МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра: Теории управления и динамики систем**

Отчёт по лабораторной работе

**Тема:
«Специальные функции.»**

Выполнили:
студентки группы
3821Б1ПМоп2
Киселева Ксения
Владимировна
Семашко Екатерина
Максимовна

Проверил:
Муняев Вячеслав Олегович

Нижний Новгород
2024

Специальные функции

1 Функции Бесселя

A Фундаментальная система решений уравнений

Уравнение Бесселя ν-го порядка

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{2.1}$$

Где ν - действительное или комплексное с неотрицательной действительной частью. Выразим y''

$$y'' = \frac{-xy' - (x^2 + \nu^2)y}{x^2} \tag{2.2}$$

Уравнение имеет особую точку $x = 0$; если устремить x к бесконечности, то $y''(0) \to \infty$, если числитель не равен нулю, то есть $y(0)$ и $y'(0)$ не обращаются в ноль. Будем искать решение в виде степенного ряда:

$$y(x) = x^s(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k + ...), \alpha_0 \neq 0 \tag{2.3}$$

Подставив $\alpha_0 \neq 0$ уравнение Бесселя получаем систему уравнений для нахождения α_k – коэффициентов и s - характеристического показателя:

$$\begin{cases} \alpha_0(s^2+\nu^2)=0, \\ \alpha_1[(s+1)^2-\nu^2]=0, \\ \alpha_2[(s+2)^2-\nu^2]-\alpha_0=0, \\ ... \\ \alpha_k[(s+2)^2-\nu^2]-\alpha_{k-2}=0, \\ ... \\ k=2,3,... \end{cases}$$

В силу того, что $\alpha_0 \neq 0$ получаем равенство $s^2=\nu^2$. В общем виде для k-го уравнения получим:

$$(s+k+\nu)(s+k-\nu)\alpha_k+\alpha_{k-2}=0 \tag{2.4}$$

Из второго уравнения: $\alpha_1=0$.

Так каккоэффициент α_k выражается через коэффициент α_{k-2}, то $\alpha_3, \alpha_5, ..=0$.

Пусть $s=\nu$, тогда для $k=2m$:

$$\alpha_{2m}=\frac{-\alpha_{2m-2}}{2^2m(m+\nu)} \tag{2.5}$$

Получили рекуррентную формулу для коэффициентов с чётными индексами.

Используя Гамма-функцию и тот факт, что $\nu \neq -n, n > 0, n \in Z$,шем формулу в виде:

$$\alpha_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \tag{2.6}$$

В случае $s=\nu, n>0, n \in Z$:

$$\alpha_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \tag{2.7}$$

Таким образом для этих случаев частные решения будут иметь вид:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{2.8}$$

Это функции Бесселя 1-го рода.

Если ν - не целое, то $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ – оразуют ФСР (фундаментальную систему решений):

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \tag{2.9}$$

При $x \to 0, J_\nu(x) \to 0, J_{-\nu}(x) \to \infty$ эти частные решения линейно зависимы. Введём функцию Неймана, ортогональную решению $J_\nu(x)$:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) cos(\nu\pi) - J_{-\nu(x)}}{sin(\nu\pi)} \tag{2.10}$$

Это функция Бесселя 2-го рода.

Линейная комбинация функций Бесселя первого и второго родов являет собой полное решение уравнения Бесселя:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x) \tag{2.11}$$

B Рекуррентные формулы функций Бесселя ν-го порядка

Теорема:

Рекуррентные формулы функций Бесселя ν-го порядкаимеют вид:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) \tag{2.12}$$

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right) \tag{2.13}$$

Доказательство:

Умножимфункции Бесселя 1 рода на $\frac{1}{x^\nu}$ и продифференцируем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{\nu+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = \tag{2.14}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{2^\nu\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{2^\nu\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \tag{2.15}$$

Используя формулу для Гамма функции:

$$\Gamma(k+2) = (k+1)! \tag{2.16}$$

Получим:

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k+1}\frac{1}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{2.18}$$

Вычислим производную, написанную в левой части последнего равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{x^\nu J'_\nu(x) - \nu x^{\nu-1}J_\nu(x)}{x^\nu} \tag{2.19}$$

$$-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} = \frac{x^\nu J'_\nu(x) - \nu x^{\nu-1}J_\nu(x)}{x^\nu} \tag{2.20}$$

Умножив последнее выражение на x^ν и перегруппировав слагаемые получим:

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \tag{2.21}$$

Умножим функции Бесселя 1 рода на x^ν и продифференцируем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^\nu J_\nu(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^\nu}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+3k}\right) = \tag{2.22}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2(\nu+k)x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}(\nu+k)\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu)} = \tag{2.23}$$

$$= x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+3k-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{2.24}$$

Получили зависимость:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{2.25}$$

Производную левой части найдём как производную произведения:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^\nu J_\nu(x)) = \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) \tag{2.26}$$

В итоге получим:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \tag{2.27}$$

Для и $J_{\nu+1}(x)$ и $J'_\nu(x)$ формулы можно получитьиз выведенных ранее равенств:

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \tag{2.28}$$

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \tag{2.29}$$

Таким образом:

$$J'_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) \tag{2.30}$$

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right) \tag{2.31}$$

Что и требовалось доказать.

