

Введение в теорию волновых процессов

В. А. Костин

18 апреля 2023 г.

1. Занятия 8 и 9 (на 20 марта 13:00 и 14:40)

1.1. Предыдущее занятие: устойчивость однородного потока транспорта

На прошлом занятии мы рассмотрели задачу об устойчивости однородного стационарного потока транспорта с учётом зависимости плотности потока q от градиента плотности ρ_x (а не только от самого значения плотности ρ) и конечности времени реакции водителя τ . Исходными уравнениями служили уравнения

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0, \quad (1)$$

$$v_t + vv_x = -\frac{1}{\tau} \left[v - V(\rho) + v \frac{\rho_x}{\rho} \right], \quad (2)$$

где v — (гидродинамическая) скорость потока, $V(\rho)$ — зависимость скорости однородного потока от плотности (желаемая скорость, к которой стремится водитель в однородном потоке с плотностью ρ), v — постоянный коэффициент. Линеаризованное уравнение для возмущения плотности $r = \rho - \rho_0$ относительно однородного стационарного потока с плотностью ρ_0 имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r}{\partial x} = v \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 r,$$

где $v_0 = V(\rho_0)$ — скорость невозмущённого однородного потока и $c_0 = v_0 + \rho_0 V'(\rho_0)$ — скорость распространения возмущения (скорость звука) в этом потоке. Соответствующий критерий устойчивости имеет вид

$$v > (v_0 - c_0)^2 \tau,$$

что в сущности означает, что для устойчивости потока водитель должен тем дальше смотреть вперёд, чем больше его время реакции.

1.2. Структура ударной волны

На этом занятии мы обсудим, к чему приводят эти эффекты для рассмотренных ранее ударных волн с разрывами. Начнём рассмотрение с поиска стационарных решений уравнений (1) и (2) вида

$$\rho(x, t) = \rho(\eta), \quad v(x, t) = v(\eta), \quad \eta = x - Ut,$$

где U — постоянная скорость стационарной волны (скорость перемещения профиля). Для простоты мы будем рассматривать лишь случай $\tau = 0$, случай с $\tau > 0$ обсуждается в книге [1], параграф 3.1. При $\tau = 0$ уравнение (2) даёт $v = V(\rho) - v\rho_\eta/\rho$, а уравнение (1) переходит в уравнение второго порядка.

$$-U\rho_\eta + (v\rho)_\eta = 0, \quad (3)$$

Его фазовый портрет изображён на рисунке 1 для ранее использованной зависимости $Q(\rho) \equiv V(\rho)\rho = a\rho \ln(\rho_j/\rho)$, где a и ρ_j — константы. На этом портрете прямая $\rho_\eta = 0$

