ЛЕКЦИЯ 11

Задача Коши для волнового уравнения. Формула Пуассона.

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + F(x,t). \tag{1}$$

Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3. \tag{2}$$

F, φ, ψ – заданные функции.

Решением уравнения (1) в некоторой области при $t > 0$ называется удовлетворяющая уравнению функция u, непрерывная вместе со своими производными, входящими в уравнение во всех точках рассматриваемой области и для всех $t > 0$.

Рассмотрим частные решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right), \tag{3}$$

обладающие центральной симметрией относительно некоторой точки x^0, то есть решения вида

$$u = u(r,t),$$

где $r = |x - x^0|$ – расстояние между точками x и x^0.

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

в сферической системе координат (r, ϕ, θ) с центром в точке x^0 имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Поскольку $u = u(r,t)$, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r})$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru).$$

Положим $v = ru$. Тогда для функции v получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \tag{4}$$

Если функция u ограничена при $r = 0$, то функция v при $r = 0$ обращается в ноль. Поэтому задача Коши для уравнения (3) с начальными данными

$$u(r,0) = \varphi(r),\ \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = \psi(r) \tag{5}$$

сводится к задаче о колебаниях полуограниченной струны ($r \geq 0$) с закрепленным концом $r = 0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},\ v(r,0) = r\varphi(r),\ \frac{\partial v}{\partial t}(r,0) = r\psi(r),\ v(0,t) = 0.$$

Уравнения характеристик уравнения (4) запишем в виде

$$t \pm \frac{r}{a} = C,$$

общее решение уравнения (4) тогда

$$v(r,t) = f(t - \frac{r}{a}) + g(t + \frac{r}{a}),$$

где f и g – произвольные дифференцируемые функции. Следовательно,

$$u(r,t) = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{a}) + \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{a}).$$

Частные решения уравнения (3)

$$u_1 = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{a}),\ u_2 = \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{a})$$

называются **сферическими волнами**, u_1 – расходящаяся сферическая волна, u_2 – сходящаяся в точку $r = 0$ сферическая волна, a – скорость распространения волн.

Таким образом, общее решение уравнения (3) в случае центральной симметрии представляется в виде суммы двух сферических волн.

Учитывая условие $v(0,t) = 0$, находим

$$0 = f(t) + g(t),$$

то есть

$$u(r,t) = \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{a}) - \frac{1}{r} g(t - \frac{r}{a}). \tag{6}$$

Получаем также

$$u(0,t) = \lim_{r \to 0} \frac{g(t + r/a) - g(t - r/a)}{r} = \frac{2}{a} g'(t). \tag{7}$$

Метод усреднения

Рассмотрим в неограниченном пространстве задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3,\ t > 0, \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathrm{R}^3. \tag{9}$$

Предположим, решение u этой задачи существует, и найдём для него интегральное представление.

Пусть x^0 – фиксированная точка. Введем сферическую систему координат (r, θ, ϕ) с началом в точке x^0. Пусть S_r – сфера радиуса r с центром в точке x^0, $d\gamma_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ – элемент площади сферы.

Рассмотрим функцию $\bar{u}$, являющуюся средним значением u на S_r.

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u d\gamma_r.$$

Координаты точек сферы S_r могут быть выражены по формулам

$$x_1 = x_1^0 + r\alpha_1,\ x_2 = x_1^0 + r\alpha_2,\ x_3 = x_3^0 + r\alpha_3,$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – направляющие косинусы радиусов сферы,

$$\alpha_1 = \sin\theta\cos\phi,\ \alpha_1 = \sin\theta\sin\phi,\ \alpha_3 = \cos\theta.$$

Когда точка x описывает сферу S_r, точка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ описывает сферу S_1 радиуса, равного единице, с центром в начале координат, элементы площади сфер связаны соотношением $d\gamma_r = r^2 d\gamma_1$. Таким образом,

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r} u d\gamma_r = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} u(x^0 + r\alpha, t) d\gamma_1. \tag{10}$$

Из (10) видно, что

$$u(x^0, t_0) = \bar{u}(0, t_0). \tag{11}$$

Покажем, что функция $v = r\bar{u}(r,t)$, обладающая сферической симметрией относительно точки x^0, удовлетворяет уравнению (4).

