ЛЕКЦИЯ 27

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть область $\Omega \subset R^3$ ограничена замкнутой поверхностью Г, на которой задана некоторая функция *f*. Обозначим через Ω_e бесконечную область, внешнюю к Ω, также ограниченную поверхностью Г. Пусть на поверхности задана непрерывная функция *f*. Рассмотрим постановку основных задач для уравнения Пуассона.

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона. Найти функцию *u*, которая определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри Ω уравнению Пуассона

$$\Delta u = F \tag{1}$$

и принимает на поверхности Г заданные значения *f*:

$$u\big|_{\Gamma} = f\,. \tag{2}$$

Если F≡0 задача (1), (2) называется задачей Дирихле для уравнения Лапласа.
Внешняя задача Дирихле состоит в определении функции *u*, удовлетворяющей уравнению (1) в Ω_e, непрерывной в $\overline{\Omega}_e$ и удовлетворяющей условию (2).

Внутренняя задача Неймана. Найти функцию *u*, непрерывную в $\overline{\Omega}$, которая удовлетворяет внутри Ω уравнению Пуассона (1) и производная которой по направлению внешней нормали к поверхности Г равна заданной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = f\,. \tag{3}$$

Внешняя задача Неймана состоит в определении функции *u*, удовлетворяющей уравнению (1) в Ω_e и удовлетворяющей условию (3).

Третья внутренняя краевая задача. Найти функцию *u*, непрерывную в $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в Ω уравнению (1) и такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\Big|_{\Gamma} = f\,, \tag{4}$$

где α – заданная непрерывная функция на Г, принимающая только положительные значения.
Аналогично формулируется *третья внешняя краевая задача*.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле, внутренней и внешней, единственно.*

Доказательство. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Дирихле. Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи. Тогда их разность $u=u_1-u_2$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0$$

в области Ω и равна нулю на границе области. Любая непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает своего максимального и минимального значения. Если функция *u* не равна тождественно нулю и хотя бы в одной точке $u>0$, то она достигает максимального положительного значения внутри области, что невозможно. Аналогично, ни в одной точке области функция *u* не может принимать отрицательных значений. Таким образом, $u\equiv 0$, то есть $u_1 \equiv u_2$, решение, тем самым, единственно.

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Дирихле. Снова пусть u_1 и u_2 – два решения задачи. Тогда их разность $u=u_1-u_2$ – гармоническая функция, равная нулю на Г и $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $R > 0$, что $|u(M)| < \varepsilon$, если $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq R$. Пусть P – произвольная точка бесконечной области Ω_e. Проведём сферу S с центром в начале координат и радиусом $r \geq R$ столь большим, чтобы точка P и поверхность Г лежали внутри этой сферы. Тогда $|u(P)| < \varepsilon$, что следует из теоремы о максимуме и минимуме, примененной к области, заключенной между Γ и S. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $u(P) = 0$, а так как точка P произвольная, $u = 0$ в Ω_e, то есть $u_1 \equiv u_2$. Теорема доказана.

Задача называется физически определенной, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, соответствует малое изменение самого решения.

Теорема. *Решение внутренней задачи Дирихле непрерывно зависит от граничных данных.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – две непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции, удовлетворяющие в Ω уравнению (1), $u_1\big|_\Gamma = f_1$, $u_2\big|_\Gamma = f_2$, причём $|f_1 - f_2| \le \varepsilon$ во всех точках поверхности Γ. Тогда, так как функция $u \equiv \varepsilon$ гармоническая, из следствия 3 к теореме о максимуме вытекает, что

$$|u_1 - u_2| \le \varepsilon \text{ внутри } \Omega,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Решение внутренней задачи Неймана, имеющее непрерывные вплоть до границы производные первого порядка, определено с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи Неймана (1), (3) с одним и тем же граничным условием. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω и её производная в направлении внешней нормали равна нулю на границе области: $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0$.

Воспользуемся первой формулой Грина для гармонических функций

$$\iiint\limits_\Omega (\nabla u)^2\, dxdydz = \iint\limits_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\gamma$$

Правая часть формулы равна нулю, следовательно и левая часть равна нулю. В силу непрерывности первых производных функции u, подынтегральная функция непрерывна и неотрицательна, следовательно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

то есть $u = u_1 - u_2 = \mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

Теорема. *Решение третьей внутренней краевой задачи, имеющее непрерывные вплоть до границы производные первого порядка, единственно.*

Доказательство. Предположим, что u_1 и u_2 – два решения задачи (1), (4). Функция $u = u_1 - u_2$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω и на границе области выполнено условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\Big|_\Gamma = 0\,.$$

Из первой формулы Грина получаем

$$\iiint\limits_\Omega (\nabla u)^2\, dxdydz + \iint\limits_\Gamma \alpha u^2\, d\gamma = 0.$$

Так как обе подынтегральные функции неотрицательны, получаем, что $u = \mathrm{const}$ и $u = 0$ на Γ. Делаем вывод, что $u \equiv 0$, то есть $u_1 = u_2$.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Пусть u – функция, гармоническая внутри ограниченной области Ω, непрерывная вместе с производными первого порядка в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Тогда имеет место формула

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\right)d\gamma \tag{5}$$

где r – расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей внутри Ω, до переменной точки $M(x,y,z)$ поверхности Г.

