Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики

Отчет по лабораторной работе №2

Поперечные колебания струны в среде без сопротивления

Выполнили:
Студентки группы
3821Б1ПМоп2
Киселева Ксения
Семашко Екатерина

Нижний Новгород
2024

Оглавление

Введение

В лабораторной работе рассматривается смешанная краевая задача для уравнений гиперболического типа:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) - \text{НУ}$$
$$\alpha u(0,t) - \beta u_x(0,t) = 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0,$$
$$\gamma u(l.t) - \delta u_x(l,t) = 0, \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0.$$

Лабораторная работа предназначена для изучения собственных и вынужденных колебаний (в частности, наблюдения явления резонанса), а также изучения бегущих волн (метод Даламбера) для полуограниченной струны (здесь мы положим l достаточно большим и будем рассматривать бегущие волны вблизи закрепленного конца).

1. Теоретическая часть

1.1. Вывод уравнения поперечных колебаний струны

Задание: вывести уравнение поперечных колебаний струны при условии, что среда не оказывает сопротивления, и индивидуальных граничных условий.
Пусть конечные точки струны закреплены, а сама струна туго натянута. Если вывести струну из положения равновесия, то струна начнет колебаться.
Пусть все точки струны движутся перпендикулярно ее положению равновесия – поперечные колебания, причём в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.
Введём в этой плоскости систему координат xOu. Пусть струна в начальный момент времени лежит на оси Ox, тогда u будет показывать отклонения струны от положения равновесия. В процессе колебания u зависит и от x, и от t. То есть, $u(x,t)$ – нужно найти, чтобы знать положение струны в любой точки в произвольный момент времени.
$U_x(x,t)$ – угловой коэффициент касательной в точке x.
$U_t(x,t)$ – скорость движения некоторой точки x струны.
$U_{tt}(x,t)$ – ускорение.

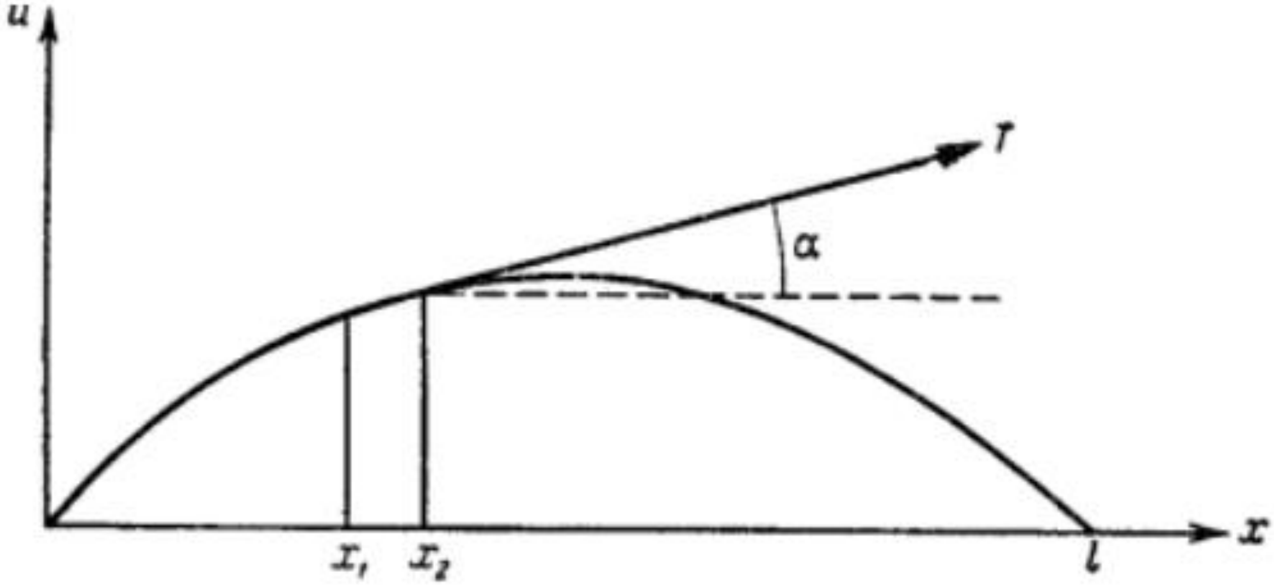

Рисунок 1.