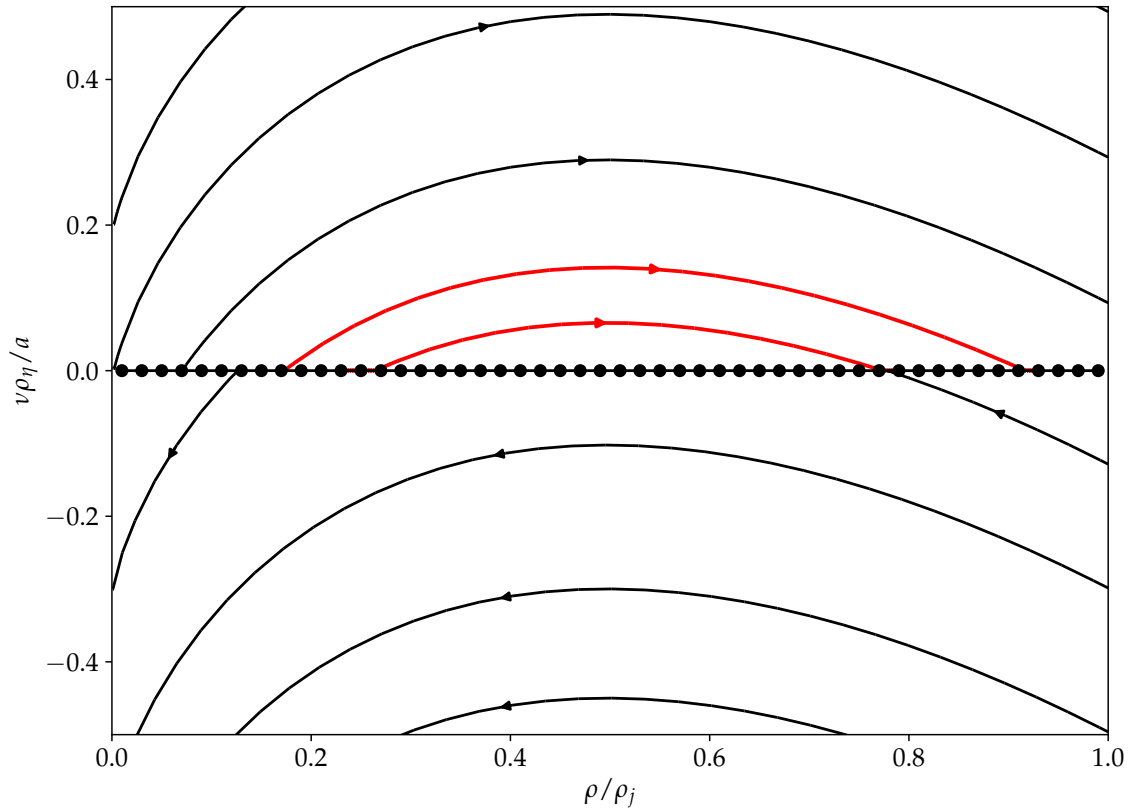


Рис. 1: Фазовый портрет уравнения (3) для $Q(\rho) = a\rho \ln(\rho_j/\rho)$ и $U/a = -0.3$.

состоит из положения равновесия (соответствующих однородным стационарным потокам), а все траектории в верхней полуплоскости начинаются и заканчиваются на этой прямой, являясь, таким образом, гетероклиническими траекториями. Именно эти траектории определяют ограниченные решения уравнения (3), существующие при всех действительных η .

По смыслу задачи $0 < \rho < \rho_j$, соответствующие этому условию траектории выделены на рисунке 1 красным цветом и большей толщиной линий (по сравнению с другими траекториями). Это решение (для одной из двух красных траекторий) изображено на рисунке 2. Для потока транспорта изображённое решение соответствует волне уплотнения (то есть снижения скорости) распространяющейся навстречу потоку; конкретно для изображённого решения $a = 25$ км/ч скорость исходного потока около 44 км/ч, скорость в пробке — всего 2 км/ч, а скорость стационарной волны $U = -7.5$ км/ч.

