1. Используя теорему Харитонова, исследовать робастную устойчивость системы управления с характеристическим полиномом

$$P(z) = z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 4, \qquad 1 \leqslant a_1 \leqslant 2, \quad 15 \leqslant a_2 \leqslant 16, \quad 0.1 \leqslant a_3 \leqslant 0.5.$$

2. Исследовать робастную устойчивость относительно внутренности единичного круга для системы управления с характеристическим полиномом

$$P(z) = z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 4, \qquad 1 \leqslant a_1 \leqslant 2, \quad 15 \leqslant a_2 \leqslant 16, \quad 0.1 \leqslant a_3 \leqslant 0.5.$$

Указание. Воспользоваться дробно-линейным отображением и перевести внутренность единичного круга на левую полуплоскость комплексной плоскости, затем пересчитать коэффициенты многочлена и воспользоваться теоремой Харитонова.

3. Определить радиус робастной устойчивости $\delta_{\max}$ многочлена $P_4(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$, если известно, что его реальные коэффициенты удовлетворяют следующим ограничениям

$$|a_0 - 1.0| \leqslant \delta, \quad |a_1 - 1.5| \leqslant 0.5\delta, \quad |a_2 - 0.5| \leqslant 0.5\delta, \quad |a_3 - 0.3| \leqslant 0.2\delta, \quad |a_4 - 4.0| \leqslant \delta.$$

4. Как измениться решение предыдущей задачи, если реальные коэффициенты многочлена принадлежат области

$$\big(a_0 - 1.0\big)^2 + 4\big(a_1 - 1.5\big)^2 + 4\big(a_2 - 0.5\big)^2 + 25\big(a_3 - 0.3\big)^2 + \big(a_4 - 4.0\big)^2 \leqslant \delta.$$

5. Номинальный характеристический полином имеет вид

$$P(z) = 433.5z^6 + 667.25z^5 + 502.72z^4 + 251.25z^3 + 80.25z^2 + 14z + 1.$$

Известно, что реальные коэффициенты этого многочлена удовлетворяют оценкам $|a_k - a_k^0| \leqslant \delta\alpha_k$, $k = 0, \ldots, 6$, где

$$\alpha_0 = 43.35, \quad \alpha_1 = 33.36, \quad \alpha_2 = 25.137, \quad \alpha_3 = 15.075, \quad \alpha_4 = 5.6175, \quad \alpha_5 = 1.4, \quad \alpha_6 = 0.1.$$

Определить радиус робастной устойчивости $\delta_{\max}$.

6. Решить предыдущую задачу, считая, что коэффициенты многочлена принадлежат внутренности эллипсоида

$$\frac{\big(a_0 - a_0^0\big)^2}{\alpha_0^2} + \ldots + \frac{\big(a_6 - a_6^0\big)^2}{\alpha_6^2} \leqslant \delta^2$$

7. Используя критерий Цыпкина – По́ляка исследовать робастную устойчивость полинома $P_6(z)$, если

$$\big|a_0 - 24\big| \leqslant 2.4\delta, \quad \big|a_1 - 52\big| \leqslant 5.2\delta, \quad \big|a_2 - 62\big| \leqslant 6.2\delta, \quad \big|a_3 - 44\big| \leqslant 4.4\delta,$$
$$\big|a_4 - 21\big| \leqslant 2.1\delta, \quad \big|a_5 - 6\big| \leqslant 0.6\delta, \quad \big|a_6 - 1\big| \leqslant 0.1\delta.$$

Определить радиус робастной устойчивости $\delta_{\max}$.

8. Вычислить вещественный и комплексный радиусы робастной устойчивости для следующих семейств:

(а) $A(\Delta) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1+\Delta \end{bmatrix}$; **(б)** $A(\Delta) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2+\Delta & -1 \end{bmatrix}$; **(в)** $A(\Delta) = \begin{bmatrix} -1 & \Delta \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Указание. Комплексным радиусом робастной устойчивости семейства $A(\Delta) = A + B\Delta C$, где $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$, называется

$$\delta_c(A, B, C) := \inf\Big\{\delta : \max_k \operatorname{Re}\lambda(A + \Delta) < 0, \Delta \in \mathbb{C}^{m\times m}, \|\Delta\|_2 \leqslant \delta\Big\}, \qquad \|\Delta\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}\big(A^* A\big).$$

Вещественным радиусом робастной устойчивости семейства $A(\Delta) = A + B\Delta C$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, называется

$$\delta_r(A, B, C) := \inf\Big\{\delta : \max_k \operatorname{Re}\lambda(A + \Delta) < 0, \Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}, \|\Delta\|_2 \leqslant \delta\Big\}, \qquad \|\Delta\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}\big(A^\top A\big).$$

Интуитивно понятно, что радиусом робастной устойчивости будет «расстояние» до ближайшей матрицы, имеющей хотя бы одно собственное число на мнимой оси.

9. Вычислить вещественный и комплексный радиусы робастной устойчивости для следующих систем с параметрической неопределенностью:

(а) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix} x;$ **(б)** $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix} x;$ **(в)** $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1+a & -7 \end{bmatrix} x.$