ЛЕКЦИЯ 5

## Постановка задач для дифференциальных уравнений второго порядка

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

Например, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$u'' + bu' + cu = g$$

зависит от двух произвольных постоянных, значение которых может быть определено начальными условиями

$$u(x_0) = u_0,\ u'(x_0) = u_1,$$

где $x_0$ – некоторое "начальное"значение аргумента (задача Коши).

Характерной особенностью уравнений в частных производных является то, что его общее решение зависит от произвольных функций. Поэтому для постановки задачи требуется задать некоторое число функций.

Например, общее решение простейшего дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$$

имеет вид

$$u(x, y) = f(x),$$

где $f$ – любая функция. Для того, чтобы однозначно определить решение уравнения в квадрате $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, достаточно задать значение функции $u$ при $y = 0$, то есть считать выполненным условие

$$u(x, 0) = f(x),$$

где $f$ – заданная функция.

Дополнительные условия для однозначного определения решения дифференциального уравнения с частными производными и, следовательно, для однозначной характеристики процесса, который описывается этим уравнением, часто имеют вид так называемых **краевых условий**. Задаётся начальное состояние процесса (начальные условия) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (граничные условия). Соответствующая задача поиска решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым условиям называется **краевой задачей**.

Различают следующие три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

**Задача Коши** для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, граничные условия отсутствуют.

**Краевая задача** для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия, начальные условия отсутствуют.

**Смешанная задача** для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются и начальные и граничные условия.

Рассмотрим некоторые примеры постановок краевых задач.

## Задачи о поперечных колебаниях струны

Уравнение поперечных колебаний струны имеет вид

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x,t) \tag{1}$$

или, в случае однородной струны,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{2}$$

Для полного полного определения движения струны задаются дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи.

Допустим, струна имеет длину $l$ и в момент $t = 0$ была выведена из положения равновесия и начала колебаться. Решение уравнения колебаний $u(x,t)$ должно быть определено на плоскости переменных $x$ и $t$ в области, ограниченной отрезком $[0,l]$ оси $0x$ и лучами $x = 0$, $t > 0$ и $x = l$, $t > 0$.

Вывести струну из положения равновесия можно, сообщив её точкам либо начальное смещение, либо начальную скорость, либо и то, и другое.

Начальные условия в момент $t = 0$ имеют вид

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $\varphi$, $\psi$ – определенные на $[0,l]$ функции, задающие, соответственно, смещение и скорость в начальный момент времени.

Условия, характеризующие состояние концов струны, называются граничными условиями. Рассмотрим различные их виды.

Если концы струны жестко закреплены, то

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0.$$

В силу непрерывности решения должно быть выполнено условие согласования начальных и граничных данных:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(l) = 0.$$

Если концы струны двигаются в поперечном направлении по заданным законам, получаем условия

$$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t),$$

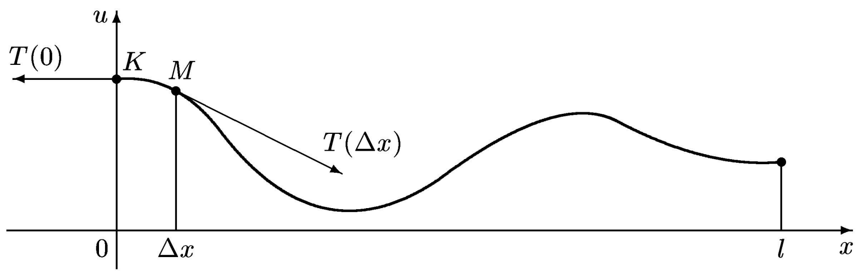
где функции $\mu_1$, $\mu_2$ определяют закон движения концов. Условия согласования принимают вид

$$\mu_1(0) = \varphi(0),\ \mu_2(0) = \varphi(l).$$

Предположим, концы струны свободны. Для получения условия при $x = 0$ спроектируем на ось u силы, действующие на участок KM.

