Лабораторная работа № 4
Специальные функции

Цели и задачи:

Метод разделения переменных, который применяется при решении задач математической физики, приводит к задаче Штурма-Лиувилля на собственные значения для однородного линейного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad a < x < b, \tag{1}$$

где $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$.

Если $a = 0$, $b = l$, $q = 0$, $k = \rho = const$, то имеем уравнение для тригонометрических функций, которые рассматривались в лабораторной работе № 1. При $k(x) = x$, $q(x) = n^2/x$, $\rho(x) = x$, $a = 0$, $b = r_0$ получим **уравнение Бесселя**. При $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) \equiv 0$, $\rho \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$ получаем **уравнение Лежандра**, а при $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = n^2/(1 - x^2)$, $\rho \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$ – уравнение для **присоединенных функций Лежандра**. Характерной особенностью указанных выше уравнений является то, что коэффициент $k(x)$ обращается в нуль по крайней мере на одном из концов отрезка $[a, b]$. Краевые задачи для этих уравнений определяют весьма важные классы специальных функций: цилиндрические (или функции Бесселя) и сферические (или многочлены Лежандра).

Рассмотрим общие свойства уравнений Бесселя и Лежандра. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = 0, \quad a < x < b, k(x) > 0, q(x) > 0 \tag{2}$$

в котором $k(a) = 0$. Будем предполагать, что $k(x)$ в окрестности $x = a$ имеет вид $k(x) = (x - a)\phi(x)$, где $\phi(x)$ – непрерывная функция и $\phi(a) \neq 0$. Если в этом уравнении $q(x)$ заменить на $q(x) - \lambda\rho(x)$, то все изложенное будет справедливо для уравнения (1).

Свойство 0.1 (5) *Если в уравнении (2) $k(x) = (x - a)\phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$ и одно решение $y_1(x)$ остается конечным при $x = a$, то всякое другое решение $y_2(x)$ уравнения (2), линейно независимое от $y_1(x)$, обращается в бесконечность при $x = a$.*

Свойство 0.2 (5) *Если в уравнении (2) $k(x) = (x - a)\phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$, а коэффициент $q(x)$ либо ограничен, либо $q(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то для решения $y_1(x)$, ограниченного при $x = a$, справедливо $\lim_{x\to a} k(x)y_1'(x) = 0$.*

Свойство 0.3 (5) *Если $y_1(x)$, ограниченное при $x = a$ решение уравнения (2), а $q(x)$ непрерывная функция, то $y_1(a) \neq 0$ и $y_1'(a) = \dfrac{q(a)y_1(a)}{\phi(a)}$ Если $\phi_1(x) = \dfrac{\phi(x)}{x - a}$, $q_1(x)$ непрерывная функция и $q_1(a) > 0$, то $y_1(a) = 0$.*

Свойства 1–3 позволяют сделать следующие заключения о постановке краевых задач для уравнения (1), в котором на одном или обоих концах интервала функция $k(x)$ обращается в нуль.

Если $k(a) = 0$, $k(b) \neq 0$, то при $x = a$ следует потребовать выполнение ограниченности собственной функции. При этом не требуется, чтобы она принимала при $x = a$ заданное значение. В этом случае краевая задача формулируется следующим образом: найти собственные значения и собственной функции уравнения (1), при граничном условии 1–3 рода при $x = b$ и условии ограниченности при $x = a$.

Если $k(a) = 0$, $k(b) = 0$, то на обоих концах интервала в краевой задаче ставится условие ограниченности.

Очевидно, что уравнения Бесселя и Лежандра относятся соответственно к первому и второму типу описанных выше задач.

0.1 Задания:

1.

2. Функции Бесселя

   (a) Найти фундаментальную систему решений уравнения Бесселя ν-го порядка

   $$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0,$$

   где ν – произвольное действительное или комплексное число, действительную часть которого можно считать неотрицательной.

   (b) Получить рекуррентные формулы функций Бесселя ν-го порядка.

   (c) Вывести асимптотические формулы для функций Бесселя 1 и 2 рода.

   (d) Построить с помощью MathCad, MathLab и т.д. графики функций Бесселя 1 и 2 рода для $\nu = 0, 1$.

   (e) Найти собственные числа и собственные функции стандартных краевых задач для уравнения

   $$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0,$$

   и доказать 5 основных свойств собственных чисел и собственных функций (см. лабораторную работу № 1). Вычислить квадрат нормы собственных функций.

3. Многочлены Лежандра

   (a) Найти собственные числа и собственные функции уравнения Лежандра и присоединенного уравнения Лежандра и доказать, что для них выполнены основные свойства собственных функций и собственных чисел. Вычислить квадрат нормы собственных функций.

   (b) Производящая функция многочленов Лежандра.

   (c) Получить рекуррентные формулы для полиномов Лежандра.

   (d) Построить с помощью MathCad, MathLab и т.д. графики многочленов Лежандра и присоединенных многочленов Лежандра 1-5 степени.

4. Написать формальное разложение произвольной функции в ряд по функциям Бесселя и по многочленам Лежандра. Рассмотреть вопрос о сходимости этих рядов.

5. Поставить и решить следующие физические задачи, решения которых представимы в виде рядов Фурье по функциям Бесселя или многочленам Лежандра.

   (a) **Свободные колебания тяжелой нити**
   Рассмотрим тяжелую однородную гибкую нить длины L. Нить закреплена на верхнем конце $x = L$ и совершает колебания под действием силы тяжести.

   (b) **Малые колебания вращающейся струны**
   Невесомая струна при вращении вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью находится в горизонтальной плоскости, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени $t = 0$ точкам струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости.

6. Вывести уравнение колебаний мембраны. Решить задачу о колебаниях мембраны с индивидуальными условиями ([3], Гл. 6, § 2).

Необходимое условие допуска к лабораторной работе:

Письменное выполнение заданий 1 – 3.

Необходимое условие выполнения лабораторной работы:

Выполнение на компьютере численного эксперимента, заключающегося в следующем: даны некоторые функции, которые, вообще говоря, не представимы в виде линейной комбинации конечного числа базисных функции (под базисными функциями здесь имеются в виду не только функции Бесселя и многочлены Лежандра, но также тригонометрические функции и другие специальные функции). При фиксированном n представить функцию f в виде частичной суммы ряда Фурье по разным ортонормированным системам и оценить квадратичную погрешность. Обосновать полученные результаты.

Если лучший результат получается при использовании специальных функций, отличных от рассмотренных выше, то для его обоснования в отчете необходимо привести уравнение этих функций, краевую задачу, а также доказательства свойств собственных чисел и собственных функций.

Достаточные условия выполнения лабораторной работы:

1. Представление отчета, включающего теоретические задания 1–6, а также результаты численного эксперимента.

2. 2. Защита лабораторной работы по отчету и ответы на дополнительные вопросы, не выходящие за рамки данной темы.

Список литературы

[1] В.Я.Арсенин “Методы математической физики и специальные функции”

[2] И.Г.Арманович, В.И.Левин “Уравнения математической физики”

[3] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов “Сборник задач по математической физике”

[4] В.С.Владимиров “Уравнения математической физики”

[5] Ю.Ф.Кирьянов “Уравнения математической физики”

[6] Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов “Уравнения в частных производных математической физики”

[7] В.И.Левин, Ю.И.Гросберг “Дифференциальные уравнения математической физики”

[8] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский “Уравнения математической физики”