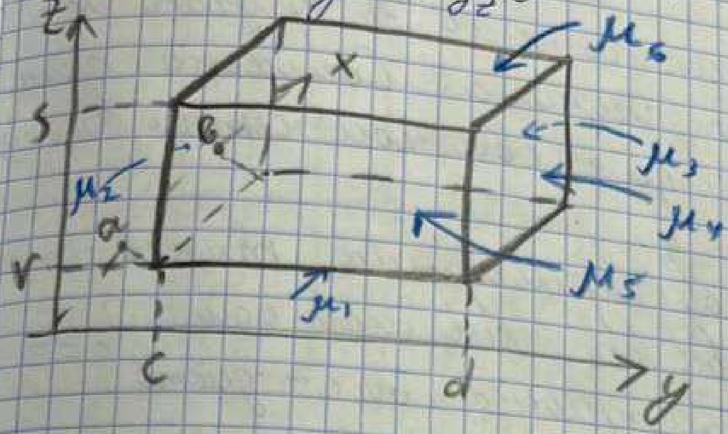
3 ЗАДАНИЕ

1 Этап ; 4 вариант

$\Delta u(x,y,z) = -f(x,y,z)$ при $(x,y,z)\in G$

$u(x,y,z) = \mu(x,y,z)$ при $(x,y,z)\in \partial G$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$



$x\in[a,b]$

$y\in[c,d]$

$z\in[v,s]$

Сетка размерности

$h = \frac{b-a}{n}$

$k = \frac{d-c}{m}$

$l = \frac{s-v}{p}$

РС:

$v_{ijg} = \mu(x_i, y_j, z_g)$

$[v_{x\bar{x}}]_{ijg} + [v_{y\bar{y}}]_{ijg} + [v_{z\bar{z}}]_{ijg} = -f_{ijg}$

$[v_{x\bar{x}}]_{ijg} = \frac{v_{i-1jg} - 2v_{ijg} + v_{i+1jg}}{h^2}$

$[v_{y\bar{y}}]_{ijg} = \frac{v_{ij-1g} - 2v_{ijg} + v_{ij+1g}}{k^2}$

$[v_{z\bar{z}}]_{ijg} = \frac{v_{ij(g-1)} - 2v_{ijg} + v_{ijg+1}}{l^2}$

$\omega_{hkl} = \left\{ ijg : \begin{array}{l} i=\overline{1,n-1} \\ j=\overline{1,m-1} \\ g=\overline{1,p-1} \end{array} \right\}$ – граничные

$AV = F, \quad V\in R^{(n-1)(m-1)(p-1)}$

$V = (V_{111}, V_{211}, \dots, V_{n-1\,m-1\,p-1})$

А – блочная трехдиагональная матрица, состоит из блоков 2-х типов: 1-й на диа гонали, а второй выше и ниже её

$A = A^T$ – симметричная матрица

Матрица A – знакоопределенная – из теор[емы]
Гершгорина и принципа максимума

Д-во:

с.ч. матрицы расположены в кругах Гершгорина или на их границе. Согласно принципу максимума для связной сетки (А...
$\Rightarrow \forall \leq 0$.

Расположение кругов Гершгорина такое, что
с.ч. лежат справа от мнимой оси }
т.к. матрица симметрична, то с.ч.-действ } $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ с.ч. не положительны

$\det A \neq 0 \Rightarrow \lambda_i(A) \neq 0$

Получается, что матрица отриц. определена

Т.к. $A = A^T$ умножим $AV = F \mid \cdot(-1) \Rightarrow -AV = -F$

СЛАУ с сим-й и полож-но опр. матрицей $(-A)$

Решение полученной СЛАУ совпадает с решением $AV = F$.

$$v_{ijg} = -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{h^2}v^{(s+1)}_{i-1jg} + \frac{1}{k^2}v^{(s+1)}_{ij-1g} + \frac{1}{l^2}v^{(s+1)}_{ijg-1} + \frac{1}{h^2}v^{(s)}_{i+1jg} + \frac{1}{k^2}v^{(s)}_{ij+1g} + \frac{1}{l^2}v^{(s)}_{ijg+1} + f_{ijg}\right)$$

$$A = 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}\right)$$

теореме
мула.