Так как натяжение в точке $x = 0$ действует лишь параллельно оси $x$, то проекция сил натяжения на участок KM равна $T_0 u_x(\Delta x, t)$. Проекция внешней силы равна $p(0,t)\Delta x$, а проекция силы инерции равна $-\rho u_{tt}(0,t)\Delta x$. Приравнивая нулю их сумму, получим

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x, t) + p(0,t)\Delta x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)\Delta x = 0. \tag{4}$$




Устремим $\Delta x$ к нулю. Тогда вследствие непрерывности и ограниченности входящих в равенство функций получим условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0.$$

Аналогично получается условие на правом конце:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0.$$

Если на конец струны, например, $x = l$, действует заданная сила $\bar{\nu}(t)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu(t),\ \nu(t) = \frac{1}{T_0}\bar{\nu}(t).$$

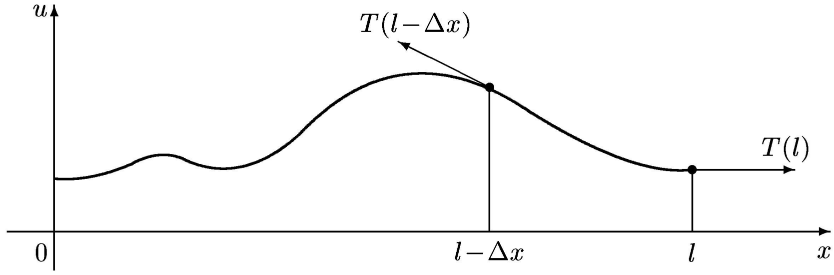
Рассмотрим случай упругого закрепления концов струны. Конец струны, например, $x = 0$, может перемещаться, но упругая сила закрепления вызывает на этом конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Эта сила, согласно закону Гука, пропорциональна смещению $u(0,t)$, то есть даётся выражением $-ku(0,t)$. Коэффициент пропорциональности $k$ называется коэффициентом жесткости закрепления.

Приравниваем в этом случае проекцию всех сил, действующих на участок KM, на ось $u$ нулю. К левой части уравнения (4) добавится член $-ku(0,t)$. Тогда имеем

$$T_0 u_x(\Delta x, t) - ku(0,t) + p(0,t)\Delta x - \rho u_{tt}(0,t)\Delta x = 0,$$

а при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right|_{x=0} = 0,\ h = \frac{k}{T_0}.$$




На правом конце проекция всех сил имеет вид

$$-T_0 u_x(l-\Delta x, t) - ku(l,t) + p(l,t)\Delta x - \rho u_{tt}(l,t)\Delta x = 0,$$

поскольку $\sin\alpha(l-\Delta x) \approx u_x|_{x=l-\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + hu\bigg|_{x=l} = 0,\ h = \frac{k}{T_0}.$$

Если точка, относительно которой имеет место упругое закрепление, перемещается и её отклонение от начального положения даётся функцией $\theta(t)$, то граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -h[u(l,t) - \theta(t)].$$

Следует отметить, что если $k$ велико и даже небольшие сдвиги конца вызывают большие натяжения, эти граничные условия переходят в условия $u(0,t) = \mu(t)$ или , соответственно, $u(l,t) = \mu(t)$, при $\mu(t) = \theta(t)$. В случае мягкого закрепления ($k$ мало), при котором большие сдвиги конца вызывают слабые натяжения, граничные условия переходят в условие свободного конца.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: найти такое решение уравнения (1), которое бы удовлетворяло бы начальным условиям (3) и граничным условиям.

Можно выделить три основных типа граничных условий:
граничное условие первого рода $u(0,t) = \mu(t)$ – заданный режим,
граничное условие второго рода $u_x(0,t) = \nu(t)$ – заданная сила,
граничное условие третьего рода $u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)]$ – упругое закрепление.

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце, $x = l$. Если функции, задаваемые в правой части ($\mu$, $\nu$ или $\theta$), равны нулю, то граничные условия называются однородными.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, получим шесть типов простейших краевых задач. Если на обоих концах струны заданы условия первого, второго или третьего типа, то краевая задача называется, соответственно, первой, второй или третьей краевой задачей. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными.

