МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра: Теории управления и динамики систем**

Отчёт по лабораторной работе

Тема:
«Специальные функции.»

Выполнили:
студентки группы
3821Б1ПМоп2
Киселева Ксения
Владимировна
Семашко Екатерина
Максимовна

Проверил:
Муняев Вячеслав Олегович

Нижний Новгород
2024

СОДЕРЖАНИЕ

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ.

В лабораторной работе рассматривается смешанная краевая задача для уравнений параболического типа:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - bu + f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \alpha u(0,t) - \beta u_x(0,t) = \mu(t), \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0, \\ \gamma u(l,t) - \delta u_x(l,t) = \nu(t), \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначения в задаче:

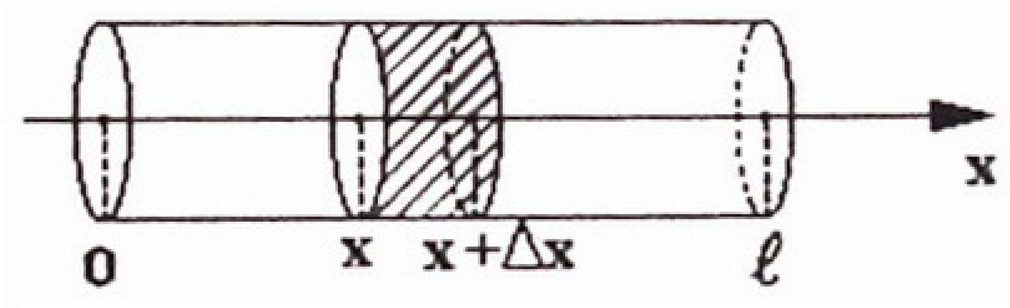
- $u(x,t)$ - функция, описывающая температуру металлического стержня
  x - координата точки на стержне,
  t - момент времени
- Граничные условия - температура на концах стержня в момент времени t
- НУ $= \varphi(x)$ - начальная температура в момент времени $t = 0$
- $b = \frac{p}{c\lambda}$, где p - периметр сечения
- $a^2 = \frac{kS}{c\lambda}$

ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Вывод уравнения теплопроводности.

Рассмотрим металлический стержень, в котором через боковую поверхность происходит теплообмен с окружающей средой температуры u_0. Мы предполагаем, что стержень является тонким, то есть температура в сечении в каждый момент времени одинакова. Внутренние источники тепла отсутствуют.



Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, прямо пропорционально $V\Delta u : CV\Delta u$. Константа C в данном случае равна $c\rho$, где c – удельная теплоемкость, ρ – плотность стержня. Используя закон конвективного тепла(закон Ньютона), получаем: $\mid \Phi \mid = k \mid T_2 - T_1 \mid, \Phi \sim -k\nabla(u)$ – закон внутренней теплопроводности. Поэтому за временной промежуток Δt:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = -k\frac{du}{dx}|_x, k > 0 \\ \Phi_2 = -k\frac{du}{dx}|_{x+\Delta x}, k < 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

$\Delta Q = (\Phi_1 + \Phi_2)S\Delta t$. Подставив формулу Q, затем разделив на $\Delta x\Delta t$ и устремив Δ И $x\Delta t$ к 0, получим следующее:

$$c\lambda\frac{du}{dt} = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

Количество тепла, протекающее через поперечное сечение стержня за момент времени Δt (тепловой поток), пропорционально площади сечения S, скорости изменения температуры в направлении, перпендикулярном к сечению, и промежутку времени Δt, то есть равно:

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.3}$$

Мы будем считать коэффициент теплопроводности постоянным: это предположение оправдывается, если стержень однородный и температура меняется в небольших пределах.
Выделим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$, и составим для него уравнение теплового баланса. По формуле (1.3) количество тепла, входящее через поперечное сечение с абсциссой x за промежуток времени Δt, равно $-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$. Если отбросить бесконечно малые величины высших порядков, то значение

частной производной по x в точке $x+\Delta x$ будет равно $\frac{\partial u}{\partial x} + d_x(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Поэтому величина теплового потока, выходящего через сечение $x+\Delta x$, равна $-kS(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t$. Взяв разность величин входящего и выходящего тепловых потоков, мы получим количество тепла ΔQ, сообщенное выбранному участку стержня за время Δt:

