Теория управления

Занятие № 7 Функциональная модель „вход-выход" линейной динамической системы. Понятие линейного динамического звена. Различные формы описания линейных динамических звеньев, коэффициент передачи 1

2. Материал по новой теме - Теория 3

2.1. Функциональная модель линейной динам-й системы, линейное динамическое звено

До этого, говоря о динамич-ой системе, в первую очередь интересовались ее состоянием. С позиции же функциональной модели линейные динамич-е системы рассматриваются как преобразователи сигналов. Ради определенности, будем всё рассматривать на примере лин. дин. систем (ЛДС) с непрерывным временем (аналогично можно рассмотреть ЛДС с дискретным временем). Пусть $x(t)$ - входной сигнал (он м.б. как скалярным, так и векторным), а $y(t)$ - выходной сигнал (скалярный или векторный). Представим ЛДС в виде преобразователя („черного ящика")

(*) $y(t) \leftarrow \boxed{\mathcal{L}} \leftarrow x(t)$, где $\mathcal{L}$ - линейный оператор вида $\boxed{y(t) = \mathcal{L}(x(\tau),\ \tau \le t)}$. (**)

Это означает, что значение выхода в момент t может зависеть не только от $x(t)$, но и от значений входного сигнала $x(\tau)$ в прошлом (при $\tau \le t$). Заметим, что оператор $\mathcal{L}$ может быть алгебраическим, дифференциальным, интегральным, интегро-дифференциальным и т.п. Но он обязательно д.б. линейным. Лин. Дин. Сист., представленная в виде функциональной модели „вход-выход" в форме (*) (**) называется линейным динамич-м звеном.

2.2. Способы описания линейных динам-х звеньев (на примере систем с непрер-м временем)

Сегодня ограничимся случаем систем с одним входом ($x(t)$ - скаляр) и одним выходом ($y(t)$ - скаляр)

1. Описание в виде диффер-го ур-ия «вход-выход»

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y^{(1)} + b_0 y = \qquad (1)$$
$$= a_m x^{(m)} + \dots + a_1 x^{(1)} + a_0 x$$

Ограничиваемся случаем, когда коэффициенты не зависят от времени. Можно расширить класс моделей, рассматривая системы с запаздыванием, например, $\dot{y}(t) + y(t-\tau) = x(t)$. Но мы на практических занятиях такие рассматривать не будем.

В описании (1) считается $n \geq m$, $x(t)$ - заданный сигнал.

2. Описание с помощью коэффициента передачи

Определение. Коэффициентом передачи Лин. Дин. Звена (ЛДЗ) при скалярных входе и выходе называют отношение изображения выхода к изображению входа, вычисленные при нулевых начальных условиях, т.е. $K(p) = \left.\dfrac{y^*(p)}{x^*(p)}\right|_{н.у.=0}$ (2)

Отсюда следует, что $\boxed{\text{при Н.У.}=0 \quad y^*(p) = K(p)\, x^*(p)}$ (3)

Т.е. коэффициент передачи — это множитель при изображении входного сигнала, когда изображение выхода выражено через входное.

Коэффициент передачи кодирует (структуру) связь выхода со входом. Коэффиц-т передачи не учитывает начальные условия, однако позволяет определить выход и при Н.У. $\neq 0$. (Это будет пояснено позднее!).

Для ЛДС (1) коэффициент передачи будет равен отношению двух полиномов

$$K(p)=\frac{a_m p^m+\dots+a_1 p^1+a_0}{b_n p^n+\dots+b_1 p^1+b_0}=\frac{A_m(p)}{B_n(p)} \quad (m\leq n) \qquad (4)$$

Замечание. Коэффициент передачи является эквивалентной формой описания ЛДЗ (1) за исключением случаев, когда полиномы $A_m(p)$ и $B_n(p)$ имеют общие корни.

