ЛЕКЦИЯ 10

Метод распространяющихся волн. Задачи для ограниченной струны.

Для ограниченного отрезка $(0, l)$ ставится следующая задача. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l$$

и граничным условиям

$$(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u)(0, t) = \mu_1(t),\ t \geq 0,$$

$$(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u)(l, t) = \mu_2(t),\ t \geq 0,$$

где α_i, β_i $(i = 1, 2)$ – неотрицательные постоянные, α_1 и β_1, α_2 и β_2 не равны нулю одновременно. Предположим, выполнены условия согласования начальных и граничных данных

$$\alpha_1 \varphi'(0) - \beta_1 \varphi(0) = \mu_1(0),\ \alpha_2 \varphi'(l) + \beta_2 \varphi(l) = \mu_2(0).$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Подставляя эту функцию в начальные условия, находим, что при $0 \leq z \leq l$

$$f(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a}\int_0^z \psi(\xi) d\xi,\ g(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a}\int_0^z \psi(\xi) d\xi.$$

Таким образом, в области $x - at \geq 0$, $x + at \leq l$ решение задачи находится по формуле Д'Аламбера.

Чтобы найти решение во всей области $0 < x < l$, $t > 0$, требуется с помощью первого граничного условия определить функцию f для отрицательных значений аргумента, а с помощью второго граничного условия определить функцую g для значений аргумента, больших l:

$$\alpha_1 f'(z) - \beta_1 f(z) = \mu_1(-\frac{z}{a}) - \alpha_1 g'(-z) + \beta_1 g(-z),\ z < 0,$$

$$\alpha_2 g'(z) + \beta_2 g(z) = \mu_2(\frac{z - l}{a}) - \alpha_2 f'(2l - z) - \beta_2 f(2l - z),\ z > l.$$

Рассмотрим более подробно начально-краевые задачи для однородного волнового уравнения с граничными условиями первого и второго рода, то есть

$$u(0, t) = \mu_1(t) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \mu_2(t).$$

Рещение начально-краевой задачи может быть найдено как сумма решения задачи с однородными граничными условиями и решения задачи с нулевыми начальными условиями.

В случае однородных граничных условий будем искать решение методом продолжения, предполагая возможность следующего представления:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi, \tag{1}$$

где Φ и Ψ - функции, подлежащие определению.

Начальные условия

$$u(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) = \psi(x),\ 0 \le x \le l,$$

определяют значения Φ и Ψ в интервале $(0,l)$.

Пусть граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0.$$

Подставляя функцию (1) в условия, получаем

$$\frac{\Phi(at)+\Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi = 0,\ t \ge 0,$$

$$\frac{\Phi(l+at)+\Phi(l-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l+at}\Psi(\xi)d\xi = 0,\ t \ge 0.$$

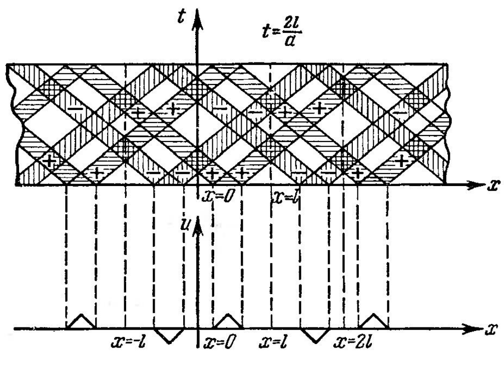
Эти равенства будут выполнены, если наложить на функции Φ и Ψ требования нечетности относительно точек $x=0$ и $x=l$:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x),\ \Phi(x) = -\Phi(2l-x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(-x),\ \Psi(x) = -\Psi(2l-x).$$

Сопоставляя эти равенства, получаем

$$\Phi(z) = \Phi(z+2l)\ (z=-x),$$

и аналогично для Ψ, то есть Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$.



Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжение Φ и Ψ на всей прямой. Подставляя их в формулу (1), получаем решение задачи.

На рисунке совмещены фазовая плоскость и плоскость (x,u), в которой дано начальное отклонение и его продолжение. На фазовой плоскости штриховкой выделены полосы, внутри которых отклонение отлично от нуля. Знаки плюс и минус, стоящие в этих полосах, указывают на знак (фазу) отклонения (в виде равнобедренного треугольника). Пользуясь рисунком, легко представить себе профиль отклонения в любой момент t. Так, в момент $t = 2l/a$ получим отклонения, совпадающие с начальными. Таким образом, функция u будет периодической функцией t с периодом $T = 2l/a$.