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta t\Delta x \tag{1.4}$$

С другой стороны, за этот же промежуток времени температура изменилась на величину $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$. Поэтому по формуле (1.2) сообщенное количество тепла равно:

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \tag{1.5}$$

(объем $V = S\Delta x$). Приравнивая полученные выражения для ΔQ и сокращая на общий множитель $S\Delta x\Delta t$, составим уравнение:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.6}$$

Введя обозначение $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, окончательно получим основное уравнение теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.7}$$

Постоянную $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ называют коэффициентом температуропроводности. Уравнение (1.7) является однородным и линейным. Теперь введём теплообмен с окружающей средой температуры u_0 по закону Ньютона. Этот закон состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температуры тела и окружающей среды, т.е. равен:

$$h(u(x,t) - u_0)p\Delta x\Delta t, \tag{1.8}$$

где u – температура стержня в точке x в момент времени t, $p\Delta x$ – площадь боковой поверхности (p - периметр поперечного сечения), h – коэффициент теплообмена. Составляя уравнение теплового баланса, получим:

$$kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t - h(u(x,t) - u_0)p\Delta x\Delta t = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \tag{1.9}$$

где правая часть представляет тепло, благодаря которому температура точек стержня изменилась на $\frac{\partial u}{\partial x}$. Разделив обе части на $c\rho S\Delta x\Delta t$, приведем уравнение к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(u - u_0), \tag{1.10}$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ – коэффициент температуропроводности, а $b = \frac{ph}{c\rho S}$. Дополняя полученное уравнение граничными и начальными условиями, окончательно получим:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_0), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \alpha u(0,t) = \mu(t), \alpha \geq 0, \\ \gamma u(l,t) = \nu(t), \gamma \geq 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

1.2. Решение методом Фурье.

Приведем наше уравнение в канонический вид. Для этого введём замену $u(x,t) = v(x,t)e^{-bt}$. Тогда наша задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t)e^{bt}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \alpha u(0,t) = \mu(t)e^{bt}, \alpha \geq 0, \\ \gamma u(l,t) = \nu(t)e^{bt}, \gamma \geq 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Мы получили задачу (1.12) в каноническом виде. Переобозначим $\widetilde{\mu} = \mu(t)e^{bt}$, $\widetilde{\nu} = \nu(t)e^{bt}$, $\widetilde{f}(x,t) = f(x,t)e^{bt}$ и избавимся от неоднородности. Решение задачи (1.12) представим в виде: $v(x,t) = \omega(x,t) + z(x,t)$, где функция $z(x,t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} z(0,t) = \frac{\widetilde{\mu}(t)}{\alpha}, \alpha \geq 0 \\ u(l,t) = \frac{\widetilde{\nu}(t)}{\gamma}, \gamma \geq 0 \end{cases}, \tag{1.13}$$

То есть функция $z(x,t)$ имеет следующий вид:

$$z(0,t) = \frac{\widetilde{\mu}(t)}{\alpha} + \frac{x}{l}\left(\frac{\widetilde{\nu}(t)}{\gamma} - \frac{\widetilde{\mu}(t)}{\alpha}\right), \tag{1.14}$$

ω: И получим следующую задачу для ω:

$$\begin{cases} \omega_t = a^2 \omega_{xx} + \widetilde{f}(x,t) - [z_t - a^2 x_{xx}] \\ \omega(x,0) = \varphi(x) - \frac{\widetilde{\mu}(0)}{\alpha} - \frac{x}{l}\left(\frac{\widetilde{\nu}(0)}{\gamma} - \frac{\widetilde{\mu}(0)}{\alpha}\right) \\ \omega(0,t) = 0 \\ \omega(l,t) = 0 \end{cases}. \tag{1.15}$$

