Модуль 14 Вариант 4 Киселева К.

Задание 1 3821Б1ПМоп2

$$\begin{cases} w'' + (1+x^2)w = -1 \\ w(-1) = 0 \\ w(1) = 4 \end{cases}$$

$\varphi_1(x) = (x+1)(x-1)$

$\varphi_2(x) = x(x+1)(x-1)$

$\varphi_3(x) = x^2(x+1)(x-1)$

$W(x) = u(x) + ax + b$

$a(-1) + b = 0 \Rightarrow a = b$

$a + b = 4 \Rightarrow a = b = 2$

$\Rightarrow W(x) = u(x) + 2x + 2$

$u(x) = -W(x) + 2x + 2$

$W''(x) = u''(x)$

$$\begin{cases} u'' + (1+x^2)(u(x) + 2x + 2) = -1 \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' + (1+x^2)u(x) = -(2x^3 + 2x^2 + 2x + 3) \\ u(-1) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$H = L_2[-1, 1]$

$$\begin{cases} Lu = f \\ Lu = 0 \end{cases} \qquad L = [\;]'' + 1 + x^2[\;]$$

$L\upsilon = \upsilon'' + (1+x^2)\upsilon$

$f = -(2x^3 + 2x^2 + 2x + 3)$

$\varphi_i = x^{i-1}(x-1)(x+1)$

$\varphi_i = 0$ $\quad i = \overline{1,3}$

$\varphi_i = 0$

$L\varphi_1(x) = 2 + x^4 - 1 = x^4 + 1$

$L\varphi_2(x) = 6x + x^5 - x = x^5 + 5x$

$L\varphi_3(x) = 12x^2 - 2 + x^6 + x^2 = x^6 + 11x^2 - 2$

$\upsilon = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3$

Приближенное решение v, найденное методом наим. квадратов обеспечивает минимально возможную невязку ДУ в норме Гильбертова пр-ва $L_2[-1,1]$ в подпространстве K_3

$$\begin{pmatrix} (L\varphi_1; L\varphi_1)_H & (L\varphi_1; L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_1; L\varphi_n)_H \\ (L\varphi_2; L\varphi_1)_H & (L\varphi_2; L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_2; L\varphi_n)_H \\ \dots & \dots & & \dots \\ (L\varphi_n; L\varphi_1)_H & (L\varphi_n; L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_n; L\varphi_n)_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L\varphi_1; f)_H \\ (L\varphi_2; f)_H \\ \dots \\ (L\varphi_n; f)_H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} (L\varphi_1)^2 dx & \int_{-1}^{1} L\varphi_1 L\varphi_2 dx & \int_{-1}^{1} L\varphi_1 L\varphi_3 dx \\ \int_{-1}^{1} L\varphi_2 L\varphi_1 dx & \int_{-1}^{1} (L\varphi_2)^2 dx & \int_{-1}^{1} L\varphi_2 L\varphi_3 dx \\ \int_{-1}^{1} L\varphi_3 L\varphi_1 dx & \int_{-1}^{1} L\varphi_3 L\varphi_2 dx & \int_{-1}^{1} (L\varphi_3)^2 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} L\varphi_1 f dx \\ \int_{-1}^{1} L\varphi_2 f dx \\ \int_{-1}^{1} L\varphi_3 f dx \end{pmatrix}$$

