ЛЕКЦИЯ 31

ПОВЕРХНОСТИ ЛЯПУНОВА

Потенциалы простого и двойного слоя

$$u(M) = \iint_S \frac{\rho}{r} ds,\ w(M) = -\iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) ds$$

в точках поверхности S являются несобственными интегралами. Для возможности строгого установления их свойств необходимо поверхность S подчинить ряду требований.

Замкнутая поверхность S называется **поверхностью Ляпунова**, если выполнены следующие три условия:

1) В точке поверхности S существует касательная плоскость.

2) Существует такое число $d > 0$, одно и то же для всех точек поверхности, что для любой точки $N \in S$ сфера радиуса, не большего d, с центром в точке N делит S на две части, из которых одна заключается внутри, а другая вне сферы, и прямые, параллельные нормали к S в точке N, пересекают часть S, находящуюся внутри сферы, не более чем в одной точке.

3) Существуют два положительных числа a и α, $0 < \alpha \leq 1$ такие, что для любых точек N_1 и N_2 поверхности S, острый угол γ, образованный нормалями к S в этих точках, удовлетворяет неравенству

$$\gamma \leq a r_{12}^{\alpha},$$

где r_{12} – расстояние между точками N_1 и N_2.

Условие 1) даёт возможность в каждой точке N поверхности Ляпунова построить местную прямоугольную систему координат xyz, взяв точку N за начало координат, касательную плоскость в точке N за плоскость xy и нормаль к поверхности в точке N за ось $0z$. Через (ξ, η, ζ) обозначаются координаты точек поверхности S, а через (x, y, z) – координаты точек пространства. Условие 2) показывает, что в этой местной системе координат уравнение части поверхности S, заключенной внутри сферы C с центром в точке N и радиусом d, может быть представлено в виде, разрешенном относительно ζ:

$$\zeta = f(\xi, \eta).$$

Из условия 3) следует, что частные производные f'_ξ, f'_η непрерывны.

Пусть d взято достаточно малым, например, удовлетворяет условию

$$ad^2 \leq 1.$$

Тогда справедливы оценки

$$|\zeta| \leq C\rho^{\alpha+1},\ |\nu_x| \leq C\rho^{\alpha},\ |\nu_y| \leq C\rho^{\alpha},\ 1 - \nu_z \leq C\rho^{2\alpha},\ |\nu_z| \geq \frac{1}{2}, \tag{1}$$

где $\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ – единичный вектор внешней нормали к S в точке N, $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, C – некоторая постоянная. Оценки остаются справедливыми, если в правых частях заменить ρ на r.

В случае двух независимых переменных условиями, аналогичными условиям 1)-3) можно определить кривые Ляпунова.

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

Рассмотрим потенциал двойного слоя непрерывной плотности μ, распределенной на поверхности Ляпунова,

$$w(M) = -\iint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)ds = \iint_S \mu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}ds, \tag{2}$$

где производная берётся по направлению внешней нормали ν к поверхности S в точке $P(\xi,\eta,\zeta)$, вектор $\vec{r}$ направлен от точки $M(x,y,z)$ к точке P, $r=|\vec{r}|$, φ – угол между $\vec{r}$ и ν.

Потенциал двойного слоя имеет везде вне S производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Поведение на бесконечности

Покажем, что потенциал двойного слоя стремится к нулю на бесконечности. Пусть начало координат расположено внутри конечной области Ω, ограниченной поверхностью S, обозначим $R=|OM|$. Тогда для всех точек $P\in S$

$$r \geq R - |OP|.$$

Обозначим через L наибольшее расстояние точек поверхности от начала координат. Тогда

$$r \geq R - L.$$

Пусть точка M настолько удалена от начала координат, что $R>2L$, тогда $r>R/2$,

$$|w(M)| \leq \iint_S |\mu(P)|\frac{|\cos\varphi|}{r^2}ds < \frac{4}{R^2}\iint_S |\mu(P)|ds = \frac{A}{R^2},$$

где

$$A = 4\iint_S |\mu(P)|ds.$$

Следовательно, потенциал двойного слоя стремится к нулю на бесконечности как $1/R^2$.

Сходимость потенциала в точках поверхности.

Пусть точка M лежит на поверхности S. Тогда $r=|MP|$ обращается в нуль при совпадении точек M и P, и интеграл (2) является несобственным. Покажем, что он сходится. Для этого достаточно исследовать подынтегральную функцию на куске σ поверхности S, находящемся внутри сферы C с центром в точке M радиуса d. По оставшейся части поверхности интеграл имеет конечное значение (точка M лежит вне области интегрирования). В точке M построим местную систему координат. Тогда уравнение σ можно представить в виде

$$\zeta = f(\xi,\eta).$$

В местной системе координат точка M имеет координаты $(0,0,0)$, а точка P – координаты (ξ,η,ζ) и $r=|MP|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Найдём выражение для $\cos\varphi$, где φ – угол между $\vec{r}=\vec{MP}$ и ν:

$$\cos\varphi = \left(\frac{\vec{r}}{r},\nu\right) = \frac{1}{r}(\xi\nu_x + \eta\nu_y + \zeta\nu_z).$$