ах Герм
но прин
ли ($AV \geq 0$)

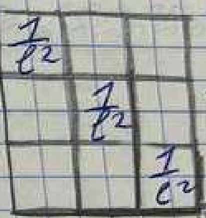
кое, что

ств } =>

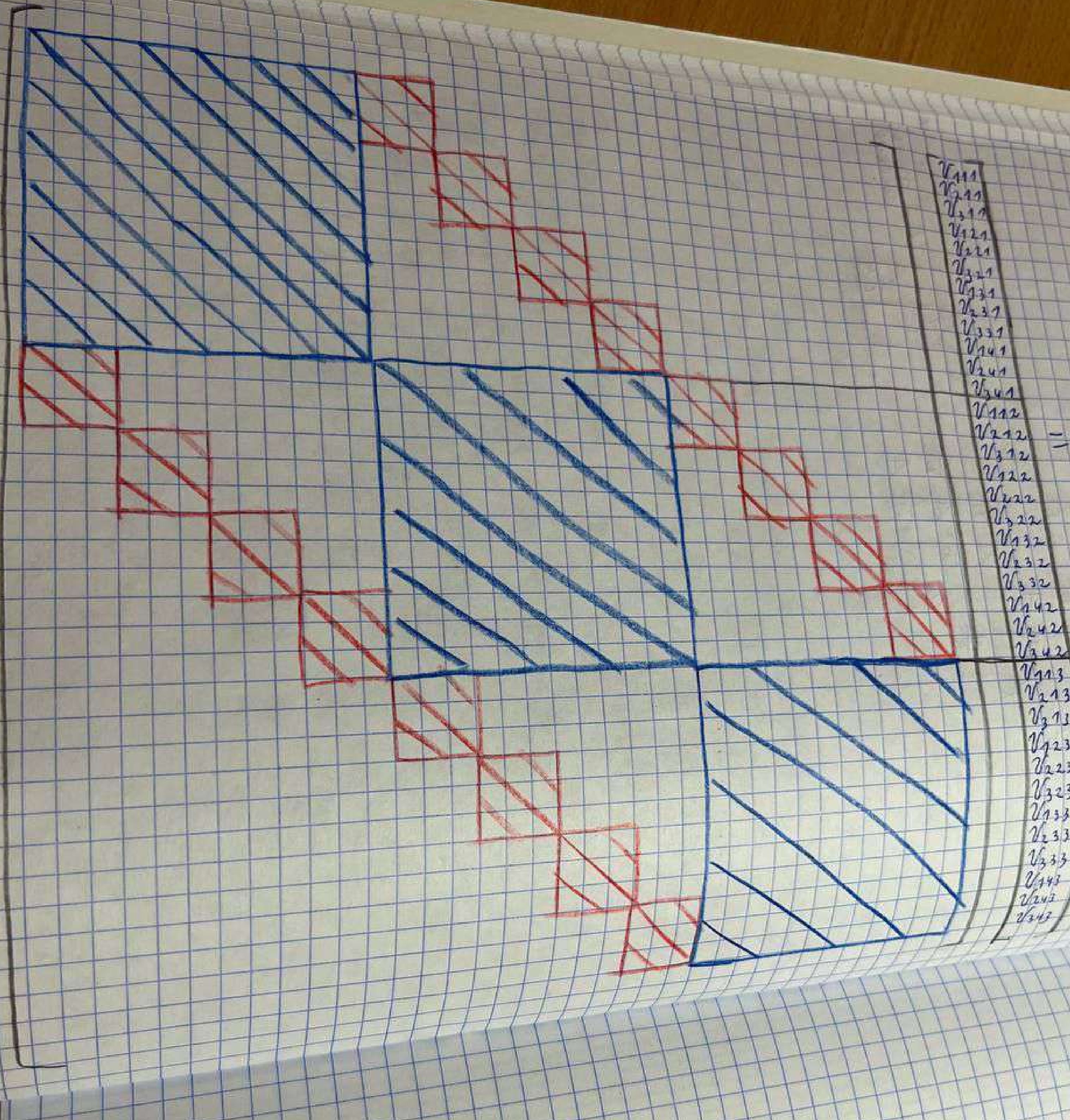
еделена
$= -F$
ели-й и
гр. матри
решени

$+ \frac{1}{h^2} {}_{i+1j} g^{(s)}$

— 1-й тип блоков



— 2-й тип блоков



v_{111}
v_{211}
v_{311}
v_{121}
v_{221}
v_{321}
v_{131}
v_{231}
v_{331}
v_{141}
v_{241}
v_{341}
v_{112}
v_{212}
v_{312}
v_{122}
v_{222}
v_{322}
v_{132}
v_{232}
v_{332}
v_{142}
v_{242}
v_{342}
v_{113}
v_{213}
v_{313}
v_{123}
v_{223}
v_{323}
v_{133}
v_{233}
v_{333}
v_{143}
v_{243}
v_{343}
=