C Асимптотические формулы для функций Бесселя 1 и 2 рода

Любая цилиндрическая функция однозначно определяется своей асимптотикой при $x \to \infty$, точнее главным членом асимптотического разложения.

Утверждение 1

При достаточно больших хфункция определена следующим образом:

$$y_\nu(x) = y_\infty \frac{sin(x+\delta_\infty)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.32}$$

гду $y_\infty \neq 0$, δ_∞ - постоянные.

Доказательство:

Пусть $y = \frac{z(x)}{sqrtx}$

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}z + \frac{z'}{\sqrt{x}} \tag{2.33}$$

$$y'' = \frac{z''}{\sqrt{x}} - \frac{z'}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z}{4x^{\frac{5}{2}}} \tag{2.34}$$

Подставим в уравнение Бесселя:

$$z'' + \left(1 - \frac{z^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0 \tag{2.35}$$

Частный случай уравнения

$$z'' + (1 - \rho(\ x))z = 0, \tag{2.36}$$

гду $\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Пусть

$$z = \gamma sin\left(x+\delta\right) \tag{2.37}$$

$$z' = \gamma cos\left(x+\delta\right) \tag{2.38}$$

$\delta(x)$, $\gamma(x) \neq 0$ - некоторые функции.

$$\begin{cases} z' = \gamma cos(x+\delta) = \gamma' sin(x+\delta) + \gamma(\delta'+1)cos(x+\delta) \\ z'' = \gamma' cos(x+\delta) - \gamma(\delta'+1)sin(x+\delta) = -(1+\delta)\gamma sin(x+\delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta' = \rho sin^2(x+\delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \tag{2.39}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\delta'}{tg(x+\delta)} = -\rho sin(x+\delta)cos(x+\delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \tag{2.40}$$

Существуют предельные значения δ и γ при $x \to \infty$:

$$\delta(a) - \delta(x) = \int\limits_x^a \delta'(x)ds \tag{2.41}$$

Из вида δ' получаем $\lim_{a\to\infty} \delta(a) = \delta_\infty$

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.42}$$

Аналогично $\gamma(x) = \gamma_\infty\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Подставим в z:

$$z = \gamma_\infty sin\left(x + \delta_\infty\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.43}$$

Утверждение 2

Не существует двух разных функцийиспользуемс одинаковой асимптотикой Введём определения:

$r_\nu(x)$ - цилиндрическая функция,$y_\infty^{(1)}, y_\nu^{(1)}(x), y_\nu^{(2)}(x)$ - различные.

$$r_\nu(x) = y_\nu^{(1)}(x) - y_\nu^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.44}$$

То есть $r_\nu(x) = 0; y_\nu^{(1)}(x) = y_\nu^{(2)}(x)$.

Для определения δ и γ используем функции Ханкеля 1 и 2 рода:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu - iN_\nu(x) \tag{2.45}$$

– комплексно-сопряженные решения уравнения Бесселя

Или записав в другом виде:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right), N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right) \tag{2.46}$$

Основная характеристика функций Ханкеля -это асимптотическое поведение при $x \to \infty$. Их асимптотические представления выглядят следующим образом:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.47}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} e^{-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.48}$$

Расписав экспоненту по формуле Эйлера получим:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}}\left(cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.49}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}}\left(cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - isin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.50}$$

Таким образом асимптотические формулы для функций Бесселя будут иметь вид:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.51}$$

