Модуль 12. Основы теории интерполяции (продолжение)

12.1. Интерполяция кубическими сплайнами

Полиномиальные сплайны, их применение, дефект сплайна. Кубический сплайн, его канонический вид и свойства, естественные граничные условия (ЕГУ). Задача кубической сплайн-интерполяции, выбор граничных условий. Теорема о существовании, единственности и способе построения интерполяционного кубического сплайна (с доказательством). Физическая модель и оптимальные свойства сплайнов. Сходимость сплайн-интерполяции, примеры результатов о сходимости. Интерполяционные кубические сплайны, гарантирующие высокую скорость сходимости. Локальные интерполяционные сплайны и аппроксимирующие сплайны. Примеры решения задач

Полиномиальный сплайн (порядка m) представляет собой непрерывную функцию, заданную на некотором отрезке и на различных участках данного отрезка представленную полиномами степени не выше m. Если сплайн имеет непрерывную производную порядка $m-k$ и производная порядка $m-k+1$ является на границах участков разрывной, говорят, что сплайн имеет **дефект** k.

Сплайны широко используются в компьютерной графике и при решении инженерных задач. На основе сплайнов строят базисы в функциональных пространствах, в том числе ортогональные базисы с хорошей сходимостью. В форме сплайна ищут приближенное (численное) решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных (см., например, метод Ритца или метод конечных элементов). Сеточные функции, полученные в ходе численного решения различных уравнений и включающие в себя вычислительную погрешность, с помощью аппроксимирующих сплайнов «сглаживают» и «восстанавливают» для последующего дифференцирования.

Наряду с полиномиальными сплайнами используются **многомерные сплайны**, а также L_c**-сплайны**, «склеенные» из решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения, и L_g**-сплайны**, имеющие различную гладкость в различных узлах сетки.

Среди полиномиальных сплайнов наиболее часто используются **линейные, параболические и кубические** сплайны. Построение сплайнов, сплайн-интерполяция и свойства сплайнов далее рассмотрены на примере кубических сплайнов.

Определение кубического сплайна и примеры

Чтобы определить кубический сплайн, рассмотрим отрезок $[a,b]$ и построим сетку с числом участков n и узлами $x_i, i=0,\ldots n$ (всего $n+1$ узлов).

Считаем, что граничные узлы сетки совпадают с границами отрезка: $x_0=a, x_n=b$, все узлы различны и упорядочены: $x_0<\ldots<x_n$.

Отрезки вида $[x_{i-1}, x_i], \quad i=1,\ldots n$, называем участками сетки.

Длина каждого участка задана положительным числом $h_i=x_i-x_{i-1}, \quad i=1,\ldots n$: это шаг сетки с номером i.

Если длины всех участков одинаковы, сетка называется равномерной. Тогда $h_i=h=const,$, где $h=\dfrac{b-a}{n}$. Число h есть шаг равномерной сетки.

Неравномерную сетку описывают параметром

$$\bar{h} = \max_{i=1,\dots n} h_i \ .$$

(это **максимальная длина** участка при **данном** разбиении на n участков).

Для равномерной сетки $\bar{h} = h$.

В учебной и научной литературе сетку отрезка $[a, b]$, соответствующую приведенному выше описанию узлов и длин участков, обозначают отдельным символом, например, $\Omega_{\bar{h}}$. Обозначение $\Omega_{\bar{h}}$ будет использовано далее в формулировках результатов о сходимости сплайн-интерполяции.

Определение 1. **Кубическим сплайном на сетке** $x_i, i = 0,\dots n$ **отрезка** $[a, b]$ называют функцию $S(x)$, **дважды непрерывно-дифференцируемую на отрезке** и представляющую собой **полином степени не выше 3** на каждом его участке.

Примеры

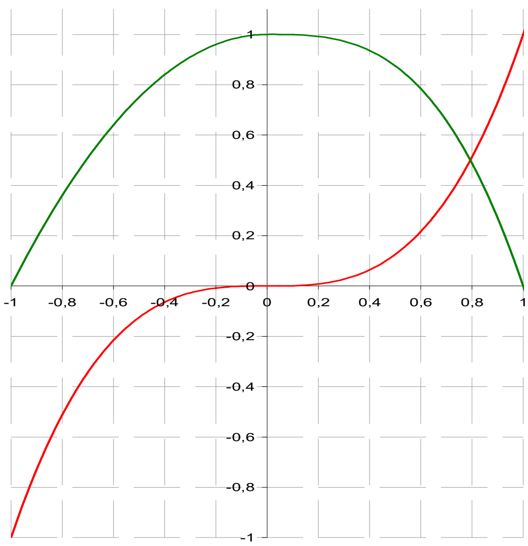

Рисунок 1

Сплайн и не-сплайн к Примерам 1), 3)

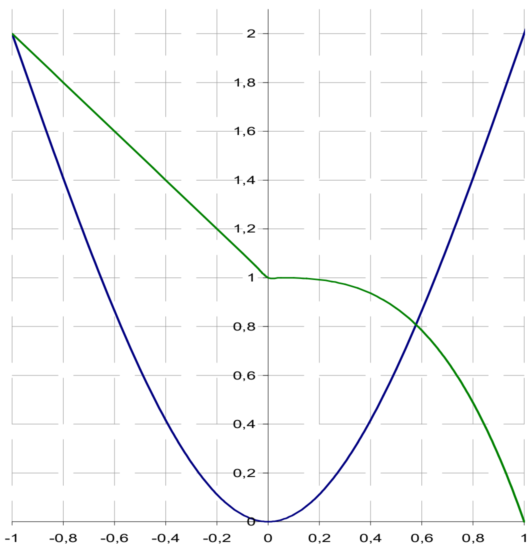

Рисунок 2

Сплайн и не-сплайн к Примерам 2), 4)

Рассмотрим отрезок $[-1; 1]$, сетку $x_0 = -1; x_1 = 0; x_2 = 1$, число участков $n = 2$, шаг сетки $h = 1$. Участок слева от нуля $[-1; 0]$ и участок справа от нуля $[0; 1]$.

1) $S(x) = x^3$ есть **кубический сплайн**

$$S(x) = \begin{cases} x^3, x \in [-1; 0] \\ x^3, x \in [0; 1] \end{cases}$$

так как является полиномом степени 3 на каждом участке, есть непрерывность и производные непрерывны: $S'(x) = 3x^2, S''(x) = 6x$.

2) $S(x)=\begin{cases} x^3+3x^2, & x\in[-1;0] \\ -x^3+3x^2, & x\in[0;1] \end{cases}$

есть **кубический сплайн**, так как на каждом участке
является полиномом степени 3, в узле $x_1=0$ есть **непрерывность**: $S(0)=0$,

на участке слева от нуля $S'(x)=3x^2+6x, S''(x)=6x+6$,

на участке справа от нуля $S'(x)=-3x^2+6x, S''(x)=-6x+6$,

в узле $x_1=0$ **первая и вторая производные непрерывны**:
$S'(0)=0, S''(0)=6$.

3) $S(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\in[-1;0] \\ -x^3+1, & x\in[0;1] \end{cases}$

на каждом участке является полиномом степени не выше 3

в узле $x_1=0$ есть **непрерывность**: $S(0)=1$
участок слева от нуля $S'(x)=-2x, S''(x)=-2$,

участок справа от нуля $S'(x)=-3x^2, S''(x)=-6x$
в узле $x_1=0$ **первая производная непрерывна**: $S'(0)=0$.

Вторая производная терпит разрыв:

участок слева от нуля предельное значение $S''(0)=-2$,
участок справа от нуля предельное значение $S''(0)=0$.
Функция **не является кубическим сплайном**.

4) $S(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in[-1;0] \\ -x^3+1, & x\in[0;1] \end{cases}$

на каждом участке является полиномом степени не выше 3

в узле $x_1=0$ есть **непрерывность**: $S(0)=1$
участок слева от нуля $S'(x)=-1, S''(x)=0$,

участок справа от нуля $S'(x)=-3x^2, S''(x)=-6x$
в узле $x_1=0$ **первая производная терпит разрыв:**

участок слева от нуля предельное значение $S'(0)=-1$,

участок справа от нуля предельное значение $S'(0)=0$.