Пусть струна абсолютно гибкая (не сопротивляется изгибу). Отсюда получим, что если мы уберем часть струны с одной из сторон от некоторой точки, то сила натяжения, заменяющая действие удалённой части, (T) будет направлена по касательной.
Пусть струна упругая и подчиняется закону Гука. Изменение величины силы натяжения при этом пропорционально изменению длины струны.
Пусть струна однородна, тогда ρ-линейная плотность и на струну в плоскости колебания действуют силы, параллельные Ou. Силы непрерывно распределены вдоль струны. Плотность распределения сил обозначим за $g(x,t)$.
$g(x,t) = \rho g$ – вес струны, где g – ускорение свободного падения. Сопротивление среды не учитывается.

Рассмотрим малые колебания струны.
$\alpha(x,t)$- острый угол между Ox и касательной к струне в точке x в момент времени t.
Условие малости предполагает, что величинами большего порядка ($\alpha^2(x,t)$) можно пренебречь. Также справедливы эквивалентности при $\alpha \to 0$: $sin\alpha \approx \alpha, cos\alpha \approx 1, tg\alpha \approx \alpha$.
$U_x = tg\alpha \approx \alpha \Longrightarrow U_{xx} \approx 0 \Longrightarrow$ В процессе колебания мы можем пренебречь изменением длины любого участка струны.
$M_1M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\,dx \approx x_2 - x_1$
Возьмём участок струны M_1M_2 и заменим действие отброшенных участков силами натяжения T_1, T_2. Сумма проекций сил натяжения на Ox:
$-T_1cos\alpha_1 + T_2cos\alpha_2 = 0$
Отсюда по предположению о малости углов: $T_1 = T_2$. Так как участок произвольный, то в любой момент времени сила натяжения во всех точках между собой равны.
Мы пренебрегаем изменением длины любого участка струны, значит по закону Гука натяжения струны остаётся неизменным.
Возьмём бесконечно малый участок M_1M_2, спроецируем его на Ox: $[x, x+dx]$. На него действуют силы натяжения T_1, T_2: $T_1 = T_2 = T_0$.
Спроецируем эти же силы на Ou:
$-T_0sin\alpha_1 + T_0sin\alpha_2 = T_0(sin\alpha_2 - sin\alpha_1)$
$sin\alpha_{1,2} \approx tg\alpha_{1,2} = \begin{cases} U'_x(x,t) \\ U'_x(x+dx_1,t) \end{cases}$
Отсюда следует, что:
$T_0(sin\alpha_2 - sin\alpha_1) = T_0(u'(x+dx,t) - u'_x(x,t)) \approx T_0\frac{d^2x}{dx^2}dx$
Равнодействующую внешних сил, приложенных к участку M_1M_2 в момент времени t, обозначим за F. $F \approx g(x,t)M_1M_2 \approx g(x,t)dx$.
Применим второй закон Ньютона, обозначив массу участка $M_1M_2 = \rho dx$:
$U''_{tt} = T_0U''_{xx} + g(x,t)$
$\boldsymbol{U''_{tt} = a^2U''_{xx} + g(x,t)\frac{1}{\rho}}$**, где** $\boldsymbol{a^2 = \frac{T_0}{\rho}}$**.**
Получили уравнение колебаний струны (одномерное волновое уравнение).
Для выделения из множества решений частных нужно вводить дополнительные условия: начальные и граничные условия.

1.2. Вывод формулы Даламбера. Решение методом Даламбера задачи для полуограниченной струны с индивидуальным граничным условием.

