Модуль 12 – Практикум по теме 12.2

Интерполяция полиномами (часть II)

Пример 4 **(данные с вычислительной погрешностью)**

Функция $f(x) = \sin(x)$ задана на сетке

x_i	0	0.01
f_i	sin(0)	sin(0.01)
$\tilde{f}_i$	0	0.00999983

В данной задаче нужно

1) построить интерполяционный полином (по всем узлам сетки)

2) вычислить приближенно $\sin(0.009)$ с помощью интерполяционного полинома

3) провести **полный анализ погрешности при условии, что погрешность исходных данных (значений функции на сетке) не более половины единицы последнего разряда**.

4) оценить значение $\sin(0.009)$ на основе интерполяционного полинома и результатов полного анализа погрешности

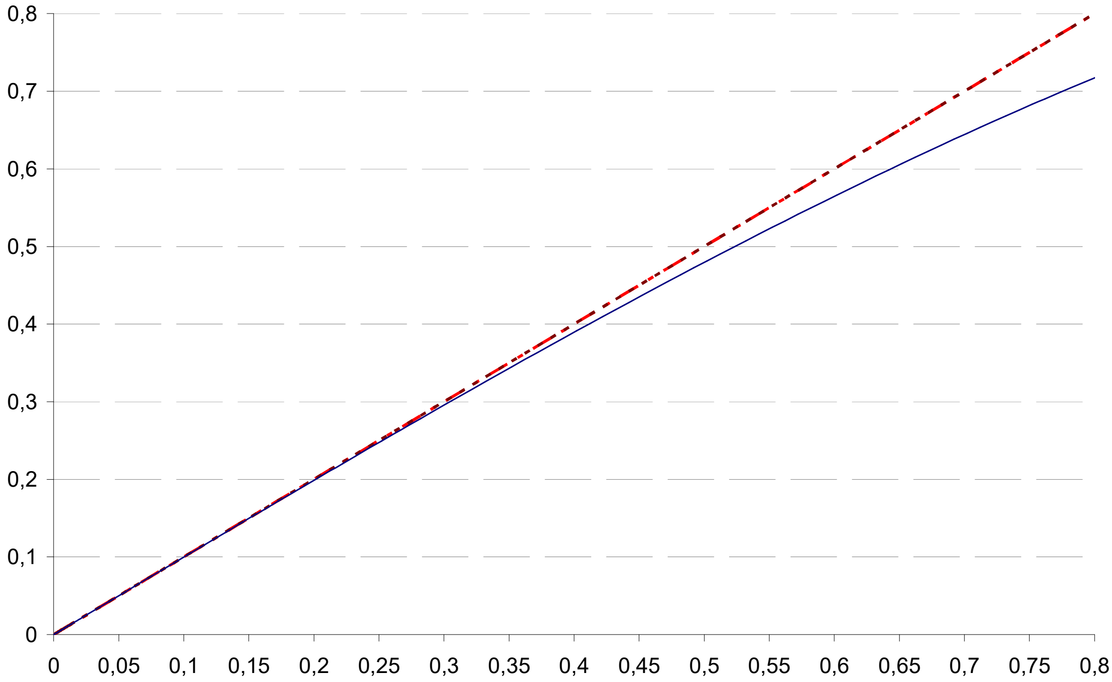

Рисунок 7

На рисунке показан отрезок $[0; 0.8]$, функция $f(x) = \sin(x)$ (синий сплошной) и два полинома: $P_1(x)$ (красный пунктир), интерполирующий ее значения в узлах сетки $x_0 = 0; x_1 = 0.01$, и $\tilde{P}_1(x)$ (темный пунктир), интерполирующий ее приближенные значения в тех же узлах. Полиномы визуально неразличимы и **по мере удаления от отрезка интерполяции** $[0; 0.01]$ **погрешность экстраполяции** нарастает.