Влияние граничных условий в точках, достаточно удаленных от границы, на которой они заданы, сказывается через достаточно большой промежуток времени. Можно, поэтому, рассматривать колебания полубесконечной и бесконечной струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ ещё не существенно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области:

Найти решение уравнения (1) для $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < \infty.$$

Эту задачу часто называют **задачей Коши**.

Если изучается явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении рассматриваемого промежутка времени, то ставится задача на полуограниченной прямой $0 \le x < \infty$. Помимо уравнения задаются начальные условия

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < \infty$$

и граничное условие при $x = 0$.

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными значениями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает. Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи "без начальных условий"(на установившийся режим) формулируются следующим образом:
Найти решение изучаемого уравнения для $0 \le x \le l$ и $t > -\infty$ при граничных условиях

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t).$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой.

**Задачи о колебаниях мембраны**

Уравнение поперечных колебаний мембраны имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x,y,t). \qquad (5)$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного уравнения (5) недостаточно для полного определения движения мембраны. Во первых, нужно задать в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость всех точек мембраны:

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y),\ (x,y) \in D. \qquad (6)$$

Кроме того, требуется определить краевые условия для мембраны.

Если край мембраны жестко закреплен то отклонения точек мембраны на границе $L$ не происходит и, следовательно,

$$u|_L = 0. \qquad (7)$$

Пусть края мембраны свободны, то есть они могут свободно перемещаться по вертикальной боковой поверхности цилиндра с основанием $L$. В этом случае ставится условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_L = 0. \qquad (8)$$

Если к краю мембраны приложена сила с линейной плотностью $f_1$, то на краю мембраны ставится условие

$$(-T\frac{\partial u}{\partial \nu} + f_1)|_L = 0.$$

В случае упругого закрепления края мембраны сила, действующая на краю, имеет плотность $-ku$, где $k$ характеризует жесткость закрепления мембраны. Для получения граничного условия нужно в предыдущем граничном условии заменить $f_1$ на $-ku$. Тогда получим

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu)|_L = 0,\ h = k/T. \qquad (9)$$

Уравнение равновесия мембраны, находящейся под воздействием внешней силы с плотностью $f(x,y)$, действующей перпендикулярно плоскости $x0y$, имеет вид

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -f(x). \qquad (10)$$

Задача поиска функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению (10) и одному из граничных условий (7), (8), (9) называется, соответсвенно, первой, второй или третьей краевой задачей.

**Постановка задач для уравнения теплопроводности**

Распространение тепла в неоднородном изотропном теле описывается уравнением

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F. \tag{11}$$

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие состоит лишь в задании значений температуры в начальный момент времени:

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z).$$

Граничные условия могут быть рассмотрены в зависимости от температурного режима на границе $S$ тела.

Может быть, например, задана температура в каждой точке поверхности $S$:

$$u|_S = \psi,$$

где $\psi = \psi(x,y,z,t)$ – известная функция, $(x,y,z) \in S$, $t \geq 0$.

Другой тип граничного условия связан с заданием на поверхности $S$ теплового потока

$$q = W_\nu = -k\frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \psi,$$

где $\psi = -q/k$.

Пусть на поверхности твердого тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура $u_0$ известна. Для упрощения задачи закон теплообмена может быть принят в виде закона Ньютона.

По закону Ньютона количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q = H(u - u_0),$$

где $H$ – коэффициент теплообмена. Коэффициент теплообмена зависит от разности температур $u - u_0$, от характера поверхности и окружающей среды, может изменяться вдоль поверхности тела. Будем считать коэффициент теплопроводности $H$ постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым для всей поверхности тела.

По закону сохранения энергии это количество тепла долно быть равно тому количеству тепла, которое передаётся через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Это приводит к граничному условию на $S$

$$H(u - u_0) = -k\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

где $\nu$ – внешняя нормаль к поверхности $S$. Положив $h = H/k$, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(u - u_0)\right|_S = 0.$$

## Понятие о корректности постановки задачи

Поскольку задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным требованиям:

Решение должно существовать в каком-то классе функций $B_1$.