Приведу пример: ЛДЗ вида $\dot{y}+y=x(t)$ (*V) имеет $K(p)=\frac{1}{p+1}$. Продифференцируем (*V), получим другое ЛДЗ с уравнением вида $\ddot{y}+\dot{y}=\dot{x}(t)$ (VV)

Очевидно, что решение ур-я (*V) удовлетворит и (*V) (если, конечно, $x(t)$ дифференцируема), однако обратное неверно.

В то же время, коэффициент передачи для (VV) будет $K(p)=\frac{p}{p^2+p}=\frac{1}{p+1}$, т.е. сокращение на p привело к тому же коэффициенту передачи, что и в случае (*V), хотя ЛДЗ были разными! Т.е. сокращение не всегда допустимо. В практических задачах доля таких особых случаев близка к нулю.

3. Эквивалентной формой описания коэффициента передачи являются функции отклика

(А) отклик на $\delta(t)$ – дельта-функцию Дирака называют импульсной переходной функцией

Договоримся обозначать ее как $\psi(t)$:

$$x=\delta(t) \longrightarrow \boxed{K(p)} \xrightarrow{\psi(t)}$$ Т.к. $\delta(t) \risingdotseq 1$, то

$\boxed{\psi^*(p)=K(p)\cdot 1}$ $\Rightarrow$ Импульсная переходная функция $\psi(t)$ совпадает с оригиналом коэф-та передачи!

Важное следствие. В общем случае при Н.У.=0 (а как мы далее увидим, и не только) $y^*(p)=K(p)X^*(p)$, но $K(p) \risingdotseq \psi(t) \Rightarrow K(p)=\psi^*(p)$.

Следовательно $y^*(p)=\psi^*(p)\cdot X^*(p)$.

Но произведению изображений соответствует свертка оригиналов. Значит:

$$\boxed{y(t)=\int_0^t \psi(t-\tau)x(\tau)d\tau} -$$

– это интеграл Дюамеля. Он позволяет, зная только $\psi(t)$, определить выход ЛДЗ при любом входе!

<u>Обратите внимание</u>: Если подать на вход ЛДС импульс в виде δ-функции $\delta(t)$ и записать отклик $\psi(t)$, то можно полностью восстановить коэф-т передачи $K(p)$, а значит и дифференциальное уравнение, описывающее эту ЛДС!

Но как подать на вход δ-функцию? Оказывается, её можно заменить на функцию $1(t)$ – Хевисайда. Подадим на вход $x(t)=1(t)$, выходной сигнал обозначим $h(t)$. Его называют <u>функцией переходной проводимости</u> $1(t) \longrightarrow \boxed{K(p)} \longrightarrow h(t)$

$1(t) \div \frac{1}{p} \Rightarrow h^*(p) = K(p)\cdot\frac{1}{p}$. Но операции деления на p соответствует взятие интеграла с переменным <u>верхним пределом</u> t:

$\Rightarrow$ т.к. $K(p) \div \psi(t)$, то $\boxed{h(t) = \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau}$,

Если продифференцировать, то $\boxed{\dot{h}(t) = \psi(t)}$

<u>Вывод</u>: функции отклика $\psi(t)$ и $h(t)$ являются эквивалентными способами описания коэффициента передачи

(4.) Частотное описание, годограф

Изучим отклик на периодический входной сигнал частоты ω [рад/сек].

Соединим через мнимую единицу две гармоники: $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$.

$$\cos\omega t + i\sin\omega t = e^{i\omega t}$$

Этот комплексный сигнал подадим на вход:

$$\xrightarrow{e^{i\omega t}} \boxed{\mathcal{K}(p)} \xrightarrow{y(t)}$$

Рассмотрим общий случай, когда полюса коэффициента передачи $p_1\, p_2 \dots p_n$ являются <u>некратными</u>(!) (Случаи кратных полюсов можно считать пределенными для случаев некратных, таким образом множество всех возможных ситуаций является замыканием множества некратных полюсов)

