ЛЕКЦИЯ 7

Метод распространяющихся волн. Формула Д'Аламбера.

Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{2}$$

Классическим решением задачи (1), (2) называется функция u, непрерывно дифференцируемая в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ и дважды неппрерывно дифференцируемая в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным условиям (2).

Преобразуем уравнение (1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - adt = 0,\ dx + adt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1,\ x + at = C_2.$$

Вводя новые переменные

$$\xi = x + at,\ \eta = x - at,$$

уравнение колебаний среды преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0,\ v(\xi,\eta) \equiv u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)). \tag{3}$$

Найдём общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения уравнения (3)

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

где f - некоторая непрерывная функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получаем

$$v(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + g(\xi) = g(\xi) + f(\eta), \tag{4}$$

где g и f - функции только переменных ξ и η соответсвенно. Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f и g, функция v, определяемая формулой (4), представляет собой решение уравнения (3). Так как всякое решение уравнения (3) может быть представлено в виде (4) при соответствующем выборе f и g, то формула (4) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x,t) = g(x + at) + f(x - at) \tag{5}$$

является **общим решением** уравнения (1).

Допустим, что решение задачи (1), (2) существует, тогда оно даётся формулой (5). Определим функции f и g таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$u_t(x,0) = ag'(x) - af(x) = \psi(x). \tag{7}$$

Интегрируя второе равенство, получаем

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C, \tag{8}$$

где x_0 и C - постоянные.

Из равенств (6), (8) находим

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + \frac{C}{2}, \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz - \frac{C}{2},$$

Таким образом, определили функции g и f через заданные функции φ и ψ, причем равенства (9) должны иметь место для любого значения аргумента. Подставив найденные функции в (5), получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at} \psi(z)dz - \int_{x_0}^{x-at} \psi(z)dz\right\}.$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \tag{10}$$

Формула (10) называется **формулой Д'Аламбера** (или Даламбера). Она получена в предположении существования решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи, то оно представлялось бы формулой (10) и совпадало с первым решением.

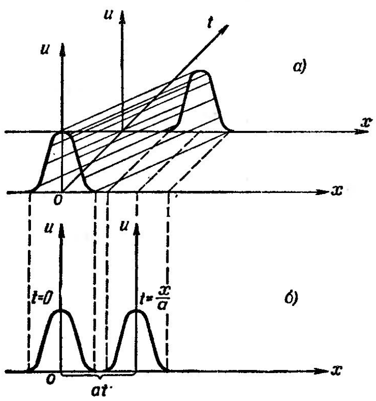
Если функция ψ дифференцируема, а функция φ дважды дифференцируема, функция u, определяемая формулой (10), удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

В формуле (5) функции f и g определены неоднозначно. Если от g отнять, а к f прибавить некоторую постоянную, то u не изменится. В формуле (9) постоянная C не определяется через φ и ψ, однако можно её отбросить, не меняя значения u. При сложении g и f слагаемые $C/2$ и $-C/2$ взаимно уничтожаются.

Физическая интерпретация

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (10), представляет процесс распространения начального отклонения и начальной скорости. Если фиксировать $t = t_0$, то функция $u(x,t_0)$ даёт профиль струны в момент t_0. Фиксируя $x = x_0$, получим функцию $u(x_0,t)$, дающую процесс движения точки $x = x_0$.

Предположим, что наблюдатель, находившийся в точке $x = 0$ в момент $t = 0$, движется со скоростью a в положительном направлении. Введём систему координат, связанную с наблюдателем, полагая $x' = x - at$, $t' = t$. В этой подвижной системе координат функция



$u(x,t) = f(x-at)$ будет определяться формулой $u = f(x')$ и наблюдатель всё время будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент.

Следовательно, функция $u(x,t) = f(x-at)$ представляет неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся вправо (в положительном направлении оси x) со скоростью a (распространяющуюся или бегущую волну). Функция $g(x+at)$ представляет, очевидно, волну, распространяющуюся влево (в отрицательном направлении оси x) со скоростью a.

