Практикум к §2-3

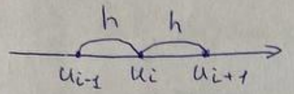
3821Б1ПМоп2
Киселева Ксения

Задание 1

Вариант 3

$u'(x_i) \approx \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = [u_{\overset{\circ}{x}}]_i$ – центр. разностный оператор для вычисления первой произв. на трёхточечном шаблоне, веса $i=0$

$x_{i+1} = x_i + h \quad i \in \mathbb{N}$, h - шаг



Опр. Погрешностью разностного оператора $[u_{\overset{\circ}{x}}]_i$, заданного в узле x_i, называется разность знач производной u'_i, для вычисления которой используется оператор, и значения самого оператора.

$\psi^*(x_i) = u'(x_i) - [u_{\overset{\circ}{x}}]_i$

Исследуем погрешность оператора с помощью разл. Тейлора

а) с остатком в форме Лагранжа

$$\psi^* = u'_i - [u_{\overset{\circ}{x}}]_i = u'_i - \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$u(x_i) = u_i$, $u_{i+1} = u(x_i + h)$

$$u_{i\pm1} = u_i \pm h u'_i + (\pm h)^2 \frac{1}{2!} u''_i + (\pm h)^3 \frac{1}{3!}\left(u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)\right) \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \ \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2hu'_i + 2 \cdot \frac{h^3}{3}\left(u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)\right)$$

$$\psi^* = u'_i - \frac{2hu'_i + 2\frac{h^3}{6}\left(u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)\right)}{2h} = -\frac{h^2}{6}\left(u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)\right)$$

$$|\psi^*| \le \frac{h^2}{6} \max|u'''(x)|, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

б) с остатком в форме Пеано

$$u_{i\pm1} = u_i \pm h u'_i + (\pm h)^2 \frac{1}{2!} u''_i + (\pm h)^3 \frac{1}{3!} u'''_i + O(h^3)$$

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2hu'_i + 2\frac{h^3}{3!} u'''_i + O(h^3)$$

$$\psi^* = u'_i - \frac{2hu'_i + 2\frac{h^3}{6}u'''_i + O(h^3)}{2h} = -\frac{h^2}{6}u'''_i + O(h^2)$$

$-\frac{u'''_i}{6}$ – гл. член погрешности $\quad k=2$ – порядок погрешности

Задание 2

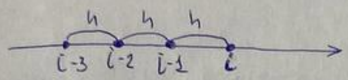
Вариант 3

обозначим

$$u''(x_i) \approx \left[\frac{1}{h^2} (2u_i - 5u_{i-1} + 4u_{i-2} - u_{i-3}) \right] = [u_{xx}]_i$$

Левый разностный оператор для вычисления второй производн. на 4х точечном шаблоне, порядок погрешности: 2

$(x_{i+1}) = (x_i + h)$, $i \in \mathbb{N}$, h - шаг



Опр. Погрешностью разностного оператора $[u_{xx}]_i$, заданного в узле x_i, называется разность значений производной u_i'', для вычисления которой используется разностный оператор, и значения самого оператора.

$$\psi^* = u_i'' - [u_{xx}]_i$$

Исследуем погрешность оператора с помощью разл. Тейлора

а) с остатком в форме Лагранжа

$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u_i - u_i' h + u_i'' \frac{h^2}{2!} - u_i''' \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(\xi_i), \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$u_{i-2} = u(x_i - 2h) = u_i - 2h u_i' + u_i'' \frac{4h^2}{2!} - u_i''' \frac{8h^3}{3!} + \frac{16h^4}{4!} u^{IV}(\eta_i), \ \eta_i \in [x_{i-2}, x_i]$$

$$u_{i-3} = u(x_i - 3h) = u_i - 3h u_i' + u_i'' \frac{9h^2}{2!} - u_i''' \frac{27h^3}{3!} + \frac{81h^4}{4!} u^{IV}(\varphi_i), \ \varphi_i \in [x_{i-3}, x_i]$$

$$\psi^* = u_i'' - \Big[\frac{1}{h^2} \cdot \Big((\overset{=0}{2-5+4-1}) u_i + (\overset{=0}{5-8+3}) h u_i' + (\overset{=2}{-5+16-9}) \frac{h^2}{\cancel{2!}} u_i'' +$$

$$+ (\overset{=0}{5-32+27}) \frac{h^3}{3!} u_i''' + (-5u^{IV}(\xi_i) + 64 u^{IV}(\eta_i) - 81 u^{IV}(\varphi_i)) \frac{h^4}{4!} =$$