Задание: вывести формулу Даламбера (для этого уравнение необходимо привести к каноническому виду). Решить методом Даламбера задачу для полуограниченной струны с индивидуальным граничным условием.
Задача Коши для уравнения свободных колебаний струны имеет вид:
$$u_{tt} = a^2u_{xx} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x); \end{cases} \qquad (2)$$

Преобразуем (1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик имеет вид:

$$(\frac{dx}{dt})^2 - a^2 = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - a = 0 \Rightarrow x - at = C_1 \\ \dfrac{dx}{dt} + a = 0 \Rightarrow x + at = C_2 \end{cases}$$

Теперь, полагая $\xi = \frac{dx}{dt} + a, \eta = \frac{dx}{dt} - a$ уравнение (1) преобразуется к виду:

$u_t = u_\xi a - u_\eta a = a\big(u_\xi - u_\eta\big)$

$u_{tt} = a\big(u_{\xi\xi} a - u_{\eta\xi} a - u_{\eta\xi} a + u_{\eta\eta} a\big) = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta})$

$u_x = u_\xi + u_\eta$

$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

$a^2\big(u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}\big) = a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$

$$u_{\xi\eta} = 0 \qquad (3)$$

Общее решение уравнения (3) даётся формулой:

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

Где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ – произвольные функции. Возвращаясь к переменным x, t, получаем:

$$\boldsymbol{u = f_1(x + at) + f_2(x - at)} \qquad (4)$$

Полученное решение зависит от двух произвольных функций f_1 и f_2. Оно называется **решением Даламбера**.

Подставим (4) в (2) и получим:

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) & (5) \\ af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) & (6) \end{cases}$$

Откуда, интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)dy + C \qquad (7)$$

Где x_0 и C – постоянные.

Из формулы (5) и (7) находим:

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{2}(\varphi(x) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(y)dy + C) \\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}(\varphi(x) - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(y)dy - C) \end{cases}$$

Учитывая (4), имеем:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + at) + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x+at} \psi(y)dy + C + \varphi(x - at) - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x-at} \psi(y)dy - C\right]$$

Окончательно получаем формулу:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy \qquad (8)$$

Формула (8) называется **формулой Даламбера**.

(8) удовлетворяет уравнению (1) и НУ (2) при условии, что $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, а $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

Теперь решим задачу методом Даламбера для полуограниченной струны с индивидуальным граничным условием. Рассмотрим полуограниченную прямую $x \geq 0, t \geq 0$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (9)$$

$$u_x(0,t) = v(t) \qquad (10)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (11)$$

Решение краевой задачи (9), (10) и (11) можно представить так:

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + \omega(x,t) \qquad (12)$$

Где $\upsilon(x,t)$ и $\omega(x,t)$ – решения следующих задач:

$$\begin{cases} \upsilon_{tt} = a^2 \upsilon_{xx} \\ \upsilon_x(0,t) = 0 \\ \upsilon(x,0) = \varphi(x) \\ \upsilon_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} \omega_{tt} = a^2 \omega_{xx} \\ \omega_x(0,t) = v(t) \\ \omega(x,0) = 0 \\ \omega_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

Пусть $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ – чётные продолжения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ \ 0 \leq x < \infty \\ \varphi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$

$$\Phi'(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ \ 0 \leq x < \infty \\ -\varphi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), \ \ 0 \leq x < \infty \\ \psi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$

Покажем, что:

$$\upsilon(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(y)dy \qquad (15)$$

удовлетворяет условиям (13):

$$\upsilon_t = \frac{a\Phi'(x+at) - a\Phi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\Psi(x+at)a + a\Psi(x-at) + \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi_t(y)dy\right]$$

$$= \frac{a}{2}[\Phi'(x+at) - \Phi'(x-at)] + \frac{1}{2}[\Psi(x+at) + \Psi(x-at)]$$

$$\upsilon_{tt} = \frac{a^2}{2}[\Phi''(x+at) + \Phi''(x-at)] + \frac{a}{2}[\Psi'(x+at) - \Psi'(x-at)]$$

$$v_x = \frac{\Phi'(x+at)+\Phi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)]$$
$$v_{xx} = \frac{\Phi''(x+at)+\Phi''(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi'(x+at)-\Psi'(x-at)]$$
$$v_{tt} = a^2 v_{xx}:$$
$$\frac{a^2}{2}[\Phi''(x+at)+\Phi''(x-at)] + \frac{a}{2}[\Psi'(x+at)-\Psi'(x-at)]$$
$$= \frac{a^2}{2}[\Phi''(x+at)+\Phi''(x-at)] + \frac{a}{2}[\Psi'(x+at)-\Psi'(x-at)]$$
$$0 \equiv 0$$
НУ:

$0 \le x < \infty: v(x,0) = \dfrac{2\Phi(x)}{2} = \Phi(x) = \varphi(x)$

$0 \le x < \infty: v_t(x,0) = \dfrac{2\Psi(x)}{2} = \Psi(x) = \psi(x)$

ГУ: $v_x(0,t) = 0, t > 0$

$v_x(0,t) = \dfrac{\Phi'(at)+\Phi'(-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}[\Psi(at)-\Psi(-at)] = 0$

Записать (15) можно в таком виде:

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy\,, x > at, x > 0 \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+at} \psi(y)dy - \int_{at-x}^{0} \psi(y)dy\right], x < at, x > 0 \end{cases}$$

Решение задачи (14) будем искать в форме:

$$x(x,t) = f(x-at)$$

Определим функцию f из ГУ $\omega_x(0,t) = f'(-at) = v(t)$. Откуда $f'(z) = v\left(-\frac{a}{z}\right), z = -at$.

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} v\left(-\frac{s}{a}\right) ds$$
$$f(x-at) = \int_{z_0}^{x-at} v\left(-\frac{s}{a}\right) ds + C$$
$$\omega(x,0) = 0 = \int_{z_0}^{x} v\left(-\frac{s}{a}\right) ds + C \Rightarrow C = -\int_{z_0}^{x} v\left(-\frac{s'}{a}\right) ds$$
$$\omega(x,t) = \int_{x}^{x-at} v\left(-\frac{s}{a}\right) ds = -a\int_{-\frac{x}{a}}^{t-\frac{x}{a}} v(u)du = a\int_{t-\frac{x}{a}}^{-\frac{x}{a}} v(u)du$$

Продолжим $v(t) = 0, t < 0$, тогда $\omega(x,t)$ будет удовлетворять НУ (14).

<u>Решение исходной задачи имеет вид:</u>

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy\,, x > at \\ a\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{0} v(u)du + \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+at} \psi(y)dy - \int_{at-x}^{0} \psi(y)dy\right], x < at \end{cases}$$

1.3. Метод Фурье. Интерпретация полученного решения: стоячая волна, узлы и пучности стоячей волны, собственные частоты

<u>Задание</u>: описать метод Фурье. Выписать интерпретацию полученного решения: стоячая волна, узлы и пучности стоячей волны, собственные частоты.

Метод разделения переменных или метод Фурье является одним из основных методов решения уравнений с частными производными. Изложим данный метод для колебания струны. Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

$$\text{НУ: } \begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\text{ГУ: } \begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

Решение будем искать в виде:

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставим данное уравнение в исходную задачу, рассмотрев только однородную её часть: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. В итоге получим:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Приведем уравнение к виду:

$$\frac{X''(x)}{X} = \frac{T''(t)}{a^2 T} = -\lambda = const$$

Это даёт нам систему из двух уравнений.

Рассмотрим первое уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

А также граничные условия, соответствующие данному выражению:

$$\begin{cases} X_x(0,t) = 0 \\ X_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

Решается задача Штурма-Лиувилля с учетом нормировки и получается решение в виде:

$$\begin{cases} X_0 = \sqrt{\dfrac{1}{l}}, k = 0 \\ X_k = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right), k = 1, \dots, \infty \end{cases}$$

Где $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$. Методом Фурье решение исходной задачи будет строиться в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x).$$

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x)\text{, где } f_k(t) = \int_0^l f(x,t) X_k(x) dx$$

Подставим в уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) X_k(x) = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) X_k''(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x),$$

При этом:

$$X_k''(x) = -\lambda_k X_k(x)$$

Преобразовываем выражения и получаем:

$$T_k''(t) + a^2 T_k(t)\lambda_k = f_k(t) - \text{получили НДУ для } C_k(t)$$

У нас есть начальные условия:

$$\begin{cases} T_k(0) = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx\,, \\ T_k'(0) = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx \end{cases}$$

Решим ОДУ с НУ:

$T_k''(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = 0$

$T_k(t) = A_k \cos\left(a\frac{\pi k}{l} t\right) + B_k\, sin\left(a\frac{\pi k}{l} t\right)$

Подберем частное решение:

$T_k(t) = g_k(t)$, где $g_k(t)$ определяется из вида f_k

Подставляем в уравнение:

$g_k''(t) + a^2 g_k(t)\lambda_k = f_k(t)$

Из него находятся все константы, входящие в g_k.