Пусть известна функция $g(x_0,y_0,z_0,x,y,z)=g(M_0,M)$, обладающая следующими двумя свойствами: как функция переменной точки (x,y,z) она является гармонической внутри области Ω и имеет непрерывные первые производные вплоть до поверхности Г; на поверхности Г функция g принимает значения $-1/(4\pi r)$.

Применим формулу Грина

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dxdydz = \iint\limits_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\gamma\ . \tag{6}$$

к гармоническим функциям u и g. Получим

$$\iint\limits_{\Gamma}\left(u\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\gamma = 0$$

или, в силу граничных значений для функции g,

$$\iint\limits_{\Gamma}\left(u\frac{\partial g}{\partial \nu} + \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\gamma = 0$$

Вычитая это равенство из (5), получаем

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iint\limits_{\Gamma}u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{4\pi r} + g\right)d\gamma.$$

Положим

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(M, M_0) \tag{7}$$

Эта функция называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа называется функция $G(M,M_0)$, удовлетворяющая следующим условиям: $G(M,M_0)$ как функция точки $M(x,y,z)$ гармоническая внутри области Ω, исключая точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где она обращается в бесконечность; удовлетворяет граничному условию

$$G(M, M_0)\big|_{\Gamma} = 0;$$

в области Ω функция G допускает представление (7), где r – расстояние между точками M и M_0, функция g гармоническая внутри Ω по переменным (x,y,z).

Построение функции Грина сводится к нахождению её регулярной части g, которая определяется из решения задачи Дирихле

$$\Delta g = 0,\ \ g\big|_{\Gamma} = -\frac{1}{4\pi r},\ \ (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$$

Если функция Грина определена, то решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа (если оно существует) даётся формулой

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iint\limits_{\Gamma} f\frac{\partial G}{\partial \nu}d\gamma,\ \ u\big|_{\Gamma} = f. \tag{8}$$

Формула (8) выводится в предположении существования функции u – решения внутренней задачи Дирихле с граничными значениями f, непрерывного вместе с первыми производными вплоть до границы Г. Искомая же функция в задаче Дирихле должна быть гармонической внутри области Ω и непрерывной в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Таким образом, не давая доказательства существования решения, формула (8) даёт интегральное представление существующих достаточно гладких решений задачи Дирихле.

Некоторые свойства функции Грина

1.*Функция Грина всюду положительна внутри области Ω.*

В самом деле, функция G обращается в нуль на границе Г и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной из точки M_0 (так как $G(M,M_0)\to\infty$ при $M\to M_0$) . Из теоремы о максимуме и минимуме следует, что функция положительна во всей области Ω.

2. Функция g на поверхности Г принимает отрицательные значения, поэтому $g<0$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и, следовательно, внутри Ω

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r}.$$

3. *Функция Грина симметрична*, то есть

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Для доказательства применим формулу Грина (6) к функциям $u=G(M,M_1)$ и $v=G(M,M_2)$. За область интегрирования выберем область Ω*'*, полученную исключением из области Ω двух шаров радиуса ε с центрами в точках M_1 и M_2 и поверхностями S_1 и S_2. Тройной интеграл по этой области будет равен нулю, так как функции u и v гармонические в Ω*'*. Поверхность области Ω*'* состоит из Г и двух сфер. Интеграл по Г равен нулю в силу граничного условия. Таким образом, приходим к равенству

$$\iint_{S_1}\left[G(M,M_1)\frac{\partial}{\partial\nu}G(M,M_2) - G(M,M_2)\frac{\partial}{\partial\nu}G(M,M_1)\right] +$$
$$+\iint_{S_2}\left[G(M,M_1)\frac{\partial}{\partial\nu}G(M,M_2) - G(M,M_2)\frac{\partial}{\partial\nu}G(M,M_1)\right] = 0.$$

Предел интеграла по сфере S_1 при $\varepsilon\to 0$ будет равен $-G(M_1,M_2)$, а предел интеграла по сфере S_2 равен $G(M_2,M_1)$, что и доказывает симметричность функции Грина.

Замечание. В случае плоскости функция Грина имеет вид

$$G(M.M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g(M, M_0),\ r = |M_0 M|.$$

Решение внутренней задачи Дирихле выражается формулой

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\int_{\Gamma} f\frac{\partial G}{\partial\nu}d\gamma,\ u|_{\Gamma} = f,$$

где Г – кривая, ограничивающая плоскую область Ω.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm