Модуль 12.2. Интерполяция полиномами

Интерполяционный полином, теорема о его существовании, единственности и способе записи в форме Лагранжа (с доказательством). Интерполяция и экстраполяция. Теорема о погрешности интерполяции (с доказательством). Вычислительная и общая погрешность интерполяции. Анализ погрешностей на отрезке. Свойства линейной интерполяции (с доказательством). Теоремы о сходимости интерполяционного процесса (без доказательства). Область применения интерполяции. Решение задач

Интерполяционный полином и его запись в форме Лагранжа

Чтобы определить интерполяционный полином, рассмотрим отрезок $[a, b]$ и сетку с числом участков n, узлами $x_i, i = 0,...n$ (всего $n+1$ узлов).

Считаем, что граничные узлы сетки совпадают с границами отрезка: $x_0 = a, x_n = b$, все узлы различны и упорядочены: $x_0 < ... < x_n$.

При построении интерполяционных полиномов узлы сетки $x_i, i = 0,...n$ называют **узлами интерполяции или опорными точками.**

Определение 1. Говорят, что **полиномом** $P_n(x)$ **степени не выше** n **интерполирует функцию** $f(x)$ **на отрезке** $[a, b]$, если во всех узлах интерполяции $x_i, i = 0,...n$ значения полинома и функции совпадают:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = 0,...n \quad (12.1)$$

Запишем полином степени не выше n в каноническом виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \quad (12.2)$$

Чтобы определить полином, нужен $n+1$ коэффициент. $a_0, a_1, a_2,...a_n$.

Приведенная далее Теорема 1 показывает, что условия (12.1) – здесь ровно $n+1$ условие – позволяют определить все коэффициенты полинома единственным образом, но для его записи удобно использовать другую форму, именуемую формой Лагранжа.

Сформулируем и докажем теорему.

Теорема 1. Для любой функции $f(x)$, значения которой заданы в узлах $x_i, i = 0,...n$ отрезка $[a, b]$, $x_0 = a, x_n = b$, интерполяционный полином $P_n(x)$ степени не выше n **существует, является единственным и может быть записан в форме Лагранжа**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x)\, f_i \quad (12.3)$$

Множители $L_{ni}(x), i = 0,...n$ называются **полиномами Лагранжа** и представляют собой полиномы степени n, не зависящие от значений функции $f(x)$, но зависящие от расположения узлов:

$$L_{ni}(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \qquad (12.4)$$

Множители

$$f_i = f(x_i),\ i = 0,...n$$

есть значения функции в узлах интерполяции, то есть числа.

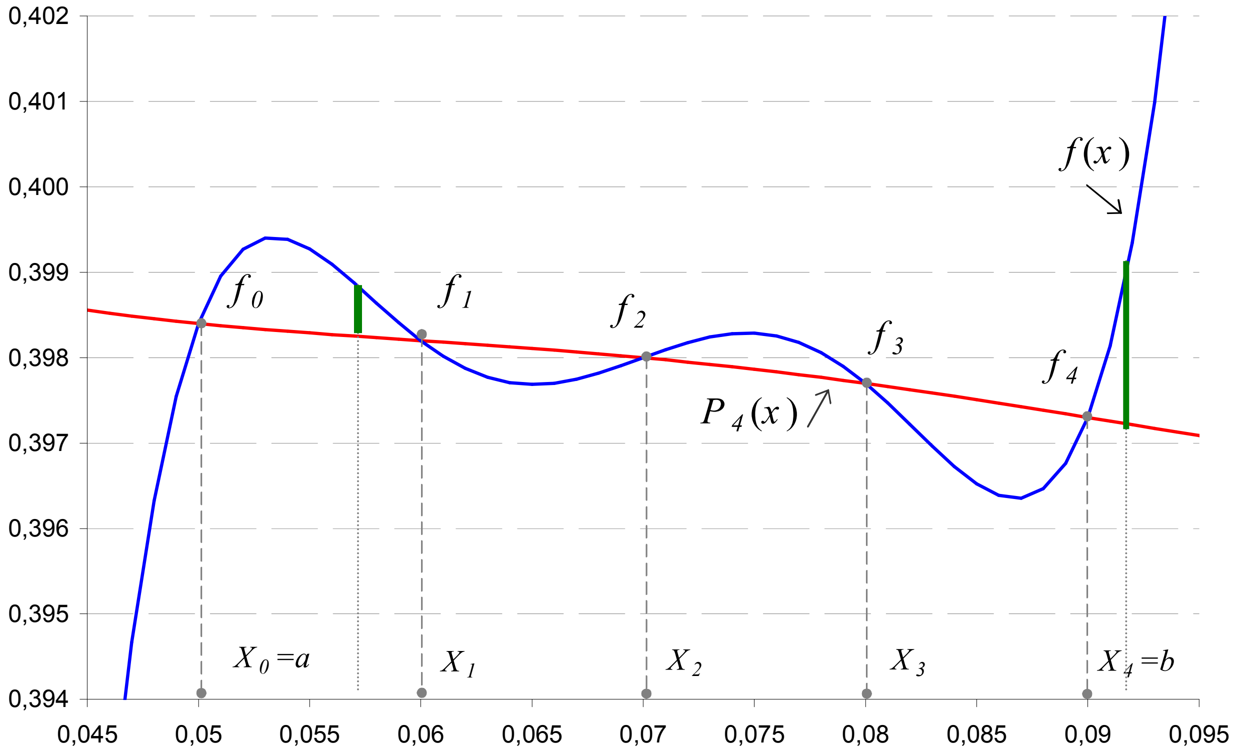


Рисунок 1

На рисунке полином четвертой степени $P_4(x)$ (красный цвет) интерполирует функцию $f(x)$ (синий цвет) в узлах $x_0 = 0.05,\ x_1 = 0.06,\ x_2 = 0.07, x_3 = 0.08,\ x_4 = 0.09$ отрезка $[a, b] = [0.05; 0.09]$. Для двух значений аргумента x показаны погрешность интерполяции (случай $x \in [a, b]$) и погрешность экстраполяции (случай $x \notin [a, b]$)

Доказательство рассмотрено 25 февраля

Комментарии

Один и тот же интерполяционный полином может быть записан многими способами. Кроме канонического вида (12.1) и формы Лагранжа (12.2), используют запись интерполяционных полиномов в форме Ньютона (интерполяционная формула Ньютона «вперед», интерполяционная формула Ньютона «назад»), интерполяционную формулу Стирлинга и другие способы, основанные на **таблице разностей значений функции**.

Повторим доказательство Теоремы 1

Каждое из выражений $L_{ni}(x)$ есть полином степени ровно n. Любая линейная комбинация таких полиномов является полиномом степени не выше n.

В узле интерполяции x_i полином $L_{ni}(x)$ принимает значение $L_{ni}(x_i)=1$, потому что числитель и знаменатель формулы $L_{ni}(x_i)$ одинаковы:

$$L_{ni}(x_i)=\frac{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

В узле интерполяции $x_j, j\neq i$ полином $L_{ni}(x)$ обращается в ноль: $L_{ni}(x_j)=0$,

потому что в числителе формулы $L_{ni}(x_j)$ найдется нулевой множитель:

$$L_{ni}(x_j)=\frac{(x_j-x_0)..(x_j-x_j)..(x_j-x_{i-1})(x_j-x_{i+1})..(x_j-x_n)}{(x_i-x_0)..(x_i-x_j)..(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})..(x_i-x_n)}$$

Проверим, какое значение в узлах интерполяции $x_j, j=0,...n$, примет полином (12.2), записанный в форме Лагранжа.

$$P_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n}L_{ni}(x_j)\,f_i=L_{nj}(x_j)\,f_j=f_j$$

Условия (12.1) выполнены, формула (12.2) действительно определяет интерполяционный полином.

Покажем его единственность. Пусть существуют два разных полинома $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, интерполирующих функцию $f(x)$ в одних и тех же узлах $x_i, i=0,...n$:

$$P_n(x_i)=f(x_i), i=0,...n$$

$$Q_n(x_i)=f(x_i), i=0,...n$$

Определим полином $R_n(x)$ как разность указанных полиномов:

$$R_n(x)=P_n(x)-Q_n(x)$$

В узлах $x_i, i=0,...n$ полином $R_n(x)$ принимает нулевые значения:

$$R_n(x_i)=P_n(x_i)-Q_n(x_i)=f(x_i)-f(x_i)=0$$

Поскольку полином $R_n(x)$ не может иметь степень выше n и при этом имеет $n+1$ различных корней, делаем вывод, что $R_n(x)\equiv 0$ и полиномы $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ совпадают.

Следовательно, полином $P_n(x)$ степени не выше n, интерполирующий $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ в узлах интерполяции $x_i, i=0,...n$, является единственным.

Пример 1

В этом примере показано, что полиномы Лагранжа работают как базис для составления любых интерполяционных полиномов. Если Вы умеете быстро записывать решения в форме Лагранжа, этот пример можно пропустить.

Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах интерполяции $x_0 = 0.07,\ x_1 = 0.08, x_2 = 0.09$ заданы значения функции $f_0 = 5,\ f_1 = -1, f_2 = 7$.

Разложим вектор значений функции $(5,\ -1,\ 7)$ по ортогональному базису: $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$.

Получим

$(5,\ -1,\ 7)$ = $5 \times (1,\ 0,\ 0)$ + $(-1) \times (0,\ 1,\ 0)$ + $7 \times (0,\ 0,\ 1)$.

Для каждого вектора-слагаемого рассмотрим «свою» задачу интерполяции.

1) Для данных соответственно первому слагаемому

x_i	0	1	2
f_i	5	0	0

интерполяционный полином имеет вид

$$P_2(x) = \underbrace{\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}}_{\substack{\textit{это полином} \\ \textit{Лагранжа } L_{20}(x)}} \cdot 5 = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 5$$

2) Для данных соответственно второму слагаемому

x_i	0	1	2
f_i	0	-1	0

интерполяционный полином имеет вид

$$P_2(x) = \underbrace{\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}}_{\substack{\textit{это полином} \\ \textit{Лагранжа } L_{21}(x)}} \cdot (-1) = \frac{x(x-2)}{(-1)} \cdot (-1)$$

3) Для данных соответственно третьему слагаемому

x_i	0	1	2
f_i	0	0	7

интерполяционный полином имеет вид

$$P_2(x) = \underbrace{\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}}_{\substack{\text{это полином} \\ \text{Лагранжа } L_{22}(x)}} \cdot 7 = \frac{x(x-1)}{2} \cdot 7$$

4) Для поставленной изначально задачи

x_i	0	1	2
f_i	5	-1	7

интерполяционный полином по формуле (12.2) имеет вид

$$P_2(x) = \underbrace{\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-0)}}_{\substack{\text{это полином} \\ \text{Лагранжа } L_{22}(x)}} \cdot 7 + \underbrace{\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}}_{\substack{\text{это полином} \\ \text{Лагранжа } L_{21}(x)}} \cdot (-1) + \underbrace{\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}}_{\substack{\text{это полином} \\ \text{Лагранжа } L_{20}(x)}} \cdot 5$$

Как и следовало ожидать, он совпадает с суммой построенных выше полиномов:

$$\begin{aligned} P_2(x) = {} & P_2(x)\{\text{для слагаемого } 1\} + \\ & + P_2(x)\{\text{для слагаемого } 2\} + \\ & + P_2(x)\{\text{для слагаемого } 3\} \end{aligned}$$

Применение интерполяционного полинома для вычисления значений функции

Интерполяционный полином $P_n(x)$, определяемый по узлам $x_i, i = 0,\ldots n$ отрезка $[a,b]$, может быть использован **для приближенного вычисления функции** $f(x)$ при таких значениях x, которые не являются узлами сетки.