Т.к. $e^{i\omega t} \risingdotseq \frac{1}{p-i\omega}$, то изображение выхода

$$y^*(p) = \mathcal{K}(p)\frac{1}{p-i\omega} = \frac{A_m(p)}{(p-i\omega)\prod\limits_{k=1}^{n}(p-p_k)} \underset{\text{для некратных } p_k}{=} \frac{C_0}{p-i\omega} + \sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{p-p_k}$$

Умножая обе части на $(p-i\omega)$ и полагая $p=i\omega$. Находим $C_0 = \mathcal{K}(i\omega)$. Итак:

$$y^*(p) = \mathcal{K}(i\omega)\frac{1}{p-i\omega} + \sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{p-p_k} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \underbrace{\mathcal{K}(i\omega)e^{i\omega t}}_{\substack{\text{Вынужденные}\\ \text{колебания}\\ \text{на частоте } \omega}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}}_{\substack{\text{Собственные}\\ \text{движения}\\ \text{системы}}}$$

Если Л.Д.З. асимптотически устойчиво, то для всех полюсов $Re(p_k) < 0 \Rightarrow$ Тогда $\Rightarrow$ Собственные движения $\underset{t\to\infty}{\to} 0$

Вывод: Для ЛДЗ с выполнением условия $Re(p_k)<0 - \forall k$ (9)

Отклик $y(t)$ на периодическое воздействие частоты ω будет стремиться при $t\to\infty$ к периодическому сигналу такой же частоты ω, но другой амплитуды и фазы:

$$y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \boxed{K(i\omega)} e^{i\omega t}$$

Эту величину называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)

Представим $K(i\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$,
где $A(\omega)=|K(i\omega)|$; $\varphi(\omega)=\arg K(i\omega)$ — модуль и аргумент. (Если к реальной ЛДС подключить на входе генератор переменной частоты ω, на выходе можно прибором измерять значения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для разных частот ω)

$A(\omega)$ называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а $\varphi(\omega)$ — фазово-частотной (ФЧХ).

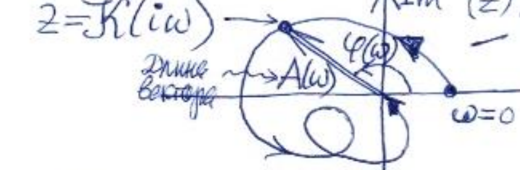
! АЧХ показывает отношение амплитуды вынужденных колебаний на выходе к амплитуде входных колебаний

! ФЧХ показывает фазовый сдвиг вынужденных колебаний на выходе по отношению к входным колебаниям:

Вынужденные колебания ЛДЗ при периодическом возбуждении вида $e^{i\omega t}$:

$$K(i\omega)e^{i\omega t} = \underbrace{|K(i\omega)|}_{A(\omega)}\, e^{i(\omega t + \underbrace{\arg K(i\omega)}_{\varphi(\omega)})}$$

Изображение $K(i\omega)$ (т.е. АФЧХ) на комплексной плоскости называют годографом ЛДЗ.



годограф строится для $\omega \in [0; \infty)$

Поскольку замена $i\omega$ на p позволяет по $K(i\omega)$ восстановить $K(p)$, а значит и уравнения ЛДС. Следовательно, кривая годографа (с привязкой к значениям ω вдоль кривой) несет полную информацию о ЛДЗ (!) и является его эквивалентным описанием.

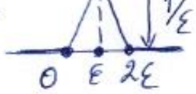
Замечание. 1. Описание ЛДС в форме коэф. передачи (передаточной функции) $K(p)$ абстрагирует нас от физической сущности устройства и позволяет увидеть его функциональные возможности.

2. Функции отклика и частотные описания позволяют изучить характеристики ЛДЗ как преобразователя сигналов

2.3. Определение выхода ЛДЗ с использованием $K(p)$ при Н.У.$\neq 0$

(A.) Этот вопрос решается с использованием обобщенных функций порядков $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$: $\delta(t), \delta_1(t), \delta_2(t), \ldots$, где $\delta(t)$ – δ-функция Дирака, а $\delta_k(t)$ – ее обобщенная производная k-го порядка.

