Введение в теорию волновых процессов

В. А. Костин

18 апреля 2023 г.

1. Занятие 12 и 13 (на 17 апреля 13:00 и 14.40)

1.1. Модулированные волны. Волновые пакеты. Фазовая и групповая скорости

На прошлых занятиях мы обсудили соответствие между линейным уравнением $\hat{\mathbf{L}}\mathbf{u} = 0$ со стационарным и однородным оператором $\hat{\mathbf{L}}$ и дисперсионным соотношением $G(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Теперь обсудим, как знание дисперсионного соотношения можно использовать для описания динамики модулированных волн и волновых пакетов.

Модуляция волн — изменение параметров волны (амплитуды, частоты, фазы) во времени, сами волны при наличии такого изменения называются модулированными. Волновые пакеты — частный случай модулированный волны, который представляет собой локализованное в пространстве и времени волновое поле. На рис. 1 проиллюстрированы разные виды модулированных волн и волновой пакет. Обычно предполагается, что временные и пространственные масштабы модуляции больше, чем масштабы обратная частота или обратные волновые числа и поле комплекснозначной модулированной волны можно записать в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t)e^{-i\theta(\mathbf{r},t)},$$

где U является значительно более медленной функцией координат и времени, чем θ; U называется (комплексной) огибающей, медленной комплексной огибающей или медленной комплексной амплитудой, θ называется фазой, $e^{-i\theta(\mathbf{r},t)}$ называется заполнением или несущей. Такое представление естественно является неоднозначным в том смысле, что одному и тому же u могут соответствовать различные U и θ Аналогичные действительнозначные модулированные волны представляются в схожем виде

$$u(\mathbf{r}, t) = U_r(\mathbf{r}, t)\cos\theta(\mathbf{r}, t),$$

где U_r называется медленной действительной огибающей или медленной действительной амплитудой; $\cos\theta(\mathbf{r}, t)$ называется заполнением или несущей. Часто даже действительные поля удобно записывать через медленную комплексную амплитуду,

$$u(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[U(\mathbf{r}, t)e^{-i\theta(\mathbf{r},t)}\right],$$

Линейная модулированная волна представляет собой суперпозицию базисных решений (которые называют плоскими волнами) $e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ с близкими значениями частот ω и волновых векторов $\mathbf{k}$. В простейшем («невырожденном») случае частоты этих плоских волн лежат на одной из непрерывных веток дисперсионного соотношения, то есть

