Лекция 20

Колебания круглой мембраны. Функции Бесселя

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круглой мембраны радиуса L, закрепленной по контуру

$$u_{tt}(x,y,t)-a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t))=0\,, \tag{1}$$

$$u(x,y,t)=0,\ x^2+y^2=L^2\,, \tag{2}$$

$$u(x,y,t)\,|_{t=0}=U_0(x.y), \tag{3}$$

$$u_t(x,y,t)\,|_{t=0}=U_1(x.y)\,. \tag{4}$$

Решение задачи (1)–(4) $u(x,y,t)$ ищется в области

$$Q_L=\{(x,y,t)\in \mathbf{R}^3,\ x^2+y^2\le L^2,\, t\ge 0\}\,.$$

Здесь $u(x,y,t)$ – отклонение точки мембраны с координатами (x,y) от положения равновесия в момент времени t; $U_0(x,y)$ – известное отклонение точки мембраны от положения равновесия в начальный момент времени t = 0; $U_1(x,y)$ – известная скорость движения точки мембраны в начальный момент времени t = 0; $a>0$ – известная положительная постоянная, имеющая размерность скорости и характеризующая скорость распространения возмущений в плоскости (x,y).

В рассматриваемом случае удобно перейти в полярную систему координат.

$$x=r\cos\varphi, \tag{5}$$

$$y=r\sin\varphi\,, \tag{6}$$

$\varphi\in[0,2\pi),\ r>0$. Пусть

$$u(x,y,t)=v(r,\varphi,t)=v(r\cos\varphi,r\sin\varphi,t) \tag{7}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y,t)&=u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)=\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r(r,\varphi,t))+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r,\varphi,t)\end{aligned} \tag{8}$$

и задача (1)–(4) записывается в виде

$$v_{tt}-a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}\right)=0\,, \tag{9}$$

$$v(r,\varphi,t)\,|_{r=L}=0, \tag{10}$$

$$v(r,\varphi,t)\,|_{t=0}=V_0(r,\varphi),\ v_t(r,\varphi,t)\,|_{t=0}=V_1(r,\varphi), \tag{11}$$

$$v(r,\varphi+2\pi,t)=v(r,\varphi,t)\,, \tag{12}$$

$$|\,v(r,\varphi,t)\,|_{r=0}|<\infty\,. \tag{13}$$

Задача (9)–(13) решается в области $r>0,\,\varphi\in\mathbf{R},\,t\ge 0$ причем условие (12), означающее периодичность неизвестной функции v по переменной φ, позволяет распространить функцию v на всю числовую ось по переменной φ, а условие (13) связано с тем, что преобразование (5), (6) вырождено при $r=0$ и это может привести к появлению «нефизичных» решений v, имеющих особенность при $r=0$.

Для решения задачи (9)–(13) применим метод Фурье (метод разделения переменных).

На первом этапе будем искать все нетривиальные решения уравнения (9) вида

$$v(r,\varphi,t) = T(t)w(r,\varphi)\,, \tag{14}$$

удовлетворяющие условиям (10), (12), (13). Подставим (14) в (10)

$$T''(t)w(r,\varphi) = a^2T(t)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r(r,\varphi)) + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi}(r,\varphi)\right).$$

Разделив последнее выражение на $a^2T(t)w(r,\varphi)$, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r(r,\varphi)) + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi}(r,\varphi)}{w(r,\varphi)}\,. \tag{15}$$

Поскольку левая часть (15) не зависит от переменных r,φ, а правая часть – от t, то левая и правая части (15) должны равняться постоянной величине, которую обозначим через $-\lambda^2$. Поэтому

$$T''(t) + a^2\lambda^2T(t) = 0\,, \tag{16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r(r,\varphi)) + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) + \lambda^2 w(r,\varphi) = 0\,. \tag{17}$$

Подставляя (14) в условия (10), (12), (13), получим

$$w(r,\varphi)\,|_{r=L} = 0, \tag{18}$$

$$w(r,\varphi+2\pi) = w(r,\varphi)\,, \tag{19}$$

$$|\,w(r,\varphi)\,|_{r=0}| < \infty\,. \tag{20}$$

Задача (17)–(20) – задача на собственные значения и собственные функции. В этой задаче требуется определить те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения $w(r,\varphi)$ задачи (17)–(20) и найти эти нетривиальные решения.

