Задача 17 (4 балла)

Записать интегро-дифференциальные уравнения для скалярного поля $u(x,t)$, соответствующие дисперсионным соотношениям (записанным для циклической частоты ω при действительных волновых числах h):

а) $\omega = c|h|$, c —действительный параметр;

б) $\omega = \Omega \operatorname{sign} h$, Ω —действительный параметр;

в) $\omega = \alpha\sqrt{|h|} \operatorname{sign} h$, α —действительный параметр.

Задача 18 (5 баллов)

Записать интегро-дифференциальные уравнения для скалярного поля $u(\boldsymbol{r},t)$, соответствующие дисперсионным соотношениям (записанным для циклической частоты ω при действительных двумерных волновых векторах $\boldsymbol{k} = k_x\hat{\boldsymbol{x}} + k_y\hat{\boldsymbol{y}}$, $k = |\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$):

а) $\omega = ck$, c —действительный параметр;

б) $\omega = \alpha\sqrt{k}$, α —действительный параметр.

Задача 19 (7 баллов)

С помощью метода стационарной фазы определить главный член асимптотического разложения скалярного волнового поля $u(x,t)$ при $t \to \infty$ и фиксированном x/t с начальными условиями $u(x,t=0) = A\mathrm{e}^{-x^2/2a^2}$, $u_t(x,t=0) = 0$, $a > 0$ и дисперсионными соотношениями:

а) $\omega^2 = g|h|$ (гравитационные волны на поверхности глубокой воды, $g > 0$ — ускорение свободного падения);

б) $\omega^2 = \alpha|h|^3$ (капиллярные волны на поверхности глубокой воды, $\alpha = T/\rho > 0$ — отношение коэффициента поверхностного натяжения T и плотности ρ).

Построить пространственно-временные волновые диаграммы с линиями постоянной фазы и групповыми линиями, определить характерные скорости распространения переднего и заднего (если есть) волновых фронтов, оценить характерное количество волновых горбов в зависимости от времени t; определить, как движутся волновые горбы относительно волновых фронтов.

Задача 20 (8 баллов)

С помощью метода стационарной фазы определить главный член асимптотического разложения скалярного волнового поля $u(x,t)$ при $t \to \infty$ и фиксированном x/t с начальными условиями $u(x,t=0) = A\mathrm{e}^{-x^2/2a^2}$, $u_t(x,t=0) = 0$, $a > 0$ и дисперсионными соотношениями:

а) $\omega^2 = c^2h^2 + \Omega^2$ (волны в волноводах и световодах: $\Omega > 0$ —критическая частота, $c > 0$ — скорость света);

б) $\omega^2 = c^2h^2(1 + \alpha h^2)$ (гравитационные и капиллярные волны на поверхности мелкой воды, $c = \sqrt{gh} > 0$ — корень из произведения ускорения свободного падения g и глубины H, $\alpha = \frac{T}{\rho g H^2} - \frac{1}{3} > 0$, T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность);

в) $\omega^2 = c^2 h^2 (1 + \alpha h^2)$ (гравитационные и капиллярные волны на поверхности мелкой воды, $c = \sqrt{gh} > 0$ — корень из произведения ускорения свободного падения g и глубины H, $\alpha = \frac{T}{\rho g H^2} - \frac{1}{3} < 0$, T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность);

г) $\omega^2 = \frac{c^2 h^2}{\left(1 + l^2 h^2\right)^2}$, $l > 0$ и $c > 0$.

Построить пространственно-временные волновые диаграммы с линиями постоянной фазы и групповыми линиями, определить характерные скорости распространения переднего и заднего (если есть) волновых фронтов, оценить характерное количество волновых горбов в зависимости от времени t; определить, как движутся волновые горбы относительно волновых фронтов.

Задача 21 (7 баллов)

С помощью метода стационарной фазы определить главный член асимптотического разложения решения линейного уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + u_x + u_{xxx} = 0$ с начальным условием $u(x, t = 0) = A\mathrm{e}^{-x^2/2a^2}$ при $t \to \infty$ и фиксированном отношении $\frac{x}{t}$. Здесь A и a — параметры, $a > 0$. Построить пространственно-временные волновые диаграммы с линиями постоянной фазы и групповыми линиями, определить характерные скорости распространения переднего и заднего (если есть) волновых фронтов, оценить характерное количество волновых горбов в зависимости от времени t; определить, как движутся волновые горбы относительно волновых фронтов.