Функция **не является кубическим сплайном**.

Описание кубического сплайна

Для построения кубических сплайнов используют **каноническую запись**

$$S(x) = \begin{cases} S_i(x) = a_i + b_i\,(x - x_i) + \dfrac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \dfrac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \\ x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots n \end{cases} \qquad (12.1)$$

На участке $[x_{i-1}, x_i]$ кубический сплайн $S(x)$ задан формулой $S_i(x)$, которая определяет полином степени не выше 3 и действует только на данном участке. В описании полинома $S_i(x)$ используется x_i, то есть **правая** граница участка.

В каждом **внутреннем** узле x_i, т.е. при $i = 1, \ldots n-1$, значение $S(x)$ определяется одновременно двумя формулами:

формулой $S_i(x)$, потому что x_i есть правая граница участка $[x_{i-1}, x_i]$,

формулой $S_{i+1}(x)$, потому что x_i есть левая граница участка $[x_i, x_{i+1}]$.

Так как кубический сплайн $S(x)$ должен быть **дважды непрерывно-дифференцируемой функцией,** для каждого внутреннего узла $x_i, i = 1, \ldots n-1$ значения, полученные по формулам $S_i(x)$ и $S_{i+1}(x)$, должны быть одинаковы:

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \ldots n-1 \qquad (12.2)$$

Аналогично в каждом узле $x_i, i = 1, \ldots n-1$ должны быть одинаковы значения, полученные дифференцированием формул $S_i(x)$ и $S_{i+1}(x)$

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \; i = 1 \ldots n-1 \qquad (12.3)$$

и должны совпадать значения вторых производных:

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \; i = 1, \ldots n-1 \qquad (12.4)$$

Условия (12.2) – (12.4) называют **условиями сопряжения**: они обеспечивает непрерывность кубического сплайна, непрерывность его первой и второй производной.

Комментарий

Чтобы задать на сетке $x_i, i = 0, \ldots n$ отрезка $[a, b]$ кубический сплайн, необходимо указать $4n$ коэффициентов $a_i, b_i, c_i, d_i, \; i = 1, \ldots n$, так, чтобы выполнялись $3n - 3$ ограничения (12.2) – (12.4).

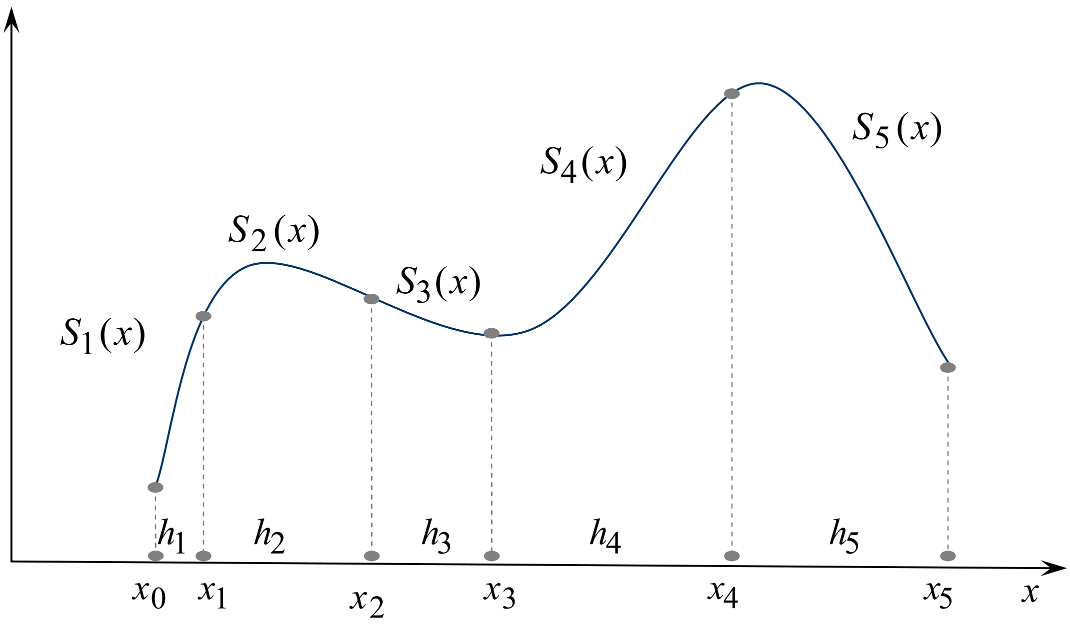

Рисунок 3

Номера узлов и шагов сетки и номера формул сплайна

Кубический сплайн с ЕГУ

Определение 2. **Кубический сплайн, заданный на сетке** $x_i, i = 0,\ldots n$ **отрезка** $[a, b]$, называется **сплайном с естественными граничными условиями** (ЕГУ), если

$$S''(a) = 0; \quad S''(b) = 0 \tag{12.5}$$

(вторые производные сплайна на границах отрезка $[a, b]$ обращаются в ноль).

Комментарий

Для задания на сетке $x_i, i = 0,\ldots n$ отрезка $[a, b]$ кубического сплайна с ЕГУ необходимы $4n$ коэффициентов, соответствующих $3n-1$ условиям.

Примеры

Отрезок $[-1; 1]$, сетка $x_0 = -1; x_1 = 0; x_2 = 1$, число участков $n = 2$, шаг сетки $h = 1$. Участок слева от нуля $[-1; 0]$ и участок справа от нуля $[0; 1]$.

1) $S(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & x \in [-1; 0] \\ -x^3 + 3x^2, & x \in [0; 1] \end{cases}$

является кубическим сплайном с ЕГУ, так как

на участке слева от нуля $S''(x) = 6x + 6, S''(-1) = 6 \cdot (-1) + 6 = 0$,

на участке справа от нуля $S''(x) = -6x + 6, S''(1) = -6 \cdot 1 + 6 = 0$.

2) $S(x) = x^3$ на отрезке $[-1; 1]$ **не является кубическим сплайном с ЕГУ**, так как $S''(x) = 6x, S''(-1) = -6, S''(1) = 6$.

Интерполяция кубическими сплайнами

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ функцию $f(x)$ и сетку с числом участков n и узлами $x_i, i=0,...n$.

Определение 3. Кубический сплайн $S(x)$, заданный на сетке $x_i, i=0,...n$ отрезка $[a,b]$, интерполирует функцию $f(x)$, если в узлах сетки значения сплайна и функции совпадают:

$$S(x_i)=f(x_i), i=0,...n \tag{12.6}$$

Для построения интерполяционного кубического сплайна нужно определить $4n$ коэффициентов, соответствующих $4n-2$ условиям: в их числе $3n-3$ условия сопряжения и $n+1$ условие интерполяции, см. (12.2)-(12.4) и (12.6).

Так как искомых коэффициентов больше, чем условий, для однозначного решения вопроса о построении интерполяционного кубического сплайна нужны еще два условия.

Чаще всего используют

– естественные граничные условия (12.5)

$$S''(a)=0; \quad S''(b)=0$$

– условие на совпадение вторых производных функции и сплайна

$$S''(a)=f''(a)=\mu_1; \quad S''(b)=f''(b)=\mu_2 \tag{12.7}$$

– условие на совпадение первых производных функции и сплайна

$$S'(a)=f'(a)=\nu_1; \quad S'(b)=f'(b)=\nu_2 \tag{12.8}$$

а также иные (в том числе комбинированные) виды граничных условий, в том числе **условия периодичности сплайна**.

Сформулируем и докажем одну из теорем о существовании, единственности и способе построения сплайна.

