Лекция 23

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме для уравнения теплопроводности

Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности формулируется в виде

$$u_t(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0, \tag{1}$$

$$u(x,y,z,t)\,|_{t=0} = \varphi(x,y,z). \tag{2}$$

где $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$, $t>0$, φ – заданная функция, определенная в $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим функцию $F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta)$, определенную при всех $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$, $(\xi,\eta,\zeta)\in \mathbf{R}^3$, $t>0$ выражением

$$F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}. \tag{3}$$

Эта функция обладает следующими свойствами

1. При каждом фиксированном наборе $(\xi,\eta,\zeta)\in \mathbf{R}^3$ функция F (как функция переменных (x,y,z) и t) удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности
$$F_t - a^2 \Delta F = 0, \tag{4}$$
2. При любых $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$, $t>0$ выполнено
$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta)\,dxdydz = 1. \tag{5}$$
3. Для каждой ограниченной и непрерывной в $\mathbf{R}^3$ функции φ выполнено
$$\lim_{t\to+0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi,\eta,\zeta) F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta = \varphi(x,y,z). \tag{6}$$

Сформулированные свойства 1, 3 функции F позволяют сделать вывод о том, что функция u, определяемая выражением

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi,\eta,\zeta) F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta \tag{7}$$

является решением задачи Коши (1), (2). Формула (7) – формула Пуассона для решения задачи Коши в пространственно трехмерном случае.

В случае, когда вместо однородного уравнения (1) рассматривается неоднородное уравнение

$$u_t(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y.z,.t), \tag{8}$$

решение задачи Коши (8), (2) записывается в виде

$$u(x,y,z,t)=\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\varphi(\xi,\eta,\zeta)F(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta+ \\ +\int\limits_0^t\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)F(x,y,z,t-\tau,\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta d\tau. \quad (9)$$

В пространственно двумерном случае задача Коши для уравнения теплопроводности формулируется в виде

$$u_t(x,y,t)-a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{tt}(x,y,t))=f(x,y..t), \quad (10)$$

$$u(x,y,t)|_{t=0}=\varphi(x,y). \quad (11)$$

Рассмотрим функцию $F(x,y,t,\xi,\eta)$, определенную при всех $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$, $t>0$ выражением

$$F_2(x,y,t,\xi,\eta)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}. \quad (12)$$

Эта функция обладает свойствами, аналогичными (4)–(6) (при соответствующем переходе от $\mathbf{R}^3$ к $\mathbf{R}^2$) и позволяет записать решение задачи (10), (11) в виде

$$u(x,y,t)=\iiint\limits_{\mathbf{R}^2}\varphi(\xi,\eta)F_2(x,y,t,,\xi,\eta,d\xi d\eta+ \\ +\int\limits_0^t\iiint\limits_{\mathbf{R}^2}f(\xi,\eta,\tau)F_2(x,y,t-\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau. \quad (13)$$

В пространственно одномерном случае (теплопроводность в стержне) задача Коши формулируется в виде

$$u_t(x,y,t)-a^2u_{xx}(x,y,t)=f(x,.t), \quad (14)$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x). \quad (15)$$

С помощью функции

$$F_1(x,t,\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \quad (16)$$

решение этой задачи записывается в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)F_1(x,t,,\xi,)d\xi d\eta+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)F_1(x,t-\tau,\xi)d\xi d\tau. \quad (17)$$

Функция $F_1(x,t,\xi)$ обладает свойствами, аналогичными перечисленным выше для трехмерного случая, а именно: при каждом $\xi\in\mathbf{R}$

$$\frac{\partial F_1(x,t,\xi)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2F_1(x,t,\xi)}{\partial x^2}=0, \quad (18)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_1(x,t,\xi)d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_1(x,t,\xi)dx=1, \quad (19)$$

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)F_1(x,t,\xi)d\xi=\varphi(x) \qquad (20)$$

Свойства (19), (20) показывают, что

$$\lim_{t\to+0}F_1(x,t,\xi)d\xi=\delta(x-\xi), \qquad (21)$$

где $\delta(x-\xi)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $\xi\in\mathbf{R}$. Определенные соотношениями (3), (12), (16) функции называются фундаментальными решениями уравнения теплопроводности.