Решение должно быть единственным в некотором классе функций $B_2$.

Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т.д.).

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется **корректно поставленной** (по Адамару), а множество функций $B_1 \cap B_2$ – классом корректности. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из трех условий, называется некорректно поставленной.

Требование существования и единственности означает, что среди данных задачи нет несовместных и их достаточно для выделения единственного решения. Если поставленная задача имеет несколько решений, то слова решение задачи не имеют определенного смысла. Поэтому, прежде чем говорить о решении задачи, необходимо доказать его единственность.

Для практики наиболее существенным является вопрос о существовании, так как при доказательстве обычно даётся способ вычисления решения задачи.

При доказательстве существования и единственности задачи искомую функцию подчиняют некоторым ограничениям общего характера, которые часто дают возможность рассматривать эту функцию как элемент того или иного функционального пространства. К таким ограничениям относится, например, условие непрерывности функции и её производных заданного порядка.

Непрерывная зависимость решения $u$ от данного задачи $\tilde{u}$ означает следующее. Пусть последовательность данных $\tilde{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ б в каком-то смысле стремится к $\tilde{u}$, и $u_k$ – соответствующие решения задачи. Тогда должно быть $u_k \to u$, $k \to \infty$, в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом. Таким образом, малые изменения данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения. Если решение математической задачи непрерывно зависит от исходных данных задачи, то говорят что задача устойчива.

Требование устойчивости необходимо по следующей причине: в данных любой конкретной физической задачи, особенно если они получены экспериментально, всегда содержится некоторая погрешность, и нужно, чтобы малая погрешность в данных приводила к малой неточности в решении.

Это требование выражает физическую определенность поставленной задачи. Предположим, решение задачи описывает развивающийся во времени физический процесс. Если бы непрерывной зависимости решения от начальных данных не было бы, то два существенно различных процесса могли б соответствовать практически одинаковым системам начальных условий (различие которых лежит в пределах точности измерений). Процессы такого типа нельзя считать определенными (физически) начальными условиями.

К некорректно поставленным задачам часто приводят обратные задачи математической физики: по некоторой информации о решении прямой задачи восстановить некоторые неизвестные физические величины, определяющие эту задачу (источники, краевые условия, коэффициенты уравнения и т.д.). Эти задачи встречаются при изучении объектов, недоступных непосредственному исследованию (измерению).

**Пример.** Рассмотрим задачу поиска решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x).$$

Эта задача (задача Коши для уравнения Лапласа) имеет непосредственное отношение к обратной задаче гравиметрии (об определении формы тела по создаваемой им аномалии силы тяжести).

Функция $u(x,y)$, являющаяся решением уравнения Лапласа, однозначно определяется своими начальными условиями

Рассмотрим функции $u^{(1)}(x,y) \equiv 0$ $u^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\cdot\cosh\lambda y$ удовлетворяющие уравнению Лапласа. Функция $u^{(2)}$ зависит от $\lambda$ как от параметра. Начальные значения

$$u^{(1)}(x,0) = 0,\ u^{(2)}(x,0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x,$$

$$u^{(1)}_y(x,0) = 0,\ u^{(2)}_y(x,0) = \psi(x) = 0$$

различаются сколь угодно мало при достаточно больших $\lambda$. Однако при этом решение $u^{(2)}$ может стать сколь угодно большим, каково бы ни было фиксированное значение $y$. Следовательно, задача с начальными условиями для уравнения Лапласа является некорректно поставленной.

Как правило, для неустойчивых задач можно указать метод получения сколь угодно точных приближений для искомого решения по достаточно точным приближенным условиям задачи.