$$= \cancel{u_i''} - \cancel{\frac{2u_i''}{2}} - \frac{h^2}{4!} (-5u^{IV}(\xi_i) + 64u^{IV}(\eta_i) - 81u^{IV}(\varphi_i))$$

$$|\psi^*| \le \frac{h^2}{4!} \max(u^{IV}(x)), \ x \in [x_{i-3}, x_i]$$

$$
\begin{cases}
\Psi_{ij} = \dfrac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\tau} - 5\,\dfrac{u_{i+1j} - u_{ij}2 + u_{i+1j}}{h^2} - \sin x_i \cos t_j \quad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1} \\
\Psi_{i0} = u_{i0} - 2x_i \\
\Psi_{0j} = u_{0j} \\
\Psi_{nj} = u_{nj} - 2
\end{cases}
$$

$$
\Psi_{ij} = [u_t]_{ij} - 5[u_{x\bar{x}}]_{ij} - \cancel{\sin x \cos t} - u_i'(t_j) - 5u_j''(x_i) + \cancel{\sin x \cos t} =
$$

$$
= -\underbrace{(u_t' - [u_t]_{ij})}_{\Psi^*(t)} + 5\underbrace{(u_{xx}'' - [u_{x\bar{x}}]_{ij})}_{\Psi^*(x)} = -u_{tt}''\frac{\tau}{2} + O(\tau) + 5\frac{h^2}{12}u_{xx}'' + O(h^2)
$$

$$
|\Psi_{ij}| \le \max|-u_{tt}''| \cdot \frac{\tau}{2} + \max|u_{xx}''|\frac{h^2}{12} + O(h^2 + \tau)
$$

Погрешность схемы:

$z = u - v$

Связь ПА и ПС (погр. схемы)

$$
\frac{z_{ij+1} - z_{ij}}{\tau} - 5\,\frac{z_{i+1j} - 2z_{ij} + 2z_{i+1j}}{h^2} - \sin x \cos t = \Psi_i
$$

$\|z\|_\infty \le C\|\Psi\|_\infty$, C не зависит от h и τ

$\|\Psi\|_\infty \le Mh^2 + m\tau$, M и m не зависят от h и τ

Аппроксимация с 2-м порядком по h и с 1m по τ

б) с остатком в форме Пеано

$$u_{i-1} = u_i - u_i' h + u_i'' \frac{h^2}{2!} - u_i''' \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} u_i^{IV} + O(h^4)$$

$$u_{i-2} = u_i - 2u_i' h + u_i'' \frac{4h^2}{2!} - u_i''' \frac{8h^3}{3!} + \frac{16h^4}{4!} u_i^{IV} + O(h^4)$$

$$u_{i-3} = u_i - 3hu_i + u_i'' \frac{9h^2}{2!} - u_i''' \frac{27h^3}{3!} + \frac{81h^4}{4!} u_i^{IV} + O(h^4)$$

$$\psi^* = \cancel{u_i''} - \cancel{u_i''} - \frac{h^2}{4!}(-5+64-81)u_i^{IV} + O(h^2)$$

$-\frac{h^2}{4!}\cdot 22 u_i^{IV}$ – главный член погрешности

$k=2$ – порядок погрешности

Задание 3

Вариант 3

$$(1)\begin{cases} u_t' = 5\cdot u_{xx}'' + \sin(x)\cos(t), & x\in[0,1],\ t\in[0,10] \\ u(x,0) = 2x \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 2 \end{cases}$$

На мн-ве $x\in[0,3]; t\in[0,10]$ определена сетка с узлами (x_i,t_i), где

$x_i = ih$, $i=\overline{0,n}$ – шаг по пространству $h=\frac{1}{n}$

$t_i = j\tau$, $j=\overline{0,m}$ – шаг по пространству $\tau = \frac{10}{m}$

Предложена явная схема

$$(2)\begin{cases} \frac{v_{ij+1}-v_{ij}}{\tau} = 5\cdot\frac{v_{i+1j}-2v+v_{i-1j}}{h^2} + \overbrace{\sin x\cos t}^{f(x_i,t_j)}, & j=\overline{0,m} \\ v_{i0} = 2x \\ v_{0j} = 0,\ v_{1j} = 2 \end{cases}$$

Опр. Для задачи (1) и разностной схемы (2) ПА ψ называют невязку разностной схемы (2), при условии подстановки в неё точного решения

$u(x)$ – точное решение ДУ

$u = (u_0, u_1, \dots u_n)$ – точное решение зад. (1)

$v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ – точное решение разностной схемы 2