Теорема о максимуме и минимуме для уравнения теплопроводности

Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ – открытое ограниченное подмножество в пространстве переменных (x,y,z) с границей Г; $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ – замыкание Ω в $\mathbf{R}^3$; $Q_T=\Omega\times(0,T)\subset\mathbf{R}^4$ – цилиндр в пространстве переменных ($(x,y,z)\in\Omega$, $t\in(0,T)$, T – некоторая положительная постоянная); $\Sigma_0=\overline{\Omega}\times\{0\}$ – нижняя граница цилиндра Q_T; $\Sigma=\Gamma\times[0,T]$ – боковая поверхность этого цилиндра; $\Sigma_T=\overline{\Omega}\times\{T\}$ – верхняя граница цилиндра.

В цилиндре Q_T рассматривается однородное уравнение теплопроводности

$$u_t(x,y,z,t)-a^2\Delta u(x,y,z,t)=0. \qquad (22)$$

Справедлива следующая

Теорема (теорема о максимуме и минимуме). Классическое решение u уравнения теплопроводности (22) достигает своего наибольшего и наименьшего значения либо на нижнем основании Σ_0 цилиндра Q_T, либо на его боковой поверхности Σ_T.

Доказательство. Поскольку теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме в результате замены u на $-u$, то ограничимся доказательство теоремы о максимуме.

Пусть M – наибольшее значение функции в замкнутом цилиндре $\overline{Q_T}$, а m – наибольшее значение функции на $\Sigma_0\cup\Sigma$ (т.к. $\overline{Q_T}$ и $\Sigma_0\cup\Sigma$ – компактные подмножества в $\mathbf{R}^4$. По теореме Вейерштрасса эти значения достигаются в некоторых точках соответствующих множеств. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $M>m$ и $u(x_0,y_0,z_0,t_0)=M$. В этом случае $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ и $t_0\in(0,T]$. Рассмотрим функцию

$$v(x,y,z,t)\le u(x,y,z,t)+\frac{M-m}{6d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right], \qquad (23)$$

где d – диаметр области Ω.

На боковой поверхности цилиндра и на его нижнем основании

$$v(x,y,z,t)=m+\frac{M-m}{6}=\frac{M}{6}+\frac{5m}{6}<M, \qquad (24)$$

причем, по-прежнему, $v(x_0,y_0,z_0,t_0)=M$. Следовательно, функция v также принимает свое наибольшее значение в некоторой точке (x_1,y_1,z_1,t_1) такой, что $(x_1,y_1,z_1)\in\Omega$, $t_1\in(0,T]$. Тогда в этой точке

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\le 0,\ \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\le 0,\ \ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\le 0,\ \ \frac{\partial v}{\partial t}\ge 0,$$

откуда следует , что в точке (x_1,y_1,z_1,t_1)

$$v_t-a^2\Delta v\ge 0, \tag{25}$$

а с другой стороны, из (23) следует

$$v_t-a^2\Delta v=u_t-a^2\Delta v-a^2\,\frac{M-m}{d^2}=-a^2\,\frac{M-m}{d^2}<0. \tag{26}$$

Сопоставляя (25) и (26), приходим к противоречию. Теорема доказана.

Теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Докажем эту теорему, опираясь на теорему о максимуме и минимуме. Пусть $u^1(x,y,z,t)$ и $u^2(x,y,z,t)$ – ограниченные решения уравнения теплопроводности (8), т.е. при $i=1{,}2$ и при всех $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $t>0$ выполнено

$$u_t^i(x,y,z,t)-a^2\Delta u^i(x,y,z,t)=f(x,y.z,.t), \tag{27}$$

$$u^i(x,y,z,t)\,|_{t=0}=\varphi(x,y,z). \tag{28}$$

Ограниченность решений u^1,u^2 означает, что существует постоянная $M>0$ такая, что

$$|\,u^i(x,y,z,t)\,|\le M,\ \ i=1{,}2, \tag{29}$$

$(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $t>0$. Из (27), (28) следует, что разность $u=u^1-u^2$, $t>0$ является решением задачи

$$u_t\,(x,y,z,t)-a^2\Delta u\ \ (x,y,z,t)=0, \tag{30}$$

$$u(x,y,z,t)\,|_{t=0}=0. \tag{31}$$

и, как следует из (29), будет выполнено

$$|\,u(x,y,z,t)\,|\le 2M,$$

$(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $t>0$.

