ЛЕКЦИЯ 24

Решение задач для уравнения теплопроводности методом Фурье

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности

Для прямоугольника $\bar{Q} = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ первую краевую задачу можно сформулировать так: найти непрерывную в прямоугольнике $\bar{Q}$ функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в Q уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Предполагается, что $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – заданные непрерывные функции,

$$\varphi(0) = \mu_1(0),\ \varphi(l) = \mu_2(0).$$

Найдём решение задачи методом Фурье. Рассмотрим сначала простейшую задачу: найти в прямоугольнике $\bar{Q}$ решение $u(x,t)$ однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l \tag{5}$$

и однородным краевым условиям

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{6}$$

где функция φ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную первую производную, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Найдём частные решения уравнения (4), удовлетворяющие граничным условиям (6) и представимые в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{7}$$

Подставляя в (4), получаем

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

то есть имеем два уравнения:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{8}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{9}$$

Чтобы получить нетривиальные решения $u(x,t)$ вида (7), удовлетворяющие краевым условиям (6), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (9), удовлетворяющие краевым условиям

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0.$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ приходим к задаче о собственных значениях:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{10}$$

Собственными значениями задачи являются

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

им соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l},\ n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Решения уравнения (8) при $\lambda = \lambda_n$ имеют вид

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \tag{13}$$

где A_n – произвольные постоянные. Итак, все функции

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l} \tag{14}$$

удовлетворяют уравнению (4) и граничным условиям (6).

Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{15}$$

Требуя выполнения начального условия (5), получим

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{16}$$

Полученный ряд представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0,l)$. Коэффициенты A_n определяются по формуле

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{17}$$

Так как, по предположению, функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную первую производную и обращается в нуль при $x = 0$ и $x = l$, ряд (16) с коэффициентами A_n, определяемыми по формулам (17), равномерно и абсолютно сходится к $\varphi(x)$. Так как при $t \geq 0$

$$0 < e^{-(\pi n a/l)^2 t} \leq 1,$$

то ряд (15) при $t \geq 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x,t)$, определяемая рядом (15), непрерывна в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ и удовлетворяет начальному и граничным условиям. Остаётся показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4) в области $0 \leq x \leq l$, $t > 0$. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (15) почленным дифференцированием по t один раз и почленным дифференцированием по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся в области $0 \leq x \leq l$, $t > 0$. Это следует из того, что при любом $t > 0$

$$0 < \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}e^{-(\pi n a/l)^2 t} \leq 1,\ 0 < \frac{\pi^2 n^2}{l^2}e^{-(\pi n a/l)^2 t} \leq 1,$$

если n достаточно велико.

Аналогично можно показать существование у функции $u(x,t)$ непрерывных производных любого порядка по x и t в области $0 \le x \le l$, $t > 0$.

Допустим, что задача имеет решение при отрицательных t. Тогда если к этому решению прибавить какой-нибудь член с достаточно большим номером из ряда (15) с произвольно малым постоянным множителем, то можно получить решение уравнения, которое при фиксированном отрицательном t будет сколь угодно сильно отличаться от исходного, при этом функция φ изменится незначительно. Отсюда следует, что задача (4)-(6) поставлена некорректно для отрицательных t, если начальное условие относить к $t = 0$.

Рассмотрим теперь задачу о поиске в прямоугольнике Q решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{18}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l \tag{19}$$

и однородным краевым условиям

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{20}$$

Предполагается, что непрерывная функция $f(x,t)$ имеет кусочно-непрерывную первую производную и при всех $t > 0$ выполняются условия $f(0,t) = f(l,t) = 0$. Решение этой задачи будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{21}$$

по собственным функциям задачи (10). Разлагая функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам, имеем

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \tag{22}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \tag{23}$$

Подставляя ряд (21) в уравнение (18) и принимая во внимание (22), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Отсюда

$$T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),\ n = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x,t)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = 0,$$

получаем начальное условие для $T_n(t)$:

$$T_n(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Решение уравнения (24) при начальном условии (25) имеет вид

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \tag{26}$$

Подставляя выражение (26) для $T_n(t)$ в ряд (21), получим решение задачи (18)-(20) в виде

$$u(x,t) =) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{27}$$

Для того чтобы решить задачу для неоднородного уравнения (24) с однородными граничными условиями и ненулевым начальным условием (5), следует к решению задачи (18)-(20) прибавить решение соответствующей задачи (4)-(6). Вернёмся теперь к общей первой краевой задаче (1)-(3). Введём новую неизвестную функцию $v(x,t)$, положив

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция w – произвольная функция, удовлетворяющая краевым условиям (3), например,

$$w(x,t) = \mu_1(t) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))\frac{x}{l}.$$

Функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \bar{f}(x,t),$$

где

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} w(x,t),$$

с начальным условием

$$v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0)$$

и краевыми условиями

$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = 0, \ v(0,t) = u(l,t) - w(l,t) = 0.$$

Таким образом, решение задачи сведено к решению задачи с однородными граничными условиями.