Заменим $g(x,t) = \widetilde{f}(x,t) - [z_t - a^2 x_{xx}] = \widetilde{f}(x,t) - \frac{\widetilde{\mu}'(t)}{\alpha} - \frac{x}{l}\left(\frac{\widetilde{\nu}'(t)}{\gamma} - \frac{\widetilde{\mu}'(t)}{\alpha}\right)$, где:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}'(t) = (\mu(t)e^{bt})' = \mu'(t)e^{bt} + b\mu(t)e^{bt} = e^{bt}(\mu'(t) + b\mu(t)) \\ \widetilde{\nu}'(t) = (\nu(t)e^{bt})' = \nu'(t)e^{bt} + b\nu(t)e^{bt} = e^{bt}(\nu'(t) + b\nu(t)) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Получим: $g(x,t) = e^{dt}[f(x,t) - (\mu'(t) + b\mu(t)) - \frac{x}{l}(\frac{1}{\gamma}(\nu'(t) + b\nu(t)) - \frac{1}{\alpha}(\mu'(t) + b\mu(t))]$ А также заменим $\widetilde{\varphi} = \varphi - \frac{\widetilde{\mu}(0)}{\alpha} - \frac{x}{l}(\frac{\widetilde{\nu}(0)}{\gamma} - \frac{\widetilde{\mu}(0)}{\alpha})$ и получим:

$$\begin{cases} \omega_t = a^2\omega_{xx} + g(x,t) \\ \omega(x,0) = \widetilde{\varphi}(x) \\ \omega(0,t) = 0 \\ \omega(l,t) = 0 \end{cases} . \tag{1.17}$$

Сделаем еще одну замену $\omega(x,t) = Y(x,t) + Q(x,t)$ и получим две задачи:

$$\begin{cases} Yt = a^2Yxx \\ Y(x,0) = \widetilde{\varphi}(x) \\ Y(0,t) = 0 \\ Y(l,t) = 0 \end{cases} . \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} Q_t = a^2Q_{xx} + g(x,t) \\ Q(x,0) = 0 \\ Q(0,t) = 0 \\ Q(l,t) = 0 \end{cases} . \tag{1.19}$$

Рассмотрим (1.18). Решение будем искать в виде $Y(x,t) = X(x)T(t)$

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t) \tag{1.20}$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(t)}{X(t)} = \lambda \tag{1.21}$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$X''(t) - \lambda X(t) = 0 \tag{1.22}$$

Собственные числа примут вид: $p_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ Рассмотрим параметр λ:

а) $\lambda = 0$: Общее решение:

$$X(x) = C_1x + C_2 \tag{1.23}$$

Поставим в ГУ:

$$\begin{cases} X(0) = \alpha C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ X(l) = \gamma C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases} . \tag{1.24}$$

Получили тривиальное решение: $X(x) = 0$.

б) $\lambda > 0$: Общее решение:

$$X(x) = C_1sh(\sqrt{\lambda}x) + C_2ch(\sqrt{\lambda}x) \tag{1.25}$$

Поставим в ГУ:

$$\begin{cases} \alpha X(0) = \alpha C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \gamma X(l) = C_1 sh(\sqrt{\lambda} x) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases} . \tag{1.26}$$

Получили тривиальное решение: $X(x) = 0$.

в) $\lambda < 0$: Общее решение:

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \tag{1.27}$$

Поставим в ГУ:

$$\begin{cases} \alpha X(0) = \alpha C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \gamma X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda} x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k, k \in N \end{cases} . \tag{1.28}$$

Получаем $X_k(x) = C_1 \sin(\frac{\pi k}{l})$. И с условием нормировки: $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\frac{\pi k}{l} x)$. Тогда решение задачи 1.18 запишется в виде ряда Фурье: $Y(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, где $X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\frac{\pi k}{l} x)$ Теперь рассмотрим ту же задачу относительно $T(t)$:

$$\begin{cases} T'(t) - a^2 (\frac{\pi k}{l})^2 T(t) = 0 \\ T(0) = \widetilde{\varphi}(x) \end{cases} . \tag{1.29}$$

$$T_k = C_k e^{-a^2 (\frac{\pi k}{l})^2 t} \tag{1.30}$$

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k e^{-a^2 (\frac{\pi k}{l})^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l} \; Y(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k x}{2} = \widetilde{\varphi}(x)$$

$$(X_k, X_j) = \int_0^l X_k X_j \, dx \; = \begin{cases} 0, k \neq j \\ 1, k = j \end{cases} \tag{1.31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_0^l \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi j x}{l} \, dx = \int_0^l \widetilde{\varphi}(s) \sin \frac{\pi j x}{l} \, dx \tag{1.32}$$

$$C_k \sqrt{\frac{l}{2}} = \int_0^l \widetilde{\varphi}(s) \sin \frac{\pi j x}{l} \, dx \tag{1.33}$$

