ЛЕКЦИЯ 9

Метод распространяющихся волн. Задачи для полуограниченной струны.

Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geq 0$. Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \infty,\ t > 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \beta u(x,0) = \mu(t),\ t \geq 0, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \leq x < \infty. \tag{3}$$

Предполагается, что φ, ψ, μ – заданные функции, α и β – заданные неотрицательные постоянные, не равные одновременно нулю.

Классическим решением задачи (1)-(3) называется функция u, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $x \geq 0$, $t \geq 0$, дважды непрерывно дифференцируемая в области $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющая уравнению (1) при $x > 0$, $t > 0$, условиям (2) и (3).

Уравнение (1) применяется для описания малых колебаний однородной струны или стержня, граничное условие (2) принимает в этом случае конкретный вид в зависимости от рассматриваемой физической задачи. Например, если конец $x = 0$ струны движется по заданному закону $-\mu(t)$, то $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то есть

$$u(0,t) = \mu(t).$$

Условие $\mu(t) \equiv 0$ означает при этом, что конец $x = 0$ жестко закреплен. Случай $\alpha = 1$, $\beta = 0$ соответствует тому, что к концу $x = 0$ струны приложена внешняя сила $-T_0\mu(t)$,

$$u_x(0,t) = \mu(t).$$

Если задан закон движения упруго закрепленного конца струны или стержня, полагают $\alpha = 1$, $\beta = h$,

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t).$$

Рассмотрим сначала случай однородного граничного условия

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \beta u(x,0) = 0, \tag{4}$$

в частности – задачу о распространении начального возмущения на струне с закрепленным, свободным или упруго закрепленным концом $x = 0$.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at), \tag{5}$$

где f, g – произвольные функции. Используя начальные условия (3), получаем

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x),\ x \geq 0,$$

$$u_t(x,0) = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x),\ x \geq 0.$$

Интегрируя второе равенство от 0 до x, получаем

$$-f(x) + f(0) + g(x) - g(0) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi.$$

Таким образом, при $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi + C,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi - C,$$

где $C = (f(0) - g(0))/2$. Положим $C = 0$.

Подставляя найденные функции f и g в формулу (5) получаем, что в области

$$x - at \geq 0$$

решение задачи задаётся формулой Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)dx.$$

Для того, чтобы формула (5) представляла решение задачи (1), (3), (4) во всей области $x \geq 0$, $t \geq 0$, нужно определить значения функции f для отрицательных значений аргумента. Подставим общее решение (5) в граничное условие (4):

$$\alpha(f'(-at) + g'(at)) - \beta(f(-at) + g(at)) = 0$$

или

$$\alpha f'(z) - \beta f(z) = -\alpha g'(-z) + \beta g(-z),\ z < 0,$$

где $z = -at$. таким образом, для определения функции f получаем равенство

$$\alpha f'(z) - \beta f(z) = -\alpha\left(\frac{1}{2}\varphi'(-z) + \frac{1}{2a}\psi(-z)\right) + \beta\left(\frac{1}{2}\varphi(-z) + \frac{1}{2a}\int_0^{-z}\psi(\xi)d\xi\right). \tag{6}$$

Если $\alpha \neq 0$, то (6) – дифференциальное уравнение. Из требования непрерывности решения вытекает начальное условие

$$f(-0) = f(+0) = \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Изучим более подробно важные частные случаи граничных условий (4), соответствующие жесткому и свободному закреплению конца $x = 0$.

Снова рассмотрим начальную задачу для уравнения колебаний бесконечной струны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = \Phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x),\ -\infty < x < \infty. \tag{8}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (7), (8)) являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0, то соответствующее решение в этой точке равно нулю.*

Доказательство. Примем x_0 за начало координат, то есть $x_0 = 0$. В этом случае условия нечетности начальных данных запишутся в виде $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Psi(x) = -\Psi(-x)$.

Решение задачи (7), (8) определяется формулой Д'Аламбера:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)dx.$$

При $x = 0$ и $t > 0$ функция u равна

$$u(0,t) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \Psi(\xi)d\xi = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности Φ, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Лемма 2. *Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой являются четными функциями относительно некоторой точки x_0, то производная по x решения в этой точке равна нулю.*

Доказательство. Пусть снова, без ограничения общности, $x_0 = 0$. Условия четности начальных данных имеют вид

$$\Phi(x) = \Phi(-x),\ \Psi(x) = \Psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной:

$$\Phi'(x) = -\Phi'(-x).$$

Из формулы Д'Аламбера следует

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}(\Psi(at) - \Psi(-at)) = 0,\ t > 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности Φ', а второе - в силу четности Ψ.