Будем решать эту задачу также с помощью метода разделения переменных, а именно: будем искать все нетривиальные решения уравнения (17) вида

$$w(r,\varphi) = R(\varphi)\Phi(\varphi)\,, \tag{21}$$

удовлетворяющие условиям (18)–(20).
Подставим (21) в (17). Получим

$$\frac{1}{r}(rR'(r))'\Phi(\varphi) + \frac{R(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} + \lambda^2R(r)\Phi(\varphi) = 0\,.$$

Разделив последнее выражение на $\dfrac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2}$, получим

$$\frac{r(rR'(r))' + r^2\lambda^2R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\,, \tag{22}$$

откуда следует, что левая и правая части последнего равенства должны быть равны постоянной, которую обозначим через ν^2. В результате получим уравнения

$$r(rR'(r))' + (r^2\lambda^2 - \nu^2)R(r) = 0\,, \tag{23}$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2\Phi(\varphi) = 0\,. \tag{24}$$

Подставляя (21) в условия (18)–(20), получим

$$|R(0)| < \infty \tag{25}$$

$$R(L) = 0, \tag{26}$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)\,. \tag{27}$$

Рассмотрим задачу (24), (27). Не ограничивая общности, можно считать $\nu \geq 0$. При $\nu = 0$ из (24) следует, что

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2} + c\varphi$$

(a_0, c – постоянные). Учитывая условие периодичности (27), получим $c = 0$ и

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}\,. \tag{28}$$

При $\nu > 0$ из (24) следует, что

$$\Phi_\nu(\varphi) = a_\nu \cos(\nu\varphi) + b_\nu \sin(\nu\varphi)\,. \tag{29}$$

Подставляя (29) в условие периодичности (27), получим, что при всех $\varphi \in \mathbf{R}$ выполнено

$$a_\nu \cos(\nu\varphi + 2\pi\nu) + b_\nu \sin(\nu\varphi + 2\pi\nu) = a_\nu \cos(\nu\varphi) + b_\nu \sin(\nu\varphi)\,. \tag{30}$$

Дифференцируя равенство (30) по φ и учитывая, что $\nu \neq 0$, получим, что при всех $\varphi \in \mathbf{R}$ выполнено

$$-a_\nu \sin(\nu\varphi + 2\pi\nu) + b_\nu \cos(\nu\varphi + 2\pi\nu) = -a_\nu \sin(\nu\varphi) + b_\nu \cos(\nu\varphi)\,. \tag{31}$$

Подставляя в (30) и (31) $\varphi = 0$, получим линейную систему однородных уравнений относительно коэффициентов (a_ν, b_ν)

$$(\cos(2\pi\nu) - 1)a_\nu + \sin(2\pi\nu)b_\nu = 0\,, \tag{32}$$

$$-\sin(2\pi\nu)a_\nu + (\cos(2\pi\nu) - 1)b_\nu = 0\,, \tag{33}$$

Для того чтобы эта система имела нетривиальные решения (a_ν, b_ν), необходимо чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$(\cos(2\pi\nu) - 1)^2 + \sin^2(2\pi\nu) = 0\,,$$

откуда $\cos(2\pi\nu) = 1$, и, учитывая что $\nu > 0$, получаем $\nu = n,\ n \in \mathbf{N}$.

Таким образом, задача на собственные значения и собственные функции (24), (27) имеет решение

$$\nu_0 = 0,\ \Phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}\,, \tag{34}$$

$$\nu_n = n,\ \Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi,\ \ n \in \mathbf{N}\,, \tag{35}$$

В этом случае задача (23)–(26) запишется в виде

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R_n(r) = 0\,, \tag{36}$$

$$|R_n(0)| < \infty\,, \tag{37}$$

$$R_n(L) = 0\,, \tag{38}$$

$n \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Сделав замену $x = \lambda r$ и положив

$$R_n(x) = R_n\left(\frac{r}{\lambda}\right) = y(x) = y(\lambda r), \quad (39)$$

получим

$$R'_n(x) = y'(x)\cdot\lambda,\ R''_n(x) = y''(x)\cdot\lambda^2, \quad (40)$$

и запишем уравнение (36) в виде

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0. \quad (41)$$

Уравнение (41) – уравнение Бесселя порядка n, общее решение которого записывается в виде

$$y(x) = CJ_n(x) + DY_n(x), \quad (42)$$

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода порядка n.