В этом случае значение функции полагают приближенно равным значению полинома: $f(x) \approx P_n(x)$.

Выбор степени полинома и расположения узлов интерполяции остается, как правило, за исследователем. При составлении таблиц значений функции придерживаются такого правила:

Шаг таблицы по аргументу x должен быть таков, чтобы без существенной потери точности (по отношению к точности данных в самой таблице) при подсчете значений функции можно было ограничиться линейной интерполяцией: построением интерполяционного полинома степени 1.

На тех участках сетки, где для расчета значений функции необходим полином степени 2, разработчики таблиц должны об этом сообщить.

Пример 2

В этом примере показано, что интерполяционный полином для приближенного вычисления функции можно выбрать многими способами, а индексы узлов интерполяции можно назначать самостоятельно, независимо от индексации узлов сетки.

Значения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ представлены в таблице:

x_i	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$\tilde{f}_i$	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973

Функция $f(x)$ задана с ошибкой и вместо ее значений в таблице указаны значения $\tilde{f}_i$.

Чтобы вычислить приближенно $f(0.082)$, можно использовать

1) узлы интерполяции $x_0=0.08,\ x_1=0.09$ и полином $\tilde{P}_1(x)$; он интерполирует табличные данные на отрезке $[a,b]=[0.08;0.09]$.

2) узлы интерполяции $x_0=0.07,\ x_1=0.08$ и полином $\tilde{P}_1^*(x)$; он интерполирует табличные данные на отрезке $[a,b]=[0.07;0.08]$.

3) узлы интерполяции $x_0=0.07,\ x_1=0.08, x_2=0.09$ и полином $\tilde{P}_2(x)$: он интерполирует табличные данные на отрезке $[a,b]=[0.07;0.09]$.

4) использовать все узлы сетки

$x_0=0.05,\ x_1=0.06,\ x_2=0.07, x_3=0.08,\ x_4=0.09$

и применить полином $\tilde{P}_4(x)$, интерполирующий табличные данные на «большом» отрезке $[a,b]=[0.05;0.09]$.

Для вычислений будут использованы формулы

$$f(0.082)\approx\tilde{P}_1(0.082)=\frac{0.082-0.09}{0.08-0.09}\cdot0.3977+\frac{0.082-0.08}{0.09-0.08}\cdot0.3973$$

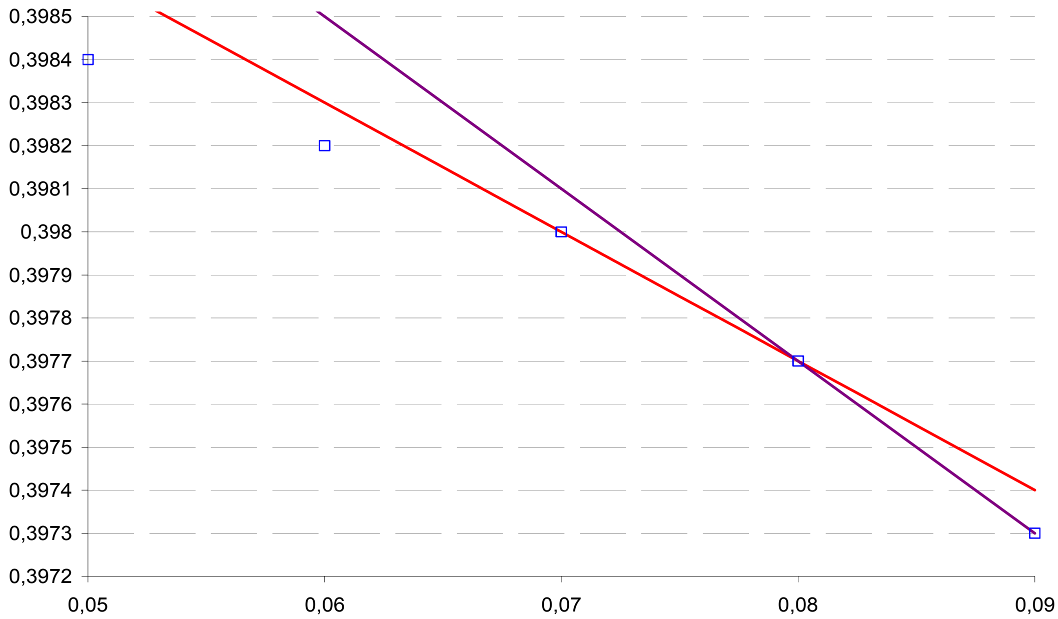
$$f(0.082)\approx\tilde{P}_1^*(0.082)=\frac{0.082-0.08}{0.07-0.08}\cdot0.3980+\frac{0.082-0.07}{0.08-0.07}\cdot0.3977$$

$$f(0.082)\approx\tilde{P}_2(0.082)=\frac{(0.082-0.08)(0.082-0.09)}{(0.07-0.08)(0.07-0.09)}\cdot0.3980+$$

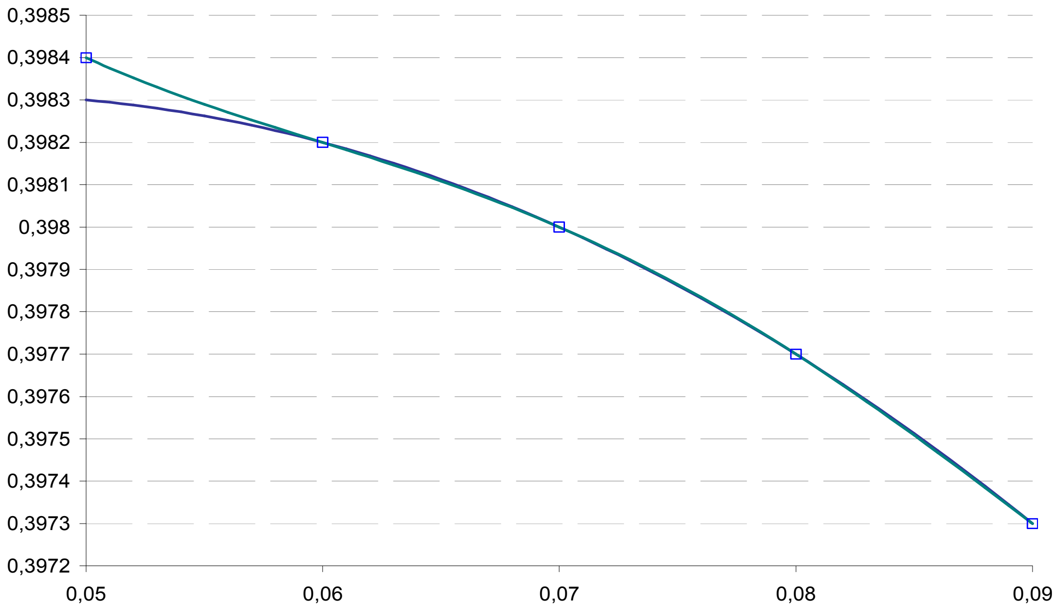
$$+\frac{(0.082-0.07)(0.082-0.09)}{(0.08-0.07)(0.08-0.09)}\cdot0.3977+\frac{(0.082-0.07)(0.082-0.08)}{(0.09-0.07)(0.09-0.08)}\cdot0.3973$$

Формула для $\tilde{P}_4(x)$ здесь не приведена.

Выбор полинома для вычисления $f(0.082)$ этими случаями не ограничивается. Предложите свои варианты.



А)



Б)

Рисунок 2

На рисунках А), , Б) маркером показаны табличные данные из Примера 2.

В случае А) показаны полиномы 1-й степени $\widetilde{P}_1(x)$ и $\widetilde{P}_1^*(x)$, построенные по узлам $x_0 = 0.08,\ x_1 = 0.09$ и $x_0 = 0.07,\ x_1 = 0.08$ соответственно. В случае Б) показан полином 2-й степени $\widetilde{P}_2(x)$, построенный по узлам $x_0 = 0.07,\ x_1 = 0.08, x_2 = 0.09$, и полином $\widetilde{P}_4(x)$, построенный по всем пяти узлам сетки.

Каждый из полиномов пригоден для приближенного вычисления $f(0.082)$, но значение, полученное с помощью $\widetilde{P}_1^*(x)$, будет заметно отличаться от остальных.

Волна над символами означает, что полином интерполирует табличные данные, содержащие погрешность, а не «истинные» значения функции $f(x)$.

Термины «интерполяция» и «экстраполяция», погрешность интерполяции, погрешность экстраполяции

В зависимости от расположения точки x и узлов интерполяции $x_i, i = 0,...n$ различают случаи интерполяции или экстраполяции.

Если $x \in [a, b]$, говорят об **интерполяции** функции $f(x)$ в точке x **интерполяционным полиномом** $P_n(x)$.

Если $x \notin [a, b]$, говорят об **экстраполяции** функции $f(x)$ в точке x **интерполяционным полиномом** $P_n(x)$.

При $x < a$ – **экстраполяция слева,** при $x > b$ – **экстраполяция справа**.

> В Примере 2 случай 2) соответствует экстраполяции справа: $x = 0.082 \notin [a, b] = [0.07; 0.08]$, а все остальное – интерполяция: $x = 0.082 \in [a, b] = [0.08; 0.09]$ в случае 1); $x = 0.082 \in [a, b] = [0.07; 0.09]$ в случае 3); $x = 0.082 \in [a, b] = [0.05; 0.09]$ в случае 4).

Если нужно обратить внимание на то, как расположена точка x по отношению к узлам интерполяции, тогда погрешность замены функции полиномом следует называть **погрешностью интерполяции** или **погрешностью экстраполяции**.

Если нет необходимости различать эти случаи, обе погрешности называют **погрешностью интерполяции**, потому что **применяется интерполяционный полином**.

С практической точки зрения важно следующее: погрешность замены значения функции $f(x)$ значением полинома $P_n(x)$ зависит от значений производной порядка $n+1$ данной функции на так называемом «участке построения и применения полинома» и нарастает по мере удаления точки x от каждого из узлов интерполяции: $x_i, i = 0,...n$. При экстраполяции точка x далека от многих узлов отрезка $[a, b]$, поэтому для приближенного вычисления $f(x)$ **экстраполяцию используют с осторожностью**.

Погрешность интерполяции

Определение 2. Погрешностью интерполяции в точке x называют разность значения функции $f(x)$ в точке x и ее интерполяционного полинома $P_n(x)$ в той же точке x:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{12.5}$$

Погрешность интерполяции в узлах равна нулю:

$$r_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0$$

Теорема 2. Для погрешности интерполяции функции $f(x)$ в точке x полиномом $P_n(x)$ справедливо представление

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot \omega(x) \tag{12.6}$$

где $x_i, i = 0,...n$ – узлы интерполяции, $x_0 = a, x_n = b$;

значение $\omega(x)$ определяется расположением узлов и точки x

$$\omega(x) = \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)}_{n+1 \text{ множитель}}$$

$f^{(n+1)}(\xi)$ есть производная порядка $n+1$ функции $f(x)$, взятая в точке ξ;

ξ неизвестна, зависит от x и расположена на отрезке

$\xi \in [\min[a, x]; \max[b; x]]$.