Получаем общее решение:

$T_k(t) = A_k \cos\left(a\frac{\pi k}{l} t\right) + B_k\, sin\left(a\frac{\pi k}{l} t\right) + g_k(t)$ – подставим начальные условия:

$T_k(0) = A_k + g_k(0) = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx \Longrightarrow A_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx - g_k(0)$

$T_k'(0) = B_k a\frac{\pi k}{l} + g_k'(0) = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx \Longrightarrow B_k = \frac{l}{a\pi k}(\int_0^l \psi(x) X_k(x) dx)$

<u>Запишем решения исходной задачи:</u>

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx - g_k(0) \cos\left(a\frac{\pi k}{l} t\right) + \frac{l}{a\pi k}(\int_0^l \psi(x) X_k(x) dx) \sin\left(a\frac{\pi k}{l} t\right) + g_k(t))\, X_k(x),\text{ где}$$

$X_0 = \sqrt{\frac{1}{l}}, k = 0$

$X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(\sqrt{\lambda_k} x)\,, k = 1, \dots, \infty$

Интерпретация полученного решения:

Рассмотрим свободные колебания:

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\left(a\frac{\pi k}{l}t\right) + B_k \sin\left(a\frac{\pi k}{l}t\right)\right)\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$$

$$= \sqrt{A_K^2 + B_K^2}\cos\left(a\frac{\pi k}{l}(t+\sigma_k)\right)\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \text{где } a\frac{\pi k}{l}\sigma_k = -arctg(\frac{B_k}{A_k})$$

Любая точка струны x_0 совершает гармонические колебания:

$$U_k(x_0,t) = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}\cos\left(a\frac{\pi k}{l}(t+\sigma_k)\right)\cos\left(\frac{\pi k}{l}x_0\right)$$

Амплитуда: $\sqrt{A_k^2 + B_k^2}\cos\left(\frac{\pi k}{l}x_0\right)$.

Движение струны такого типа называется **стоячей волной.**

- Точки $x = \frac{2m+1}{2k}l$, в которых $\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right) = 0$, в течении всего процесса остаются неподвижными – это **узлы стоячей волны** $U_k(x,t)$.
- Точки $x = \frac{ml}{k}(m = 1, \dots, n-1)$, в которых $\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right) = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой $\sqrt{A_K^2 + B_K^2}$ – это **пучности стоячей волны**.
- Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет косинус:

$$U_k(x,t) = C_k \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \text{где } C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}\cos\left(\frac{\pi k}{l}(t+\sigma_k)\omega_k\right) = \frac{\pi k}{l}.$$

В момент времени t: $\cos\big((t+\sigma_k)\omega_k\big) = \pm 1$ откликания достигаются максимальных значений, а скорость движения 0.

В момент времени t: $\cos\big((t+\sigma_k)\omega_k\big) = \pm 1$ откликания равны 0, а скорость движения максимальная, частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны $\omega_k = \frac{\pi k a}{l}$ – это **собственные частоты колебания струны**. Для поперечных колебаний струны: $a^2 = \frac{T}{p} \Longrightarrow \omega_k = \frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{T}{p}}$.