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \widetilde{\varphi}(x) \sin \frac{\pi j x}{l} \, dx \tag{1.34}$$

$$Y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l e^{-a^2 (\frac{\pi k}{l})^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l} \widetilde{\varphi}(x) \sin \frac{\pi j x}{l} \, dx \tag{1.35}$$

Функция Грина: $G(x,j,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}e^{-a^2(\frac{\pi k}{l})^2 t}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi jx}{l}$ тогда перепишем решение в виде:

$$Y(x,t)=\int_0^l G(x,s,t)\widetilde{\varphi}(s)\,ds\ =\int_0^l \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a^2(\frac{\pi k}{l})^2 t}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi Kx}{l}\widetilde{\varphi}(s)\,ds \tag{1.36}$$

Теперь рассмотрим (1.19). Сначала рассмотрим однородное уравнение:

$$\begin{cases} Q_t=a^2Q_{xx}\\ Q(x,0)=0\\ Q(0,t)=0\\ Q(l,t)=0 \end{cases}. \tag{1.37}$$

Аналогично предыдущему случаю рассматриваем задачу Штурма-Лиувилля:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0 \tag{1.38}$$

Решение находим аналогично:

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}sin(\frac{\pi k}{l}x) \tag{1.39}$$

Теперь рассмотрим неоднородную часть уравнения. Пусть функция $g(x,t)=\widetilde{f}(x,t)-[\omega_t+a^2\omega_{xx}]$ раскладывается в ряд Фурье на $t\in[0,T]$ по собственным функциям $X_n(x)$:

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sqrt{\frac{2}{l}}sin(\frac{\pi k}{l}x), \tag{1.40}$$

где $g_n(t)=(g,X_n)=\int_0^l\frac{2}{l}g(x,t)\sin(\frac{\pi j}{l}x)\,dx$ Решение будем искать в виде:

$$Q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X(x)T(t). \tag{1.41}$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}X(x)T'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a^2X''(x)T(t)+g_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x) \tag{1.42}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}xT'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a^2(\frac{\pi n}{l})^2(-\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x)T(t)+g_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x) \tag{1.43}$$

Преобразуем:

$$T'(t)+a^2(\frac{\pi n}{l})^2T(t)=g_n(t) \tag{1.44}$$

Решение однородного уравнения (1.44) имеет вид: $T_{oo}(t) = Me^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t}$. Методом вариации постоянной найдём частное неоднородное решение: $T(t) = M(t)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t}$. Подставив в ДУ (1.44) получаем: $M'(t)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t} - a^2(\frac{\pi n}{l})^2 M(t)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t} + a^2(\frac{\pi n}{l})^2 M(t)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t} = g_n(t) \Rightarrow$ $M'(t)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t} = g_n(t)$ Проинтегрируем и найдём константану M: $M(t) = \int_0^t g_n(\tau)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 \tau}\, d\tau$ Решение уравнения (1.44) представляет собой сумму общего однородного и частного неоднородного, где константу найдём из начальных условий. После подстановки получим:

$$T(t) = \int_0^t g_n(\tau)e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2(t-\tau)}\, d\tau \tag{1.45}$$

Решение (1.19):

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} e^{-a^2(\frac{\pi k}{l})^2 t} \sin\frac{\pi k x}{l} \sin\frac{\pi k s}{l} g_n(x,\tau)\, ds\, d\tau \tag{1.46}$$