Пусть $\Omega=B_L(0)\subset\mathbf{R}^3$, $B_L(0)$ – открытый шар радиуса $L>0$ с центром в начале координат, Γ_L – ограничивающая его сфера,

$B_L(0)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2<L^2\}$, $\Gamma_L=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2=L^2\}$,

$Q_T=\Omega\times(0,T)\subset\mathbf{R}^4$ – цилиндр в пространстве переменных (x,y,z,t), $(x,y,z)\in\Omega$, $t\in(0,T)$ с боковой поверхностью $\Sigma=\Gamma_L\times[0,T]$ и нижним основанием $\Sigma_0=\overline{\Omega}\times\{0\}$.

Рассмотрим функцию

$$v(x,y,z,t)=\frac{12M}{L^2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}+a^2t\right) \qquad (33)$$

Очевидно, что v также удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

$$v_t\,(x,y,z,t)-a^2\Delta v(x,y,z,t)=0\,, \qquad (34)$$

при этом

$$v(x,y,z,t)\,|_{\Sigma_0}\geq \pm u(x,y,z,t)\,|_{\Sigma_0}=0\,, \qquad (35)$$

$$v(x,y,z,t)\,|_{\Sigma}=\frac{12M}{L^2}\left(\frac{L^2}{6}+a^2t\right)\geq 2M\geq \pm u(x,y,z,t)\,|_{\Sigma}\,, \qquad (36)$$

откуда на Σ_0 и Σ

$$v(x,y,z,t)-u(x,y,z,t)\geq 0\,,$$
$$v(x,y,z,t)+u(x,y,z,t)\geq 0\,,$$

и по теореме о максимуме и минимуме

$$v(x,y,z,t)-u(x,y,z,t)\geq 0\,, \qquad (37)$$
$$v(x,y,z,t)+u(x,y,z,t)\geq 0 \qquad (38)$$

при всех $(x,y,z,t)\in Q_T$, поэтому

$$|\,u(x,y,z,t)\,|\leq v(x,y,z,t) \qquad (39)$$

Выбирая произвольную точку $(x_0,y_0,z_0)\in \mathbf{R}^3$ и $t_0\in(0,T)$ и подбирая L и T так, чтобы $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ и $t_0>0$, получим, что для этой точки будет справедливо неравенство

$$|\,v(x_0,y_0,z_0,t_0)\,|=\frac{12M}{L^2}\left(\frac{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2}{6}+a^2t_0\right).$$

Устремляя $L\to+\infty$, получим $u(x_0,y_0,z_0,t_0)=0$, откуда следует, что решение задачи Коши единственно.

Теорема о единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ – открытое ограниченное подмножество в $\mathbf{R}^3$ с границей Г, в каждой точке которой определен единичный вектор внешней нормали $\vec{n}$. В области $Q_T=\Omega\times(0,T)$ рассматривается уравнение теплопроводности (10)

$$u_t(x,y,z,t)-a^2\Delta u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)\,, \qquad (40)$$

$(x,y,z)\in\Omega,\ t\in(0,T)$, дополненное начальными условиями

$$u(x,y,z,t)\,|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in\Omega \qquad (41)$$

и смешанными граничными условиями

$$u(x,y,z,t)=\varphi_\Gamma(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Gamma_1,\ t\in[0,T]\,, \qquad (42)$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}=g_\Gamma(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Gamma_2,\ t\in[0,T]\,, \qquad (43)$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}+\alpha u(x,y,z,t)=\rho_\Gamma(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Gamma_3,\ t\in[0,T]. \quad (44)$$

