Модуль 11.1. Метод простой итерации
(конспект с доказательством)

Теоремы об условиях сходимости и оценках сходимости.
Выбор оптимального параметра, оптимальная оценка сходимости.
Влияние числа обусловленности на сходимость метода.
Расчет параметра метода на основе оценок собственных чисел, оптимальный выбор параметра и оценка погрешности метода

Общий случай

Рассмотрим СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений) вида

$$Ax = b, \tag{11.1}$$

где $x \in R^n$, $b \in R^n$, $A\ (n \times n)$, $\det A \neq 0$ (невырожденная матрица).

Через x^* обозначим точное решение системы, $x^* \in R^n$.

Методом простой итерации называют явный стационарный итерационный метод

$$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau} + Ax^{(s)} = b \tag{11.2}$$

где τ – число (постоянный параметр метода), $x^{(0)} \in R^n$ – начальное приближение для запуска итераций (его можно выбирать любым), $s = 0,1,...$ – номер шага метода.

Запись метода в виде (11.2) называется *канонической*. Для расчетов вместо (11.2) используется формула

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \tau \cdot (b - Ax^{(s)}) = x^{(s)} - \tau \cdot r^{(s)} \tag{11.3}$$

где $r^{(s)} = Ax^{(s)} - b$ – невязка СЛАУ на текущем приближении $x^{(s)}$.

Основные свойства метода описывают следующие теоремы.

Теорема 1. При решении СЛАУ (11.1) **методом простой итерации** (11.2) оценка погрешности метода на шаге s имеет вид

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \leq \| G(\tau) \|_2{}^s \left\| z^{(0)} \right\|_2 \tag{11.4}$$

достаточным условием сходимости метода является условие

$$\| G(\tau) \|_2 < 1. \tag{11.5}$$

Здесь $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ – погрешность метода на шаге s, $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – погрешность метода на начальном шаге, $G(\tau) = E - \tau A$ – переходная матрица метода, $\| G(\tau) \|_2$ – норма переходной матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора, $\| G(\tau) \|_2^s$ – норма переходной матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора и возведенная в степень s, $\left\| z^{(s)} \right\|_2$ и $\left\| z^{(0)} \right\|_2$ – евклидова норма векторов.

Доказательство

Выясним, как связаны $z^{(s)}$ и $z^{(0)}$. Запишем метод (11.2) в виде (11.3)

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \tau \cdot (b - Ax^{(s)}) \qquad (1)$$

Вычтем слева и справа x^* (это точное решение (11.1)), используем $b = Ax^*$:

$$x^{(s+1)} - x^* = x^{(s)} - x^* + \tau \cdot (Ax^* - Ax^{(s)}) \qquad (2)$$

Напомним, что погрешностью метода на шаге s называют разность приближенного и точного решений: $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$. Аналогично, погрешность метода на шаге $s+1$ есть $z^{(s+1)} = x^{(s+1)} - x^*$.

Перепишем (2) в обозначениях погрешностей:

$$z^{(s+1)} = z^{(s)} - \tau \cdot Az^{(s)} = (E - \tau A)\, z^{(s)} \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$G(\tau) = E - \tau A\,. \qquad (4)$$

Матрицу $G(\tau)$ называют **переходной матрицей метода:** она показывает, как связаны погрешности на текущем и следующем шаге:

$$z^{(s+1)} = G(\tau)\, z^{(s)} \qquad (5)$$

На основе (5) выясним, как связана $z^{(s+1)}$ с начальной погрешностью:

$$z^{(s+1)} = G(\tau) z^{(s)} = (G(\tau))^2 z^{(s)} = \ldots = (G(\tau))^{s+1} z^{(0)} \qquad (6)$$

(погрешности $z^{(s+1)}$ и $z^{(0)}$ связывает переходная матрица $G(\tau)$, возведенная в степень $s+1$). Поэтому для погрешности на шаге s справедливо

$$z^{(s)} = (G(\tau))^s z^{(0)} \qquad (7)$$

Оценим $\left\| z^{(s)} \right\|_2$ – евклидову норму погрешности метода на шаге s. В силу согласованности нормы матрицы и евклидовой нормы вектора запишем

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 = \left\| (G(\tau))^s z^{(0)} \right\|_2 \le \left\| (G(\tau))^s \right\|_2 \left\| z^{(0)} \right\|_2 \qquad (8)$$