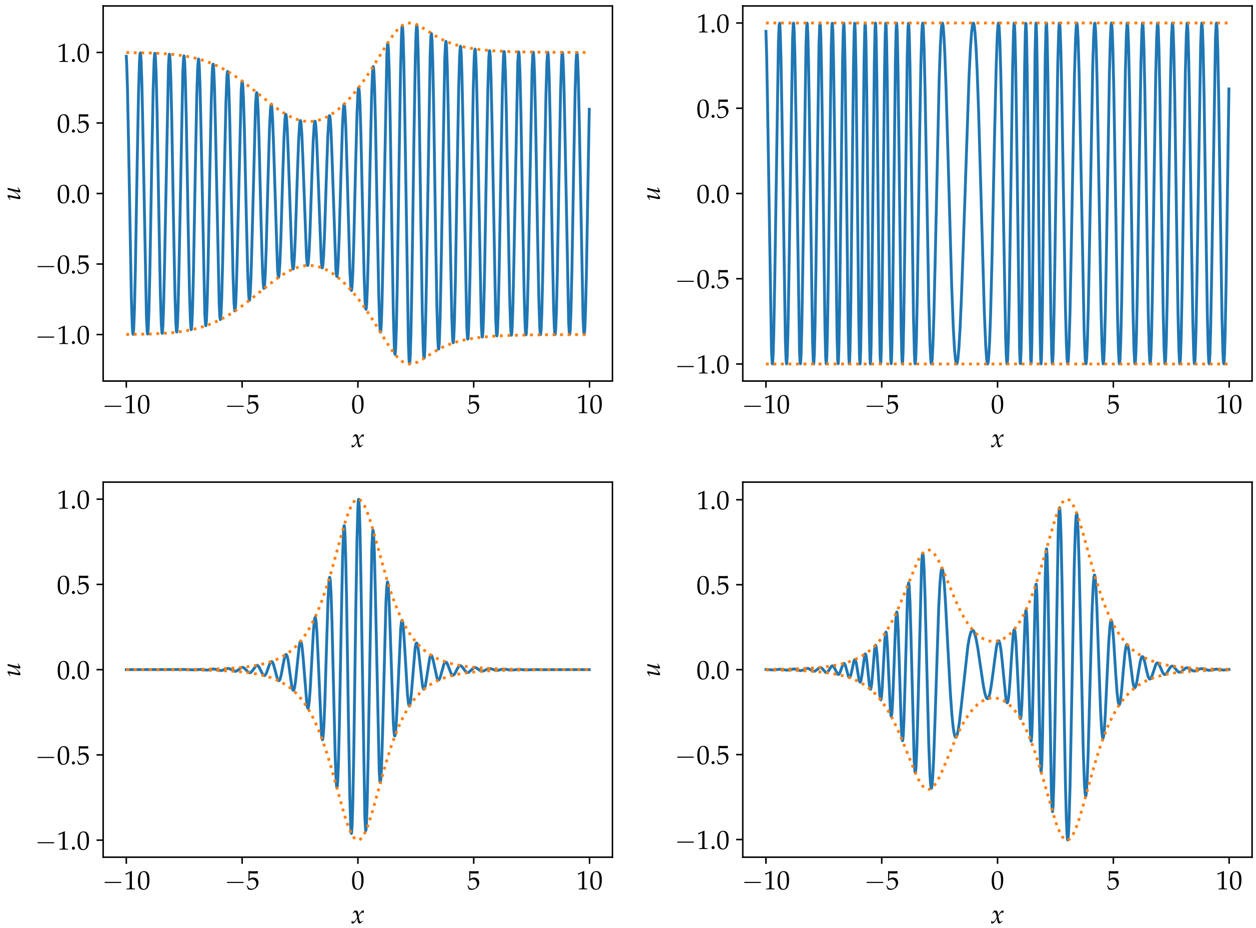

Рис. 1: Примеры модулированных волновых полей; панель вверху слева показывает амплитудную модуляцию, вверху справа — частотную модуляцию, внизу слева — волновой пакет (частный случай амплитудной модуляцией), внизу справа — волновой пакет с дополнительной амплитудной и частотной модуляцией. Сплошная кривая изображает волновое поле, пунктир — его огибающие.

частоту можно считать однозначной функцией волнового вектора $\omega = \omega(\mathbf{k})$. В случае скалярного волнового поля тогда можно представить модулированную волну или волновой пакет как

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} A(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^d\mathbf{k}, \tag{1}$$

где d — размерность пространства, $A(\mathbf{k})$ — амплитуды отдельных плоских волн, составляющих волновой пакет. При этом распределение $A(\mathbf{k})$ локализовано вблизи некоторого значения волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, то есть значение $|A(\mathbf{k})|$ оказывается сравнительно велико лишь вблизи $\mathbf{k}_0$ и уменьшается (не обязательно монотонно) при удалении $\mathbf{k}$ от $\mathbf{k}_0$.

Запись (1) описывает комплекснозначное волновое поле; даже если в какой-то момент времени u является чисто действительным при дальнейшей эволюции u приобретёт ненулевую мнимую часть. Это не годится для уравнений, которые описывают действительнозначные поля, например уравнения Клейна — Гордона $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \Omega^2 u = 0$. В этом случае $G(\omega, \mathbf{k})$ является чётной функцией относительно действительных частей ω и $\mathbf{k}$, то есть замена $\omega = \mathrm{Re}\omega + i\mathrm{Im}\omega \to -\mathrm{Re}\omega + i\mathrm{Im}\omega$ не меняет вида уравнения, аналогично для $\mathbf{k}$. Этот факт позволяет представить действительнозначную модулированную волну как суперпозицию двух комплексно-сопряжённых волн вида (1), то есть можно записать

$$u(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d} A(\mathbf{k})e^{-i\omega(\mathbf{k})t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^d\mathbf{k}. \tag{2}$$

Выражение в правой части (2) является просто-напросто дейстительной частью правой части (1), поэтому далее мы будем исследовать лишь волны (1), подразумевая то, что результаты годятся и для действительнозначных волн (2). Мы также будем рассматривать сначала только консервативный случай, когда значение частоты $\omega(\mathbf{k})$ чисто действительно при чисто действительных $\mathbf{k}$.