Таким образом, общее решение (10) задачи Коши для бесконечной струны есть суперпозиция двух волн, одна из которых распространяется вправо со скоростью a, а вторая - влево с той же скоростью. При этом

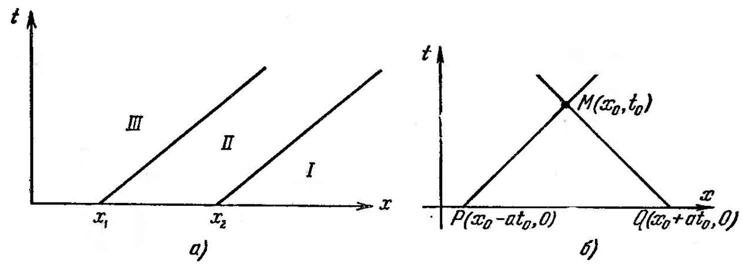
$$g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \Psi(x+at),$$

$$f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \Psi(x-at),$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz.$$

Для выяснения характера решения (10) удобно пользоваться плоскостью состояний (x,t) или фазовой плоскостью. Прямые $x - at = const$ и $x + at = const$ являются характеристиками уравнения (1). Функция $u = f(x-at)$ вдоль характеристики $x - at = \mathrm{const}$ сохраняет постоянное значение, функция $u = g(x+at)$ постоянна вдоль характеристики $x + at = \mathrm{const}$.



Предположим, что $f(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) и равна нулю вне этого интервала. Проведём характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$: они разбивают полуплоскость на три области. Функция $f(x-at)$ отлична от нуля только в области II, где $x_1 < x - at < x_2$ и характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ представляют передний и задний фронты распространяющейся вправо волны.

Рассмотрим теперь некоторую фиксированную точку $M(x_0, t_0)$ и проведем из неё обе характеристики $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$, которые пересекут ось x в точках $x_1 = x_0 - at_0$, $t = 0$, и $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$. Значение функции $u = f(x-at) + g(x+at)$ в точке (x_0, t_0) равно $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, то есть определяется значениями функций f и g в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, являющихся вершинами треугольника MPQ, образованного двумя характеристиками и осью x. Этот треугольник называется **характеристическим треугольником** точки (x_0, t_0). Из формулы (10) видно, что отклонение $u(x_0, t_0)$ точки струны в момент t_0 зависит только от значений начального отклонения в вершинах $P(x_0 - at_0)$ и $Q(x_0 + at_0)$ характеристического треугольника MPQ и от значений начальной скорости на стороне PQ. Это становится особенно ясным, если формулу (10) записать в виде

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(z)dz. \tag{11}$$

Начальные данные, заданные вне отрезка $PQ = [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, не оказывают влияния на значения $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$. Отрезок называется **областью зависимости** решения в точке (x_0, t_0) от начальных данных.

Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на отрезке P_1Q_1, где $P_1 = (x_1, 0)$, $Q_1 = (x_2, 0)$, то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок P_1Q_1. Множество точек, расположенных внутри этого треугольника называется **областью определенности**. Начальные данные, заданные на отрезке P_1Q_1, влияют на значения функции u в точках полуплоскости, область зависимости которых имеет непустое пересечение с отрезком P_1Q_1. Множество таких точек называется **областью влияния** этого отрезка. Она ограничена отрезком и характеристиками $x - at = x_1$, $x + at = x_2$.

Примеры

Функцию (10) можно представить в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)), \tag{12}$$

$$u_2(x,t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \tag{13}$$

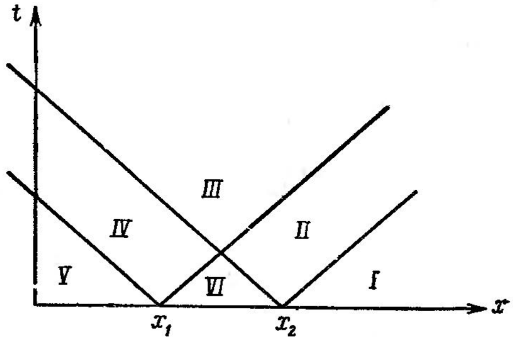
Если начальная скорость ψ равна нулю, то отклонение $u = u_1$ есть сумма левой и правой бегущих волн, причем начальная форма каждой волны определяется функцией $0,5\varphi(x)$, равной половине начального отклонения. Если же $\varphi = 0$, то $u = u_2$ представляет возмущение струны, создаваемое начальной скоростью.