Формула (12.6) справедлива при условии, что функция $f(x)$ на отрезке $[\min[a, x]; \max[b; x]]$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз.

Доказательство основано на теореме Ролля и ее следствиях, а также $n+1$ раз непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$ на отрезке $[\min[a, x]; \max[b; x]]$.

Теорема Ролля. Если на отрезке $[A, B]$ функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и на концах отрезка принимает одинаковые значения $\varphi(A) = \varphi(B) = C$, то существует такая точка $\xi \in [A, B]$, что $\varphi'(\xi) = 0$

(функция принимает одинаковое значение 2 раза и первая производная хотя бы один раз обращается в ноль).

Следствие 1 из Теоремы Ролля. Если на отрезке $[A, B]$ функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, на концах отрезка принимает одинаковые значения $\varphi(A) = \varphi(B) = C$ и *еще один раз принимает то же самое значение* C *внутри отрезка* $[A, B]$, то существует такая точка $\xi \in [A, B]$, что $\varphi''(\xi) = 0$

(функция принимает одинаковое значение 3 раза и вторая производная хотя бы один раз обращается в ноль)

Следствие 2 из Теоремы Ролля. Если на отрезке $[A, B]$ функция $\varphi(x)$ $k+1$ раз непрерывно дифференцируема, на концах отрезка принимает одинаковые значения $\varphi(A) = \varphi(B) = C$, и еще k раз принимает то же самое значение C внутри отрезка, то существует такая точка $\xi \in [A, B]$, что $\varphi^{(k+1)}(\xi) = 0$.

(функция принимает одинаковое значение $k+2$ раза и производная порядка $k+1$ хотя бы один раз обращается в ноль)

Доказательство Теоремы 2

Проверим формулу (12.6) в точке x, которая является узлом интерполяции, например, в точке $x = x_i$, $i = 0,...n$. В такой точке

$$r_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0$$

Так как

$$\omega(x_i) = \underbrace{(x_i - x_0)....(x_i - x_i)....(x_i - x_n)}_{\substack{n+1\ \text{множитель, и один из них} \\ \text{обратится в ноль}}} = 0$$

по формуле (12.6) получим

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_i))}{(n+1)!} \cdot \omega(x_i) = 0$$

Значит, для узлов интерполяции формула верна.

Теперь рассмотрим точку x, которая не является узлом. Специально для этой точки введем функцию $F(z)$ вещественного аргумента z

$F(z) = f(z) - P_n(z) - K \cdot \omega(z)$, где

$\omega(z) = \underbrace{(z - x_0)(z - x_1)...(z - x_n)}_{n+1\ \text{множитель}}$ и $K = const$.

Подберем константу K, чтобы в точке $z = x$ функция $F(z)$ обратилась в ноль:

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - K \cdot \omega(x) = 0$$

Следует выбрать $K = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\omega(x)}$

Так как x не является узлом интерполяции, знаменатель $\omega(x) \neq 0$ и константа K определена.

Покажем, что во всех узлах интерполяции – их всего $n+1$ – функция $F(z)$ также обращается в ноль:

$f(x_i) - P_n(x_i) = 0$ (потому что узел интерполяции)

$$\omega(x_i) = \underbrace{(x_i - x_0)....(x_i - x_i)....(x_i - x_n)}_{\substack{n+1\ \text{множитель, и один из них} \\ \text{обратится в ноль}}} = 0$$

$$F(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{\text{равно нулю}} - K \cdot \underbrace{\omega(x_i)}_{\text{равно нулю}} = 0$$

Таким образом, специально для точки x построена функция $F(z)$, принимающая на вещественной оси одинаковое (нулевое) значение $n+2$ раза:

$$\underbrace{F(x_0) = F(x_1) = ... = F(x_n) = F(x)}_{n+2\ \text{раза}} = 0$$

Выясним, на каком отрезке вещественной оси это происходит, и обозначим такой отрезок через $[A, B]$.

1) Если $x \in [a, b]$, то $[A, B] = [a, b]$.

2) Если $x < a$, то $[A, B] = [x, b]$.

3) Если $x > b$, то $[A, B] = [a, x]$.

Таким образом, $[A, B] = [\min[a, x]; \max[b; x]]$.

Предположим, что интерполируемая функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно-дифференцируема на отрезке $[A, B]$. Полиномы $P_n(x)$ и $\omega(x)$ непрерывно-дифференцируемы (и не только на действительной оси) бесконечное число раз. Следовательно, на отрезке $[A, B]$ функция $F(z)$ $n+1$ раз непрерывно-дифференцируема.

Запишем формулу для вычисления производной порядка $n+1$

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - P_n^{(n+1)}(z) - K \cdot \omega^{(n+1)}(z)$$

Запишем производные полиномов:

$$\omega^{(n+1)}(z) = \underbrace{[(z - x_0)...(z - x_n)]^{(n+1)}}_{\substack{\textit{полином степени } n+1 \\ \textit{относительно} \\ \textit{аргумента } z}} = (n+1)!, \qquad \underbrace{P_n^{(n+1)}(z) = 0}_{\substack{\textit{производная} \\ \textit{порядка } n+1 \textit{ для} \\ \textit{полинома степени } n}}$$

Для вычисления производной порядка $n+1$ получилась формула

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K \cdot (n+1)!$$

Применим Следствие 2 из Теоремы Ролля: все его условия выполнены. Значит, существует точка $\xi \in [A, B]$, для которой $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. В этой точке

$$f^{(n+1)}(\xi) - K \cdot (n+1)! = 0$$

Выразим из уравнения константу K и подпишем, какой формулой она была ранее определена:

$$K = \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Выразим погрешность интерполяции и видим, что теорема доказана:

$$\underbrace{f(x) - P_n(x)}_{\substack{\textit{это погрешность} \\ \textit{интерполяции } r_n(x)}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot \omega(x)$$

Комментарии

1) В случае интерполяции, то есть при $x \in [a, b]$, для ξ верно $\xi \in [a, b]$.

При экстраполяции слева, то есть при $x < a$, для ξ верно $\xi \in [x, b]$.

При экстраполяции справа, то есть при $x > b$, для ξ верно $\xi \in [a, x]$.

2) Теорема 2 говорит о том, чему равна погрешность $r_n(x)$, см. (12.6). Но значение $r_n(x)$ при этом остается неизвестным, потому что неизвестна точка ξ.

Это существенное обстоятельство. Если бы $r_n(x)$ была величиной известной, можно было бы сложить значение полинома $P_n(x)$ и значение $r_n(x)$, получив таким способом неизвестное значение $f(x)$:

$$P_n(x) + r_n(x) = f(x) \tag{12.7}$$

Равенство (12.7) верное, но для вычисления $f(x)$ не пригодное.

3) Для оценки $r_n(x)$ в точке x можно использовать неравенство

$$|\, r_n(x) \,| \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot |\, \omega(x) \,| \cdot \max_{\xi \in [\min[a,\, x],\, \max[b,\, x]]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \tag{12.8}$$

или оценивать $r_n(x)$ более точно с учетом знака $\omega(x)$ и оценок вида

$$M_1 \le f^{(n+1)}(\xi) \le M_2,$$

если такие оценки получены и для любого $\xi \in [\min[a, x]; \max[b; x]]$ верны.

4) Если на основе (12.8) или иным (более точным) способом для погрешности интерполяции $r_n(x)$ получена оценка вида

$$C_1 \le r_n(x) \le C_2$$

неизвестное значение $f(x)$ на основе (12.7) можно оценить неравенствами:

$$P_n(x) + C_1 \le f(x) \le P_n(x) + C_2$$

Далее выясним, насколько точно может быть вычислено значение $P_n(x)$.

Вычислительная погрешность интерполяции

Как правило, значение $P_n(x)$ получают с погрешностью. Независимо от способа счета (компьютер, калькулятор, счет «вручную») вместо $P_n(x)$ получается *нечто иное*, что далее обозначено как $\widetilde{P}_n(x)$.

Определение 3. Вычислительной погрешностью интерполяции в точке x называют разность «истинного» («чистого») значения интерполяционного полинома $P_n(x)$ в точке x и значения $\widetilde{P}_n(x)$, которое вместо него получено:

$$ВП_n(x) = P_n(x) - \widetilde{P}_n(x) \tag{12.9}$$

Источниками $В\Pi_n(x)$ могут быть:

1) неточное задание узлов интерполяции $x_i, i = 0,...n$, используемых при вычислении значения интерполяционного полинома;

2) неточное выполнение арифметических операций (сложения, вычитания, умножения или деления) при вычислении значения интерполяционного полинома;

3) неточное задание функции $f(x)$ в узлах интерполяции.

Неточность задания функции присутствует практически всегда, и в большинстве случаев ее влияние превосходит влияние остальных источников.

В связи с этим рассмотрим «модельную» ситуацию:

1) узлы *интерполяции* $x_i, i = 0,...n$ *заданы точно;*

2) *погрешность выполнения арифметических операций отсутствует;*

3) в узлах интерполяции значения функции $f(x)$ заданы с ошибками: вместо значений $f_i, i = 0,...n$, используются $\tilde{f}_i, i = 0,...n$, такие, что

$$\left| f_i - \tilde{f}_i \right| \le \delta, i = 0,...n. \tag{12.10}$$

Число $\delta > 0$ называют «оценкой погрешности задания функции в узлах интерполяции», или «оценкой погрешности данных».

Как правило, это число известно. В специальной литературе значения табличных функций приводятся с фиксированным числом разрядов после запятой и соответствуют требованию «погрешность не более половины единицы последнего разряда».

В приведенном выше Примере 2 погрешность задания функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

составляет не более половины единицы последнего разряда, и это означает, что $\delta = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Исследуем вычислительную погрешность интерполяции.

«Истинное» («чистое») значение интерполяционного полинома может быть записано в форме Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x)\, f_i$$

Если вычисления организованы с помощью формулы Лагранжа, значение $\tilde{P}_n(x)$ следует записать в виде

$$\tilde{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x)\, \tilde{f}_i$$

потому что:

1) каждый из полиномов Лагранжа в «модельной» ситуации будет вычислен точно,

2) вычислительная погрешность при расчете произведений вида

$L_{ni}(x) \cdot \tilde{f}_i, i = 0,...n$ отсутствует;

3) при суммировании $L_{n0}(x) \cdot \tilde{f}_0 + ... + L_{nn}(x) \cdot \tilde{f}_n$ вычислительная погрешность отсутствует.

