Модуль 11.3. Метод с чебышевским набором параметров (k параметров) (конспект с доказательством)

Выбор параметров на основе собственных чисел или их оценок. Способ применения метода. Теоремы об оптимальных свойствах, оценках погрешности и сходимости метода. Пример задачи о построении полинома, наименее уклоняющегося от нуля. Пример построения метода

Итерационный метод с чебышевским набором параметров (k – число параметров) на основе оценок границ спектра: выбор параметров, теорема о сходимости метода, оценках сходимости и оптимальных свойствах метода (формулировка). §18

Рассмотрим СЛАУ (11.1) с симметричной, положительно определенной матрицей A

$$Ax = b, \qquad (11.1)$$

где $x \in R^n, b \in R^n, A\ (n \times n), A = A^T > 0$.

Через x^* обозначим точное решение системы, $x^* \in R^n$.

Пусть $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ – собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ (они положительны и упорядочены), λ_1 – минимальное и λ_n – максимальное из них.

Явным нестационарным итерационным методом с чебышевским набором параметров (k параметров) называют метод

$$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau_s} + Ax^{(s)} = b \qquad (11.29)$$

где k – натуральное число (параметр метода), $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$ – вещественные параметры метода (их количество равно k), $x^{(0)} \in R^n$ – начальное приближение, которое можно выбрать любым, $s = 0,1,\ldots$ – номер шага метода.

Значения параметров $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$ определяют как

$$\tau_s = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2k}(1 + 2s) \right) \right)^{-1}, \ s = 0,\ldots k-1 \qquad (11.30)$$

то есть (при $\lambda_1 < \lambda_n$) как величины, обратные корням полинома Чебышева – полинома степени k, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[\lambda_1, \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ в классе полиномов степени k со свободным слагаемым, равным 1.

Для матрицы $A = A^T > 0$ случай $0 < \lambda_1 = \lambda_n$ не является типичным и заслуживает отдельного рассмотрения, так как в данном случае все собственные числа одинаковы: $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n$ и каждый вектор $x \in R^n$ является собственным

Первые k шагов метода проводятся с использованием параметров $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$. При вычислении $x^{(1)}$ используют τ_0, при вычислении $x^{(2)}$ используют τ_1, … при вычислении $x^{(k)}$ используют τ_{k-1}.

На последующих шагах метода указанные выше k параметров используют циклически: при вычислении $x^{(k+1)}$ снова используется τ_0, при вычислении $x^{(k+2)}$ используем τ_1, … при вычислении $x^{(2k)}$ используется τ_{k-1} и т.д.

Таким образом, метод (11.29), (11.30) строит последовательность

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(k-1)}, x^{(k)} ..$$

$$x^{(k+1)}, x^{(k+2)}, x^{(k+3)}, \ldots x^{(2k-1)}, x^{(2k)} ..$$

$$x^{(2k+1)}, x^{(2k+2)}, x^{(2k+3)}, \ldots x^{(3k-1)}, x^{(3k)} \ldots.. \tag{11.31}$$

Приближенными решениями задачи (11.1) следует считать следующие элементы последовательности:

$$x^{(0)}, x^{(k)}, x^{(2k)}, .x^{(3k)}, x^{(4k)} \ldots x^{(Nk)} \ldots.. \tag{11.32}$$

Остальные элементы последовательности имеют вспомогательное значение.

Запись метода в виде (11.29), (11.30) называется канонической. Для расчетов вместо (11.29) используется формула

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \tau_s \cdot (b - Ax^{(s)}) = x^{(s)} - \tau_s \cdot r^{(s)} \tag{11.33}$$

где $r^{(s)} = Ax^{(s)} - b$ – невязка СЛАУ на текущем приближении $x^{(s)}$, τ_s – параметр шага $s+1$.

Свойства метода описывает следующая теорема.

Теорема 8. При решении задачи (11.1) с симметричной, положительно определенной матрицей $A = A^T > 0$ методом (11.29) с параметрами (11.30) оценка погрешности метода на шаге k имеет вид

$$\left\| z^{(k)} \right\|_2 \le \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \left\| z^{(0)} \right\|_2 \tag{11.34}$$

Оценка погрешности метода на шаге Nk (N есть количество циклов) имеет вид

$$\left\| z^{(Nk)} \right\|_2 \le \left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \right)^N \left\| z^{(0)} \right\|_2 \tag{11.35}$$

и метод сходится в следующем смысле:

$$\forall x^{(0)} \in R^n \quad \lim_{N \to +\infty} \left\| z^{(Nk)} \right\|_2 = 0. \tag{11.36}$$

(к решению x^* сходятся элементы последовательности (11.32)).