$$N_\nu(z) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{2.52}$$

D Графики функций Бесселя 1 и 2 рода

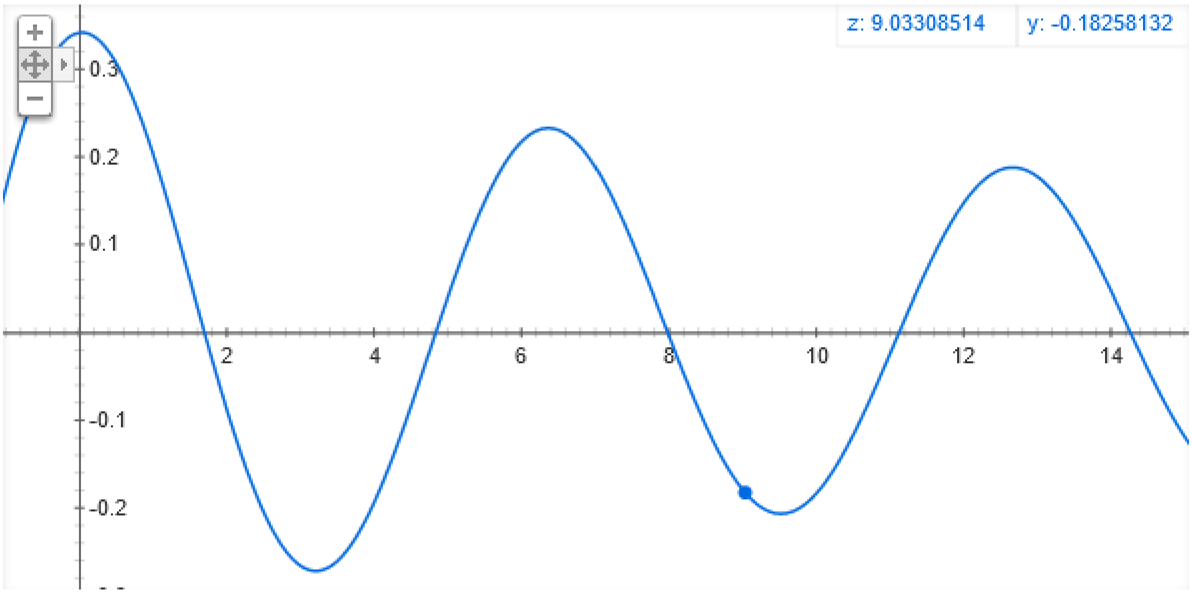


Рисунок функции Бесселя 1 рода

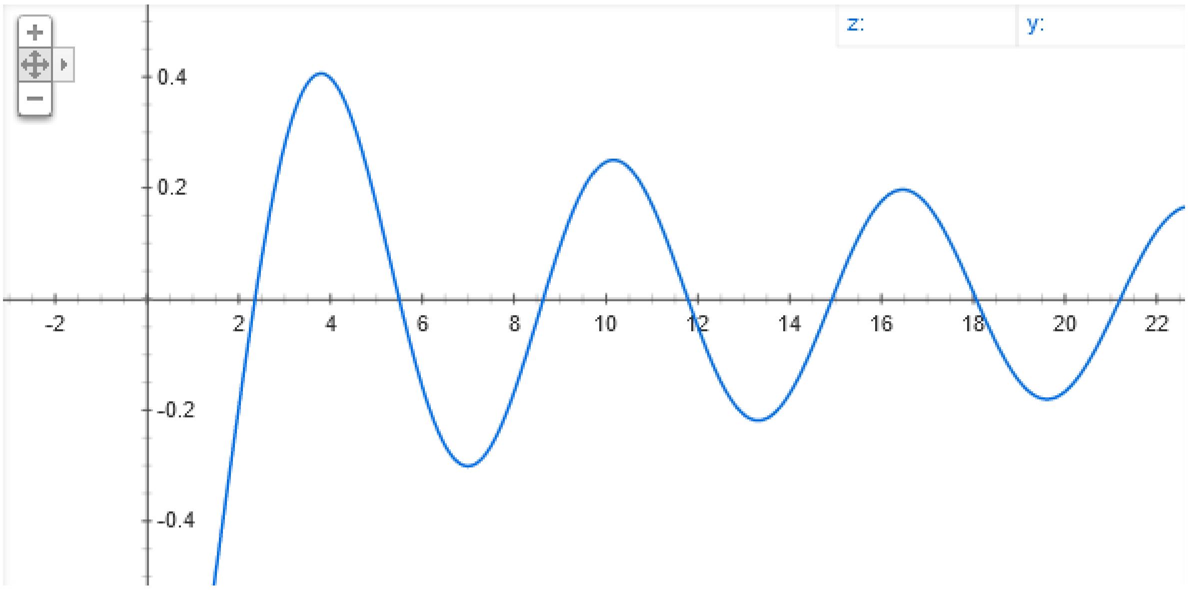


Рисунок функции Бесселя 2 рода

E Поиск собственных функций и собственных чисел стандартных краевых задач для уравнения Бесселя и их свойства. Вычисление квадрата нормы.

Пусть $\mu^2 = \alpha^2 - k^2$ тогда уравнения Бесселя можно записать в виде:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\mu^2 - \frac{2}{r^2}\right) R = 0 \tag{2.53}$$

Сведем к стандартной форме уравнения Бесселя, сделав замену независимой переменной $\xi = \mu r$. Тогда неизвестная функция $y(\xi) = y(\mu r) = R(r)$. Тогдауравнение примет вид:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}y(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) y(\xi) = 0 \tag{2.54}$$

А решение данного уравнения запишется в виде:

$$y(\xi) = C_1 J_n(\xi) + C_2 N_n(\xi) \tag{2.55}$$

Функция Неймана при $r \to 0$ неограниченно возрастает, поэтому нужно взять $C_2 = 0$. Теперь следует учесть граничные условия:

$$R(a) = 0$$
$$R'(a) = 0$$
$$R'(a) + qR(a) = 0$$

Для граничного условия 1 рода имеем: $R(r) = C_1 J_N(\mu r)$, при этом R'(a)=0. Обозначим нули производной функции Бесселя с индексом n через $\alpha_{nl}, l \in N$. Таким образом собственные числа равны:

$$\lambda_{nl}^2 = k^2 + \frac{\alpha_{nl}^2}{a^2} \tag{2.56}$$

Собственные функции:

$$R_{nl}(r) = J_n\left(\frac{\alpha_{nl}}{a} r\right) \tag{2.57}$$

Для граничного условия 2 рода имеем: $R(r) = C_1 J_N(\mu r)$ Обозначим нули производной функции Бесселя с индексом n через $\beta_{nl}, l \in N$ Таким образом собственные числа равны:

$$\lambda_{nl}^2 = k^2 + \frac{\beta_{nl}^2}{a^2} \tag{2.58}$$

Собственные функции:

$$R_{nl}(r) = J_n\left(\frac{\alpha_{nl}}{a} r\right) \tag{2.59}$$

Для граничного условия 3 рода имеем: $R(r) = C_1 J_N(\mu r)$. Обозначим нули производной функции Бесселя с индексом n через $\gamma_{nl}, l \in N$. образом собственные числа равны:

$$\lambda_{nl}^2 = k^2 + \frac{\gamma_{nl}^2}{a^2} \tag{2.60}$$

Собственные функции:

$$R_{nl}(r) = J_n\left(\frac{\gamma_{nl}}{a} r\right) \tag{2.61}$$

Свойства собственных чисел.

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений. Все они вещественны и все они неотрицательны.
   Доказательство: Посколькурешений уравнений $J_n(z) = 0$, $J_n'(z) = 0$ и $\rho J_N'(z) + hJ_N(z) = 0$ - счетное множество. Значит собственных чисел также счетное множество. Неотрицательность и вещественность следует из того, что функция Бесселя имеет вещественные и неотрицательные нули.

2. Каждому собственному значению соответствует единственная с точностью до константы собственная функция. Доказательство: Если предположить, что это не так и составить определитель Вронского длялинейно независимых функций, получаемых из одного собственного числа, то он обращается в нуль. Если он обращается в нуль хотябы в одной точке, тофункции линейно зависимы.

3. Собственные функции, соответствующие разным собственным числам, ортогональны с весом $\rho(x) = x$.
   Доказательство: Записав уравнение для двух функций Бесселя, умножив

первое уравнение на одну из них, второе на другую ипроинтегрировав, получим выражение:

$$(\lambda_k^2 - \lambda_s^2) \int_0^l rJ_n(\lambda_k r) J_n(\lambda_s r) dr = \left\{ x \left[J_n(\lambda_s r) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} J_n(\lambda_n r) - J_n(\lambda_n r) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} J_n(\lambda_s r) \right] \right\}_0^l$$

Правое выражение обращается в нуль. Это следует из того, из определения собственных чисел, это будет заметно из следующего выражения:

$$\int_0^l rJ_n(\lambda_k r) J_n(\lambda_s r) dr = \frac{l^2}{\lambda_s^2 - \lambda_n^2} \left[l\lambda_n J_n(l\lambda_s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_n} J_n(l\lambda_n) - l\lambda_s J_n(l\lambda_n) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_s} J_n(l\lambda_s) \right]$$

Правая часть этого выражения обращается в ноль по определению собственных чисел. Что и требовалось доказать. Также из последнего свойства следует выражение для квадрата нормы:

$$||J_n(\lambda_n r)||^2 = \frac{l^2}{2} \left\{ [J_n'(l\lambda_n)]^2 + (1 - \frac{n^2}{l^2\lambda_n^2}) J_n^2(l\lambda_n) \right\}$$