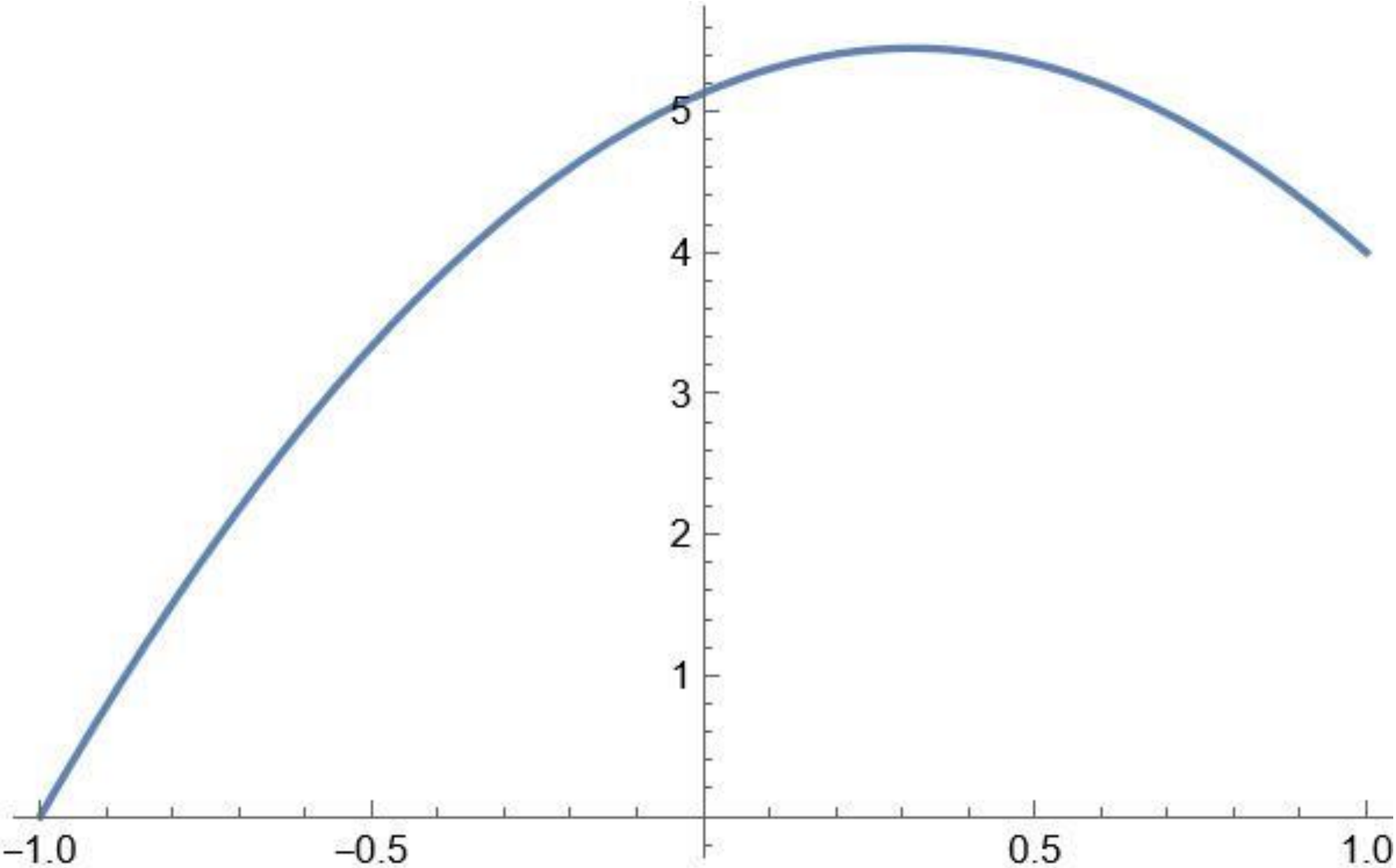
$$\begin{pmatrix} \frac{136}{45} & 0 & \frac{7096}{1155} \\ 0 & \frac{4552}{231} & 0 \\ \frac{7096}{1155} & 0 & \frac{126808}{4095} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{956}{105} \\ -\frac{736}{63} \\ -\frac{5492}{315} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = -\frac{106\,590\,891}{34\,046\,644}$$

$$\alpha_2 = -\frac{8096}{1365693}$$

$$\alpha_3 = \frac{1978405}{34046644}$$

$$w(x) \sim v(x) + 2x + 2$$



5
4
3
2
1
−1.0
−0.5
0.5
1.0

Задание 2

$f(x) = x^4 \quad x \in [-1; 1]$

$L_2[-1; 1]$

$(f, g)_H = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$

$P_3(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + b_1 \sin \pi x + a_2 \cos 2\pi x + b_2 \sin 2\pi x + a_3 \cos 3\pi x +$
$+ b_3 \sin 3\pi x$

В кач. базиса $\forall$ ф-ий: $1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \cos(2\pi x), \sin(2\pi x),$
$\cos(3\pi x), \sin(3\pi x)$

$K_3 = \{ a_0 + a_1 \cos \pi x + b_1 \sin \pi x + a_2 \cos 2\pi x + b_2 \sin \pi x + a_3 \cos 3\pi x + b_3 \sin 3\pi x :$
$: a_i \in \mathbb{R}; b_j \in \mathbb{R}, i = \overline{0,3}, j = \overline{,3} \}$

$\|f\|_{L_2[-1,1]} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x) dx}$

$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_2[-1;1]} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx}$

$S(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) = (f - \varphi, f - \varphi)_{L_2[-1;1]}$ – квадр. расстояния от эл-та f до эл-та φ по прав. гильбертова пр-ва $L_2[-1,1]$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1)_H & (\varphi_1, \varphi_2)_H & \dots & (\varphi_1, \varphi_n)_H \\ (\varphi_2, \varphi_1)_H & (\varphi_2, \varphi_2)_H & \dots & (\varphi_2, \varphi_n)_H \\ \dots & \dots & & \dots \\ (\varphi_n, \varphi_1)_H & (\varphi_n, \varphi_2)_H & \dots & (\varphi_n, \varphi_n)_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1)_H \\ (f, \varphi_2)_H \\ \dots \\ (f, \varphi_3)_H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \int_{-1}^{1}\varphi_1\varphi_1 dx & \int_{-1}^{1}\varphi_1\varphi_2 dx & \dots & \int_{-1}^{1}\varphi_1\varphi_7 dx \\ \int_{-1}^{1}\varphi_2\varphi_1 dx & \int_{-1}^{1}\varphi_2\varphi_2 dx & \dots & \int_{-1}^{1}\varphi_2\varphi_7 dx \\ \dots & \dots & & \dots \\ \int_{-1}^{1}\varphi_7\varphi_1 dx & \int_{-1}^{1}\varphi_7\varphi_2 dx & \dots & \int_{-1}^{1}\varphi_7\varphi_7 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_1) \\ (f,\varphi_2) \\ \dots \\ (f,\varphi_7) \end{pmatrix}$$