В формулах (11.34)-(11.36) $z^{(Nk)} = x^{(Nk)} - x^*$ – погрешность метода на шаге Nk, $z^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ – погрешность метода на начальном шаге, $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ –

собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ (они положительны и упорядочены), λ_1 – минимальное и λ_n – максимальное из них.

Значение ρ в формулах (11.34), (11.35) определено как

$$\rho = \frac{\sqrt{\mu_A} - 1}{\sqrt{\mu_A} + 1} \tag{11.37}$$

Через μ_A обозначено число обусловленности матрицы A, определяемое на основе евклидовой нормы:

$$\mu_A = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \tag{11.38}$$

Оптимальное свойство метода состоит в следующем: среди всех методов вида (11.29) метод с параметрами (11.30) дает наилучшую гарантию убывания погрешности через k шагов, справедливую для всех симметричных положительно определенных матриц $A = A^T > 0$, собственные числа которых расположены в диапазоне $[\lambda_1, \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$.

Доказательство

Шаг I – постановка задачи оптимизации

Рассмотрим методы вида (11.29) и для заданного k подберем такие $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$, чтобы оценка погрешности метода на шаге k была **оптимальной**.

Такая задача возникает достаточно часто. Например, при ограниченных ресурсах: для решения СЛАУ выделены k итераций и метод должен гарантировать наилучший результат, возможный за k итераций.

Чтобы найти **оптимальные** параметры $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$, выясним, как меняется погрешность метода на соседних шагах и как связаны погрешность метода на шаге k и начальная погрешность.

Пусть номер шага $s + 1 \le k$. Запишем метод в виде (11.33):

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} - \tau_s A x^{(s)} + \tau_s b \tag{1}$$

Слева и справа вычтем x^* (решение СЛАУ), затем используем замену $b = Ax^*$:

$$x^{(s+1)} - x^* = (x^{(s)} - x^*) - \tau_s A x^{(s)} + \tau_s (A x^*)$$

Перепишем формулу в обозначениях погрешности:

$$z^{(s+1)} = z^{(s)} - \tau_s A z^{(s)} \tag{2}$$

Таким образом, на шаге $s + 1 \le k$ погрешности $z^{(s+1)}$ и $z^{(s)}$ связаны уравнением

$$z^{(s+1)} = (E - \tau_s A) z^{(s)} \tag{3}$$

где матрица $(E - \tau_s A)$ есть **матрица перехода на шаге** $s + 1$.

Используя (3) для разных значений индекса, установим связь $z^{(s+1)}$ и начальной погрешности:

$$z^{(s+1)} = (E-\tau_s A)z^{(s)} = (E-\tau_s A)(E-\tau_{s-1}A)z^{(s-1)} = ... \\ = (E-\tau_s A)(E-\tau_{s-1}A)...(E-\tau_0 A)z^{(0)} \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что на шаге k погрешности $z^{(k)}$ и $z^{(0)}$ связаны уравнением

$$z^{(k)} = (E-\tau_{k-1}A)(E-\tau_{k-21}A)...(E-\tau_0 A)\, z^{(0)} \qquad (5)$$

Введем обозначение

$$G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1}) = (E-\tau_{k-1}A)(E-\tau_{k-2}A)...(E-\tau_0 A) \qquad (6)$$

Если метод использует параметры $\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1}$, матрица $G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1})$ описывает переход от начальной погрешности $z^{(0)}$ к погрешности $z^{(k)}$,

$$z^{(k)} = G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1})\, z^{(0)} \qquad (7)$$

Матрицу $G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1})$ называют **переходной матрицей метода**.

Рассмотрим евклидову норму погрешности $\left\| z^{(k)} \right\|_2$.

В силу **согласованности** норм матрицы и вектора

$$\left\| z^{(k)} \right\|_2 = \left\| G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1})\, z^{(0)} \right\|_2 \le \left\| G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1}) \right\|_2 \left\| z^{(0)} \right\|_2 \qquad (8)$$

Норма матрицы, указанная в (8), **подчинена** евклидовой норме вектора. Поэтому оценку (8) нельзя улучшить: существуют такие начальные приближения и соответственно такие начальные погрешности, что (8) выполняется как равенство.

Чтобы построить оптимальный метод вида (11.29), нужно найти такие $\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1}$, чтобы норма переходной матрицы была минимальной:

$$\left\| G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1}) \right\|_2 \to \min \qquad (9)$$

Шаг II – анализ нормы переходной матрицы

Исследуем норму $G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1})$.