Прежде чем исследовать общую ситуацию, рассмотрим частный случай $A(h) = \delta(h - h_1) + \delta(h - h_2)$, где δ — обозначает дельта-функцию; для простоты мы рассматриваем одномерный случай с волновым числом h. Соответствующее волновое поле представляет собой суперпозицию двух плоских волн,

$$u(x,t) = e^{-i\omega(h_1)t+ih_1x} + e^{-i\omega(h_2)t+ih_2x}.$$

При близких h_1 и h_2 это поле представляет собой амплитудно-модулированную волну. В самом деле, пусть $\theta_j = -\omega(h_j)t + h_jx$ — фазы плоских волн, $j = 1,2$, тогда

$$u(x,t) = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$$

и

$$u(x,t) = 2e^{-i\frac{\omega(h_1)+\omega(h_2)}{2}t+i\frac{h_1+h_2}{2}x}\cos\left(\frac{\omega(h_2)-\omega(h_1)}{2}t - \frac{h_2-h_1}{2}x\right).$$

При близких h_1 и h_2, с $|h_2 - h_1| \ll |h_2 + h_1|$ получившееся выражение представляет собой произведение быстро меняющегося заполнения (несущей) $e^{-i\frac{\omega(h_1)+\omega(h_2)}{2}t+i\frac{h_1+h_2}{2}x}$ и медленной огибающей $2\cos\left(\frac{\omega(h_2)-\omega(h_1)}{2}t - \frac{h_2-h_1}{2}x\right)$. При этом точки постоянной фазы (и постоянного значения) несущей $\frac{\omega(h_1)+\omega(h_2)}{2}t + i\frac{h_1+h_2}{2}x = \mathrm{const}$ движется со скоростью

$$v_1 = \frac{\omega(h_1)+\omega(h_2)}{h_1+h_2},$$

а точки постоянной фазы (и постоянного значения) огибающей $\frac{\omega(h_2)-\omega(h_1)}{2}t + i\frac{h_2-h_1}{2}x = \mathrm{const}$ движутся в общем случае с другой скоростью

$$v_2 = \frac{\omega(h_2)-\omega(h_1)}{h_2-h_1}.$$

Иными словами волновое поле представляет собой произведение двух профилей, движущихся в пространстве с разными скоростями. В случае если значение $|h_2 - h_1|$ мало по сравнению с масштабом дисперсионной функции $\omega(h)$, то можно считать $h_1 \approx h_2 \approx h$, $\omega(h_1) \approx \omega(h_2) \approx \omega(h)$ и

$$v_1 \approx v_p = \frac{\omega(h)}{h},$$
$$v_2 \approx v_g = \frac{d\omega(h)}{dh}.$$

Величина v_p называется фазовой скоростью, а v_g — групповой. На следующем занятии мы увидим, что в общем случае модулированной волны эти скорости играют ту же роль, что и в этом простом решении: групповая скорость определяет скорость распространения огибающей или модуляции, а фазовая — скорость несущей или заполнения.

Индивидуальное задание к зачёту (два разных варианта для двух студентов). С помощью метода стационарной фазы определить главный член асимптотического разложения скалярного волнового поля $u(x, y, t)$ при $t \to +\infty$ с начальным условием $u(x, y, t = 0) = Ae^{-r^2/2a^2}$. Здесь A и a — положительные константы, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиальная координата полярной системы координат.

1. Дисперсионное соотношение для волн имеет вид $\omega = \alpha\sqrt{k}$, где α — постоянная и $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный вектор, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Это дисперсионное соотношение для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости.

2. Дисперсионное соотношение $\omega = \alpha k^{3/2}$, где α — постоянная и $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный вектор, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Это дисперсионное соотношение для капиллярных (коротких) волн на поверхности глубокой жидкости.

С полученного главного члена для u описать картину круговых волн на поверхности воды при возмущении поверхности объектом с характерным размером a: построить пространственно-временные волновые диаграммы с линиями постоянной фазы и групповыми линиями, определить характерные скорости распространения переднего и заднего (если есть) волновых фронтов (то есть скорости роста радиусов внешнего и внутреннего кругов, очерчивающих кольцо, вне которого имеется область спокойной воды), оценить характерное количество волновых горбов в зависимости от времени t; определить, как движутся волновые горбы относительно волновых фронтов.