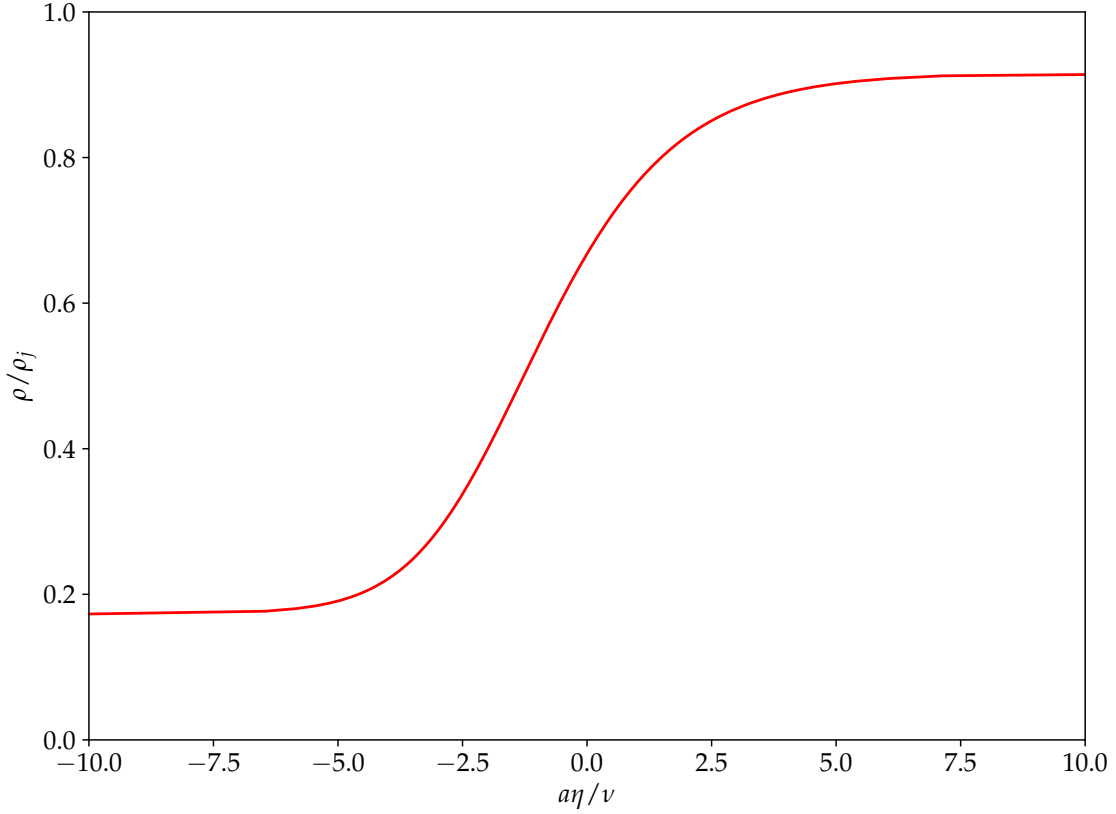


Рис. 2: Гетероклиническое движение — профиль стационарной волны $Q(\rho) = a\rho \ln(\rho_j/\rho)$ и $U/a = -0.3$.

Легко найти, как связаны эти скорости в общем случае. Для проинтегрируем уравнение (3) и получим

$$(U - v)\rho = A = \text{const}, \quad (4)$$

где A — некоторая константа. Пусть $\rho_1 = \rho(\eta \rightarrow -\infty)$ и $\rho_2 = \rho(\eta \rightarrow +\infty)$, тогда, так как $\rho_\eta(\eta \rightarrow \pm\infty) = 0$, этот интеграл (4) даёт

$$U\rho_1 - Q(\rho_1) = U\rho_2 - Q(\rho_2) = A$$

и

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (5)$$

Как видно, связь между скоростью U и параметрами состояний при $\eta \rightarrow \pm\infty$ оказалась такой же, как и в условии на разрыве в слабом решении (полученном на предыдущих занятиях)!

Это и не удивительно. В самом деле, постоянство интеграла (3) даёт уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\nu\rho_x = Q(\rho) - \rho U + A.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\frac{\eta}{\nu} = \int \frac{d\rho}{Q(\rho) - U\rho + A}. \quad (6)$$

Как видно, изменение ν можно скомпенсировать изменением масштаба по оси η . В пределе $\nu \rightarrow 0$ (соответствующему ранее разобранным случаю, в котором получались разрывы), профиль сжимается вдоль оси η и превращается в ступечатый переход от ρ_1 к ρ_2 , перемещающийся со скоростью, определяемой равенством (5).

Описанные выше свойства присущи не только задаче о потоке транспорта, но возникают всегда при введении диффузионного слагаемого (пропорционального ρ_{xx}) в дифференциальный закон сохранения

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = \nu\rho_{xx} \quad (7)$$

с $c(\rho) = Q'(\rho)$. При этом резкие разрывы, присутствующие в слабых решениях без диффузии, сглаживаются и формируются плавные скачки и ступеньки, наподобие скачка, изображенного на рис. 2.

Важным моментом является знак скачка $\rho_2 - \rho_1$. Если $c'(\rho) \equiv Q''(\rho) > 0$, то волна опрокидывается вперёд и возникает ударная волна с $\rho_2 < \rho_1$ и, наоборот, при $c'(\rho)$ происходит опрокидывание назад и $\rho_2 > \rho_1$ [как на рисунке 2].