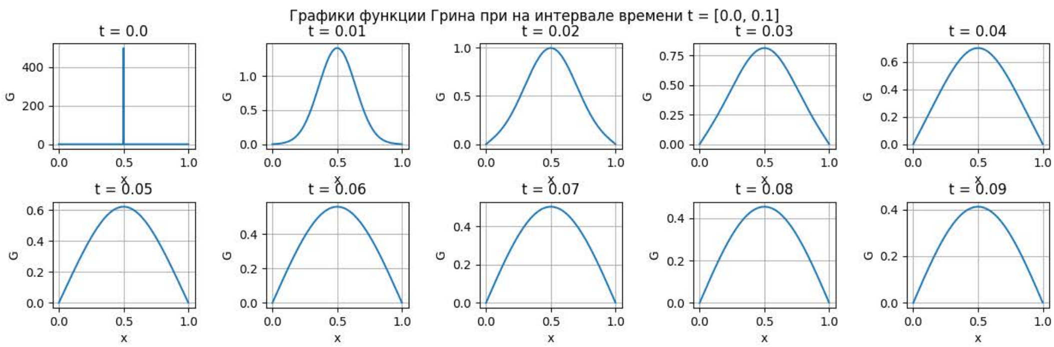
$$Q(x,t) = \int_0^t \int_0^l g_n(x,\tau) G(x,s,t-\tau)\, dx\, d\tau \tag{1.47}$$

$$G(x,s,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi k}{l} s) e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2(t-\tau)} \sin(\frac{\pi k}{l} x) \tag{1.48}$$

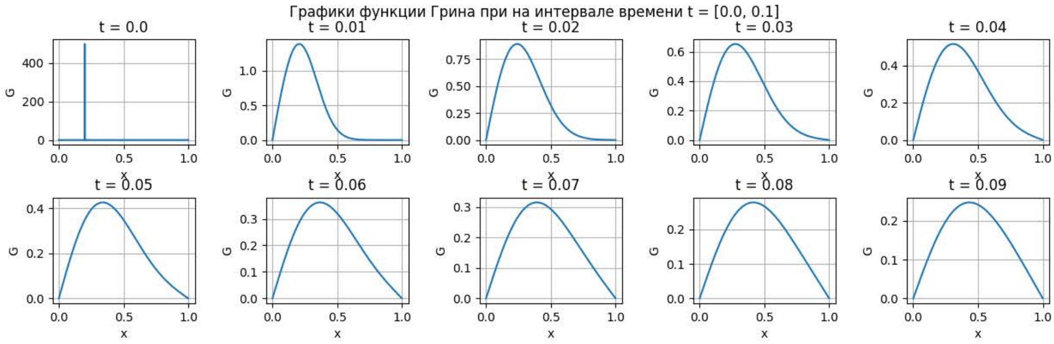
Остаётся только объединить: $\omega(x,t) = Y(x,t) + Q(s,t)$

1.3. Функция Грина

Рассмотрим физический смысл функции Грина. Функция Грина представляет собой температуру тела в точке x в момент времени t при мгновенном выделении единичного количества тепла в точке s в момент времени $t = 0$. Далее приближенно построим функцию Грина в зависимости от x для $t_1 < t_2$. Для этого воспользуемся языком программирования Python и пакетами numpy и matplotlib. Возьмем следующие параметры: $a = 1, s = 0.5, l = 1$ и при $t \in [0, 0.1]$ получим следующие графики функции Грина.



Теперь изменим точку s на $s = 0.2$ и получим:



Из рисунков видно, что полученные графики корректно демонстрируют температуру стержня в каждой точках $x \in [0, 1]$ при мгновенном выделении единичного количества тепла в точке s в момент времени $t \in [0, 0.1]$.

