Модуль 6. Численное решение нестационарного уравнения теплопроводности

6.1. Постановка задачи. Явная разностная схема

$$
(1)\quad \begin{cases} U_t = U_{xx} + f(x,t), x \in [0,1], t \in [0,T] \\ \textit{нач.условия}\ [\quad U(x,0) = \varphi(x) \\ \textit{краевые условия}\ \left[\begin{array}{l} \alpha_1 U(0,t) + \alpha_2 U_x'(0,t) = \mu_1(t), |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0 \\ \beta_1 U(1,t) + \beta_2 U_x'(1,t) = \mu_2(t), \geq |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad U(x,t)=?
$$

<u>Смысл задачи (1):</u>

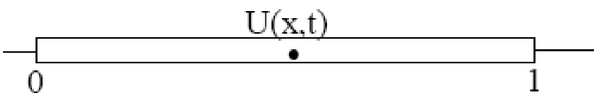
U(x,t) – температура в точке стержня с координатой x в момент времени t.

φ(x) – распределение температуры в начальный момент времени.

функции μ_1,μ_2 и коэффициенты α_i, β_i , i=1,2 определяют тепловой режим на концах стержня в любой момент времени.

f(x,t) – функция плотности источников или стоков тепла на стержне.

Уравнение и система уравнений типа (1) используется в задачах химической кинематики, моделях биологических популяций и при моделировании движения фронта при боевых действиях.



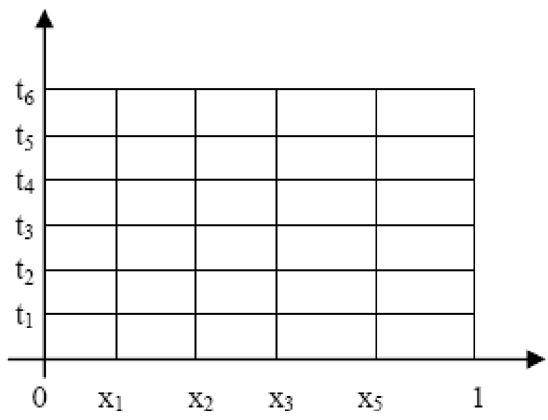
6.2. Явная разностная схема

Сетка и разностная схема:

$$h = \frac{1}{n}, x_i = ih, i = \overline{0,n}\ x_0 = 0\quad x_n = 1\quad \tau = \frac{T}{m}\quad t_j = j\tau, j = \overline{0,m}$$

$U_{ij} = U(x_i, t_j)$ - точное решение задачи (1) в узлах сетки

V_{ij} - точное решение разностной схемы в узлах сетки.



$$
\begin{array}{l}
(2-1) \\ \\ (2-2) \\ (2-3) \\ \\ (2-4)
\end{array}
\begin{cases}
\dfrac{V_{ij+1}-V_{ij}}{\tau}-\dfrac{V_{i+1j}-2V_{ij}+V_{i-1j}}{h^2}=f(x_i,t_j),\overline{i=1,n-1},\ j=\overline{0,m} \\
V_{i0}=\varphi(x_i) \\
\alpha_1 V_{0j}+\alpha_2\dfrac{V_{1j}-V_{0j}}{h}=\mu_1(t_j) \qquad j=\overline{1,m} \\
\beta_1 V_{nj}+\beta_2\dfrac{V_{nj}-V_{n-1j}}{h}=\mu_2(t_j)
\end{cases}
$$

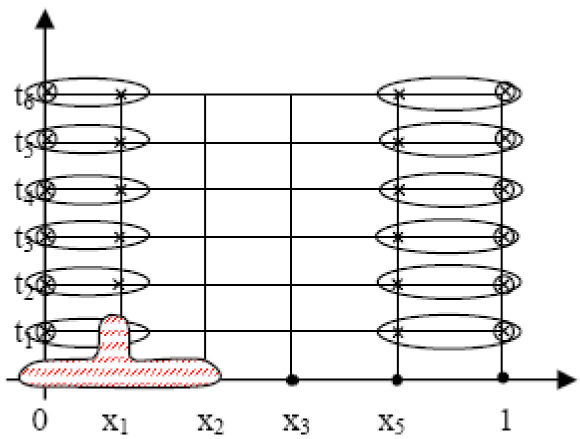
Значения сеточной функции U_{ij} $и$ V_{ij} соответствующие одному компоненту времени $t=t_j$ называются одним слоем.

Рассмотрим задачу (1) и разностную схему (2).

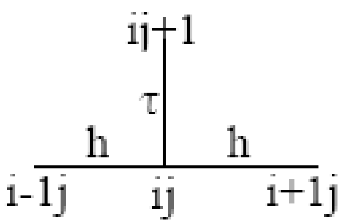
V_{31}- приближенное значение температуры стержня при $x=x_3$ в момент времени t_1.

$\otimes$ - эти узлы соответствуют границе стержня, значения сеточной функции V в этих узлах определяют температуру на границах стержня.

$\left.\begin{matrix}\otimes & \times \\ \times & \otimes\end{matrix}\right\}$ - узлы участвующие в аппроксимации граничных условий.



Это шаблон, аппроксимирующий основное уравнение. Его можно прикладывать к узлам: $i=\overline{i,n-1}$ $\quad j=\overline{0,m-1}$



Способ решения схемы

находим $V_{i0}=\varphi_i, i=0,n,$ затем (2*-2) схема решается послойно.

