Задача 11.

Вариант 3

① Докажите Теорему 1 о применении метода прогонки

Теорема 1:

Если $|\varkappa_1| \le 1$ $|\varkappa_2| < 1$ $B_i \ne 0, A_i \ne 0, |C_i| \ge |A_i| + |B_i|$ $i = \overline{1, n-1}$, то для $\forall$ правой части $(\mu_1, \mu_2, \varphi_i\ i = \overline{1, n-1})$ система имеет единственное решение и его можно найти методом прогонки

Д-во

1) Проверим, что в формуле прогонки знаменатель не 0

$\alpha_1 = \varkappa_1$

$|\alpha_1| = |\varkappa_1| \le 1$

$\alpha_2 = \dfrac{B_1}{C_1 - \alpha_1 A_1}$

$|C_1 - \alpha_1 A_1| \ge ||C_1| - |\alpha_1 A_1|| \ge ||C_1| - |A_1|| \ge |B_1| > 0$

т.к. $B_1 \ne 0$ и $|C_1| \ge |A_1| + |B_1| > |A_1|$

$|\alpha_2| = \dfrac{|B_1|}{|C_1 - \alpha_1 A_1|} \le \dfrac{|B_1|}{||C_1| - |\alpha_1||A_1||} \le \dfrac{|B_1|}{||C_1| - |A_1||} \le \dfrac{|B_1|}{|B_1|} = 1$

Для всех α_i, β_i по индукции доказыв., что знаменатель $\ne 0$ а все $|\alpha_i| \le 1$

Проверим знаменатель в т. $1 - \varkappa_2 \alpha_n$

$|1 - \varkappa_2 \alpha_n| \ge ||1| - |\varkappa_2 \alpha_n|| = |1 - |\varkappa_2 \alpha_n|| \ge |1 - |\varkappa_2|| \ge 0$ т.к. $|\alpha_n| \le 1$

Знаменатель $\ne 0$

2) По способу построения y_i являются решениями системы

Дана матрица A

Для сист. вида: $Ay = b$

1) $\det A \ne 0 \Rightarrow \forall b\ \exists! y$

2) $\det A = 0 \Rightarrow$ для некот. b $\exists \infty$ много решений или $\nexists$ вовсе

Из курса АиГ по Альтернативе Фредгольма:

Линейная система с 3х диаган. матрицей, удовлетвор. услов. $|C_i| \ge |A_i| + |B_i|$ не вырождена $\Rightarrow$ Система имеет единственное решение для $\forall b$

ч.т.д.

② Оценка числа действий

а) 3×3

Для м. Гаусса: 3 операции для выбора главного эл-та, 24 операции для пересчёта эл-ов матрицы и вектора b.
Итого 27

Для м. Прогонки: 9 операций для умнож-я в прямом и обратном ходе, 5 для деления и 9 для сложения (вычитания)
Итого 23

б) 4×4

м. Гаусса: всего 64

м. Прогонки: 31

в) В общем случае

Для метода Гаусса $\sim n^3$ операций

Для метода Прогонки $\sim 8n-1$

	прямой ход	обратный ход	всего
умножение	$2n-2$	$n+2$	$3n$
деление	$2n-2$	1	$2n-1$
сложение/выч.	$2n-2$	$n+2$	$3n$