Несложно проверить, что $G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1})$ симметрична.

В соответствии с формулой (6) она представляет собой полином степени k, в котором аргументом является матрица $A = A^T > 0$:

$$G(\tau_0,\tau_1,...\tau_{k-1}) = \\ = E - \underbrace{(\tau_0+\tau_1+...+\tau_{k-1})}_{\text{это число}}\cdot A + ... + \underbrace{(-1)^k(\tau_{k-1}\tau_{k-2}...\tau_0)}_{\text{это число}}\cdot A^k$$

Каждый множитель вида

$$A^s = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{s\ раз},\ s = 1,\ldots k$$

является симметричным, каждое слагаемое полинома симметрично и поэтому симметрична сумма всех слагаемых:

$$G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}) = [G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})]^T \qquad (10)$$

Напомним, что «евклидова» норма симметричной матрицы совпадает с ее спектральным радиусом, то есть наибольшим по модулю собственным числом.

В силу симметрии (10) функционал задачи (9) имеет вид

$$\| G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}) \|_2 = \rho(G) = \max_{i=1,\ldots n} | \lambda_i(G) |, \qquad (11)$$

где $\lambda_i(G),\ i = 1,\ldots n$ **– собственные числа переходной матрицы**.

Шаг III – собственные числа переходной матрицы

Исследуем собственные числа $G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})$.

Собственные векторы A обозначим через $v_i,\ i = 1,\ldots n$.

Собственные числа A обозначим через $\lambda_i,\ i = 1,\ldots n$.

Умножим $G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})$ слева на собственный вектор матрицы A:

$$G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})\, v_i = (E - \tau_{k-1} A)(E - \tau_{k-2} A) \ldots (E - \tau_0 A)\, v_i \qquad (12)$$

В силу того, что

$$A v_i = \lambda_i v_i,\ \ i = 1,\ldots n,$$

не очень сложно показать, что

$$\begin{aligned}(E - \tau_{k-1} A)(E - \tau_{k-2} A) \ldots (E - \tau_0 A)\, v_i &= \\ &= (1 - \tau_0 \lambda_i)(1 - \tau_1 \lambda_i) \ldots (1 - \tau_{k-1} \lambda_i)\, v_i\end{aligned} \qquad (13)$$

Из (12) и (13) получим

$$G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})\, v_i = \underbrace{(1 - \tau_{k-1} \lambda_i)(1 - \tau_{k-2} \lambda_i) \ldots (1 - \tau_0 \lambda_i)}_{это\ число}\, v_i$$

Следовательно, матрица $G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})$ имеет такие же собственные векторы $v_i,\ i = 1,\ldots n$, что и матрица A, и собственными числами матрицы $G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})$ являются вещественные числа

$$\lambda_i(G) = (1 - \tau_0 \lambda_i)(1 - \tau_2 \lambda_i) \ldots (1 - \tau_{k-1} \lambda_i),\ i = 1,\ldots n \qquad (14)$$

Других собственных чисел и других (с точностью до константы) собственных векторов у переходной матрицы $G(\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{k-1})$ нет.

Примечание

Формула (14) означает следующее.

Если $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$ выбраны, то на основе **упорядоченных, положительных** собственных чисел матрицы A

$$0 < \lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$$

могут быть вычислены собственные числа переходной матрицы.

Они принимают вещественные значения

$$\lambda_1(G) = (1 - \tau_0 \lambda_1)(1 - \tau_2 \lambda_1)\dots(1 - \tau_{k-1}\lambda_1)$$

$$\lambda_2(G) = (1 - \tau_0 \lambda_2)(1 - \tau_2 \lambda_2)\dots(1 - \tau_{k-1}\lambda_2)$$

… … …

$$\lambda_n(G) = (1 - \tau_0 \lambda_n)(1 - \tau_2 \lambda_n)\dots(1 - \tau_{k-1}\lambda_n),$$

которые проиндексированы, но не упорядочены.

Если указанные значения еще не вычислены, определить, какое из них: будет наибольшим по модулю ($\lambda_1(G), \lambda_3(G)$ или $\lambda_7(G)$), не представляется возможным.

Шаг IV – задача о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля (этот фрагмент доказательства не содержит доказательств)

Чтобы решить задачу (9) с функционалом (11), рассмотрим свойства полиномов, наименее уклоняющихся от нуля.