Рассмотрим теперь граничные условия вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0.$$

Тогда функции Φ и Ψ должны удовлетворять условиям

$$\frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{\Psi(at) - \Psi(-at)}{2a} = 0,\ t \geq 0,$$

$$\frac{\Phi(l+at) + \Phi(l-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l+at} \Psi(\xi)d\xi = 0,\ t \geq 0.$$

Второе из равенств, как и в предыдущем случае, будет выполнено, если функции Φ и Ψ нечетные относительно точки $x = l$:

$$\Phi(x) = -\Phi(2l - x),\ \Psi(x) = -\Psi(2l - x). \tag{2}$$

Первое из условий будет выполнено, если функции Φ и Ψ четные относительно точки $x = 0$:

$$\Phi(x) = \Phi(-x),\ \Psi(x) = -\Psi(-x). \tag{3}$$

Функции, удовлетворяющие условиям (2) и (3) при всех x, периодичны с периодом $4l$:

$$\Phi(4l + x) = \Phi(l + (3l + x)) = -\Phi(l - (3l + x)) = -\Phi(-2l - x) =$$
$$= -\Phi(2l + x) = -\Phi(l + (l + x)) = \Phi(l - (l + x)) = \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Таким образом, решение задачи определяется по формуле (1), в которорой функции Φ и Ψ получаются из функций φ и ψ четным продолжением относительно точки $x = 0$ на отрезок $[-l, 0]$, затем нечетным продолжением относительно точки $x = l$ на отрезок $[l, 3l]$, а затем - периодическим продолжением с периодом $4l$ на всю ось.

Функция u будет периодической функцией t с периодом $T = 4l/a$:

$$u(x, t + \frac{4l}{a}) = \frac{\Phi(x + at + 4l) + \Phi(x - at - 4l)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at-4l}^{x+at+4l} \Psi(\xi)d\xi =$$

$$\frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x-at-4l}^{x-at} \Psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x+at+4l} \Psi(\xi)d\xi.$$

Так как интеграл от периодической функции по любому промежутку с длиной, кратной периоду, имеет одно и то же значение,

$$\int_{x-at-4l}^{x-at} \Psi(\xi)d\xi + \int_{x+at}^{x+at+4l} \Psi(\xi)d\xi = 2\int_{-l}^{3l} \Psi(\xi)d\xi = 0.$$

Таким образом,

$$u(x, t + \frac{4l}{a}) = u(x,t).$$

Предположим, на обоих концах отрезка $[0, t]$ заданы граничные условия второго типа:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0.$$

В этом случае функции Φ и Ψ должны быть четными относительно точек $x = 0$ и $x = l$, то есть

$$\Phi(x) = \Phi(-x),\ \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$
$$\Psi(x) = \Psi(-x),\ \Psi(x) = -\Psi(2l - x),$$

и, соответсвенно, периодическими с периодом $2l$.

Решение, опеределнное формулой (1), вообще говоря не является функцией, периодической по переменной t.

В качестве примера решения задачи с неоднородными граничными условиями рассмотрим следующую задачу о распространении граничного режима.

Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l,$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = 0,\ t > 0.$$

При $t < l/a$ решением служит функция

$$u(x,t) = \bar{\mu}(t - \frac{x}{a}),$$

где

$$\bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t),\ t > 0, \\ 0,\ t < 0. \end{cases}$$

Однако эта функция не удовлетворяет граничному условию

$$u(l,t) = 0 \text{ при } t > l/a.$$

Рассмотрим отраженную волну, идущую налево и имеющую при $x = l$ отклонение, равное $\bar{\mu}(t - l/a)$. Её аналитическое выражение даётся формулой

$$\bar{\mu}(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}) = \bar{\mu}(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}).$$

Легко убедиться, что разность двух волн

$$\bar{\mu}(t - \frac{x}{a}) - \bar{\mu}(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a})$$

есть решение уравнения при $t < 2l/a$.

Продолжая этот процесс далее, получим решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}), \qquad (4)$$

содержащего (для каждого фиксированного t) только конечное число отличных от нуля членов, ибо с каждым новым отражением аргумент уменьшается на $2l/a$, а функция $\bar{\mu}(t) = 0$ для $t < 0$.

Выполнение граничных условий проверяется непосредственно. В самом деле, положим $x = 0$ и выделим из первой суммы отдельно первое слагаемое при $n = 0$, равное $\mu(t)$. Остальные слагаемы первой и второй сумм, соответствующие одинаковым значениям n, взаимно уничтожаются, это показывает, что $u(0,t) = \mu(t)$. Заменяя n на $n-1$ и изменяя в связи с этим пределы суммирования, преобразуем первую сумму к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a}).$$

Полагая теперь $x = l$, непосредственно убеждаемся в том, что слагаемые первой и второй сумм взаимно уничтожаются.

Начальные условия также проверяются непосредственно, так как аргументы все функций отрицательны при $t = 0$ и выражение (4) при $t = 0$ равно нулю.

Формула (4) имеет простой физический смысл. Функция

$$\bar{\mu}(t - \frac{x}{a})$$

представляет собой волну, возбуждаемую граничным режимом при $x = 0$, независимо от влияния конца $x = l$, как если бы струна была бесконечна ($x > 0$). Следующие слагаемые представляют собой последовательные отражения от закрепленного края $x = l$ (вторая сумма) и от края $= 0$ (первая сумма).

Аналогично функция

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a}) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a})$$

даёт решение однородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = \mu(t).$$

Упражнение

Найдите решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < l,$$

$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,\ t \ge 0.$$

Список литературы

[1] Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Метод характеристик для одномерного волнового уравнения: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. - 72 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.