О постановке задачи

Как правило, значения функции, заданные в узлах сетки, известны с некоторой погрешностью. Поэтому значения функции, полученные методом интерполяции, помимо погрешности интерполяции как таковой содержат вычислительную погрешность, вызванную погрешностью исходных данных.

В примере показана именно такая ситуация и подход к анализу общей погрешности.

«Истинные» («чистые») значения функции $f(x)$ в узлах сетки обозначены $f_i, i = 0, 1$.

Значения в узлах сетки, в которых «может быть погрешность», обозначены $\widetilde{f}_i, i = 0, 1$.

Такая погрешность называется «погрешностью исходных данных» или «вычислительной погрешностью задания функции $f(x)$».

Если во всех узлах сетки выполняется $\left| f_i - \widetilde{f}_i \right| \le \delta, \quad i = 1,...n$, число $\delta > 0$ называют **«оценкой погрешности данных»**.

В литературе (специальной) принято публиковать приближенные значения функции с погрешностью «не более половины единицы последнего разряда».

(не более половины единицы последнего после десятичной точки разряда приближенного значения функции, приведенного в таблице, и соответствие этому условию обеспечивает разработчик таблиц).

В данной задаче

значение в узле $x = 0$ дано точно: $\sin(0) = 0$

значение в узле $x = 0.01$ дано с погрешностью: $\sin(0.01) \approx 0.00999983$

погрешность соответствует условию «не более половины единицы последнего разряда»

и ее оценка составляет $\delta = 0.5 \cdot 10^{-8}$ (**потому что последний разряд – восьмой**).

Это означает, что

$$\left| \sin(0.01) - 0.\underbrace{00999983}_{8\ разрядов} \right| \le \underbrace{0.5 \cdot 10^{-8}}_{\substack{это\ половина\ единицы \\ последнего\ десятичного\ разряда}}$$

и записывается так: $\sin(0.01) = 0.00999983 \pm 0.5 \cdot 10^{-8}$

Решение

Шаг 1

Рассмотрим отрезок $[a;\ b\ ] = [0; 0.01]$

сетку $x_0 = 0; x_1 = 0.01$. *Участков сетки* $n = 1$.

Запишем интерполяционный полином (ИП) степени 1

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot f_1$$

Запишем ИП для данной задачи

$$P_1(x) = \frac{(x - 0.01)}{(0. - 0.01)} \cdot 0 + \frac{(x - 0.)}{(0.01 - 0.)} \cdot \sin(0.01)$$

ИП принимает вид

$$P_1(x) = 100 \cdot x \ \cdot \sin(0.01)$$

Это «чистый» интерполяционный полином. Он использует «истинное» («чистое») значение функции $\sin(x)$ *в узле* $x = 0.01$.

При $x = 0.009$ *«чистый» ИП принимает значение*

$$P_1(0.009) = 100 \cdot 0.009 \ \cdot \sin(0.01)$$

то есть

$$P_1(0.009) = 0.9 \cdot \sin(0.01)$$

Использовать это выражение для подсчета $\sin(0.009)$ *невозможно, потому что «чистое» значение* $\sin(0.01)$ *(по условию задачи) неизвестно.*

Шаг 2

Построим интерполяционный полином на основе приближенных значений функции:

$$\tilde{P}_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \tilde{f}_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \tilde{f}_1$$

Такой полином интерполирует функцию $\tilde{f}(x)$: он принимает в узлах те же значения, что и $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{P}_1(x_0) = \tilde{f}_0, \qquad \tilde{P}_1(x_1) = \tilde{f}_1$$

Важно: Он точно интерполирует «приближенную» функцию $\tilde{f}(x)$, но называть такой ИП будем «приближенным», потому что по отношению к исходной функции $f(x)$ он «приближенный».