Уклонением непрерывной функции $\varphi(\lambda)$ от нуля на отрезке $\lambda \in [\lambda_1; \lambda_n]$ называется максимальное по модулю значение этой функции на данном отрезке:

$$\max_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]} |\varphi(\lambda)| \tag{15}$$

Рассмотрим на отрезке $[\lambda_1; \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ класс полиномов степени не выше k со свободным слагаемым, равным 1. Обозначим указанный класс через $\hat{K}$:

$$\hat{K} = \{1 + a_1\lambda + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k\}. \tag{16}$$

Элементами класса являются полиномы

$$P_k(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k$$

При $\lambda = 0$ они принимают значение 1: $P_k(0) = 1$

Полином $\hat{P}_k(\lambda) \in \hat{K}$ называют **наименее уклоняющимся от нуля**

на отрезке $[\lambda_1; \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ **в классе** $\hat{K}$,

если для любого (другого) полинома $P_k(\lambda) \in \hat{K}$ выполнено

$$\max_{\lambda\in[\lambda_1;\,\lambda_n]} \left| \hat{P}_k(\lambda) \right| \le \max_{\lambda\in[\lambda_1;\,\lambda_n]} \left| P_k(\lambda) \right| \qquad (17)$$

Задачу об отыскании полинома, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[\lambda_1; \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ **в классе** $\hat{K}$ записывают в виде

$$\max_{\lambda\in[\lambda_1;\,\lambda_n]} \left| P_k(\lambda) \right| \underset{(a_1,\, a_2\, \ldots a_k\,)\in R^k}{\longrightarrow} \min, \qquad P_k(\lambda) \in \hat{K} \qquad (18)$$

Запись (18) читается так: найти такие коэффициенты $(a_1, a_2, \ldots a_k) \in R^k$, чтобы полином $P_k(\lambda)$ из класса $\hat{K}$ с указанными выше коэффициентами имел на отрезке $\lambda \in [\lambda_1; \lambda_n]$ **минимально возможное максимальное по модулю значение**

$$\max_{\lambda\in[\lambda_1;\,\lambda_n]} \left| P_k(\lambda) \right|$$

Решение задачи (18) называют **полиномом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке** $[\lambda_1; \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ **в классе** $\hat{K}$

Установлено следующее:

Решением задачи (18), т.е. **полиномом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке** $[\lambda_1; \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ в классе $\hat{K}$, является полином Чебышева $\hat{T}_k(\lambda)$, корни которого вещественны, различны и принадлежат отрезку $[\lambda_1;\, \lambda_n]$.

Корнями являются следующие значения:

$$\hat{\lambda}_s = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s) \right), \quad s = 0,\ldots k-1 \qquad (19)$$

Уклонение от нуля для полинома $\hat{T}_k(\lambda) \in \hat{K}$ на отрезке $[\lambda_1; \lambda_n], 0 < \lambda_1 < \lambda_n$ составит

$$\max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} \left| \hat{T}_k(\lambda) \right| = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}, \qquad (20)$$

где $\rho = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}} - 1}{\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}} + 1}$, причем

$$\rho \in (0;1) \text{ и } \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \in (0;1). \tag{21}$$

Уклонение от нуля для полинома $\hat{T}_k(\lambda) \in \hat{K}$ достигается в $k+1$ точке отрезка, а именно, $k-1$ точках локального экстремума, расположенных на интервале $(\lambda_1; \lambda_n)$, а также на концах отрезка $[\lambda_1; \lambda_n]$, то есть в точках $\lambda = \lambda_1$; $\lambda = \lambda_n$.