Теорема 1. Для любой функции $f(x)$, значения которой заданы на сетке $x_i, i=0,...n$ отрезка $[a,b]$, интерполяционный кубический сплайн $S(x)$ с граничными условиями вида

$$S''(a)=\mu_1; \quad S''(b)=\mu_2 \tag{12.9}$$

существует и является единственным. Для нахождения его коэффициентов c_i, $i=1,...n$ необходимо решить СЛАУ

$$\begin{cases} c_0=\mu_1 \\ c_{i-1}\,h_i+2\,(h_i+h_{i+1})\,c_i+c_{i+1}\,h_{i+1}=6\cdot\left(\dfrac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\dfrac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right), \\ \qquad\qquad i=1,...n-1 \\ c_n=\mu_2 \end{cases} \tag{12.10}$$

и затем вычислить остальные его коэффициенты a_i, b_i, d_i, $i=1,...n$ по формулам

$$a_i = f_i\,,\; i = 1,\ldots n \qquad (12.11)$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}\,,\; i = 1,\ldots n \qquad (12.12)$$

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + c_i\frac{h_i}{3} + c_{i-1}\frac{h_i}{6}\,, \quad i = 1,\ldots n \qquad (12.13)$$

СЛАУ (12.10) может быть решена методом прогонки.

Комментарии (схема доказательства)

В формулировке теоремы рассматривается возможность построения интерполяционного кубического сплайна и не требуется, чтобы вторые производные сплайна совпадали со вторыми производными интерполируемой функции на границах отрезка, сравните (12.9) и (12.7).

Для отыскания $4n$ коэффициентов кубического сплайна используют $4n$ уравнений: $3n-3$ условий сопряжения (12.2) – (12.4), 2 граничных условия (12.9)

$n+1$ условие интерполяции (12.6), а также фиктивный (дополнительный) коэффициент $c_0 = \mu_1$.

Исключив из уравнений коэффициенты

$a_i, b_i, d_i,\; i = 1,\ldots n,$

получают СЛАУ (12.10) для отыскания $c_i,\; i = 1,\ldots n$.

СЛАУ соответствует условиям Теоремы о применении прогонки, откуда следует существование и единственность ее решения при любой правой части.

Для остальных коэффициентов выводят формулы (12.11)-(12.13). При любых (12.6) и (12.9) все коэффициенты сплайна будут найдены однозначно, откуда следует существование и единственность интерполяционного кубического сплайна с граничными условиями вида (12.9).

Доказательство

Шаг 1

Запишем все условия для отыскания коэффициентов сплайна.

В соответствии с (12.1) значение сплайна на участке $[x_{i-1}, x_i]$ определяется формулой

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Дифференцируем $S_i(x)$ и получим на участке $[x_{i-1}, x_i]$ значения первой и второй производной сплайна:

$$S'_i(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$S''_i(x) = c_i + d_i(x - x_i)$$

Если рассматривать узел x_i как правую границу участка $[x_{i-1}, x_i]$, для расчета сплайна и его производных следует использовать $S_i(x)$. Тогда

$$S_i(x_i) = a_i$$
$$S'_i(x_i) = b_i$$
$$S''_i(x_i) = c_i$$

Если рассматривать узел x_i как левую границу участка $[x_i, x_{i+1}]$, для расчета сплайна и его производных следует использовать $S_{i+1}(x)$. Тогда

$$S_{i+1}(x_i) = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3$$
$$S'_{i+1}(x_i) = b_{i+1} + c_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{d_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2$$
$$S''_{i+1}(x_i) = c_{i+1} + d_{i+1}(x_i - x_{i+1})$$

Условия непрерывности сплайна, непрерывности его первых и вторых производных (см. условия сопряжения (12.2)-(12.4)) состоят в следующем:

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \ldots n-1$$
$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad i = 1 \ldots n-1$$
$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \ldots n-1$$

Запишем их в виде

$$a_i = a_{i+1} - b_{i+1}h_{i+1} + \frac{c_{i+1}}{2}(h_{i+1})^2 - \frac{d_{i+1}}{6}(h_{i+1})^3, \ i = 1, \ldots n-1 \qquad (12.14)$$

$$b_i = b_{i+1} - c_{i+1}(h_{i+1}) + \frac{d_{i+1}}{2}(h_{i+1})^2, \ i = 1, \ldots n-1 \qquad (12.15)$$

$$c_i = c_{i+1} - d_{i+1} \cdot h_{i+1}, \ i = 1, \ldots n-1 \qquad (12.16)$$

где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, i = 1, \ldots n$ есть введенные ранее обозначения шагов сетки.

Рассмотрим условия интерполяции (12.6):

$$S(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots n$$

(нужно совпадение значений сплайна $S(x)$ и функции $f(x)$ в $n+1$ узлах сетки).

Так как для индексов $i = 1, \ldots n$ сплайн в узле x_i может быть вычислен по формуле $S_i(x)$, запишем условия интерполяции в виде

$S_i(x_i) = f(x_i), i = 1,...n$

что означает

$$a_i = f_i, i = 1,...n \qquad (12.17)$$

(«младшие» коэффициенты кубического сплайна, записанного в каноническом виде (12.1), должны совпадать со значениями функции в узлах сетки).

Для индекса $i = 0$, то есть в узле $x_0 = a$, сплайн можно вычислить как $S_1(x)$:

$$S(a) = S_1(x_0)$$

Условие интерполяции в узле x_0 принимает вид

$$S_1(x_0) = f(x_0),$$

что означает

$$S_1(x_0) = a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_0 - x_1)^3 = f(x_0)$$

Используя обозначение шага сетки $h_1 = x_1 - x_0$, получим

$$f_0 = a_1 - b_1(h_1) + \frac{c_1}{2}(h_1)^2 - \frac{d_1}{6}(h_1)^3 \qquad (12.18)$$

Для задания второй производной сплайна на левой границе отрезка, то есть в узле $x_0 = a$, используем граничное условие (12.9) и формулу $S_1(x)$:

$$S''(a) = \mu_1$$

$$S''(a) = S''_1(x_0),$$

$$S''_1(x_0) = c_1 + d_1(x_0 - x_1) = \mu_1$$

что означает

$$c_1 - d_1 h_1 = \mu_1 \qquad (12.19)$$

Для задания второй производной на правой границе отрезка, то есть в узле $x_n = b$, также используем (12.9) и формулу $S_n(x)$:

$$S''(b) = \mu_2$$

$$S''(b) = S''_n(x_n)$$

$$S''(b) = S''_n(x_n) = c_n + d_n(x_n - x_n) = \mu_2$$

что означает

$$c_n = \mu_2 \qquad (12.20)$$

Условия на выбор коэффициентов сплайна выписаны. Перейдем к выкладкам.

Ш а г 2

Из (12.16) и (12.19), а именно

$$c_i = c_{i+1} - d_{i+1} \cdot h_{i+1}, \qquad i = 1,...n-1$$

$$\mu_1 = c_1 - d_1 h_1$$

следует, что фиктивная переменная c_0, которой присваивается значение μ_1, позволит записать указанные выше формулы единообразно

$$c_0 = \mu_1 \tag{12.19*}$$

$$c_0 = c_1 - d_1 h_1$$

$$c_1 = c_2 - d_2 \cdot h_2$$

……

$$c_{n-1} = c_n - d_n \cdot h_n$$

и затем получить единообразные формулы (12.12) для вычисления коэффициентов d_i:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \ i = 1,...n$$

Указанные выше формулы позволяют исключить коэффициенты d_i из (12.15) и затем из (12.14) и (12.18). Из (12.15) получим

$$b_i = b_{i+1} - c_{i+1}(h_{i+1}) + \frac{(c_{i+1} - c_i)}{2 \cdot h_{i+1}}(h_{i+1})^2 =$$

$$= b_{i+1} + c_{i+1}(h_{i+1})(-\frac{1}{2}) + c_i(h_{i+1})(-\frac{1}{2}) =$$

$$= b_{i+1} + \frac{c_{i+1} + c_i}{2}(h_{i+1})(-1), \qquad i = 1,...n-1$$

Заменим во всех формулах (12.14) и (12.18) «младшие» коэффициентов сплайна, то есть a_i, $i = 1, ...n$, значениями функции в узлах сетки, то есть f_i, $i = 1, ...n$, а также с помощью (12.12) исключаем из записи $d_i, i = 1, ...n$:

$$f_i = f_{i+1} + b_{i+1} h_{i+1}(-1) + \frac{c_{i+1}}{2}(h_{i+1})^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{6 \cdot h_{i+1}}(h_{i+1})^3(-1), \ i = 1,...n-1$$

$$f_0 = f_1 + b_1 (h_1)(-1) + \frac{c_1}{2}(h_1)^2 + \frac{c_1 - c_0}{6 \cdot h_1}(h_1)^3(-1)$$