Запишем «приближенный» ИП для данной задачи

$$\tilde{P}_1(x) = \frac{(x - 0.01)}{(0. - 0.01)} \cdot 0 + \frac{(x - 0.)}{(0.01 - 0.)} \cdot (0.00999983)$$

Его окончательный вид

$$\tilde{P}_1(x) = 100 \cdot x \cdot (0.00999983)$$

При $x = 0.009$ он примет значение

$$\tilde{P}_1(0.009) = 100 \cdot (0.009) \cdot (0.00999983)$$

то есть

$$\tilde{P}_1(0.009) = (0.9) \cdot (0.00999983)$$

$$\tilde{P}_1(0.009) = 0.008999847$$

В качестве приближенного значения функции $f(x) = \sin(x)$ в точке $x = 0.009$ принимаем значение «приближенного» ИП в этой же точке, потому что выбора нет:

$$\sin(0.009) \approx \tilde{P}_1(0.009) = 0.008999847$$

Еще раз: «приближенный» ИП функцию $f(x)$ не интерполирует, он интерполирует $\tilde{f}(x)$

Шаг 3

Определим цели исследования. Интерес представляет разность

$\sin(0.009) - 0.008999847$

(отличие истинного значения функции $\sin(0.009)$ *от того значения, которое удалось вычислить).*

Эта разность соответствует

общей погрешностью интерполяции в точке $x = 0.009$

Приведем обоснование. Общей погрешностью интерполяции в точке x *называют разность «истинного» значения функции* $f(x)$ *и значения* $\widetilde{P}_1(x)$ *, полученного с помощью «приближенного» ИП:*

$$ОП_1(x) = f(x) - \widetilde{P}_1(x)$$

В тексте определения добавим и вычтем значение «истинного» ИП

$$ОП_1(x) = f(x) - \widetilde{P}_1(x) = \underbrace{f(x) - P_1(x)}_{\substack{\text{это погрешность} \\ \text{интерполяции} \\ \text{в точке } x}} + \underbrace{P_1(x) - \widetilde{P}_1(x)}_{\substack{\text{это вычислительная} \\ \text{погрешность} \\ \text{интенрполяции в точке } x}}$$

Первое слагаемое есть погрешность интерполяции в точке x *, ее обозначают* $r_1(x)$.

Второе слагаемое есть разность значений «чистого» и «приближенного» ИП в точке x *. Ее называют вычислительной погрешностью интерполяции в точке* x *и обозначают* $ВП_1(x)$

Таким образом, получено представление

$$ОП_1(x) = r_1(x) + ВП_1(x)$$

Тогда можно оценить общую погрешность по правилу

$$|\, ОП_1(x) \,| \le |\, r_1(x) \,| + |\, ВП_1(x) \,|$$

В данной задаче

$$ОП_1(0.009) = f(0.009) - \widetilde{P}_1(0.009)$$

то есть $ОП_1(0.009) = \sin(0.009) - 0.008999847$

Используя представление $ОП_1(0.009) = r_1(0.009) + ВП_1(0.009)$

перейдем к получению оценки. $|\, ОП_1(0.009) \,| \le |\, r_1(0.009) \,| + |\, ВП_1(0.009) \,|$

Ш а г 4

Запишем и оценим $r_1(0.009)$.

В данной задаче по определению

$$r_1(0.009) = f(0.009) - P_1(0.009)$$

по Теореме о погрешности интерполяции

$$r_1(0.009) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (0.009 - 0)(0.009 - 0.01), \;\; \xi \in [0;\;\; 0.01]$$

После подстановки второй производной получим

$$r_1(0.009) = \frac{-\sin(\xi)}{2!} \cdot (0.009) \cdot (0.001) \cdot (-1), \;\; \xi \in [0;\;\; 0.01]$$

$r_1(0.009) = 0.45 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(\xi)$, *где* ξ *неизвестна, но* $\xi \in [0;\;\; 0.01]$.