Чтобы отслеживать происходящее, введем обозначения

$$\delta_i = f_i - \tilde{f}_i, i = 0,...n$$

Указанные величины называют ошибками (погрешностями) задания функции в узлах интерполяции. Обычно эти величины неизвестны, но из (12.10) следует, что

$$|\ \delta_i\ | \le \ \delta, i = 0,...n$$

С учетом всех введенных обозначений вычислительная погрешность интерполяции составит

$$В\Pi_n(x) = P_n(x) - \tilde{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) f_i - \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) \tilde{f}_i = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) \delta_i$$

и для нее справедлива оценка

$$|\ В\Pi_n(x)\ | = \left| \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) \delta_i \right| \le \sum_{i=0}^{n} \left| L_{ni}(x) \right| \left| \delta_i \right| \le \delta \cdot \sum_{i=0}^{n} \left| L_{ni}(x) \right|$$

Сформулируем доказанный результат:

Утверждение 1. Если *узлы интерполяции* $x_i, i = 0,...n$ *заданы точно* и при вычислении интерполяционного полинома в точке x *погрешность выполнения арифметических операций отсутствует*, тогда величина $В\Pi_n(x)$ зависит от ошибок задания функции в узлах интерполяции:

$$В\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) \delta_i \qquad (12.11)$$

и оценивается неравенством

$$|\ В\Pi_n(x)\ | \le \ \delta \cdot \sum_{i=0}^{n} \left| L_{ni}(x) \right| \qquad (12.12)$$

Здесь $\delta_i = f_i - \tilde{f}_i, i = 0,...n$ – ошибки (погрешности) задания функции в узлах интерполяции и число $\delta > 0$ есть оценка этих ошибок (оценка погрешности задания функции в узлах интерполяции):

$|\ \delta_i\ | \le \ \delta, i = 0,...n$.

Символы $L_{ni}(x),\ i = 0,...n$ соответствуют значениям полинома Лагранжа в точке x.

Рассмотрим случай линейной интерполяции, то есть полином 1-й степени, построенный по двум узлам $x_0 = a, \ x_1 = b$.

Полиномы Лагранжа (их тоже два) имеют вид

$$L_{10}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \cdot (x_1 - x), \quad L_{11}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \cdot (x - x_0)$$

где $h = b - a, h > 0$. Пусть исследуемая точка x принадлежит участку интерполяции, то есть $x_0 \le x \le x_1$. Тогда

$$\left| L_{10}(x) \right| = \frac{1}{h} \cdot (x_1 - x), \left| L_{11}(x) \right| = \frac{1}{h} \cdot (x - x_0)$$

$$\left| L_{10}(x) \right| + \left| L_{11}(x) \right| = \frac{1}{h} \cdot (x_1 - x) + \frac{1}{h} \cdot (x - x_0) = 1$$

$$\left| ВП_1(x) \right| \le \delta \cdot \sum_{i=0}^{1} \left| L_{1i}(x) \right| = \delta$$

Утверждение 2. В условиях Утверждения 1 вычислительная погрешность линейной интерполяции (на участке между узлами интерполяции) оценивается той же величиной $\delta > 0$, что ошибки (погрешности) задания функции в узлах интерполяции.

Общая погрешность интерполяции

Определение 4. Общей погрешностью интерполяции в точке x называют разность значения функции $f(x)$ и значения $\widetilde{P}_n(x)$, полученного при попытке вычислить интерполяционный полином $P_n(x)$:

$$ОП_n(x) = f(x) - \widetilde{P}_n(x) \tag{12.13}$$

Общая погрешность показывает, насколько отличается число, которое нужно было получить, от числа, которое получилось.

Чтобы изучить структуру общей погрешности, к выражению (12.13) прибавим значение $P_n(x)$ и затем его вычтем:

$$ОП_n(x) = f(x) - \widetilde{P}_n(x) = \underbrace{f(x) - P_n(x)}_{это\ r_n(x)} + \underbrace{P_n(x) - \widetilde{P}_n(x)}_{это\ ВП_n(x)}$$

Первое слагаемое полученной формулы есть погрешность интерполяции, а второе – вычислительная погрешность интерполяции. Сформулируем результат:

Утверждение 3. Общая погрешность интерполяции является суммой полгрешности интерполяции и вычислительной погрешности интерполяции:

$$ОП_n(x) = r_n(x) + ВП_n(x) \tag{12.14}$$

Для нее справедлива оценка

$$\left| ОП_n(x) \right| \le \left| r_n(x) \right| + \left| ВП_n(x) \right| \tag{12.15}$$

Комментарии

При решении прикладных задач можно использовать различные подходы к получению оценок $r_n(x)$ и $В\Pi_n(x)$. Пусть для погрешности интерполяции получена оценка вида

$$C_1 \le r_n(x) \le C_2$$

и для вычислительной погрешности интерполяции получена оценка вида

$$D_1 \le В\Pi_n(x) \le D_2$$

Тогда неизвестное значение $f(x)$, для которого (из определения общей погрешности) верно

$$f(x) = \widetilde{P}_n(x) + О\Pi_n(x)$$

оценивается неравенством

$$\widetilde{P}_n(x) + C_1 + D_1 \le f(x) \le \widetilde{P}_n(x) + C_2 + D_2 \qquad (12.16)$$

Слагаемые, указанные в левой и правой части неравенства (12.16), должны быть известными величинами.

Пример 3

В этом примере записаны формулы для получения интервальной оценки неизвестного значения функции на основе оценок общей погрешности.

Эти формулы могут быть полезны при решении задач.

Формулы основаны на том, что оценка общей погрешности строится на основе оценки ее модуля.

В отдельных случаях, если учитывать знак погрешности интерполяции, можно строить более точные оценки, чем приведены здесь.

Если на участке $[\min[a, x]; \max[b; x]]$ функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз, *узлы интерполяции* $x_i, i = 0,...n$ *заданы точно* и в точке x *погрешность вычисления интерполяционного полинома отсутствует*, тогда общая погрешность интерполяции определяется выражением

$$О\Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x) + \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x)\,\delta_i$$

(см. (12.6), (12.11) и (12.14)).

Для погрешности верна оценка

$$\left| О\Pi_n(x) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left| \omega(x) \right| \cdot \max_{\xi \in [\max[a, x], \max[b, x]]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| + \delta \cdot \sum_{i=0}^{n} \left| L_{ni}(x) \right|$$

(см. (12.8), (12.12) и (12.15))

Правую часть оценки обозначим через E, считаем, что E известно:

$$E = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left| \omega(x) \right| \cdot \max_{\xi \in [\max[a, x], \max[b, x]]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| + \delta \cdot \sum_{i=0}^{n} \left| L_{ni}(x) \right|$$

Тогда

$$\left| ОП_n(x) \right| \le E$$

$$-E \le ОП_n(x) \le E$$

Из определения общей погрешности (12.13) получим

$$f(x) = \widetilde{P}_n(x) + ОП_n(x)$$

Заменим $ОП_n(x)$ ее наименьшим и затем наибольшим возможными значениями. Тогда неизвестное значение $f(x)$ можно оценить неравенством, правая и левая части которого известны:

$$\widetilde{P}_n(x) - E \le f(x) \le \widetilde{P}_n(x) + E$$

Анализ погрешностей на отрезке применения интерполяционного полинома

Рассмотрим интерполяционный полином $P_n(x)$, построенный для функции $f(x)$ по узлам интерполяции $x_i, i = 0,\dots n$ отрезка $[a, b]$.

Пусть $P_n(x)$ используется для вычисления значений $f(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$.

Отрезок $[\alpha, \beta]$, на котором используется полином, может не совпадать с отрезком $[a, b]$, на котором сосредоточены узлы интерполяции.

В каждой точке $x \in [\alpha, \beta]$, где будет использован $P_n(x)$, присутствуют погрешность интерполяции $r_n(x)$, вычислительная и общая погрешности $ВП_n(x)$ $ОП_n(x)$.

Практический интерес представляют такие оценки $r_n(x)$, $ВП_n(x)$ и $ОП_n(x)$, которые были бы справедливы для любой точки $x \in [\alpha, \beta]$.

В отличие от рассмотренных ранее **«погрешностей в точке»,** такие оценки называют **«погрешностями на отрезке»**. Введем для них обозначения:

$r_n[\alpha, \beta]$ – **погрешность интерполяции** функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ полиномом, построенным узлам $x_i, i = 0,\dots n$ отрезка $[a, b]$.

$ВП_n[\alpha, \beta]$ – **вычислительная погрешность интерполяции** функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ полиномом, построенным узлам $x_i, i = 0,\dots n$ отрезка $[a, b]$.

$ОП_n[\alpha, \beta]$ – **общая погрешность интерполяции** функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ полиномом, построенным узлам $x_i, i = 0,\dots n$ отрезка $[a, b]$.

Так как x пробегает $[\alpha, \beta]$, погрешности $r_n(x)$, $В\Pi_n(x)$ и $О\Pi_n(x)$ можно рассматривать как функции аргумента $x \in [\alpha, \beta]$. Величины $r_n[\alpha, \beta]$, $В\Pi_n[\alpha, \beta]$, $О\Pi_n[\alpha, \beta]$ естественно определить так, как определяют норму функции, то есть используя максимум функции на отрезке.

Определения 5-7

$$r_n[\alpha, \beta] = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |r_n(x)| \tag{12.17}$$

$$В\Pi_n[\alpha, \beta] = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |В\Pi_n(x)| \tag{12.18}$$

$$О\Pi_n[\alpha, \beta] = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |О\Pi_n(x)| \tag{12.19}$$

Утверждение 4. Для погрешности интерполяции функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ интерполяционным полиномом $P_n(x)$, построенным на отрезке $[a, b]$, верна оценка

$$r_n[\alpha, \beta] \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [\alpha, \beta]} |\omega(x)| \cdot \max_{\xi \in [\min[a, \alpha], \max[b, \beta]]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \tag{12.20}$$

Данная оценка справедлива, если на отрезке $[\min[a, \alpha]; \max[b; \beta]]$ функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз.

Утверждение 5. Для вычислительной погрешности интерполяции на отрезке $[\alpha, \beta]$ интерполяционным полиномом $P_n(x)$, построенным на отрезке $[a, b]$, верна оценка

$$В\Pi_n[\alpha, \beta] \le \delta \cdot \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left(\sum_{i=0}^{n} |L_{ni}(x)| \right) \tag{12.21}$$

Данная оценка справедлива, если *узлы интерполяции* $x_i, i = 0, \dots n$ *заданы точно*, на отрезке $[\alpha, \beta]$ *погрешность вычисления интерполяционного полинома отсутствует, ошибка задания функции* $f(x)$ *в узлах интерполяции* $x_i, i = 0, \dots n$ отрезка $[a, b]$ *ограничена значением* $\delta > 0$:

$$|f_i - \tilde{f}_i| \le \delta, i = 0, \dots n$$

Утверждение 6. Для общей погрешности интерполяции функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ интерполяционным полиномом $P_n(x)$, построенным на отрезке $[a, b]$, (в любом случае) верна оценка

$$О\Pi_n[\alpha, \beta] \le r_n[\alpha, \beta] + В\Pi_n[\alpha, \beta] \tag{12.22}$$

Утверждения 4-6 несложно доказать, опираясь на определения (12.17)-(12.19) и Теорему 2, Утверждение1 и Утверждение 3.

Вернемся к случаю линейной интерполяции. Узлами являются $x_0 = a,\ \ x_1 = b$. Точка x принадлежит отрезку интерполяции, то есть $a \le x \le b.$

Это означает, что в качестве отрезка $[\alpha, \beta]$, на котором используется полином, рассматривается отрезок между узлами интерполяции, то есть сам отрезок $[a, b]$.

