Наилучшие равномерные приближения. Экономизация степенных рядов

Задача №3

1) Проведите экономизацию полинома, построенного для вычисления функции $f(x)=e^x$ на отрезке $x\in[-1;1]$ на основе формулы Тейлора по степеням x, усеченной до степени $n=4$ включительно (то есть степень остатка не менее $n+1=5$).

2) Оцените погрешность применения на отрезке $x\in[-1;1]$

экономизированного полинома.

3) Сравните погрешность применения экономизированного полинома

с погрешностью применения на отрезке $x\in[-1;1]$ «другой» формулы Тейлора,

изначально усеченной до той степени,

которую имеет экономизированный полином.

4) Проведите повторную экономизацию (то есть еще одно понижение степени уже экономизированного полинома) и анализ погрешности применения нового полинома.

Решение

Шаг 1

Для функции e^x запишем формулу Тейлора

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}e^{\xi},\ \xi\in[0;x]$$

Остаток представлен в форме Лагранжа.

Шаг 2

С целью приближенного вычисления e^x используем полином $S_4(x)$ степени $n=4$, полученный **усечением формулы**, то есть

$e^x\approx S_4(x)$, где

$$S_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

Шаг 3

Погрешность применения $S_4(x)$ в точке x (то есть погрешность усечения) составит

$$E(x) = e^x - S_4(x) = \frac{x^5}{5!} e^{\xi}, \; \xi \in [0; x]$$

При $x \in [-1; 1]$ верна оценка

$$\max_{\xi \in [-1;1]} \left| e^{\xi} \right| \le e$$

поэтому для погрешности усечения формулы Тейлора верна оценка

$$\max_{x \in [-1;1]} | E(x) | \le \frac{e}{5!} = \frac{e}{120}$$

то есть

$$\max_{x \in [-1;1]} | E(x) | \le 0.02265$$

Шаг 4

Чтобы провести **экономизацию** полинома $S_4(x)$ при $x \in [-1; 1]$,

нужен **полином Чебышёва степени** $n = 4$, **наименее уклоняющийся от нуля на отрезке** $[-1; 1]$ **в классе полиномов степени** $n = 4$ **со старшим коэффициентом, равным единице** *(название у него такое, короче нельзя).*

Такой полином обозначим $T_4(x)$.

Комментарий

То, что выше сказано о $T_4(x)$ текстом, записывают так:

$T_4(x)$ есть решение задачи

$$\max_{x \in [-1;1]} | P_4(x) | \to \min$$

когда в качестве $P_4(x)$ рассматривают все полиномы степени $n = 4$, у которых коэффициент при x^4 равен единице.

Шаг 5

Чтобы записать $T_4(x)$, используем сведения о его корнях:

$$x_s = \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 4}(1 + 2s) \right), \quad s = 0,...3$$

и учтем, что старший коэффициент полинома равен единице.

Поэтому

$$T_4(x) = (x - \cos\frac{\pi}{8})(x - \cos\frac{3\pi}{8})(x - \cos\frac{5\pi}{8})(x - \cos\frac{7\pi}{8})$$

После преобразований получим

$$T_4(x) = \left(x^2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \cdot \left(x^2 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$$

Шаг 6

Запишем максимальное по модулю значение, которое принимает на отрезке $[-1; 1]$ полином Чебышёва $T_4(x)$:

$$\max_{x \in [-1;\, 1]} |\, T_4(x)\, | = \frac{1}{2^{4-1}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Шаг 7

Проведем **экономизацию** полинома $S_4(x)$ при $x \in [-1; 1]$.