Отметим необходимые для решения этой задачи свойства функций Бесселя. (Более полное обсуждение этих свойств приводится в [1–3].)

1. Функции Бесселя I и II рода линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (41).
2. Функции Бесселя второго рода $Y_n(x)$ имеют особенность при $x = 0$
$$|Y_n(0)| = \infty, n \in \{0\} \cup \boldsymbol{N}. \quad (43)$$
3. Корни уравнения
$$J_n(\mu) = 0\ , n \in \{0\} \cup \boldsymbol{N} \quad (44)$$

– вещественные и простые (кроме, быть может, $\mu = 0$).

4. Для каждого $n \in \{0\} \in \mathbf{N}$ существует счетный набор положительных корней $\{\mu_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \ldots < \mu_k^{(n)} < \ldots)$ уравнения (44), причем $\mu_k^{(n)} \to +\infty$ при $k \to \infty$.
5. При всех $n \in \{0\} \in \mathbf{N}$ справедливы соотношения
$$\int_0^L xJ_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}x}{L}\right)J_n\left(\frac{\mu_j^{(n)}x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{L^2}{2}\left(J'_n\left(\mu_i^{(n)}\right)\right)^2, & i = j. \end{cases} \quad (45)$$

В частности,

$$\int_0^L xJ_0^2\left(\frac{\mu_i^{(0)}x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{2}\left(J'_0\left(\mu_i^{(0)}\right)\right)^2 = \frac{L^2}{2}\left(J_1\left(\mu_i^{(0)}\right)\right)^2.$$

6. Пусть функция $f(x)$, $x \in [0; L]$ представима в виде
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_n\left(\mu_i^{(n)}\cdot\frac{x}{L}\right), \quad (46)$$

тогда коэффициенты разложения a_i вычисляются по формуле

$$a_i = \frac{2}{L^2\left(J'_n\left(\mu_i^{(n)}\right)\right)^2}\int_0^L xf(x)J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}x}{L}\right)dx \quad (47)$$

(в (46) и (47) $\mu_i^{(n)}$ – положительные корни уравнения (44).)

7. В случае, когда $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha J_n(\mu) + \beta\mu J'(\mu) = 0\,,$$

$(\alpha/\beta > -n)$, расположенные в порядке возрастания, коэффициенты b_i разложения функции $f(x)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_n\left(\mu_i \cdot \frac{x}{L}\right) \tag{48}$$

определяются по формуле

$$b_i = \frac{2}{L^2\left(1+\dfrac{\alpha^2-\beta^2 n^2}{\beta_i^2\mu_i^2}\right)J_n^2(\mu_i)} \cdot \int_0^L x f(x) J_n\left(\mu_i \frac{x}{L}\right)dx\,. \tag{49}$$

(см. [2]).

Возвращаясь к решению задачи (36)–(38), учитывая (39), (42), запишем общее решение уравнения (36)

$$R_n(r) = CJ_n(\lambda r) + DY_n(\lambda r)\,. \tag{50}$$

Из условия (37) и неограниченности в точке 0 функции Бесселя II рода Y_n (свойство (43)) следует, что в (50) $D = 0$ и

$$R_n(r) = CJ_n(\lambda r)\,. \tag{51}$$

Подставляя (51) в граничное условия (38), получим

$$J_n(\lambda r) = 0\,. \tag{52}$$

откуда

$$\lambda_{ni} L = \mu_i^{(n)},\ i \in \mathbf{N}\,, \tag{53}$$

где $\mu_i^{(n)}$ – i-ый положительный корень уравнения (44)

Поэтому для каждого $n \in \{0\} \in \mathbf{N}$ получим

$$R_{ni}(r) = J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}}{L} r\right),\ i \in \mathbf{N}\,. \tag{54}$$

Таким образом, найден счетный набор решений задачи (17) – (20)

$$w_{ni}(r,\varphi) = \Phi_n(\varphi) R_{ni}(r)\,,$$

где $\Phi_n(\varphi)$ определяются соотношениями (34), (35), а $R_{ni}(r)$ – соотношениями (54).