Выбранные ($i=\overline{0,6}$) ортогональны $\Rightarrow (\varphi\ \varphi_j)_H = 0$, если $i \neq j$ $\quad \alpha_i = \dfrac{(f;\varphi_i)_H}{(\varphi_i;\varphi_i)}$ $\quad i=\overline{0,6}$

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = \frac{0,4}{2} = 0,2 \qquad a_1 = \frac{\int_{-1}^{1}(x^4 \cos \pi x) dx}{\int_{-1}^{1}(\cos \pi x)^2 dx} = \frac{-0,31780}{1}$$

$b_1 = 0$

$$a_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^4 \cos 2\pi x\, dx}{\int_{-1}^{1}(\cos 2\pi x)^2 dx} = \frac{0,17184}{1}$$

$b_2 = 0$

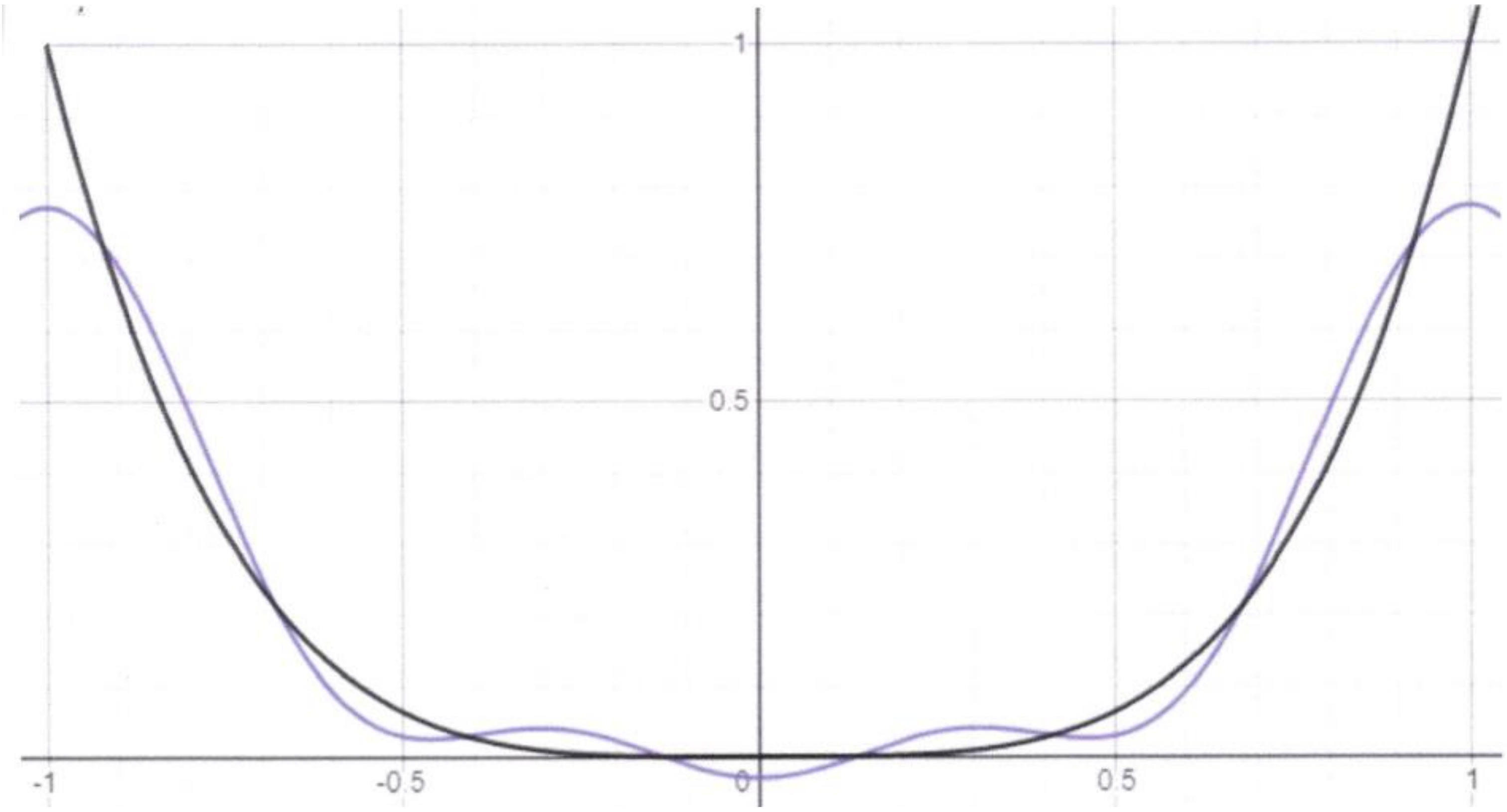
$$a_3 = \frac{\int_{-1}^{1} x^4 \cos 3\pi x\, dx}{\int_{-1}^{1}(\cos 3\pi x)^3 dx} = \frac{-0,083980}{1}$$