1.4. Стационарный режим

Пусть физические условия в задаче о тепловом состоянии тела таковы, что плотность источников (стоков) тепла и граничные условия не зависят от времени. Тогда с течением времени в теле устанавливается некоторое не зависящее от времени распределение температуры, т.е. тепловое состояние тела выйдет на стационарный режим.
Распределение температуры в таком случае описывается уравнением, которое получается из уравнения теплопроводности при $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и при отсутствии зависимости внешнего воздействия от времени . Рассмотрим влияние неоднородности уравнения на стационарный режим. Физический смысл этой неоднородности состоит в следующем - на стержень действует внешняя сила. Она может как передавать тепло стержню, так и забирать его.
Для начала рассмотрим случай, когда внешнее воздействие вызывает повышение температуры стержня, то есть подогревает его. В таком случае, если мы ускорим эти процессы, то есть устремим $t \to \infty$, будет видно, что тело нагреется до некоторой критической температуры и процесс прекратится, то есть установится стационарный режим. Конечная температура в таком случае полностью зависит от самого внешнего воздействия. Стоит отметить, что конечная температура перестанет также зависеть от пространственных координат в случае, если никаких тепловых потерь не происходит. Теперь рассмотрим ситуацию, когда внешнее воздействие имеет охлаждающий смысл. Самым распространенным примером такого воздействия является конвективный теплообмен с окружающей средой через боковую поверхность. В таком случае, при устремлении $t \to \infty$ стержень остынет (или нагреется) до температуры окружающей среды и температура перестанет меняться, то есть установится стационарный режим. Также отметим, что такой случай возможен, только если нет других внешних воздействий. Теперь рассмотрим вариант, когда присутствует сразу два вида внешнего воздействия. То есть стержень одновременно нагревают и при этом присутствует теплообмен с окружающей средой. В таком случае с течением времени также зафиксируется некоторая конечная температура и установится стационарный режим.

Теперь рассмотрим влияние начальных условий на стационарный режим. Так как данный режим устанавливается при $t \to \infty$, начальные условия никак не изменят его, они могут повлиять только на значение конечной температуры.

И наконец рассмотрим неоднородности в граничных условиях. Если функция, которая задана на границе является периодической, то стационарный режим не установится, так как один из интегралов, участвующий в итоговой функции распределения температуры, не будет сходиться. В остальных случаях сходимость интеграла будет и стационарный режим возникнет.

Предположим, что при $t \to \infty$: $f(x,t) \to f_0(x), \mu(t) \to \mu_0, \nu(t) \to \nu_0$. Тогда уравнение при стационарном режиме примет следующий вид:

$$\begin{cases} a^2 U_{xx} + f_0(x) = 0 \\ Q(x,0) = \varphi \\ \alpha Q(0,t) = \mu_0 \\ \gamma Q(l,t) = \nu_0 \end{cases} . \tag{1.49}$$

$$U_{xx} = -\frac{f_0(x)}{a^2} \tag{1.50}$$

$$U_x = -\frac{1}{a^2}\int_0^x f_0(\xi)d\xi + C_1 \tag{1.51}$$

$$U_x = -\frac{1}{a^2}\int_0^x \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta + C_1 x + C_2 \tag{1.52}$$

$$U(0) = C_2 = \frac{\mu_0}{\alpha} \tag{1.53}$$

$$U(l) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta + C_1 l + \frac{\mu_0}{\alpha} = \frac{\nu_0}{\gamma} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{l}(\frac{\nu_0}{\gamma} + \frac{1}{a^2}\int_0^l \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta - \frac{\mu_0}{\alpha}) \tag{1.54}$$

$$U(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta + \frac{x}{l}(\frac{\nu_0}{\gamma} + \frac{1}{a^2}\int_0^l \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta - \frac{\mu_0}{\alpha}) + \frac{\mu_0}{\alpha} \tag{1.55}$$

- Начальные условия никак не влияют на стационарный режим, т.к. НУ $\varphi(x))$ не входит в полученное уравнение.
- если $f = 0 \Rightarrow U(x) = \frac{x}{l}(\frac{nu_0}{\gamma} - \frac{\mu_0}{\alpha})\frac{\mu_0}{\alpha}$ - линейная функция,
- если $\mu_0 = 0$ и $\nu_0 = 0 \Rightarrow U(x) = \frac{x}{a^2 l}\int_0^l \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta - \frac{1}{a^2}\int_0^x \int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta$ - линейная функция.