Для каждого $\lambda_{ni} = \dfrac{\mu_i^{(n)}}{L}$, $n \in \{0\} \cup \mathbf{N}, i \in \mathbf{N}$ определим $T_{ni}(t)$, решая соответствующее (16) уравнение

$$T_{ni}(t) + T_n(t)\left(\frac{a\mu_i^{(n)}}{L}\right)^2 T_{ni}(t) = 0 \tag{55}$$

$$T_{ni}(t) = A_{ni}\cos\left(\frac{a\mu_i^{(n)}}{L} t\right) + B_{ni}\sin\left(\frac{a\mu_i^{(n)}}{L} t\right) \tag{56}$$

и найдем все нетривиальные решения уравнения (9) вида (14), удовлетворяющие условиям (10), (12), (13)

$$v_{ni}(r,\varphi,t)=\Phi_n(\varphi)R_{ni}(r)T_{ni}(t), \qquad (57)$$

$n\in\{0\}\cup\mathbf{N}$, $i\in\mathbf{N}$, где Φ_n, R_{ni}, T_{ni} определяются соответствующими выражениями (34), (35), (54), (56).

Первый этап решения задачи (9)–(13) завершен.

На втором этапе (заключительном) найдем решение этой задачи в виде

$$v(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}v_{ni}(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_n(\varphi)R_{ni}(r)T_{ni}(t). \qquad (58)$$

Подставляя в (58) выражения (34), (35), (54), (56), получим

$$\begin{aligned}v(r,\varphi,t)&=\sum_{i=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}r}{L}\right)\left(A_{0i}\cos\left(\frac{a\mu_i^{(0)}t}{L}\right)+B_{0i}\sin\left(\frac{a\mu_i^{(0)}t}{L}\right)\right)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_{ni}\cos\left(\frac{a\mu_i^{(n)}t}{L}\right)+B_{ni}\sin\left(\frac{a\mu_i^{(n)}t}{L}\right)\right)J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{L}\right)\cos(n\varphi)+ \qquad (59)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(C_{ni}\cos\left(\frac{a\mu_i^{(n)}t}{L}\right)+D_{ni}\sin\left(\frac{a\mu_i^{(n)}t}{L}\right)\right)J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{L}\right)\sin(n\varphi).\end{aligned}$$

Здесь использованы переобозначения

$$\frac{a_0}{2}A_{0i}\to A_{0i},\ \frac{a_0}{2}B_{0i}\to B_{0i}$$

и обозначения

$$C_{ni}=a_nA_{ni},\ D_{ni}=b_nB_{ni}.$$

Подставляя ряд (59) в начальные условия (11), получим

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}A_{0i}J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}r}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{ni}J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{L}\right)\cos(n\varphi)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}C_{ni}J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{L}\right)\sin(n\varphi)=V_0(r,\varphi), \qquad (60)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}B_{0i}\frac{a\mu_i^{(0)}}{L}J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}r}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}\frac{a\mu_i^{(n)}}{L}J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{L}\right)\cos(n\varphi)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}D_{ni}\frac{a\mu_i^{(0)}}{L}J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{L}\right)\sin(n\varphi)=V_1(r,\varphi). \qquad (61)\end{aligned}$$

Уравнения (60), (61) позволяют определить все коэффициенты $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$. В частности, рассматривая (60) как разложение $V_0(r,\varphi)$ при каждом r в ряд Фурье по системе функций

$$\{1,\cos(n\varphi),\sin(n\varphi),\ i\in\mathbf{N}\},$$

можно получить

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{0i} J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_0(r,\varphi)d\varphi\,, \tag{62}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)} r}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_0(r,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi\,, \tag{63}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_{ni} J_n\left(\frac{\mu_i^{(n)} r}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_0(r,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi\,, \tag{63}$$

и далее определить коэффициенты A_{ni}, B_{ni} по формулам (46), (47).

Аналогично определяются коэффициенты C_{ni}, D_{ni}, что завершает решение задачи (9)–(13).