$b_3 = 0$

$$\varphi = 0,2 - 0,3178 \cos \pi x + 0,17184 \cos 2\pi x - 0,08398 \cos 3\pi x$$

Погрешность $z = f - \varphi$

$\|z\|_{L_2[-1,1]} = \|f-\varphi\|_{L_2[-1,1]} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(f-\varphi)^2 dx} \approx 0,0681234$ — норма погрешности, величина между f и φ на участке $[-1,1]$



1
0.5
-1
-0.5
0
0.5
1

Задание 3

$f(x)=\sin(x) \quad [a;b]=[-1;1] \quad x_0=0$

$n=9 \qquad n_{gn}=7$

$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}\sin(\xi) \quad \xi\in[0,x]$

$S_9(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$

$E(x)=\sin(x)-S_9(x)=-\frac{x^{11}}{11!}\sin\xi \qquad \xi\in[0,x]$

При $x\in[-1;1]$

$\max\limits_{\xi\in[-1;1]}|\sin\xi|\le\sin(1)<0{,}9<1$

$\max|E(x)|\le\frac{1}{11!}\cdot 1\le\frac{1}{11!}\approx 2{,}5\cdot10^{-8}$

$T_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad x_S=\cos\frac{\pi}{2n}(1+2S) \quad S=\overline{0,n-1}$

Чтобы провести экономизацию полинома S_9 $x\in[-1;1]$ нужен полином Чебышева степени $n=9$ наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,1]$. Полиномы со старшим коэф. равным единице степени $n=и$

$x_S=\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot9}(1+2S)\right) \quad S=\overline{0,8}$

$T_9(x)=\left(x-\cos\frac{\pi}{18}\right)\left(x-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\cos\frac{5\pi}{18}\right)\left(x-\cos\frac{7\pi}{18}\right)\left(x-\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\cos\frac{11\pi}{18}\right)\cdot$

$\cdot\left(x-\cos\frac{13\pi}{18}\right)\left(x-\cos\frac{5\pi}{6}\right)\left(x-\cos\frac{17\pi}{18}\right)=\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{18}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{6}\right)\cdot$

$\cdot\left(x^2-\cos^2\frac{5\pi}{18}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{7\pi}{18}\right)x$

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_9(x)| = \frac{1}{256} \text{ при } x=1$$

$$S_7^*(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{(x^9 - T_9(x))}{9!}$$

$$E^*(x) = \sin(x) - S_7^*(x) = \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}\sin\xi - \frac{x^9 - T_9(x)}{9!} =$$

$$= \frac{1}{11!} + \frac{T_9(x)}{9!} \le \frac{1}{11!} + \frac{1}{256\cdot 9!} \approx 3{,}5\cdot 10^{-8}$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |\sin(x) - S_9(x)| \le 2{,}5\cdot 10^{-8}$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |\sin(x) - S_7^*(x)| \le 3{.}5\cdot 10^{-8}$$

$$S_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$E_7 = \sin x - S_7(x) = \frac{x^9}{9!}\sin(x) \; (x\in[0,x])$$

При $x\in[-1;1]$

$$\max_{x\in[-1,1]} |E_7(x)| \le \frac{1}{9!} \approx 2{,}7\cdot 10^{-6}$$

$$\max |E^*(x)| \le 3{.}5\cdot 10^{-8}$$

$$T_7(x) = \left(x^2 - \cos^2\frac{\pi}{14}\right)\left(x^2 - \cos^2\frac{3\pi}{14}\right)\left(x^2 - \cos^2\frac{\pi}{7}\right)x$$

$$\max_{x\in[-1;1]} |T_7(x)| \le 0{,}1$$

$$S_5^{**} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \left(\frac{-72x^7 + x^9 - T_9(x) - T_7(x)}{9!}\right)$$

$$E^{**}(x) = \sin(x) - S_9(x) + S_9(x) + S_7^*(x) - S_5^{**}(x) \approx 2{.}7\cdot 10^{-7}$$

$$S_7^*(x) - S_5^{**}(x) = \frac{T_7}{9!}$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |S_7^*(x) - S_5^{**}(x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{T_7}{9!}\right| = 2{.}7\cdot 10^{-7}$$

Фактор D – относительная глубина

Отклик V – скорость течения (м/сек)

$$\hat{V} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_i	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
V_i	0.957	0.969	0.976	0.978	0.975	0.968	0.954	0.939	0.918	0.894

Задание 4

$$S(b_0; b_1; b_2) = \sum_{i=1}^{10} \left(v_i - (b_0 + b_1 D_i + b_2 D_i^2)\right)^2 \to min$$

$$\overline{v} = (0,957; 0,969; \dots; 0,894)^T$$

$$\overline{x}^{(0)} = (1; 1; \dots; 1)^T$$

$$\overline{x}^{(1)} = (0; 0,1; 0,2; \dots; 0,9)^T$$

$$\overline{x}^{(2)} = (0; 0,01; 0,04; \dots; 0,81)^T$$

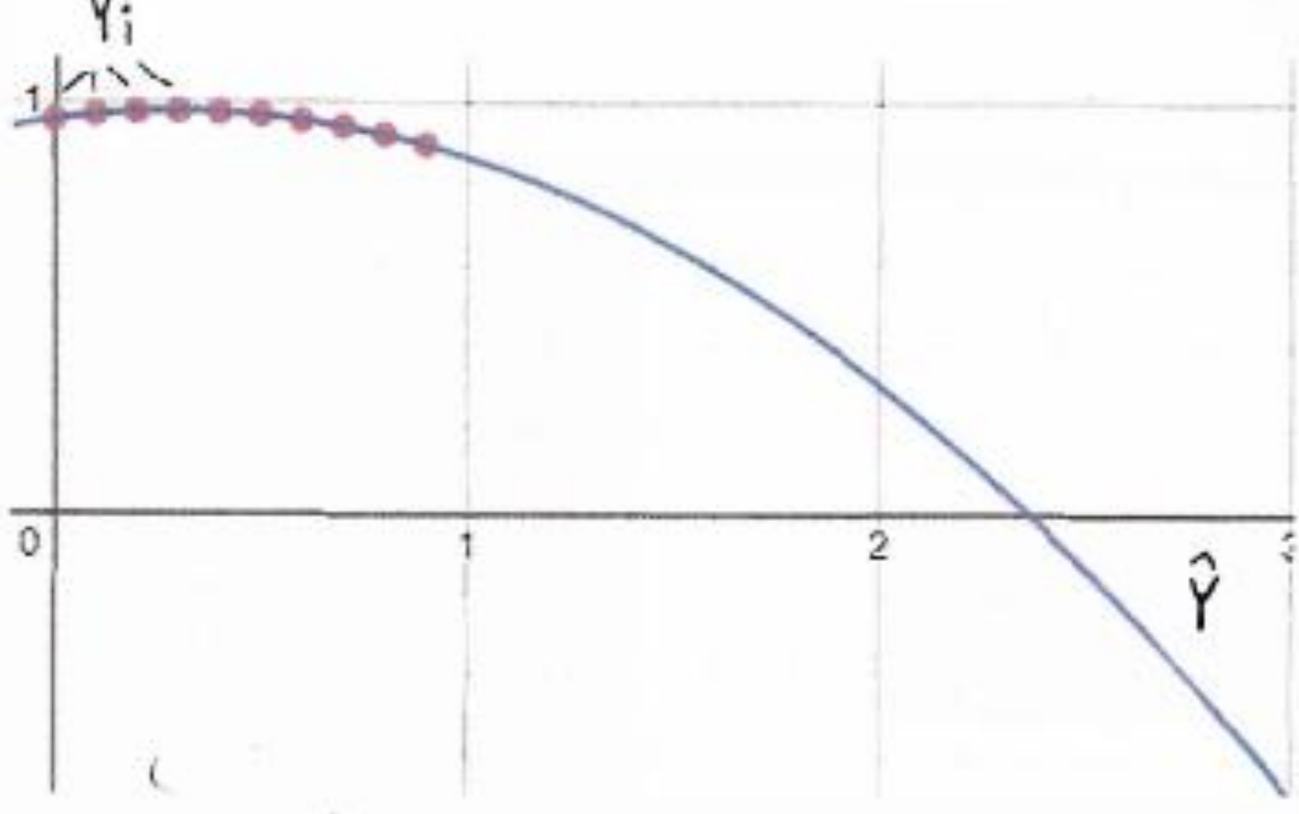
$$\begin{pmatrix} (\overline{x}^{(0)}, \overline{x}^{(0)}) & (\overline{x}^{(0)}, \overline{x}^{(1)}) & \dots & (\overline{x}^{(0)}, \overline{x}^{(k)}) \\ (\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(0)}) & (\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(1)}) & \dots & (\overline{x}^{(1)} \overline{x}^{(k)}) \\ \dots & \dots & & \dots \\ (\overline{x}^{(k)}, \overline{x}^{(0)}) & (\overline{x}^{(k)}, \overline{x}^{(1)}) & \dots & (\overline{x}^{(k)}, \overline{x}^{(k)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, \overline{x}^{(0)}) \\ (y; \overline{x}^{(1)}) \\ \dots \\ y; \overline{x}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 4,5 & 2,85 \\ 4,5 & 2,85 & 2,025 \\ 2,85 & 2,025 & 1,5333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,528 \\ 4,2282 \\ 2,64996 \end{pmatrix}$$