В силу аксиомы нормы

$$\left\| (G(\tau))^s \right\|_2 = \underbrace{\| G(\tau) \cdot G(\tau) \ldots G(\tau) \|_2}_{s\ раз} \le$$

$$\le \underbrace{\| G(\tau) \|_2 \cdot \| G(\tau) \|_2 \cdot \ldots \cdot \| G(\tau) \|_2}_{s\ раз} = \| G(\tau) \|_2^s \qquad (9)$$

В неравенстве (8) $\| (G(\tau))^s \|_2$ есть евклидова норма переходной матрицы $G(\tau)$, **возведенной** в степень s, то есть $(G(\tau))^s$. В неравенстве (9) $\| G(\tau) \|_2^s$ есть «евклидова норма» переходной матрицы $G(\tau)$, **возведенная** в степень s.

Из (8) и (9) получаем

$$\| z^{(s)} \|_2 \le \| (G(\tau))^s \|_2 \| z^{(0)} \|_2 \le \| G(\tau) \|_2^s \| z^{(0)} \|_2 \qquad (10)$$

Оценка (11.4) доказана, и достаточным условием сходимости метода (11.2) является условие (11.5).

Если $\| G(\tau) \|_2 < 1$, то при $s \to +\infty$ $\| G(\tau) \|_2^s \to 0$ и $\| z^{(s)} \|_2 \to 0$.

Рассмотрим сходимость метода простой итерации для систем (11.1) с симметричной положительно определенной матрицей.

Теорема 2. При решении СЛАУ (11.1) с *симметричной, положительно определенной* матрицей $A = A^T > 0$ **методом простой итерации** (11.2) оценка погрешности метода на шаге s имеет вид

$$\| z^{(s)} \|_2 \le \left(\max\{ |1 - \lambda_1 \tau|, |1 - \lambda_n \tau| \}\right)^s \| z^{(0)} \|_2 \qquad (11.6)$$

необходимым и достаточным условием сходимости метода является

$$\tau \in (0, \frac{2}{\lambda_n}) \qquad (11.7)$$

Здесь $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ – погрешность метода на шаге s, $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – погрешность метода на начальном шаге, $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ – собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ (они положительны и упорядочены), λ_1 – минимальное из них, λ_n – максимальное из них.

Комментарии

1) Выражение в круглых скобках (см. (11.6)) есть норма переходной матрицы $G(\tau)$, подчиненная евклидовой норме вектора:

$$\| G(\tau) \|_2 = \max\{ |1 - \lambda_1 \tau|, |1 - \lambda_n \tau| \} \qquad (11.8)$$

Запись (11.8) следует из того, что собственные числа матрицы $G(\tau)$ можно выразить через собственные числа матрицы A как

$$\lambda_i(G) = 1 - \tau \cdot \lambda_i(A), i = 1,\ldots n$$

и норма симметричной матрицы $G(\tau)$, подчиненная евклидовой норме вектора, определяется модулями ее «крайних» собственных чисел, а именно

$$|\lambda_1(G)| = |1 - \lambda_1(A) \cdot \tau|, |\lambda_n(G)| = |1 - \lambda_n(A) \cdot \tau|.$$

2) условия сходимости (11.7) получены из условия $\| G(\tau) \|_2 < 1$ как решение системы следующих двух неравенств:

$$|1-\lambda_1\tau| < 1, \ |1-\lambda_n\tau| < 1.$$

Доказательство

Покажем, что (11.6) выполняется при любом выборе параметра метода и условие (11.7) является достаточным для сходимости.

Рассмотрим собственные числа матрицы $G(\tau) = E - \tau A$.

Так как E и A симметричны, матрица $G(\tau)$ также симметрична и ее собственные числа действительны. Собственные числа матрицы A обозначим через $\lambda_i, i = 1,\ldots n$, собственные векторы A обозначим через $v_i, i = 1,\ldots n$: $Av_i = \lambda_i v_i, i = 1,\ldots n.$

В силу симметричности и положительной определенности A все ее собственные числа положительны, их можно упорядочить: $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$.

Очевидно, что $G(\tau)v_i = (E - \tau A)v_i = v_i - \tau\lambda_i v_i = (1 - \tau\lambda_i)v_i$.

Это означает, что $G(\tau)$ имеет такие же собственные векторы, как A, и собственными числами $G(\tau)$ являются $\lambda_i(G) = 1 - \tau\lambda_i, i = 1,\ldots n$.