Утверждение 7. Для **погрешности линейной интерполяции** на отрезке $[a, b]$ интерполяционным полиномом $P_1(x)$, построенным по узлам $x_0 = a,\ \ x_1 = b$, верна оценка

$$r_1\,[a, b] \ \le\ \frac{(b-a)^2}{8} \cdot \max_{\xi \in [a, b]} |\ f''(\xi)\ | \qquad (12.23)$$

Для **вычислительной погрешности линейной интерполяции** на отрезке $[a, b]$ верна оценка

$$В\Pi_1\,[a, b] \ \le\ \ \delta \qquad (12.24)$$

Для **общей погрешности линейной интерполяции** на отрезке $[a, b]$ верна оценка

$$О\Pi_1\,[a, b] \ \le\ \frac{(b-a)^2}{8} \cdot \max_{\xi \in [a, [b]} |\ f''(\xi)\ | + \delta \qquad (12.25)$$

Данные оценки справедливы, если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ два раза непрерывно дифференцируема и в отношении вычислительной погрешности выполняются предположения из Утверждения 5.

Доказательство (схема)

По Теореме 2 о погрешности интерполяции для случая линейной интерполяции верно

$$r_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} \cdot \omega(x)$$

где $\omega\,(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ и неизвестная точка ξ расположена на отрезке $\xi \in [\min\,[a, x]; \max\,[b; x]]$.

Так как $a \le x \le b$, для средней точки верно $\xi \in [a, b]$.

По определению, погрешность линейной интерполяции на отрезке $[a, b]$ есть

$$r_1\,[a, b] = \max_{x \in [a, b\,]} |\ r_1(x)\ | = \frac{1}{2} \max_{x \in [a,b]} |\ f''(\xi) \cdot \omega(x)\ |$$

Очевидно, что

$$r_1\,[a, b] \le \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |\ \omega(x)\ | \cdot \max_{x \in [a, b]} |\ f''(\xi)\ |$$

Модуль $|\omega(x)|$ есть модуль параболы. Максимум модуля параболы на участке между ее корнями достигается посередине между корнями и соответствует вершине параболы:

$$\max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)| =$$

$$= \left| \left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)\cdot\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_1\right) \right| = \left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$$

Оценка погрешности линейной интерполяции на участке между узлами доказана.

Для вычислительной погрешности в точке между узлами линейной интерполяции ранее доказана оценка $В\Pi_1(x) \le \delta$, откуда следует $В\Pi_1[a,b] \le \delta$.

Оценка для общей погрешности следует из Утверждения 6.

Сходимость интерполяционного процесса

Интерполяционные полиномы различных степеней применяются для приближенного вычисления функций на основе опорных значений, вычисленных с высокой точностью на сетке; при построении формул численного дифференцирования и квадратурных формул, разработке численных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, корректировке численных алгоритмов.

В связи с указанными задачами изучают **сходимость интерполяционных процессов**. Отрезок $[a,b]$ вещественной оси задан, на отрезке построена сетка с узлами интерполяции $x_i, i=0,\ldots n$, такими, что $x_0=a, x_n=b$, все узлы различны и упорядочены: $x_0<\ldots<x_n$. Характеристикой сетки является максимальная длина участка сетки: $\bar{h} = \max\limits_{i=1,\ldots n} h_i$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,\ldots n$.

Под **сходимостью интерполяционного процесса** понимают сходимость полиномов $P_n(x)$, интерполирующих функцию $f(x)$ в узлах сетки $\Omega_{\bar{h}}$, к самой функции $f(x)$ (в точках или равномерно на отрезке), при $\bar{h}\to 0$ и соответственном увеличении числа узлов сетки: $n\to\infty$.

Приведем результат о достаточных условиях сходимости интерполяционного процесса для аналитических функций.

Как показывает Теорема 3, **если особые точки функции комплексного аргумента $f(z)$ находятся на комплексной плоскости достаточно далеко от вещественного отрезка** $[a,b]$, на котором организован интерполяционный процесс, то полиномы $P_n(x)$, интерполирующие $f(x)$ на сетках $\Omega_{\bar{h}}$ вещественного отрезка $[a,b]$, при $\bar{h}\to 0$ **сходятся к** $f(x)$ на $[a,b]$ **равномерно:**

$$\lim_{\bar{h}\to 0}\left(\max_{x\in[a,b]} |f(x)-P_n(x)|\right)=0$$

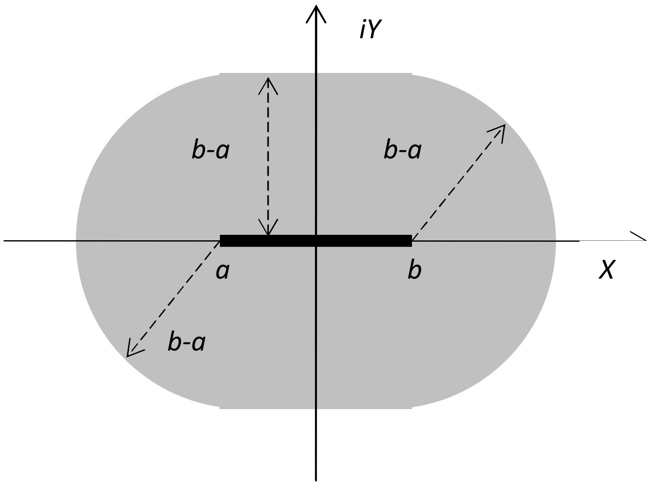
Положение особых точек по отношению к отрезку $[a,b]$ описывают с помощью R-окрестности.

Определение 5. R**-окрестностью отрезка** $[a,b]$, расположенного на вещественной оси, называем множество точек z комплексной плоскости C, для которых **минимальное расстояние до точек** ξ **отрезка** $[a,b]$ **не превышает числа** $R>0$

$$\min_{\xi\in[a,b]} |z-\xi| \le R \tag{12.26}$$

(R**-окрестность отрезка** есть множество точек z комплексной плоскости C, для которых **расстояние до отрезка не превышает числа** $R>0$).

Пример



На комплексной плоскости показана R-окрестность отрезка $[a,b]$ с числом $R=b-a$

Теорема 3 (о достаточных условиях сходимости). Достаточное условие равномерной сходимости интерполяционного процесса для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ вещественной оси состоит в следующем: функция $f(x)$ аналитична на комплексной плоскости в области G, которая

1) **содержит в себе отрезок** $[a,b]$

2) содержит R**-окрестность отрезка** $[a,b]$, такую что число R строго больше длины отрезка:

$$R > |b-a| \tag{12.27}$$

Тогда **оценка погрешности интерполяции функции** $f(x)$ **на отрезке** $[a,b]$ полиномом, построенным по узлам отрезка $[a,b]$, то есть $x_i, i=0,\dots n$, $x_0=a, x_n=b$, $x_0<\dots<x_n$., имеет вид

$$r_n[a,b] = \max_{x\in[a,b]} |r_n(x)| \le \frac{\hat{M}}{2\pi R}\cdot\left(\frac{b-a}{R}\right)^{n+1} \tag{12.28}$$

где число $\hat{M}$ не зависит от степени интерполяционного полинома n, но зависит от свойств функции $f(x)$ и размера R-окрестности.

Из (12.27) и (12.28) следует $\lim\limits_{n\to\infty} r_n[a,b]=0$.

Доказательство использует интегральную формулу Коши

Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области, то ее значение в любой точке этой области, а также значения ее производных любого порядка в этой точке выражаются через значения этой функции на замкнутом контуре Γ_R, окружающем эту точку. В частности, для $z=\xi$ и производной порядка $n+1$

$$f^{(n+1)}(\xi)=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{s\in\Gamma_R}\frac{f(s)ds}{(s-\xi)^{n+2}}$$

где s – переменная интегрирования, Γ_R - замкнутый контур, окружающий точку $z=\xi$ и представляющий собой (в доказательстве) границу R-окрестности. Интеграл берется в положительном направлении (против часовой стрелки).

С помощью этого представления оценивается неизвестный (зависящий от ξ) множитель формулы погрешности интерполяции.

Пример 5

Интерполяционный процесс на равномерных сетках отрезка $[-1;\ 1]$ для функций $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=sh\,x$, $f(x)=ch\,x$ **сходится равномерно**, потому что они являются аналитическими на всей C.

Здесь $[a,b]$=$[-1;\ 1]$, $|b-a|=2$ и для любого $R>2$ R**-окрестность отрезка** $[-1;\ 1]$ не содержит особых точек указанных выше функций.

Пример 6

Интерполяционный процесс на равномерных сетках отрезка $[-1;\ 1]$ для функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\cdot e^x$$

не имеет гарантий равномерной сходимости.

Здесь также $[a,b]$=$[-1;\ 1]$, $|b-a|=2$, но для любого $R>2$ R**-окрестность отрезка** $[-1;\ 1]$ содержит 2 особые точки данной функции, а именно, полюса $z=\pm i$.

Некоторые свойства интерполяционных процессов раскрывают следующие две теоремы.

Теорема Маркушевича. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая последовательность сеток $\Omega_{\bar{h}}$, $\bar{h}\to 0$, заданных на отрезке $[a,b]$, что интерполяционный процесс **сходится равномерно**.

Теорема Фабера. Для любой последовательности сеток $\Omega_{\bar{h}}, \bar{h} \to 0$, заданных на отрезке $[a, b]$, существует такая функция $f(x)$, непрерывная на $[a, b]$, что интерполяционный процесс **не сходится равномерно.**

Пример 7

Последовательность интерполяционных полиномов $P_n(x)$, построенных для непрерывной функции $f(x) = |\, x \,|$ на равномерных сетках отрезка $[-1;\ 1]$, не сходится к функции $f(x) = |\, x \,|$ ни в одной точке отрезка $[-1;\ 1]$, кроме точек $x = -1; x = 0; x = 1$.

Пример 8 (данные с вычислительной погрешностью, оценка погрешности в точке)

Функция $f(x) = \sin(x)$ задана на сетке

x_i	0	0.01	0.02
f_i	sin(0)	sin(0.01)	sin(0.02)
$\tilde{f}_i$	0.	0.009 999 83	0.019 998 67

В данной задаче нужно

1) построить интерполяционный полином степени 2;

2) вычислить приближенно $\sin(0.015)$ с его помощью;

3) провести полный анализ погрешности;

4) оценить значение $\sin(0.015)$ на основе полученных результатов.

Считаем, что узлы интерполяции заданы точно; погрешность вычислений отсутствует; погрешность задания функции в таблице не превышает половины единицы последнего разряда.

Решение

Узлами интерполяции являются $x_0 = 0; x_1 = 0.01; x_2 = 0.02$

Отрезок интерполяции $[a;\ b\ ] = [0;\ 0.02]$.

Степень полинома $n = 2$.

Интерполяционный полином $P_2(x)$ для функции $f(x) = \sin(x)$ имеет вид

$$P_2(x) = \frac{(x-0.01)(x-0.02)}{(0.-0.01)(0-0.02)} \cdot 0 + \frac{(x-0.)(x-0.02)}{(0.01-0.)(0.01-0.02)} \cdot \sin(0.01) +$$

$$+ \frac{(x-0.)(x-0.01)}{(0.02-0.)(0.02-0.01)} \cdot \sin(0.02)$$

что означает

$$P_2(x) = (-1) \cdot x \cdot (x-0.02) \cdot 10^4 \cdot \sin(0.01) + x \cdot (x-0.01) \cdot 0.5 \cdot 10^4 \cdot \sin(0.02)$$

Запишем значение $P_2(x)$ при $x = 0.015$:

$$P_2(0.015) = (-1) \cdot 0.015 \cdot (0.015-0.02) \cdot 10^4 \cdot \sin(0.01) +$$

$$+ 0.015 \cdot (0.015-0.01) \cdot 0.5 \cdot 10^4 \cdot \sin(0.02) =$$

$$= 0.75 \cdot \sin(0.01) + 0.375 \cdot \sin(0.02)$$

Указанное значение неизвестно.

