Оглавление

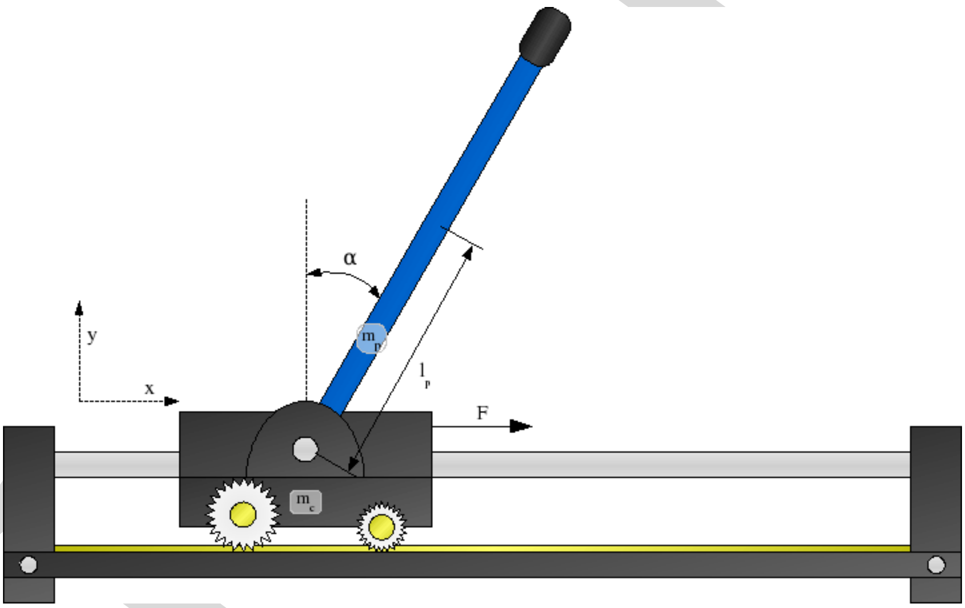
1. Задания для лабораторных работ

1.1. Перевернутый маятник на подвижном основании

На рисунке приведено схематическое изображение перевернутого маятника, точка подвеса которого находится на тележке, движущейся в горизонтальной плоскости. Тележка управляется мотором, который обеспечивает тяговое усилие $F_{\text{тяг}}$:

$$F_{\text{тяг}} = K_f(V - K_s\dot{x}),$$

где V — управление — напряжение, подаваемое на обмотку электродвигателя, x — координата тележки, $K_f = 1.726$ Н/В и $K_s = 4.487$ В·с/м — конструктивные параметры.



1. Используя φ, $\dot{\varphi}$, x и $\dot{x}$ в качестве переменных состояния, проверьте, что кинетическая энергия системы может быть записана в виде:

$$T = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\varphi}^2 - ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

где $m = 0.127$ кг — масса маятника, $I = 1.2 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2 — момент инерции маятника относительно центра масс, $l = 0.1778$ м — расстояние от точки крепления до центра масс, $M = 1.206$ кг — масса тележки.

2. Запишите потенциальную энергию системы, считая, что нулевой потенциальный уровень совпадает с горизонтальным положением маятника.

3. Используя уравнения Лагранжа, покажите, что уравнения, описывающие динамику системы, могут быть записаны в виде:

$$(m + M)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + ml\dot{\theta}^2\sin\varphi = F_{\text{тяг}} - B_{eq}\dot{x},$$
$$(I + ml^2)\ddot{\varphi} - ml\ddot{x}\cos\varphi - mgl\sin\varphi = -B_p\dot{\varphi},$$

где $B_{eq} = 5.4$ Н·с/м — коэффициент вязкого трения между колесом каретки и направляющей и $B_p = 2.4 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с — коэффициент вязкого трения в точке крепления маятника.

4. Найдите состояния равновесия в системе, определите их тип и линеаризуйте уравнения в окрестности неустойчивого состояния равновесия.