С учетом того, что собственные числа $G(\tau)$ действительны, получим

$$\|G(\tau)\|_2 = \max_{i=1,\ldots n} |\lambda_i(G)| = \max_{i=1,\ldots n} |1-\tau\lambda_i| = \max\{|1-\tau\lambda_1|, |1-\tau\lambda_n|\} \quad (11)$$

(максимум модуля собственных чисел матрицы $G(\tau)$ определяется ее максимальным или ее минимальным собственным числом и в итоге зависит от минимального и максимального собственных чисел матрицы A).

Из (11.4) и (11) следует (11.6).

Покажем, что условие (11.7) является достаточным для сходимости.

По теореме 1 для сходимости метода **достаточно** выполнения неравенства

$$\| G(\tau) \|_2 < 1,$$

что приводит к условию

$$\| G(\tau) \|_2 = \max\{|1-\tau\lambda_1|, |1-\tau\lambda_n|\} < 1 \quad (12)$$

Чтобы выбрать параметр τ, решим систему, состоящую из двух неравенств:

$$\begin{cases} |1-\tau\cdot\lambda_1| < 1, \\ |1-\tau\cdot\lambda_n| < 1 \end{cases}, \quad (13)$$

Раскрывая модули, запишем

$$-1 < 1 - \tau\cdot\lambda_1 < 1,$$

$$-1 < 1 - \tau\cdot\lambda_n < 1.$$

Учитывая положительность собственных чисел, получим $0 < \tau < \dfrac{2}{\lambda_1}$, $0 < \tau < \dfrac{2}{\lambda_n}$.

Так как $\lambda_1 \le .\lambda_n$, решением (13) является более сильное ограничение

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_n}.$$

Таким образом, при выполнении условия (11.7), то есть выборе параметра $\tau \in (0, \dfrac{2}{\lambda_n})$, выполнено ограничение $\| G(\tau) \|_2 < 1$ и метод (11.2) сходится с оценкой (11.6).

Покажем, как доказывать необходимость. Доказательство основано на том, что оценка (8), а именно

$$\| z^{(s)} \|_2 = \| (G(\tau))^s z^{(0)} \|_2 \le \| (G(\tau))^s \|_2 \| z^{(0)} \|_2$$

использует евклидову норму вектора и подчиненную ей («евклидову») норму матрицы. Оценку (8) нельзя улучшить: найдется такое начальное приближение, для которого (8) выполняется как равенство:

$$\| z^{(s)} \|_2 = \| (G(\tau))^s z^{(0)} \|_2 = \| (G(\tau))^s \|_2 \| z^{(0)} \|_2 \qquad (14)$$

Для «евклидовых» норм симметричных матриц $G(\tau)$ и $(G(\tau))^s$ верно

$$\| (G(\tau))^s \|_2 = \| G(\tau) \|_2^s \qquad (15)$$

Поэтому при $\tau \notin (0, \dfrac{2}{\lambda_n})$ получим $\|G(\tau)\|_2 \ge 1$ и соответственно $\| (G(\tau))^s \|_2 \ge 1$. Тогда при решении СЛАУ (11.1) найдется такое начальное приближение $x^{(0)}$, у которого такая погрешность $z^{(0)}$, что на каждом шаге метода (11.2) выполняется

$$\| z^{(s)} \|_2 \ge \| z^{(0)} \|_2 \qquad (16)$$

и сходимость метода отсутствует.

Комментарии

Неравенство (16) следует из того, что

$$\| z^{(s)} \|_2 = \| (G(\tau))^s z^{(0)} \|_2 = \| (G(\tau))^s \|_2 \| z^{(0)} \|_2 = \| G(\tau) \|_2^s \| z^{(0)} \|_2,$$

где $\| G(\tau) \|_2 \ge 1$.

Равенство (15) вытекает из того, что $\rho(G) = \max\limits_{i=1,n} |\lambda_i(G)|$

$\rho(G^s) = \max\limits_{i=1,n} |\lambda_i(G^s)|$, $\lambda_i(G^s) = [\lambda_i(G)]^s, i = 1,\ldots n$, $\rho(G^s) = [\rho(G)]^s$

$\| G \|_2 = \rho(G)$, $\| G^s \|_2 = \rho(G^s) = [\rho(G)]^s = \| G \|_2^s$.

