Модуль 11.1. Метод простой итерации

Выполнила: ……………….. гр.007,

Команда ……………

Постановка задачи: *СЛАУ*

$Ax = b$, $x \in R^n$, $b \in R^n$, $A\,(n \times n)$, $\det A \neq 0$ *(невырожденная матрица).*

$x^* \in R^n$. *точное решение*

Метод: метод простой итерации

Канонический вид

$$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau} + Ax^{(s)} = b$$

τ – *число (постоянный параметр метода)*

$x^{(0)} \in R^n$ – *начальное приближение*

Запись для расчетов

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} - \tau \cdot r^{(s)}$$

$r^{(s)} = Ax^{(s)} - b$ – *невязка СЛАУ на текущем шаге*

Теорема 1. При решении СЛАУ методом простой итерации

$\boxed{\| z^{(s)} \|_2 \le \| G(\tau) \|_2^{\,s} \| z^{(0)} \|_2}$ *выполняется всегда, т.е.* $\forall \tau$, $\forall z^{(0)}$

$\boxed{\| G(\tau) \|_2 < 1}$ *достаточное условие сходимости*

Здесь

$z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ – *погрешность метода на шаге* s, $\| z^{(s)} \|_2$ - *ее норма*

$z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – *погрешность на начальном приближении,* $\| z^{(0)} \|_2$ - *ее норма*

$G(\tau) = E - \tau A$ – *переходная матрица*

$\| G(\tau) \|_2$ – *ее норма* $\| G(\tau) \|_2^s$ – *ее норма в степени* s, *Доказательство*

$$\boxed{x^{(s+1)} = x^{(s)} + \tau \cdot (b - Ax^{(s)})}$$ *записан шаг метода*

$b = Ax^*$ *(потому что точное решение СЛАУ)*

$$x^{(s+1)} - x^* = x^{(s)} - x^* + \tau \cdot (Ax^* - Ax^{(s)})$$

(вычли точное решение слева и справа в первой формуле)

$$z^{(s+1)} = z^{(s)} - \tau \cdot Az^{(s)} = (E - \tau A)\, z^{(s)}$$

(записали предыдущую формулу через погрешность)

$$G(\tau) = E - \tau A$$

(ввели новое обозначение и назвали эту матрицу «переходной матрицей»)

$$z^{(s+1)} = G(\tau)\, z^{(s)}$$

(переходная матрица связывает погрешности соседних шагов)

$$z^{(s+1)} = G(\tau) z^{(s)} = (G(\tau))^2 z^{(s)} = \ldots = (G(\tau))^{s+1} z^{(0)}$$

(так связаны погрешность с начальной погрешностью)

$z^{(s)} = (G(\tau))^s z^{(0)}$ *(перешли к индексу из теоремы, выше другой индекс)*

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 = \left\| (G(\tau))^s z^{(0)} \right\|_2 \le \left\| (G(\tau))^s \right\|_2 \left\| z^{(0)} \right\|_2$$

(это оценка нормы погрешности через начальную погрешность, использовано свойство согласованности норм)

$$\left\| (G(\tau))^s \right\|_2 = \underbrace{\left\| G(\tau) \cdot G(\tau) \ldots G(\tau) \right\|_2}_{s\ \text{раз}} \le \underbrace{\left\| G(\tau) \right\|_2 \cdot \left\| G(\tau) \right\|_2 \ldots \cdot \left\| G(\tau) \right\|_2}_{s\ \text{раз}} = \left\| G(\tau) \right\|_2^s$$

(слева <u>матрица в степени,</u> затем ее норма; справа <u>норма матрицы</u>, затем степень нормы матрицы – по 4-й аксиоме нормы матрицы получили такую оценку)

$$\boxed{\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le} \left\| (G(\tau))^s \right\|_2 \left\| z^{(0)} \right\|_2 \boxed{\le \left\| G(\tau) \right\|_2^s \left\| z^{(0)} \right\|_2}$$

(оценка из теоремы доказана, она выполняется всегда, т.е. $\forall \tau,\ \forall z^{(0)}$ *)*

Из этой оценки получим достаточное условие сходимости:

Если $\boxed{\left\| G(\tau) \right\|_2 < 1}$, *то при* $s \to +\infty$ $\left\| G(\tau) \right\|_2^s \to 0$ *и поэтому* $\left\| z^{(s)} \right\|_2 \to 0$.

!!! Важно: так как в теореме доказывается сходимость, конспект нужно дополнить определением «сходящегося итерационного метода»

Вопросы-ответы по теме

Вопросы по целям/задачам

1. Зачем нужно условие $\det A \neq 0$?

Чтобы решение СЛАУ $\exists!$

2. Как в методе простой итерации взять начальное приближение?

Любое $x^{(0)} \in R^n$

3. Как в методе простой итерации выбрать параметр τ?

Любое число, для которого $\| E - \tau \cdot A \|_2 < 1$

4. Что такое переходная матрица?

Обозначают $G(\tau)$, *определяют как* $G(\tau) = E - \tau \cdot A$

5. Нужно было доказать сходимость метода. Почему Вы считаете, что сходимость доказана?

