.100)$, используя центральный разностный оператор 2 порядка на симметричном шаблоне:

1) по ближним соседям;

2) по дальним соседям.

Провести анализ погрешности.

Сравнить результаты.

Решение

Поскольку $f(x)$ представлена с ошибками, в таблице указан символ $\tilde{f}_i$. По условию задачи погрешность задания функции в узлах сетки не превышает $\delta=0.5\cdot 10^{-6}$ (половина единицы последнего разряда).

Для вычисления $f''(0.100)$ нужно использовать центральный разностный оператор 2 порядка, то есть оператор, построенный на основе интерполяционного полинома степени 2. Дополнительное указание на симметричный шаблон (равномерную сетку) однозначно определяет оператор для вычисления $f''(x_i)$

$$[f_{x\bar{x}}]_i=\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}$$

с узлами $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, $x=x_{i+1}$ и шагом $h=x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i-1}$.

В качестве x_i следует взять $x=0.100$.

Чтобы вычислить приближенно $f''(0.100)$, используем два способа.

1) узлы $x_0 = 0.096,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = 0.104$ и оператор

$$[f_{x\bar{x}}]_1 = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{(0.004)^2} = \frac{0.397108 - 2\cdot 0.396953 + 0.396791}{16\cdot 10^{-6}}$$

(малый шаг и ближние соседи)

2) узлы $x_0 = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = 0.160$ и оператор

$$[f_{x\bar{x}}]_1 = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{(0.06)^2} = \frac{0.398623 - 2\cdot 0.396953 + 0.393868}{36\cdot 10^{-4}}$$

(крупный шаг и дальние соседи)

В первом случае (малый шаг и ближние соседи) получим

$$f''(0.100) \approx -0.4374999999987020$$

Во втором случае (крупный шаг и дальние соседи) получим

$$f''(0.100) \approx -0.3930555555555550$$

Проведем анализ погрешности.

Общая погрешность дифференцирования для оператора $[f_{x\bar{x}}]_i$ при значениях шага $h > 0,\ h < \tilde{h}$ оценивается неравенством

$$|\,ОП\,| \le \hat{M}h^2 + \frac{4\cdot\delta}{h^2}$$

где число $\delta > 0$ есть оценка ошибок задания функции в узлах сетки и константа $\hat{M}$ взята из оценки погрешности дифференцирования:

$$\hat{M} = \frac{1}{12}\max_{x\in[x_i-\tilde{h},\, x_i+\tilde{\mathrm{h}}]}\left| f^{IV}(x)\right|;$$

Таким образом, слагаемое $\dfrac{4\cdot\delta}{h^2}$ является оценкой вычислительной погрешности и слагаемое $\hat{M}h^2$ оценивает погрешность дифференцирования.

В первом случае (малый шаг и ближние соседи)

оценка вычислительной погрешности

$$\frac{4\cdot\delta}{h^2}=\frac{4\cdot 0.5\cdot 10^{-6}}{(0.004)^2}=\frac{2\cdot 10^{-6}}{16\cdot 10^{-6}}=0.125$$

оценка погрешности дифференцирования

$$\hat{M}h^2=\frac{1}{12}\cdot\max_{x\in[0.1-0.004;0.1+0.004]}\left|f^{IV}(x)\right|\cdot(0.004)^2=0.097055667\cdot 16\cdot 10^{-6}$$
$$=0.155289067\cdot 10^{-5}$$

Общая погрешность дифференцирования оценивается величиной

$$\hat{M}h^2+\frac{4\cdot\delta}{h^2}=0.125001553$$

Во втором случае (крупный шаг и дальние соседи)

оценка вычислительной погрешности

$$\frac{4\cdot\delta}{h^2}=\frac{4\cdot 0.5\cdot 10^{-6}}{(0.06)^2}=\frac{2\cdot 10^{-6}}{36\cdot 10^{-4}}=0.555555556\cdot 10^{-3}$$

оценка погрешности дифференцирования

$$\hat{M}h^2=\frac{1}{12}\cdot\max_{x\in[0.1-0.06;0.1+0.06]}\left|f^{IV}(x)\right|\cdot(0.06)^2=0.099337\cdot 36\cdot 10^{-4}$$
$$=0.3576132\cdot 10^{-3}$$

Общая погрешность дифференцирования оценивается величиной

$$\hat{M}h^2+\frac{4\cdot\delta}{h^2}=0.913168756\cdot 10^{-3}$$

Вычисление $f''(0.100)$ на шаблоне с крупным шагом имеет преимущество – **оценка общей погрешности оказалась лучше:**

$\underbrace{|\,ОП\,|\le 0.913168756\cdot 10^{-3}}_{крупный\ шаг\ и\ дальние\ соседи}$ лучше, чем $\underbrace{|\,ОП\,|\le 0.125001553}_{малый\ шаг\ и\ ближние\ соседи}$.