5. Синтезируйте стабилизирующий закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$V = a_1\varphi + a_2 x + a_3\dot{\varphi} + a_4\dot{x} \tag{1.1}$$

так, чтобы: **(а)** неустойчивое собственное число $\lambda \approx 6.376$ перешло в левую полуплоскость комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda \approx 6.376$ и $\lambda = 0$ перешла в пару вещественных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел $\lambda \approx 6.376$ и $\lambda = 0$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Проверьте работоспособность получившегося регулятора как для линейной системы, так и для нелинейной. Оцените область устойчивости, порождаемую построенным регулятором. Как меняется переходной процесс в каждом из перечисленных случаев?

6. Синтезируйте раскачивающий закон управления вида (1.1) при помощи которого маятник из устойчивого нижнего положения можно перевести в некоторую окрестность неустойчивого верхнего положения. Подберите новые моды так, чтобы: **(а)** раскачивание маятника имело колебательный характер, **(б)** раскачивание маятника носило апериодический характер. Что можно сказать об этих двух законах управления. Проверьте работоспособность получившихся регуляторов для линейной и для нелинейной систем.

7. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только положение тележки x и угол отклонения маятника θ. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda \approx 6.376$ и $\lambda = 0$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости. Как изменится переходной процесс, если отказаться от требования асимптотической устойчивости наблюдателя и оставить лишь устойчивость по Ляпунову. Можно ли в этом случае восстановить неизвестное состояние системы.

8. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

9. Покажите, что задача синтеза стабилизирующего статического регулятора по выходу $V = a_1\theta + a_2 x$ не имеет решения.

10. Перейдите от непрерывной системы к дискретной по формуле

$$\xi_{k+1} = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\xi_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)}Bu(s)ds, \quad \xi_k = \left(\varphi_k, x_k, \dot{\varphi}_k, \dot{x}_k\right)^{\top},$$

считая, что управление является кусочно постоянной функцией, то есть $u(t) = u_k = \text{const}$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ и $t_{k+1} - t_k = h = \text{const}$. Постройте для полученной дискретной системы закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = a_1\varphi_k + a_2 x_k + a_3\dot{\varphi}_k + a_4\dot{x}_k,$$

так, чтобы: **(а)** неустойчивое собственное число $\lambda \approx e^{6.376h}$ перешло внутрь единичного круга комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda \approx e^{6.376h}$ и $\lambda = 1$ перешла в заданную пару вещественных чисел внутри единичного круга комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел $\lambda \approx e^{6.376h}$ и $\lambda = 1$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга комплексной плоскости.

11. В предположении, что непосредственному наблюдению доступны только положение тележки x_k и угол отклонения маятника θ_k в моменты времени t_k. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda \approx e^{6.376h}$ и $\lambda = 1$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости. Как изменится переходной процесс, если отказаться от требования асимптотической устойчивости наблюдателя и оставить лишь устойчивость по Ляпунову. Можно ли в этом случае восстановить неизвестное состояние системы.

12. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

13. Синтезируйте закон управления, минимизирующий значения следующего квадратичного функционала

$$\int_0^\infty \left(q_{11}\theta^2 + q_{22}x^2 + q_{33}\dot\theta^2 + q_{44}\dot x^2 + u^2\right)dt, \qquad q_{kk} \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, 4. \tag{1.2}$$