Проинтегрируем уравнение (8) по объёму шара D_r, ограниченного сферой S_r:

$$\iiint_{D_r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = a^2 \iiint_{D_r} \Delta u dx. \tag{12}$$

Для преобразования правой части равенства используем формулу, являющуюся следствием формулы Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_{\Omega} \Delta u dx = \iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\gamma,$$

где Ω – область, ограниченная достаточно гладкой поверхностью Γ, функция u непрерывна вместе со своими первыми производными в $\bar{\Omega}$ и имеет непрерывные вторые производные в Ω, $\partial/\partial\nu$ – производная по направлению внешней нормали ν к поверхности Γ. Полагаем в формуле $\Omega = D_r$, $u = u(x,t)$. Нормаль к S_r направлена по радиусу, так что

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\iiint_{D_r} \Delta u(x,t) dx = \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} d\gamma_r = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint_{S_1} u(x^0 + r\alpha, t) d\gamma_1 = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}. \tag{13}$$

В левой части равенства (12) перейдём к сферическим координатам с началом в точке x^0:

$$\iiint_{D_r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 d\rho \iint_{S_1} u(x^0 + \rho\alpha, t) d\gamma_1 = 4\pi \int_0^r \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(\rho, t)\rho^2 d\rho. \tag{14}$$

Таким образом, подставляя (13) и (14) в (12), получаем

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(\rho, t)\rho^2 d\rho = a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по r и полагая $v = r\bar{u}$, получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bar{u}) = r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

то есть справедливо (4).

Итак, $\bar{u}$ – решение волнового уравнения, обладающее сферической симметрией относительно точки x^0,

$$r\bar{u}(r,t) = g(t+\frac{r}{a}) - g(t-\frac{r}{a}), \tag{15}$$

$$u(x^0,t) = \bar{u}(0,t) = \frac{2}{a}g'(t),$$

где g – некоторая функция. Выразим g через начальные функции φ и ψ. Дифференцируем (15) по r и t:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}) = \frac{1}{a}g'(t+\frac{r}{a}) + \frac{1}{a}g'(t-\frac{r}{a}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}) = g'(t+\frac{r}{a}) - g'(t-\frac{r}{a}),$$

то есть

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}) + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}) = \frac{2}{a}g'(t+\frac{r}{a}) = u(x^0, t+\frac{r}{a}).$$

Пусть $t=0$, $r=at_0$. Используя определение $\bar{u}$, получаем

$$u(x^0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint_{S_1} ru(x^0+r\alpha,0)d\gamma_1 + \frac{1}{a}\iint_{S_1} r\frac{\partial}{\partial t}u(x^0+r\alpha,0)d\gamma_1\right]\Bigg|_{r=at_0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\iint_{S_1} t_0u(x^0+at_0\alpha,0)d\gamma_1 + t_0\iint_{S_1}\frac{\partial}{\partial t}u(x^0+at_0\alpha,0)d\gamma_1\right]. \tag{16}$$

Подставим в (16) начальные данные и опустим индекс 0 при x^0, t_0:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_1} t\varphi(x+at\alpha)d\gamma_1 + t\iint_{S_1}\psi(x+at\alpha)d\gamma_1\right] = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi}{at}d\gamma_{at} + \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}}\frac{\psi}{at}d\gamma_{at}.$$

Формула (17) называется **формулой Пуассона**. Вводя обозначение

$$M_r[\omega] = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}\omega d\gamma_r = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_r}\omega d\gamma_1$$

для среднего значения функции ω на сфере S_r радиуса r с центром в точке x, формулу Пуассона можно переписать в виде

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}tM_{at}[\varphi] + tM_{at}[\psi].$$

Положим, далее,

$$u_\psi(x,t) = tM_{at}[\psi],\ u_\varphi(x,t) = tM_{at}[\varphi].$$

Тогда решение задачи (8), (9) принимает вид

$$u = \frac{\partial}{\partial t}u_\varphi + u_\psi. \tag{18}$$

Из формулы Пуассона, полученной в предположении существования решения задачи (8), (9), следует единственность указанного решения. В самом деле, предполагая, что задача Коши имеет два решения u_1 и u_2, получим для их разности начальные условия $\varphi = 0$

и $\psi = 0$. Применяя к функции $u_1 - u_2$ предыдущие рассуждения, приходим к формуле (17), в которой $\varphi = 0$, $\psi = 0$ и, следовательно, $u_1 - u_2 \equiv 0$.