Указанные равенства могут быть записаны единообразно:

$$f_i = f_{i+1} + b_{i+1} h_{i+1}(-1) + \frac{c_{i+1}}{3}(h_{i+1})^2 + \frac{c_i}{6}(h_{i+1})^2, \qquad i = 0,...n-1$$

Из них можно выразить

$$b_{i+1}h_{i+1} = f_{i+1} - f_i + \frac{c_{i+1}}{3}(h_{i+1})^2 + \frac{c_i}{6}(h_{i+1})^2, \qquad i = 0,\dots n-1$$

и записать аналог формулы (12.13)

$$b_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} + \frac{c_{i+1}}{3}h_{i+1} + \frac{c_i}{6}h_{i+1}, \qquad i = 0,\dots n-1$$

Рассмотрим ранее полученные выражения

$$b_{i+1} - b_i = \frac{c_{i+1} + c_i}{2}h_{i+1} \qquad i = 1,\dots n-1$$

С помощью (12.13) исключаем из них коэффициенты b_i:

$$\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} + \frac{c_{i+1}}{3}h_{i+1} + \frac{c_i}{6}h_{i+1}\right) - \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{c_i}{3}h_i + \frac{c_{i-1}}{6}h_i\right) = \\ = \frac{c_{i+1} + c_i}{2}h_{i+1} \qquad i = 1, \dots n-1$$

В левой части каждого из уравнений запишем коэффициенты c_i, в правой – значения функции в узлах сетки:

$$\frac{c_{i+1} + c_i}{2}h_{i+1} - \left(\frac{c_{i+1}}{3}h_{i+1} - \frac{c_i}{6}h_{i+1}\right) + \left(\frac{c_i}{3}h_i + \frac{c_{i-1}}{6}h_i\right) = \\ = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1,\dots n-1$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\frac{c_{i+1}}{6} \cdot h_{i+1} + \left(\frac{c_i}{3}h_{i+1} + \frac{c_i}{3}h_i\right) + \left(\frac{c_{i-1}}{6}h_i\right) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$i = 1, \dots n-1$$

Дополним уравнения условиями (12.19*) и (12.20), запишем СЛАУ для отыскания коэффициентов сплайна

$$\begin{cases} c_0 = \mu_1 \\ c_{i+1} \cdot h_{i+1} + 2 \cdot c_i \cdot (h_{i+1} + h_i) + c_{i-1} \cdot h_i = 6 \cdot \left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \\ \qquad i = 1,\dots n-1 \\ c_n = \mu_2 \end{cases}$$

Шаг 3

Проверим существование и единственность решения СЛАУ (12.10). Матрица является трехдиагональной. В первой и последней строке матрицы имеет место строгое диагональное преобладание: $1 > \kappa_1 = 0,\ 1 > \kappa_2 = 0.$

Все шаги сетки положительны: $h_i > 0, i = 1,...n$. Поэтому в строках матрицы (от второй строки до предпоследней) коэффициенты, расположенные левее и правее главной диагонали, отличны от нуля

$$\left| h_{i+1} \right| > 0; \ \left| h_i \right| > 0, \qquad i = 1,...n-1$$

и соблюдается строгое диагональное преобладание:

$$\left| 2 \cdot (h_{i+1} + h_i) \right| > \left| h_{i+1} \right| + \left| h_i \right|, \qquad i = 1,...n-1$$

По Теореме о применении прогонки решение СЛАУ (12.10) при любой ее правой части существует, единственно и может быть найдено прогонкой.

Таким образом, **существование и единственность интерполяционного кубического сплайна доказаны для любой заданной на сетке функции**. Кроме того, указан способ его построения: формулы (12.10)-(12.13) и метод прогонки.

Пример

Приведем общий вид СЛАУ для отыскания коэффициентов интерполяционного кубического сплайна на сетке $\Omega_{\bar{h}}$ отрезка $[a, b]$ с числом участков $n = 4$ и узлами $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$., где $x_0 = a, x_4 = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2\cdot(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2\cdot(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2\cdot(h_3 + h_4) & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} =$$

$$= 6 \times \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1} \\ \dfrac{f_3 - f_2}{h_3} - \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} \\ \dfrac{f_4 - f_3}{h_4} - \dfrac{f_3 - f_2}{h_3} \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

Здесь $h_1 = x_1 - x_0; h_2 = x_2 - x_1; h_3 = x_3 - x_2; h_4 = x_4 - x_3$,

$f_0 = f(x_0); f_1 = f(x_1); f_2 = f(x_2); f_3 = f(x_3); f_4 = f(x_4).$

Физическая модель и оптимальные свойства кубических сплайнов

На чертежной доске в $n+1$ точке с координатами $(x_i, f_i),\ i=0,\ldots n$ закреплен упругий жгут, его концы закреплены свободно.

Форма, которую примет закрепленный жгут, минимизирует его потенциальную энергию. Таким свойством обладает интерполяционный кубический сплайн (ИКС) $S(x)$ с естественными граничными условиями:

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots n$$

$$S''(x_0) = 0; \quad S''(x_n) = 0$$

Жгут (закрепленная на чертежной доске упругая линейка), примет форму ИКС с ЕГУ. Такое чертежное приспособление реально существует.

Приведем формулировку соответствующей задачи оптимизации.

На отрезке $[a,b]$ рассмотрим класс K непрерывных, дважды непрерывно-дифференцируемых функций $\Phi(x)$, принимающих на заданной сетке $x_i, i=0,\ldots n$, где $x_0 = a, x_n = b$, заданные значения $\Phi(x_i) = f_i, i=0,\ldots n$.

Необходимо найти такую функцию $\hat{\Phi}(x) \in K$, чтобы

$$\int_a^b (\Phi''(x))^2\, dx \to \min \tag{12.21}$$

читается так: необходимо найти $\hat{\Phi}(x) \in K$, чтобы

$$\forall\ \Phi(x) \in K \qquad \int_a^b (\hat{\Phi}''(x))^2\, dx \le \int_a^b (\Phi''(x))^2\, dx$$

Функционал задачи (12.21), т.е. выражение

$$\int_a^b (\Phi''(x))^2\, dx$$

соответствует **потенциальной энергии упругого жгута, форма которого соответствует графику функции** $\Phi(x)$.

Решением задачи (12.21) в классе K является интерполирующий кубический сплайн с естественными граничными условиями:

$$\hat{\Phi}(x) = S(x), S''(a) = 0, S''(b) = 0, S(x_i) = f_i, i = 0,\ldots n$$

Граничные условия вида

$$S''(a) = 0, S''(b) = 0$$

называют **естественными**, потому что **решение задачи оптимизации соответствует данным граничным условиям несмотря на то, что выполнение данных условий изначально не требовалось**.

(Постановка задачи оптимизации не содержит указаний на данные граничные условия, но они присущи оптимальному решению и возникают естественно, как бы сами собой).

Для сравнения приведем формулировку оптимизационной задачи с явным заданием граничных условий

На отрезке $[a,b]$ рассмотрим класс K^* непрерывных, дважды непрерывно-дифференцируемых функций $\Phi(x)$, принимающих на заданной сетке $x_i, i=0,\ldots n$, где $x_0=a, x_n=b$, заданные значения $\Phi(x_i)=f_i, i=0,\ldots n$, и соответствующих граничным условиям $\Phi''(a)=\mu_1, \Phi''(b)=\mu_2$.

Необходимо найти такую функцию $\hat{\Phi}(x)\in K^*$, чтобы

$$\int_a^b (\Phi''(x))^2\,dx \to \min \tag{12.22}$$

читается так: необходимо найти $\hat{\Phi}(x)\in K^*$, чтобы

$$\forall\ \Phi(x)\in K^* \qquad \int_a^b (\hat{\Phi}''(x))^2\,dx \le \int_a^b (\Phi''(x))^2\,dx$$

Решением задачи (12.22) в классе K^* является интерполирующий кубический сплайн $\hat{\Phi}(x)=S(x),\ S(x_i)=f_i, i=0,\ldots n$ с граничными условиями

$S''(a)=\mu_1, S''(b)=\mu_2$

В данном случае граничные условия выполняются, потому что требования к решению задачи (12.22) изначально их содержали.