Здесь рассмотрена ситуация, когда на границе $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ ($\Gamma_i\cap\Gamma_j=\emptyset$, $i\neq j$) заданы все три типа граничных условий (см. п.2 лекции «Уравнения параболического типа», соотношения (14), (15), (16)), что позволяет с помощью единого подхода рассмотреть все возможные случаи задания граничных условий. Предполагается, что в (41)–(43) $\alpha>0$ – заданная постоянная, $\varphi_\Gamma, g_\Gamma, \rho_\Gamma$ – заданные функции, определенные на $\Gamma_1\times[0,T], \Gamma_2\times[0,T], \Gamma_3\times[0,T]$ соответственно.

Пусть u_1^*, u_2^* – решения задачи (40)–(43). Тогда функция

$$u(x,y,z,t)=u_1^*(x,y,z,t)-u_2^*(x,y,z,t)$$

является решением задачи

$$u_{tt}(x,y,z,t)-\Delta u(x,y,z,t)=0,\ (x,y,z,t)\in Q_T, \quad (45)$$

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=0,\ (x,y,z)\in\Omega, \quad (46)$$

$$u(x,y,z,t)=0,\ (x,y,z,t)\in\Gamma_1\times[0,T], \quad (47)$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}=0,\ (x,y,z,t)\in\Gamma_2\times[0,T], \quad (48)$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}+\alpha u(x,y,z,t)=0,\ (x,y,z,t)\in\Gamma_3\times[0,T]. \quad (49)$$

Умножим уравнение (45) на $u(x,y,z,t)$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$\iiint\limits_\Omega uu_t\,dxdydz-a^2\iiint\limits_\Omega u\Delta u\,dxdydz=0 \quad (50)$$

и, используя очевидные соотношения

$$uu_t=\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t},\ u\Delta u=\frac{\partial}{\partial x}(uu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+\frac{\partial}{\partial z}(uu_z)-[(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2],$$

из (50) получим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_\Omega u^2\,dxdydz+a^2\iiint\limits_\Omega[(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2]\,dxdydz-\\&-a^2\iiint\limits_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(uu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+\frac{\partial}{\partial z}(uu_z)\right]dxdydz=0.\end{aligned} \quad (51)$$

Применяя к последнему интегралу в (51) формулу Гаусса–Остроградского

$$\iint\limits_\Gamma(w_1n_1+w_2n_2+w_3n_3)\,d\Gamma=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)dxdydz,$$

положив

$$w_1=uu_x,\ w_2=uu_y,\ w_3=uu_z,$$

получим

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(uu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+\frac{\partial}{\partial z}(uu_z)\right]dxdydz =$$

$$=\iint\limits_{\Gamma}u(u_x n_1+u_y n_2+u_z n_3)d\Gamma=\iint\limits_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma.$$

Поэтому (51) запишется в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega}u^2dxdydz+a^2\iiint\limits_{\Omega}[(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2]dxdydz=a^2\iint\limits_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma. \quad (52)$$

Поскольку в силу (47)–(49)

$$u|_{\Gamma_1}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=-\alpha u,$$

то

$$\iint\limits_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma=-\alpha\iint\limits_{\Gamma}u^2d\Gamma$$

и равенство (52) запишется в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega}u^2dxdydz+a^2\iiint\limits_{\Omega}[(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2]dxdydz=-\alpha a^2\iint\limits_{\Gamma}u^2d\Gamma. \quad (53)$$

Пусть

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}u^2dxdydz. \quad (54)$$

Тогда из (46), (53), (54) следует, что

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}\le 0, \quad (55)$$

$$\Phi(0)=0, \quad (56)$$

$$\Phi(t)\ge 0,\ t\ge 0. \quad (57)$$

Сопоставляя (55)–(57), заключаем

$$\Phi(t)\equiv 0,\ t\ge 0$$

что с учетом (54) влечет

$$u(x,y,z,t)\equiv 0,\ (x,y,z,t)\in Q_T,$$

что, согласно (44), означает единственность решения исходной задачи.

Список литературы

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.