$-f_{111} - \mu_1(x_1, y_1) - \mu_2(x_1, z_1) - \mu_3(y_1, z_1)$

$-f_{211} - \mu_1(x_2, y_1) - \mu_2(x_2, z_1) - 0$

$-f_{311} - \mu_1(x_3, y_1) - \mu_2(x_3, z_1) - \mu_5(y_1, z_1)$

$-f_{121} - \mu_1(x_1, y_2) - 0 - \mu_3(y_2, z_1)$

$-f_{221} - \mu_1(x_2, y_2) - 0 - 0$

$-f_{321} - \mu_1(x_3, y_2) - 0 - \mu_5(y_2, z_1)$

$-f_{131} - \mu_1(x_1, y_3) - 0 - \mu_3(y_3, z_1)$

$-f_{231} - \mu_1(x_2, y_3) - 0 - 0$

$= -f_{331} - \mu_1(x_3, y_3) - 0 - \mu_5(y_3, z_1)$

$-f_{141} - \mu_1(x_1, y_4) - \mu_4(x_1, z_1) - \mu_3(y_4, z_1)$

$-f_{241} - \mu_1(x_2, y_4) - \mu_4(x_2, z_1) - 0$

$-f_{341} - \mu_1(x_3, y_4) - \mu_4(x_3, z_1) - \mu_5(y_4, z_1)$

$-f_{112} - 0 - \mu_2(x_1, z_2) - \mu_3(y_1, z_2)$

$-f_{212} - 0 - \mu_2(x_2, z_2) - 0$

$-f_{312} - 0 - \mu_2(x_3, z_2) - \mu_5(y_3, z_2)$

$-f_{122} - 0 - 0 - \mu_3(y_2, z_2)$

$-f_{222} - 0 - 0 - 0$

$-f_{322} - 0 - 0 - \mu_5(y_2, z_2)$

$-f_{132} - 0 - 0 - \mu_3(y_3, z_2)$

$-f_{232} - 0 - 0 - 0$

$-f_{332} - 0 - 0 - \mu_5(y_3, z_2)$

$-f_{142} - 0 - \mu_4(x_1, z_2) - \mu_3(y_4, z_2)$

$-f_{242} - 0 - \mu_4(x_2, z_2) - 0$

$-f_{342} - 0 - \mu_4(x_3, z_2) - \mu_5(y_4, z_2)$

$-f_{113} - \mu_6(x_1, y_1) - \mu_2(x_1, z_3) - \mu_3(y_1, z_3)$

$-f_{213} - \mu_6(x_2, y_1) - \mu_2(x_2, z_3) - 0$

$-f_{313} - \mu_6(x_3, y_1) - \mu_2(x_3, z_3) - \mu_5(y_1, z_3)$

$-f_{123} - \mu_6(x_1, y_2) - 0 - \mu_3(y_2, z_3)$

$-f_{223} - \mu_6(x_2, y_2) - 0 - 0$

$-f_{323} - \mu_6(x_3, y_2) - 0 - \mu_5(y_3, z_3)$

$-f_{133} - \mu_6(x_1, y_3) - 0 - \mu_3(y_3, z_3)$

$-f_{233} - \mu_6(x_2, y_3) - 0 - 0$

$-f_{333} - \mu_6(x_3, y_3) - 0 - \mu_5(y_3, z_3)$

$-f_{143} - \mu_6(x_3, y_4) - \mu_4(x_1, z_3) - \mu_3(y_4, z_3)$

$-f_{243} - \mu_6(x_2, y_4) - \mu_4(x_2, z_3) - 0$

