МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

ОТЧЕТ

по лабораторной работе по Теории Управления
на тему:
«Стабилизация маятника в вертикальном положении»

Выполнила:

студентка группы

3821Б1ПМоп2

Киселева К.В.

Преподаватель:

Кадина Е.Ю.

Нижний Новгород

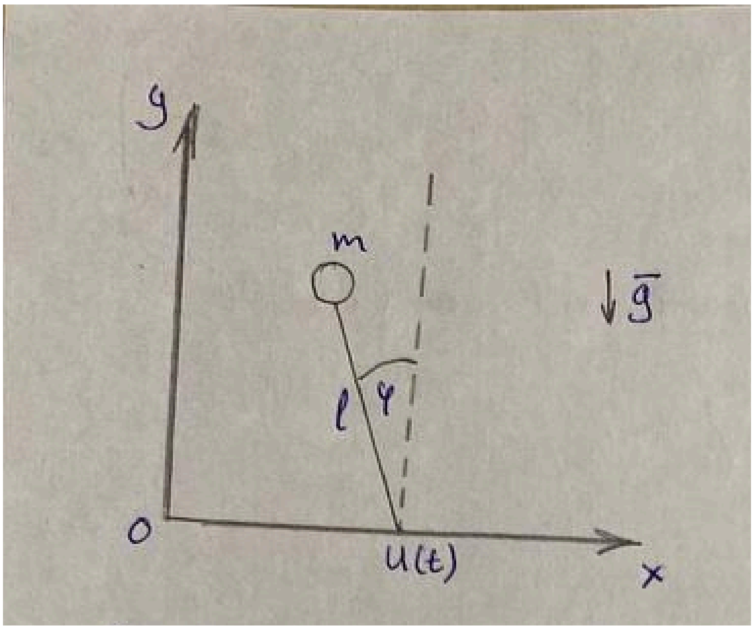
2024

Постановка задачи.

Нам предложена модель математического маятника в вертикальном положении. Задача состоит в том, чтобы стабилизировать маятник в верхнем положении. Мы пренебрегаем трением, считаем стержень невесомым, а объектом материальной точкой. Необходимо подобрать оптимальную стратегию управления для стабилизации маятника в верхнем положении.

Математическая модель.

Математической маятник. Точечное тело массы m находится на верхнем конце стержня, другая часть стержня закреплена на опоре. Длина стержня l. Стержень невесомый, трение в системе отсутствует. φ - угол отклонения маятника от вертикального положения. Также задана координата точки подвеса маятника по оси OX: u(t), изменяя её будем стабилизировать маятник.



Выведем ур-е движения маятника через функцию Лагранжа:

$$\begin{cases} x = u - l\sin\varphi \\ y = l\cos\varphi \end{cases}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2} = \frac{m}{2}\left((u - l\sin\varphi)'^2 + (l\cos\varphi)'^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left((\dot{u} - l\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (-l\sin\varphi\dot{\varphi})^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{u}^2 - 2\dot{u}l\cos\varphi\dot{\varphi} + (l\cos\varphi\dot{\varphi})^2 +\right.$$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$\left. + (l\sin\varphi\dot{\varphi})^2\right) = \frac{m}{2}(\dot{u}^2 - 2\dot{u}l\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\Pi = mgh = mgl\cos\varphi$$

$$L = K - \Pi$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{u}^2 - 2\dot{u}l\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \left(\frac{m}{2}(2l^2\dot{\varphi} - 2\dot{u}l\cos\varphi)\right)'_t = \frac{m}{2}(2l^2\ddot{\varphi} - 2\ddot{u}l\cos\varphi +$$

$$+ 2\dot{u}l\sin\varphi\dot{\varphi}) = m(l^2\ddot{\varphi} - \ddot{u}l\cos\varphi + \dot{u}l\sin\varphi\dot{\varphi})$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = m\dot{u}\dot{\varphi}l\sin\varphi + mgl\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$ml^2\ddot\varphi - m\ddot u l\cos\varphi + \underline{ml\dot u\dot\varphi\sin\varphi} - \underline{ml\dot u\dot\varphi\sin\varphi} - mgl\sin\varphi = 0$$

$$ml^2\ddot\varphi - m\ddot u l\cos\varphi - mgl\sin\varphi = 0 \,/ : ml^2$$

$$\ddot\varphi - \frac{\ddot u}{l}\cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$$\ddot\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{\ddot u}{l}\cos\varphi$$

