Вариационно-проекционные методы решения краевых задач. Метод Бубнова-Галеркина и метод наименьших квадратов (для решения диф. уравнений)

Задача №1

1) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} w''+x\,w'+w=2x, & x\in(0;\,1) \\ w(0)=1, & w(1)=0. \end{cases}$$

приближенно методом Бубнова-Галеркина и запишите приближенное решение $w_{пр.}(x)$.

Для его построения используйте базисные функции

$$\varphi_1(x)=x(x-1),\ \varphi_2(x)=x^2(1-x),\ \varphi_3(x)=x^3(1-x)$$

2) Используя математический пакет, on-line сервис или свои программные средства, постройте график приближенного решения $w_{пр.}(x)$.

Решение (схема)

Шаг 1

Метод Бубнова-Галеркина можно применять для решения линейного дифференциального уравнения с линейными однородными граничными условиями.

Приведенная выше задача является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, но имеет линейные неоднородные граничные условия.

Чтобы построить задачу нужного типа, запишем искомое решение $w(x)$ в виде

$$w(x)=u(x)+ax+b.$$

Коэффициенты a,b подберем таким образом, чтобы **линейная функция** $ax+b$ соответствовала заданным выше неоднородным граничным условиям.

Для $x=0$ получим $a\cdot 0+b=1$, то есть $b=1$

Для $x=1$ получим $a\cdot 1+b=0$, то есть $a=-1$.

Следовательно,

$$w(x)=u(x)+1-x$$

Подставим выражение для $w(x)$ в дифференциальное уравнение и граничные условия:

$$\begin{cases} u''+(1-x)''+x\,(u'-1)+(u+1-x)=2x, & x\in(0;\,1) \\ u(0)+1-0=1, & u(1)+1-1=0. \end{cases}$$

Для неизвестной функции $u(x)$ получим дифференциальное уравнение с линейными однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} u''+\ x\,u'+u=4x-1,\ x\in(0;1) \\ u\,(0)=0,\ u\,(1)=0. \end{cases}$$

Именно это уравнение предстоит решить приближенно методом Бубнова-Галеркина.

Ш а г 2

Краевую задачу для функции $u(x)$ рассматриваем в гильбертовом пространстве

$H=L_2[0;1]$ (отрезок $[0;1]$ взят из краевой задачи).

Решение уравнения ищем в пространстве $K:\ u\in K\subset H$.

Это функциональное пространство, к элементам которого можно применять операции дифференцирования, указанные в левой части дифференциального уравнения.

Чтобы воспользоваться методом, краевую задачу нужно записать в общем виде

$$\begin{cases} Lu=f \\ lu=0 \end{cases}$$

где L – линейный дифференциальный оператор, который действует из K в H,

через l обозначен линейный оператор, «отвечающий» за граничные условия,

правая часть уравнения f задана и является элементом пространства $L_2[0;1]$

В данной задаче

$$L=[\quad]''+x\cdot[\quad]'+[\quad],$$

то есть применение оператора L к некоторому элементу $v\in K$ есть

$$Lv=v''+x\cdot v'+v$$

Правая часть уравнения есть

$$f=4x-1$$

Оператор l ставит в соответствие элементу $v\in K$ его значение при $x=0$ и его значение при $x=1$.

Линейные свойства операторов L и l можно проверить «по определению»:

например, показать, что для любых элементов $u,v\in K$ и любых чисел α,β

$$L(\alpha u+\beta v)=a(Lu)+\beta(Lv)$$

$$l(\alpha u+\beta v)=a(lu)+\beta(lv)$$

Шаг 3

Предложенные выше базисные функции

$$\varphi_1(x) = x(x-1), \varphi_2(x) = x^2(1-x), \varphi_3(x) = x^3(1-x)$$

запишем в виде

$$\varphi_i(x) = x^i(x-1) = x^{i+1} - x^i, \ i = 1, 2, 3$$

Эти функции соответствуют линейным однородным граничным условиям:

$$\varphi_i(0) = 0, \ i = 1, 2, 3$$

$$\varphi_i(1) = 0, \ i = 1, 2, 3$$

Функции $\varphi_i(x), \ i = 1, 2, 3$ являются элементами каждого из функциональных пространств: и пространства $L_2[0;1]$, и пространства K. К этим функциям можно применить оператор L.