$-f_{343} - \mu_6(x_3, y_4) - \mu_4(x_3, z_3) - \mu_5(y_4, z_3)$

```
int Nmax = 10 000;
int S = 0;
double eps = 10^-6;
double eps_max = 0;
double eps_cur = 0;
double a2, k2, h2, l2;
int i, j, g, m, n, p;
double V[n+1][m+1][p+1];
double f[n+1][m+1][p+1];
double a, b, c, d, r, s,
double V_old, V_new;
bool flag = False;
h2 = -((b-a)/n)^2;
k2 = -((d-c)/m)^2;
l2 = -((s-r)/p)^2;
a2 = -2 (h2 + k2 + l2);
while (!f) do {
    eps_max = 0;
    for (g = 1, g < p, g++)
        for (j = 1, j < m, j++)
            for (i = 1, i < n, i++) {
                V_old = V[i][j][g];
                V_new = 1/a2 (-(h2 · V[i+1][j][g] + V[i-1]
[j][g]) + k2 (V[i][j+1][g] + V[i][j-1][g]) + l2
(V[i][j][g+1] + V[i][j][g-1])) + f[i][j][g]);
                eps_cur = abs (V_old - V_new)
                if (eps_cur > eps_max) {eps_max = eps_cur;}
                V[i][j][g] = V_new; }
```

```
s++;
if ((eps_max < eps) or (s ≥ Nmax))
        flag = True
```

Билет 2

Погрешность схемы - разность решения ДУ и точного решения схемы.
Погрешность аппроксимации - невязка разностной схемы при условии, что в нее подставим точное решение ДУ

$$\psi_i^x(y_j, z_g) = u''_{xx}(x_i, y_j, z_g) - \frac{u_{i-1jg} - 2u_{ijg} + u_{i+1jg}}{h^2}$$

$u_{ijg} = u(x_i y_j z_g)$

$$u_{i-1jg} = u_{ijg} - h u'_{x\,ijg} + \frac{h^2}{2} u''_{x\,ijg} - \frac{h^3}{6} u'''_{ijg} + \frac{h^4}{24} u^{IV}_{xxxx\,ijg}(\xi, y_j, z_g)$$

$\xi \in [x_i - h; x_i]$

$$u_{i+1jg} = u_{ijg} + h u'_{x\,ijg} + \frac{h^2}{2} u''_{xx\,ijg} + \frac{h^3}{6} u'''_{xxx\,ijg} + \frac{h^4}{24} u^{IV}_{xxxx\,ijg}(\eta, y_j, z_g)$$

$$\psi_i^{xx} = -\frac{1}{24} h^2 (u^{IV}_{x^4}(\xi, y_j z_g) + u^{IV}_{x^4}(\eta, y_j, z_g))$$ $\eta \in [x_i; x_i + h]$