Итерационный метод называется сходящимся, если при любом выборе начального приближения решение, полученное с помощью метода, с увеличением числа шагов стремится к точному решению СЛАУ

Доказано:

если $\| G(\tau) \|_2 < 1$, *то для любого* $z^{(0)} \in R^n$ *при* $s \to +\infty$ $\left\| z^{(s)} \right\|_2 \to 0$

Так как $z^{(s)} = x^{(s)} - x^*$ *и* $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$

любой выбор $z^{(0)} \in R^n$ *означает любой выбор* $x^{(0)} \in R^n$

а результат $\left\| z^{(s)} \right\|_2 \to 0$ *означает* $\left\| x^{(s)} - x^* \right\|_2 \to 0$

Технические вопросы

1) Что такое норма вектора?

Это функционал, его обозначают $\| x \|$, *должны выполняться 3 аксиомы, см. Модуль 10*

2) Что значит «евклидова норма вектора»?

Это $\| x \|_2 = \sqrt{(x, x)}$, *3 аксиомы выполняются*

3) Что такое норма (квадратной) матрицы?

Это функционал, его обозначают $\| A \|$, *должны выполняться 4 аксиомы, см. Модуль 10*

4) Что такое свойство согласованности норм?

Это согласованность норм матрицы и вектора:

$\forall x \in R^n \; \| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$

5) Как в доказательстве используется свойство согласованности норм?

При переходе $\| (G(\tau))^s z^{(0)} \|_2 \le \| (G(\tau))^s \|_2 \| z^{(0)} \|_2$

6) Какая аксиома матричных норм используется в доказательстве?

Четвертая аксиома о том, что $\| AB \| \le \| A \| \cdot \| B \|$, *где* A, B *– матрицы*

7) Как она используется?

При переходе $\underbrace{\| G(\tau) \cdot G(\tau) ... G(\tau) \|_2}_{s \text{ раз}} \le \underbrace{\| G(\tau) \|_2 \cdot \| G(\tau) \|_2 \cdot ... \cdot \| G(\tau) \|_2}_{s \text{ раз}}$

8) Что такое «евклидова» норма матрицы?

Это норма матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора, обозначается $\| A \|_2$, *определяется как* $\| A \|_2 = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\| Ax \|_2}{\| x \|_2}$,

4 аксиомы выполняются

9) Как можно ее «подсчитать»?

Через спектральный радиус, вот так: $\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

Для симметричной матрицы проще: $\| A \|_2 = \rho(A)$

10) Как подсчитать «евклидову» норму переходной матрицы (она упомянута в теореме)?

Через спектральный радиус, вот так: $\| G(\tau) \|_2 = \sqrt{\rho([(G(\tau)]^T G(\tau))}$

Для симметричной матрицы проще: $\| G(\tau) \|_2 = \rho(G(\tau))$

11) Что такое спектральный радиус?

Расстояние от нуля (на комплексной плоскости) до наиболее удаленного от нуля собственного числа, определение такое: $\rho\,(A) = \max\limits_{i=1,n} | \lambda_i (A) |$

12) Как оценить спектральный радиус, если подсчет собственных чисел трудоемкий?

Все собственные числа лежат на комплексной плоскости в кругах

$$| z - a_{ii} | \le \sum_{\substack{j=1, \\ j \ne i}}^{n} | a_{ij} |, i = 1,...n$$

здесь a_{ij}, $i,\ j = 1,...n$ *– элементы матрицы*

Вопросы о применении теоремы и метода

1. В каких приложениях можно использовать теорему?

Для любых СЛАУ с невырожденной матрицей (симметричность и прочее не требуется) с целью:

1) подбора параметра метода: достаточное условие сходимости

$\| E - \tau \cdot A \|_2 < 1$, *уе;*

2) оценки погрешности метода на текущем шаге по начальной невязке

$$\left\| z^{(s)} \right\|_2 \le \| G(\tau) \|_2^{\,s} \left\| z^{(0)} \right\|_2 \le \left\| E - \tau \cdot A \right\|_2^{s} \cdot \left\| A^{-1} \right\|_2 \cdot \left\| r^{(0)} \right\|_2$$

Чтобы применять такую оценку, нужно

вычислить $\left\| r^{(0)} \right\|_2$ *- начальную невязку*

вычислить или оценить множители $\left\| A^{-1} \right\|_2$ *и* $\left\| E - \tau \cdot A \right\|_2$ $\cdot$

знать номер текущего шага, то есть s.

3) оценки числа итераций, гарантирующих решение задачи с заданной погрешностью:

если нужно, чтобы $\left\| z^{(N)} \right\|_2 \le 0.0001$,

число шагов N найдем из условия

$$\left\| E - \tau \cdot A \right\|_2^{N} \cdot \left\| A^{-1} \right\|_2 \cdot \left\| r^{(0)} \right\|_2 \le 0.0001$$

Задача по теме (нужен только подход к решению)

Не решая характеристическое уравнение, не вычисляя собственные числа, предложить параметр метода простой итерации, проверить сходимость; записать оценку сходимости; записать оценку погрешности по невязке.

Внимание: матрица несимметрична.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$$