Пример 1.

Рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника. Такой начальный профиль можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка $[x_1, x_2]$.

Наглядное представление о характере процесса распространения можно получить с помощью фазовой плоскости (x, t). Проведём характеристики через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, они разобьют полуплоскость на шесть областей.

Отклонение $u_1(x, t)$ в любой точке (x, t) даётся формулой (12). Поэтому в областях I, III, V отклонение равно нулю, так как характеристический треугольник любой точки из этих областей не имеет общих точек с отрезком $[x_1, x_2]$, на котором заданы начальные условия.



В области II решением является правая волна $u = 0,5\varphi(x - at)$, в области IV - левая волна $u = 0,5\varphi(x + at)$, а в области VI -решение есть сумма левой и правой волн.

На рисунке даны последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/(8a)$.

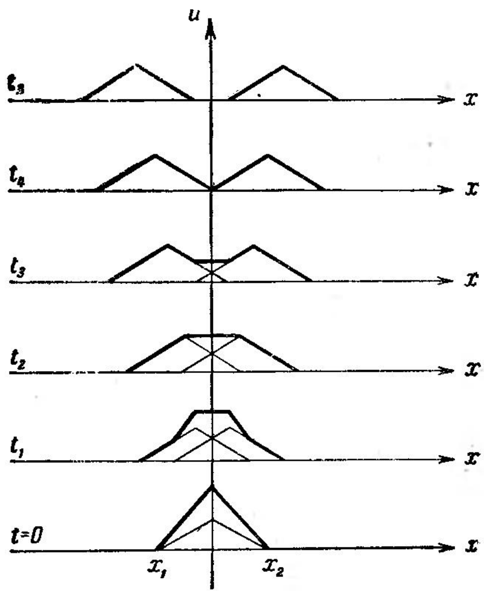


Рис. 1: Пример 1

Пример 2.

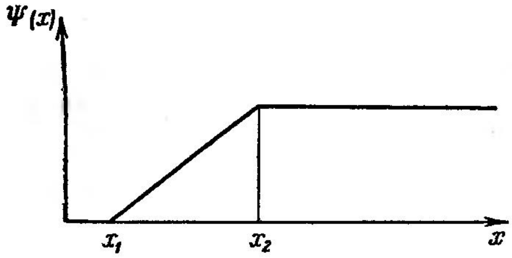
Пусть начальное отклонение нулевое, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где она принимает постоянное значение ψ_0: $\psi(x) = \psi_0$ при $x_1 \le x \le x_2$, $\psi(x) = 0$ при $x > x_2$ и $x < x_1$. В этом случае решением является функция $u_2(x, t)$.

Вычислим функцию $\Psi(x)$, выбрав при этом $x_0 = 0$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ (x - x_1)\psi_0/2a & \text{при} \quad x_1 \le x \le x_2, \\ (x_2 - x_1)\psi_0/2a & \text{при} \quad x > x_2. \end{cases} \tag{14}$$

Решение u_2 есть разность правой и левой волн с профилем $\Psi(x)$. Последовательные положения этих волн через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/(8a)$ изображены на рисунке. Профиль струны для $t \ge 4\Delta t$ имеет форму трапеции, расширяющейся равномерно с течением времени. Если $\psi(x)$ отлично от постоянной, то изменится лишь профиль $\psi(x)$.

Для выяснения характера решения воспользуемся фазовой плоскостью. Напишем выражения для $u(x,t)$ в различных областях фазовой плоскости.