ГЛАВА 2

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Однородные граничные условия, обеспечивающие стационарный режим

Рассмотрим задачу о распределении температуры в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью и однородными граничными условиями при условии отсутствия внешних тепловых источников. Температура стержня в начальный момент времени равна x. Необходимо подобрать однородные граничные условия таким об- разом, чтобы получился ненулевой стационарный режим, а также получить необходимое и достаточное условия ненулевого стационарного режима при подобранных граничных условиях и произвольных начальных условиях.

Рассмотрим уравнение при отсутствии внешних тепловых источников:

$$u_t = a^2 u_{xx}, u(0) = x \tag{2.1}$$

Для обеспечения стационарного режима необходимо, чтобы поступающее в сечение количество тепла равнялось утекающему. Сохранение количества тепла в сечение гарантируют изолированные концы стержня, т.е. граничные условия 2-го рода:

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \tag{2.2}$$

Получим условия стационарного режима из условия:

$$\begin{gathered} u_c(x) \Rightarrow u_t = 0 \\ u_{xx} = 0 \Rightarrow u(x) = C_1 x + C_2 \\ u_x(0) = C_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$Q = \int_0^l u_c(x)dx \Rightarrow \frac{l^2}{2} = C_2 l \Rightarrow C_2 = \frac{l}{2} \tag{2.4}$$

Необходимое и достаточное условие получения ненулевого стационарного режима при полученных граничных условиях (II рода) и произвольных начальных условиях:

$$Q = \int_0^l \varphi(x)dx \neq 0 \tag{2.5}$$

В противном случае мы получим нулевой стационарный режим.

Для проверки правильности формул воспользуемся программой для получения численного решения уравнения теплопроводности.

Задаем параметры задачи, подбираем начальные и граничные условия.

2.2. Индивидуальные неоднородные граничные условия

Рассмотрим предыдущую задачу с индивидуальными неоднородными граничными условиями. Граничные условия I-I, а неоднородности нужно взять константами A, B. Необходимо получить функцию, которая задает стационарный режим, а также исследовать зависимость стационарного режима от параметров A, B.

$$\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = A \\ u(l,t) = B \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{gathered} \tag{2.6}$$

В пункте 4 теории мы вывели условия стационарного режима для граничных условий I-I. Воспользуемся формулой (1.55):

$$u(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta + \frac{x}{l}(\frac{\nu_0}{\gamma} + \frac{1}{a^2}\int_0^l\int_0^\eta f_0(\xi)d\xi d\eta - \frac{\mu_0}{\alpha}) + \frac{\mu_0}{\alpha} \tag{2.7}$$

$u(x,t) = z(x,t) + (1 - \frac{1}{l}x)A + \frac{3}{l}xB$.
Задача поменяется на:

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx} \\ z(x,0) = \varphi(x) - (1 - \frac{1}{l}x)A - \frac{3}{l}xB \\ z(0,t) = 0 \\ z(l,t) = 0 \\ x \in [0;l]; t \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Решение задачи Ш-Л:

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x; \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, n \geq 1 \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \dot{T}_n(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \\ T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)X_n(x) - A\frac{l}{\pi n} - 3B\cdot\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n}dx \end{cases} \tag{2.10}$$

$$T_n(t) = \frac{2\cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t}}{l}\int_0^l \varphi(x)X_n(x) - A\frac{l}{\pi n}\ dx \tag{2.11}$$

$T_n(t) \xrightarrow{0}$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $z(x,+\infty) = 0$. Следовательно, стационарный режим есть:

$$u(x,t) = (1 - \frac{1}{l}x)A + \frac{3}{l}xB \tag{2.12}$$

Режим нулевой при $A = 3B$, иначе ненулевой.

2.3. Решение уравнения с индивидуальными граничными условиями

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = A\cos\omega_1 t \\ u(l,t) = 0 \\ x \in [0;l]; t \geq 0 \end{cases}$$

Сдвиг: $u(x,t) = z(x,t) + (1-\frac{x}{l})A\cos\omega_1 t$. Получаем уравнения:

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx} + (1-\frac{x}{l})A\omega_1 \sin\omega_1 t \\ z(x,0) = \phi(x) - A(1-\frac{x}{l}) \\ z(0,t) = 0 \\ z(l,t) = 0 \\ x \in [0;l]; t \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи Ш-Л:

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x; \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, n \geq 1$$

Задача на временную составляющую:

$$\begin{cases} \dot{T}_n(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) + \frac{2}{\pi n}A\omega_1 \sin\omega_1 t \\ T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l dx\varphi(x)X_n(x) - A\frac{2}{\pi n} \end{cases}$$

Ищем частное решение в виде: $T_n(t) = V\sin\omega_1 t$.