2 Многочлены Лежандра

A Построение собственных функций уравнения Лежандра

Уравнение Лежандра является частным случаем присоединённого уравнения Лежандра. Присоединённое уравнение Лежандра имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)y' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y\right) = 0 \tag{2.62}$$

В случае, когда $m = 0$ присоединённое уравнение Лежандра будет называться уравнение Лежандра. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)y'\right) + \lambda y = 0 \tag{2.63}$$

Будем искать решение уравнения в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.64}$$

Подставляя, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) + 2n - \lambda)a_n)x^n = 0 \tag{2.65}$$

Отсюда получим рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n \tag{2.66}$$

Далее, потребовав ограниченность искомой функции при $x \in [1, 1]$, получим, что ряд-решение должен сходиться при $|x| = 1$. Но при $n \to +\infty$. Однако, можно выбрать $\lambda = k * (k+1)$, где $k \in N \cup 0$,чтобы ряд обрывался. В этом случае $a_{k+2} = a_{k+4} = ... = a_{k+p} = ...$ =0, а a_{k1}, a_{k3}, a_{k5} и так далее, можно взять нулевыми. Тогда ряд превращается в конечную сумму $P_k(x) = a_k x^k + a_{k2} x^{k2} + ... + a_1 x + a_0$. Если k четное, то эта сумма по четным степеням, если k - нечетное, то эта сумма по нечетным степеням. Если потребовать, чтобы $P_k(1) = 1$, то полученный полином называется полиномом Лежандра.

Свойства полиномов Лежандра

Приведем несколько теорем, являющимися обоснованием того факта, что полиномы Лежандра -это множество всех нетривиальных собственных функций краевой задачи $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)y'\right)+\lambda y=0$ на отрезке $[1,1]$. Докажем, что других нетривиальных собственных функций быть не может.

Теорема 1.

Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $x\in[1,1]$, то есть $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = 0$, если $n\neq k$.

Доказательство: Напишем два уравнения, которым удовлетворяют полиномы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)P_n'\right)+\lambda P_n=0 \tag{2.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)P_k'\right)+\lambda P_k=0 \tag{2.68}$$

Первое из них умножим на P_k, второе умножим на P_n. Полученные результаты вычтем одиниз другого и полученную разность проинтегрируем:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)(P_n'P_k-P_nP_k'))\right)dx=(k-n)(k+n+1)\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx \tag{2.69}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx=\frac{1}{(k-n)(k+n+1)}(1-x^2)(P_n'P_k-P_nP_k')|_{-1}^{1}=0 \tag{2.70}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Всякое решение уравнения Лежандра, отвечающее $\lambda\neq k*(k+1)$ и непрерывное на отрезке $[1,1]$, ортогонально всякому многочлену Лежандра $P_n(x)$ для любого целого неотрицательного n.

Доказательство: Получается аналогично теореме 1, если вместо одного из полиномов Лежандра использовать некоторую функцию $y(x)$,являющуюся решением уравнения Лежандра.

Теорема 3.

Всякая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[1, 1]$ и ортогональная на промежутке $[1, 1]$ всем многочленам Лежандра, тождественно равна нулю, $f(x) = 0$.

Доказательство: Следует из того, что любой полином произвольной степени может быть представлен в виде суммы полиномов Лежандра. Значит система $P_n(x)$ полиномов Лежандра является полной в силу того, что $M_n(x)$, где $M_n(x)$-произвольный многочлен степени n, является полной. Значит по определению полной системы имеем то, что требуется доказать. Следовательно, многочлены Лежандра можно рассматривать как собственные функции следующей краевой задачи: найти значения параметра λ и отвечающие им решения уравнения $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)y'\right) + \lambda y = 0$, ограниченные и непрерывные на отрезке $[1, 1]$.

Построение собственных функций присоединенного уравнения Лежандра

По найденным решениям уравнения Лежандра найдем решения присоединенного уравнения Лежандра при $m \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)y'\right) + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0 \tag{2.71}$$

Сделаем замену неизвестной функции вида:

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\psi(x) \tag{2.72}$$

Подставим:

$$(1-x^2)\psi'' - 2(m+1)x\psi' + (\lambda - m(m+1))\psi = 0 \tag{2.73}$$

Если продифференцировать уравнение Лежандра mраз, получим:

$$(1-x^2)(y^{(m)})'' - 2(m+1)x(y^{(m)})' + (\lambda - m(m+1))y^{(m)} = 0 \tag{2.74}$$

Сравним два последних выражения. Решением будет функция $\psi(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_k(x)$ при $\lambda = k * (k+1)$. Здесь $m \leq k$, так как при $m > k$ решение $\psi(x)$ будет тривиальным. Значит решения присоединенного уравнения Лежандра имеют следующий вид функций и собственных чисел:

$$(1-x^2)(y^{(m)})'' - 2(m+1)x(y^{(m)})' + (\lambda - m(m+1))y^{(m)} = 0 \qquad (2.75)$$

Полученные решения -это и естьприсоединенные полиномы Лежандра.