Из теоремы о максимуме и минимуме вытекает, что решение задачи (1)-(3) единственно и непрерывно зависит от правых частей начального и граничного условий. Действительно, пусть u_1 – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \ u_1(0,t) = \mu_1^1(t), \ u_1(l,t) = \mu_2^1(t),$$

u_2 – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \ u_2(0,t) = \mu_1^2(t), \ u_2(l,t) = \mu_2^2(t).$$

Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению (4) и условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \ u(0,t) = \mu_1^1(t) - \mu_1^2(t), \ u(l,t) = \mu_2^1(t) - \mu_2^2(t).$$

Если $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon$, $|\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)| < \varepsilon$, $|\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)| < \varepsilon$, то, согласно теореме о максимуме, $|u(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$.

Остывание круглого цилиндра

Рассмотрим задачу об остывании бесконечно длинного цилиндра радиуса L, имеющего некоторую начальную температуру f, если на его поверхности поддерживается температура, равная нулю. Предположим, ось z направлена вдоль оси цилиндра и начальная температура не зависит от z. Тогда очевидно, что в дальнейшем температура u также не зависит от z и меняется только в поперечном сечении (x, y) цилиндра.

Уравнение теплопроводности (при отсутствии внешних источников) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Перейдём к полярным координатам в плоскости $z = \text{const}$:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Получаем задачу определения функции $u(r, \varphi, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{28}$$

начальному условию

$$u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi) \tag{29}$$

и граничному условию

$$u(L, \varphi, t) = 0. \tag{30}$$

Найдём частное решение уравнения теплопроводности (28), удовлетворяющее граничному условию (29) и представимое в виде

$$u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi)T(t). \tag{31}$$

Подставляя в уравнение (28) и разделяя переменные, получаем для определения функции T уравнение

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{32}$$

а для v - задачу на собственные значения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0,\ v(L, \varphi) = 0. \tag{33}$$

Функция v должна быть однозначной и дифференцируемой функцией. Чтобы можно было распространить функцию v на всю числовую ось по переменной φ, потребуем, чтобы функция v была периодической:

$$v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi). \tag{34}$$

Чтобы избежать появления "нефизичных"решений v, имеющих особенность при $r = 0$, вводится условие ограниченности

$$|v(0, \varphi)| < \infty. \tag{35}$$

Задача (33)-(35) была решена при изучении колебаний круглой мембраны (лекция 20). Собственными значениями являются

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L} \right)^2,\ n = 0, 1, 2, ...,\ m = 1, 2, \ldots,$$

где $\mu_m^{(n)}$ – m-й корень уравнения

$$J_n(\mu) = 0,$$

J_n – функция Бесселя n-го порядка. Собственные функции имеют вид

$$v_{n,m}(r,\varphi) = \Phi_n(\varphi) R_{n,m}(r),\ n = 0, 1, 2, ...,\ m = 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2},\ \Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$R_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L}\right),\ n = 0, 1, 2, ...,\ m = 1, 2, \ldots.$$

Из свойств функций Бесселя вытекает следующее.

Собственные функции v_{n_1,m_1}, v_{n_2,m_2} ортогональны с весом r при $v_1 \neq n_2$ или $m_1 \neq m_2$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^L r v_{n_1,m_1} v_{n_2,m_2} dr d\varphi = \int_0^L J_{n_1}\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{L}\right) J_{n_2}\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{L}\right) r dr \int_0^{2\pi} \Phi_{n_1}(\varphi)\Phi_{n_2}(\varphi) d\varphi = 0.$$