Упростим уравнение $\exists$ φ-малый, тогда $\sin\varphi \sim \varphi$
$\cos\varphi \sim 1$

Получим:

$$\ddot\varphi - \frac{g}{l}\varphi = \frac{\ddot u}{l} \quad (*)$$

Для исслед. ур-я на устойчивость введём ур-е обычного лин. осцилятора

$$\cancel{\ddot\varphi} - \frac{g}{l}\varphi - \frac{\ddot u}{l} = \cancel{\ddot\varphi} + 2\delta\dot\varphi + \omega^2\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot u = -(g + l\omega^2)\varphi - 2\delta l\dot\varphi$$

Подставим в уравн. (*)

$$\ddot\varphi - \frac{g}{l}\varphi = -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right)\varphi - 2\delta\dot\varphi$$

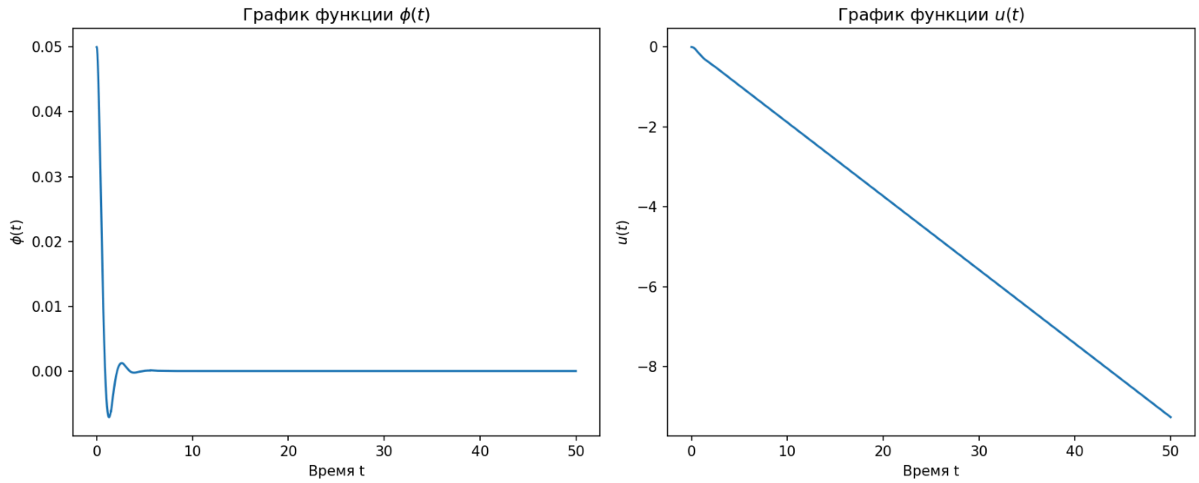
Получили затухающий осциллятор ($\delta > 0$) $\Rightarrow$ получили уст. сост. равновесия по φ и $\dot\varphi$

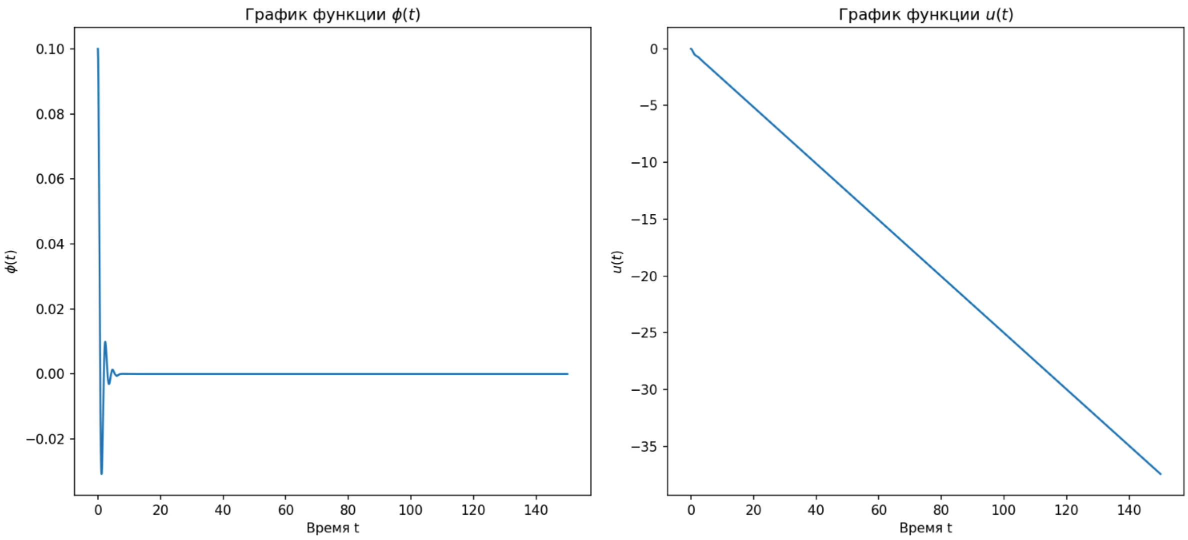
$$\begin{cases} \ddot\varphi - \frac{g}{l}\varphi = \frac{\ddot u}{l} \\ \ddot u = a\varphi + b\dot\varphi + cu + d\dot u \end{cases}$$