Свойства присоединенных полиномов Лежандра

Рассмотрим теоремы, гарантирующие то, что присоединенные полиномы Лежандра образуют всевозможное множество собственных функций соответствующей краевой задачи.

Теорема 1.

Других, кроме присоединенных полиномов Лежандра, ограниченных на $[1, 1]$ решений присоединенного уравнения Лежандра не существует.

Теорема 2.

Присоединенные полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $x \in [1, 1]$.

Теорема 3.

Система присоединенных функций Лежандра $P_s^m(x)$ является замкнутой при любом фиксированном $m \leq k$. Любая другая функция, являющаяся решением присоединенного уравнения Лежандра, ортогональна всем присоединенным полиномам Лежандра для соответствующей краевой задачи.

Это означает, если есть решение соответствующего уравнения, оно тривиальное. Следовательно, присоединенные многочлены Лежандра можно рассматривать как собственные функции следующей краевой задачи: найти значения параметра λ и отвечающие им решения уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)y'\right) + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0 \qquad (2.76)$$

Ограниченные и непрерывные на отрезке $[1, 1]$.

B Производящая функция полиномов Лежандра

Рассмотрим функцию двух переменных:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \tag{2.77}$$

Функция является дифференцируемой в окрестности $t = 0$ исправедливо разложение по степеням t:

$$\Psi(x,t) = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + ... + P_n(x)t^n + ... \tag{2.78}$$

Коэффициенты $P_i(x)$ это многочлены Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}|_{t=0} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right) \tag{2.79}$$

Функция $\psi(x,t)$ называется производящей функцией полиномов Лежандра.

C Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра

Получим рекуррентную формулу для полиномов Лежандра. Ранее получили формулу для $P_n(x)$. Пользуясь ей и производящей функцией, можно получить следующие формулы:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{2.80}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}(P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) \tag{2.81}$$

Вычисление квадрата нормы собственных функций

Вычислим квадрат нормы полиномов Лежандра:

$$||P_n||^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} P_n(\frac{2n-1}{n}xP_{n-1} - \frac{n-1}{n}P_{n-2})dx = \tag{2.82}$$

$$= \frac{2n-1}{n} \int\limits_{-1}^{1} x P_n P_{n-1} dx = \frac{2n-1}{n} \int\limits_{-1}^{1} P_{n-1} (\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} - \frac{n}{2n+1} P_{n-1}) dx = \tag{2.83}$$

$$= \frac{2n-1}{2n+1} \int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}^2 dx \tag{2.84}$$

$$||P_n||^2 = \frac{2n-1}{2n+1} ||P_{n-1}||^2 \tag{2.85}$$

Решая рекуррентное уравнение, получим:

$$||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1} \tag{2.86}$$

Далее вычислим квадрат нормы присоединенных полиномов Лежандра, в итоге получим:

$$||P_n^m||^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \tag{2.87}$$

Графики полиномов Лежандра и присоединенных полиномов Лежандра

Формулы для полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1 \tag{2.88}$$

$$P_1(x) = x \tag{2.89}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{2.90}$$