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-a^2\lambda_n^2 t} + \int_0^t d\tau e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{2}{\pi n}A\omega_1 \sin\omega_1 t =$$

$$= T_n(0)e^{-a^2\lambda_n^2 t} + \frac{2}{\pi n}A\omega_1 \frac{a^2\lambda_n^2 \sin\omega_1 t - \omega_1\cos\omega_1 t + \omega_1}{a^4\lambda_n^4 + \omega_1^2}$$

Решение:

- Стремится к нулю, когда $A = 0$
- Константно, когда $\omega_1 = \omega$, и при функциях коэффициент ноль:

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi n}A\omega\frac{-\omega}{a^4\lambda_n^4+\omega^2} = 0 \\ \frac{2}{\pi n}A\omega\frac{a^2\lambda_n^2}{a^4\lambda_n^4+\omega^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A\omega = 0 \\ Aa^2\lambda_n^2 = 0 \end{cases}$$

$$\omega = -a^2\lambda_n^2$$

- Несложно заметить, что текущее решение не может быть неограниченным, т.к. представляет собой комбинацию затухающей экспоненты и синусов/косинусов

Итоговое решение:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} X_n(x)T_n(t) + (1-\frac{x}{l})A\cos\omega_1 t$$

2.4. Решение уравнения при условии, что на боковой поверхности стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} - b(u-u_0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = A \\ u(l,t) = B \\ x\in[0;l]; t\geq 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = z(x,t) + (1-\frac{1}{l}x)A + \frac{3}{l}xB$. Задача поменяется на:

$$\begin{cases} z_t = a^2z_{xx} - bz - b((1-\frac{1}{l}x)A + \frac{3}{l}xB) + bu_0 \\ z(x,0) = \varphi(x) - (1-\frac{1}{l}x)A - \frac{3}{l}xB \\ z(0,t) = 0 \\ z(l,t) = 0 \\ x\in[0;l]; t\geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи Ш-Л:

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x; \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, n\geq 1$$

Задача на временную составляющую:

$$\begin{cases} \dot{T}_n(t) = -(a^2\lambda_n^2 - b)T_n(t) - b(\frac{2}{\pi n}A + 3B\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}) + bu_0\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) \\ T_n(0) = \frac{2}{l}\{\int_0^l dx\varphi(x)X_n(x) - A\frac{l}{\pi n} - 3B\cdot\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n}\} \end{cases}$$

$$T_n(t) = \frac{2}{l}\{\int_0^l dx\varphi(x)X_n(x) - A\frac{l}{\pi n} - B\cdot\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n} -$$

$$-\frac{-b(\frac{2}{\pi n}A + 3B\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}) + bu_0\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)}{a^2\lambda_n^2 - b}\}e^{-(a^2\lambda_n^2-b)t} + \frac{-b(\frac{2}{\pi n}A + 3B\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}) + bu_0\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)}{a^2\lambda_n^2 - b}$$

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} X_n(x)T_n(t) + (1-\frac{1}{l}x)A + \frac{3}{l}xB$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе мы рассмотрели вывод и решение уравнение теплопроводности стержня, с помощью метода Фурье получили функцию, описывающее распределение температуры в стержне, а также получили функцию, которая описывает стационарный режим в нашей системе. В практической части мы получили решение уравнения для стержня с теплоизолированной боковой поверхностью при отсутствии внешних тепловых источников. Получив решение, мы сформулировали необходимое и достаточное условие наличия стационарного режима, а также рассмотрели стационарный режим с учетом индивидуальных граничных условий. Для проверки корректности полученных решений мы воспользовались учебной программой для построения графиков решения. В заключение можно сказать, что задача лабораторной работы была выполнена.