Ш а г 2

Интерполяционный полином $\widetilde{P}_2(x)$ для табличных значений имеет вид

$$\widetilde{P}_2(x) = (-1)\cdot x\cdot(x-0.02)\cdot 10^4\cdot(0.009\ \ 999\ \ 83) +$$
$$+ x\cdot(x-0.01)\cdot 0.5\cdot 10^4\cdot(0.019\ \ 998\ \ 67)$$

Вычислим его значение для аргумента $x = 0.015$:

$$\widetilde{P}_2(0.015) = (-1)\cdot 0.015\cdot(0.015-0.02)\cdot 10^4\cdot(0.00999983) +$$
$$+ 0.015\cdot(0.015-0.01)\cdot 0.5\cdot 10^4\cdot(0.01999867) =$$
$$= 0.75\cdot(0.00999983) + 0.375\cdot(0.01999867)$$

Следовательно,

$$\sin(0.015) \approx \widetilde{P}_2(0.015) = 0.01499937375$$

Ш а г 3

Оценим $r_2(x)$ – **погрешность интерполяции** функции $f(x) = \sin(x)$ полиномом $P_2(x)$ в точке $x = 0.015$. **По определению**

$$r_2(0.015) = f(0.015) - P_2(0.015)$$

По Теореме о погрешности интерполяции

$$r_2(0.015) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot(0.015-0.)(0.015-0.01)(0.015-0.02),\ \ \xi\in[0;\ \ 0.02]$$

Здесь ξ – неизвестная точка.

После подстановки третьей производной и подсчета скобок получим

$$r_2(0.015) = \frac{-\cos(\xi)}{6}\cdot(5\cdot 3)\cdot 5\cdot 5\cdot 10^{-9}\cdot(-1),\ \ \xi\in[0;\ \ 0.02],$$

то есть

$$r_2(0.015) = \cos(\xi)\cdot 0.625\cdot 10^{-7},\ \ \xi\in[0;\ \ 0.02]$$

Оценим модуль погрешности интерполяции:

$$|\,r_1(0.015)\,| = 0.625\cdot 10^{-7}\cdot|\,\cos(\xi)\,| \le 0.625\cdot 10^{-7}\cdot \max_{\xi\in[0;\,0.02]}|\,\cos(\xi)\,|$$

Очевидно, что

$$\max_{\xi\in[0;\,0.02]}|\,\cos(\xi)\,| = \cos(0) = 1.$$

Для погрешности интерполяции в точке $x = 0.015$ верна оценка

$$|\,r_1(0.015)\,| \le 0.625\cdot 10^{-7}$$

Ш а г 4

Оценим $B\Pi_2(x)$ – **вычислительную погрешность интерполяции** в точке $x = 0.015$. **По определению**

$$B\Pi_2(0.015) = P_2(0.015) - \widetilde{P}_2(0.015)$$

По Утверждению 1

$$B\Pi_2(0.015) = 0.75 \cdot \delta_1 + 0.375 \cdot \delta_2$$

где

$$\delta_1 = \sin(0.01) - 0.00999983$$

$$\delta_2 = \sin(0.02) - 0.01999867$$

есть ошибки (погрешности) задания функции $f(x) = \sin(x)$ в узлах интерполяции.

По условию задачи ошибки ограничены числом $\delta > 0$, то есть

$$|\ \delta_1\ | \le \delta, |\ \delta_2\ | \le \delta.$$

причем $\delta = 0.5 \cdot 10^{-8}$ (половина единицы последнего разряда представленных в таблице приближенных значений $f(x) = \sin(x)$).

Оценим модуль вычислительной погрешности

$$\begin{aligned} |\ B\Pi_2(0.015)\ | &= |\ 0.75 \cdot \delta_1 + 0.375 \cdot \delta_2\ | \le \\ &\le |\ 0.75\ | \cdot |\ \delta_1\ | + |\ 0.375\ | \cdot |\ \delta_2\ | \le \\ &\le (0.75) \cdot \delta + (0.375) \cdot \delta \end{aligned}$$

Для вычислительной погрешности в точке $x = 0.015$ получена оценка

$$|\ B\Pi_2(0.015)\ | \le (0.75 + 0.375) \cdot 0.5 \cdot 10^{-8},$$

то есть

$$|\ B\Pi_2(0.015)\ | \le 0.5625 \cdot 10^{-8}$$

Оценка вычислительной погрешности интерполяции получилась несколько хуже, чем оценка ошибок задания функции в узлах интерполяции:

Ш а г 5

Оценим $O\Pi_2(x)$ – **общую погрешность интерполяции в точке** $x = 0.015$.

По определению

$$O\Pi_2(0.015) = f(0.015) - \widetilde{P}_2(0.015)$$

В тексте определения добавим и вычтем значение «истинного» интерполяционного полинома $P_2(x)$ в точке $x = 0.015$:

$$ОП_2(0.015) = f(0.015) - \widetilde{P}_2(0.015) =$$

$$= \underbrace{f(0.015) - P_2(0.015)}_{\substack{\textit{это погрешность} \\ \textit{интерполяции} \\ \textit{в точке } x=0.015}} + \underbrace{P_2(0.015) - \widetilde{P}_2(0.015)}_{\substack{\textit{это вычислительная} \\ \textit{погрешность} \\ \textit{интерполяции} \\ \textit{в точке } x=0.015}}$$

Из приведенной выше формулы следует оценка

$$|\, ОП_2(0.015) \,| \le |\, r_2(0.015) \,| + |\, ВП_2(0.015) \,|.$$

Применим оценки Шага 3 и Шага 4

$$|\, ОП_2(0.015) \,| \le 0.625 \cdot 10^{-7} + 0.5625 \cdot 10^{-8}$$

Для общей погрешности интерполяции в точке $x = 0.015$ получена оценка

$$|\, ОП_2(0.015) \,| \le 0.68125 \cdot 10^{-7}$$

Более грубый вариант: в точке $x = 0.015$ получена оценка

$$|\, ОП_2(0.015) \,| \le 0.7 \cdot 10^{-7}$$

Ш а г 6

Наблюдения и выводы

1) Истинное значение $\sin(0.015)$ отличается значения 0.01499937375, найденного с помощью интерполяции табличных данных, не более чем на $(0.68125) \cdot 10^{-7}$ (величину порядка (-7), по модулю).

2) **В структуре общей погрешности доминирует погрешность интерполяции.** Ее порядок (-7). Порядок вычислительной погрешности интерполяции (-8).

3) Ошибки задания функции $f(x) = \sin(x)$ в узлах интерполяции для применения интерполяционного полинома степени 2 в данной задаче не являются критичными.

Ш а г 7

Построение оценок значения $\sin(0.015)$.

1) Так как

$$ОП_2(0.015) = \sin(0.015) - 0.01499937375$$

из оценки Шага 5 получим

$$|\, \sin(0.015) - 0.01499937375 \,| \le 0.68125 \cdot 10^{-7}$$

Р е з у л ь т а т (1)

$$\sin(0.015) = 0.014999373750 \pm 0.681\,25 \cdot 10^{-7}$$

2) Построим интервальную оценку $\sin(0.015)$

$$0.01499937375 - 0.68125 \cdot 10^{-7} \le \sin(0.015) \le$$
$$\le 0.01499937375 + 0.68125 \cdot 10^{-7}$$

После подсчета границ получим

$$\underbrace{0.014\ 999\ 305\ \ 625}_{\substack{\textit{нижняя оценка значения} \\ \textit{функции } \sin(0.015)}} \le \sin(0.015) \le \underbrace{0.014\ \ 999\ \ 441\ \ 875}_{\substack{\textit{верхняя оценка значения} \\ \textit{функции } \sin(0.015)}}$$

Результат (2)

$$0.014\ \ 999\ \ 305\ \ \le \sin(0.015) \le\ 0.014\ \ 999\ \ 442$$

Нижняя оценка значения функции округлена в меньшую сторону, верхняя – в большую сторону.

Результат (3)

Можно гарантировать, что

$$\sin(0.015) = 0.014\,999$$

с погрешностью не более половины последнего (шестого) десятичного разряда.

Пересмотр интервальной оценки

3) Построим интервальную оценку $\sin(0.015)$ **на основе грубой оценки общей погрешности**

$$0.014\ \ 999\,373\ \ 75 - 0.7 \cdot 10^{-7} \le \sin(0.015) \le 0.014\ \ 999\,3\,73\ \ 75 + 0.7 \cdot 10^{-7}$$

После подсчета границ получим

$$\underbrace{0.014\ \ 999\ \ 303\ \ \ 750}_{\substack{\textit{нижняя оценка значения} \\ \textit{функции } \sin(0.015)}} \le \sin(0.015) \le \underbrace{0.014\ \ \ 999\ \ 443\ \ 750}_{\substack{\textit{верхняя оценка значения} \\ \textit{функции } \sin(0.015)}}$$

Результат (4)

$$0.014\ \ 999\ \ 303\ \ \le \sin(0.015) \le\ 0.014\ \ 999\ \ 444$$

Нижняя оценка значения функции округлена в меньшую сторону, верхняя – в большую сторону. Границы интервала изменились в девятом разряде после запятой.

Основной результат не изменился: Можно гарантировать, что $\sin(0.015) = 0.014\,999$ с погрешностью не более половины последнего (шестого) десятичного разряда.

Ответ (пример ответа):

1) построить интерполяционный полином степени 2 (узлов интерполяции 3):

Полином, интерполирующий значения $f(x) = \sin(x)$ в узлах $x_0 = 0; x_1 = 0.01; x_2 = 0.02$

$$P_2(x) = (-1) \cdot x \cdot (x - 0.02) \cdot 10^4 \cdot \sin(0.01) + \\ + x \cdot (x - 0.01) \cdot 0.5 \cdot 10^4 \cdot \sin(0.02)$$

Полином, интерполирующий приближенные значения $f(x) = \sin(x)$ в узлах $x_0 = 0; x_1 = 0.01; x_2 = 0.02$

$$\widetilde{P}_2(x) = (-1) \cdot x \cdot (x - 0.02) \cdot 10^4 \cdot (0.00999983) + \\ + x \cdot (x - 0.01) \cdot 0.5 \cdot 10^4 \cdot (0.01999867)$$

2) вычислить приближенно $\sin(0.015)$ с помощью ИП

$$\sin(0.015) \approx \widetilde{P}_2(0.015) = 0.01499937375$$

3) провести полный анализ погрешности

Погрешность исходных данных с оценкой $\delta = 0.5 \cdot 10^{-8}$. Узлы интерполяции заданы точно. Погрешность вычислений отсутствует (в данном примере все специально вычислено точно). Общая погрешность интерполяции включает погрешность интерполяции и ВП интерполяции

Погрешность интерполяции в точке $x = 0.015$

$$\underbrace{\sin(0.015) - P_2(0.015)}_{\text{это погрешность И.}} = 0.625 \cdot 10^{-7} \cdot \cos(\xi), \quad \xi \in [0; 0.02]$$

Оценка погрешности интерполяции в точке $x = 0.015$

$$\underbrace{-0.625 \cdot 10^{-7}}_{\substack{\text{это оценка} \\ \text{нижней границы} \\ \text{погрешности И.}}} \le \sin(0.015) - P_2\ (0.015) \le \underbrace{0.625 \cdot 10^{-7}}_{\substack{\text{это верхняя граница} \\ \text{погрешности И.}}}$$

Оценка вычислительной погрешности интерполяции в точке $x = 0.015$

$$\underbrace{\left| P_2(0.015) - 0.01499937375 \right|}_{\substack{\text{это вычислительная} \\ \text{погрешность интерполяции}}} \le 0.5625 \cdot 10^{-8}$$

Оценка общей погрешности интерполяции в точке $x = 0.015$

$$\underbrace{|\sin(0.015) - 0.01499937375|}_{\textit{это общая погрешность интерполяции}} \le 0.68125 \cdot 10^{-7}$$

4) оценить $\sin(0.015)$ с учетом общей погрешности

$$\sin(0.015) = 0.014\ 999\ 373\ 75 \pm 0.681\,25 \cdot 10^{-7}$$

$$0.014\ 999\,305\ \le \sin(0.015) \le\ 0.014\ 999\ 442$$

Можно гарантировать, что

$$\sin(0.015) = 0.014\,999$$

с погрешностью не более половины последнего (шестого) десятичного разряда.