Для этого в формуле полинома $S_4(x)$ заменим x^4 полиномом $\{x^4 - T_4(x)\}$. Полином, полученный после замены, обозначим $S_3^*(x)$:

$$S_3^*(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\{x^4 - T_4(x)\}}{4!}$$

Полином $S_3^*(x)$ можно записывать разными способами, перечислим их:

$$S_3^*(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\{x^4 - \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)\}}{4!}$$

(здесь видно, как получен $S_3^*(x)$)

$$S_3^*(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\{x^2 - \frac{1}{8}\}}{4!}$$

(здесь видно, что $S_3^*(x)$ не содержит степени 4 и отличается от $S_4(x)$ только последним слагаемым)

$$S_3^*(x) = \left(1 - \frac{1}{8 \cdot 24}\right) + x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) \cdot x^2 + \frac{x^3}{6}$$, то есть

$$S_3^*(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24} \cdot x^2 + \frac{x^3}{6}$$

(здесь видно, как нужно вычислять (программировать) $S_3^*(x)$)

Шаг 8

Погрешность применения $S_3^*(x)$ в точке x для вычисления e^x (по определению) составит

$$E^*(x) = e^x - S_3^*(x)$$

По Утверждению 3, для погрешности при $x \in [-1; 1]$ верна оценка

$$\max_{x \in [-1;\, 1]} \left| E^*(x) \right| \le \frac{e}{5!} + \frac{1}{2^3 \cdot 4!},$$

то есть

$$\max_{x \in [-1;\, 1]} \left| E^*(x) \right| \le \frac{e}{120} + \frac{1}{192} = 0.02786$$

Здесь $\dfrac{e}{120}$ – оценка погрешности усечения, то есть замены e^x полиномом $S_4(x)$;

$\dfrac{1}{2^3 \cdot 4!}$ – погрешность экономизации, то есть замены $S_4(x)$ полиномом $S_3^*(x)$.

Комментарии и выводы

Как и следовало ожидать, применение экономизированного $S_3^*(x)$ имеет несколько большую погрешность, чем применение усеченной формулы Тейлора $S_4(x)$

$$\max_{x \in [-1;1]} \left| e^x - S_4(x) \right| \le 0.02265$$

$$\max_{x \in [-1;\, 1]} \left| e^x - S_3^*(x) \right| \le 0.02786$$

Напомним: экономизация не уменьшает, а **увеличивает** погрешность применения формулы, но снижает **вычислительную погрешность** (которая здесь не показана), потому что вычисляются полиномы меньших степеней.

Шаг 9

Сравним, что в данном случае полезнее:

использовать экономизированный полином степени 3

$$S_3^*(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24} \cdot x^2 + \frac{x^3}{6}$$

или записать формулу Тейлора в виде

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} e^{\xi}, \qquad \xi \in [0; x]$$

и применять ее усечение до степени 3.

Усечение до степени 3 имеет вид

$$S_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Погрешность применения полинома $S_3(x)$ в точке x составит

$$E_3(x) = e^x - S_3(x) = \frac{x^4}{4!} e^{\xi}, \; \xi \in [0; x]$$

При $x \in [-1; 1]$ верна оценка

$$\max_{x \in [-1;1]} |\, E_3(x) \,| \le \frac{e}{4!} = \frac{e}{24}$$

то есть

$$\max_{x \in [-1;1]} |\, E_3(x) \,| \le 0.11326$$

Очевидно, что на отрезке $[-1; 1]$ экономизированный полином третьей степени $S_3^*(x)$ даст погрешность в три (почти в четыре) раза меньше , чем усеченная до третьей степени формула Тейлора $S_3(x)$:

$$\max_{x \in [-1; 1]} \left| e^x - S_3^*(x) \right| \le 0.02786$$

$$\max_{x\in[-1;\,1]}\left| e^x - S_3(x) \right| \le 0.11326$$

Выводы

$S_3^*(x)$ лучше, чем $S_3(x)$.

Шаг 10

Проведем **повторную экономизацию,** то есть понизим степень уже экономизированного полинома

$$S_3^*(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\cdot x^2 + \frac{x^3}{6}$$

используя **наилучшее равномерное приближение** полинома x^3 на отрезке $[-1;1]$ полиномом меньшей степени.

Потребуется **полином Чебышёва степени** $n=3$, **наименее уклоняющийся от нуля на отрезке** $[-1;1]$ **в классе полиномов степени** $n=3$ **со старшим коэффициентом, равным единице** *(как раньше: название такое, сократить нельзя).*

Такой полином обозначим $T_3(x)$. Он имеет вид

$$T_3(x) = (x - \cos\frac{\pi}{6})(x - \cos\frac{3\pi}{6})(x - \cos\frac{5\pi}{6})$$

то есть

$$T_3(x) = \left(x^2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot x = x^3 - \frac{3}{4}\cdot x$$

Запишем максимальное по модулю значение, которое принимает на отрезке $[-1;1]$ полином $T_3(x)$:

$$\max_{x\in[-1;\,1]}\left| T_3(x) \right| = \frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Проведем **экономизацию** $S_3^*(x)$ при $x\in[-1;1]$.