Доказанные леммы являются следствием того, что если начальные условия четны (или нечетны), то и при $t > 0$ функция u, определяемая формулой Д'Аламбера, обладает тем же свойством.

Приведенные доказательства фактически опираются на формулу Д'Аламбера и не связаны с двукратной дифференцируемостью функции u. Тем самым доказано, что лемма 1 верна для любых функций, представимых формулой Д'Аламбера, а лемма 2 - для функций того же вида с дифференцируемой функцией Φ.

Пусть требуется найти решение уравнение (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < \infty,$$

и граничному условию

$$u(0,t) = 0,\ t > 0.$$

(первая краевая задача).

Рассмотрим функции Φ и Ψ, являющиеся нечетным продолжением φ и ψ, входящих в начальные условия:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x > 0, \\ -\varphi(-x), \ x < 0; \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), \ x > 0, \\ -\psi(-x), \ x < 0. \end{cases}$$

Функция

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi$$

определена для всех x и $t > 0$. В силу леммы 1 $u(0,t) = 0$. Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t = 0$ и $x > 0$ следующим начальным условиям:

$$u(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \Psi(x) = \psi(x), \ x > 0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию u только для $x \geq 0$, $t \geq 0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \ t < \frac{x}{a}, \ x > 0, \tag{9}$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \ t > \frac{x}{a}, \ x > 0. \tag{10}$$

Аналогично, если при $x = 0$ мы имеем свободный конец:

$$u_x(0,t) = 0, \tag{11}$$

то, взяв четное продолжение функций φ и ψ

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x > 0, \\ \varphi(-x), \ x < 0; \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), \ x > 0, \\ \psi(-x), \ x < 0; \end{cases},$$

получим решение уравнения колебаний

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi,$$

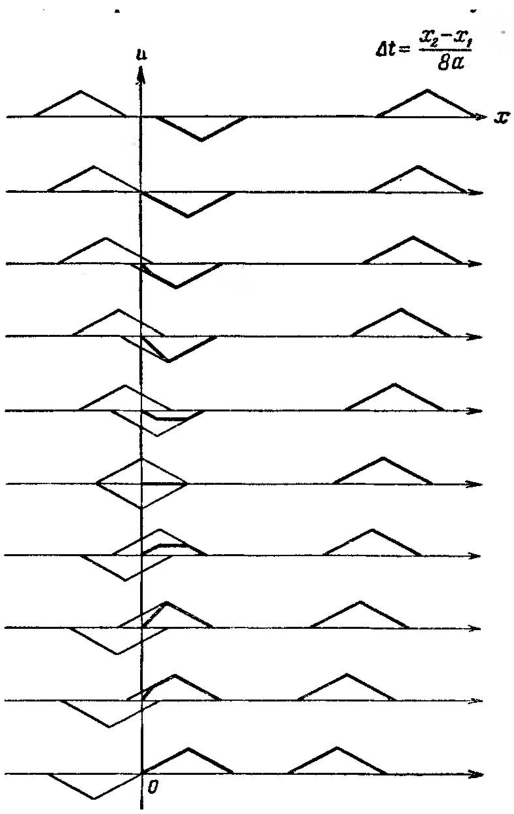
или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \ t < \frac{x}{a}, \ x > 0,$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_{0}^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \int_{0}^{at-x} \psi(\xi)d\xi\right), \ t > \frac{x}{a}, \ x > 0,$$

удовлетворяющее в области $x \geq 0$ начальным условиям (3) и граничному условию (11).

Пример 1. Пусть начальные данные на полуограниченной прямой, закрепленной при $x = 0$, отличны от нуля только в интервале (a,b), $0 < a < b$, в котором начальное отклонение, даваемое функцией φ, изображается равнобедренным треугольником, $\psi = 0$. Решение этой задачи будет получено, если начальные данные нечетно продолжить на бесконечную прямую. Процесс распространения волн изображен на рисунке. Вначале процесс происходит так же, как и на неограниченной прямой. Заданное отклонение разбивается на две волны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью, причем это продолжается до тех пор, пока волна, идущая налево, не дойдёт до точки $x = 0$. В этот момент



с левой стороны ($x < 0$), на которой проходили аналогичные процессы, к точке $x = 0$ подходит волна с "обратной фазой". В последующие моменты происходит отражение волны от закрепленного конца.