5) проверка: значение $\sin(0.015)$, полученное средствами библиотеки

$$\sin(0.015) \approx 0.014\ 999\ 438$$

Данное значение принадлежит построенному интервалу:

$$0.014\ 999\ 438 \in [0.014\ 999\ 305;\ 0.014\ 999\ 442]$$

6) Уточненная интервальная оценка $\sin(0.015)$ может быть построена на основе оценки погрешности интерполяции $r_2(x)$ в точке $x = 0.015$ с учетом ее знака, потому что $r_2(0.015)$ строго положительна.

Если провести такую (более точную) оценку $r_2(x)$, на основе тех же самых вычислений можно будет гарантировать, что

$$\sin(0.015) = 0.014\,999\,4$$

с погрешностью не более половины последнего (теперь уже седьмого) десятичного разряда.

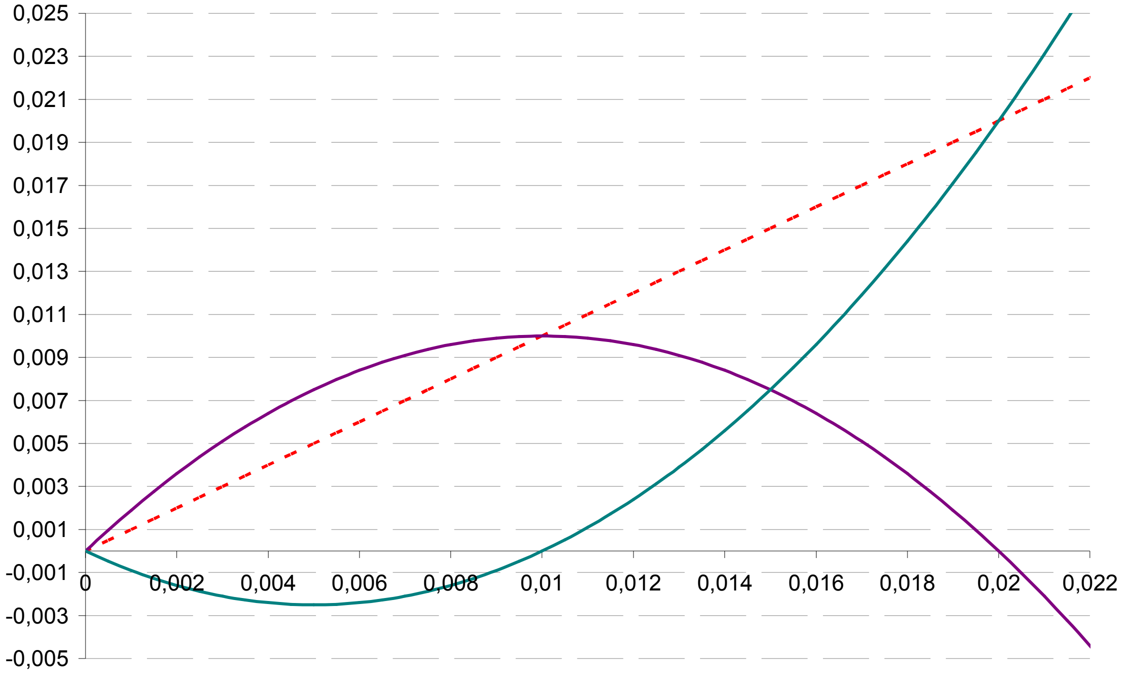


Рисунок 3

На рисунке 3 красным пунктиром показан интерполяционный полином $\widetilde{P}_2(x)$ степени $n = 2$, построенный по трем узлам интерполяции $x_0 = 0; x_1 = 0.01; x_2 = 0.02$ отрезка $[a;\ b\ ] = [0;\ 0.02]$.

Показаны его компоненты: полином степени 2

$$L_{21}\ (x) \cdot (0.009\,999\,83)$$

с корнями $x_0 = 0;\ \ x_2 = 0.02$, и полином степени 2

$$L_{22}\ (x) \cdot (0.019\,998\,67)$$

с корнями $x_0 = 0; x_1 = 0.01$.

Здесь $L_{21}\ (x)\ u\ L_{22}(x)$– полиномы Лагранжа.

Полином $\widetilde{P}_2(x)$ интерполирует табличные данные для функции $f(x) = \sin(x)$.

Как следует из Примере 8, основной вклад в общую погрешность вносит погрешность интерполяции. На участке $[0; 0.01]$ она отрицательна, а на участке $[0.01; 0.02]$ – положительна. Таким образом, $\widetilde{P}_2(x)$ располагается сначала выше, а потом ниже функции $f(x) = \sin(x)$.

В связи с малостью общей погрешности функции $\widetilde{P}_2(x)$ и $f(x) = \sin(x)$ на отрезке $[0; 0.02]$ на рисунке были бы не различимы

Волна над символом означает, что полином интерполирует содержащие погрешность табличные данные, а не «истинные» значения функции $f(x)$.

Пример 9 (данные с вычислительной погрешностью, оценка погрешности на отрезке)

Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ задана в таблице

x_i	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$\tilde{f}_i$	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973

Считаем, что узлы интерполяции заданы точно; погрешность вычислений отсутствует; погрешность задания функции в таблице не превышает половины единицы последнего разряда.

Нужно оценить общую погрешность интерполяции на отрезке при условии, что на каждом участке сетки применяется линейная интерполяция.

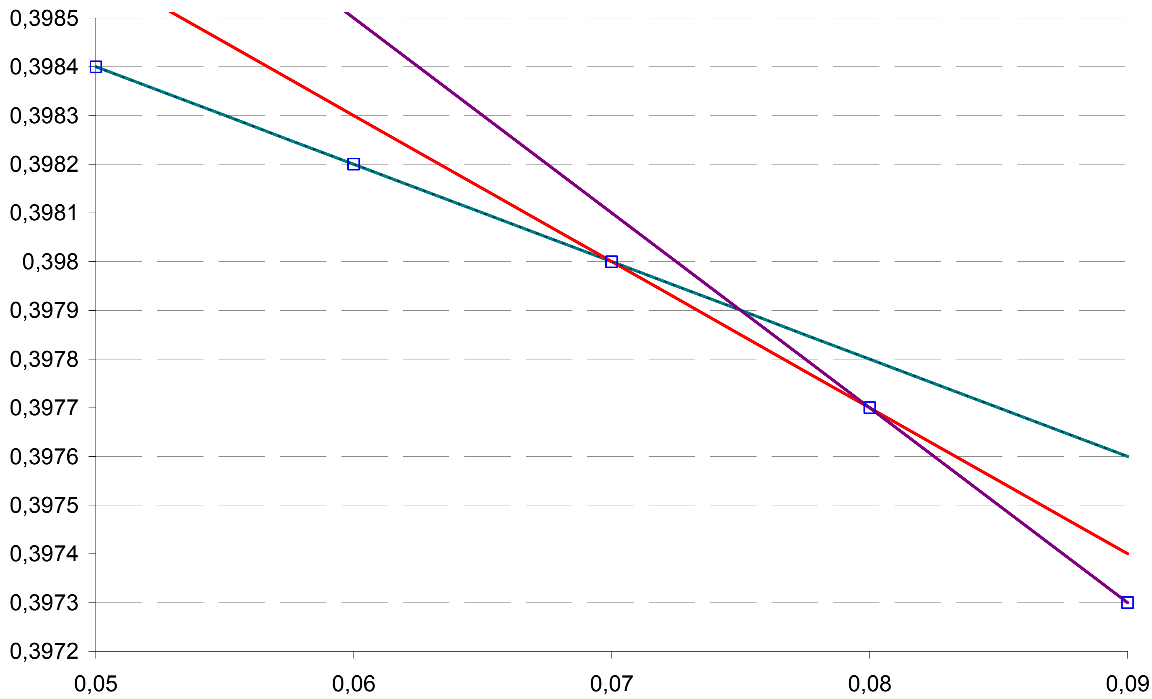


Рисунок 4

На рисунке 4 маркером показаны табличные данные. На каждом участке сетки построен и показан «свой» интерполяционный полином степени $n = 1$. В связи с тем, что первые три пары табличных значений лежат на одной прямой, полиномы для участков $[0.05; 0.06]$ и $[0.06; 0.07]$ совпадают.

О постановке задачи

По условию задачи табличные данные приведены с ошибками $\delta_i = f_i - \tilde{f}_i, i = 0,\ldots 4$, которые не превышают половины последнего (четвертого) десятичного разряда:

$| \delta_i | \le \delta, i = 0,\ldots 4$. где $\delta = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Пронумеруем узлы сетки:

$$x_0 = 0.05,\ x_1 = 0.06,\ x_2 = 0.07, x_3 = 0.08,\ x_4 = 0.09$$

На каждом участке отрезка $[a;\ b] = [0.05; 0.09]$ должен быть построен «свой» интерполяционный полином степени $n = 1$, и такие полиномы показаны на Рисунке 4.

По условию задачи для вычисления $f(x)$ в точке $x \in [0.05; 0.09]$ нужно использовать полином того участка, которому принадлежит x. Интерес представляет разность значения $f(x)$ и значения полинома.

Таким образом, нужно оценить общую погрешность интерполяции на каждом из участков отрезка $[a;\ b] = [0.05; 0.09]$ и затем выбрать из этих оценок наибольшую – ту, что подходит для любого из участков.

Решение

Шаг 1

Отрезки интерполяции $[x_i;\ x_{i+1}],\ i = 0, 1,2,3$. Узлы интерполяции $x_i;\ x_{i+1}$.

Степень каждого из полиномов $n = 1$.

На отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ интерполяционный полином $P_1(x)$ для функции $f(x)$ имеет вид

$$P_1(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \cdot f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} \cdot f(x_{i+1})$$

что означает

$$P_1(x) = (x_{i+1} - x) \cdot 100 \cdot f(x_i) + (x - x_i) \cdot 100 \cdot f(x_{i+1})$$

Интерполяционный полином $\widetilde{P}_2(x)$ для табличных значений имеет вид

$$\widetilde{P}_1(x) = (x_{i+1} - x) \cdot 100 \cdot \widetilde{f}_i + (x - x_i) \cdot 100 \cdot \widetilde{f}_{i+1}$$

Шаг 2

Оценим $r_1[x_i, x_{i+1}]$ – **погрешность интерполяции** функции $f(x)$ на отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ полиномом, построенным узлам интерполяции $x_i;\ x_{i+1}$.