Очевидно, что $r_1(0.009) \geq 0$ *(значение «истинного» ИП не больше, чем* $\sin(0.009)$ *). Оценим модуль этой величины:*

$$\begin{aligned} |\, r_1(0.009) \,| &= 0.45 \cdot 10^{-5} \cdot |\sin(\xi)| \leq 0.45 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(0.01) \leq \\ &\leq 0.45 \cdot 10^{-5} \cdot (0.00999983 + \delta) = \\ &= 0.45 \cdot 10^{-5} \cdot (0.00999983 + 0.5 \cdot 10^{-8}) \end{aligned}$$

Если $\xi \in [0;\;\; 0.01]$ *значение* $\sin(\xi) \geq 0$ *и оценивается своим наибольшим значением на отрезке* $[0;\;\; 0.01]$, *то есть* $\sin(0.01)$.

В свою очередь, $\sin(0.01)$ *оценивается значением* 0.00999983 *из таблицы. При этом учитываем, что* $\sin(0.01)$ *может быть на* δ *больше своего приближенного значения:* $0.00999983 + \delta$, *см. комментарии по поводу* δ *в условиях задачи*

Получена оценка

$$|\, r_1(0.009) \,| \leq 0.45 \cdot 10^{-7} \cdot (0.9999835)$$

Порядок погрешности (-7).

В данной задаче отслеживаем не порядок стремления к нулю какой-либо величины, а просто о порядок числа (большое число, маленькое…)

Порядок (-7) это неплохо.

Ш а г 5

Запишем и оценим $ВП_1(0.009)$

Вычислительной погрешностью интерполяции в точке x *называют разность значений «истинного» ИП в точке* x *и «практически» полученного значения в точке* x *, в данном случае – значения «приближенного» ИП*

$$ВП_1(x) = P_1(x) - \tilde{P}_1(x)$$

«Истинный» ИП в точке $x = 0.009$

$$P_1(0.009) = 0.9 \cdot \sin(0.01)$$

«приближенный» ИП в точке $x = 0.009$

$$\tilde{P}_1(0.009) = 0.9 \cdot (0.00999983) = 0.008999847$$

ВП интерполяции в точке $x = 0.009$ *(по определению)*

$$ВП_1(0.009) = P_1(0.009) - \tilde{P}_1(0.009)$$

Подставим полиномы и запишем

$$ВП_1(0.009) = 0.9 \cdot (\sin(0.01) - 0.00999983)$$

Оценим по модулю

$$|\, ВП_1(0.009) \,| = 0.9 \cdot |\, \sin(0.01) - 0.00999983 \,| \le 0.9 \cdot \delta =$$

$$\le 0.9 \cdot 0.5 \cdot 10^{-8}$$

Получена оценка

$$|\, ВП_1(0.009) \,| \le 0.45 \cdot 10^{-8}$$

Комментарий: Вычислительная погрешность интерполяции (точнее, ее оценка) осталась примерно такой же, какой была «оценка погрешности исходных данных», сравните оценки

$$|\, ВП_1(0.009) \,| \le 0.45 \cdot 10^{-8},$$

$$|\, \sin(0.01) - 0.00999983 \,| \le \delta = 0.5 \cdot 10^{-8}$$

Так бывает не всегда.
Могло стать много хуже или существенно лучше.

Ш а г 6

Оценим $ОП_1(0.009)$

Используем правило

$$|\ ОП_1(0.009)\ | \le |\ r_1(0.009)\ | + |\ ВП_1(0.009)\ |$$

Применим оценки Шага 4 и Шага 5

$$|\ ОП_1(0.009)\ | \le 0.45 \cdot 10^{-7} \cdot (0.9999835) + 0.45 \cdot 10^{-8}$$

Сначала уточним первое слагаемое, затем вычислим сумму

$$|\ ОП_1(0.009)\ | \le (0.449992575) \cdot 10^{-7} + (0.045) \cdot 10^{-7}$$

$$|\ ОП_1(0.009)\ | \le (0.494992575) \cdot 10^{-7}$$

Все оценки сформированы

Ш а г 7

Наблюдения и выводы

1) Истинное значение $\sin(0.009)$

отличается по модулю от приближенного 0.008999847

не более чем на $(0.494992575) \cdot 10^{-7}$ *(величину порядка (-7), это неплохо)*

2) В структуре общей погрешности доминирует погрешность интерполяции.