В частном случае, если $Q(\rho)$ квадратично по ρ , $Q(\rho) = \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma$, интеграл (6) можно вычислить аналитически,

$$\frac{\eta}{\nu} = \frac{1}{\alpha(\rho_1 - \rho_2)} \ln \frac{\rho_1 - \rho}{\rho - \rho_2}. \quad (8)$$

Характерная толщина переходной области определяется $\nu/\alpha(\rho_1 - \rho_2)$. Когда эта толщина мала по сравнению с остальными длинами задачи (масштабы неоднородности), то переход можно удовлетворительно аппроксимировать разрывом, как в ранее рассмотренных решениях. Следует отметить, что хотя эта толщина стремится к 0 при $\nu \rightarrow 0$, для достаточно слабых волн при $\rho_1 - \rho_2 \rightarrow 0$ она становится неизбежно сколь угодно большой для любого сколь угодно малого фиксированного ν . Однако для слабых волн обычно любую зависимость можно аппроксимировать подходящей квадратичной зависимостью и применить (8). Стоит также отметить, что, как мы видели ранее, в большинстве задач $\rho_2 - \rho_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и на конечной стадии волны оказываются чрезвычайно слабыми и разрывная теория становится заведомо неприменимой. Обычно эта стадия не представляет интереса, так как при этом ударные волны оказываются очень слабыми.

С этой оговоркой разобранный пример частного решения в виде стационарной волны позволяет надеяться, что в общем случае при $\nu \rightarrow 0$ непрерывные решения уравнения (7) стремятся к (ранее разобранным) разрывным слабым решениям уравнения

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \quad (9)$$

для которых на разрыве выполняется условие (5), где U — скорость разрыва. Чтобы это обосновать необходимо рассмотреть более общие решения уравнения (7). Мы это сделаем для случая квадратичной зависимости $Q(\rho)$. Оказывается для такой зависимости не только можно найти аналитическое выражение для профиля стационарной волны, но и решить уравнение (7) в явном виде, что будет сделано в следующем разделе.

Перед этим сделаем ещё оговорку о системах с запаздыванием, например, системе (1) и (2) с ненулевым τ . В таких системах, запаздывание может осложнить рассмотрение и наличие диффузионного слагаемого не всегда достаточно для сглаживания разрыва, получаемого из простой теории, соответствующей уравнению (9). При этом может понадобиться привлечение нескольких законов сохранения в интегральной форме или учёта эффектов более высокого порядка (для деталей, см. параграфы 3.1 и 3.2 в [1]). Для потока транспорта же не вполне ясно, какой закон сохранения соответствует уравнению запаздывания (2).

1.3. Уравнение Бюргерса

1.3.1. Замечания о применимости

Итак, рассмотрим уравнение непрерывности

$$\rho_t + q_x = 0, \quad q = Q(\rho) - v\rho_x.$$

Умножив дифференциальное уравнение на $c'(\rho)$, сведём его к уравнению для c . Для произвольной зависимости $Q(\rho)$ получившееся уравнение имеет вид

$$c_t + cc_x = vc_{xx} - vc''(\rho)\rho_x^2. \quad (10)$$

В случае квадратичной зависимости $Q(\rho)$ последнее слагаемое исчезает и уравнение переходит в уравнение Бюргерса

$$c_t + cc_x = vc_{xx}.$$

В общем случае, можно надеяться, что слагаемое $vc''(\rho)\rho_x^2$ не приводит к существенным эффектам и уравнение Бюргерса полезно для качественного описания даже вне своей области применимости. Одной из причин является то, что отношение $vc''(\rho)\rho_x^2$ к vc_{xx} имеет порядок амплитуды возмущения и можно ожидать, что уравнение Бюргерса будет хорошим приближением для малых амплитуд, причём при пренебрежении $vc''(\rho)\rho_x^2$ не происходит ошибок накопления (например, при $t \rightarrow \infty$), приводящих к неравномерности приближения. Для сравнения, линеаризация слагаемого cc_x приводит к такой неравномерности, как обсуждалось ранее.