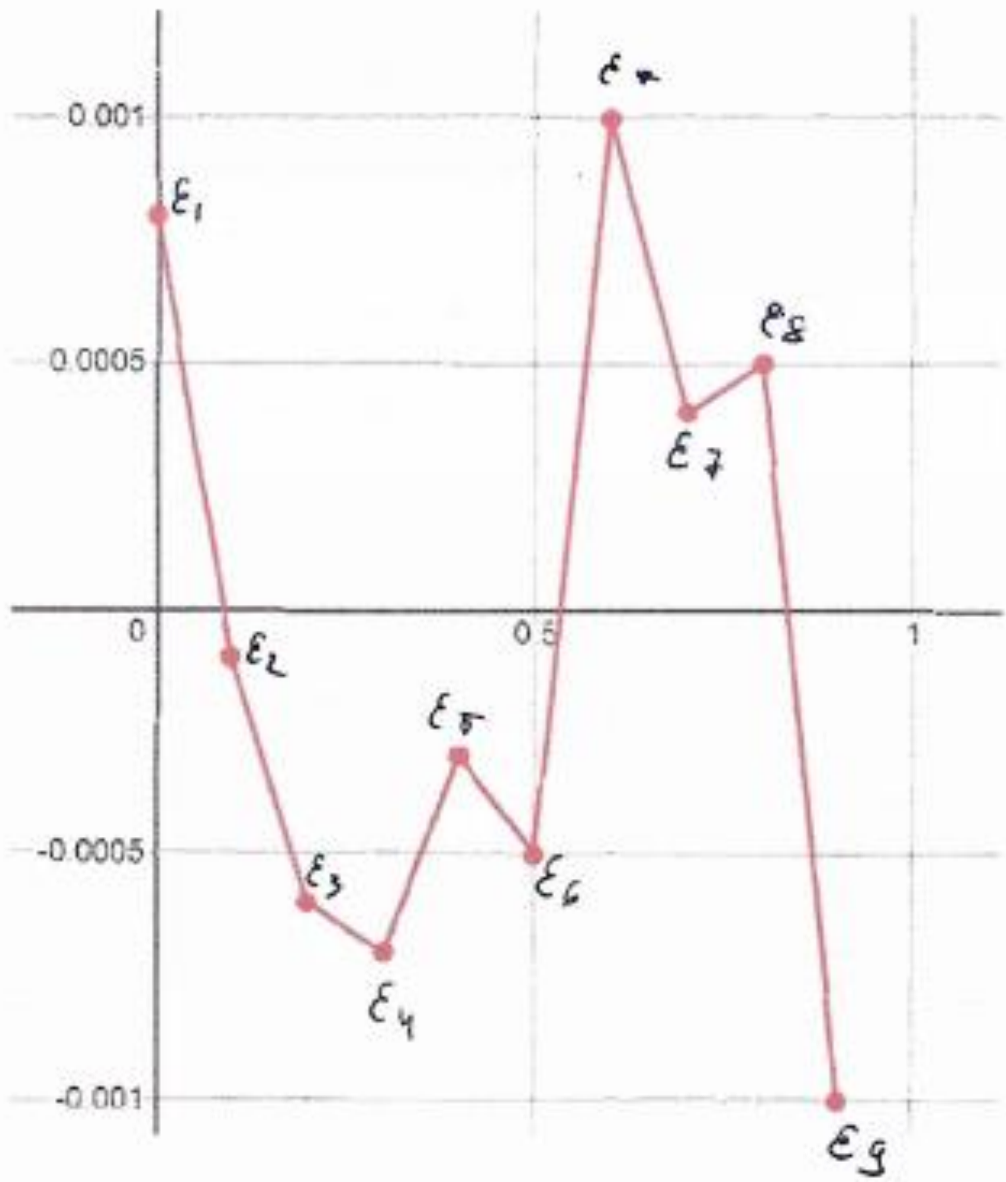
$$\begin{cases} b_0 = 0,957791 \\ b_1 = 0,133568 \\ b_2 = -0,228409 \end{cases} \qquad \hat{V} = 0,95791 + 0,133568 \cdot D + (-0,228409) D^2$$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - Y_{сред})^2}{\sum_{i=1} (\hat{Y}_i - Y_{сред})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (\hat{V}_i - V_{сред})^2}{\sum_{i=1}^{10} (V_i - C_{ред})} = 0,99512233$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-(k+1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} \hat{\varepsilon}_i^2}{10-(4+1)}} = 0,00111$$