Это означает, что

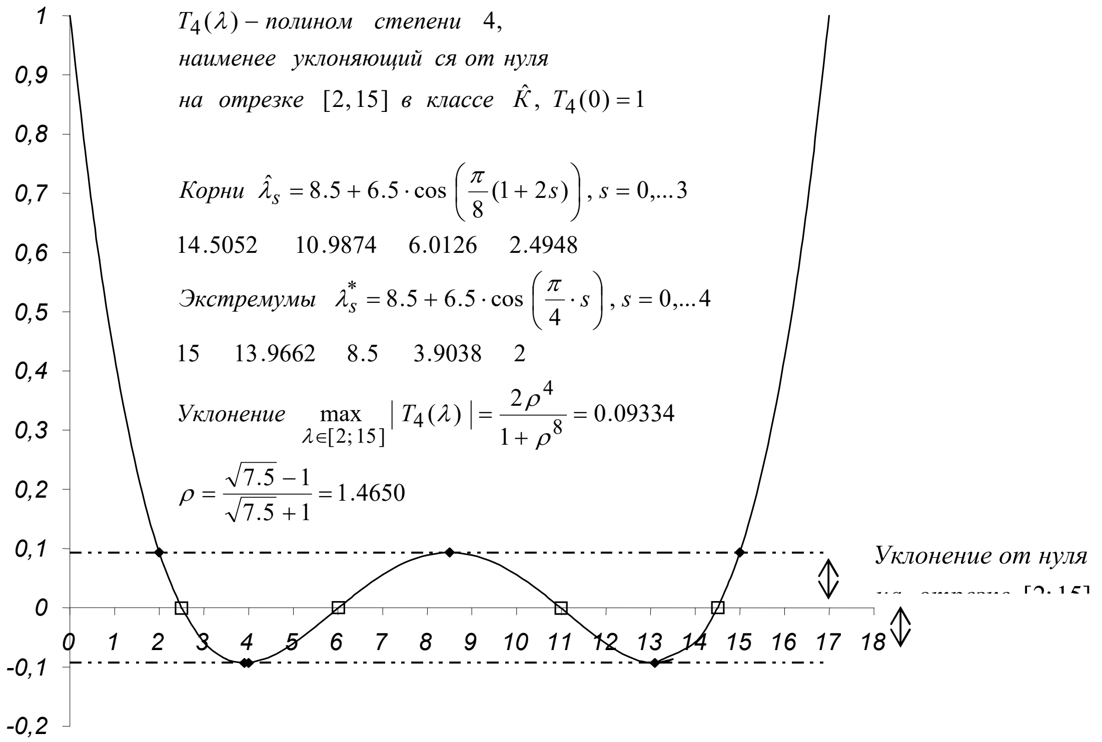
$$\max_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]} \left| \hat{T}_k(\lambda) \right| = \left| \hat{T}_k(\lambda_1) \right| = \left| \hat{T}_k(\lambda_n) \right| = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \tag{22}$$

Полином $\hat{T}_k(\lambda)$ имеет степень k и свободное слагаемое 1: $\hat{T}_k(0) = 1$.

Поэтому $\hat{T}_k(\lambda) \in \hat{K}$ можно записывать в виде

$$\hat{T}_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \hat{\lambda}_0)(\lambda - \hat{\lambda}_1)\ldots(\lambda - \hat{\lambda}_{k-1})}{(-1)^k \hat{\lambda}_0 \cdot \hat{\lambda}_1 \ldots \cdot \hat{\lambda}_{k-1}} \tag{23}$$

где $\hat{\lambda}_s, s = 0,\ldots k-1$ - его корни, см. (19). Полином 4-й степени $\hat{T}_4(\lambda) \in \hat{K}$, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[2,15]$ и принимающий значение $\hat{T}_4(0) = 1$ (свободное слагаемое 1), в качестве примера приведен на рисунке.



Шаг V – решение задачи оптимизации

Вернемся к задаче (9) с функционалом (11). Считаем, что параметры $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$ некоторым образом заданы, используем (14) и для нормы переходной матрицы $G(\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1})$ запишем оценку

$$\| G(\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}) \|_2 = \max_{i=1,\dots n} | \lambda_i(G) | =$$
$$= \max_{i=1,\dots n} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda_i)(1-\tau_2\lambda_i)\dots(1-\tau_{k-1}\lambda_i) |}_{\text{это собственные числа } \lambda_i(G) \text{ переходной матрицы } G(\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1})} \le \quad (24)$$
$$\le \max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} | (1-\tau_0\lambda)(1-\tau_1\lambda)\dots(1-\tau_{k-1}\lambda) |$$

Оценка верна, потому что в левой ее части под знаком модуля указаны значения некоторого полинома $P_k(\lambda)$ в точках $\lambda_i, i = 1,\dots n,$, **расположенных на отрезке** $[\lambda_1; \lambda_n]$, а в правой части под знаком модуля указаны значения того же полинома $P_k(\lambda)$ **в произвольной точке отрезка** $[\lambda_1; \lambda_n]$:

$$\| G(\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}) \|_2 = \max_{i=1,\dots n} | \lambda_i(G) | =$$
$$= \max_{i=1,\dots n} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda_i)(1-\tau_2\lambda_i)\dots(1-\tau_{k-1}\lambda_i) |}_{\text{это } P_k(\lambda_i), \text{ где } \lambda_i - \text{положительное собственное число матрицы } A} \le$$
$$\le \max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda)(1-\tau_1\lambda)\dots(1-\tau_{k-1}\lambda) |}_{\text{это } P_k(\lambda) \text{ при } \lambda\in[\lambda_1, \lambda_n], \text{ где } \lambda_1 \text{ и } \lambda_n - \text{минимальное и максимальное положительные собственные числа матрицы } A}$$

Оценка верна, потому что максимум модуля функции $P_k(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_1; \lambda_n]$ не может быть меньше модуля функции $P_k(\lambda)$ в конкретной точке того же отрезка $[\lambda_1; \lambda_n]$.