Задание 5

Вариант 4

$\varepsilon = \frac{1}{e}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x),\ x\in[0,2] \\ u(0)=13 \\ u(2)=19 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} 3,\ x\in(0,\frac{1}{e}) \\ 7,\ x\in(\frac{1}{e},2) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 0,\ x\in(0,\frac{1}{e}) \\ 5,\ x\in(\frac{1}{e},2) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 10,\ x\in(0,\frac{1}{e}) \\ -15,\ x\in(\frac{1}{e},2) \end{cases}$$

$x_i = ih \quad i=\overline{0,n} \quad h=\frac{2}{n}$

$u_+ = u_-;\ u_- = \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}-0} u(x);\ u_+ = \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}+0} u(x) \quad W_+ = W_-;\ W_- = \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}-0}(-3u'(x));\ W_+ = \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}+0}(-7u(x))$

Разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1}-v_i}{h^2}a_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2}a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i \quad i=\overline{1,n-1} \\ v_0 = 13 \\ v_n = 19 \end{cases}$$

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1} dx = \begin{cases} 3,\ i=\overline{1,\frac{2}{e}n} \\ 7,\ i=\overline{\frac{2}{e}n+1,n} \end{cases}$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx = \begin{cases} 0,\ i=\overline{1,\frac{2}{e}n-1} \\ 2{,}5,\ i=\frac{2}{e}n \\ 5,\ i=\overline{\frac{2}{e}n+1,n-1} \end{cases}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx = \begin{cases} 10,\ i=\overline{1,\frac{2}{e}n-1} \\ -2{,}5,\ i=\frac{2}{e} \\ -15,\ i=\overline{\frac{2}{e}n+1,n-1} \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации

$\psi_0 = 0$

$\psi_i = \frac{u_{i-1}-u_i}{h^2}a_i - \frac{u_i-u_{i+1}}{h^2}a_{i+1} - d_i u_i + \varphi_i = 3[u_{x\bar{x}}]_i + 10 \quad i=\overline{1,\frac{e}{n-1}}$

$\psi_{\frac{n}{e}} = 3\frac{u_{\frac{n-1}{e}} - u_{\frac{n}{e}}}{h^2} - 7\frac{u_{\frac{n}{e}} - u_{\frac{n+1}{e}}}{h^2} - 2{,}5u_i - 2{,}5 = \frac{1}{h^2}\left(3u_{\frac{n-1}{e}} - 10u_{\frac{n}{e}} + 7u_{\frac{n+1}{e}}\right)$

$\psi_j = 7[u_{x\bar{x}}]_j - 5u_j - 15 \quad j = \overline{\frac{n}{e}..n}$

$\psi_n = 0$

U_3 усл. сопр. в $x=\xi$: $u^{(1)}=u^{(2)}=u_{\frac{2n}{e}}$

$W_+=W_- \Rightarrow k_1(x)(u^{(1)})'=k_2(x)(u^{(2)})' \Rightarrow 3(u^{(1)})'=7(u^{(1)})'$

$$u^{(1)}_{\frac{2n}{e}-1}=u^{(1)}(x_{\frac{2}{e}n}-h)=u_{\frac{2}{e}n}-h(u^{(1)}_{\frac{2}{e}n})'+\frac{h^{'}}{2}(u^{(1)}_{\frac{2}{e}n})''-\frac{h^3}{6}(u^{(1)}(\xi))''', \text{ где } \xi\in[x_{\frac{2}{e}n}-h, x_{\frac{2}{e}n}]$$

$$u^{(2)}_{\frac{2n}{e}+1}=u^{(2)}(x_{\frac{2n}{e}}+h)=u_{\frac{2}{e}n}+h(u^{(2)}_{\frac{2}{e}n})'+\frac{h^2}{2}(u^{(2)}_{\frac{2}{e}n})''+\frac{h^3}{6}(u^{(2)}(\eta))''', \text{ где } \eta\in[x_{\frac{2}{e}n}, x_{\frac{2}{e}n}+h]$$

$$\psi_{\frac{2n}{e}}=\frac{1}{h^2}(3u_{\frac{2n}{e}}-3h(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})'+\frac{3}{2}h^2(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})''-\frac{h^3}{2}(u^{(1)}(\xi))'''-10u_{\frac{2n}{e}}+7u_{\frac{2n}{e}}+7h(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})'+$$

$$+\frac{7h^2}{2}(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})''+\frac{h^3}{2}(u^{(2)}(\eta))'''-2{,}5u_{\frac{2n}{e}}-2{,}5-\frac{3}{2}(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})''-5-\frac{7}{2}(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})''+2{,}5u_{\frac{2n}{e}}+7{,}5=$$