Покажем, что функция u, определяемая формулой Пуассона, на самом деле даёт классическое решение задачи Коши, если φ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а ψ – до второго порядка включительно. Для этого докажем сначала, что функция

$$u_\omega = tM_{at}[\omega] = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}} \omega d\gamma_{at}$$

удовлетворяет уравнению (8) при любой дважды непрерывно дифференцируемой функции ω.

Поскольку

$$u_\omega(x,t) = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1} \omega(x + at\alpha) d\gamma_1,$$

функция u_ω имеет непрерывные производные до второго порядка включительно,

$$\Delta u_\omega = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1} \Delta\omega(x + at\alpha)d\gamma_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}} \Delta\omega d\gamma_{at}. \tag{19}$$

Дифференцируя по t под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\omega = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} \omega(x+at\alpha)d\gamma_1 + \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta_1}a\alpha_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\eta_2}a\alpha_2 + \frac{\partial\omega}{\partial\eta_3}a\alpha_3\right)d\gamma_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} \omega(x+at\alpha)d\gamma_1 + \frac{at}{4\pi}\iint_{S_1} (\operatorname{grad}\omega, \alpha)d\gamma_1 = \frac{u_\omega}{t} + \frac{1}{4\pi at}\iint_{S_{at}} (\operatorname{grad}\omega, \alpha)d\gamma_{at},$$

где $\eta = x + at\alpha$. Применяя формулу Остроградского, находим

$$\iint_{S_{at}} (\operatorname{grad}\omega, \alpha)d\gamma_{at} = \iint_{S_{at}} \frac{\partial\omega}{\partial\nu}d\gamma_{at} = \iiint_{D_{at}} \Delta\omega d\eta,$$

D_{at} – шар радиуса at с центром в точке x. Обозначим полученный интеграл через I.

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\omega = \frac{u_\omega}{t} + \frac{I}{4\pi at}.$$

Дифференцируя это выражение по t, получим

$$\frac{\partial^2 u_\omega}{\partial t^2} = -\frac{u_\omega}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u_\omega}{t} + \frac{I}{4\pi at}\right) - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Далее,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{D_{at}} \Delta\omega d\eta = \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_1}\int_0^{at} r^2\omega(x + r\alpha)drd\gamma_1 = a\iint_{S_{at}} \omega d\gamma_{at}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\omega = \frac{1}{4\pi t}\iint_{S_{at}} \omega d\gamma_{at}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\omega = a^2\Delta u_\omega,$$

то есть u_ω удовлетворяет уравнению (8). Нетрудно убедиться, что если функция ω обладает производными до третьего порядка включительно, функция $\partial u_\omega/\partial t$ также является решением уравнения (8). Следовательно, функция u, определенная формулой (18) удовлетворяет волновому уравнению.

Получаем далее

$$u_\omega(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\omega(x,0) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\omega(x)d\gamma_1 = \omega(x),$$

то есть

$$u(x,0) = \varphi(x).$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varphi = a^2\Delta u_\varphi = \frac{t}{4\pi}\int_{S_1}\Delta\varphi(x+at\alpha)d\gamma_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

Таким образом, выполнены начальные условия (9). Тем самым доказано, что формула Пуассона (17) определяет решение задачи Коши (8), (9).

Из формулы (17) непосредственно видна непрерывная зависимость решения от начальных данных. Если изменить начальные функции φ и ψ так, чтобы при этом они сами и их первые производные достаточно мало изменились, то при этом мало изменится и функция u, дающая решение задачи Коши. При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения t, если область, на которой задаются начальные функции, бесконечна.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.