Задача 22 (5 баллов)

Бесконечная цепочка взаимодействующих частиц (каждая взаимодействует с двумя соседними) описывается уравнением $\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \Omega^2 \left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right)$ для малых смещений $u_n(t)$ положения n-й частицы, Ω — положительная константа, характеризующая силу связи. В начальный момент времени $t = 0$ смещения равны нулю для всех частиц кроме частицы с номером $n = 0$ и все частицы имеют нулевую скорость: $u_n(0) = A\delta_{n0}$ и $\frac{\mathrm{d}u_n(0)}{\mathrm{d}t} = 0$, A — константа, δ_{n0} — символ Кронекера. Найти $u_n(t)$.

Задача 23 (6 баллов)

Определить условия существования установившегося решение неоднородного уравнения $\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \Omega^2 \left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + A\delta_{n0} \cos \omega_\mathrm{f} t$, описывающего возбуждение бесконечной цепочки взаимодействующих частиц (каждая взаимодействует с двумя соседними) периодической силой, действующей на одну из частиц. Записать это установившееся решение. Здесь $u_n(t)$ — малое смещение частицы с номером n, A — амплитуда силы, действующей на частицу с номером 0, $\omega_\mathrm{f} \geq 0$ — циклическая частота этой силы, $\Omega > 0$ —константа, характеризующая силу связи между соседними частицами, δ_{n0} — символ Кронекера.

Задача 24 (3 балла)

Записать дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число, для системы телеграфных уравненийр

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0,$$
$$\frac{\partial I}{\partial x} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU = 0$$

для тока $I(x, t)$ и напряжения $U(x, t)$ в двухпроводной электрической линии, здесь здесь $L > 0$, $R \geq 0$, $C > 0$ и $G \geq 0$ — погонная (приходящаяся на единицу длины) индуктивность линии, погонное сопротивление проводников, погонная ёмкость линии и проводимость изоляции соответственно (уравнения записаны в системе единиц СИ). Найти решения полученного дисперсионного уравнения относительно частоты для действительных волновых чисел. Ответить на следующие вопросы. Сколько решений дисперсионного уравнения (веток) существует для действительных волновых чисел? При любых ли действительных волновых числах решения для частоты также чисто действительны? Если нет, то при каких волновых числах имеются комплексные решения и какие значения может принимать мнимая часть? Какие значения может принимать действительная часть частоты? Записать разложения решений дисперсионного уравнения по степеням волнового числа в длинноволновом приближении (то есть вблизи нулевого значения волнового числа), оставляя только не зависящее от волнового числа слагаемое и первое зависящее.

Задача 25 (3 балла)

Записать дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число, для системы разностных уравнений

$$u_{tt}(x,t) = \Omega_1^2[v(x+a,t) - 2u(x,t) + v(x-a,t)],$$
$$v_{tt}(x,t) = \Omega_2^2[u(x+a,t) - 2v(x,t) + u(x-a,t)]$$

для скалярных полей $u(x,t)$ и $v(x,t)$, описывающих смещения в бесконечной цепочке взаимодействующих частиц двух типов (каждая частица взаимодействует с двумя соседними частицами иного типа), здесь $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ и $a > 0$ — постоянные параметры.

Задача 26 (4 балла)

Записать дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновой вектор, для линеаризованной системы уравнений гидродинамики

$$\frac{\partial\,\delta\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla\,\delta\rho + \rho_0 \nabla \cdot \delta\boldsymbol{v} = 0,$$
$$\rho_0 \left[\frac{\partial\,\delta\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\,\delta\boldsymbol{v}\right] + c^2 \nabla\,\delta\rho = 0$$

для возмущений $\delta\rho(\boldsymbol{r},t)$ и $\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ плотности и скорости соответственно относительно стационарного потока с плотностью $\rho_0 > 0$ и скоростью $\boldsymbol{v}_0$. Здесь $c > 0$ — скорость звука относительно покоящейся среды. Найти решения полученного дисперсионного уравнения относительно частоты для действительных волновых чисел. Ответить на следующие вопросы. Сколько решений дисперсионного уравнения (веток) существует для действительных волновых векторов? При любых ли действительных волновых числах решения для частоты также чисто действительны? Если нет, то при каких волновых векторах имеются комплексные решения и какие значения может принимать мнимая часть? Какие значения может принимать действительная часть частоты? Записать разложения решений дисперсионного уравнения по степеням волнового вектора в длинноволновом приближении (то есть вблизи нулевого значения волнового вектора), оставляя только не зависящее от волнового вектора слагаемое и первое зависящее.

