ЛЕКЦИЯ 18

Свободные колебания прямоугольной мембраны.

Волновое уравнение в пространственно двумерном случае записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t).$$

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами p и q, закрепленной по контуру. Эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0,y,t) = u(p,y,t) = 0,\ u(x,0,t) = u(x,q,t) = 0,\ x \in (0,p),\ y \in (0,q),\ t \in (0,T) \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y),\ (x,y) \in (0,p)\times(0,q). \tag{3}$$

Будем искать частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), в виде

$$u(x,y,t) = v(x,y)T(t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -k^2.$$

Отсюда, принимая во внимании граничные условия (2), имеем

$$T''(t) + a^2k^2T(t) = 0, \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0, \tag{6}$$

$$v(0,y) = v(p,y) = 0,\ y \in (0,q),\ v(x,0) = v(x,q) = 0,\ x \in (0,p),\ t \in (0,T). \tag{7}$$

Задача (6), (7) – задача на собственные функции и собственные значения. Найдём собственные значения и собственные функции задачи (6), (7). Положим

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6), получим

$$\frac{Y''}{Y} + k^2 = -\frac{X''}{X},$$

откуда получаем два уравнения

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0,\ Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0, \tag{9}$$

где

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2. \tag{10}$$

Общие решения уравнений (9), как известно, имеют следующий вид:

$$X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x,\ Y(y) = C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y. \tag{11}$$

Из граничных условий (7) получаем

$$X(0) = 0,\ X(p) = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(q) = 0, \tag{12}$$

откуда ясно, что $C_1 = C_3 = 0$, и если мы положим $C_2 = C_4 = 1$, то окажется

$$X(x) = \sin k_1 x,\ Y(y) = \sin k_2 y, \tag{13}$$

причем должно быть

$$\sin k_1 p = 0,\ \sin k_2 q = 0. \tag{14}$$

Из уравнений (14) вытекает, что k_1 и k_2 имеют бесчисленное множество значений

$$k_{1,m} = \frac{m\pi}{p},\ k_{2,n} = \frac{n\pi}{q}\ (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда из равенства (10) получим соответствующие значения k^2:

$$k_{m,n}^2 = k_{1,m}^2 + k_{2,n}^2 = \pi^2 (\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}). \tag{15}$$

Таким образом, собственным значениям (15), в силу (8) и (13), соответствуют собственные функции

$$v_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \tag{16}$$

граничной задачи (6), (7).

Обращаясь теперь к уравнению (5), мы видим, что для каждого собственного значения $k^2 = k_{mn}^2$ его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t, \tag{17}$$

где A_{mn} и B_{mn} – произвольные постоянные.

Таким образом, в силу (4), (16) и (17) частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), имеют вид

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}),\ m, n = 1, 2, \dots$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{\pi n y}{q}. \tag{18}$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x, y и t, то сумма его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям (2). Для выполнения начальных условий (3) необходимо, чтобы

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=\psi(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} ak_{mn}B_{nm}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}. \tag{19}$$

Формулы (19) представляют собою разложение заданных функций φ и ψ в двойной ряд Фурье по синусам. Коэффициенты разложений определяются по формулам

$$A_{mn}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dxdy,$$

$$B_{mn}=\frac{4}{ak_{mn}pq}\int_0^p\int_0^q \psi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dxdy. \tag{20}$$

Подставляя (20) в ряд (18), мы получим решение нашей задачи. Положим

$$A_{mn}=M_{mn}\sin\varphi_{mn},\ B_{mn}=M_{mn}\cos\varphi_{mn}.$$

Тогда решение (18) можно записать в виде

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty} M_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin(ak_{mn}t+\varphi_{mn}). \tag{21}$$

Каждый член этого ряда представляет собою стоячую волну, при которой точки мембраны совершают гармоническое колебательное движение с частотой

$$\omega_{mn}=a\pi\sqrt{m^2/p^2+n^2/q^2}.$$

Случай мембраны отличается от случая струны тем, что для последней каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма струны, которая просто разделяется узлами на несколько равных частей. Для мембраны же может оказаться, что одной и той же частоте соответствует несколько фигур мембраны с различными положениями узловых линий, то сть линий, вдоль которых амплитуда колебаний равна нулю. Проще всего это исследовать на примере квадратной мембраны:

$$p=q=\pi.$$

В этом случае частота ω_{mn} будет вычисляться по формуле

$$\omega_{mn}=a\sqrt{m^2+n^2}.$$

Из этой формулы видно, что основной тон, определяемый выражением

$$u_{11}=M_{11}\sin x\sin y\sin(\omega_{11}t+\varphi_{11}),$$

имеет частоту $\omega_1=a\sqrt{2}$, причем очевидно, что для этой частоты узловые линии совпадают со сторонами квадрата, образуемого мембраной.

В тех случаях, когда

$$m=1,\ n=2 \text{ или } m=2,\ n=1,$$

мы имеем два обертона

$$u_{12}=M_{12}\sin x\sin 2y\sin(\omega_{12}t+\varphi_{12}),\ u_{21}=M_{21}\sin 2x\sin y\sin(\omega_{21}t+\varphi_{21},$$

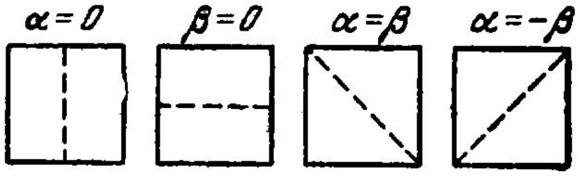
с одной и той же частотой $\omega_{12}=\omega_{21}=a\sqrt{5}$. Ясно, что для этой частоты (при $\varphi_{12}=\varphi_{21}$) узловые линии определяются из уравнения

$$\alpha\sin x\sin 2y+\beta\sin 2x\sin y=0$$

или

$$\alpha\cos y+\beta\cos x=0.$$

Простейшие из них изображены на рисунке пунктирными линиями. Более сложные узловые линии при той же частоте получим, когда $\alpha\neq\pm\beta$ и $\alpha,\ \beta\neq 0$.



Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.