1.3.2. Замена Коула — Хопфа

Поэтому далее считаем $Q(\rho)$ квадратичной зависимостью и рассматриваем уравнение Бюргерса (1.3.1) вместо общего уравнения (10). Замечательное свойство этого уравнения заключается в том, что нелинейная замена, называемая заменой Коула — Хопфа,

$$c = -2v \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad (11)$$

сводит его к уравнению теплопроводности. Убедиться в этом легче в два этапа. Сначала сделаем замену $c = \psi_x$, проинтегрируем уравнение Бюргерса и получим

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = v\psi_{xx}.$$

Теперь подставим $\psi = -2v \ln \varphi$, откуда

$$\varphi_t = v\varphi_{xx}.$$

Нелинейное слагаемое полностью исключено. Получившееся линейное уравнение теплопроводности хорошо известно и может решаться множеством способов.

В частности, начальной задаче с начальным условием $c(x, 0) = F(x)$ при $t = 0$ соответствует задача Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием, следующим из замены Коула — Хопфа (11),

$$\varphi(x, 0) = \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\eta) d\eta \right].$$

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой известно из курса «Уравнения математической физики» и имеет вид

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta, 0) \exp \left[-\frac{(x - \eta)^2}{4\nu t} \right] d\eta.$$

Из него заменой Коула — Хопфа (11) получаем решение начальной задачи для уравнения Бюргерса

$$c(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} e^{-G/2\nu} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} d\eta}, \quad (12)$$

где

$$G(\eta) = \int_0^\eta F(\zeta) d\zeta + \frac{(x - \eta)^2}{2t}. \quad (13)$$

1.3.3. Поведение при $\nu \rightarrow 0$

Теперь, как и было заявлено, проверим, что при $\nu \rightarrow 0$ это решение стремится к решению уравнения $c_t + cc_x = 0$ с разрывными ударными волнами, скорость которых удовлетворяет условию $U = (c_1 + c_2)/2$, где c_1 и c_2 — значения c с двух сторон от разрыва. Для этого применим метод Лапласа к интегралам в (12). Этот метод является простейшим вариантом метода перевала и основан на том факте, что при $\nu \rightarrow 0$, основные вклады в интегралы дают окрестности стационарных точек $\eta = \xi_j(x, t)$, где ξ_j удовлетворяют условиям

$$G'(\xi_j) = F(\xi_j) - \frac{x - \xi_j}{t} = 0 \quad (14)$$

и

$$G''(\xi_j) = F'(\xi_j) + \frac{1}{t} > 0,$$

а $j \in J$ — индекс, нумерующий не более, чем счётное число стационарных точек; мы предполагаем для простоты, что начальное условие $F(x)$ дифференцируемо хотя бы один раз. Главный член асимптотики, получаемой по методу Лапласа в невырожденном случае, равен сумме вкладов от стационарных точек, где каждый вклад получается заменой выражения в экспоненте многочленом Тейлора второго порядка в стационарной точке, а предэкспоненциального множителя — его значением в стационарной точке. То есть при $\nu \rightarrow 0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{-G/2\nu} d\eta \sim \sum_{j \in J} g(\xi_j) \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi_j)}} e^{-G(\xi_j)/2},$$

где $g(\eta) = (x - \eta)/t$ для числителя (12) и $g(\eta) = 1$ — для знаменателя:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} e^{-G/2\nu} d\eta \sim \sum_{j \in J} \frac{x - \xi_j}{t} \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi_j)}} e^{-G(\xi_j)/2\nu},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} d\eta \sim \sum_{j \in J} \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi_j)}} e^{-G(\xi_j)/2\nu}.$$