**Единственность решения смешанной задачи для уравнения колебаний**

Рассмотрим задачу поиска функции $u(x,t)$, определенной в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и удовлетворяющей уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{12}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \tag{13}$$

и одному из следующих граничных условий:

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t), \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \mu_2(t), \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - h_1 u(0,t) = \mu_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + h_2 u(0,t) = \mu_2(t). \tag{16}$$

**Теорема 1.** *Пусть функции $\rho(x) > 0$ и $k(x) > 0$ непрерывны при $0 \le x \le l$. Тогда существует не более одной функции $u(x,t)$, определенной в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и непрерывной в этой области вместе с производными до второго порядка включительно, удовлетворяющей уравнению (12), начальным условиям (13) и одному из граничных условий (14), (15), (16).*

**Доказательство.** Допустим, что существует два решения задачи (12), (13), (14):

$$u_1(x,t),\ u_2(x,t),$$

и рассмотрим разность

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Функция $v$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{17}$$

и однородным дополнительным условиям

$$v(x,0) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{18}$$

$$v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0. \tag{19}$$

Докажем, что функция $v$ тождественно равна нулю. Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]dx. \tag{20}$$

Если уравнение (17) описывает продольные колебания струны, то $E(t)$ – полная энергия струны в момент времени $t$.

Продифференцируем $E(t)$ по $t$, выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла. Это можно сделать, так как из условий теоремы вытекает, что подынтегральное выражение непрерывно на отрезке $0 \le x \le l$ при $t \ge 0$. Получим

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, будем иметь:

$$\int_0^l kv_x v_{xt}dx = kv_x v_t|_0^t - \int_0^l v_t(kv_x)_x dx. \tag{21}$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $v(0,t) = 0$ следует $v_t(0,t) = 0$ и аналогично для $x = l$). Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t(kv_x)_x]dx = \int_0^l v_t[\rho v_{tt} - (kv_x)_x]dx = 0,$$

то есть $E = \mathrm{const}$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]_{t=0}dx = 0, \tag{22}$$

так как

$$v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = 0.$$

Пользуясь положительностью $k$ и $\rho$, заключаем, что

$$v_x(x,t) \equiv 0,\ v_t(x,t) \equiv 0,$$

откуда и следует тождество

$$v(x,t) = \mathrm{const} = C_0. \tag{23}$$

Пользуясь начальным условием, находим:

$$v(x,0) = C_0 = 0;$$

тем самым доказано, что

$$v(x,t) \equiv 0. \tag{24}$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1$ и $u_2$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Для задачи (12), (13), (15) доказательство аналогично. Функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет граничным условиям

$$v_x(0,t) = 0,\ v_x(l,t) = 0, \tag{25}$$

и подстановка в формуле (21) также обращается в нуль. Дальнейшая часть доказательства теоремы остаётся без изменений.

Для задачи (12), (13), (16) доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая по-прежнему два решения $u_1$ и $u_2$, получаем для их разности $v = u_1 - u_2$ уравнение (17) и граничные условия

$$v_x(0,t) - h_1 v(0,t) = 0,\ v_x(l,t) + h_2 v(l,t) = 0\ (h_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0). \tag{26}$$

Представим подстановку в (21) в виде

$$k v_x v_t|_0^l = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[h_2 v^2(l,t) + h_1 v^2(0,t)].$$

Интегрируя $dE/dt$ в пределах от нуля до $t$, получим:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t[\rho v_{tt} - (k v_x)_x] dx dt - \frac{k}{2}\{h_2[v^2(l,t) - v^2(l,0)] + h_1[v^2(0,t) - v^2(0,0)]\},$$

откуда в силу уравнения и начальных условий следует:

$$E(t) = -\frac{k}{2}[h_2 v^2(l,t) + h_1 v^2(0,t)] \leq 0. \tag{27}$$

Так как в силу неотрицательности подинтегральной функции $E(t) \geq 0$, то

$$E(t) \equiv 0, \tag{28}$$

а следовательно, и

$$v(x,t) \equiv 0. \tag{29}$$

Изложенный здесь метод доказательства теоремы единственности, основанный на использовании выражения полной энергии, широко применяется при доказательстве теорем единственности в различных областях математической физики, например, в теории электромагнитных полей, теории упругости и гидродинамике.

**Упражнение**

Сформулируйте задачу о продольных колебаниях однородного стержня длиной $l$, левый конец которой закреплен, правый свободен. Стержень подвержен начальному растяжению $u(x,0) = Ax$, начальные скорости равны нулю.

# Список литературы


[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970. mathematics/pde.htm.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.