Принимая во внимание оценки (1), а также очевидные неравенства $|\xi|\leq\rho$, $|\eta|\leq\rho$, $\rho\leq r$ $(\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2})$, получим

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| \leq \frac{3C\rho^\alpha}{\rho^2} = \frac{b}{\rho^{2-\alpha}}, \tag{3}$$

где b постоянная. Кроме того, для непрерывной функции μ имеем оценку

$$|\mu(P)| \leq A, \; P \in S. \tag{4}$$

Заменяя интеграл по σ интегралом по проекции σ' поверхности σ на плоскость (x, y) местной системы координат, получим

$$\iint_\sigma \mu(P) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \iint_{\sigma'} \mu(\xi, \eta) \frac{\cos\varphi}{r^2} \frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma},$$

где γ – угол между нормалями в точках P и M. В силу оценок (1), (3), (4) имеем следующую оценку подынтегральной функции:

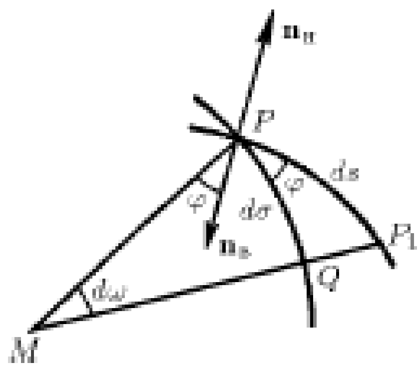
$$\left| \mu(\xi, \eta) \frac{\cos\varphi}{r^2} \frac{1}{\cos\gamma} \right| \leq \frac{2Ab}{\rho^{2-\alpha}},$$

откуда и следует сходимость интеграла (2), если точка M лежит на поверхности S. Таким образом, потенциал двойного слоя определен во всём пространстве.

Скачок потенциала при переходе через поверхность

Если точка M лежит на поверхности S, то значение интеграла (2) в этой точке называют прямым значением потенциала двойного слоя. Пусть теперь точка M находится вне поверхности S и приближается к точке $N \in S$. Если при этом приближении окажется, что потенциал двойного слоя $w(M)$ стремится к некоторому конечному пределу, то говорят, что потенциал двойного слоя принимает в точке N предельное значение. Предельные и прямые значения потенциала двойного слоя, вообще говоря, не совпадают. Более того, предельные значения потенциала двойного слоя, вообще говоря, различны в зависимости от того, извне или изнутри стремится точка M к поверхности S, то есть потенциал двойного слоя терпит разрыв при переходе через поверхность S.

Если S – незамкнутая поверхность, то внутренняя сторона может быть условно определена соглашением о том, какая нормаль в точке $P \in S$ называется внутренней, и какая - внешней.



Рассмотрим потенциал двойного слоя в случае двух независимых переменных:

$$w(M) = \int_C \mu(P) \frac{\cos\varphi}{r} ds,$$

где $r = |MP|$, φ – угол между внутренней нормалью в точке P и вектором $\vec{PM}$.

Пусть ds – некоторый элемент дуги, концами которого являются точки P и P_1. Проведём через точку P дугу окружности радиуса r с центром в точке M до пересечения её с отрезком MP_1 в точке Q. Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать:

$$\cos\varphi ds = d\sigma,\ \frac{d\sigma}{r} = d\omega, \tag{5}$$

где ds – дуга PP_1, $d\sigma$ – дуга PQ, $d\omega$ – угол, под которым видна дуга ds из точки M. Знак $d\omega$ совпадает со знаком $\cos\varphi$.

Если $d\omega > 0$, то есть $\varphi < \pi/2$, то из точки M видна внутренняя сторона кривой C, при $d\omega < 0$ $(\varphi > \pi/2)$ из точки M видна наружная сторона кривой. Отсюда следует, что угол видимости некоторой дуги P_1P_2 равен углу P_1MP_2, который описывает луч MP, когда точка P пробегает дугу P_1P_2.

Когда точка P пробегает всю замкнутую кривую C, луч MP описывает угол

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi,\ \text{если точка } M \text{ лежит внутри кривой } C, \\ \pi,\ \text{если точка } M \text{ лежит на кривой } C, \\ 0,\ \text{если точка } M \text{ лежит вне кривой } C. \end{cases}$$

Предположим сначала, $\mu \equiv 1$. Тогда потенциал двойного слоя равен

$$w(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{r} ds = \int_C d\omega = \Omega = \begin{cases} 2\pi,\ \text{если точка } M \text{ лежит внутри кривой } C, \\ \pi,\ \text{если точка } M \text{ лежит на кривой } C, \\ 0,\ \text{если точка } M \text{ лежит вне кривой } C. \end{cases}$$

Таким образом, в случае двух независимых переменных потенциал с постоянной плотностью $\mu = \text{const}$ является кусочно-постоянной фунцией,

$$w_i(P) = w_C(P) + \pi\mu,\ w_o(P) = w_C(P) - \pi\mu, \tag{6}$$

где $w_i(P)$, w_o, w_C – значения потенциала внутри, вне и на кривой C.