Рассмотрим выбор оптимального параметра

Теорема 3. При решении СЛАУ (11.1) с *симметричной, положительно определенной* матрицей $A = A^T > 0$ **методом простой итерации** (11.2) оптимальным является

$$\tau_{opt}^* = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \tag{11.9}$$

для которого оценка погрешности метода на шаге s имеет вид

$$\| z^{(s)} \|_2 \le \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \right)^s \| z^{(0)} \|_2 \tag{11.10}$$

Здесь $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ – погрешность метода на шаге s, $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – погрешность метода на начальном шаге, $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ – собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ (они положительны и упорядочены), λ_1 – минимальное из них, λ_n – максимальное из них.

Через μ_A обозначено число обусловленности матрицы A, определяемое на основе нормы матрицы, подчиненной евклидовой норме вектора (далее кратко – *число обусловленности, определяемое на основе евклидовой нормы*):

$$\mu_A = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \tag{11.11}$$

Комментарии

Оптимальным считается такое значение τ, при котором метод (11.2) сходится и оценка погрешности метода на шаге s является наилучшей. В данном случае для отыскания оптимального τ ставится задача минимизации

$$\| G(\tau) \|_2 \underset{\tau \in \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)}{\longrightarrow} \min \tag{11.12}$$

Минимум функционала $\| G(\tau) \|_2$ достигается при $\tau_{opt}^* = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

Минимальным значением является $\| G(\tau_{opt}^*) \|_2$, и в ходе доказательства теоремы эта величина будет найдена как

$$\min_{\tau\in R}\| G(\tau)\|_2 = \min_{\tau\in R}\max\{|1-\lambda_1\tau|,\ |1-\lambda_n\tau|\} =$$

$$= \max\{\left|1-\lambda_1\tau^*_{opt}\right|,\ \left|1-\lambda_n\tau^*_{opt}\right|\} =$$

$$= \max\{\left|1-\frac{\lambda_1\cdot 2}{\lambda_1+\lambda_n}\right|,\ \left|1-\frac{\lambda_n\cdot 2}{\lambda_1+\lambda_n}\right|\} = \frac{\mu_A-1}{\mu_A+1} \tag{11.13}$$

откуда следует (11.10).

Доказательство

Рассмотрим принцип, в соответствии с которым метод (11.2) с параметром (11.9) считается оптимальным.

При решении СЛАУ (11.1) с матрицей $A = A^T > 0$ методом простой итерации (11.2) при любом выборе параметра τ для погрешности метода верна оценка

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \| G(\tau)\|_2^{\,s} \left\| z^{(0)} \right\|_2 \tag{17}$$

где в силу симметричности матрицы $G(\tau)$ для ее нормы выполняется

$$\| G(\tau)\|_2 = \max\{|1-\tau\lambda_1|,|1-\tau\lambda_n|\} \tag{18}$$

Для заданной матрицы $A = A^T > 0$ оптимальным назовем такое значение τ, при котором норма переходной матрицы $\| G(\tau)\|_2$ минимальна и тем самым согласно (17) гарантирована наиболее высокая скорость убывания погрешности метода.

Чтобы найти оптимальное значение τ, записывают задачу оптимизации

$$\| G(\tau)\|_2 = \max\{|1-\tau\cdot\lambda_1|,|1-\tau\cdot\lambda_n|\} \underset{\tau\in R}{\to \min} \tag{19}$$

(читается так: нужно найти минимальное значение функционала, определяемого по формуле (18) и зависящего от τ, при условии, что τ принимает любые действительные значения; а также найти τ, при котором достигается указанный выше минимум).

Если $\tau \notin (0, \dfrac{2}{\lambda_n})$, норма переходной матрицы не обеспечивает сходимости: $\|G(\tau)\|_2 \ge 1$. Поэтому минимальное значение функционала можно искать только для сходящихся методов, то есть при $\tau \in (0, \dfrac{2}{\lambda_n})$, и заменить задачу (19) задачей

$$\| G(\tau)\|_2 = \max\{|1-\tau\cdot\lambda_1|,|1-\tau\cdot\lambda_n|\} \underset{\tau\in(0,\frac{2}{\lambda_n})}{\to \min} \tag{20}$$

Тем не менее, в данном случае удобнее решить задачу без ограничений на параметр τ, то есть задачу (19), и потом проверить найденное решение на соответствие условиям сходимости.