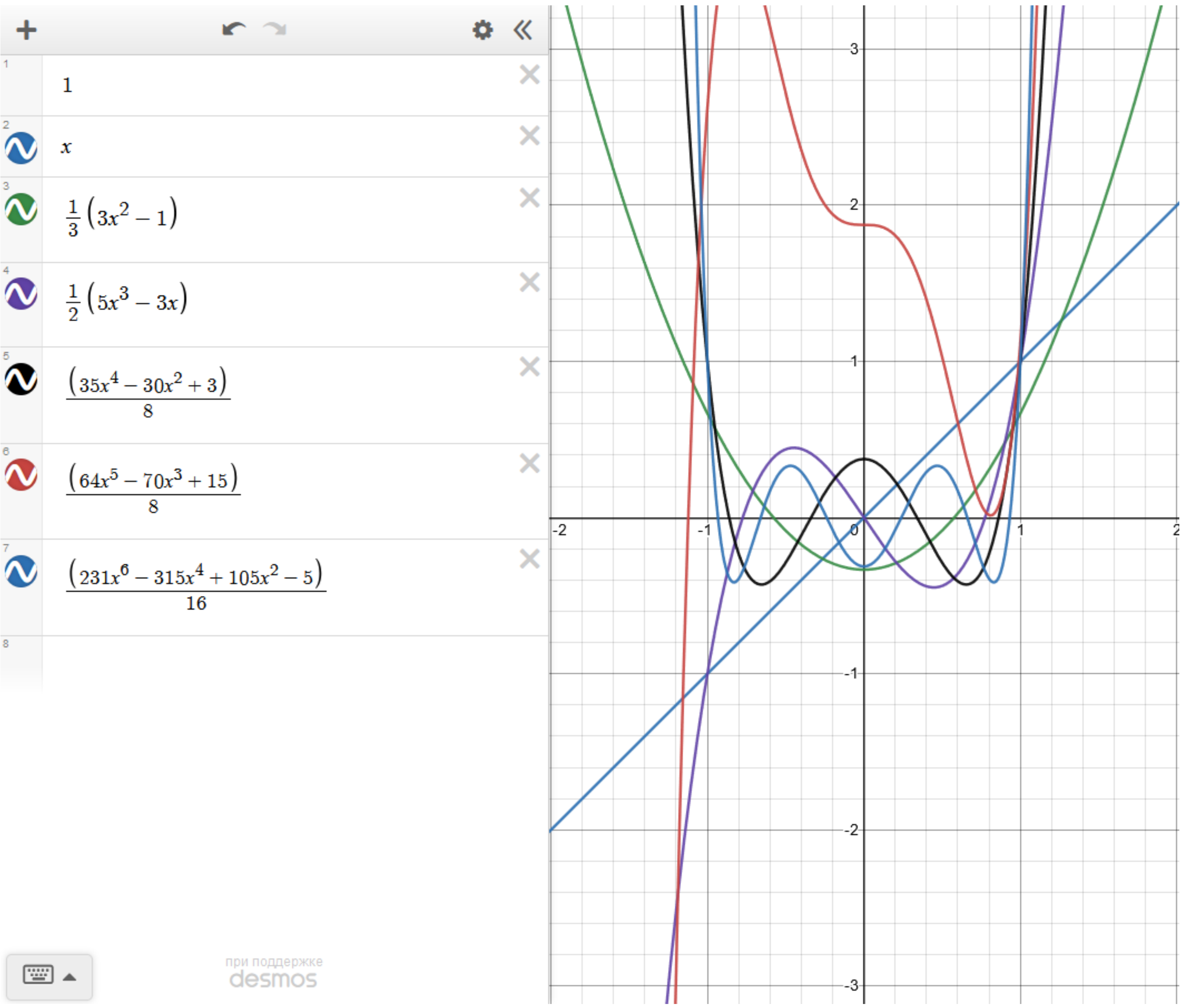
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{2.91}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} \tag{2.92}$$

$$P_5(x) = \frac{64x^5 - 70x^3 + 15x}{8} \tag{2.93}$$

$$P_6(x) = \frac{231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5}{16} \tag{2.94}$$

Их графики будут иметь вид:



Формулы для присоединённыхполиномов Лежандра ($m = 1$):