$$L\varphi_1(x) = [x^2 - x]'' + x \cdot [x^2 - x]' + [x^2 - x]$$

$$L\varphi_2(x) = [x^3 - x^2]'' + x \cdot [x^3 - x^2]' + [x^3 - x^2]$$

$$L\varphi_3(x) = [x^4 - x^3]'' + x \cdot [x^4 - x^3]' + [x^4 - x^3]$$

Нетрудно убедиться, что

$$L\varphi_1(x) = 2 + (2x^2 - x) + (x^2 - x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$L\varphi_2(x) = (6x - 2) + (3x^3 - 2x^2) + (x^3 - x^2) = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

$$L\varphi_3(x) = (12x^2 - 6x) + (4x^4 - 3x^3) + (x^4 - x^3) = 5x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 6x$$

(эти формулы будут нужны при отыскании приближенного решения).

На основе базисных функций определим подпространство K_3 размерности 3, в котором должно быть найдено приближенное решение $v(x)$.

Это подпространство включает все элементы вида

$$v = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – числа.

Ш а г 4

Приближенное решение v, найденное в классе K_3 методом Бубнова-Галеркина, должно обеспечить **ортогональность невязки всем базисным функциям**.

$$(Lv - f, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = 0$$

$$(Lv - f, \varphi_2)_{L_2[0;1]} = 0$$

$$(Lv - f, \varphi_3)_{L_2[0;\,1]} = 0$$

В соответствии с Утверждением 2, Модуль 14.1, коэффициенты $\alpha_i, i = 1, 2, 3,$, определяющие приближенное решение v как элемент K_3

следует искать как решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \int\limits_0^1 (L\varphi_1)\cdot\varphi_1\,dx & \int\limits_0^1 (L\varphi_2)\cdot\varphi_1\,dx & & \int\limits_0^1 (L\varphi_3)\cdot\varphi_1\,dx \\ \int\limits_0^1 (L\varphi_1)\cdot\varphi_2\,dx & \int\limits_0^1 (L\varphi_2)\cdot\varphi_2 dx & . & \int\limits_0^1 (L\varphi_3)\cdot\varphi_2\,dx \\ . & & . & \\ \int\limits_0^1 (L\varphi_1)\cdot\varphi_3\,dx & \int\limits_0^1 (L\varphi_2)\cdot\varphi_3 dx & . & \int\limits_0^1 (L\varphi_3)\cdot\varphi_3\,dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int\limits_0^1 (4x-1)\,(x^2 - x)\,dx \\ \int\limits_0^1 (4x-1)\,(x^3 - x^2) dx \\ \\ \int\limits_0^1 (4x-1)(x^4 - x^3) dx \end{bmatrix}$$

Поясним, как получены элементы матрицы и правой части СЛАУ, и как они должны быть вычислены.

Например, элемент первой строки первого столбца матрицы СЛАУ определяется скалярным произведением элементов $L\varphi_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ в $L_2[0;1]$:

$$(L\varphi_1, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int\limits_0^1 (L\varphi_1)\cdot\varphi_1 dx = \int\limits_0^1 (3x^2 - 2x + 2)\,(x^2 - x)\,dx$$

Первый элемент правой части СЛАУ определяется скалярным произведением элементов $f(x)$ и $\varphi_1(x)$ в $L_2[0;1]$:

$$(f,\varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 f \cdot \varphi_1 dx = \int_0^1 (4x-1)\,(x^2 - x)\,dx$$

Шаг 5

Чтобы решить задачу методом Бубнова-Галеркина, нужно вычислить элементы матрицы и элементы правой части СЛАУ и затем решить СЛАУ (ее размерность 3*3).