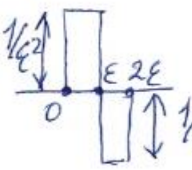
Их точное введение — аксиоматическое. Но можно их себе представить, как предел при $\varepsilon \to 0$ семейства обычных функций. Например пусть $\delta(t,\varepsilon)$:



$\int_0^{\infty} \delta(t,\varepsilon)dt = \left(\frac{2\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}}{2}\right) = 1$

$\delta(t) \sim \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(t,\varepsilon)$

Пусть $\delta_1(t,\varepsilon) \overset{\text{почти всюду}}{=\!=} \frac{d}{dt}\delta(t,\varepsilon)$:



$\delta_1(t) \sim \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_1(t,\varepsilon)$

В обобщенном смысле $\delta_1(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$

Свойства: $\forall\ [a;b]$, содержащего точку 0:

$\int_a^b \delta(t)x(t)dt = x(0)$; $\int_a^b \delta_1(t)x(t)dt = \dot{x}(0)$

Для обобщенной функции k-го порядка $\delta_k(t)$:

$\boxed{\delta_k(t) = \frac{d^k\delta(t)}{dt^k}}$ в обобщенном смысле

$\boxed{\int_a^b \delta_k(t)x(t)dt = x^{(k)}(0)}$

Их изображения по Лапласу:

$\delta(t) \div 1$; $\delta_1(t) \div p$; $\ldots$ $\delta_k(t) \div p^k$

(B.) Проиллюстрируем учет Н.У.$\neq 0$ на ЛДС, уравнение которых имеет вид $y^*(p)\cdot B_n(p) = x^*(p)$ в изображениях при Н.У.$=0$

Если бы Н.У были $\neq 0$, то
они породили бы в правой части
полином (степени $(n-1)$) коэффициенты которого
зависели бы от Н.У. Пусть, например
этот полином есть $C_{n-1}p^{n-1}+\dots+C_1p^1+C_0$
Поскольку $p^k \risingdotseq \delta_k(t)$, то если на
вход вместо обычного $x(t)$ подать
обобщенную функцию $\hat{x}(t)=$
$= x(t)+C_{n-1}\delta_{n-1}(t)+\dots+C_1\delta_1(t)+C_0\delta(t)$,
то это будет эквивалентно мгновенной
вставке требуемых начальных условий!

(П) $\ddot{y}+2\dot{y}+y=x(t)$ $\quad K(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+1}=\dfrac{1}{(p+1)^2}$
Пусть $y(0)=y_0$, а $\dot{y}(0)=y_1$
В изображениях $y^*(p)(p^2+2p+1)=x^*(p)+$
$+((py_0+y_1)+2y_0)$
Тогда для получения
отклика $K(p)$ на сигнал $x(t)$ при Н.У. $y_0; y_1$
достаточно подать на вход этого звена
сигнал $\hat{x}(t)=x(t)+\delta(t)\cdot(y_1+2y_0)+\delta_1(t)\cdot y_0$

Общий вывод. Описание ЛДЗ с помощью
коэф-та передачи позволяет исследовать
поведение соответствующей ЛДС при
произвольных начальных условиях!

2.4. Типовые коэффициенты передачи. Классификация

$\frac{1}{p}$ – интегрирующее звено

$\frac{1}{Tp+1}$ – инерционное звено $(T>0)$

$Tp+1$ – форсирующее звено

p – дифференцирующее звено

(точно физически не реализуемы)

$\frac{1}{T^2p^2+2\zeta Tp+1}$ – звено второго $(T>0)$ порядка. Для него различают несколько случаев:

$\zeta<0$ – неустойчивое звено 2-го порядка

$\zeta=0$ – консервативное звено 2-го порядка

$0<\zeta<1$ – колебательное звено 2-го порядка

$\zeta\geq 1$ – апериодическое звено

k – усилитель

Крайне полезно изучить поведение функций отклика и частотных характеристик для этих звеньев, поскольку из них, как из кирпичиков собираются многие системы автоматического регулирования (САР).