Для этого в формуле полинома $S_3^*(x)$ заменим x^3 полиномом $\{x^3 - T_3(x)\}$.

Полином, полученный после замены, обозначим $S_2^{**}(x)$:

$$S_2^{**}(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\cdot x^2 + \frac{\{x^3 - T_3(x)\}}{6}$$

то есть

$$S_2^{**}(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\cdot x^2 + \frac{\{x^3 - \left(x^3 - \frac{3}{4}\cdot x\right)\}}{6}$$

или

$$S_2^{**}(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\cdot x^2 + \frac{3}{4\cdot 6}\cdot x$$

$$S_2^{**}(x) = \frac{191}{192} + \frac{9}{8}\cdot x + \frac{13}{24}\cdot x^2$$

Шаг 11

Исследуем погрешность применения новой формулы.

Погрешность применения $S_2^{**}(x)$ в точке x для вычисления e^x (по определению) составит

$$E^{**}(x) = e^x - S_2^{**}(x)$$

Запишем эту погрешность, вычитая и добавляя удобные для анализа величины:

$$E^{**}(x) = e^x - S_2^{**}(x) = \underbrace{e^x - S_4(x)}_{\substack{\text{погрешность}\\ \text{усечения}}} + \underbrace{S_4(x) - S_3^*(x)}_{\substack{\text{погрешность}\\ \text{экономизации}}} + \underbrace{S_3^*(x) - S_2^{**}(x)}_{\substack{\text{погрешность}\\ \text{повторной}\\ \text{экономизации}}}$$

Для первых двух компонент погрешности оценки уже получены (см. Утверждение 3).

Напомним, что $S_3^*(x)$ и $S_2^{**}(x)$ отличаются только последним слагаемым:

$$S_3^*(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\cdot x^2 + \frac{x^3}{6}$$

$$S_2^{**}(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}\cdot x^2 + \frac{\{x^3 - T_3(x)\}}{6}$$

Поэтому

$$S_3^*(x) - S_2^{**}(x) = T_3(x) \cdot \frac{1}{6}$$

и на отрезке $[-1;1]$ справедлива оценка

$$\max_{x \in [-1;\,1]} \left| S_3^*(x) - S_2^{**}(x) \right| = \frac{1}{6} \cdot \max_{x \in [-1;\,1]} \left| T_3(x) \right| = \frac{1}{6 \cdot 4}$$

Таким образом, для погрешности применения $S_2^{**}(x)$ **в точке** x **для вычисления** e^x **при** $x \in [-1;1]$ доказана оценка

$$\max_{x \in [-1;\,1]} \left| E^{**}(x) \right| \le \frac{e}{5!} + \frac{1}{2^3 \cdot 4!} + \frac{1}{6 \cdot 4}.$$

то есть

$$\max_{x \in [-1;\,1]} \left| e^x - S_2^{**}(x) \right| \le 0.06953$$

Комментарии и выводы

Повторная экономизация (степень полинома 2) приводит к заметному росту начальной погрешности усечения:

$$\max_{x \in [-1;\,1]} \left| e^x - S_2^{**}(x) \right| \le 0.06953$$

что намного хуже, чем усеченная до степени 4 формула Тейлора

$$\max_{x \in [-1;1]} \left| e^x - S_4(x) \right| \le 0.02265$$

намного хуже, чем экономизированный на ее основе полином степени 3

$$\max_{x \in [-1;\,1]} \left| e^x - S_3^*(x) \right| \le 0.02786$$

но не хуже, а лучше

формулы Тейлора, усеченной до степени 3:

$$\max_{x \in [-1;\,1]} \left| e^x - S_3(x) \right| \le 0.11326$$

Выбор формулы для вычисления экспоненты остается на усмотрение исследователя.