Задание 10

Вариант 1 явная схема

$$\begin{cases} u'_t = 3 \cdot u''_{xx} + \frac{1}{t+1}\cos\pi x, \ x \in [0,1], \ t \in [0,10] \\ u(x,0) = 1 - x^2 \\ u(0,t) = \cos t \\ u(1,t) = \sin 4t \end{cases}$$

1) $u(0,t) = \cos t$, $u(1,t) = \sin 4t$ $\Big\}$ $t \in [0,10]$; условия 1-го рода, граничны температура на концах стержня в любой момент времени.

$u(x,0) = 1 - x^2$ – начальное условие, температура в точке x в момент времени $t = 0$

$g(x,t) = \frac{1}{t+1}\cos\pi x$ – первая краевая задача

$\gamma^2 = 3$ – коэф. теплопроводности

2) (n, m)

$h = \frac{1}{n} \quad \tau = \frac{10}{m}$

$$\begin{cases} \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{\tau} - 3\frac{v_{i+1j} - 2v_{ij} + v_{i-1j}}{h^2} = \frac{1}{t+1}\cos\pi x, \quad i = \overline{1,n-1} \quad j = \overline{1,m} \\ v_{i0} = 1 - x^2 \quad i = \overline{0,n} \\ v_{0j} = \cos t \quad j = \overline{1,m} \\ v_{nj} = \sin 4t \quad j = \overline{1,m} \end{cases}$$

3) $\exists$ мы знаем значения на j, найдём значения на $j+1$

$h = \frac{1}{n} \quad \tau = \frac{10}{m}$

$$\begin{cases} v_{ij+1} = \left(3\frac{v_{i+1j} - 2v_{ij} + v_{i-1j}}{h^2} + \frac{1}{t+1}\cos\pi x\right)\tau + v_{ij} \\ v_{0j+1} = \cos(t_{j+1}) \\ v_{nj+1} = \sin(4t_{j+1}) \end{cases}$$

5) Условие сходимости

$$\tau < \frac{h^2(t+1)}{2\cos\pi x}$$

Задача 12

Вариант 3

$$\begin{cases} u'_t = 9\cdot u''_{xx} + t(x+4) \quad x\in[0;0,5] \quad t\in[0,100] \\ u(x,0) = x\cdot(1-x) \\ u(0,t)=0 \\ u(0,5;t)=0,25 \end{cases}$$

Неявная схема с весом σ $n=4$, $m=2000$

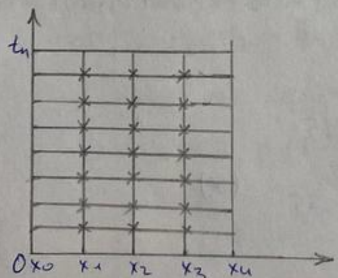
$$\begin{cases} (u'_t)_{ij} \approx [u_t]_{ij} = \dfrac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\tau} \\ (u''_{xx})_{ij} \approx (1-\sigma)[u_{x\bar{x}}]_{ij} + \sigma[u_{x\bar{x}}]_{ij+1} \\ \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [v_t]_{ij} = a^2\sigma[v_{x\bar{x}}]_{ij+1} + a^2(1-\sigma)[v_{x\bar{x}}]_{ij} + g(x_i, t_j+\frac{1}{2}) \quad i=\overline{1,n-1} \\ v_{i0} = \varphi(x_i) \quad i=\overline{0,n} \\ v_{0j} = \mu_1(t_j) \quad j=\overline{0,m} \\ v_{nj} = \mu_2(t_j) \quad j=\overline{0,m} \end{cases}$$

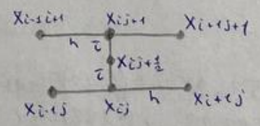
Запишем для нашей задачи

$$\begin{cases} [v_t]_{ij} = \frac{9}{2}[v_{x\bar{x}}]_{ij+1} + \frac{9}{2}[v_{x\bar{x}}]_{ij} + (t_j+\frac{1}{2})(x_i+4) \\ v_{i0} = x_i(1-x_i) \quad i=\overline{0,n} \\ v_{0j} = 0 \quad j=\overline{0,m} \\ v_{nj} = \frac{1}{4} \quad j=\overline{0,m} \end{cases}$$

$h = \frac{0,5}{4} = \frac{1}{8}$ $\qquad \tau = \frac{100}{2000} = 0,05$



Шаблон схемы



Ур-е для поиска $j+1$

$$v_{ij+1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}a^2\sigma^2\right)+v_{i-1j+1}\left(-\frac{a^2}{h^2}\sigma\right)+v_{i+1j+1}\left(-\frac{a^2}{h^2}\sigma\right)=$$

$$=a^2\frac{v_{i-1j}-2v_{ij}+v_{i+1j}}{h^2}(1-\sigma)+v_{ij}\left(\frac{1}{\tau}\right)+g\left(x_i,t_j+\frac{1}{2}\right)\quad i=\overline{1,n-1}$$

$$\begin{cases}v_{0j+1}=\mu_1(t_j+1)\\ v_{nj+1}=\mu_2(t_j+1)\end{cases}$$

Найдём 0 слой

$v_{i0}=x_i(1-x_i)\quad i=\overline{0,n}$

$n=4\quad h=\frac{1}{8}$

$x_0=0\quad x_1=\frac{1}{8}\quad x_2=\frac{1}{4}\quad x_3=\frac{3}{8}\quad x_4=0{,}5$

$v_{00}=0(1-0)=0$

$v_{10}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{64}$

$v_{20}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$

$v_{30}=\frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{15}{64}$

$v_{40}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Знач. сеточной функции v на 0 слое: $\left(0,\frac{7}{64},\frac{3}{16},\frac{15}{64},\frac{1}{4}\right)$

Найдём 1 слой

$$\begin{cases}v_{i-1,1}\left(-9\cdot8^2\cdot\frac{1}{2}\right)+v_{i1}\left(\frac{1}{0{,}05}+2\cdot8^2\cdot9\cdot\frac{1}{2}\right)+v_{i+11}\left(-9\cdot8\cdot\frac{1}{2}\right)=\\ =9\cdot8^2\left[v_{i-1,0}-2v_{i0}+v_{i+10}\right]\cdot\frac{1}{2}+v_{i0}\left(\frac{1}{0{,}05}\right)+\left(t_0+\frac{1}{2}\right)(x_0+4)\quad i=\overline{1,n-1}\\ v_{01}=0\\ v_{n1}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-288)v_{i-1,1}+596v_i+(-288)v_{i+1,1}=288(v_{i-10}-2v_{i0}+v_{i+10})+20v_{i0}+0{,}1\\ v_{01}=0\\ v_{n1}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-288)v_{01}+596v_{11}+(-288)v_{21}=-6{,}7125\\ (-288)v_{11}+596v_{21}+(-288)v_{31}=-2{,}025\\ (-288)v_{21}+596v_{31}+(-288)v_{41}=-4{,}2125\\ v_{01}=0\quad v_{41}=\frac{1}{4}\end{cases}\quad(*)$$

Решим (*) методом прогонки, т.к. (*) удовлетвор. теореме о применении прогонки

$\varkappa_1 = 0 \quad \varkappa_2 = 0 \quad |\varkappa_1| \le 1 \quad |\varkappa_2| \le 1$

$A_i = -288 \ne 0 \qquad B_i = -288 \ne 0$

$|C_i| > |A_i| + |B_i| \qquad 596 > 576$

Прямой ход

$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i} \qquad \beta_{i+1} = \frac{\varphi_i + A_i \beta_i}{C_i - \alpha_i A_i} \qquad i = \overline{1, n-1}$

$v_{01} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \beta_1 = 0 \qquad (y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1)$

$\alpha_2 = \frac{-288}{-596-0} = \frac{144}{298} = \frac{72}{149} \qquad \alpha_4 = \frac{-288}{-596+288 \cdot 0{,}630428} = 0{,}694919$

$\alpha_3 = \frac{-288}{-596 - \frac{72}{149}288} = 0{,}630428$

$\beta_2 = \frac{-6{,}7125 + 288 \cdot 0}{-596 - 0} = 0{,}011262$

$\beta_3 = \frac{-2{,}025 + 288 \cdot 0{,}011262}{-596 + \frac{72}{149} \cdot 288} = -0{,}002667 \qquad \beta_4 = 0{,}0120178$

Обратный ход

$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + 1 + \beta_{i+1}$

$v_{41} = \frac{1}{4}$

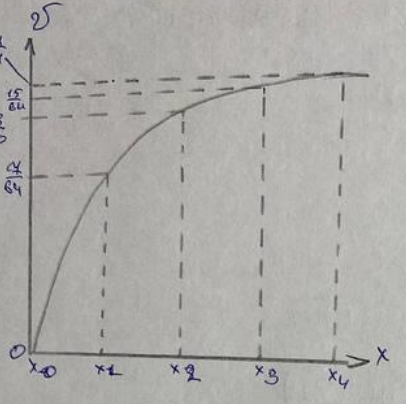
$v_{31} = \alpha_4 v_{41} + \beta_4 = 0{,}185746$

$v_{21} = \alpha_3 v_{31} + \beta_3 = 0{,}114432$

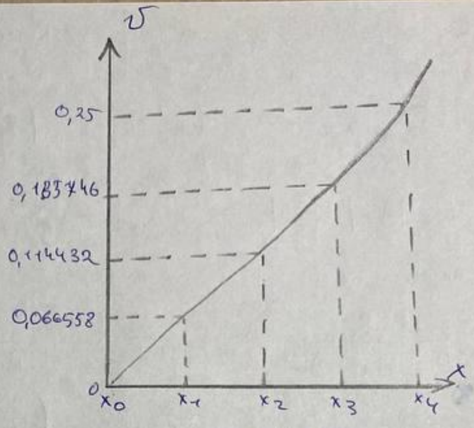
$v_{11} = \alpha_2 \cdot v_{21} + \beta_2 = 0{,}066558$

Знач. сет. функции на 1м слое

$(0{,}066558; 0{,}114432; 0{,}185746; 0{,}25)$



на 0 слое



на 1 слое