2. Практическая часть

Задание 1. Вариант 5

Задание:
Рассмотреть колебания струны при условии отсутствия внешнего воздействия. Решить задачу с произвольными начальными условиями, а затем подобрать начальное отклонение и скорость так, чтобы решение состояло только из конечного числа стоячих волн. (данные взять из 1 и 2 столбцов таблицы).
Решение:
Дано:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x); \end{cases} \tag{1}$$

Решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставим это уравнение в (1):

$T''X = a^2TX''$

$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T'' + \lambda a^2 T = 0; \end{cases}$

Решаем первое уравнение (задача Штурма-Лиувилля). Из ГУ получаем:

$\begin{cases} X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0, \end{cases}$

Приходим к решению задачи с нетривиальными решениями ($\lambda \ge 0$)

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow X_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \\ \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \Rightarrow X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \end{cases}$$

Получили собственные функции задачи.
Решаем второе уравнение:

$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

Спроецировав на собственные функции, получим НУ:

$$\int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx = T(o), \qquad \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx = T'(0)$$

Для $\lambda_0 = 0$:

$T''(t) = 0 \Rightarrow T_{0,0}(t) = C_1 t + C_2$

$$C_2 = T(0) = \int_0^l \varphi(x) \sqrt{\frac{1}{l}} dx, \qquad C_1 = T'(0) = \int_0^l \psi(x) \sqrt{\frac{1}{l}} dx$$

Для $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$:

$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \Longrightarrow T_k(t) = B_k \cos\left(a\sqrt{\lambda_k} t\right) + D_k \sin\left(a\sqrt{\lambda_k} t\right)$

$$T(0) = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx = D_k, \qquad T'(0) = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx = \ a\sqrt{\lambda_k} B_k,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $X_k(x)$ – нам уже известны.

Запишем полный ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}(C_1 t + C_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \left[B_k \cos\left(a\sqrt{\lambda_k} t\right) + D_k \sin\left(a\sqrt{\lambda_k} t\right)\right] \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right),$$

Где:

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l \psi(x) dx\,, \qquad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l \varphi(x) dx\,;$$

$$B_k = \frac{\sqrt{2l}}{a\pi k} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx\,, \qquad D_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx\,, \qquad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.$$

Перепишем:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}(C_1 t + C_2)$$
$$+ \sqrt{B_k^2 + D_k^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{B_k}{\sqrt{B_k^2 + D_k^2}} \cos\left(\frac{a\pi k}{l} t\right) + \frac{D_k}{\sqrt{B_k^2 + D_k^2}} \sin\left(\frac{a\pi k}{l} t\right)\right] \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

Обозначим:

$$\sin(\theta_k) = \frac{B_k}{\sqrt{B_k^2 + D_k^2}}, \qquad \cos(\theta_k) = \frac{D_k}{\sqrt{B_k^2 + D_k^2}}, \qquad \omega_k = \frac{a\pi k}{l}, \qquad A_k = \sqrt{B_k^2 + D_k^2}$$

В этих обозначениях решение примет вид:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}(C_1 t + C_2) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\omega_k t + \theta_k\right) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

Каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания:

$$u_k(x_0,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}(C_1 t + C_2) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\omega_k t + \theta_k\right) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x_0\right)$$

с амплитудой $A_k \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x_0\right)$.

Теперь определим число стоячих волн. Для этого определим, какие должны быть начальные условия (начальное отклонение и скорость). Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}$.

Для $\lambda_0 = 0$:

$$C_1 = C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l \sqrt{\frac{1}{l}} dx = \frac{1}{l} * l = 1$$
$$T_{0,0}(t) = C_1 t + C_2 = t + 1$$

Для $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$:

$$B_k = \frac{\sqrt{2l}}{a\pi k} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = 0, \qquad D_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = 0 \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}(t+1), l = 2, t \geq 0$$

Стоячая волна, конечное число.
Также можно взять $\varphi(x), \psi(x)$ в виде $X_k(x)$ с зафиксированным $k = j$. Получится также стоячая волна, конечное число, так как все слагаемые $\neq j$ занулятся.

Задание 2. Вариант 5

В задаче с нулевыми начальными условиями и заданным возмущением выбрать граничные условия и параметр l так, чтобы решение содержало конечное число слагаемых. Если подбор невозможен, то объяснить почему.