По Утверждению 7

$$r_1\,[x_i, x_{i+1}] \le \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8} \cdot \max_{\xi \in [x_i,\, x_{i+1}]} |\, f''(\xi)\,|$$

Сетка равномерная: $x_{i+1} - x_i = 0.01$,

поэтому

$$r_1\,[x_i, x_{i+1}] \le 0.125 \cdot 10^{-4} \cdot \max_{\xi \in [x_i,\, x_{i+1}]} |\, f''(\xi)\,|$$

Чтобы оценить вторую производную, запишем формулу для первой производной

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

и получим формулу второй производной

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Так как при $x \in [0;\ 1]$ модуль второй производной убывает, максимум модуля каждый раз достигается на левой границе отрезка $[x_i;\ x_{i+1}]$:

$$\max_{\xi \in [x_i,\, x_{i+1}]} |\, f''(\xi)\,| = \frac{(1-x_i^2)}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_i^2}$$

Таким образом, для погрешности линейной интерполяции на отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ **получена оценка**

$$r_1\ [x_i, x_{i+1}] \le \frac{1}{2} \cdot 0.25 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(1-x_i^2)}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_i^2}$$

Можно предложить более грубую оценку, верную для каждого из отрезков:

$$r_1\ [x_i, x_{i+1}] \le 0.125 \cdot 10^{-4} \cdot (1 - 0.25 \cdot 10^{-2}) \cdot (0.3984 + 0.5 \cdot 10^{-4})$$

или еще более грубый вариант, также верный для любого из отрезков:

$$r_1\ [x_i, x_{i+1}] \le 0.5 \cdot 10^{-5}\ .$$

Шаг 3

Оценим $В\Pi_1\ [x_i, x_{i+1}]$ – **вычислительную погрешность интерполяции** функции $f(x)$ на отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ полиномом, построенным по узлам интерполяции $x_i;\ x_{i+1}$.

По Утверждению 7

$В\Pi_1\ [x_i, x_{i+1}] \le \delta$, по условию задачи $\delta = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Шаг 4

Рассмотрим $О\Pi_1[x_i, x_{i+1}]$ – **общую погрешность интерполяции** функции $f(x)$ на отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ полиномом, построенным по узлам интерполяции $x_i;\ x_{i+1}$ отрезка $[x_i;\ x_{i+1}]$.

По Утверждению 7

$$ОП_1\,[x_i, x_{i+1}] \le \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8} \cdot \max_{\xi \in [x_i,\, x_{i+1}]} \left| f''(\xi) \right| + \delta$$

откуда следует

$$ОП_1[x_i, x_{i+1}] \le 0.5 \cdot 10^{-5} + 0.5 \cdot 10^{-4},$$

$$ОП_1[x_i, x_{i+1}] \le 0.55 \cdot 10^{-4}$$

Ответ

При условии, что на каждом участке равномерной сетки отрезка $[0.05;\ 0.09]$ применяется «свой» линейный интерполяционный полином, общая погрешность линейной интерполяции на отрезке $[0.05;\ 0.09]$ не превышает $0.55 \cdot 10^{-4}$.

В структуре доминирует вычислительная погрешность.

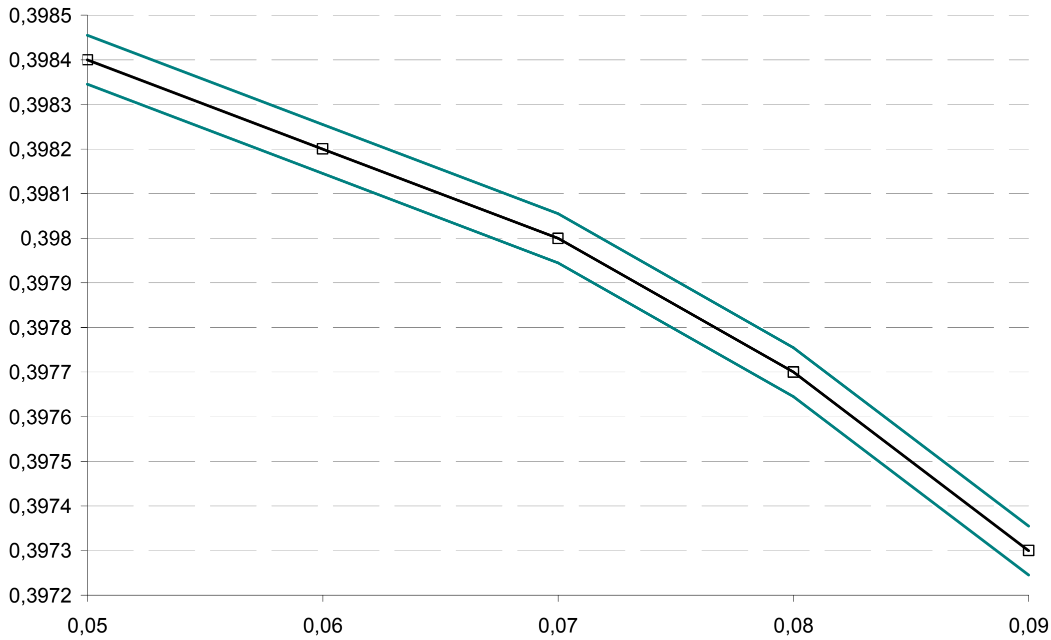


Рисунок 5

На рисунке 5 маркером показаны табличные данные $(x_i, \tilde{f}_i), i = 0,\ldots 4$, а также функция, применяемая для вычисления значений $f(x)$ (черный цвет).

Такая функция представляет собой непрерывный **линейный сплайн**, составленный из четырех интерполяционных полиномов 1-й степени. «Неиспользованные остатки» полиномов можно видеть на рисунке 4. Выше и ниже линейного сплайна на основе оценок

$$ОП_1[x_i, x_{i+1}] \le 0.55 \cdot 10^{-4}, i = 0,\ldots 4$$

для каждого x отмечены верхняя и нижняя оценка возможных значений функции $f(x)$. Эти отметки образуют «трубку», внутри которой оказался сплайн.

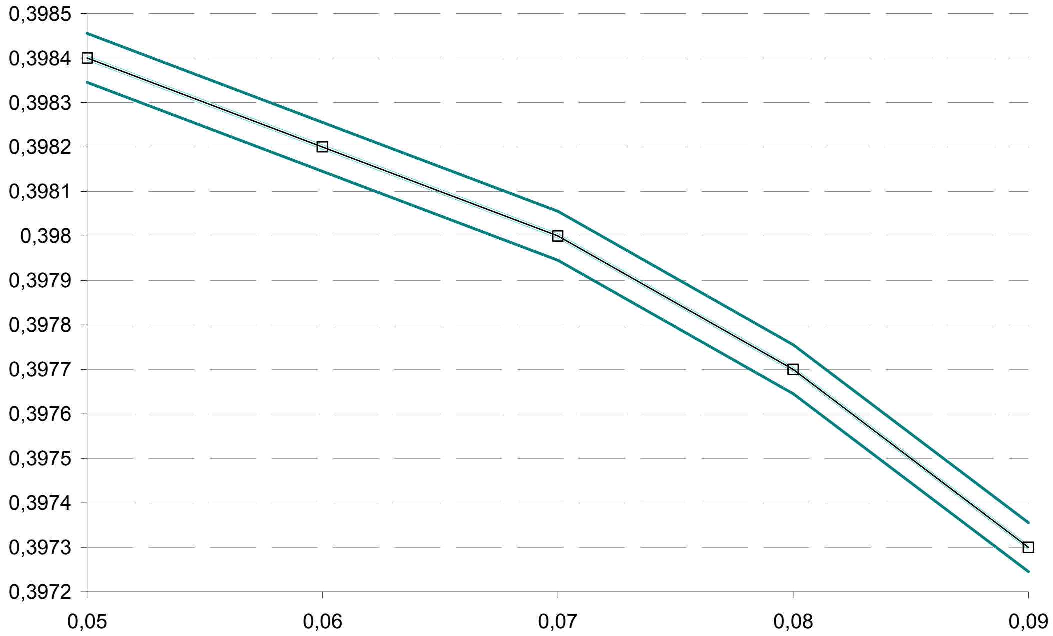


Рисунок 6

На рисунке 6 в дополнение к рисунку 5 показана структура общей погрешности, а именно, «вклад» погрешности линейной интерполяции в оценку общей погрешности (для каждого значения x). Этот «вклад» образует достаточно узкую «зеленую трубку» вокруг черного графика линейного сплайна

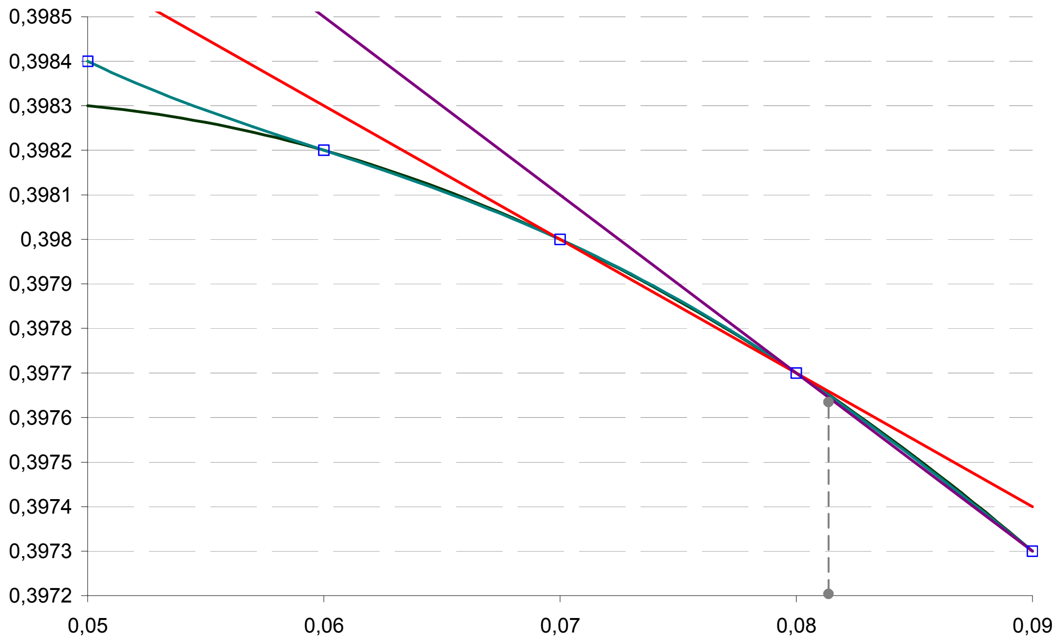


Рисунок 7

На рисунке 7 собраны вместе четыре интерполяционных полинома, предложенных ранее (в Примере 2) для вычисления $f(0.082)$, см. рисунок 2.

Очевидно, что использование $\widetilde{P}_1(x)$, $\widetilde{P}_2(x)$ или $\widetilde{P}_4(x)$ даст примерно одинаковые результаты. С учетом погрешности данных и, как следствие, оценок, полученных в Примере 9, повышение степени полинома в данном случае не рекомендуется: оно усложнит расчет $f(0.082)$, но не повысит точность.