Y_i
1
0
1
2
$\hat{Y}$



0.001
0.0005
0
-0.0005
-0.001
0.5
1
ε_1
ε_2
ε_3
ε_4
ε_5
ε_6
ε_7
ε_8
ε_9

X	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7
Y	3,0	2,8	3,5	3,6	2,9

$$\hat{Y} = b_1 X$$

$$S(b_1;0) = \sum_{i=1}^{5} \left(Y_i - (b_1 X_i)\right)^2 \to \min$$

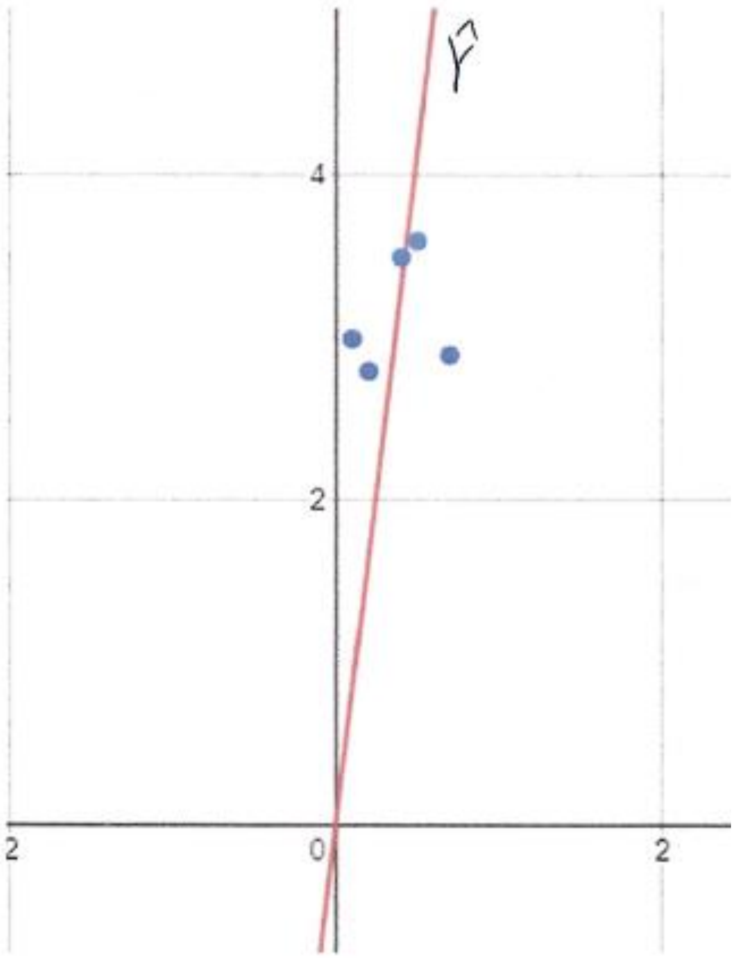
$$S'_{b_1}(b_1;0) = 0$$

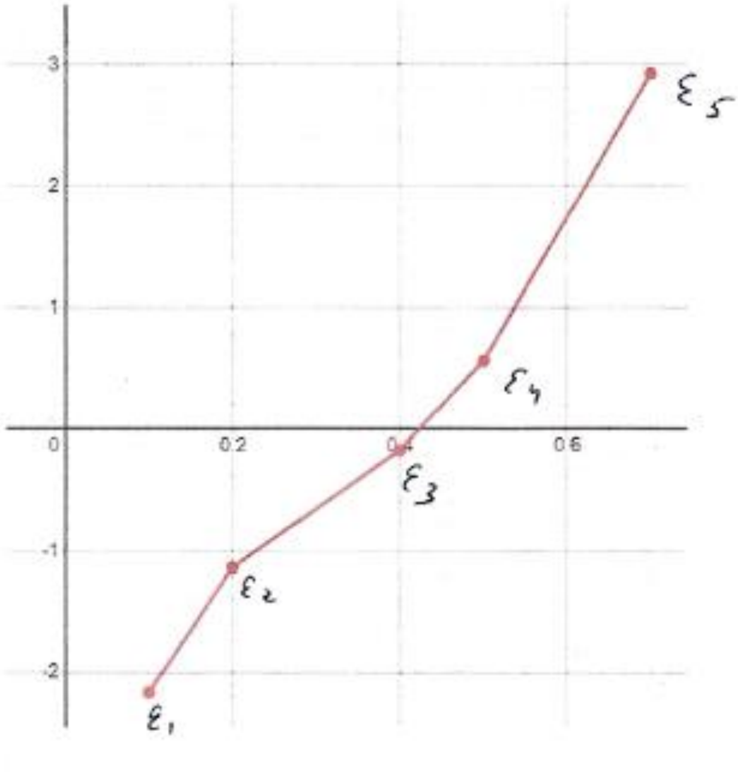
$$\sum Y_i = b_1 \sum X_i$$

$$15,8 = b_1 \cdot 1,9$$

$$b_1 = 8,31578947$$

$$\hat{Y} = 8,31578947X$$





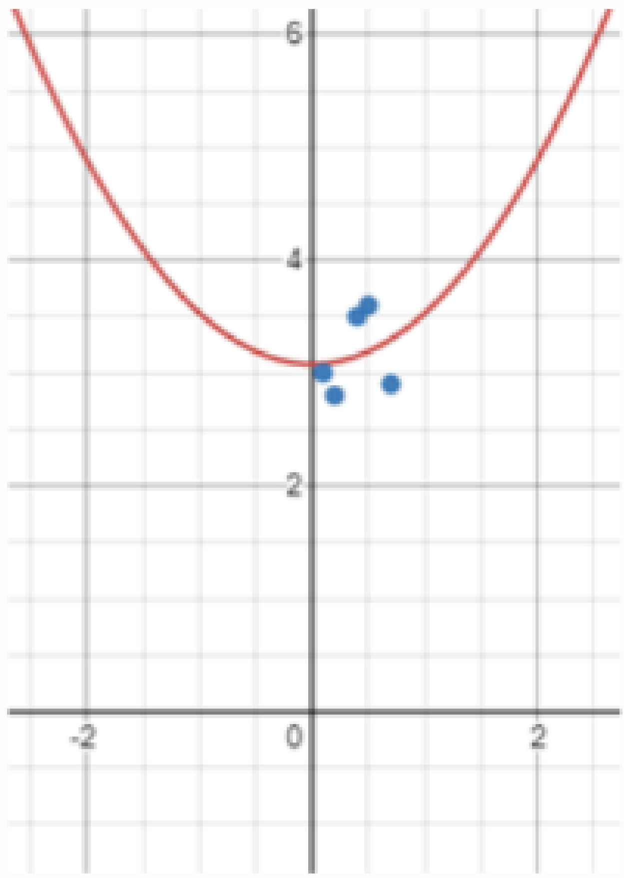
X	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7
Y	3,0	2,8	3,5	3,6	2,9

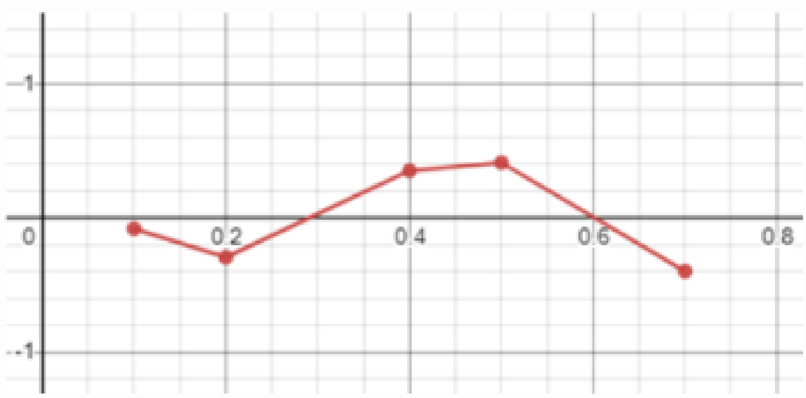
$$\hat{Y} = b_0 + b_2 X^2$$

$$S(b_0, 0, b_2) = \sum_{i=1}^{5} \left(Y_i - (b_0 + b_2 X_i^2)\right)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = 2 \sum\limits_{i=0}^{5} \left(Y_i - (b_0 + b_2 X_i^2)\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_2} = -4 b_2 \sum\limits_{i=0}^{5} \left(\left(Y_i - (b_0 + b_2 X_i^2)\right) X_i\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{5} Y_i = \sum\limits_{i=0}^{5} (b_0 + b_2 X_i^2) \\ \sum\limits_{i=0}^{5} Y_i X_i = \sum\limits_{i=0}^{5} \left((b_0 + b_2 X_i^2) X_i\right) \end{cases} \quad \begin{cases} 5 b_0 + 0{,}92 b_2 = 15{,}8 \\ 1{,}9 b_0 + 0{,}54 b_2 = 6{,}09 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 3{,}07689 \\ b_2 = 0{,}451681 \end{cases}$$





$$Y(X^{(1)}; X^{(2)}) \mid 3{,}0 \mid 3{,}5 \mid 3{,}6 \mid \dots$$

$$\hat{Y} = b_0 X^{(1)} X^{(2)} + b_1 \cos(X^{(1)})$$

$$S(b_0; b_1) = \sum_{i=1}^{5} \left(\hat{Y}_i - \left(b_0 X_i^{(1)} X_i^{(2)} + b_1 \cos(X_i^{(1)})\right)\right)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = \sum\limits_{i=1}^{5} \left(\left(Y_i - b_0 X_i^{(1)} X_i^{(2)} - b_1 \cos(X_i^{(1)})\right) X_i^{(1)} X_i^{(2)}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = \sum\limits_{i=1}^{5} \left(Y_i - b_0 X_i^{(1)} X_i^{(2)} - b_1 \cos(X_i^{(1)})\right) \cos(X_i^{(1)}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4{,}173 - b_0 \cdot 0{,}6446 - 1{,}2168 b_1 = 0 \\ 14{,}5055 - b_0 \cdot 1{,}2168 - 4{,}2502 b_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = 0{,}0691054 \\ b_1 = 3{,}39288 \end{cases}$$