Ее порядок (-7).

Порядок вычислительной погрешности интерполяции (-8):

(-8) мельче, чем (-7).

Поэтому неточное задание функции $f(x)$ *в узлах сетки в данной ситуации «никому не мешает».*

Комментарий: Функцию $f(x)$ *заменили «приближенным» ИП. Основной вклад в эту погрешность вносит «мысленная» замена функции* $f(x)$ *«истинным» ИП. Замена «истинного» ИП на «приближенный» ИП вносит меньший вклад.*

«Интерполяционную» часть погрешности можно пробовать снизить за счет сетки с более мелким шагом или за счет увеличения степени ИП. В любом случае для этого нужны дополнительные узлы сетки.

<u>Если бы в структуре погрешности доминировала ВП интерполяции, вывод был бы иным</u>: препятствием более точного вычисления $f(x)$ в точках, не попавших на сетку, был бы не интерполяционный полином, а «низкое качество данных».

Это главные результаты.

Шаг 8

Построение оценок «истинного» значения $\sin(0.009)$

Так как $ОП_1(0.009) = \sin(0.009) - 0.008999847$

из оценки Шага 6 получим

$$|\sin(0.009) - 0.008999847| \le (0.494992575) \cdot 10^{-7}$$

Результат 1

$$\sin(0.009) = 0.008999847 \pm 0.494992575 \cdot 10^{-7}$$

Построим интервальную оценку $\sin(0.009)$

$$0.008999847 - 0.45 \cdot 10^{-8} \le \sin(0.009) \le 0.008999847 + 0.494992575 \cdot 10^{-7}$$

$$\underbrace{0.00899979750074250}_{\text{нижняя оценка значения функции } \sin(0.009)} \le \sin(0.009) \le \underbrace{0.00899989649925750}_{\text{верхняя оценка значения функции } \sin(0.009)}$$

Результат 2

$$0.008\,999\,79 \le \sin(0.009) \le 0.008\,999\,90$$

Используя <u>знак</u> погрешности интерполяции, построим оценку точнее.

Из результатов Шага 4

$$r_1(0.009) \ge 0$$

$$|r_1(0.009)| \le 0.45 \cdot 10^{-7} \cdot (0.9999835)$$

получим неравенство

$$0 \le r_1(0.009) \le 0.45 \cdot 10^{-7} \cdot (0.9999835)$$

Из результатов Шага 5

$$|\,ВП_1(0.009)\,| \le 0.45 \cdot 10^{-8}$$

получим неравенство

$$-0.45 \cdot 10^{-8} \le ВП_1(0.009) \le 0.45 \cdot 10^{-8}$$

Используя структуру общей погрешности

$$ОП_1(0.009) = r_1(0.009) + ВП_1(0.009)$$

каждое из слагаемых оценим слева его меньшим значением, а справа – большим значением, и запишем неравенство

$$0 + (-0.45) \cdot 10^{-8} \le ОП_1(0.009) \le 0.45 \cdot 10^{-7} \cdot (0.9999835) + 0.45 \cdot 10^{-8}$$

что означает

$$-0.45 \cdot 10^{-8} \le ОП_1(0.009) \le (0.494992575) \cdot 10^{-7}$$

Вместо $ОП_1(0.009)$ *подставим ее определение*

$$-0.45 \cdot 10^{-8} \le \underbrace{\sin(0.009) - 0.008999847}_{\substack{\text{это общая погрешность И.} \\ \text{в точке } x=0.009}} \le 0.494992575 \cdot 10^{-7}$$

В каждой части неравенства добавим число 0.008999847

$$0.008999847 - 0.45 \cdot 10^{-8} \le \sin(0.009) \le 0.008999847 + 0.494992575 \cdot 10^{-7}$$