В ситуации общего положения среди стационарных точек, есть только одна ξ_m , отвечающая минимуму $G(\xi_j)$, то есть $G(\xi_m) < G(\xi_j)$ при $j \neq m$. Именно она соответствует преобладающему вкладу в пределе $\nu \rightarrow 0$. Таким образом, в сумме можно оставить только вклад от ξ_m :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} e^{-G/2\nu} d\eta \sim \frac{x - s_m}{t} \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi_m)}} e^{-G(\xi_m)/2\nu},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} d\eta \sim \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi_m)}} e^{-G(\xi_m)/2\nu}.$$

Подставляя эти асимптотики в (12), получаем

$$c \sim \frac{x - \xi_m}{t}. \quad (15)$$

При этом в силу условия (14)

$$\frac{x - \xi_m}{t} = F(\xi_m)$$

и, таким образом, полученную асимптотику (15) для c можно переписать как

$$c \sim F(\xi_m), \quad x = \xi_m + F(\xi_m) t \quad (16)$$

или

$$c \sim F(x - ct), \quad (17)$$

что в точности совпадает с решением уравнения $c_t + cc_x = 0$, полученным ранее методом характеристик; стационарная точка соответствует характеристической переменной. Однако, мы помним, что записи (16) и (17) могут давать многозначное решение, а для устранения многозначности приходится вводить разрывы. Нужно убедиться, что ξ_m при этом всегда соответствует той ветке, которая остаётся после введения разрыва для конкретных x и t . Для этого достаточно рассмотреть ситуации, в которых может иметь место разрыв и убедиться, что на них выполняется соответствующее условие $U = (c_1 + c_2)/2$. В этих ситуациях среди стационарных точек имеется по меньшей мере две с минимальными значениями $G(\xi_j)$. Общее положение (без вырождения) соответствует двум таким точкам, пусть это ξ_1 и ξ_2 , $G(\xi_1) = G(\xi_2) < G(\xi_j)$ при $j \neq 1, 2$. В силу (13)

$$\int_0^{\xi_1} F(\zeta) d\zeta + \frac{(x - \xi_1)^2}{2t} = \int_0^{\xi_2} F(\zeta) d\zeta + \frac{(x - \xi_2)^2}{2t}.$$

Применяя условие (14), переписываем это равенство как

$$\frac{F(\xi_1) + F(\xi_2)}{2} (\xi_2 - \xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi) d\xi.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\frac{F(\xi_1) + F(\xi_2)}{2} (\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) + \frac{F'(\xi_1) \dot{\xi}_1 + F'(\xi_2) \dot{\xi}_2}{2} (\xi_2 - \xi_1) = \dot{\xi}_2 F(\xi_2) - \dot{\xi}_1 F(\xi_1). \quad (18)$$

Исключая x из равенств

$$x = \xi_{1,2} + F(\xi_{1,2}) t, \quad (19)$$

находим $\xi_2 - \xi_1 = -t[F(\xi_2) - F(\xi_1)]$. Подставив последнее в (18), приведя подобные и сократив на общий множитель, запишем

$$\dot{\xi}_1 [1 + F'(\xi_1) t] + \dot{\xi}_2 [1 + F'(\xi_2) t] = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с временными производными тех же равенств (19),

$$U = \frac{dx}{dt} = \dot{\xi}_{1,2} [1 + F'(\xi_{1,2}) t] + F(\xi_{1,2}), \quad (20)$$

находим $U = [F(\xi_2) + F(\xi_1)]/2 = (c_2 + c_1)/2$, что и требовалось показать.

Таким образом, мы показали, что действительно в пределе $\nu \rightarrow 0$ решение уравнения Бюргерса переходит в слабые решения уравнения $c_t + cc_x = 0$ с условием $U = (c_2 + c_1)/2$ на разрыве. На практике, чтобы можно было пользоваться разрывными решениями нужно потребовать малость некоторой безразмерной величины пропорциональной ν . Например, в задаче с одиночным горбом, возмущающем однородное состояние $c = c_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)$, в качестве такого безразмерного параметра можно рассматривать $1/\text{Re}$, где

$$\text{Re} = \frac{A}{2\nu}, \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\xi) - c_0] dx.$$

Число Re характеризует отношение нелинейного члена $(c - c_0)c_x$ к диффузионному νc_{xx} и часто называется числом Рейнольдса.