Квадрат нормы собственной функции $v_{n,m}$ равен

$$\|v_{n,m}\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^L r v_{n,m}^2 dr d\varphi = \frac{L^2}{2}\left(J_n'(\mu_m^{(n)})\right)^2 \pi(a_n^2 + b_n^2),\ n \in \mathrm{N},$$

$$\|v_{0,m}\|^2 = \frac{L^2}{4}\left(J_1(\mu_m^{(0)})\right)^2 \pi a_0^2.$$

Для каждого $\lambda_{n,m}$ определим $T_{n,m}(t)$, решая уравнение (32),

$$T_{n,m} = c_{n,m} e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L}\right)^2 t}.$$

Таким образом, найдены все нетривиальные решения уравнения (12) вида (15), удовлетворяющие условиям (14):

$$u_{n,m}(r,\varphi,t) = v_{n,m}(r,\varphi) T_{n,m}(t) = \Phi_n(\varphi) R_{n,m}(r) T_{n,m}(t),\ n \in \{0\} \cap \mathrm{N},\ m \in \mathrm{N}.$$

Решения исходной задачи (10)-(12) находим в виде

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(r,\varphi,t).$$

Обозначая $c_{0,m}a_0/2 = a_{0,m}$, $c_{n,m}a_n = a_{n,m}$, $c_{n,m}b_n = b_{n,m}$, получаем

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{L}\right)^2 t} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right)(a_{n,m}\cos n\varphi + b_{n,m}\sin n\varphi) e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{L}\right)^2 t}. \tag{36}$$

Подставляя ряд (36) в начальные условия (11), получим

$$f(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right)(a_{n,m}\cos n\varphi + b_{n,m}\sin n\varphi). \tag{37}$$

Равенство (37) позволяет определить все коэффициенты $a_{n,m}$, $b_{n,m}$.

Рассмотрим сначала (37) как разложение $f(r,\varphi)$ при каждом r в ряд Фурье по системе функций $\{1, \cos(n\varphi), \sin(n\varphi),\ n\in \mathrm{N}\}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Всякая непрерывная в интервале $(0,L)$ функция $g(r)$, имеющая кусочно-непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе функций Бесселя:

$$g(r)\sum_{m=1}^{\infty} g_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L} r\right),\ g_m = \frac{2\int_0^L r g(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L} r\right) dr}{L^2\left(J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right)^2}.$$

Используя эти формулы, получаем

$$a_{0,m} = \frac{\int_0^L\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{L} r\right) d\varphi dr}{\pi L^2\left(J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)\right)^2},$$

$$a_{n,m} = \frac{2\int_0^L\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L} r\right) \cos n\varphi d\varphi dr}{\pi L^2\left(J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right)^2},$$

$$b_{n,m} = \frac{2\int_0^L\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L} r\right) \sin n\varphi d\varphi dr}{\pi L^2\left(J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right)^2}.$$

Если начальная температура f зависит только от r , $f = f(r)$, то коэффициенты $a_{n,m}$ и $b_{n,m}$ при $n \in \mathrm{N}$ будут равны нулю и решение примет вид

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{L}\right)^2 t},\ a_{0,m} = \frac{2\int_0^L r f(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{L} r\right) dr}{L^2\left(J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)\right)^2}.$$

Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу поиска функции $u(x,t)$, $t > 0$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{38}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{39}$$

где $\varphi(x)$ –непрерывная и ограниченная функция.

Найдём сначала частные решения уравнения (38) вида

$$u(x,t) = T(t)X(x).$$

Подставляя в уравнение и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,\ X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Таким образом,

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t},\ X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x;$$

постоянный множитель в выражении $T(t)$ положили равным единице, постоянные A и B могут зависеть от λ. Так как граничные условия отсутствуют, параметр λ остаётся произвольным.

Функции

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x) \tag{40}$$

являются частными решениями уравнения (38) при любых $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Интегрируя (40) по параметру λ получим также решение уравнения (38)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda, \tag{41}$$

если этот интеграл равномерно сходится и его можно дифференцировать под знаком интеграла один раз по t и дважды по x.

Выберем функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось и начальное условие (39). Полагая в (41) $t = 0$, получим, в силу (39),

$$\varphi(x) = int_{-\infty}^{\infty}(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda. \tag{42}$$

Сравнивая интеграл в правой части с интегралом Фурье для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda(\cos\lambda x \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi)d\lambda,$$

видим, что равенство (42) будет выполнено, если

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,\ B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi. \tag{43}$$

Подставляя (43) в (41), получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi.$$

Меняя порядок интегрирования и пользуясь формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}},$$

находим, что

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}d\xi. \tag{44}$$

Список литературы

[1] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.