$$P_1^1(x) = \sqrt{(1-x^2)} \tag{2.95}$$

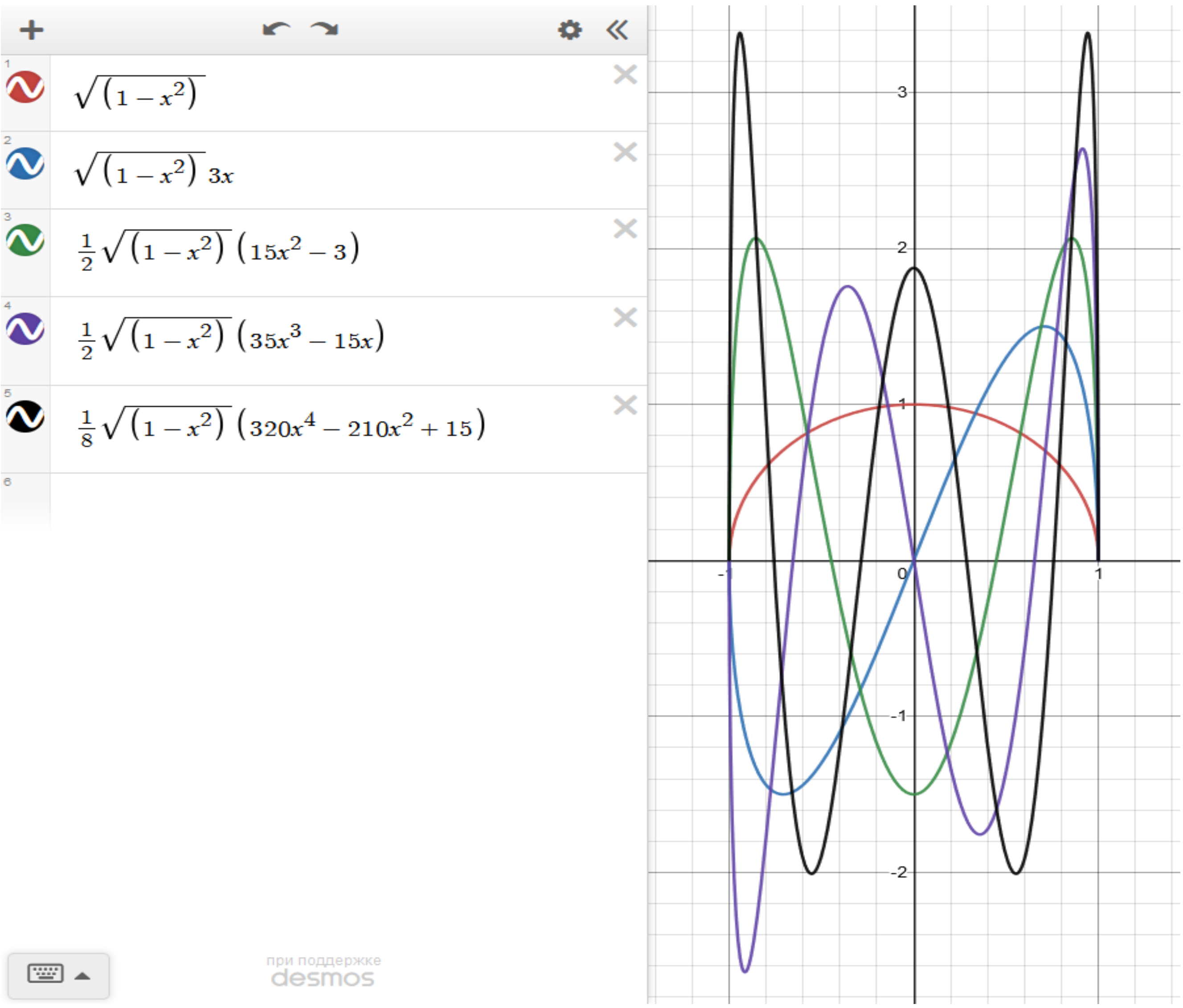
$$P_2^1(x) = \sqrt{(1-x^2)3x} \tag{2.96}$$

$$P_3^1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)}(15x^2-3) \tag{2.97}$$

$$P_4^1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)}(35x^3-15x) \tag{2.98}$$

$$P_5^1(x) = \frac{1}{8}\sqrt{(1-x^2)}(320x^4-210x^2+15) \tag{2.99}$$

Их графики будут иметь вид:



D Формальное разложение в ряд по функциям Бесселя и полиномам Лежандра

Теорема 1.

Пусть некоторую функция $f(x)$ вещественного переменного x можно представить равномерно сходящимся функциональным рядом.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}), \tag{2.100}$$

Коэффициенты имеют вид:

$$a_k = \frac{2}{[lJ'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2} \int\limits_0^1 x f(x) J_\nu(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}) dx \tag{2.101}$$

Ряд с этими коэффициентами называется рядом Фурье-Бесселя. Разложим в ряд функцию x при $\nu = 0$ на отрезке $[0, 1]$ при $n = 5$.

$$x \approx \sum_{k=1}^{n} a_k J_0(\alpha_k^0 x) \tag{2.102}$$

В этом случае $J_1(x) = J'_0(x)$. Коэффициенты будут равны:

$$a_1 = \frac{2}{[J_1(\alpha_1^0)]^2} \int\limits_0^1 x^2 J_0(\alpha_1^0 x) dx = 0.817464 \tag{2.103}$$

$$a_2 = \frac{2}{[J_1(\alpha_2^0)]^2} \int\limits_0^1 x^2 J_0(\alpha_1^0 x) dx = -1.13348 \tag{2.104}$$

$$a_3 = \frac{2}{[J_1(\alpha_3^0)]^2} \int\limits_0^1 x^2 J_0(\alpha_1^0 x) dx = 0.798288 \tag{2.105}$$

$$a_4 = \frac{2}{[J_1(\alpha_4^0)]^2} \int\limits_0^1 x^2 J_0(\alpha_1^0 x) dx = -0.74701 \tag{2.106}$$

$$a_5 = \frac{2}{[J_1(\alpha_5^0)]^2} \int\limits_0^1 x^2 J_0(\alpha_1^0 x) dx = 0.631544 \tag{2.107}$$

Получили аппроксимациюфункции $y = x$ функциями Бесселя.