Заметим, что полиномиальные сплайны часто оказываются решением различных оптимизационных задач

Сходимость сплайн-интерполяции

Результаты о сходимости сплайн-интерполяции приведем без доказательства.

Считаем, что отрезок интерполяции $[a,b]$ задан, сетка $x_0<\ldots<x_n$., где $x_0=a, x_n=b$, **сгущается на заданном отрезке**, то есть $n\to\infty$ (растет число участков) и при $n\to\infty$ $\bar{h}=\cdot\max\limits_{i=1,\ldots n} h_i\to 0$.

(при увеличении числа участков параметр $\bar{h}$, характеризующий максимальную при данном разбиении длину участка, стремится к нулю).

Как показывают приведенные ниже результаты, при сгущении сетки на отрезке $[a,b]$ **интерполяционный кубический сплайн** $S_{\bar{h}}(x)$ (построенный на сетке $\Omega_{\bar{h}}$)

сходится к заданной на отрезке функции $f(x)$,

производные сплайна $S_{\bar{h}}(x)$ **сходятся к ее (соответствующим) производным**.

Функциональное пространство, в котором сформулирован результат о сходимости, порядок сходимости при $\bar{h} \to 0$ и зависимость (независимость) самого факта сходимости от выбора последовательности сеток $\Omega_{\bar{h}}, \bar{h} \to 0$ зависят от:

1) гладкости функции $f(x)$;

2) ее принадлежности к классу дифференцируемых функций в функциональном пространстве $L_2[a,b]$;

3) выбора дополнительных (граничных) условий при построении интерполяционного кубического сплайна.

Например, на отрезке $[a,b]$ в зависимости от указанных выше условий 1), 2), 3) сходимость интерполяционного кубического сплайна к функции может иметь порядок 4, 3, 2, 3/2, 1.

Если сходимость имеет место, то сходимость первой производной сплайна к первой производной функции гарантирована для первых четырех случаев из списка, а именно, (4, 3, 2, 3/2) и имеет порядок на 1 меньше, то есть (3, 2, 1, 1/2) соответственно.

Сходимость второй производной сплайна ко второй производной функции гарантирована для первых двух случаев из списка, а именно, (4, 3) и имеет порядок (2, 1) соответственно.

Приведем формулировку результата с высокой скоростью сходимости:

Теорема 2. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана равномерная сетка $x_0 < \ldots < x_n$., где $x_0 = a, x_n = b$, с числом участков n и шагом

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Пусть функция $f(x)$ четыре раза непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Пусть $P_{3,h}(x)$ есть интерполяционный полином степени не выше 3, построенный на сетке с шагом h по точкам $(x_i, f_i),\ i = 0, 1, 2, 3$.

Через $P''_{3,h}(x_0)$, $P''_{3,h}(x_1)$ обозначены значения его второй производной в двух первых узлах сетки: $x_0 = a, x_1 = a + h$.

Пусть $Q_{3,h}(x)$ есть интерполяционный полином степени не выше 3, построенный на сетке с шагом h по точкам $(x_i, f_i),\ i = n, n-1, n-2, n-3$.

Пусть через $Q''_{3,h}(x_n)$, $Q''_{3,h}(x_{n-1})$ обозначены значения его второй производной в двух последних узлах сетки: $x_{n-1} = b - h, x_n = b$.

Тогда интерполяционный кубический сплайн $\hat{S}_h(x)$ с коэффициентами $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i = 1, \ldots n$, построенный по формуле (12.1) на сетке с числом разбиений n на основе СЛАУ

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{3}c_0 + \dfrac{h_1}{6}c_1 = \dfrac{h_1}{3}P''_{3,h}(x_0) + \dfrac{h_1}{6}P''_{3,h}(x_1) \\ c_{i-1}\,h_i + 2\,(h_i + h_{i+1})\,c_i + c_{i+1}\,h_{i+1} = 6\cdot\left(\dfrac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),\ i = 1,\ldots n-1 \\ \dfrac{h_n}{6}c_{n-1} + \dfrac{h_n}{3}c_n = \dfrac{h_n}{6}Q''_{3,h}(x_{n-1}) + \dfrac{h_n}{3}Q''_{3,h}(x_n) \end{cases}$$

и формул (12.11)-(12.13)

на **последовательности равномерных сгущающихся сеток**: $\Omega_h,\, h \to 0$

сходится равномерно к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с **4-м порядком**:

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \hat{S}_h(x) \right| \le \hat{M}h^4$$

а первые и вторые производные $S_h(x)$ **сходятся равномерно** к соответствующим (первым и вторым) производным $f(x)$ с **3-м и 2-м порядками**:

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f'(x) - \hat{S}'_h(x) \right| \le \hat{M}h^3$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) - \hat{S}''_h(x) \right| \le \hat{M}h^2$$

где $\hat{M} = const \cdot \max_{x\in[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$

Комментарии

1) Значение Теоремы 2 состоит в следующем: если для конкретной четырежды непрерывно-дифференцируемой функции $f(x)$ известна верхняя оценка константы $\hat{M}$, можно подобрать такое число участков равномерной сетки n, чтобы отличия сплайна $\hat{S}_h(x)$ от функции $f(x)$ (включая отличия их производных), были меньше заранее заданной величины $\varepsilon > 0$, например, меньше 10^{-4}.

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \hat{S}_h(x) \right| \le 10^{-4}$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f'(x) - \hat{S}'_h(x) \right| \le 10^{-4}$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) - \hat{S}''_h(x) \right| \le 10^{-4}$$

2) Независимо от того, **известна или нет** для конкретной четырежды непрерывно-дифференцируемой функции верхняя оценка указанной выше константы, сходимость интерполяционного кубического сплайна к функции (включая их производные) **имеет место**, причем с тем порядком, который указан в

формулировке Теоремы. Это означает, что при достаточно большом числе участков сетки отличия сплайна от функции (включая отличия их производных) будут как угодно малы.

3) В формулировке Теоремы 2 вместо полиномов $P_{3,h}(x)$ и $Q_{3,h}(x)$ (их степень не выше 3) могут быть использованы полиномы более высокой степени:

$P_{4,h}(x)$ – интерполяционный полином степени не выше 4, построенный на сетке с шагом h по первым пяти точкам сетки, то есть по точкам (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2, 3, 4$, и значения его второй производной $P''_{4,h}(x_0)$, $P''_{4,h}(x_1)$ в двух первых узлах сетки: $x_0 = a, x_1 = a + h$.

$Q_{4,h}(x)$ – интерполяционный полином степени не выше 4 построенный на сетке с шагом h по точкам (x_i, f_i), $i = n, n-1, n-2, n-3, n-4$ (это последние 5 точек сетки), и значения его второй производной $Q''_{4,h}(x_n)$, $Q''_{4,h}(x_{n-1})$ в двух последних узлах сетки: $x_{n-1} = b - h, x_n = b$.

Приведем формулировки результатов общего характера.

(С этими формулировками нужно ознакомиться, чтобы получить о сходимости сплайнов некоторые представления)

Источник: Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Том 5. – М.: Советская энциклопедия, 1984.

Для интерполяционного кубического сплайна $S_{\bar{h}}(x)$, заданного на отрезке $[a, b]$ на сетке $\Omega_{\bar{h}}$ с параметром $\bar{h}$ (максимальная длина участка сетки), при сгущении сетки ($\bar{h} \to 0$) и при наличии у функции $f(x)$ второй (обобщенной) производной в пространстве $L_2[a, b]$, имеет место:

1) сходимость сплайна $S_{\bar{h}}(x)$ к функции $f(x)$ **со 2-м порядком** в норме пространства $L_2[a, b]$ с оценкой

$$\| f(x) - S_{\bar{h}}(x) \|_{L_2[a,b]} \le C^{(0)} \cdot \| f''(x) \|_{L_2[a,b]} \cdot \bar{h}^2$$

2) сходимость первой производной сплайна $S'_{\bar{h}}(x)$ к первой производной функции $f'(x)$ **с 1-м порядком** в норме пространства $L_2[a, b]$ с оценкой

$$\| f'(x) - S'_{\bar{h}}(x) \|_{L_2[a,b]} \le C^{(1)} \cdot \| f''(x) \|_{L_2[a,b]} \cdot \bar{h}$$

Здесь

$$\| f(x) - S_{\bar{h}}(x) \|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b (f(x) - S_{\bar{h}}(x))^2 \, dx}$$

$$\| f'(x) - S'_{\bar{h}}(x) \|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b (f'(x) - S'_{\bar{h}}(x))^2 dx}$$

$$\| f''(x) \|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b (f''(x))^2 dx}$$

$C^{(0)}, C^{(1)}$ - константы, не зависящие от выбора сетки и выбора функции.