Далее поставим задачу найти такие параметры $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$, чтобы на заданном отрезке $[\lambda_1; \lambda_n]$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_n$, **максимум** модуля функции $P_k(\lambda)$ принимал **минимально возможное значение**:

$$\max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda)(1-\tau_1\lambda)\dots(1-\tau_{k-1}\lambda) |}_{\text{это } P_k(\lambda) - \text{полином степени не выше } k, \text{ такой, что } P_k(0)=1} \to \min_{(\tau_0, \tau_1, \dots\tau_k) \in R^k} \quad (25)$$

Задача (25) представляет собой разобранную выше (см. (18)) **задачу об отыскании полинома, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке** $[\lambda_1; \lambda_n]$, $0 < \lambda_1 < \lambda_n$, **в классе полиномов степени не выше** k **со свободным слагаемым, равным 1.**

Как рассмотрено выше (Шаг IV), решением (25) является полином $\hat{T}_k(\lambda)$ степени k, такой, что $\hat{T}_k(0)=1$. Его корни определены по формулам

$$\hat{\lambda}_s = \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right), \quad s=0,\dots k-1 \qquad \text{(см. (19))}$$

Чтобы искомый полином $P_k(\lambda)$ совпал с $\hat{T}_k(\lambda)$, нужно, чтобы совпали их корни. Так как $P_k(\lambda)$ обращается в ноль при значениях аргумента

$$\lambda = \frac{1}{\tau_s},\ s=0,\dots k-1,$$

полином $P_k(\lambda)$ совпадает с $\hat{T}_k(\lambda)$, если выбирать параметры $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$ из условия

$$\frac{1}{\tau_s} = \hat{\lambda}_s, \quad s=0,\dots k-1,$$

что означает

$$\tau_s = \left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n-\lambda_1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s)\right)\right)^{-1},\ s=0,\dots k-1$$

Таким образом, при выборе $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$ по формулам (11.30) функционал задачи (25) принимает минимально возможное значение, и оно равно

$$\max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} \left| (1-\tau_0\lambda)(1-\tau_1\lambda)\dots(1-\tau_{k-1}\lambda) \right| =$$

$$= \max_{\lambda\in[\lambda_1,\, \lambda_n]} \left| T_k(\lambda) \right| = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \qquad (26)$$

где $\rho = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}-1}{\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}+1} = \dfrac{\sqrt{\mu_A}-1}{\sqrt{\mu_A}+1}$

Напомним, что для полинома $\hat{T}_k(\lambda)\in\hat{K}$ уклонение от нуля (максимальное по модулю значение) достигается в $k+1$ точке отрезка $[\lambda_1;\lambda_n]$, в том числе на границе отрезка, в точках $\lambda=\lambda_1;\ \lambda=\lambda_n$, см. (22):

$$\left|\hat{T}_k(\lambda_1)\right| = \left|\hat{T}_k(\lambda_n)\right| = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}$$

Это означает, что при выборе $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$ по формулам (11.30)

$$| (1-\tau_0\lambda_1)(1-\tau_1\lambda_1)...(1-\tau_{k-1}\lambda_1) | = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}$$

$$| (1-\tau_0\lambda_n)(1-\tau_1\lambda_n)...(1-\tau_{k-1}\lambda_n) | = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \qquad (27)$$

Шаг VI – проверка утверждений о сходимости

Рассмотрим неравенство (24) для метода (11.29) с параметрами (11.30). С учетом (26) для нормы переходной матрицы $G(\tau_0, \tau_1, ...\tau_{k-1})$ доказана оценка

$$\| G(\tau_0, \tau_1, ...\tau_{k-1}) \|_2 = \max_{i=1,...n} | \lambda_i(G) | =$$

$$= \max_{i=1,...n} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda_i)(1-\tau_2\lambda_i)...(1-\tau_{k-1}\lambda_i) |}_{\text{это собственные числа } \lambda_i(G) \text{ переходной матрицы } G(\tau_0, \tau_1, ...\tau_{k-1})} \le$$

$$\le \max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda)(1-\tau_1\lambda)...(1-\tau_{k-1}\lambda) |}_{\text{здесь полином } \hat{T}_k(\lambda)\text{, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке } [\lambda_1, \lambda_n]} = \qquad (28)$$

$$= \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \quad (\text{это величина его уклонения})$$