Решим (19) графически, записав ее в следующих обозначениях:

$$\Phi(\tau) \underset{\tau \in R}{\rightarrow} \min \tag{21}$$

где $\Phi(\tau) = \max\{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\}$,

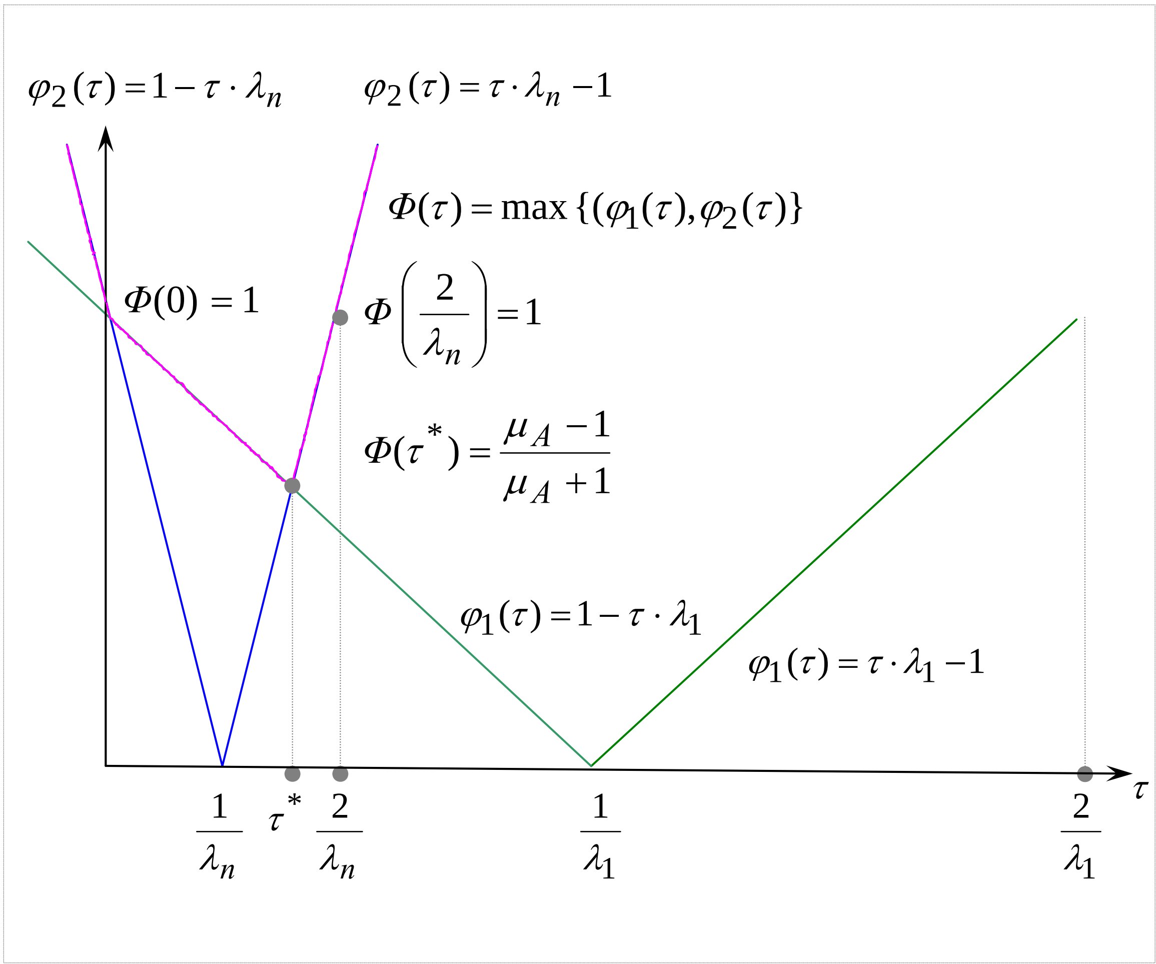
$\varphi_1(\tau) = |1 - \tau \cdot \lambda_1|$

$\varphi_2(\tau) = |1 - \tau \cdot \lambda_n|$

Для $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ раскроем модули и получим

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau \cdot \lambda_1, & если \ \ \tau \le \dfrac{1}{\lambda_1} \\ \tau \cdot \lambda_1 - 1, & если \ \tau \ge \dfrac{1}{\lambda_1} \end{cases} \qquad \varphi_2(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau \cdot \lambda_n, & если \ \ \tau \le \dfrac{1}{\lambda_n} \\ \tau \cdot \lambda_n - 1, & если \ \ \tau \ge \dfrac{1}{\lambda_n} \end{cases}$$

Функции $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ показаны на графике зеленым и синим цветом. Красным цветом показана $\Phi(\tau)$ как максимум из указанных двух.