При дополнительном условии непрерывности и непрерывной производной имеет место:

3) **равномерная сходимость** интерполяционного кубического сплайна $S_{\bar{h}}(x)$ к функции $f(x)$ с **порядком 3/2 с оценкой**

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - S_{\bar{h}}(x) \right| \le C^{(0)} \cdot \| f''(x) \|_{L_2[a,b]} \cdot (\bar{h})^{\frac{3}{2}}$$

4) **равномерная сходимость** первой производной сплайна $S'_{\bar{h}}(x)$ к первой производной функции $f'(x)$ с **порядком 1/2 с оценкой**

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f'(x) - S'_{\bar{h}}(x) \right| \le C^{(1)} \cdot \| f''(x) \|_{L_2[a,b]} \cdot (\bar{h})^{\frac{1}{2}}$$

Здесь (как и выше)

$$\| f''(x) \|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b (f''(x))^2 dx}$$

$C^{(0)}, C^{(1)}$ - константы, не зависящие от выбора сетки и выбора функции.

$\bar{h} = \cdot \max\limits_{i=1,\ldots n} h_i \to 0$ (длина максимального участка сетки стремится к нулю).

Приведем формулировки для случаев 1, 2, 3 раза непрерывно-дифференцируемой функции и непрерывной функции.

5) Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет **непрерывную первую производную**, то для любой последовательности сеток $\Omega_{\bar{h}}$ с параметром $\bar{h}$ (максимальная длина участка сетки) для интерполяционного кубического сплайна $S_{\bar{h}}(x)$ верна оценка

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - S_{\bar{h}}(x) \right| \le M^{(1)} \cdot \bar{h} \cdot \omega(f'(x), \bar{h})$$

Константа $M^{(1)} > 0$ не зависит от функции $f(x)$ и сеток.

6) Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет **непрерывную вторую производную**, то для любой последовательности сеток $\Omega_{\overline{h}}$ с параметром $\overline{h}$ (максимальная длина участка сетки) для интерполяционного кубического сплайна $S_{\overline{h}}(x)$ и функции $f(x)$, а также для их первых производных $S'_{\overline{h}}(x)$ и $f'(x)$, верны оценки

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - S_{\overline{h}}(x) \right| \le M^{(2)} \cdot \overline{h}^2 \cdot \omega(f''(x), \overline{h})$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f'(x) - S'_{\overline{h}}(x) \right| \le M^{(2)} \cdot \overline{h} \cdot \omega(f''(x), \overline{h})$$

Константа $M^{(2)} > 0$ не зависит от функции $f(x)$ и сеток

7) Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет **непрерывную третью производную**, то существует такая последовательность сеток $\Omega_{\overline{h}}$ с параметром $\overline{h}$ (максимальная длина участка сетки), что для интерполяционного кубического сплайна $S_{\overline{h}}(x)$ и функции $f(x)$, для их первых производных $S'_{\overline{h}}(x)$ и $f'(x)$, а также для вторых производных $S''_{\overline{h}}(x)$ и $f''(x)$ верны оценки

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - S_{\overline{h}}(x) \right| \le M^{(3)} \cdot \overline{h}^3 \cdot \omega(f'''(x), \overline{h})$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f'(x) - S'_{\overline{h}}(x) \right| \le M^{(3)} \cdot \overline{h}^2 \cdot \omega(f'''(x), \overline{h})$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) - S''_{\overline{h}}(x) \right| \le M^{(3)} \cdot \overline{h} \cdot \omega(f'''(x), \overline{h})$$

Константа $M^{(3)} > 0$ не зависит от функции $f(x)$.

8) Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ **непрерывна**, то существует такая последовательность сеток $\Omega_{\overline{h}}$ с параметром $\overline{h}$ (максимальная длина участка сетки), что для интерполяционного кубического сплайна $S_{\overline{h}}(x)$ и функции $f(x)$ верна оценка

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - S_{\overline{h}}(x) \right| \le M^{(0)} \cdot \omega(f(x), \overline{h})$$

Константа $M^{(0)} > 0$ не зависит от функции $f(x)$.

В Лабораторной работе по теме «Сплайн-интерполяция» предлагается (практически) проверить порядок сходимости интерполяционного кубического сплайна с различными граничными условиями к тестовым функциям, имеющим различную константу гладкости.

Комментарии к параграфу 12.1

Рассмотрим некоторый интерполяционный кубический сплайн $S(x)$ с условиями

$$S(x_i) = f_i, i = 0,...n$$

и граничными условиями $S''(a) = \mu_1; \quad S''(b) = \mu_2$. В соответствии с (12.1) такой сплайн задан набором $4n$ коэффициентов $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i = 1, ...n$.

Предположим, что в одном из узлов сплайн-интерполяции – например, в узле x_s, значение функции $f(x)$ изменено:

$$f(x_s) = \tilde{f}_s = f_s + \delta$$

В соответствии с (12.1) интерполяционный кубический сплайн $\tilde{S}(x)$, соответствующий **новым условиям**

$$\tilde{S}(x_i) = f_i, i = 0,...n, i \neq s$$

$$\tilde{S}(x_s) = \tilde{f}_s$$

$$\tilde{S}''(a) = \mu_1; \quad \tilde{S}''(b) = \mu_2$$

будет задан **новым набором** $4n$ коэффициентов $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{d}_i,\ i = 1, ...n$, причем в соответствии с Теоремой 1 в силу изменения одного условия интерполяции произойдет **пересчет всех коэффициентов сплайна**, в том числе на тех участках сетки, которые удалены от узла x_s.

Указанное выше свойство (полный пересчет сплайна при изменении хотя бы одного условия интерполяции), соответствует физической модели: например, в случае ИКС с ЕГУ изменение одной точки закрепления чертежного жгута влечет изменение всей его линии: он минимизирует потенциальную энергию.

Если указанное свойство **не существенно**, можно применять **локальные интерполяционные сплайны**: изменение значения интерполируемой функции $f(x)$ в узле локального сплайна влечет за собой пересчет коэффициентов только на соседних участках.

Кроме того, применяют **аппроксимирующие сплайны**: в таком случае совпадение значений функции и сплайна, то есть

$$S(x_i) = f_i, i = 0,...n$$

в узлах сетки не отслеживается. Требуется выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{n} (S(x_i) - f_i)^2 \leq \delta$$

где число $\delta > 0$ задано заранее.

Пример 1 (граничные условия на вторые производные)

Задана функция на сетке

x_i	0	1	2
f_i	0	1	8

Нужен интерполяционный кубический сплайн с граничными условиями

$S''(0)=0$; $S''(2)=12$

Решение

Рассмотрим отрезок $[0;\ 2\ ]$ и сетку $x_0=0; x_1=1; x_2=2$. Участков сетки 2.

Кубический сплайн ищем в виде

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x), & x\in[\,0;1\,] \\ S_2(x), & x\in[\,1;2\,] \end{cases} \qquad (1)$$

где согласно (12.1)

$$S_1(x)=a_1+b_1\,(x-1)+\frac{c_1}{2}(x-1)^2+\frac{d_1}{6}(x-1)^3 \qquad (2)$$

$$S_2(x)=a_2+b_2(x-2)+\frac{c_2}{2}(x-2)^2+\frac{d_2}{6}(x-2)^3 \qquad (3)$$

Интерполяционный кубический сплайн нужно определить с учетом условий

$$\begin{aligned} &S(x_i)=f_i, \quad i=0,1,2 \\ &S''(0)=0; \quad S''(2)=12 \end{aligned} \qquad (4)$$

Коэффициенты сплайна (их 8), а именно: $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i=1,2$ найдем по Теореме 1, потому что предложенные граничные условия являются условиями на вторые производные: $S''(0)=\mu_1=0$; $S''(2)=\mu_2=12$.