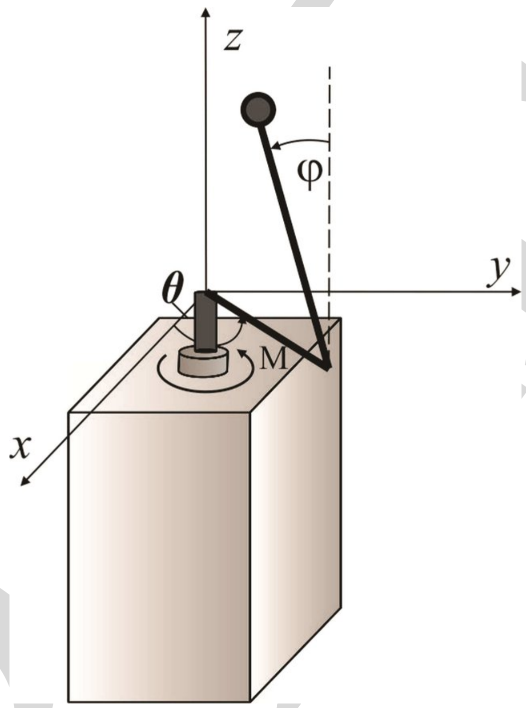
Как данный закон управления зависит от коэффициентов q_{kk}. Что происходит с переходным процессом при изменении коэффициентов. Рассмотрите случаи, когда произвольные наборы коэффициентов обращаются в ноль.

1.2. Маятник на вращающемся основании (маятник Фуруты)

На рисунке приведено схематическое изображение перевернутого маятника, точка подвеса которого находится на рычаге. Рычаг приводится во вращение мотором, который обеспечивает усилие

$$F_{\text{тяг}} = K_f\left(V - K_s\dot{\theta}\right),$$

где V — управление — напряжение, подаваемое на обмотку электродвигателя, θ — угол отклонения рычага, $K_f = 8.48 \cdot 10^{-3}$ Н/В и $K_s =$ $= 0.028$ В·с/м — конструктивные параметры.



1. Используя θ, $\dot{\theta}$, φ и $\dot{\varphi}$ в качестве переменных состояния, проверьте, что кинетическая энергия системы может быть записана в виде:

$$T = \frac{1}{2}\left(J_{eq} + mr^2 + ml^2 \sin^2 \varphi\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(J_p + ml^2\right)\dot{\varphi}^2 - mlr\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

где $m = 0.027$ кг — масса маятника, $J_p = 1.10 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2 — момент инерции маятника относительно центра масс, $J_{eq} = 1.24 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2 — эквивалентный момент инерции вокруг штифта мотора как ведущей оси, $l = 0.153$ м — расстояние от центра масс маятника до оси вращения на верхнем конце рычага, $r = 0.0826$ м — длина горизонтальной части рычага (от оси мотора).

2. Запишите потенциальную энергию системы, считая, что нулевой потенциальный уровень совпадает с горизонтальным положением маятника.

3. Используя уравнения Лагранжа, запишите уравнения динамики системы, считая, что обобщённые силы порождаются силой тяги $F_{\text{тяг}}$ и силами трения $B_{eq}\dot{\theta}$, $B_p\dot{\varphi}$, где $B_{eq} = B_p = 2.4 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с — коэффициенты вязкого трения в подшипниках электродвигателя и в точке крепления маятника соответственно.

4. Найдите состояния равновесия в системе, определите их тип и линеаризуйте уравнения в окрестности неустойчивого состояния равновесия.

5. Синтезируйте стабилизирующий закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$V = a_1\theta + a_2\varphi + a_3\dot{\theta} + a_4\dot{\varphi} \tag{1.3}$$

так, чтобы неустойчивое собственное число $\lambda_1 \approx 4.252$ стало устойчивым. Как изменится переходной процесс, если пара собственных чисел $\lambda \approx 4.252$ и $\lambda = 0$ перейдет: **(а)** в пару вещественных чисел в левой полуплоскости, **(б)** в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости и **(в)** в пару чисто мнимых сопряженных чисел. Проверьте работоспособность получившегося регулятора как для линейной системы, так и для нелинейной. Оцените область устойчивости, порождаемую построенным регулятором. Как меняется переходной процесс в каждом из перечисленных случаев?

6. Синтезируйте раскачивающий закон управления вида (1.3) при помощи которого маятник из устойчивого нижнего положения можно перевести в некоторую окрестность неустойчивого верхнего положения и при этом выполнялось условие $-\pi/6 < \theta < \pi/6$. Подберите новые моды так, чтобы: **(а)** раскачивание маятника имело колебательный характер, **(б)** раскачивание маятника носило апериодический характер. Что можно сказать об этих двух законах управления. Проверьте работоспособность получившихся регуляторов для линейной и для нелинейной систем.

7. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только положение плеча θ и угол отклонения маятника φ. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda \approx 4.252$ и $\lambda = 0$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости. Как изменится переходной процесс, если отказаться от требования асимптотической устойчивости наблюдателя и оставить лишь устойчивость по Ляпунову. Можно ли в этом случае восстановить неизвестное состояние системы.

8. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

9. Покажите, что задача синтеза стабилизирующего статического регулятора по выходу $V = a_1\theta + a_2\varphi$ не имеет решения.

10. Перейдите от непрерывной системы к дискретной по формуле

$$\xi_{k+1} = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\xi_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)}Bu(s)ds, \quad \xi_k = \left(\theta_k,\, \varphi_k,\, \dot{\theta}_k,\, \dot{\varphi}_k\right)^\top,$$

считая, что управление является кусочно постоянной функцией, то есть $u(t) = u_k = \mathrm{const}$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ и $t_{k+1} - t_k = h = \mathrm{const}$. Постройте для полученной дискретной системы закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = a_1\theta_k + a_2\varphi_k + a_3\dot{\theta}_k + a_4\dot{\varphi}_k,$$

так, чтобы: **(а)** неустойчивое собственное число $\lambda \approx e^{4.252h}$ перешло внутрь единичного круга комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda \approx e^{4.252h}$ и $\lambda = 1$ перешла в заданную пару вещественных чисел внутри единичного круга комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел $\lambda \approx e^{4.252h}$ и $\lambda = 1$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга комплексной плоскости.

11. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только положение плеча θ_k и угол отклонения маятника φ_k в моменты времени t_k. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda \approx e^{4.252h}$ и $\lambda = 1$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и

(б) комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости. Как изменится переходной процесс, если отказаться от требования асимптотической устойчивости наблюдателя и оставить лишь устойчивость по Ляпунову. Можно ли в этом случае восстановить неизвестное состояние системы.

12. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

13. Синтезируйте закон управления, минимизирующий значения следующего квадратичного функционала

$$\int_0^\infty \left(q_{11}\theta^2 + q_{22}\varphi^2 + q_{33}\dot{\theta}^2 + q_{44}\dot{\varphi}^2 + u^2\right)dt, \quad q_{kk} \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

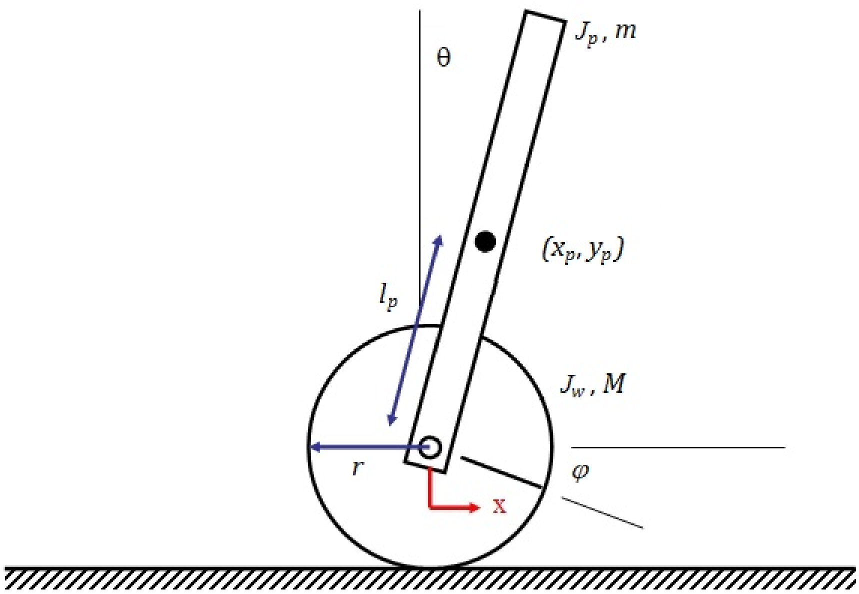
Как данный закон управления зависит от коэффициентов q_{kk}? Как переходной процесс зависит от этих коэффициентов? Рассмотрите случаи, когда произвольные наборы коэффициентов обращаются в ноль.