Ответ

Решение задачи с однородными граничными условиями запишется в виде

$u(x) \sim v(x)$, где

$$v(x) = \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2) + \alpha_3(x^4 - x^3)$$

Решение исходного дифференциального уравнения с неоднородными граничными условиями следует записать в виде

$w(x) \sim v(x) + 1 - x$, где

$$v(x) = \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2) + \alpha_3(x^4 - x^3)$$

Задача №1*

1) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} w''+x\,w'+w=2x, & x\in(0;1) \\ w(0)=1, \; w(1)=0. \end{cases}$$

приближенно **методом наименьших квадратов** и запишите приближенное решение $w_{np.}(x)$. Для его построения используйте базисные функции

$$\varphi_1(x)=x(x-1), \varphi_2(x)=x^2(1-x), \varphi_3(x)=x^3(1-x)$$

2) Используя математический пакет, on-line сервис или свои программные средства, постройте график приближенного решения $w_{np.}(x)$.

Если нужно решить ту же самую задачу методом наименьших квадратов, отличия решений будут на шаге 4

Шаг 4

Другой принцип отыскания решения:

Приближенное решение v, найденное в классе K_3 методом наименьших квадратов, должно обеспечить **минимально возможную невязку дифференциального уравнения в норме гильбертова пространства** $L_2[0;1]$ **в подпространстве** K_3 :

$$\| Lv - f \|_{L_2[0;1]} \underset{v\in K_3}{\rightarrow} \min$$

Другая СЛАУ для поиска неизвестных коэффициентов:

В соответствии с Утверждением 4, Модуль 14.1, коэффициенты $\alpha_i, i=1,2,3,$, определяющие приближенное решение v как элемент K_3

следует искать как решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (L\varphi_1)^2\, dx & \int_0^1 (L\varphi_2)\cdot(L\varphi_1)\, dx & \int_0^1 (L\varphi_3)\cdot(L\varphi_1)\, dx \\ \int_0^1 (L\varphi_1)\cdot(L\varphi_2)\, dx & \int_0^1 (L\varphi_2)^2\, dx & \int_0^1 (L\varphi_3)\cdot(L\varphi_2)\, dx \\ \int_0^1 (L\varphi_1)\cdot(L\varphi_3)\, dx & \int_0^1 (L\varphi_2)\cdot(L\varphi_3) dx & \int_0^1 (L\varphi_3)^2\, dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^1 (4x-1)\,(L\varphi_1)\, dx \\ \int_0^1 (4x-1)\,(L\varphi_2)\, dx \\ \int_0^1 (4x-1)\,(L\varphi_3)\, dx \end{bmatrix}$$

Поясним, как получены элементы матрицы и правой части СЛАУ, и как они должны быть вычислены.

Например, элемент первой строки первого столбца матрицы СЛАУ определяется скалярным квадратом элемента $L\varphi_1(x)$ в $L_2[0;1]$:

$$(L\varphi_1, L\varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 (L\varphi_1)\cdot(L\varphi_1)\, dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 2)^2\, dx$$

Элемент первой строки второго столбца матрицы СЛАУ определяется скалярным произведением элементов $L\varphi_1(x)$ и $L\varphi_2(x)$ в $L_2[0;1]$:

$$(L\varphi_1, L\varphi_2)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 (L\varphi_1)\cdot(L\varphi_2)\, dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 2)(4x^3 - 3x^2 + 6x - 2)\, dx$$

Первый элемент правой части СЛАУ определяется скалярным произведением элементов $f(x)$ и $L\varphi_1(x)$ в $L_2[0;1]$:

$$(f, L\varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 f\cdot(L\varphi_1)\, dx = \int_0^1 (4x-1)\,(3x^2 - 2x + 2)\, dx$$

Последующие действия такие же, как в предыдущем методе.

Шаг 5

Чтобы решить задачу методом наименьших квадратов, нужно вычислить элементы матрицы и элементы правой части СЛАУ и затем решить СЛАУ (ее размерность 3*3).

Ответ

Решение задачи с однородными граничными условиями запишется в виде

$u(x) \sim v(x)$, где

$$v(x) = \alpha_1 (x^2 - x) + \alpha_2 (x^3 - x^2) + \alpha_3 (x^4 - x^3)$$

Решение исходного дифференциального уравнения с неоднородными граничными условиями следует записать в виде

$w(x) \sim v(x) + 1 - x$, где

$$v(x) = \alpha_1 (x^2 - x) + \alpha_2 (x^3 - x^2) + \alpha_3 (x^4 - x^3)$$