Численные эксперименты:

1. Положим, что коэффициенты c и d равны 0. Так мы упростим модель управления. Но в таком случае координата точки опоры может увеличиваться до бесконечности, такое управление нам не подойдёт, так как оно мало применимо в жизни. Для избежания этой ситуации мы добавляем к управлению 2 дополнительных слагаемых u(t) и u'(t). Благодаря такому дополнению, мы можем стабилизировать не только положение маятника, но и добиться устойчивости точки опоры.

   Графики управления без ограничений на движение подвеса:

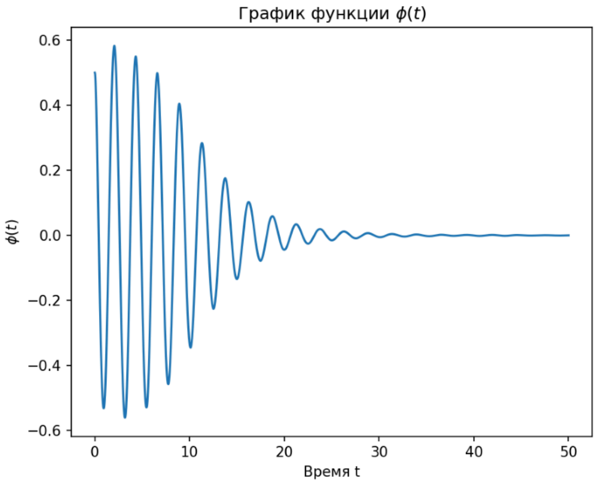


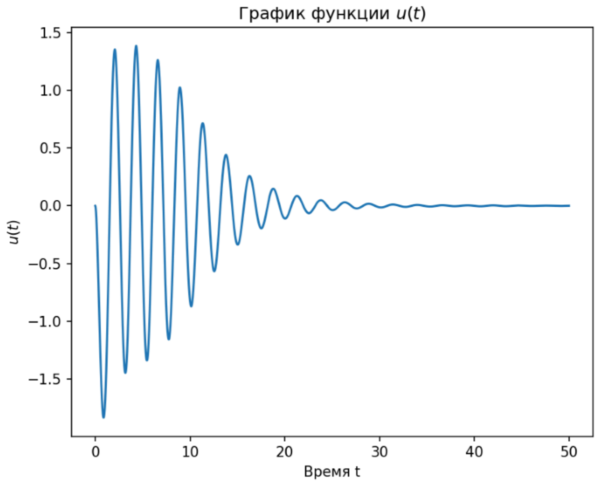


2. Построим графики для управления с обратной связью от полного состояния системы:

   Параметры положим такие:

```
g = 9.81
l = 1.
c = 56/g
d = 52/g
a = -(18.7 + c + g)
b = -(8 + d)
```