Аналогично, в случае трёх независимых переменных

$$\frac{\cos\varphi ds}{r^2} = d\omega,$$

где $d\omega$ – телесный угол, под которым виден элемент ds поверхности S.

В самом деле, пусть $d\sigma$ – элемент сферической поверхности, получающийся при пересечении сферы, описанной радиусом MP из точки M, с конусом, имеющим вершину в точке M и опирающимся на элемент поверхности ds. Элемент поверхности $d\sigma = \cos\varphi ds$.

Замечание, сделанное выше относительно знака $d\omega$, остаётся в силе, что приводит к формулам

$$\iint_S \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \begin{cases} 4\pi,\ \text{если точка } M \text{ лежит внутри поверхности } S, \\ 2\pi,\ \text{если точка } M \text{ лежит на поверхности } S, \\ 0,\ \text{если точка } M \text{ лежит вне поверхности } S. \end{cases}$$

Таким образом, потенциал с постоянной плотностью $\mu = \text{const}$ является кусочно-постоянной фунцией,

$$w_i(P) = w_S(P) + 2\pi\mu,\ w_o(P) = w_S(P) - 2\pi\mu. \tag{7}$$

где $w_i(P)$, $w_o(P)$, – предельные значения потенциала внутри и вне поверхности S, $w_S(P)$ – значение потенциала на поверхности S.

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя с переменной плотностью и докажем, что в точках непрерывности плотности имеют место формулы, аналогичные формулам (6) и (7). Предположим, найдётся постоянная $B > 0$ такая, что при любом положении точки M

$$\iint_S \frac{|\cos\varphi|}{r^2} ds \le B. \tag{8}$$

Пусть P_0 – точка поверхности S, в которой функция μ непрерывна. Введём потенциал двойного слоя w^0 с постоянной плотностью $\mu_0 = \mu(P_0)$ и рассмотрим функцию

$$v(M) = w(M) - w^0(M) = \iint_S (\mu(P) - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Докажем, что функция v непрерывна в точке P_0. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость интеграла $v(M)$ в точке P_0. Возьмём $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции μ следует, что для любого $\delta > 0$ можно найти окрестность S_1 точки P_0 на поверхности S такую, что для $P \in S_1$

$$\mu(P) - \mu(P_0) < \delta.$$

Запишем

$$\iint_S (\mu(P) - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = \iint_{S_1} (\mu(P) - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \iint_{S \setminus S_1} (\mu(P) - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds = v_1 + v_2.$$

Так как область интегрирования в v_2 не содержит точку P_0, функция $v_2(M)$ непрерывна. По определению S_1,

$$|v_1| < \delta B,$$

где B – постоянная из неравенства (8). Выбирая $\delta = \varepsilon/B$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность S_1 точки P_0, что при любом положении точки M

$$|v_1(M)| < \varepsilon.$$

Таким образом, интеграл v равномерно сходится в точке P_0 и, следовательно, непрерывен в этой точке.

Пусть $w_i(P_0)$ и $w_o(P_0)$ – предельные значения потенциала двойного слоя $w(M)$ при $M \to P_0$ с внутренней и наружной сторон поверхности S. Тогда

$$w_i(P_0) = w_i^0(P_0) + v(P_0) = w_S^0(P_0) + v(P_0) + 2\pi\mu_0 = w_S(P_0) + 2\pi\mu(P_0).$$

Аналогично,

$$w_0(P_0) = w_S(P_0) - 2\pi\mu(P_0).$$

Таким образом, потенциал двойного слоя в точке M, лежащей на поверхности S, является разрывной функцией, для которой имеют место соотношения

$$w_i(M) = w_S(M) + 2\pi\mu(M),\ w_o(M) = w_S(M) - 2\pi\mu(M), \tag{9}$$

где $w_i(M)$ – предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к точке P с внутренней стороны, а $w_o(M)$ – предельное значение с наружной стороны поверхности.

Величина скачка потенциала двойного слоя в любой точке $M \in S$ равна $4\pi\mu(M)$.

Пусть точки M, N находятся на поверхности S. Тогда

$$w(M) = v(M) + 2\pi\mu(N).$$

Пусть $M \to N$ вдоль поверхности S. Ввиду доказанной непрерывности функции v,

$$\lim_{M \to N} w(M) = v(N) + 2\pi\mu(N) = w(N),$$

то есть потенциал двойного слоя - непрерывная на поверхности S функция.

Все приведённые выше рассуждения остаются в силе и для функций двух независимых переменных. В этом случае формулы (6) принимают вид

$$w_i(M) = w_C(M) + \pi\mu(M),\ w_o(M) = w_C(M) - \pi\mu(M). \tag{10}$$

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.