В силу (27)

$$\| G(\tau_0, \tau_1, ...\tau_{k-1}) \|_2 = \max_{i=1,...n} | \lambda_i(G) | =$$

$$= \max_{i=1,...n} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda_i)(1-\tau_2\lambda_i)...(1-\tau_{k-1}\lambda_i) |}_{\text{это собственные числа } \lambda_i(G) \text{ переходной матрицы } G(\tau_0, \tau_1, ...\tau_{k-1})} =$$

$$= \underbrace{| (1-\tau_0\lambda_1)(1-\tau_1\lambda_1)(1-\tau_{k-1}\lambda_1) |}_{\text{это собственное число } \lambda_1 (G) \text{ переходной матрицы } G\text{, оно максимальное по модулю}} =$$

$$= \underbrace{| (1-\tau_0\lambda_n)(1-\tau_1\lambda_n)(1-\tau_{k-1}\lambda_n) |}_{\text{это собственное число } \lambda_n(G) \text{ переходной матрицы } G\text{, оно также максимальное помодулю}} =$$

$$= \max_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_n]} \underbrace{| (1-\tau_0\lambda)(1-\tau_1\lambda)...(1-\tau_{k-1}\lambda) |}_{\text{здесь полином } \hat{T}_k(\lambda)\text{, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке } [\lambda_1, \lambda_n]} =$$

$$= \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \quad (\text{это величина его уклонения}) \qquad (29)$$

Таким образом, для метода (11.29) с параметрами (11.30)

$$\| G(\tau_0, \tau_1, ... \tau_{k-1}) \|_2 = \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \tag{30}$$

Из (8) и (30) следует приведенная в Теореме 8 оценка погрешности метода:

$$\left\| z^{(k)} \right\|_2 \leq \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \left\| z^{(0)} \right\|_2 \qquad \text{см. (11.34)}$$

Оценку (11.35) для погрешности метода на шаге Nk (N есть количество циклов) получим по индукции.

Пусть $N=2.$ В соответствии с (11.32) начальным приближением для второго цикла является $x^{(k)}$. Поэтому погрешность $z^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ является начальной погрешностью второго цикла. Через k шагов будет получен элемент $x^{(2k)}$, и погрешность метода следует обозначить $z^{(2k)} = x^{(2k)} - x^*$. В соответствии с (11.34)

$$\left\| z^{(2k)} \right\|_2 \leq \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \left\| z^{(k)} \right\|_2 \leq \left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \right)^2 \left\| z^{(0)} \right\|_2 .$$

Аналогично доказывается оценка погрешности метода по завершении каждого последующего цикла. По завершении цикла с номером N получим

$$\left\| z^{(Nk)} \right\|_2 \leq \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \left\| z^{((N-1)k)} \right\|_2 \leq \ldots \leq \left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \right)^N \left\| z^{(0)} \right\|_2$$

Сходимость метода следует из (21) и (11.35).

Так как $\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \in (0,1)$, при $N \to \infty$ получим $\left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \right)^N \to 0$.

Откуда следует, что для $\forall x^{(0)} \in R^n$ при $N \to \infty$ (при увеличении числа циклов)

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| z^{(Nk)} \right\|_2 = 0 .$$

Последовательность $x^{(0)}, x^{(k)}, x^{(2k)},.x^{(3k)}, x^{(4k)} ... x^{(Nk)}$..... сходится к x^* (то есть к решению СЛАУ $Ax = b$) с оценкой (11.35).

Построение метода на основе оценок собственных чисел

Рассмотрим СЛАУ (11.1) с симметричной, положительно определенной матрицей. Как следует из Теоремы 8, для построения метода и оценки погрешности нужно знать минимальное и максимальное собственные числа матрицы A.

Предположим, что собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ неизвестны, но известны их оценки, то есть известны числа $M_{\min} > 0$ и $M_{\max} > 0$, такие, что

$\lambda_i(A) \in [M_{\min}, M_{\max}]$, $i = 1,\ldots n$.

Рассмотрим метод (11.29) с натуральным параметром k и вещественными параметрами

$$\tilde{\tau}_s = \left(\frac{M_{\min} + M_{\max}}{2} + \frac{M_{\max} - M_{\min}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2k}(1+2s) \right) \right)^{-1}, \ s = 0,\ldots k-1 \quad (11.39)$$

Теорема 9. При решении задачи (11.1) с симметричной, положительно определенной матрицей A методом (11.29) с параметрами (11.39) оценка погрешности метода на шаге k имеет вид

$$\left\| z^{(k)} \right\|_2 \le \frac{2\tilde{\rho}^k}{1+\tilde{\rho}^{2k}} \left\| z^{(0)} \right\|_2 \quad (11.40)$$

Оценка погрешности метода на шаге Nk (N есть количество циклов) имеет вид

$$\left\| z^{(Nk)} \right\|_2 \le \left(\frac{2\tilde{\rho}^k}{1+\tilde{\rho}^{2k}} \right)^N \left\| z^{(0)} \right\|_2 \quad (11.41)$$

и метод сходится в следующем смысле:

$$\forall x^{(0)} \in R^n \quad \lim_{N \to +\infty} \left\| z^{(Nk)} \right\|_2 = 0. \quad (11.42)$$

(к решению x^* сходятся элементы последовательности (11.32)).