Введем фиктивную переменную $c_0=0$ (потому что $\mu_1=0$). Для отыскания $c_i,\ i=1,2$ запишем СЛАУ

$$\begin{cases} c_0=0 \\ c_0\,h_1+2\,(h_1+h_2)\,c_1+c_2\,h_2=6\left(\dfrac{f_2-f_1}{h_2}-\dfrac{f_1-f_0}{h_1}\right) \\ c_2=12 \end{cases}$$

Сетка задана равномерная:

$h_1=1 \qquad h_2=1$

Функция $f(x)$, которую необходимо интерполировать, принимает значения

$f_0=0 \qquad f_1=1 \qquad f_2=8$

СЛАУ сводится к уравнению

$$c_0 + 4\,c_1 + c_2 = 6\left(\frac{8-1}{1} - \frac{1-0}{1}\right) = 36$$

откуда следует

$$0 + 4\,c_1 + 12 = 36 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 6\,.$$

Для отыскания d_i, $i = 1, 2$ запишем

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}\,,\, i = 1, 2$$

откуда следует

$$d_1 = \frac{6-0}{1} = 6 \qquad d_2 = \frac{12-6}{1} = 6$$

Для отыскания $b_i\,, i = 1, 2$ запишем

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + c_i\,\frac{h_i}{3} + c_{i-1}\,\frac{h_i}{6}\,, \quad i = 1, 2$$

что в условиях задачи означает

$$b_1 = \frac{1-0}{1} + \frac{6}{3} + \frac{0}{6} = 1 + 2 = 3 \qquad b_2 = \frac{8-1}{1} + \frac{12}{3} + \frac{6}{6} = 12$$

Из условий интерполяции получим

$$a_1 = f_1 = 1 \qquad a_2 = f_2 = 8$$

Ответ

Интерполяционный кубический сплайн с граничными условиями $S''(0) = 0\,;\quad S''(2) = 12$ имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 3\,(x-1) + \dfrac{6}{2}(x-1)^2 + \dfrac{6}{6}(x-1)^3 & x \in [\,0; 1\,] \\ S_2(x) = 8 + 12\,(x-2) + \dfrac{12}{2}(x-2)^2 + \dfrac{6}{6}(x-2)^3 & x \in [\,1; 2] \end{cases},$$

то есть

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 3\,(x-1) + 3\,(x-1)^2 + (x-1)^3 & x \in [\,0; 1\,] \\ S_2(x) = 8 + 12\,(x-2) + 6\,(x-2)^2 + (x-2)^3 & x \in [\,1; 2] \end{cases} \qquad (5)$$

Задача решена.

Проверка

В этом примере предложена тестовая функция $f(x) = x^3$. Она соответствует условиям $f''(0) = 0\,;\quad f''(2) = 12$. Значит, **она сама себе единственный интерполяционный сплайн**.

Чтобы проверить полученный ответ, приведем подобные слагаемые:

$$S_1(x) = 1 + 3\,(x-1) + 3\,(x-1)^2 + (x-1)^3 =$$
$$= 1 + (3x-3) + (3x^2 - 6\cdot x + 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$
$$= x^3$$

$$S_2(x) = 8 + 12\,(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 =$$
$$= 8 + (12x - 24) + 6(x^2 - 4x + 4) + (x^3 - 2x^2 + 4x - 8) =$$
$$= x^3$$

откуда следует, что построенный выше интерполяционный кубический сплайн есть

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = x^3, & x \in [\,0;1\,] \\ S_2(x) = x^3, & x \in [\,1;2\,] \end{cases}$$

с граничными условиями $S''(0) = 0$; $S''(2) = 12$

Решенная выше задача решена правильно, график на Рисунке 4.

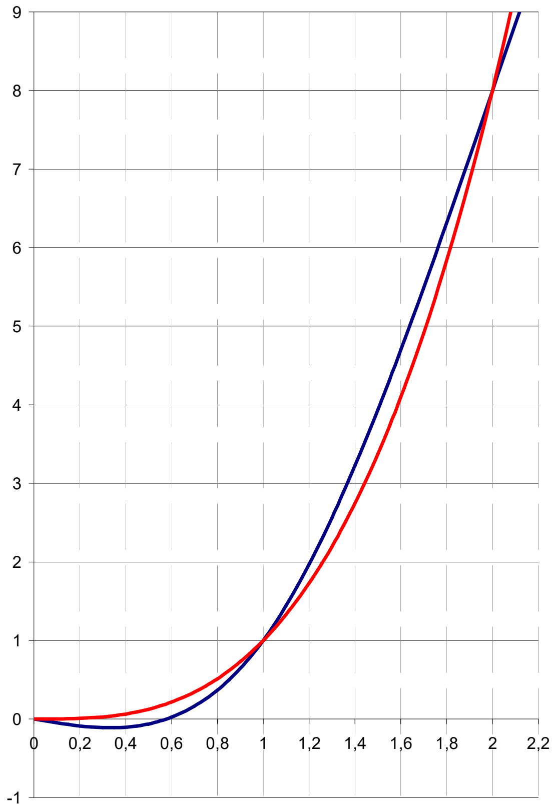

Рисунок 4

На рисунке показаны два кубических сплайна, интерполирующих на сетке 0; 1; 2 одну и ту же таблично заданную функцию $f(x) = x^3$. Красным цветом показано решение Примера 1 и синим цветом – решение Примера 2. Видно, какой из сплайнов соответствует ЕГУ: на концах отрезка интерполяции сплайн с ЕГУ имеет «нулевую» вогнутость (выпуклость).

Пример 2 (интерполяционный кубический сплайн с ЕГУ)

Задана функция на сетке

x_i	0	1	2
f_i	0	1	8

Нужен интерполяционный кубический сплайн с ЕГУ

$S''(0)=0$; $S''(2)=0$

Решение

Рассмотрим отрезок $[0;\ 2\ ]$ и сетку $x_0=0; x_1=1; x_2=2$. Участков сетки 2.

Как и в предыдущем примере, сплайн ищем в виде (1), (2), (3) с учетом условий

$$\begin{aligned} &S(x_i)=f_i, \quad i=0,1,2 \\ &S''(0)=0; \quad S''(2)=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Коэффициенты сплайна (их 8), а именно: $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i=1,2$ найдем по Теореме 1, потому что ЕГУ являются частным случаем условий на вторые производные: $S''(0)=\mu_1=0$; $S''(2)=\mu_2=0$.

Введем фиктивную переменную $c_0=0$. Для отыскания $c_i,\ i=1,2$ запишем СЛАУ

$$\begin{cases} c_0=0 \\ c_0\ h_1+2\,(h_1+h_2)\,c_1+c_2\ h_2=6\left(\dfrac{f_2-f_1}{h_2}-\dfrac{f_1-f_0}{h_1}\right) \\ c_2=0 \end{cases}$$

Сетка задана равномерная:

$$h_1=1 \qquad h_2=1$$

Функция $f(x)$, которую необходимо интерполировать, принимает значения

$$f_0=0 \qquad f_1=1 \qquad f_2=8$$

СЛАУ сводится к уравнению

$$c_0+4\,c_1+c_2=6\left(\frac{8-1}{1}-\frac{1-0}{1}\right)=36$$

С учетом $c_0=0$, $c_2=0$

$$0+4\,c_1+0=36 \ \Rightarrow\ c_1=9.$$

Для отыскания $d_i,\ i=1,2$ запишем

$$d_i=\frac{c_i-c_{i-1}}{h_i},\, i=1,2$$

что означает

$$d_1 = \frac{9-0}{1} = 9 \qquad d_2 = \frac{0-9}{1} = -9.$$

Для отыскания $b_i, i = 1, 2$ запишем

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + c_i \frac{h_i}{3} + c_{i-1} \frac{h_i}{6}, \quad i = 1, 2$$

