

# Зачёт

## Вопросы

1. Динамическая система. Фазовое пространство. Состояние равновесия. Периодические и квазипериодические траектории.
2. Системы ОДУ. Точечные отображения. Гомео- и диффеоморфизм, Решение ДС, траектория. Поток. Решение точечного отображения. Векторное поле. Пространство ДС. Пространство параметров. Топологическая эквивалентность. Грубые системы. Неблуждающие траектории.
3. Состояния равновесия и неподвижные точки,  $k$ -кратные циклы. Диссипация. Консервативность. Устойчивость (по Ляпунову, орбитная, асимптотическая, по Лагранжу). Инвариантное многообразие. Системы первого порядка. Грубые и негрубые системы.
4. Осциллятор Ван-дер-Поля.
5. Бифуркации одномерных систем (биф. вилка, транскритическая биф.). Одномерные отображения.
6. Грубое отображения, Бифуркации отображения, Двумерные ДС и состояния равновесия в них, Бифуркации двумерных систем (Седлоузла, Андронова-Хопфа, Гомоклиническая).
7. Теорема Андронова-Леонтович.
8. Поворот поля. Кривая Трикоми в уравнении математического маятника.
9. Метод функции Ляпунова, Критерий Бендиксона-Дюлака.
10. Уравнения на торе.

11. Число вращения Пуанкаре.
12. Системы третьего порядка и состояния равновесия в них.
13. Теорема Адамара-Перрона, теорема о центральном многообразии. Бифуркации трёхмерных систем. Периодические движения в двумерной неавтономной системе. Матрица монодромии. Теорема Флоке.
14. Двумерное отображение в общем виде, типы и расположение неподвижных точек.
15. Бифуркация Неймарка-Сакера. Осциллятор Стюарта-Ландау.
16. Динамический хаос. Детерминированная система. Отображения растягивающие, топологически транзитивные, чувствительно-зависимые от начальных условий.
17. Целая траектория. Аттрактор. Максимальный аттрактор. Устойчивые и неустойчивые множества. Множество Кантора.
18. Странный и квазистранный аттракторы. Показатель Ляпунова, Отображение “тент”. Соленоид Смейла-Вильямса.
19. Отображение “сдвиг Бернулли”.
20. Лоренцевское отображение.
21. Логистическое отображение (орбита периода 2, каскад удвоений, хаос) и замена для получения отображения “тент”.
22. Бифуркационная структура унимодального отображения. Перенормировка. Двухкратное отображение (предел Фейгенбаума, орбита периода 3. Порядкок Шарковского.
23. Теорема Шильникова о бифуркациях гомоклинических орбит к седлу и седло-фокусу.
24. Аттракторы и бифуркации в системе Лоренца и кусочно-линейной системе лоренцевского типа.
25. Задача Пуанкаре-Биркгофа. Гомоклинические касания. Подкова Смейла. Бифуркации и аттракторы в системе с гомоклинической петлёй к седло-фокусу.

## Примеры задач

**Задача 4.8.8.** При каком  $a$  отображение окружности  $\bar{\varphi} = \phi + a \sin \varphi$  является гомеоморфизмом?

**Задача 4.8.9.** При каком  $k$  отображение

$$\begin{aligned} \bar{x} &= kx, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \bar{x} &= 4(1-k)x^2 + (5k-4)x - k + 1, & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{aligned}$$

является диффеоморфизмом отрезка  $[0, 1]$ ?

**Задача 4.8.10.** Покажите, что в данной системе устойчивый предельный цикл рождается при бифуркации Андронова-Леонтович и исчезает при бифуркации Андронова-Хопфа.

$$\ddot{x} + \left( \lambda + \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \dot{x} + x^2 - x = 0.$$

**Задача 4.8.11.** Для системы  $\dot{x} = x - ax^2 - xy$ ,  $\dot{y} = -y + bxy$ , где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные, докажите отсутствие предельных циклов.

**Задача 4.8.12.** Являются ли функция  $V(x, y) = \ln(1 + x^2) + y^2$  функцией Ляпунова для системы  $\dot{x} = x(y - 1)$ ,  $\dot{y} = -\frac{x^2}{1+x^2}$ ?

**Задача 4.8.13.** С помощью поворота поля докажите существование бифуркации сепаратрис седла в системе  $\ddot{x} + \lambda \dot{x} + 2x + x^2 - x^3 = 0$ , где  $\lambda$  — параметр.

**Задача 4.8.14.** С помощью одномерного отображения исследуйте систему  $\dot{\varphi} = \pi$ ,  $\dot{\theta} = 1$ , где  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  и  $\theta \in \mathbb{S}^1$ .

**Задача 4.8.15.** Найдите максимальный аттрактор динамической системы в поглощающей области  $G$ :  $\ddot{x} + \lambda \dot{x} + x^3 - x = 0$ ,  $G = \left\{ (x, \dot{x}) : \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \leq 0 \right\}$ .

**Задача 4.8.16.** Для отображения  $\bar{x} = -\pi \sin x$  (а) найдите его инвариантный интервал, (б) докажите, что оно имеет орбиты только чётных периодов, (в) постройте двухкратное отображение.

**Задача 4.8.17.** Докажите существование странного аттрактора в одномерном отображении (найти инвариантный интервал, вычислить или оценить показатель Ляпунова)  $\bar{x} = \frac{3}{2}x \pmod{1}$ .

**Задача 4.8.18.** Найти инвариантное множество (не покидающее область  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) двумерного отображения

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{4}, \\ \bar{y} = 4y - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}, \\ \bar{y} = 4y - \frac{5}{4}, \end{cases} \quad \text{при } y > \frac{1}{2}.$$