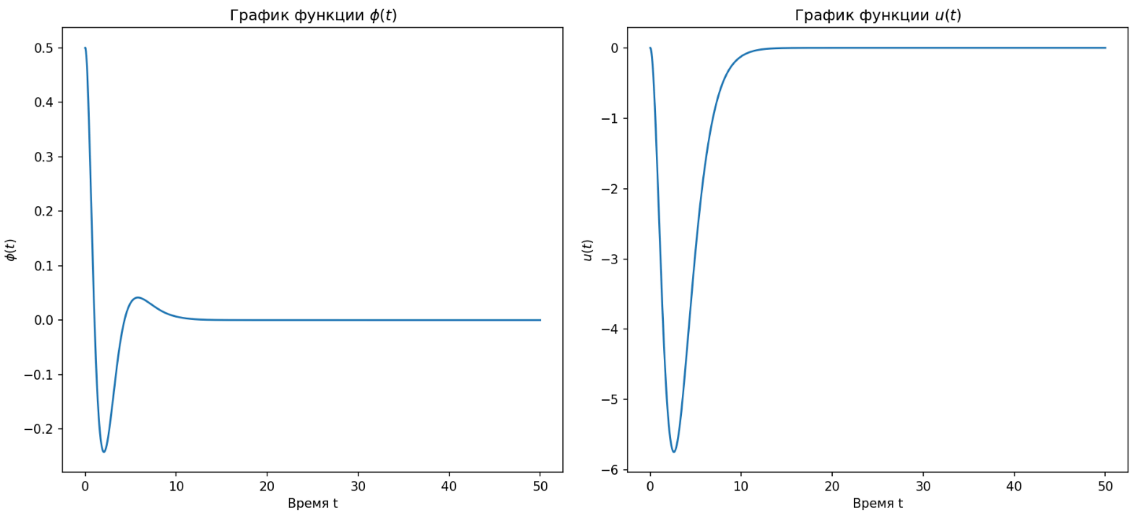




Из графиков видно, что при такой стратегии управления маятник приходит в состояние равновесия через некоторый, возможно, продолжительный отрезок времени. В системе происходят затухающие колебания. Мы подобрали параметры так, что корни характеристического уравнения комплексные с отрицательной вещественной частью.

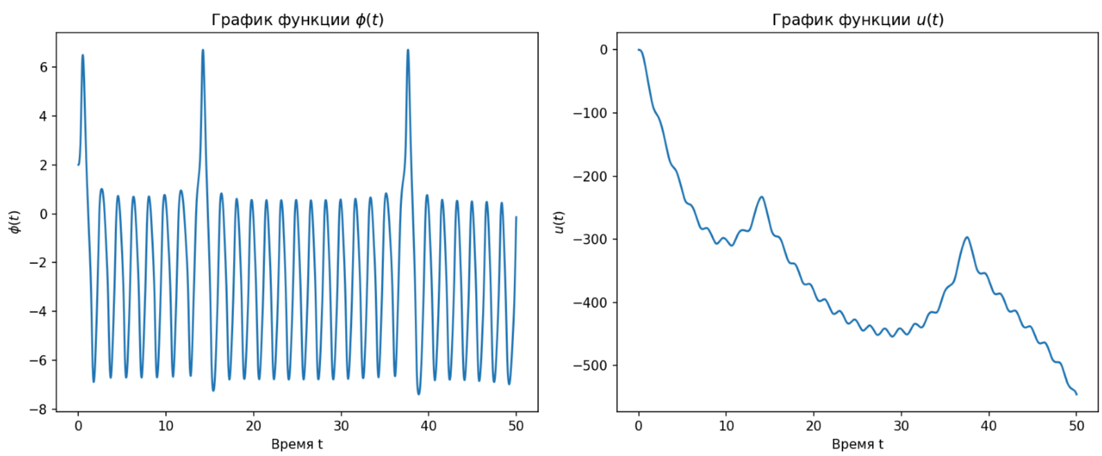
3. Рассмотрим другую стратегию, когда корни характеристического уравнения вещественные отрицательные числа:

```
g = 9.81
l = 1
c = 1 / g
d = 4 / g
a = -(6 + c + g)
b = -(4 + d)
```



Мы видим, что при таком управлении маятник приходит в устойчивое состояние за “пару движений”. Такая стратегия более предпочтительна, нежели предыдущая, так как маятник быстрее стабилизируется и в системе не происходит большого количества затухающих колебаний.

Представим график данной системы, при достаточно больших углах:



При больших углах мы не можем пользоваться нашим уравнением и управлением. Фазовые портреты становятся непонятными и неразборчивыми. В таких условиях о стабилизации маятника мы говорить не можем.

Выводы

Для устойчивости маятника, когда он находится вне области малого отклонения от вертикального положения, требуется управление, которое способно приблизить маятник к этой области. Это управление должно создавать движение, направленное на уменьшение отклонения маятника от вертикального положения. Затем, когда маятник достигнет области малого отклонения, его можно стабилизировать с помощью управления, которое поддерживает его в вертикальном положении. Таким образом, мы используем два этапа управления: первый - для приближения к области стабильности, второй - для удержания в этой области.