Функции $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ принимают одинаковые значения при двух значениях аргумента: при $\tau = 0$, когда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$, и при некотором положительном $\tau = \tau^*$, которое расположено между точками, в которых $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ обращаются в ноль.

Поэтому $\tau = \tau^*$ не меньше, чем $\frac{1}{\lambda_n}$ и не больше, чем $\frac{1}{\lambda_1}$

Значение τ^* можно найти из условия $\varphi_1(\tau^*) = \varphi_2(\tau^*)$, которое принимает вид

$$1 - \tau^*\lambda_1 = \tau^*\lambda_n - 1. \tag{22}$$

и позволяет найти $\tau^* = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ и

$$\varphi_1(\tau^*) = \varphi_2(\tau^*) = 1 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} = \frac{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1}{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} + 1} = \frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \tag{23}$$

Здесь через μ_A обозначено число обусловленности матрицы A, а именно

$$\mu_A = \| A \|_2 \, \| A^{-1} \|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

Запишем, как устроена функция $\Phi(\tau) = \max\{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\}$, см. график:

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} \varphi_2(\tau) = 1 - \tau\lambda_n, & если \ \ \tau \le 0 \\ \varphi_1(\tau) = 1 - \tau\lambda_1, & если \ \ 0 \le \tau \le \tau^* \\ \varphi_2(\tau) = \tau\lambda_n - 1, & если \ \ \tau \ge \tau^* \end{cases} \tag{24}$$

Минимальное значение $\Phi(\tau)$ достигается при $\tau = \tau^*$, причем

$$\Phi(\tau^*) = \frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \tag{25}$$

Решением задачи (19) является $\tau = \tau^*$, причем минимально возможная норма переходной матрицы составит

$$\left\| G(\tau^*) \right\|_2 = \frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \tag{26}$$

Завершим доказательство формальными проверками.

Значение τ^* далее называем оптимальным и обозначаем τ^*_{opt}.

Метод (11.2) с параметром (11.9) является сходящимся, потому что τ^*_{opt} соответствует условиям сходимости (11.7):

$$\tau^*_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \in (0, \frac{2}{\lambda_n}). \tag{27}$$

Для погрешности метода (11.2) при любом выборе параметра верна оценка (11.4), и при выборе параметра τ^*_{opt} запишем:

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \left\| G(\tau^*_{opt}) \right\|_2^s \left\| z^{(0)} \right\|_2 \qquad (28)$$

При выборе параметра τ^*_{opt} норма переходной матрицы является минимальной и в силу (26)

$$\left\| G(\tau^*_{opt}) \right\|_2 = \frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1}. \qquad (29)$$

Через μ_A обозначено число обусловленности матрицы A, а именно $\mu_A = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$

Из (28) и (29) следует оценка (11.10):

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \left(\frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \right)^s \left\| z^{(0)} \right\|_2. \qquad (30)$$

Так как для любой невырожденной матрицы число обусловленности μ_A не меньше 1, получим

$$0 \le \frac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \le 1 \qquad (31)$$

При $s \to \infty$ $\left(\dfrac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \right)^s \to 0$ и погрешность метода $\left\| z^{(s)} \right\|_2 \to 0$.

Комментарии (после доказательства)

1) Чтобы найти оптимальный параметр τ^*_{opt}, нужно знать минимальное и максимальное собственные числа матрицы A.

2) Если $\mu_A \approx 1$, то $\left(\dfrac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \right) \approx 0$ и метод сходится быстро. Если $\mu_A >> 1$, то $\left(\dfrac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \right) \approx 1$ и сходимость медленная. Чем выше число обусловленности матрицы A, тем медленнее сходится метод.

3) Существуют такие начальные приближения $x^{(0)} \in R^n$, для которых

$\left\| z^{(s)} \right\|_2 = \left(\dfrac{\mu_A - 1}{\mu_A + 1} \right)^s \left\| z^{(0)} \right\|_2$, и это означает, что оценку (1.10) нельзя улучшить.