для слоя j=(0,m-1) вычисляем:

$V_{ij+1}=\left(\dfrac{V_{i+1j}-2V_{ij}+V_{i-1j}}{h^2}+f_{ij}\right)\tau+V_{ij}, i=\overline{1,n-1}$ $(2*-1)$ затем (2-3) и (2-4):

$$V_{0j}=\frac{\left(\mu_1(t_j)-\dfrac{\alpha_2}{n}V_{1j}\right)}{\alpha_1-\dfrac{\alpha_2}{h}}\ (2*-3)\quad V_{nj}=\frac{\left(\mu_2(t_j)+\dfrac{\beta_2}{h}V_{n-1j}\right)}{\beta_1+\dfrac{\beta_2}{n}}\ (2*-4)$$

Переходим к следующему условию.

6.3. Неявная схема (чисто неявная)

$$(1^*)\begin{cases}U_t=U_{xx}+f(x,t)\\ U(x,0)=\varphi(x)\\ U(0,t)=\mu_1(t)\ \ U(1,t)=\mu_2(t)\\ x\in[0,1], t\in[0,T]\end{cases}$$

Сетка: $h=\dfrac{1}{n}, x_i=ih, i=\overline{0,n}\ x_0=0\quad x_n=1\quad \tau=\dfrac{T}{m}\quad t_j=j\tau, j=\overline{0,m}$

$$(15)\begin{cases}\dfrac{V_{ij+1}-V_{ij}}{\tau}-\dfrac{V_{i+1j+1}-2V_{ij+1}+V_{i-1j+1}}{h^2}=f(x_i,t_j)\\ f_{ij+1}\overset{def}{=}\Phi_{ij}, i=\overline{1,n-1}, j=\overline{0,m-1}\\ V_{i0}=\varphi_i, i=\overline{0,n}\\ V_{0j}=\mu_{1j}, V_{nj}=\mu_{2j}, j=\overline{1,m}\end{cases}$$

Это чисто неявная схема: схему (15) решают послойно, 0-й слой – из начальных условий. При нахождении каждого последующего слоя, нужно решать систему с трехдиагональной матрицей.

Для отыскания j+1 слоя, используется j-й слой:

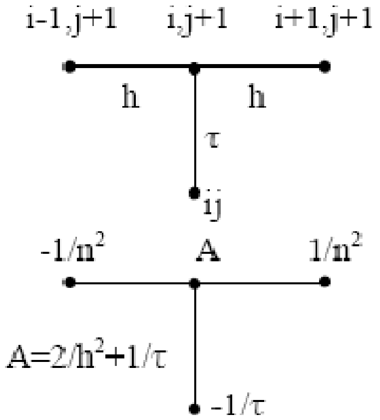
$V_{0j+1}=\mu_{1j+1}\quad V_{nj+1}=\mu_{2j+1}$

$$(16)\boxed{-\frac{1}{h^2}V_{i-1j+1}+AV_{ij+1}-\frac{1}{h^2}V_{i+1j+1}=f_{ij+1}+\frac{V_{ij}}{\tau}}$$

Для модельной задачи (1*) и неявной схемы (15) можно построить вспомогательную задачу (1**) и неявную разностную схему, аналогичную (15) ⇒можно ввести определение вычислительной устойчивости (15).

Оказывается (15) вычислительно устойчива при любом выборе шага h и τ. (Эту теорему доказать самим)

Рассмотрим модельную задачу (1*) из #11:



6.4. Неявная схема с весом 1/2

Запишем вычислительно устойчивую схему для любых h и τ и будем более быструю сходимость чем, чисто неявная и явная схема.

$$(17)\begin{cases} \dfrac{V_{ij+1}-V_{ij}}{\tau}-\dfrac{1}{2}\dfrac{V_{i+1j}-2V_{ij}+V_{i-1j}}{h^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{V_{i+1j+1}-2V_{ij+1}+V_{i-1j+1}}{h^2}= \\ =f\left(x_i,t_{j+1/2}\right), i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{0,m-1} \\ V_{i0}=\varphi_i, i=\overline{0,n} \\ V_{0j}=\mu_{1j}, V_{nj}=\mu_{2j}, j=\overline{0,m} \quad f_{ij+1/2}\overset{def}{=}\Phi_{ij} \end{cases}$$

схема (17) является неявной и решается послойно.

<u>начальный слой:</u> $V_{i0}=\varphi_i, i=\overline{0,n}$ слой j+1 находиться на основе j-го, при этом решается система с 3-х диагональной матрицей.

$V_{0j+1}=\mu_{1j+1}\quad V_{nj+1}=\mu_{2j+1}$

$$\boxed{-\frac{1}{2h^2}V_{i-1j+1}+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{\tau}\right)V_{ij+1}-\frac{1}{2h^2}V_{i+1j+1}=f_{ij+1/2}+\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{h^2}\right)V_{ij}+\frac{1}{2h^2}V_{i-1j}+\frac{1}{2h^2}V_{i+1j}\ (18)}$$

- решается на каждом слое.

Определение вычислительной устойчивости и ее анализ проводиться аналогично #11.

Итог по #11-12:

Пусть дана задача Коши для линейного параболического уравнения (например (1) или (1*)). В этом случае предпочтительнее использовать неявные разностные схемы улучшенного порядка