Решение:
Дано:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), 0 \leq x \leq l, t \geq 0 \\ \alpha u(0,t) - \beta u_x(0,t) = 0, \qquad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0; \\ \gamma u(l,t) - \delta u_x(l,t) = 0, \qquad \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0; \\ u(x,o) = 0, \\ u_t(x,0) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

Необходимо подобрать ГУ.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ \alpha X(0) - \beta X'(0) = 0 \\ \gamma X(l) - \delta X'(l) = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем: $X_k(x)$, $\lambda_k \geq 0, \|X_k(x)\| = 1$.
Запишем вид искомого решения:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$$

Чтобы было конечное число слагаемых $T_k(t)$ с какого-то номера должен зануляться, т.е. существует конечное множество номеров k, когда $T_k(t) \neq 0$.

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) X_k(x)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)(-\lambda_k X_k(x)) = -\lambda_k \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k X_k(x),$$

где $f_k = (f(x), X_k)$ − константа, т. к. внешнее воздействие не зависит от времени.
Подставим найденные выражения в уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)X_k(x) = -\lambda_k a^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k X_k(x)$$

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = f_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = 0 \Rightarrow T_k(0) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T'_k(0)X_k(x) = 0 \Rightarrow T'_k(0) = 0$$

Решим НДУ второго порядка. Решение этого уравнения состоит из общего однородного и частного неоднородного. Сначала решим однородное уравнение:

$T_k'' + \lambda_k a^2 T_k = 0$

$T_k(t)_{O.O} = A_k \cos\left(at\sqrt{\lambda_k}\right) + B_k \sin\left(at\sqrt{\lambda_k}\right)$

Из-за неоднородности $f_k = const$ ищем частное решение в виде $T_k(t) = D_k = const$.

$$\lambda_k a^2 D_k = f_k \Rightarrow D_k = \frac{f_k}{\lambda_k a^2}$$

Общее решение НДУ:

$$T_k(t) = A_k \cos\left(at\sqrt{\lambda_k}\right) + B_k \sin\left(at\sqrt{\lambda_k}\right) + \frac{f_k}{\lambda_k a^2}$$

Подставляем НУ:

$0 = A_k + \frac{f_k}{\lambda_k a^2} \Rightarrow A_k = \frac{-f_k}{\lambda_k a^2}$

$0 = T'_k(0) = -A_k a\sqrt{\lambda_k}\sin(0) + -B_k a\sqrt{\lambda_k}\, cos(0) \Rightarrow B_k = 0$

$$T_k(t) = -\frac{f_k}{\lambda_k a^2}\cos\left(at\sqrt{\lambda_k}\right) + \frac{f_k}{\lambda_k a^2} = \frac{f_k}{\lambda_k a^2}\left(1 - \cos\left(at\sqrt{\lambda_k}\right)\right)$$

Чтобы $T_k(t) \equiv 0$, должен быть нулевым f_k:

$0 = f_k = \left(f_k, X_k(x)\right) = \int_0^l \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) X_k(x)dx$

Пусть $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1 \;\Rightarrow\; X'(0) = X'(l) = 0$, т.е. $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$ – ГУ $(II - II)$рода.

В этом случае собственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow X_0(x) = \sqrt{\dfrac{1}{l}} \\ \lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2 \Rightarrow X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right) \end{cases}$$

Пусть $l = 2 \Rightarrow X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)$

Так как $f = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ – одна из собственных функций X_k при $k = 1$, то она будет ортогональная всем остальным $X_k(x)$ при $k \neq 1$. Следовательно:

$$0 = f_k = \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx \;\text{ при } k \neq 1 \Rightarrow T_k(t) = 0$$

$$0 = f_0 = \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}\,dx \text{ при } k = 0$$

$$1 = f_1 = \int\limits_0^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \text{ при } k = 1$$

Значит, при $l = 2, \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1$ решение имеет следующий вид:

$$u(x,t) = T_1(t)X_1(x) = \frac{f_1}{\lambda_1 a^2}(1 - \cos(at\sqrt{\lambda_1}))\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

После преобразований решение примет вид:

$$u(x,t) = \frac{4}{a^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{a\pi t}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Решение состоит из конечного числа слагаемых.

Задание 3. Вариант 5

Задание:

Пусть внешнее воздействие имеет линейную плотность $\Phi(x)\sin(\omega t + \theta)$, а начальные условия нулевые. Получить необходимое и достаточное условие резонанса (необходимо учитывать зависимость от параметра l). Решить задачу для двух случаев: когда условие резонанса выполнено и когда не выполнено.