Построение метода на основе оценок собственных чисел

Рассмотрим СЛАУ (11.1) с **симметричной, положительно определенной матрицей**. Как следует из Теоремы 2, чтобы построить сходящийся метод простой итерации, нужно знать максимальное собственное число (см. (11.7)), чтобы оценить погрешность метода – знать минимальное и максимальное собственные числа (см. (11.6)).

Покажем, как построить сходящийся метод **на основе оценок собственных чисел.**

Пусть собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ неизвестны, но известны их оценки, а именно, положительные числа $M_{\min} > 0$ и $M_{\max} > 0$, такие, что

$\lambda_i(A) \in [M_{\min}, M_{\max}]$, $i = 1,\dots n$.

Тогда для λ_1 и λ_n – минимального и максимального собственных чисел – верно

$$0 < M_{\min} \le \lambda_1 \le \lambda_n \le M_{\max} \tag{11.14}$$

(оценку вида (11.14) называют **оценкой границ спектра**).

Теорема 4. При решении СЛАУ (11.1) с *симметричной, положительно определенной* матрицей $A = A^T > 0$ **методом простой итерации** (11.2) в случае, когда известна оценка границ спектра $0 < M_{\min} \le \lambda_1 \le \lambda_n \le M_{\max}$, достаточным условием сходимости метода является

$$\tau \in (0, \frac{2}{M_{max}}) \tag{11.15}$$

Оценка погрешности метода на шаге s имеет вид

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \left(\max\{\,|1-\tau M_{\min}|, |1-\tau M_{\max}|\,\}\right)^s \left\| z^{(0)} \right\|_2 \tag{11.16}$$

Здесь $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ – погрешность метода на шаге s, $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – погрешность метода на начальном шаге, $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ – собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ (они положительны и упорядочены), λ_1 – минимальное из них, λ_n – максимальное из них.

Доказательство

Используем Теорему 2, условие сходимости (11.7) и оценку погрешности (11.6). Так как $0 < \dfrac{2}{M_{\max}} < \dfrac{2}{\lambda_n}$, интервал $(0, \dfrac{2}{M_{\max}})$ принадлежит области сходимости метода.

Далее для каждого фиксированного значения τ очевидна оценка

$$\max\{\,|1-\lambda_1\tau|, |1-\lambda_n\tau|\,\} \le \max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} |1-\lambda\tau| \le \max_{\lambda\in[M_{\min}, M_{\max}]} |1-\lambda\tau|$$

Здесь максимальное из двух неизвестных чисел $|1-\lambda_1\tau|, |1-\lambda_n\tau|$ оценивается максимальным значением функции $|1-\lambda\tau|$ с аргументом λ, пробегающим отрезок $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]$, и затем оценивается максимальным значением той же функции $|1-\lambda\tau|$ с аргументом λ, пробегающим отрезок $\lambda \in [M_{\min}, M_{\max}]$, который включает в себя и значения λ_1 и λ_n, и отрезок $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Известно, что максимальное значение непрерывной функции на отрезке достигается либо на концах отрезка, либо в точке локального максимума. Так как при фиксированном τ функция $|1-\lambda\tau|$ с аргументом $\lambda \in R$ непрерывна и не имеет локального максимума, максимальное значение функции $|1-\lambda\tau|$ достигается на концах отрезка. Поэтому

$$\max_{\lambda \in [M_{\min}, M_{\max}]} |1-\lambda\tau| = \max\{|1-\tau M_{\min}|, |1-\tau M_{\max}|\}$$

Таким образом, получена оценка

$$\max\{|1-\lambda_1\tau|, |1-\lambda_n\tau|\} \le \max\{|1-\tau \cdot M_{\min}|, |1-\tau \cdot M_{\max}|\} \qquad (11.17)$$

Подставляя (11.17) в (11.6), получим (11.16).

Выбор оптимального параметра на основе оценок собственных чисел

Рассмотрим СЛАУ (11.1) с **симметричной, положительно определенной матрицей**. Как следует из Теоремы 3, чтобы построить метод простой итерации с оптимальной оценкой сходимости, нужно знать минимальное и максимальное собственные числа матрицы. **Рассмотрим возможности оптимизации на основе оценок собственных чисел.**

Пусть собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ неизвестны, но известны их оценки, а именно, положительные числа $M_{\min} > 0$ и $M_{\max} > 0$, такие, что

$\lambda_i(A) \in [M_{\min}, M_{\max}]$, $i = 1,\ldots n$.

Тогда для λ_1 и λ_n – минимального и максимального собственных чисел – верно

$$0 < M_{\min} \le \lambda_1 \le \lambda_n \le M_{\max}$$

и для числа обусловленности μ_A, определяемого на основе евклидовой нормы, верно

$$1 \le \mu_A = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \le \frac{M_{\max}}{M_{\min}} = M \qquad (1.18)$$

Теорема 5. При решении СЛАУ (11.1) с *симметричной, положительно определенной* матрицей $A = A^T > 0$ **методом простой итерации** в случае, когда известна оценка границ спектра $0 < M_{\min} \le \lambda_1 \le \lambda_n \le M_{\max}$, метод (11.2) с параметром

$$\tilde{\tau}^* = \frac{2}{M_{\min} + M_{\max}} \qquad (11.19)$$

имеет оптимальные свойства и сходится с оценкой

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \left(\frac{M-1}{M+1} \right)^s \left\| z^{(0)} \right\|_2 \qquad (11.20)$$

Здесь $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ – погрешность метода на шаге s, $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – погрешность метода на начальном шаге, $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ – собственные числа матрицы

$A = A^T > 0$ (они положительны и упорядочены), λ_1 – минимальное из них, λ_n– максимальное из них, число M является верхней оценкой числа обусловленности μ_A (определенного в евклидовой норме).

Доказательство

Используем Теорему 4, условие сходимости (11.15) и оценку погрешности (11.16). Во-первых, значение $\tau = \tilde{\tau}^*$ принадлежит области сходимости метода:

$$\tilde{\tau}^* = \frac{2}{M_{\min} + M_{\max}} \in (0, \frac{2}{M_{\max}}) \subset (0, \frac{2}{\lambda_n}).$$

Во-вторых, подстановкой значения $\tau = \tilde{\tau}^*$ можно показать, что

$$\max\{|1 - \tilde{\tau}^* M_{\min}|, |1 - \tilde{\tau}^* M_{\max}|\} = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{M_{\max} + M_{\min}} = \frac{M-1}{M+1}$$

поэтому из (11.16) следует (11.20).

Комментарий

Оптимальные свойства метода вытекают из следующих обстоятельств. Рассмотрим класс методов (11.2) с параметром (11.15):

$$\tau \in (0, \frac{2}{M_{\max}})$$

и оценкой погрешности (11.16):

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \left(\max\{\left|1 - \tau M_{\min}\right|, \left|1 - \tau M_{\max}\right|\}\right)^s \left\| z^{(0)} \right\|_2$$

Оптимальным считается такое значение τ, при котором метод сходится и оценка погрешности метода на шаге s (см. (11.16)) является в некотором смысле оптимальной. В данном случае для отыскания оптимального значения τ ставится задача минимизации

$$\max\{|1 - \tau M_{\min}|, |1 - \tau M_{\max}|\} \underset{\tau \in \left(0, \frac{2}{M_{\max}}\right)}{\rightarrow} \min \tag{11.21}$$

Используя графики функций $|1 - \tau M_{\min}|$ и $|1 - \tau M_{\max}|$ с аргументом $\tau \in R$, несложно показать, что минимальное значение функционала достигается при

$$\tau = \tilde{\tau}^* = \frac{2}{M_{\min} + M_{\max}}$$

При этом минимальное значение функционала

$$\max\{|1 - \tau M_{\min}|, |1 - \tau M_{\max}|\}$$

может быть найдено подстановкой значения $\tau = \tilde{\tau}^*$:

$$\min_{\tau \in R} \max \{ |1 - \tau M_{\min}|, |1 - \tau M_{\max}| \} =$$

$$= \max \{ |1 - \tilde{\tau}^* \cdot M_{\min}|, |1 - \tilde{\tau}^* \cdot M_{\max}| \} = \frac{M - 1}{M + 1} \qquad (11.22)$$

Комментарий к параграфу 11.1

В формулировках теорем 1-5 погрешность метода на шаге s оценивается начальной погрешностью, см. (11.4), (11.6), (11.10), (11.16), 11.20), все оценки в евклидовой норме. В свою очередь, **погрешность метода на начальном шаге можно оценить по начальной невязке**, используя норму обратной матрицы или ее оценку:

$\| z^{(0)} \|_2 \le \| A^{-1} \|_2 \cdot \| r^{(0)} \|_2$, где $r^{(0)} = Ax^{(0)} - b$ и ее можно вычислить.