Получили более точную интервальную оценку неизвестного значения $\sin(0.009)$

$$\underbrace{0.0089998425}_{\substack{\text{нижняя оценка значения} \\ \text{функции } \sin(0.009) \text{ стала точнее}}} \le \sin(0.009) \le \underbrace{0.0089998964992575}_{\substack{\text{верхняя оценка значения} \\ \text{функции } \sin(0.009) \text{ не изменилась}}}$$

Результат 3:

$$0.008\,999\,84 \le \sin(0.009) \le 0.008\,999\,90$$

Ответ (пример ответа):

1) построить интерполяционный полином (по всем узлам сетки, их 2)

$$P_1(x) = 100 \cdot x \cdot \sin(0.01)$$ «истинный» ИП

$$\widetilde{P}_1(x) = 100 \cdot x \cdot (0.00999983)$$ «приближенный» («грязный») ИП

2) вычислить приближенно $\sin(0.009)$ с помощью ИП

$$\sin(0.009) \approx \widetilde{P}_1(0.009) = 0.008999847$$

3) провести полный анализ погрешности

Погрешность исходных данных с оценкой $\delta = 0.5 \cdot 10^{-8}$. Погрешность вычислений отсутствует (в данном примере все вычислено точно)

Общая погрешность интерполяции включает <u>погрешность интерполяции</u> и <u>ВП интерполяции</u>

Погрешность И.

$$\underbrace{\sin(0.009) - P_1(0.009)}_{\text{это погрешность И.}} = 0.45 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(\xi), \quad \xi \in [0;\, 0.01]$$

Оценка погрешности И.

$$\underbrace{0}_{\text{это нижняя граница погрешности И.}} \le \sin(0.009) - P_1\,(0.009) \le \underbrace{-\,0.4499992575 \cdot 10^{-7}}_{\text{это верхняя граница погрешности И.}}$$

Оценка ВП интерполяции

$$\underbrace{\left| P_1(0.009) - 0.008999847 \right|}_{\text{это вычислительная погрешность интерполяции}} \le 0.9 \cdot 0.5 \cdot 10^{-8}$$

Оценка общей погрешности

$$\underbrace{\left| \sin(0.009) - 0.008999847 \right|}_{\text{это общая погрешность интерполяции}} \le (0.494992575) \cdot 10^{-7}$$

4) оценить $\sin(0.009)$ с учетом общей погрешности

$$\sin(0.009) = 0.008999847 \pm 0.494992575 \cdot 10^{-7}$$

$$0.008\,999\,79 \le \sin(0.009) \le 0.008\,999\,90$$

Уточненная оценка $0.008\,999\,84 \le \sin(0.009) \le 0.008\,999\,90$

Для сравнения:

значение с погрешностью $0.5 \cdot 10^{-9}$ $\sin(0.009) = 0.008\,999\,879$

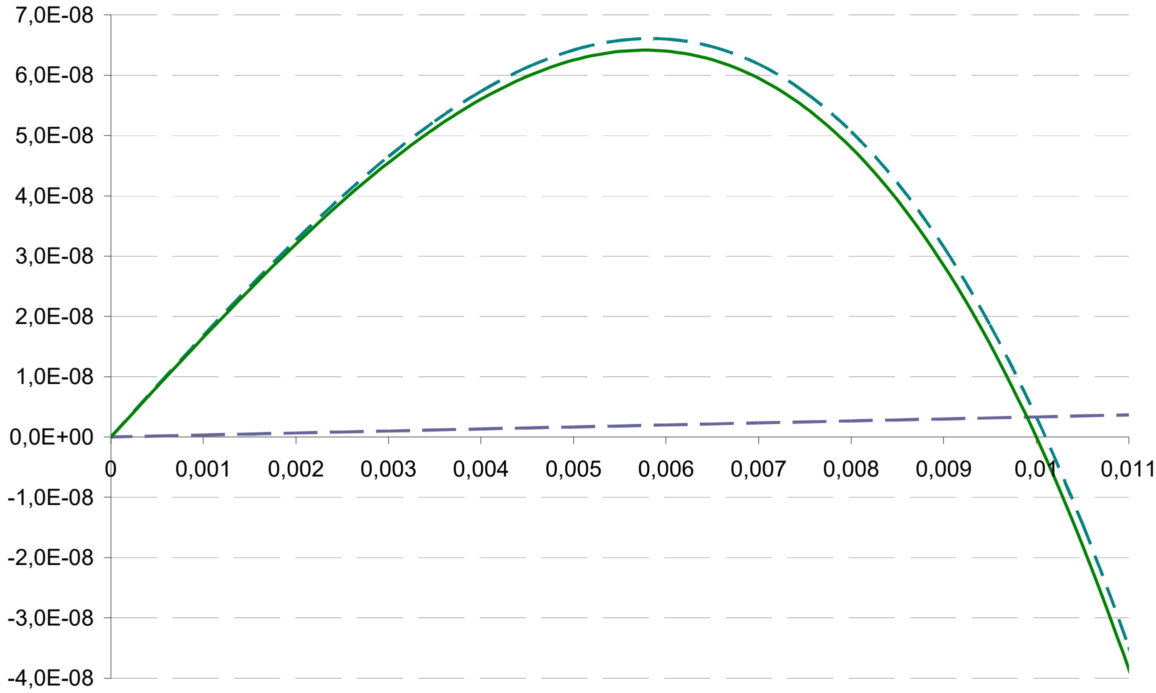

Рисунок 9

Показан отрезок $[0;\, 0.01]$ и структура общей погрешности интерполяции.

Погрешность интерполяции $r_1(x) = f(x) - P_1(x)$ (зеленый сплошной)

определена и вычислена как $r_1(x) = \sin(x) - 100 \cdot x \cdot \sin(0.01)$

Вычислительная погрешность интерполяции $B\Pi_1(x) = P_1(x) - \widetilde{P}_1(x)$ (серый пунктир)

определена и вычислена как $B\Pi_1(x) = 100 \cdot x \cdot \sin(0.01) - 100 \cdot x \cdot (0.00999983)$.

Общая погрешность интерполяции $O\Pi_1(x) = f(x) - \widetilde{P}_1(x)$ (темный пунктир)

определена и вычислена как $O\Pi_1(x) = \sin(x) - 100 \cdot x \cdot (0.00999983)$.

Погрешность интерполяции $r_1(x) = f(x) - P_1(x)$ обращается в ноль в узлах интерполяции: $x_0 = 0;\, x_1 = 0.01$. В остальных точках отрезка $[0;\, 0.01]$ является положительной. Максимальное по модулю значение – примерно в середине отрезка.

Вычислительная погрешность интерполяции обращается в ноль в узле $x_0 = 0$:

$$B\Pi_1(x_0) = 100 \cdot x_0 \cdot \sin(0.01) - 100 \cdot x_0 \cdot (0.00999983) = 0$$

В узле $x_1 = 0.01$ принимает значение

$$B\Pi_1(x_1) = 100 \cdot x_1 \cdot \sin(0.01) - 100 \cdot x_1 \cdot (0.00999983) = \sin(0.01) - 0.00999983 = \delta_1$$

(совпадает с погрешностью задания функции $f(x) = \sin(x)$ в узле $x_1 = 0.01$)

В остальных точках отрезка $[0;\, 0.01]$ является положительной.

Общая погрешность интерполяции обращается в ноль в узле $x_0 = 0$:

$$ОП_1(x_0) = \sin(x_0) - 100 \cdot x_0 \cdot (0.00999983) = 0$$

В узле $x_1 = 0.01$ принимает значение

$$ОП_1(x_1) = \sin(x_1) - 100 \cdot x_1 \cdot (0.00999983) = \sin(0.01) - 0.00999983 = \delta_1$$

(совпадает с погрешностью задания функции $f(x) = \sin(x)$ в узле $x_1 = 0.01$)

В остальных точках отрезка $[0;\ 0.01]$ является положительной. Максимальное по модулю значение – примерно в середине отрезка.