$$\psi_i^x = -\frac{1}{12} h^2 u_{ijg} + O(h^2)$$

Оценка погрешности аппроксимации

$$\psi^x_{ijg} = \left| \frac{h^2}{24} (u^{IV}(\xi y_j z_g) + u^{IV}(\eta y_j z_g) \right| \le \frac{h^2}{4} (|u^{IV}(\xi y_j z_g)| + |u^{IV}(\eta y_j z_g)|) \le$$

$$\le \frac{h^2}{2} \max |u^{IV}_{x^4}(xyz)| \le M_1 h^2$$

$$\psi^y_{ijg} \le \frac{k^2}{12} \max |u^{IV}_{y^4}(xyz)| \le M_2 k^2$$

$$\psi^z_{ijg} \le \frac{l^2}{12} \max |u^{IV}_{z^4}(xyz)| \le M_3 l^2$$

Оценим ψ

$$\psi_{ijg} = u_{ijg} - \varphi(x_i y_j z_g) = 0 \quad (ijg) \in \omega_{hk}$$

$$\psi_{ijg} = [u_{x\bar{x}}]_{ijg} + [u_{y\bar{y}}]_{ijg} + [u_{z\bar{z}}]_{ijg} + f_{ijg} = -(\psi^x_{ijg} + \psi^y_{ijg} + \psi^z_{ijg})$$

$$\psi_{ijg} = \frac{h^2}{12} u_{x^4}(x_i y_j z_g) + \frac{k^2}{12} u^{IV}_{y^4}(x_i y_j z_g) + \frac{l^2}{12} u^{IV}_{z^4}(x_i y_j z_g) + O(h^2) + O(k^2) + O(l^2)$$

$$|\psi_{ijg}| \le M_1 h^2 + M_2 k^2 + M_3 l^2 \quad (ijg) \in \omega_{hkl}$$

Схема аппроксим. задачу абсолютно точно на границе и со 2-ым порядком по h, k, l

$$\max |\psi_{ijg}| \le M_1 h^2 + M_2 k^2 + M_3 l^2$$

Связь ПА и пор. схем

$$[z_{x\bar{x}}]_{ijg}+[z_{y\bar{y}}]_{ijg}+[z_{z\bar{z}}]_{ijg}=\frac{z_{i-1jg}-2z_{ijg}+z_{i+1jg}}{h^2}+$$

$$+\frac{z_{ij-1g}-2z_{ijg}+z_{ij+1g}}{k^2}+\frac{z_{ijg-1}-2z_{ijg}+z_{ijg+1}}{l^2}=$$

$$=[u_{x\bar{x}}]_{ijg}+[u_{y\bar{y}}]_{ijg}+[u_{z\bar{z}}]_{ijg}-[v_{x\bar{x}}]_{ijg}-[v_{y\bar{y}}]_{ijg}-$$
$$-[u_{z\bar{z}}]_{ijg}=\psi_{ijg}$$

$$z_{ijg}=u_{ijg}-v_{ijg}=u_{ijg}-\mu(x_i y_j z_g)=\psi_{ijg}=0$$

$$[z_{x\bar{x}}]_{ijg}+[z_{y\bar{y}}]_{ijg}+[z_{z\bar{z}}]_{ijg}=\psi_{ijg}$$

$$z_{ijg}=\psi_{ijg}=0$$

Принцип максимума

A - матрица схемы

$V\in R^{(n-1)(m-1)(p-1)}$

$V=\{ijg\}$

обходим по возраст. xyz

A - матрица РС задачи Дирихле для ур-я Пуассона, если сетка связная, то из $(AV)\geq 0 \Rightarrow V\leq 0$

Идея док-ва

$\exists\ (AV)_{ijg}\geq 0$ из $\exists$ компонента вектора V, которая ~~наиб~~ наиб $\max V_{ijg}=C,\ C>0$

