Вариант 5 Задача 4 Киселева Кс.
382151ПМоп2

$$f''(x_i) \sim [f_{xx}]_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2}$$

$$\psi = f''(x_i) - \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} = -hf'''(x_i) + o(h)$$

$$|\psi| \leq \hat{M} \cdot h, \text{ где } \hat{M} = \max_{x \in [x_i, x_i + 2\tilde{h}]} |f'''(x)| \text{ для } \forall h > 0, h < \tilde{h}$$

1) $$P_2(x) = \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} f(x_i) + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} f(x_{i+1}) +$$

$$+ \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} f(x_{i+2}) = \frac{x^2 - xx_{i+2} - xx_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2}}{2h^2} f(x_i) +$$

$$+ \frac{x^2 - xx_i - xx_{i+2} + x_i x_{i+2}}{-h^2} f(x_{i+1}) + \frac{x^2 - xx_i - xx_{i+1} + x_i x_{i+1}}{2h^2} f(x_{i+2})$$

$$P_2'(x) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{2}(2x - x_{i+1} - x_{i+2}) f(x_i) - (2x - x_i - x_{i+2}) f(x_{i+1}) + \frac{1}{2}(2x - x_i - x_{i+1}) \cdot f(x_{i+2})\right)$$

$$P_2''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\cancel{2} f(x_i)}{\cancel{2}} - 2f(x_{i+1}) + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} f(x_{i+2})\right) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{h^2}$$

$$f''(x_i) \sim \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2}$$

2) ВП оператора — разность „истинного" значения интерполяц оператора $[f_{xx}]_i$ и значения $[\tilde{f}_{xx}]_i$, которое вместо него получено

$$ВП_i(x) = [f_{xx}]_i - [\tilde{f}_{xx}]_i$$

$$|\delta_i| = |f_i - \tilde{f}_i| \qquad \delta = \max |\delta_i|$$

$$|ВП| \le \frac{|\delta_i| + 2|\delta_{i+1}| + |\delta_{i+2}|}{h^2} \le \frac{4\delta}{h^2}$$

3) ОП оператора – разность истинного значения произв. и значения полученного с помощью оператора

$$ОП = f''(x_i) - [\tilde{f}_{xx}]_i = \psi + ВП$$

$$|ОП| \le |\psi| + |ВП|$$

$$|ОП| \le \hat{M}h + \frac{4\delta}{h^2}$$

4) Порядок оператора $n=2$

Точность оператора $p=2$

Порядок погр. оператора $k=1$

5) $\Phi(h) = \hat{M}h^2 + \frac{4\delta}{h^2} \to \min$

№5

$f(x) = ch(x)$ $S=2$ $x=0,2$

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
$f(x)$	1,00500	1,02007	1,04534	1,08107	1,12763	1,18547	1,33743

1) $f''(0,2) = \frac{1,02007 - 2\cdot 1,04534 + 1,08107}{0,01} = 1,046$

2) $|\psi| \le \hat{M}h$ $\left(\hat{M} = \frac{1}{12}\max|f'''(x)|\right)$ $f'''(x) = sh(x)$

$$|\psi| \le \frac{0,410746}{12}\cdot 0,1 = 0,00342288 = 3,42288\cdot 10^{-3}$$

$$|ВП| \le \frac{4\cdot 0,5\cdot 10^{-5}}{0,01} = 2\cdot 10^{-3}$$

$$|ОП| \le |\psi| + |ВП| = 5,42288\cdot 10^{-3}$$

3) $\Phi(h) = \hat{M}h + \frac{4\delta}{h^2} \to \min$

$$\Phi'_h = \hat{M} - \frac{8\delta}{h^3} = 0$$

$$\hat{M}h^3 = 8\delta$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{8\delta}{\hat{M}}} \approx 0{,}105331$$