Решение:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos(x)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0; \end{cases}$$

В методе Фурье решение данной задачи раскладывается на собственный базис, который мы найдем, решая задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow X_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \\ \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \Rightarrow X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right) \end{cases}$$

Решение исходной задачи будет строиться в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$$

Коэффициенты Фурье:

$$T_k(t) = \int\limits_0^l u(x,t)X_k(x)dx$$

$$T_k'' + \lambda_k a^2 T_k = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\int\limits_0^l \Phi(x)X_k(x)dx$$

$\int_0^l \Phi(x)X_k(x)dx = \int_0^l \cos(x) sin(\frac{\pi k}{l}x)dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \cos(x)\, sin(\frac{\pi k}{l}x)dx =$

$-\frac{l((l-\pi k)\cos(l+\pi k)-(l+\pi k)\cos(l-\pi k)+2\pi k)}{2(l^2-\pi^2k^2)} = const = D$

$$T_k'' + \lambda_k a^2 T_k = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})(-\frac{l\big((l-\pi k)\cos(l+\pi k)-(l+\pi k)\cos(l-\pi k)+2\pi k\big)}{2(l^2-\pi^2k^2)})$$

НУ:

$\begin{cases} T_k(o) = 0, \\ T'_k(o) = 0, \end{cases}$

Дальше возможны два случая, когда:

1. $\omega \neq \lambda_k$ – регулярный случай
2. $\omega = \lambda_k a = \omega_k$ – резонансный случай.

1) Уравнение $T_k'' + \lambda_k a^2 T_k = D\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ имеет частное решение в форме правой части:

$$T_k^2(t) = D^* \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Подставим частное решение в уравнение и находим:

$(\omega^2 + ak^2a^2)D^* = \int_0^l f(x)X_n(x)dx = D$

$$D^* = \frac{D}{\lambda k a^2 - \omega^2}$$

Общее решение имеет вид:

$$T_k(t) = Esin(\lambda_k at) + Fcos(\lambda_k at) + D^* \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Коэффициенты E, F находятся из начальных условий:

$T_k(0) = F - D^* = 0 \Longrightarrow F = D^*$

$T_k'(0) = E\lambda_k a + 0 = 0 \Longrightarrow E = 0.$

$k = 0$:

$$T_k(0) = \tilde{E}t + \tilde{F} = \frac{1}{\omega^2\sqrt{l}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \int_0^l f(x)dx = \int_0^l \Phi(x)dx$$

$\int_0^l \cos(x)\,dx = \sin(l) = \int_0^l f(x)dx = const = J$

$T_o(0) = \tilde{F} + \frac{1}{\omega^2\sqrt{l}}J \Longrightarrow \tilde{F} = -\frac{1}{\omega^2\sqrt{l}}J$

$T_0'(0) = \tilde{E} = 0.$

2) Частное решение в форме правой части обращается в ∞. Но есть частное решение:

$$T_k^2(t) = D^* \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Подставляем данное решение в уравнение и получаем:

$-2D^* t\omega = D \Longrightarrow D^* = -\frac{1}{2\omega}D$

Общее решение:

$$\begin{cases} T_k(t) = E_1 \sin(\lambda_k at) + F_1\cos(\lambda_k at) + D^* tsin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \lambda_k a = \omega \neq 0 \end{cases}$$

Подставив аналогично, как в предыдущем случае, НУ, получим: $E_1 = 0, F_1 = D^*$.

В резонансном случае уравнение для коэффициентов $T_o(t)$ такое же, как и в предыдущем случае, так как $\omega \neq 0$ и не можем совпадать с $\lambda_k a = 0$.

Вывод:

1. В случае резонанса коэффициенты Фурье $T_k(t)$, отвечающий значению k, при котором $\lambda_k a = \omega$, неограниченно растёт со временем пропорционально t, если $D \neq 0$. Иначе слагаемое растущее неограниченно просто отсутствует в выражении $T_k(t)$.
2. Условия резонанса состоит не только в совпадении частоты ω с одной из собственных частот, но и в условии $D \neq 0$.