1.3.4. Стационарная волна

Решение уравнения Бюргерса в виде стационарной волны по сути уже найдено нами и выражается (8). Осталось лишь разрешить (8) относительно ρ , которое линейно связано с $c = 2\alpha\rho + \beta$:

$$c = c_2 + \frac{c_1 - c_2}{1 + \exp\left[\frac{c_1 - c_2}{2\nu} (x - Ut)\right]} \equiv U - \frac{c_1 - c_2}{2} \text{th}\left[\frac{c_1 - c_2}{4\nu} (x - Ut)\right], \quad U = \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad (21)$$

где $c_1 = (x \rightarrow -\infty)$ и $c_2 = (x \rightarrow +\infty)$.

Это же решение может быть получено с помощью замены Коула — Хопфа из решения уравнения теплопроводности

$$\varphi = f_1 + f_2, \quad f_j = \exp\left(-\frac{c_j x}{2\nu} + \frac{c_j^2 t}{4\nu} - b_j\right),$$

где b_j — константы, определяющие исходное положение стационарной волны; решению (21) соответствуют $b_1 = b_2 = 0$. Выражение для c имеет вид

$$c = -2\nu \frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{c_1 f_1 + c_2 f_2}{f_1 + f_2}.$$

Естественным обобщением этого решения являются решения того же вида, но содержащие более двух слагаемых

$$\varphi = \sum_{j=1}^N f_j, \quad c = \frac{\sum_{j=1}^N c_j f_j}{\sum_{j=1}^N f_j}.$$

При достаточно малых ν такие решения описывают взаимодействие $N - 1$ ударных волн, в ходе которого они догоняют друг друга и сливаются в более сильные волны. В результате остаётся лишь одна волна с величиной скачка, определяемой $\max_{j,k}(c_j - c_k)$.

1.3.5. Практические задания

Практическое задание 1. Найти решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ с начальным условием $c(x, t = 0) = A \sin kx$, где ν , A и k — положительные константы. Записать главный член асимптотики решения при $t \rightarrow \infty$. Построить графики, качественно описывающие эволюцию поля $c(x, t)$ во времени. *Указания:* использовать замену Коула — Хопфа, уравнение теплопроводности решать методом разделения переменных, выразить ответ через модифицированные функции Бесселя $I_n(z)$, используя их интегральное представление $I_n(z) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{z \cos \theta} \cos n\theta d\theta$.

Практическое задание 2. Найти решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ с начальным условием $c(x, t = 0) = c_1$ при $x < 0$ и $c(x, t = 0) = c_2 < c_1$ при $x > 0$, где ν и $c_{1,2}$ — положительные константы. Показать, что при $t \rightarrow \infty$ решение стремится к стационарной волне (21). Построить графики, качественно описывающие эволюцию поля $c(x, t)$ во времени. *Указания:* применить формулу (12); выразить ответ через функцию ошибок.

Индивидуальное задание к зачёту (для одного студента из группы). Найти аналитическое решение уравнения Бюргерса $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ с начальным условием $c(x, t = 0) = c_0 + A\delta(x)$, где ν , c_0 и A — положительные константы, $\delta(x)$ — дельта-функция. Построить графики решений (серию зависимостей от x при разных t) для начальных чисел Рейнольдса $Re = A/2\nu = 0.1, 1$ и 10 при $c_0 = 0$. Найти зависимость числа Рейнольдса от времени. Найти масштабную временную зависимость (требуется лишь закон спада, коэффициент находить не нужно) мощности потерь, определённой как

$$P(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2 - c_0^2}{2} dx.$$

Найти главный член асимптотики при $t \rightarrow \infty$. *Указания:* использовать замену $c = c_0 + \tilde{c}$, $x = c_0 t + \tilde{x}$; применить формулу (12); выразить ответ через функцию ошибок.

Список литературы

[1] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. / М.: Мир, 1977. — 624 с.