В формулах (11.40)-(11.42) значение $\tilde{\rho}$ определено как

$\tilde{\rho} = \dfrac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} + 1}$, где $M = \dfrac{M_{\max}}{M_{\min}}$.

Оптимальное свойство метода (11.29), (11.39) состоит в следующем: среди всех методов вида (11.29) метод с параметрами (11.39) дает наилучшую гарантию убывания погрешности за k шагов, справедливую для всех симметричных положительно определенных матриц $A = A^T > 0$, собственные числа которых расположены в диапазоне $[M_{\min}, M_{\max}]$, $0 < M_{\min} < M_{\max}$.

Комментарий

Если собственные числа $A = A^T > 0$ расположены в диапазоне $[\lambda_1, \lambda_n]$, $0 < \lambda_1 < \lambda_n$, метод (11.29) с параметрами (1.30) обеспечит лучшую гарантию убывания погрешности, чем метод (11.29) с параметрами (11.39).

Действительно, в данном случае $1 < \mu_A \le M$ и $0 < \dfrac{\sqrt{\mu_A} - 1}{\sqrt{\mu_A} + 1} \le \dfrac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} + 1} < 1$

(оценивается возрастающая функция вида $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ при $x > 1$).

Поэтому для множителей из оценок (11.34) и (11.40), (11.35) и (11.41) верно

$$0 < \frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}} \le \frac{2\tilde{\rho}^k}{1+\tilde{\rho}^{2k}} < 1,\ 0 < \left(\frac{2\rho^k}{1+\rho^{2k}}\right)^N \le \left(\frac{2\tilde{\rho}^k}{1+\tilde{\rho}^{2k}}\right)^N < 1$$

Метод (11.29) с параметрами (11.30) (тот, что лучше сходится) требует знания собственных чисел, а метод с параметрами (11.39) использует их оценки.

П р и м е р (k = 4)

$Ax = b$, где $x \in R^n$, $b \in R^n$, $A\,(n \times n)$, $A = A^T > 0$, $\lambda_i(A) \in [2; 15]$, $i = 1,\dots n$.

Метод $x^{(s+1)} = x^{(s)} - \tilde{\tau}_s \cdot r^{(s)}$, где $k = 4$, $s = 0,\dots 3$. Используем оценки спектра.

$$\tilde{\tau}_s = \left(\frac{2+15}{2} + \frac{15-2}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}(1+2s)\right)\right)^{-1},\ s = 0,\dots 3$$

$$\tilde{\tau}_0 = \left(8.5 + 6.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^{-1} = 0.06894 \qquad \tilde{\tau}_1 = \left(8.5 + 6.5 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^{-1} = 0.09101$$

$$\tilde{\tau}_2 = \left(8.5 + 6.5 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^{-1} = 0.16632 \qquad \tilde{\tau}_3 = \left(8.5 + 6.5 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)^{-1} = 0.40084$$

Оценим погрешность метода на шаге $4N$ (N есть количество циклов):

$$\left\| z^{(4N)} \right\|_2 \le \left(\frac{2\rho^4}{1+\rho^8}\right)^N \left\| z^{(0)} \right\|_2 = (0.09334)^N \cdot \left\| z^{(0)} \right\|_2,$$

Здесь $\rho = \dfrac{\sqrt{\dfrac{15}{2}} - 1}{\sqrt{\dfrac{15}{2}} + 1} = 0.46504$. Метод сходится: $\forall x^{(0)} \in R^n \quad \lim\limits_{N \to +\infty} \left\| z^{(4N)} \right\|_2 = 0$.

Через $N = 5$ циклов, то есть за 20 шагов, для погрешности метода верно

$$\left\| z^{(20)} \right\|_2 \le (0.09334)^5 \cdot \left\| z^{(0)} \right\|_2 = 0.71 \cdot 10^{-5} \cdot \left\| z^{(0)} \right\|_2.$$

Погрешность начального приближения снизится более чем в 100 000 раз.