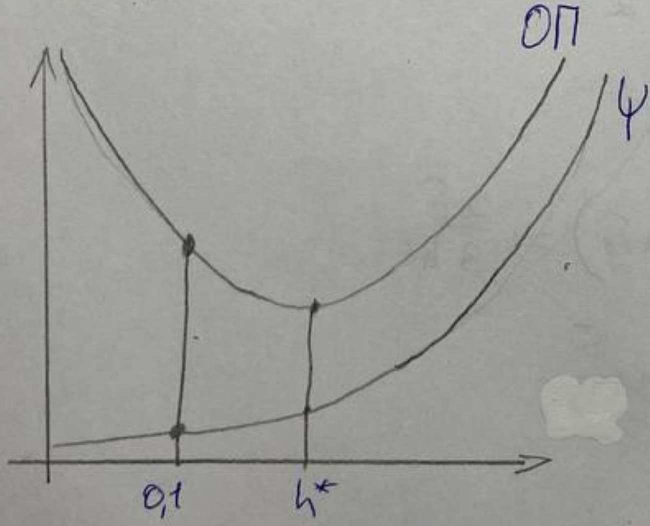
$$|\psi| \le \frac{0{,}410746}{12}(0{,}105331)^2 = 0{,}000379756$$

$$|ВП| \le \frac{4\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}}{(0{,}105331)^2} = 0{,}00180268$$

$$|ОП| \le 2{,}182436\cdot 10^{-3}$$

ОП при оптимальном шаге меньше чем ОП при шаге из усл. => лучше использовать оптимальный шаг

5)



Задача 6

$f(x) = ch(x)$

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
$\tilde{f}(x)$	1,00500	1,02007	1,04534	1,08107	1,12763	1,18547	1,33743

$$f'''(x_i) \sim [f_{xxx}]_i = \frac{-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}}{h^3}$$

$$\psi = -\frac{3h}{2} f^{IV}(x_i) + O(h)$$

1) $$f'''(0,2) \sim [f_{xxx}]_i = \frac{-1,02007 + 3\cdot 1,04534 - 3\cdot 108107 + 1,12763}{0,001} = 0,37$$

2) $$\psi = f'''(x_i) - [f_{xxx}]_i$$

$$|\psi| \leq \frac{3h}{2} \max_{x\in[0,2;0,5]} |f^{IV}(x)| = \frac{3\cdot 0,1}{2} \cdot 1,12763 \approx 0,169145$$

$$ВП = [f_{xxx}]_i - [\tilde{f}_{xxx}]_i$$

$$|ВП| = \frac{1}{12h^2}(\delta + 3\delta + 3\delta + \delta) = \frac{2\cdot\delta}{3\cdot h^2}$$

$$|ВП| \leq \frac{2\cdot 0,5\cdot 10^{-5}}{12\cdot 0,01} = 8,(3)\cdot 10^{-5}$$

$$|ОП| \leq |\psi| + |ВП|$$

$$|ОП| \leq 0,169145 + 8,(3)\cdot 10^{-5} = 0,169228(3)$$

3) $$f'''(0,2) = sh(0,2) \approx 0,201336$$

$$\tilde{f}''(0,2) = 0,37 \quad (|ОП| \leq 0,169228(3))$$

4) а) значение не пригодно, необходимо уменьшать шаг

б) $\Phi(h) = \hat{M}h + \frac{2\delta}{3h^2}$ $\hat{M} = 1,12763$

$\Phi'(h) = \hat{M} - \frac{4\delta}{3h^3} = 0$

$\hat{M}h^3 = \frac{4\delta}{3}$

$h = \sqrt[3]{\frac{4\delta}{3\hat{M}}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 1,12763}} \approx 0,018082$

наш шаг больше оптимального => его надо уменьшить

в) $|\text{ОП}| \leq 0,5 \cdot 10^{-2}$

$|\text{ОП}| \leq |\text{Ч}| + |\text{ВП}|$

$|\text{ВП}| \leq \frac{2\delta}{3h^2}$

$|\text{Ч}| \leq 0,169228(3)$

$0,5 \cdot 10^{-2} = 0,169228(3) + \frac{2\delta}{3h^2} \Rightarrow \delta = -0,0754$

$\delta > 0 \Rightarrow$ такого δ не существует