Профиль отражающейся волны укорачивается, отклонения исчезают, затем отклонения появляются с обратным знаком и, наконец, отраженная волна пойдёт вправо за ушедшей туда волной с той же скоростью. Таким образом, при отражении волны от закрепленного конца струны её отклонение меняет знак.

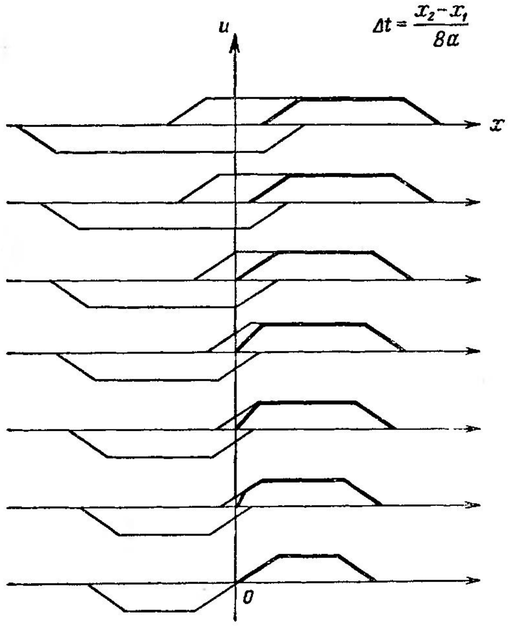
Пример 2. Пусть на полуограниченной прямой $x \geq 0$, закрепленной при $x = 0$, начальное отклонение всюду равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) $(0 < x_1 < x_2)$, причем здесь $\psi = \text{const}$. Продолжим нечетно начальные данные. От каждого интервала (x_1, x_2) и $(-x_1, -x_2)$ распространяются отклонения, подобные отклонениям, изображенным на рисунке. Как видно из рисунка, в начальной стадии в области $x > 0$ процесс идёт также, как и на бесконечной прямой. Затем происходит отражение от закрепленного конца и, наконец, волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью движется вправо.

Изучение отражения от свободного конца проводится аналогично, только начальные данные нужно продолжать четно, так что отражение волны от свободного конца будет происходить не с измененной, а с той же фазой.

В общем случае неоднородных граничных условий решение задачи (1)–(3) представляется в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий (либо граничному, либо начальному).

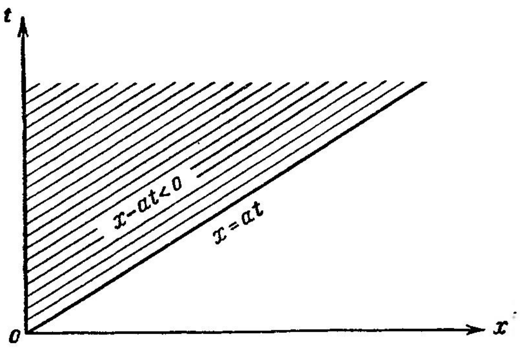
Обратимся к решению уравнения при нулевых начальных и заданном граничном условиях. Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$



и граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t),\ t > 0. \tag{12}$$



Очевидно, что граничный режим вызовет волну, распространяющуюся вдоль струны направо со скоростью a, что подсказывает аналитическую форму решения

$$u(x,t) = f(x - at).$$

Определим функцию f из граничного условия

$$u(0,t) = f(-at) = \mu(t),$$

откуда

$$f(z) = \mu(-\frac{z}{a}),$$

так что

$$u(x,t) = \mu(-\frac{x - at}{a}) = \mu(t - \frac{x}{a}).$$

Однако эта функция определена лишь в области $x - at \leq 0$, так как $\mu(t)$ определена для $t \geq 0$. На рисунке эта область изображается заштрихованной частью фазовой плоскости.

Чтобы найти $u(x,t)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию μ на отрицательные значения t, полагая $\mu(t) = 0$ для $t < 0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \mu(t - \frac{x}{a})$$

будет определена для всех значений аргументов и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Таким образом, решение первой краевой задачи (1), (3), (12) для полуограниченной струны имеет вид

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi,\ t < \frac{x}{a},\ x > 0,$$

$$u(x,t) = \mu(t - \frac{x}{a}) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)d\xi,\ t > \frac{x}{a},\ x > 0.$$

Аналогично может быть построено решение второй краевой задачи.

Упражнение

Постройте решение второй краевой задачи для полуограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < \infty,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t),\ t \ge 0.$$

Список литературы

[1] Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Метод характеристик для одномерного волнового уравнения: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. - 72 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.