C - достигается на (u,v,w), $V_{uvw}=C>0$

Возможны 2 случая: I (u,v,w) - тополог. вн узел 1-го типа

II (u,v,w) - тополог. вн узел 2-го типа

I) $\exists\ (uvw)=341$

$$(AV)_{341}=AV_{341}+\frac{1}{h^2}V_{241}+\frac{1}{k^2}V_{331}+\frac{1}{l^2}V_{342}=-2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{l^2}\right)\cdot$$

$$V_{341}+\frac{1}{h^2}V_{241}+\frac{1}{k^2}V_{331}+\frac{1}{l^2}V_{342}=\frac{1}{h^2}(V_{241}-V_{341})+\frac{1}{k^2}(V_{331}-V_{341})+$$

$$+\frac{1}{l^2}(V_{342}-V_{341})-\left(\frac{1}{h^2}V_{341}+\frac{1}{k^2}V_{341}+\frac{1}{l^2}V_{341}\right)\geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{241} \le V_{341} = C \\ V_{331} \le V_{341} = C \\ V_{342} \le V_{341} = C \end{array}\right| \Rightarrow AV_{341} < 0,$$ но по усл $(AV)_{341} \ge 0$

утверждение неверно

Аналогично верно для любого внутреннего узла 1-го типа

Все узлы $(V \bar{\cup} W)$ - из 1-го типа

II $\exists (U \bar{\cup} W) = 222$

$$(AV)_{222} = \frac{1}{h^2}(V_{122} - V_{222}) + \frac{1}{h^2}(V_{322} - V_{222}) + \frac{1}{k^2}(V_{212} - V_{222}) +$$
$$+ \frac{1}{k^2}(V_{232} - V_{222}) + \frac{1}{l^2}(V_{221} - V_{222}) + \frac{1}{l^2}(V_{223} - V_{222})$$

$V_{ijg} \le V_{222} = C > 0$

Аналогично верно для любого вн. узла $\Rightarrow$ они из 2 рода

Сходимость схемы

$z^n(x,y,z) \to 0 \quad \|z^n\|_\infty = \max|z^n_{ijg}| \quad \|z^n\| \to 0$
$n,m,p \to \infty$

$$|z^n_{ijg}| \le \max|\hat{z}^n_{ijg}| = \frac{(b-a)^2 + (d-c)^2 + (s-r)^2}{24} M (h^2 + k^2 + l^2)$$

$M = \max(M_1, M_2, M_3)$

Общая погрешность

$z^n_{общ}(x,y,z) = u(x,y,z) - \tilde{V}(x,y,z)$

Погрешность метода

$z^{n(s)} = x^{(s)} - x^*$

$x^{(s)}$ — на s-ой итерации; x^* — точное решение

Вычислительная погрешность

$ВП = V^s(xyz) - \tilde{V}^s(xyz)$

Этап 3 (МВР)

```
double w_g;
int N_max = 10000; int S = 0;
double eps = 10^-5, eps_max = 0, eps_cur = 0;
double a2, h2, k2, l2;
double v[n+1][m+1][p+1]
double f[n+1][m+1][p+1]
double a, b, c, d, e, f, r, s;
double v_old, v_new;
int n, m, p, i, j, g;
bool flag = false;
h2 = -(n/(b-a))^2
k2 = -(m/(d-c))^2
l2 = -(p/(s-r))^2
a2 = -2(k2 + h2 + l2)
while (f == false) do {
        eps_max = 0
        for (g = 1; g < p; g++)
            for (j = 1; j < m; j++)
                for (i = 1; i < n; i++) {
                    v_old = v[i][j][g];
                    v_new = (1-w) a2 · v[i][j][g] - w(h2(v[i+1]
[j][g] + v[i-1][j][g]) + k2(v[i][j+1][g] + v[i]
[j-1][g]) + l2(v[i][j][g+1] + v[i][j][g-1])) + w·
f[i][j][g];
                    v_new = v_new · 1/a2
                    eps_cur = abs(v_old - v_new)
                    if (eps_cur > eps_max)
                        eps_max = eps_cur;
```

```
V[i][j][g] = V_new; }

S++;
if ((ep_max < eps) or (S >= Nmax))
        flag = True;

};
```