Радиальные колебания мембраны

Рассмотрим случай, когда круглая мембрана совершает радиальные колебания, то есть такие колебания, при которых смещение v зависит только от r и t. Эти колебания имеют место в том случае, когда начальные функции V_0 и V_1 в (11) не зависят от φ. Уравнение (9) принимает более простой вид

$$v_{tt} - a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0. \tag{64}$$

Найдём решение уравнения (64), удовлетворяющее условиям (10) и (13) и представимое в виде

$$v(r,t) = T(t)w(r). \tag{65}$$

Подставляя (65) в (64) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(r w_r(r)\big)}{w(r)} = -\lambda^2, \tag{66}$$

откуда имеем два уравнения

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0\,, \tag{67}$$

$$w''(r) + \tfrac{1}{r} w'(r) + \lambda^2 w(r) = 0. \tag{68}$$

Подставляя (65) в условия (10), (13), получим

$$w(L) = 0,\ |w(0)| < \infty. \tag{69}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции (68), (69). Сделав в уравнении (68) замену $x = \lambda r$ и положив

$$y(x) = y(\lambda r) = w\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x) + \tfrac{1}{x} y'(x) + y(x) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y(x) = CJ_0(x) + DY_0(x),$$

то есть общее решение уравнения (68)

$$w(r) = CJ_0(\lambda r) + DY_0(\lambda r).$$

Из условий (69) и свойства (43) следует, что $D = 0$ и

$$J_0(\lambda L) = 0, \tag{70}$$

откуда

$$\lambda_i = \mu_i^{(0)}/L,\ i \in \boldsymbol{N},$$

Где $\mu_i^{(0)}$ – i-ый положительный корень уравнения (44) при $n = 0$.
Таким образом, найден счетный набор решений задачи (68), (69)

$$w_i(r) = J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right), \qquad i \in \boldsymbol{N}.$$

Для каждого $\lambda_i = \mu_i^{(0)}/L$, $i \in \boldsymbol{N}$ определим $T_i(t)$, решая соответствующее (67) уравнение, то есть

$$T_i(t) = A_i \cos\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L}\right) + B_i \sin\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L}\right). \tag{71}$$

Функции

$$v_i(r,t) = w_i(r)T_i(t) = \left[A_i \cos\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L}\right) + B_i \sin\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L}\right)\right] J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right), i \in \boldsymbol{N}$$

удовлетворяют уравнению (64) и граничному условию(10). Составляем ряд

$$v(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right)\left(A_i \cos\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L}\right) + B_i \sin\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L}\right)\right). \tag{72}$$

Удовлетворяя начальным условиям, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right) = V_0(r), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} B_i \frac{a\mu_i^{(0)}}{L} J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right) = V_1(r)$$

Коэффициенты разложения определяются по формулам

$$A_i = \frac{2}{L^2 J_1^2\left(\mu_i^{(0)}\right)} \int_0^L x V_0(x) J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} x}{L}\right) dx, B_i = \frac{2}{a\mu_i^{(0)} L J_1^2\left(\mu_i^{(0)}\right)} \int_0^L x V_1(x) J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} x}{L}\right) dx.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (72), получим решение поставленной задачи.
Решение (72) можно переписать в виде

$$v(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right) \sin\left(\frac{a\mu_i^{(0)} t}{L} + \varphi_i\right),$$

откуда видно, что свободные радиальные колебания мембраны складываются из бесчисленного множества гармонических колебаний с частотой

$$\omega_i = \frac{a\mu_i^{(0)}}{L} = \frac{\mu_i^{(0)}}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Узловые линии для круглой мембраны определяются из уравнения

$$J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)} r}{L}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что i-й обертон имеет i узловых линий

$$r_1 = \frac{\mu_1^{(0)}}{\mu_i^{(0)}} L, \qquad r_2 = \frac{\mu_2^{(0)}}{\mu_i^{(0)}} L, \dots, \quad r_{i-1} = \frac{\mu_{i-1}^{(0)}}{\mu_i^{(0)}} L, \quad r_i = L,$$

представляющих концентрические окружности с центром в начале координат.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm (Дополнение II. Специальные функции, стр.624–645).
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm
3. Гаврилов В.С., Денисова Н.А., Калинин А.В. Функции Бесселя в задачах математической физики. Учебно-метод. пособие. Н.Новгород, 2014.