Задача 27 (4 балла)

Записать дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число, для разностного уравнения

$$u_{tt}(x,t) = \Omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} [u(x+sa,t) - 2u(x,t) + u(x-sa,t)]$$

для скалярного поля $u(x,t)$, описывающего смещения в бесконечной цепочке взаимодействующих частиц, здесь $\Omega > 0$ и $a > 0$ — постоянные параметры.

Задача 28 (4 балла)

Записать дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число, для разностного уравнения

$$u_{tt}(x,t) = \Omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-s\kappa a}[u(x+sa,t) - 2u(x,t) + u(x-sa,t)]$$

для скалярного поля $u(x,t)$, описывающего смещения в бесконечной цепочке взаимодействующих частиц, здесь $\Omega > 0$, $\kappa > 0$ и $a > 0$ — постоянные параметры.

Задача 29 (5 баллов)

Записать решение уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ для действительнозначного поля $u(x,t)$ в виде уединённой волны (солитона) $u(x,t) = f(x - Vt)$ с граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = u_0$, где β и u_0 — действительные параметры.

Задача 30 (7 баллов)

Записать все решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + u^2u_x + \beta u_{xxx} = 0$ для действительнозначного поля $u(x,t)$ в виде уединённой волны (солитона) $u(x,t) = f(x - Vt)$ с граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = u_0$, где β и u_0 — действительные параметры, $\beta > 0$.

Задача 31 (6 баллов)

Записать все решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + u^2u_x + \beta u_{xxx} = 0$ для действительнозначного поля $u(x,t)$ в виде уединённой волны (солитона) $u(x,t) = f(x - Vt)$ с граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = u_0$, где β и u_0 — действительные параметры, $\beta < 0$.

Задача 32 (7 баллов)

Записать все решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + |u|^k u_x + \beta u_{xxx} = 0$ для действительнозначного поля $u(x,t)$ в виде уединённой волны (солитона) $u(x,t) = f(x - Vt)$ с граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = 0$, где β и k — действительные параметры, $\beta > 0$ и $k > 0$.

Задача 33 (6 баллов)

Записать все решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + u^2u_x + \beta u_{xxx} = 0$ для действительнозначного поля $u(x,t)$ в виде кинка $u(x,t) = f(x - Vt)$ с граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = u_\pm$, где β, u_+ и u_- — действительные параметры, $\beta < 0$, $u_- \neq u_+$.

Задача 34 (6 баллов)

Записать все решения в виде стационарной волны (солитона или кинка) $u(x,t) = f(x - Vt)$ с граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = u_\pm$ нелинейных вариантов уравнения Клейна — Гордона для действительнозначного поля $u(x,t)$

а) $u_{tt} - c^2u_{xx} + \Omega^2 \sin u = 0$;
б) $u_{tt} - c^2u_{xx} + \Omega^2 u(1 - u) = 0$;
в) $u_{tt} - c^2u_{xx} + \Omega^2 u\left(1 - u^2\right) = 0$.

Здесь c, Ω, u_+ и u_- — действительные параметры, $c > 0$, $\Omega > 0$.

Задача 35 (4 балла)

Для уравнения Бюргерса — Кортевега — де Фриза $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \mu u_x$ записать условие существования стационарной ударной волны вида $u(x,t) = f(x - Vt)$ с монотонным гладким профилем f и граничными значениями $u_\pm = \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} f(\xi)$. Здесь μ, β, u_+ и u_- — действительные параметры, $\mu > 0$, $u_+ \neq u_-$.

Задача 36 (10 баллов)

С помощью вариационного метода (метода Уизема) найти приближённое решение уравнения Бюргерса — Кортевега — де Фриза $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \mu u_{xx}$ для действительнозначного поля $u(x,t)$ в виде солитона $u(x,t) = f(V(t), x - X(t))$ с медленно меняющимся параметром скорости $V(t)$. Здесь $u(x,t) = f(V, x - Vt)$ — солитонное решение уравнения Кортевега — де Фриза $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ с нулевыми граничными условиями $u(x \to \pm\infty, t) = 0$, где β и μ — действительные параметры, $\beta > 0$ и $\mu > 0$, $X(t)$ — координата центра солитона. Записать условие применимости полученного решения (условие малости μ) в виде сильного неравенства.