$$=\frac{3}{2}(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})''-\frac{3h}{2}(u^{(1)}(\xi))'''\underbrace{-\frac{3}{h}(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})'+\frac{7}{h}(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})'}_{=0}+\frac{7}{2}(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})''+\frac{7h}{2}(u^{(2)}(\eta))'''-\frac{3}{2}(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})''-\frac{7}{2}(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})''=$$

$$=\frac{h}{2}\left(7(u^{(2)}(\eta))'''-3(u^{(1)}(\xi))'''\right) \quad \eta\in[x_{\frac{2n}{e}}; x_{\frac{2n}{e}}+h]$$
$$\xi\in[x_{\frac{2n}{e}}-h; x_{\frac{2n}{e}}]$$

$$|\psi_{0,2n}|\le 5h\max_{x\in[x_{\frac{2n}{e}}-h;\, x_{\frac{2n}{e}}+h]}|u'''(x)|$$

$$\|\psi\|_\infty=\max_{i=0..n}|\psi_i|\le 5\cdot\max_{x\in[x_{\frac{2n}{e}}-h,\, x_{\frac{2n}{e}}+h]}|u'''(x)|\cdot h$$

Связь ПА и погрешн. схемы

$z = u - v$

$z_0 = u_0 - v_0 = u_0 - 13 = \psi_0$

$z_n = u_n - v_n = u - 19 = \psi_n$

$$3\,\frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} = 3[u_{x\bar{x}}]_i - 3[v_{x\bar{x}}]_i = 3[u_{x\bar{x}}]_i - (-10) = \psi_i \quad i = \overline{1, \tfrac{2n}{e} - 1}$$

$$7[z_{x\bar{x}}]_j - 5z_j = 7[u_{x\bar{x}}]_j - 5u_j - (7[v_{x\bar{x}}]_j - 5v_j) =$$

$$= 7[u_{x\bar{x}}]_j - 5u_j - 15 = \psi_j \quad j = \overline{\tfrac{2n}{e}+1, n-1}$$

$$\frac{1}{h^2}(3z_{k-1} - 10z_k + 7z_{k+1}) - 2{,}5z_k = \frac{1}{h^2}(3u_{k-1} - 10u_k + 7u_{k+1}) - 2{,}5u_k -$$

$$- \frac{1}{h^2}\left((3v_{k-1} - 10v_k + 7v_{k+1}) - 2{,}5v_k\right) = \frac{1}{h^2}(3u_{k-1} - 10u_k + 7u_{k+1}) - 2{,}5u_k -$$

$$- 2{,}5 = \psi_k \quad k = \frac{2n}{e}$$

система уравнений связи:

$$\begin{cases} z_0 = \psi_0 \\ 3[z_{x\bar{x}}]_i = \psi_i \quad i = \overline{1, \tfrac{n-1}{e}} \\ \frac{1}{h^2}(3z_{k-1} - 10z_k + 7z_k) - 2{,}5z_k = \psi_k \\ 7[z_{x\bar{x}}]_j = \psi_j \quad j = \overline{\tfrac{n+1}{e}, n-1} \\ z_n = \psi_n \end{cases}$$

Оценка ПА

$$\psi_i = 3[u_{x\bar{x}}]_i + 10 - (3u'' + 10) = -3\psi_i^* \quad i = \overline{1, \tfrac{2}{e}n - 1}$$

$$|\psi_i| \le \frac{3}{12} \max_{[0..\frac{1}{e}]} |u_i^{IV}| \cdot h^2$$

$$\psi_j| = 7[u_{x\bar{x}}]_j - 5u_j - 15 - (7u'' - 5u_j - 15) - 7\psi_j^* \quad j = \overline{\tfrac{2}{e}n + 1, n-1}$$

$$|\psi_j| \le \frac{7}{12} \max_{[\frac{1}{e}..2]} |u_j^{IV}| \cdot h^2$$

$$\psi_{\frac{2}{e}n} = \frac{1}{h^2}\left(3u^{(1)}_{\frac{2}{e}n-1} - 3u^{(1)}_{\frac{2}{e}n} - 7u^{(2)}_{\frac{2}{e}n} + 7^{(2)}_{\frac{2}{e}n+1}\right) - 2{,}5u^{(2)}_{\frac{2n}{e}} - 2{,}5 - \left(\frac{1}{2}\left(3(u^{(1)}_{\frac{2n}{e}})'' + 10\right) - \left(\frac{1}{2}\,7(u^{(2)}_{\frac{2n}{e}})'' - 5u^{(2)} - 15\right)\right)$$