Сравним результат с истинным значением $f''(0.100)$ (оно приведено по справочному изданию с погрешностью не более половины единицы последнего разряда)

$$f''(0.100) = -0.392983$$

В первом случае (малый шаг и ближние соседи)

истинная общая погрешность равна

$$ОП = f''(0.100) - [\tilde{f}_{x\bar{x}}]_1 =$$
$$= -0.392983 + 0.437450 = 0.445170 \cdot 10^{-1}$$

Во втором случае (крупный шаг и дальние соседи)

истинная общая погрешность равна

$$ОП = f''(0.100) - [\tilde{f}_{x\bar{x}}]_1 =$$
$$= -0.392983 + 0.393055 = 0.725555 \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, на шаблоне с крупным шагом (дальние соседи)

приближенное значение $f''(0.100)$ вычислено (на 2 порядка) точнее.

На Рисунке 1 показан график оценки общей погрешности вычисления $f''(0.100)$ в зависимости от шага h, используемого в шаблоне оператора $[f_{x\bar{x}}]_i$.

За эту оценку отвечает

$$\Phi(h) = \hat{M}h^2 + \frac{4 \cdot \delta}{h^2},$$

где $\delta = 0.5 \cdot 10^{-6}$ и в качестве $\hat{M}$ взято значение

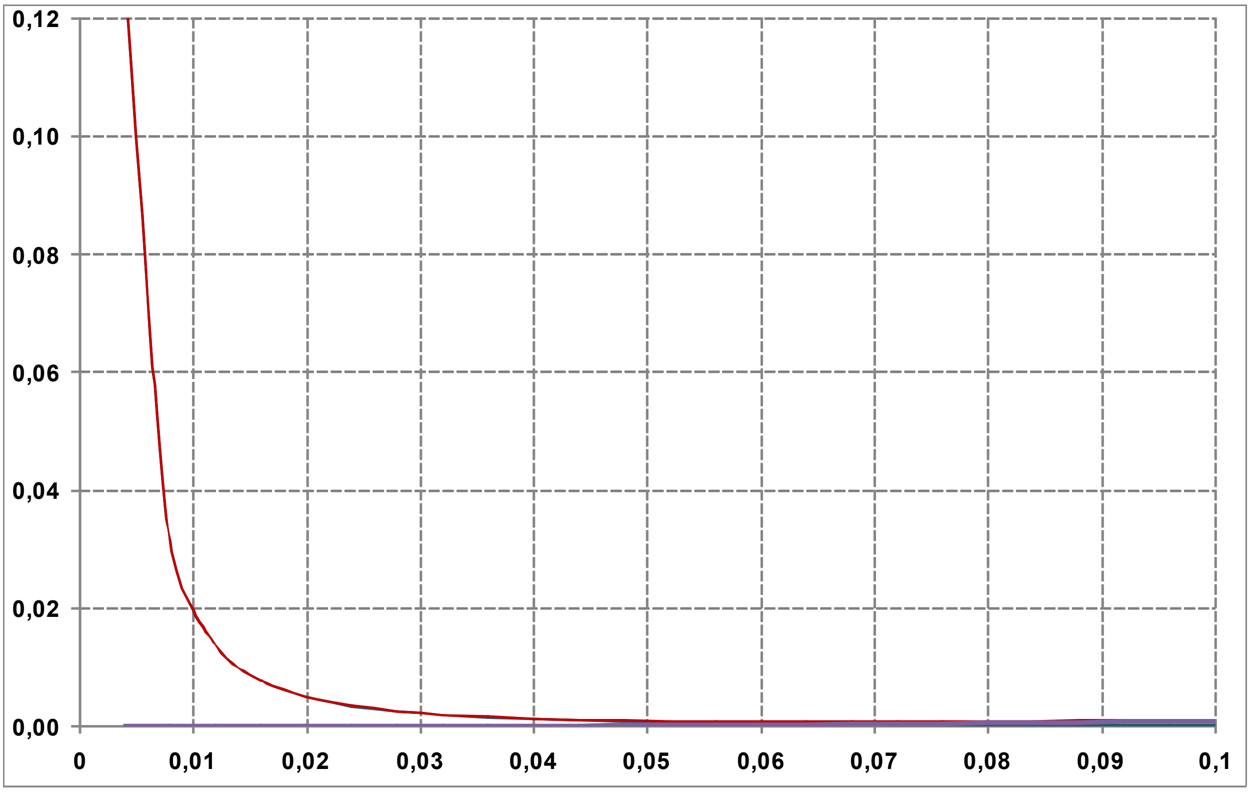
$$\hat{M} = \frac{1}{12} \max_{x \in [0.1-0.1,\, 0.1+0.1]} \left| f^{IV}(x) \right| = 0.099735583$$

Значение шага h, при котором $\Phi(h)$ достигает своего минимального значения, является оптимальным для нахождения $f''(0.100)$ с помощью $[f_{x\bar{x}}]_i$.

