Домашнее задание ДЗ-5 по ТУ

1. Вернитесь к задаче об экстремальном регуляторе (см. ДЗ-3). Получите для него виды интегральных кривых для каждого из четырех квадрантов, постройте требуемое в задаче точечное отображение, исследуйте с его помощью структуру разбиения фазового пространства на траектории. Поймите характер сходимости к экстремальному значению. Подготовьтесь к краткому обсуждению результатов этого исследования на доске.

2. Выучите типовые соответствия оригиналов и изображений по Лапласу, соответствие операций.

3. Найдите оригиналы, соответствующие указанным изображениям по Лапласу. Перед этим рекомендуется разобрать приведенные ниже (в конце) примеры решения двух типовых задач:

1\. $\frac{1}{p(p^2+1)}$ 2. $\frac{p}{p^2+4p+5}$ 3. $\frac{1}{p^3+2p^2+p}$

4\. $\frac{3p^2-2p+1}{p^3+5p^2+4p}$ 5*. $\frac{p^2+2}{p^4+p^2+1}$ 6. $\frac{p+1}{(p^2+4)(p+2)^2}$

7\. $\frac{e^{-5p}}{p^2+9}$ 8. $\frac{e^{-p}}{p^2+2p+3}$

Примеры решения нескольких задач на вычисление оригиналов по их изображениям по Лапласу

1\. Изображение имеет вид $\frac{1}{p^2(p+1)}$. Корни знаменателя — $p_1=0$ кратности $r_1=2$ и $p_2=-1$ кратности $r_2=1$

Записываем вид разложения в сумму простейших дробей $\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+1}$ (1)

Для нахождения A и B умножим равенство (1) слева и справа на p^2. Получим:

$$\frac{1}{p+1} = A\cdot p + B + \frac{Cp^2}{p+1} \quad (2)$$

Полагаем в (2) $p=0 \Rightarrow \left.\frac{1}{p+1}\right|_{p=0} = B \Rightarrow B=1$

Дифференцируем (2) по p однократно и полагаем $p=0$, получаем $\left.\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+1}\right)\right|_{p=0} = A + 0 + \left.\frac{d}{dp}\left(\frac{Cp^2}{p+1}\right)\right|_{p=0}$ (3)

Поскольку $\frac{d}{dp}\left(\frac{Cp^2}{p+1}\right)$ заведомо будет $=0$ при $p=0$, дифференцирование выполнять не нужно!

Итак, из (3) имеем $\left.-\frac{1}{(p+1)^2}\right|_{p=0} = A \Rightarrow A=-1$

Для определения C умножим (1) на $(p+1)$ и положим $p=-1$. Получим:

$$\left.\frac{1}{p^2}\right|_{p=-1} = \left.\left[\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}\right)(p+1)+C\right]\right|_{p=-1}$$

$\Rightarrow 1=C$

Таким образом из (1) имеем

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1} \risingdotseq (-1+t+e^{-t})\cdot 1(t)$$

Множитель $1(t)$ обычно не пишут, а лишь подразумевают, поскольку все функции предполагаются $=0$ при $t<0$.

2\. Рассмотрим более кратко второй пример. Изображение $X^*(p)=\frac{p^3+3p+1}{(p^2-2p+1)(p^2+4p+8)}$. Корни знаменателя

$p_1=1$, $r_1=2$; $p_{2,3}=-2\pm i2$ $r_{2,3}=1$

Разложение в сумму простейших дробей удобно записать в виде:

$$X^*(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C\cdot(p+2)+D}{(p+2)^2+2^2} \quad (4)$$

Аналогично примеру №1 находим B и A

$$B = \left.\frac{p^3+3p+1}{p^2+4p+8}\right|_{p=1} = \frac{5}{13}$$

$$A = \left.\frac{d}{dp}\left(\frac{p^3+3p+1}{p^2+4p+8}\right)\right|_{p=1} = \left.\frac{(3p^2+3)(p^2+4p+8)-(p^3+3p+1)(2p+4)}{(p^2+4p+8)^2}\right|_{p=1} =$$

$$= \frac{6\cdot 13 - 5\cdot 6}{13^2} = \frac{48}{169}$$

Коэффициенты C и D можно определить различным образом, например, аналогично определению **B**. Умножим (4) слева и справа на $(p+2)^2+2^2$ и после этого подставим $p=p_2=-2+i2$.

Получим:

$$\left.\frac{p^3+3p+1}{(p-1)^2}\right|_{p=-2+i2} = 0 + \left[C(p+2)+D\right]\Big|_{p=-2+i2}$$

$$ \overset{\parallel}{5-12i}$$

Отсюда

$$(-2+i2)^3 - 5 + i6 = [i\cdot 2C + D](-3+i2)^2$$

$$-8 + 3\cdot 8\cdot i + 3\cdot 16 - i\cdot 8 - 5 + i6 = 10iC + 5D + 24C - 12\cdot i\cdot D$$

$$35 + i\cdot 22 = (24C + 5D) + i(10C - 12D)$$

$$\begin{cases} 24C + 5D = 35 \\ 10C - 12D = 22 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{265}{169}, \; D = -\frac{89}{169}$$

В итоге имеем разложение:

$$X^*(p) = \frac{48}{169}\frac{1}{p-1} + \frac{5}{13}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{\frac{265}{169}(p+2) - \frac{89}{169}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}{(p+2)^2+2^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq e^t\left(\frac{48}{169} + \frac{5}{13}t\right) + e^{-2t}\left(\frac{265}{169}\cos 2t - \frac{1}{2}\cdot\frac{89}{169}\cdot\sin 2t\right)$$