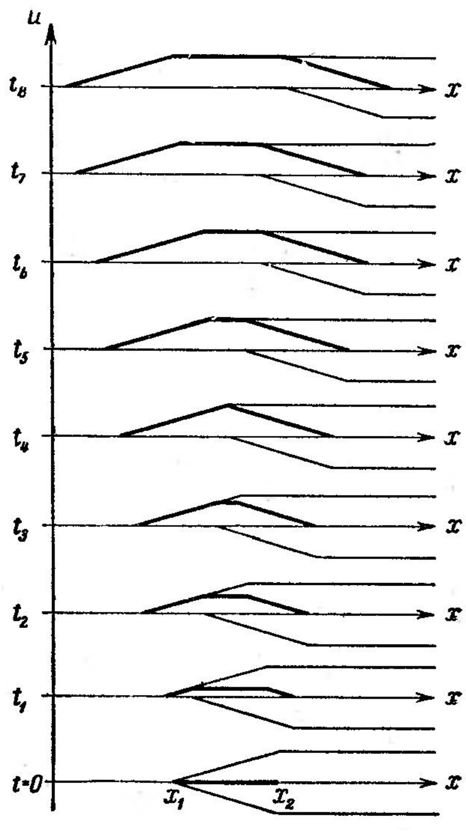


Рис. 2: Пример 2

В области I ($x - at > x_2$)

$$\Psi(x+at) = \Psi(x-at) = \text{const}, \ u(x,t) = 0.$$

В области V ($x + at < x_1$)

$$\Psi(x+at) = \Psi(x-at) = 0, \ u(x,t) = 0.$$

В области III ($x - at < x_1$, $x + at > x_2$)

$$\Psi(x+at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0, \ \Psi(x-at) = 0, \ u(x,t) = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0.$$

В области II ($x_1 < x - at < x_2$, $x + at > x_2$)

$$\Psi(x+at) = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0,\ \Psi(x-at) = \frac{x - at - x_1}{2a}\psi_0,\ u(x,t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a}\psi_0.$$

В области IV ($x_1 < x + at < x_2$, $x - at < x_1$)

$$\Psi(x+at) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0,\ \Psi(x-at) = 0,\ u(x,t) = \frac{x + at - x_1)}{2a}\psi_0.$$

В области VI ($x - at > x_1$, $x + at < x_2$)

$$\Psi(x+at) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0,\ \Psi(x-at) = \frac{x - at - x_1}{2a}\psi_0,\ u(x,t) = t\psi_0.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенного

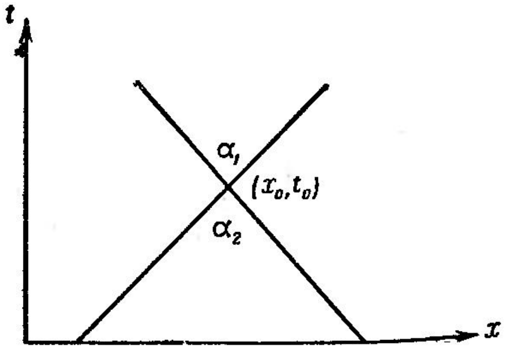


Рис. 3: Пример 3

импульса. Сообщая в начальный момент точкам струны $(x, x+\Delta x)$ постоянную скорость ψ_0 (например, ударяя струну молоточком), мы прикладываем к этому участку импульс I, равный изменению количества движения при $t = 0$, так что $I = \rho\Delta x\psi_0$, где ρ - линейная плотность струны.

Таким образом, нужно решить задачу о колебаниях струны с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ на интервале $(x, x+\Delta x)$, $\psi = 0$ вне этого интервала; здесь $I_0 = I/\Delta x$ - плотность импульса.

Анализ решения этой задачи был дан выше при решении примера 2. Отклонение, вызываемое импульсом, распределенным на интервале $(x, x+\Delta x)$, представляет собой при $t > \Delta x/(2a)$ трапецию с нижним основанием $2at + \Delta x$ и верхним $2at - \Delta x$. Совершая предельный переход при $\Delta x \to 0$, $I = \text{const}$, видим, что отклонения будут равны нулю вне $(x - at, x + at)$ и $I/(2a\rho)$ внутри этого интервала. Можно условно говорить, что эти отклонения вызываются точечным импульсом I.

Рассмотрим фазовую плоскость (x, t) и проведём через точку (x_0, t_0) обе характеристики:

$$x - at = x_0 - at_0,\ x + at = x_0 + at_0.$$

Они определяют два угла α_1 и α_2, называемые соответственно верхним и нижним характеристическими углами для точки (x_0, t_0). Действие точечного импульса в точке (x_0, t_0) вызывает отклонение, равное $I/(2a\rho)$ внутри верхнего характеристического угла и нулю вне его.

Список литературы

[1] Гаврилов В.С., Денисова Н.А. Метод характеристик для одномерного волнового уравнения: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. - 72 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.