Домашнее задание ДЗ-14 по ТУ

1. Для следующих характеристических полиномов, используя *критерий Рауса-Гурвица* найти и нарисовать вид областей асимптотической устойчивости по параметрам a, b для соответствующих этим полиномам динамических систем:

a). $p^3 + ap^2 + p + b$;
b). $p^3 + ap^2 + bp + 1$;
c). $p^4 + ap^3 + p^2 + bp + 1$.

2. Используя *метод $\lambda-\tau$ преобразований* выяснить размещение корней следующих полиномов относительно мнимой оси (число корней слева, на оси, справа):

a). $p^4 + 4p^3 + 3p^2 + 5p + 1$;
b). $8p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1$;
c). $p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 5p^2 + p + 3$.

Замечание. Прошу рассматривать выполнение этих домашних заданий как подготовку (по разделу «Алгебраические критерии устойчивости») ко второй контрольной работе.

Дополнение для группы 3821Б1ПМоп1:

В этой группе (из-за обсуждения результатов КР-1 по ТУ) не успели разобрать пример использования метода $\lambda-\tau$ преобразований, а также обсудить преобразование таблицы коэффициентов при τ–переходе. Поэтому привожу описание и свойства τ–перехода, а затем разбираю применение метода на примере, заимствованном из ДЗ-13 (задача 1b на критерий Михайлова).

Итак, τ–переход. Можно доказать, что умножение одной из двух строк таблицы коэффициентов полинома на произвольное положительное число τ (такое преобразование и называют τ–переходом) не изменяет размещения корней этого полинома по отношению к мнимой оси.

Пример использования метода $\lambda-\tau$ преобразования. Возьмем полином из задачи № 1b ДЗ-13, а именно: $B_4(p) = p^4 - p^3 + p^2 + 9p - 10$. Для него с использованием обобщенного метода Михайлова ранее было определено размещение его корней относительно мнимой оси. Индекс размещения корней оказался равен (1; 0; 3). Покажем, как можно получить этот же результат методом $\lambda-\tau$ преобразований.

Запишем для указанного полинома таблицу коэффициентов $\underset{b_0}{1} \cdot p^4 \underset{b_1}{-1} \cdot p^3 + \underset{b_2}{1} \cdot p^2 + \underset{b_3}{9} p \underset{b_4}{-10}$ по правилам метода:

$$\begin{array}{r} \\ -\lambda\cdot \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_1 = -1} \begin{array}{r} \lambda\cdot \\ - \end{array}\begin{bmatrix} \cancel{0} & 0 & 1 & 0 & -10 \\ \cancel{0} & -1 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = -1$$

Вычитаем по диагонали (как показано стрелками) из верхней строки нижнюю, помноженную на λ, выбирая $\lambda = \lambda_1 = \frac{b_0}{b_1}$, чтобы занулить обведенный коэффициент.

В новой таблице (точнее в ее правой части без $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) из нижней строки вычтем по диагонали верхнюю строку, помноженную на λ.
Значение λ подбирается так, чтобы занулить обведенный коэффициент, т.е. $\lambda = \lambda_2 = -1$

Получим: $\begin{bmatrix} \cancel{0} & 1 & 0 & -10 \\ \cancel{0} & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau = \frac{1}{9}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Выполним τ переход.

Далее выполним еще три похожих действия:

$$\begin{array}{r} \\ -\lambda\cdot \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda_3 = 1]{} \begin{bmatrix} \cancel{0} & 0 & -10 \\ \cancel{0} & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau = \frac{1}{10}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot\lambda \\ - \end{array} \xRightarrow[\lambda_4 = -1]{} \begin{bmatrix} \cancel{0} & -1 \\ \cancel{0} & 0 \end{bmatrix}$$

В результате получили четыре значения λ_k
Запишем знаки λ_k: $\ominus \ominus \oplus \ominus$
Знаки $\operatorname{Re} p_k$ обратные: $\oplus \oplus \ominus \oplus$
Таким образом, получили индекс размещения корней вида (1; 0; 3), что совпадает с результатом, полученным методом Михайлова.