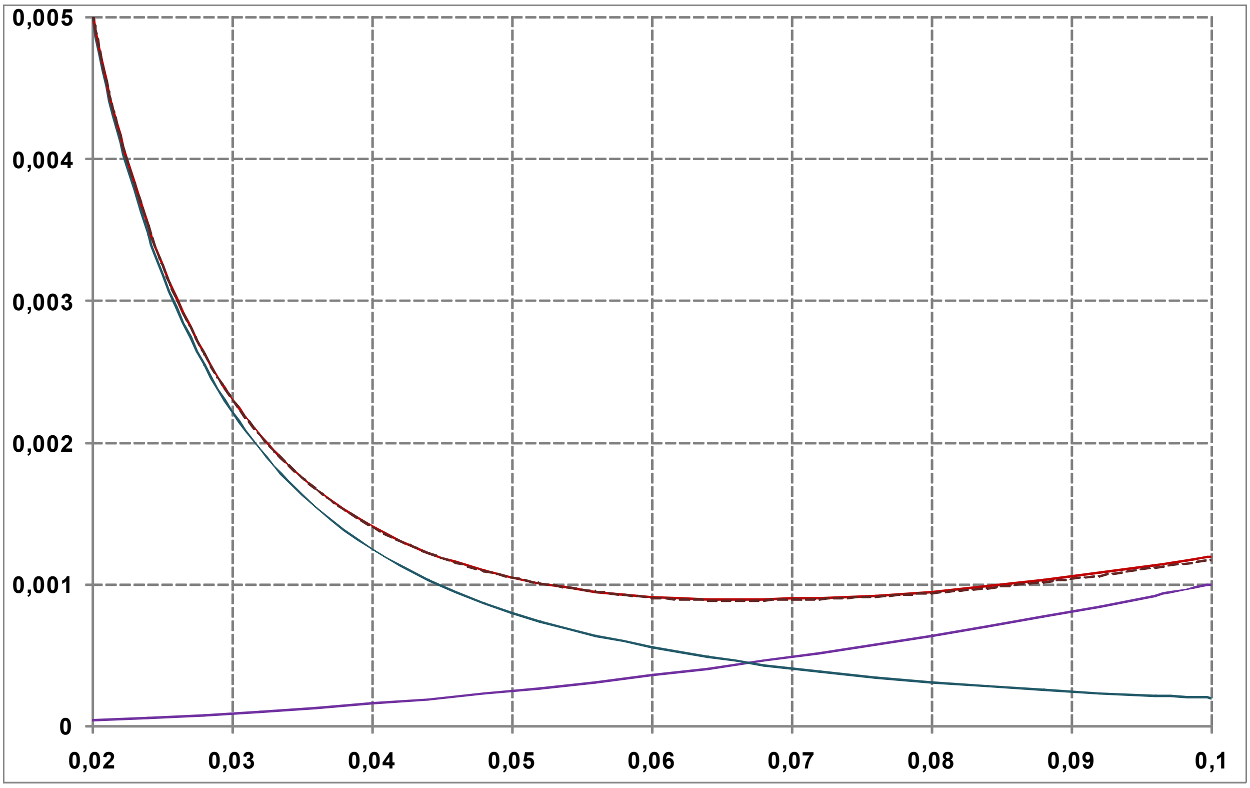
В данном случае минимум $\Phi(h)$ достигается при значениях шага, близких $h = 0.06$ (крупный шаг).

На рисунке показаны компоненты (слагаемые) $\Phi(h)$. Видно, что при $h \to 0$ оценка погрешности дифференцирования стремится к нулю, а оценка вычислительной погрешности уходит в бесконечность. **Малому шагу $h = 0.004$ соответствует большая оценка вычислительной и общей погрешности.**

Значения функции и ее производных приведены по справочному изданию: Таблицы математической статистики. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. М.: Наука, 1983.



А)



Б)

Рисунок 1

График функции $\Phi(h) = \hat{M}h^2 + \dfrac{4 \cdot \delta}{h^2}$ (оценки общей погрешности численного дифференцирования) и ее компонент: А) при $h \in [0.004;\, 0.1]$; Б) при $h \in [0.02;\, 0.1]$.