Лекция 26

Основные свойства гармонических функций

Пусть $u(x,y,z)$ – гармоническая функция в конечной области Ω с границей Г. Будем считать, что u непрерывна вместе с производными второго порядка вплоть до границы Г. Полагая в первой формуле Грина $v = u$ и принимая во внимание, что u – гармоническая функция, получим

$$\iint_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma = \iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz\,.$$

Т.к. объемный интеграл неотрицателен, то

$$\iint_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma \ge 0\,. \tag{1}$$

Применяя вторую формулу Грина (1) к гармоническим функциям $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)=1$, получим

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma = 0\,, \tag{2}$$

т.е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по границе области равен нулю. Применяя теперь к $u(x,y,z)$ формулу

$$u(x_0,y_0,z_0) = \iint_\Gamma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]d\Gamma - \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{\Delta u}{r}dxdydz \tag{*}$$

(формула (6) в предыдущей лекции), в силу $\Delta u = 0$, получим

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]d\Gamma\,, \tag{3}$$

т.е. значение гармонической функции в любой точке внутри конечной области выражается через значения этой функции и ее нормальной производной на границе области формулой (3).

Замечание. Интегралы в формулах (1), (2) и (3) не содержат производных второго порядка функции $u(x,y,z)$, и для применимости этих формул достаточно предположить, что гармоническая функция непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до границы Г. Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить область Ω областью $\Omega^{(n)}$, лежащей вместе с границей внутри Ω, написать формулы (1)–(3) для области $\Omega^{(n)}$, в которой имеется непрерывность и производных второго порядка вплоть до границы $\Gamma^{(n)}$, и затем перейти к пределу при $\Omega^{(n)} \to \Omega$.

Функция $u(x,y,z)$, гармоническая в области Ω, имеет производные всех порядков внутри этой области. Действительно, возьмем внутри области произвольную точку (x_0, y_0, z_0). Окружим ее поверхностью Γ', целиком лежащей внутри области Ω. Т.к. функция $u(x, y, z)$ гармонична в области Ω, то она будет гармонической и в области, ограниченной поверхностью Γ', причем функция $u(x, y, z)$ будет иметь непрерывные производные второго порядка вплоть до поверхности Γ'. Применяя теперь формулу (3), получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma'} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] d\Gamma \tag{4}$$

Т.к. точка (x_0, y_0, z_0) не лежит на поверхности Γ', то $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$ – функция непрерывная, имеющая непрерывные производные любого порядка по переменным x_0, y_0, z_0. Следовательно, правую часть формулы (4) можно дифференцировать и притом сколько угодно раз по x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла. Отсюда и следует наше утверждение.

Теорема 1 (о среднем арифметическом). Значение гармонической функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на поверхности этого шара.

Пусть $u(x, y, z)$ – гармоническая функция внутри шара и непрерывна вместе с первыми производными вплоть до поверхности шара. Обозначим через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ центр шара, R – его радиус, S_R – поверхность шара. Применяя формулу (3) к этому шару для точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] d\Gamma \,. \tag{5}$$

На поверхности S_R шара величина r имеет постоянное значение, равное R; принимая во внимание, что направление внешней нормали к поверхности S_R совпадает с направлением радиуса шара, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=R} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\Bigg|_{r=R} = -\frac{1}{R^2},$$

и формула (*) дает

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u \, d\Gamma,$$

или, в силу (2), будем иметь

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u \, d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \,. \tag{6}$$

Теорема 2 (о максимуме и минимуме). Функция, гармоническая внутри ограниченной области Ω и непрерывная в замкнутой области $\overline{\Omega}$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная.

Доказательство. Пусть $u(M)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке $M_0(x, y, z)$ области Ω. Проведем сферу S_ρ с центром в точке M_0 и радиусом ρ, принадлежащую целиком области Ω, применим теорему о среднем арифметическом и заменим подынтегральную функцию $u(M)$ ее наибольшим значением $u_\rho^{\max}$ на сфере S_ρ. Таким образом получим

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u dS \le \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u_\rho^{\max} dS = u_\rho^{\max},$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда u на сфере S_ρ есть постоянная, равная $u(M_0)$. Поскольку по предположению $u(M_0)$ есть наибольшее значение $u(M)$ в области Ω, мы можем утверждать, что имеет место знак равенства и что, следовательно, $u(M)$ равна постоянной внутри и на поверхности всякой сферы с центром M_0, целиком принадлежащей области Ω. Покажем, что отсюда следует то, что $u(M)$ есть постоянная и во всей области Ω.
Пусть N – любая точка, принадлежащая Ω. Надо показать, что $u(N) = u(M_0)$. Соединим M_0 с N линией l конечной длины, например ломаной линией, лежащей внутри Ω, и пусть d – кратчайшее расстояние l от границы Г области Ω. В силу доказанного выше, $u(M)$ равна постоянной $u(M_0)$ в шаре с центром в M_0 и радиусом $d/2$. Пусть M_1 – последняя точка пересечения линии l с поверхностью данного шара, если считать от M_0. Имеем $u(M_1) = u(M_0)$, и по доказанному выше $u(M)$ равна постоянной $u(M_0)$ и в шаре с центром M_1 радиуса $d/2$. Пусть M_2 – последняя точка пересечения линии l с поверхностью этого шара. Как и выше, функция $u(M)$ равна постоянной $u(M_0)$ и в шаре с центром M_2 радиуса $d/2$ и т.д. Путем построения конечного числа таких шаров вся линия l будет покрыта шарами. Точка N окажется внутри некоторого шара, откуда будет следовать, что $u(N) = u(M_0)$.
Аналогично доказывается, что гармоническая функция не может достигать наименьшего значения внутри области Ω. Согласно теореме Вейерштрасса функция $u(M)$ в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения, и она достигает их на границе области Ω, ибо по доказанному, внутри области Ω гармоническая функция $u(M)$ не может достигать наибольшего и наименьшего значений. Теорема доказана.

Нетрудно доказать, что гармоническая функция $u(M)$ не может иметь внутри области Ω ни максимумов, ни минимумов.

Следующие свойства гармонических функций приведем без доказательства (см. [1], [2]).

Теорема 3. Если последовательность функций $u_n(M),\ n \in \mathbf{N}$, гармонических внутри области Ω, непрерывных в $\overline{\Omega}$ сходится равномерно на границе Г в области Ω, то она равномерно сходится внутри Ω. Предельная функция будет гармонической в области Ω.

Теорема 4. Если возрастающая последовательность функций $u_n(M),\ n \in \mathbf{N}$, гармонических внутри области Ω, сходится в некоторой внутренней точке M_0 этой области, то она всюду в области Ω сходится к некоторой гармонической функции $u(M)$, и притом равномерно во всякой замкнутой области $\overline{\Omega}_1$ такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$.

Список литературы

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.