1.3. Управление сегвеем

На рисунке приведено схематическое изображение сегвея, представляющего собой перевернутый маятник, закреплённый на оси вращения колеса. Колесо приводится в движение электродвигателем, который обеспечивает тяговое усилие $F_{\text{тяг}}$:

$$F_{\text{тяг}} = K_t\left(V - K_s\dot{x}\right),$$

где V — управление — напряжение, подаваемое на обмотку электродвигателя, x — координата по оси абсцисс геометрического центра колеса (совпадает с центом масс), $K_t = 1.726$ Н/В и $K_s = 4.487$ В·с/м — конструктивные параметры.



1. Используя θ, $\dot{\theta}$, x и $\dot{x}$ в качестве переменных состояния, проверьте, что кинетическая энергия системы может быть записана в виде:

$$T = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I + ml^2\right)\dot{\theta}^2 - ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta,$$

где $m = 0.56$ кг — масса маятника, $I = 0.89$ кг·м^2 — момент инерции маятника относительно центра масс, $l = 0.1778$ м — расстояние от точки крепления до центра масс, $M = 1.206$ кг — масса тележки.

2. Запишите потенциальную энергию системы, считая, что нулевой потенциальный уровень совпадает с горизонтальным положением маятника.

3. Используя уравнения Лагранжа, запишите уравнения динамики системы, считая, что обобщённые силы порождаются силой тяги $F_{тяг}$ и силами трения $B_{eq}\dot{x}$, $B_p\dot{\theta}$, где $B_{eq} = 5.4$ Н·с/м — коэффициент вязкого трения между колесом каретки и направляющей и $B_p = 1.4$ Н·м·с — коэффициент вязкого трения в точке крепления маятника.

4. Найдите состояния равновесия в системе, определите их тип и линеаризуйте уравнения в окрестности неустойчивого состояния равновесия.

5. Синтезируйте стабилизирующий закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$V = a_1\theta + a_2 x + a_3\dot{\theta} + a_4\dot{x} \tag{1.4}$$

так, чтобы: **(а)** неустойчивое собственное число $\lambda \approx 0.521$ перешло в левую полуплоскость комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda \approx 0.521$ и $\lambda = 0$ перешла в пару вещественных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел $\lambda \approx 0.521$ и $\lambda = 0$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Проверьте работоспособность получившегося регулятора как для линейной системы, так и для нелинейной. Оцените область устойчивости, порождаемую построенным регулятором. Как меняется переходной процесс в каждом из перечисленных случаев?

6. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только положение тележки x и угол отклонения маятника θ. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda \approx 0.521$ и $\lambda = 0$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости. Как изменится переходной процесс, если отказаться от требования асимптотической устойчивости наблюдателя и оставить лишь устойчивость по Ляпунову. Можно ли в этом случае восстановить неизвестное состояние системы.

7. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

8. Перейдите от непрерывной системы к дискретной по формуле

$$\xi_{k+1} = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\xi_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)}Bu(s)ds, \quad \xi_k = \left(\theta_k,\, x_k,\, \dot{\theta}_k,\, \dot{x}_k\right)^{\top},$$

считая, что управление является кусочно постоянной функцией, то есть $u(t) = u_k = \mathrm{const}$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ и $t_{k+1} - t_k = h = \mathrm{const}$. Постройте для полученной дискретной системы закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = a_1\varphi_k + a_2x_k + a_3\dot{\varphi}_k + a_4\dot{x}_k,$$

так, чтобы: **(а)** неустойчивое собственное число $\lambda \approx e^{0.521h}$ перешло внутрь единичного круга комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda \approx e^{0.521h}$ и $\lambda = 1$ перешла в заданную пару вещественных чисел внутри единичного круга комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел $\lambda \approx e^{0.521h}$ и $\lambda = 1$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга комплексной плоскости.

9. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только положение колеса x_k и угол отклонения маятника θ_k в моменты времени t_k. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda \approx e^{0.521h}$ и $\lambda = 1$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости. Как изменится переходной процесс, если отказаться от требования асимптотической устойчивости наблюдателя и оставить лишь устойчивость по Ляпунову. Можно ли в этом случае восстановить неизвестное состояние системы.

10. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

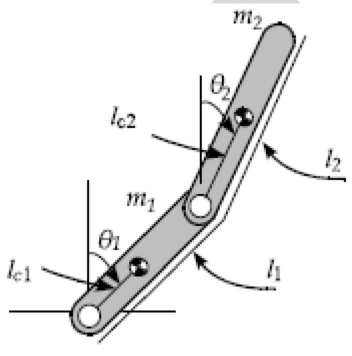
11. Синтезируйте закон управления, минимизирующий значения следующего квадратичного функционала

$$\int\limits_0^{\infty} \left(q_{11}\theta^2 + q_{22}\varphi^2 + q_{33}\dot{\theta}^2 + q_{44}\dot{\varphi}^2 + u^2\right)dt, \quad q_{kk} \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Как данный закон управления зависит от коэффициентов q_{kk}? Как переходной процесс зависит от этих коэффициентов? Рассмотрите случаи, когда произвольные наборы коэффициентов обращаются в ноль.

1.4. Двойной перевёрнутый маятник

На рисунке приведено схематическое изображение двойного перевёрнутого маятника (double inverted pendulum) с неподвижной точкой опоры, представляющей собой цилиндрический шарнир. Такой же шарнир соединяет между собой звенья маятника. Оси шарниров перпендикулярны плоскости чертежа. Будем считать, что управление осуществляется при помощи момента M, приложенного в точке подвеса маятника.



1. Обозначим через θ_1 и θ_2 отсчитываемые в положительном направлении углы отклонения от вертикали первого и второго звеньев соответственно. Используя $\theta_1, \dot\theta_1, \theta_2, \dot\theta_2$ в качестве переменных состояния, проверьте, что кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\big(I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2\big)\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}\big(I_2 + m_2 l_2^2\big)\dot\theta_2^2 + m_2 l_2 L_1 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

где $m_1 = m_2 = 0.127$ кг — массы звеньев маятника, $I_1 = I_2 = 1.2\cdot 10^{-3}$ кг·м^2 — моменты инерции звеньев маятника относительно центров масс, $l_1 = l_2 = 0.178$ м — расстояния от точки крепления до центра масс каждого звена, $L_1 = L_2 = 0.356$ м — длины звеньев маятника.

2. Проверьте, что если в качестве нулевого потенциального уровня выбрано горизонтальное положение маятника ($\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$), то потенциальная энергия системы имеет вид

$$U = m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g (L_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

3. Используя уравнения Лагранжа, запишите уравнения динамики системы, считая, что обобщённые силы порождаются моментом M и моментами сил трения $B_1\dot\theta_1$, $B_2\dot\theta_2$, где $B_1 = B_2 = 0.5$ Н·м·с — коэффициенты вязкого трения в точках крепления звеньев.

4. Найдите состояния равновесия в системе, определите их тип и линеаризуйте уравнения в окрестности неустойчивого состояния равновесия.

5. Синтезируйте стабилизирующий закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$V = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\dot{\theta}_1 + a_4\dot{\theta}_2$$

так, чтобы: **(а)** пара неустойчивых собственных чисел $\lambda_1 \approx 12.116$ и $\lambda_2 \approx 4.469$ перешла в пару вещественных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел λ_1 и λ_2 перешла в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел λ_1 и λ_2 перешла в пару чисто мнимых чисел; **(г)** одно число из пары собственных чисел λ_1, λ_2 переходит в левую полуплоскость комплексной плоскости, а другое — в ноль. Проверьте работоспособность получившегося регулятора как для линейной системы, так и для нелинейной. Оцените область устойчивости, порождаемую построенным регулятором. Как меняется переходной процесс в каждом из перечисленных случаев?

6. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только углы отклонения звеньев маятника θ_1 и θ_2. Построить асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа λ_1 и λ_2 перейдут: в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости.

7. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

8. Покажите, что задача синтеза стабилизирующего статического регулятора по выходу $V = a_1\theta_1 + a_2\theta_2$ не имеет решения.

9. Перейдите от непрерывной системы к дискретной по формуле

$$\xi_{k+1} = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\xi_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)}Bu(s)ds, \quad \xi_k = \left(\theta_{1,k},\, \theta_{2,k},\, \dot{\theta}_{1,k},\, \dot{\theta}_{2,k}\right)^{\top},$$

считая, что управление является кусочно постоянной функцией, то есть $u(t) = u_k = \mathrm{const}$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ и $t_{k+1} - t_k = h = \mathrm{const}$.

Постройте для полученной дискретной системы закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = a_1\theta_{1,k} + a_2\theta_{2,k} + a_3\dot{\theta}_{1,k} + a_4\dot{\theta}_{2,k},$$

так, чтобы: **(а)** пара собственных чисел $\lambda_1 \approx e^{12.116h}$ и $\lambda_2 \approx e^{4.469h}$ перешла в заданную пару вещественных чисел внутри единичного круга на комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda_1 \approx e^{12.116h}$ и $\lambda_2 \approx e^{4.469h}$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга на комплексной плоскости.

10. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только углы отклонения звеньев маятника $\theta_1(t_k)$ и $\theta_2(t_k)$ в моменты времени t_k. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda_1 \approx e^{12.116h}$ и $\lambda_2 \approx e^{4.469h}$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга на комплексной плоскости.

11. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

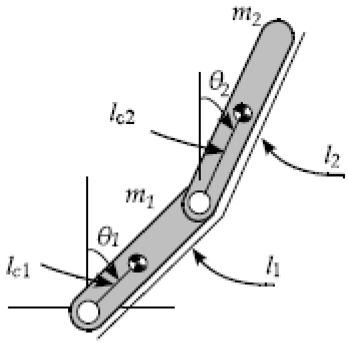
12. Синтезируйте закон управления, минимизирующий значения следующего квадратичного функционала

$$\int_0^\infty \left(q_{11}\theta^2 + q_{22}\varphi^2 + q_{33}\dot{\theta}^2 + q_{44}\dot{\varphi}^2 + u^2\right)dt, \quad q_{kk} \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Как данный закон управления зависит от коэффициентов q_{kk}? Как переходной процесс зависит от этих коэффициентов? Рассмотрите случаи, когда произвольные наборы коэффициентов обращаются в ноль.

1.5. Двойной перевёрнутый маятник с управлением в межзвенном шарнире

На рисунке приведено схематическое изображение двойного перевёрнутого маятника (double inverted pendulum) с неподвижной точкой опоры, представляющей собой цилиндрический шарнир. Такой же шарнир соединяет между собой звенья маятника. Оси шарниров перпендикулярны плоскости чертежа. Будем считать, что управление осуществляется при помощи момента M, приложенного в точке крепления звеньев.



1. Обозначим через θ_1 и θ_2 отсчитываемые в положительном направлении углы отклонения от вертикали первого и второго звеньев соответственно. Используя $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$ в качестве переменных состояния, проверьте, что кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\left(I_2 + m_2 l_2^2\right)\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

где $m_1 = m_2 = 0.127$ кг — массы звеньев маятника, $I_1 = I_2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2 — моменты инерции звеньев маятника относительно центров масс, $l_1 = l_2 = 0.178$ м — расстояния от точки крепления до центра масс каждого звена, $L_1 = L_2 = 0.356$ м — длины звеньев маятника.