что в условиях задачи означает

$$b_1 = \frac{1-0}{1} + \frac{9}{3} + \frac{0}{6} = 1 + 3 = 4 \qquad b_2 = \frac{8-1}{1} + \frac{0}{3} + \frac{9}{6} = 8.5 \quad .$$

Из условий интерполяции получим

$$a_1 = f_1 = 1 \qquad a_2 = f_2 = 8 \quad .$$

Ответ

Интерполяционный кубический сплайн с естественными граничными условиями $S''(0) = 0$; $S''(2) = 0$ имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 4\,(x-1) + \dfrac{9}{2}\,(x-1)^2 + \dfrac{9}{6}\,(x-1)^3 & x \in [\,0; 1\,] \\ S_2(x) = 8 + 8.5\,(x-2) + \dfrac{0}{2} \cdot (x-2)^2 - \dfrac{9}{6}(x-2)^3 & x \in [\,1; 2\,] \end{cases}$$

то есть

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 4\,(x-1) + 4.5\,(x-1)^2 + 1.5\,(x-1)^3 & x \in [\,0; 1\,] \\ S_2(x) = 8 + 8.5\,(x-2) - 1.5\,(x-2)^3 & x \in [\,1; 2\,] \end{cases}$$

Задача решена.

Проверка (по определению)

В этом примере предложена тестовая функция $f(x) = x^3$. Она не соответствует условиям $f''(0) = 0$; $f''(2) = 0$. Значит, **она сама себе не сплайн**. Выясним, как выглядит сплайн:

$$S_1(x) = 1 + 4\,(x-1) + 4.5\,(x-1)^2 + 1.5\,(x-1)^3 =$$
$$= 1 + (4x-4) + (4.5x^2 - 9 \cdot x + 4.5) + 1.5\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$
$$= 1.5\,x^3 - 0.5\,x$$

$$S_2(x) = 8 + 8.5\,(x-2) - 1.5\,(x-2)^3 =$$
$$= 8 + (8.5x - 17) - 1.5\,(x^3 - 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 4x - 8) =$$
$$= -1.5\,x^3 + 9x^2 - 9.5x + 3$$

то есть

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1.5x^3 - 0.5x, & x \in [\,0; 1\,] \\ S_2(x) = -1.5x^3 + 9x^2 - 9.5x + 3, & x \in [\,1; 2\,] \end{cases}$$

Проверим выполнение всех требований к сплайну.

На участке $x \in [0;\ 1\,]$ действует формула $S_1(x) = 1.5\,x^3 - 0.5\,x$.

$S_1(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $S_1(1) = 1.5 - 0.5 = 1$

(выполнены условия интерполяции на границе участка)

$S'_1\,(x) = 4.5\,x^2 - 0.5$ $\qquad\qquad$ $S'_1\,(1) = 4.5 - 0.5 = 4$

(вычислена первая производная на правой границе участка)

$S''_1(x) = 9\,x$ $\qquad\qquad$ $S''_1(1) = 9$

(вычислена вторая производная на правой границе участка)

$S''_1(0) = 0$

(на левой границе отрезка естественное граничное условие выполняется)

На участке $x \in [1;\ 2\,]$ действует формула $S_2(x) = -1.5\,x^3 + 9x^2 - 9.5x + 3$

$S_2(1) = -1.5 + 9 - 9.5 + 3 = 12 - 11 = 1$

$S_2(2) = -1.5 \cdot 8 + 9 \cdot 4 - 9.5 \cdot 2 + 3 = 39 - 12 - 19 = 8$

(выполнены условия интерполяции на границах участка)

$S'_2(x) = -4.5\,x^2 + 18x - 9.5$

$S'_2(1) = -4.5 + 18 - 9.5 = 18 - 14 = 4 = S'_1\,(1)$

(вычислена первая производная на левой границе участка, непрерывность проверена)

$S''_2(x) = -9\,x + 18$

$S''_2(1) = -9 + 18 = 9 = S''_1(1)$

(вычислена вторая производная на левой границе участка, непрерывность проверена)

$S''_2(2) = -9 \cdot 2 + 18 = 18 - 18 = 0$

(на правой границе отрезка естественное граничное условие выполняется)

Решенная выше задача решена правильно. График решения на Рисунках 4 и 5.

На Рисунке 4 можно сравнить решение Примера 1 и Примера 2.

На Рисунке 5 показано, что кубический сплайн с ЕГУ, интерполирующий $f(x) = x^3$ на сетке 0; 1; 2, составлен из двух кубических полиномов. Сначала показаны полиномы, а затем сплайн и «неиспользованные» остатки полиномов.

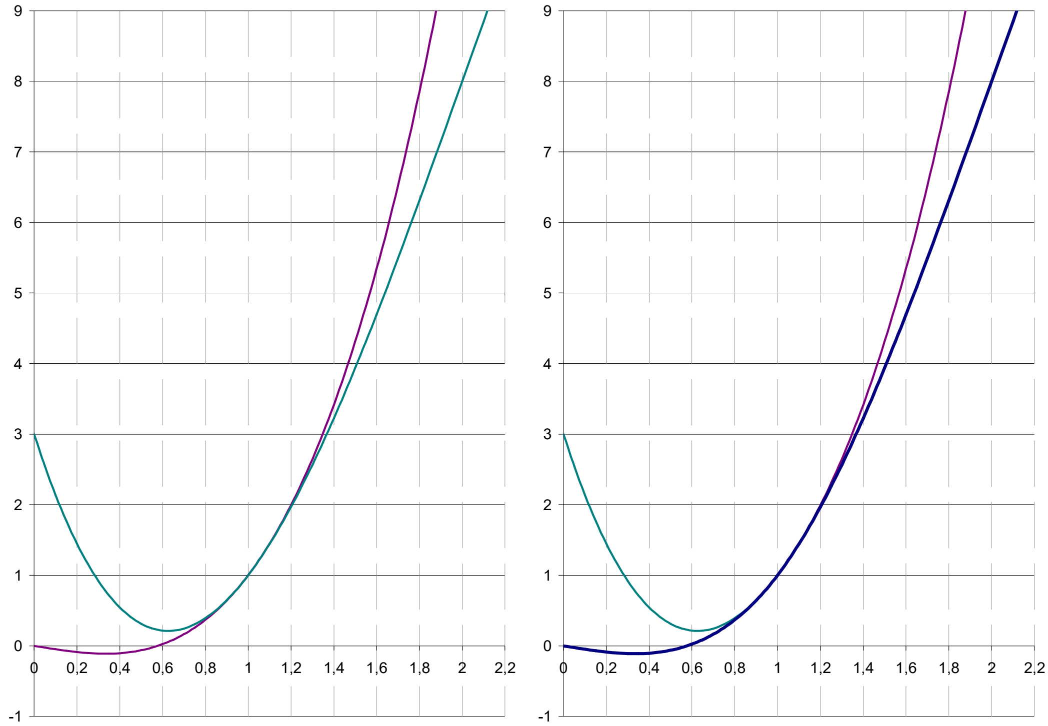

Рисунок 5

На рисунке полиномы $S_1(x) = 1.5\,x^3 - 0.5\,x$, $S_2(x) = -1.5\,x^3 + 9x^2 - 9.5x + 3$, и «склеенное» из них решение Примера 2 – интерполяционный кубический сплайн с ЕГУ.

Примечание

Результаты расчета сплайна обычно записывают в таблицы:

Пример 1 Граничные условия $S''(0) = 0$; $S''(2) = 12$

Исходные данные				Коэффициенты кубического сплайна			
i	x_i	h_i	f_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	**0**	---	**0**	---	---	**0**	---
1	**1**	1	**1**	**1**	3	**6**	6
2	**2**	1	**8**	**8**	12	**12**	6

Пример 2 (ЕГУ)

Исходные данные				Коэффициенты кубического сплайна			
i	x_i	h_i	f_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	**0**	---	**0**	---	---	**0**	---
1	**1**	1	**1**	**1**	4	**9**	9
2	**2**	1	**8**	**8**	8.5	**0**	-9

Такие таблицы удобно заполнять одновременно с проведением расчетов.