В структуре общей погрешности доминирует погрешность интерполяции.

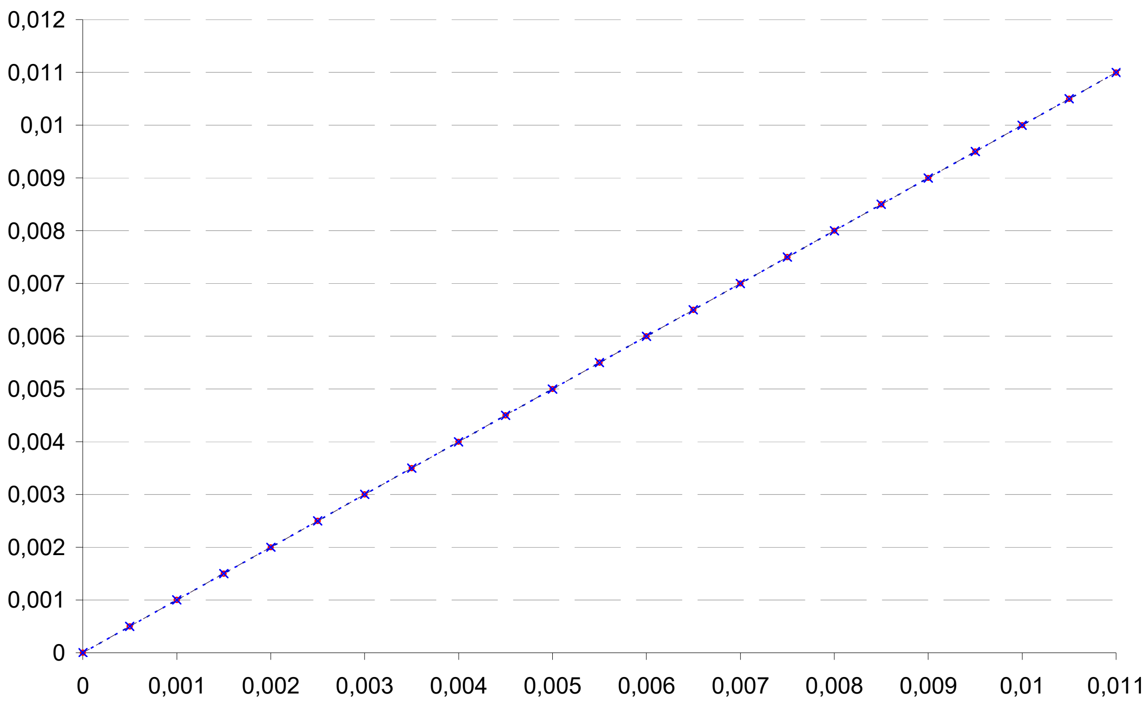

Рисунок 9

Показан отрезок $[0;\ 0.011]$, функция $f(x) = \sin(x)$ (синий пунктир) и два полинома:

$P_1(x)$ (красный пунктир), интерполирующий функцию в узлах сетки $x_0 = 0;\ x_1 = 0.01$,

$\widetilde{P}_1(x)$ (темный пунктир), интерполирующий ее приближенные значения в тех же узлах.

Полиномы и функция на отрезке интерполяции $[0;\ 0.01]$ визуально неразличимы.

$$P_1(x) = 100 \cdot x \cdot \sin(0.01)$$

$$\widetilde{P}_1(x) = 100 \cdot x \cdot (0.00999983)$$

На рисунках 8 и 9 графики построены на компьютере, значение $\sin(0.01)$ вычислено функцией из библиотеки, запись $\sin(0.01) = 0.00999983 \pm 0.5 \cdot 10^{-8}$ является верной.