2. Проверьте, что если в качестве нулевого потенциального уровня выбрано горизонтальное положение маятника ($\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$), то потенциальная энергия системы имеет вид

$$U = m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g (L_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

3. Используя уравнения Лагранжа, запишите уравнения динамики системы, считая, что обобщённые силы порождаются моментом M

и моментами сил трения $B_1\dot{\theta}_1$, $B_2\dot{\theta}_2$, где $B_1 = B_2 = 0.5$ Н·м·с — коэффициенты вязкого трения в точках крепления звеньев.

4. Найдите состояния равновесия в системе, определите их тип и линеаризуйте уравнения в окрестности неустойчивого состояния равновесия.

5. Синтезируйте стабилизирующий закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$V = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\dot{\theta}_1 + a_4\dot{\theta}_2$$

так, чтобы: **(а)** пара неустойчивых собственных чисел $\lambda_1 \approx 12.116$ и $\lambda_2 \approx 4.469$ перешла в пару вещественных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел λ_1 и λ_2 перешла в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости; **(в)** пара собственных чисел λ_1 и λ_2 перешла в пару чисто мнимых чисел; **(г)** одно число из пары собственных чисел λ_1, λ_2 переходит в левую полуплоскость комплексной плоскости, а другое — в ноль. Проверьте работоспособность получившегося регулятора как для линейной системы, так и для нелинейной. Оцените область устойчивости, порождаемую построенным регулятором. Как меняется переходной процесс в каждом из перечисленных случаев?

6. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только углы отклонения звеньев маятника θ_1 и θ_2. Построить асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа λ_1 и λ_2 перейдут: в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** в пару комплексно сопряженных чисел в левой полуплоскости комплексной плоскости.

7. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

8. Покажите, что задача синтеза стабилизирующего статического регулятора по выходу $V = a_1\theta_1 + a_2\theta_2$ не имеет решения.

9. Перейдите от непрерывной системы к дискретной по формуле

$$\xi_{k+1} = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\xi_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)}Bu(s)ds, \quad \xi_k = \left(\theta_{1,k},\, \theta_{2,k},\, \dot{\theta}_{1,k},\, \dot{\theta}_{2,k}\right)^{\top},$$

считая, что управление является кусочно постоянной функцией, то есть $u(t) = u_k = \text{const}$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ и $t_{k+1} - t_k = h = \text{const}$. Постройте для полученной дискретной системы закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = a_1\theta_{1,k} + a_2\theta_{2,k} + a_3\dot{\theta}_{1,k} + a_4\dot{\theta}_{2,k},$$

так, чтобы: **(а)** пара собственных чисел $\lambda_1 \approx e^{12.116h}$ и $\lambda_2 \approx e^{4.469h}$ перешла в заданную пару вещественных чисел внутри единичного круга на комплексной плоскости; **(б)** пара собственных чисел $\lambda_1 \approx e^{12.116h}$ и $\lambda_2 \approx e^{4.469h}$ перешла в пару комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга на комплексной плоскости.

10. Предположим, что непосредственному наблюдению доступны только углы отклонения звеньев маятника $\theta_1(t_k)$ и $\theta_2(t_k)$ в моменты времени t_k. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка. Что будет происходить с невязкой, если собственные числа $\lambda_1 \approx e^{12.116h}$ и $\lambda_2 \approx e^{4.469h}$ перейдут в пару **(а)** вещественных чисел и **(б)** комплексно сопряженных чисел внутри единичного круга на комплексной плоскости.

11. Используя результаты из предыдущего пункта, постройте регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию наблюдателя.

12. Синтезируйте закон управления, минимизирующий значения следующего квадратичного функционала

$$\int_0^\infty \left(q_{11}\theta^2 + q_{22}\varphi^2 + q_{33}\dot{\theta}^2 + q_{44}\dot{\varphi}^2 + u^2\right)dt, \quad q_{kk} \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Как данный закон управления зависит от коэффициентов q_{kk}? Как переходной процесс зависит от этих коэффициентов? Рассмотрите случаи, когда произвольные наборы коэффициентов обращаются в ноль.