ЛЕКЦИЯ 16

Обобщенное решение первой краевой задачи.

Снова рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Классическим решением задачи (1)-(3) называется функция $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$, где $\bar{Q} = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2), (3).

Теорема 1. *Пусть функция u является классическим решением задачи Тогда существует положительная постоянная M, не зависящая от φ, ψ и f, такая, что справедливо неравенство (энергетическая оценка):*

$$|u(x,t)| \le M(\max_x |\varphi'(x)| + \max_x |\psi(x)| + \max_{x,t} |f(x,t)|). \tag{4}$$

Существование классического решения задачи (1)-(3) было получено при весьма жестких условиях на начальные функции φ и ψ. Введя понятие обобщенного решения, можно значительно ослабить эти условия.

Рассмотрим сначала случай однородного уравнения ($f(x,t) \equiv 0$).

Функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3), если существуют классические решения $u_n(x,t)$ этой задачи с начальными данными φ_n, ψ_n, такие что при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ сходятся равномерно на отрезке $[0,l]$ к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, а последовательность $u_n(x,t)$ сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{Q}$ к функции $u(x,t)$.

Если u – классическое решение задачи (1)-(3), то оно имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{5}$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\ \ B_n = \frac{l}{\pi n a}\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если начальные функции удовлетворяют условиям*

$$\varphi \in C^2[0,l],\ \psi \in C^1[0,l],\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0,\ \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

то существует обобщенное решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Для доказательства существования обобщенного решения в качестве $u_n(x,t)$ рассмотрим частичную сумму ряда (5):

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos\frac{\pi k}{l} at + B_k \sin\frac{\pi k}{l} at \right) \sin\frac{\pi k}{l} x,$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются формулами (6).

Ясно, что $u_n(x,t)$ являются классическими решениями задачи (1)-(3) с соответствующими начальными функциями. Интегрируя по частям первый интеграл в (6) два раза, а второй интеграл в (6) один раз и учитывая условия, наложенные на функции φ и ψ, получим оценки

$$|A_n| < Mn^{-2},\ |B_n| < Mk^{-2}.$$

Отсюда вытекает, что в области $\bar{Q}$ последовательность u_n равномерно стремится к

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \right) \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Из построения коэффициентов A_k, B_k и из известных теорем о свойствах ряда Фурье вытекает, что $u_n(x,0)$ равномерно стремится к $\varphi(x)$, $\partial u(x,0)/\partial t$ равномерно стремится к $\psi(x)$ на отрезке $[0,l]$, что и завершает доказательство существования обобщенного решения.

Если $u(x,t)$ - классическое решение, то в качестве последовательности $u_n(x,t)$ можно взять стационарную последовательность $u_n(x,t) = u(x,t)$, то есть каждое классическое решение является обобщенным решением.

Для доказательства единственности обобщенного решения достаточно доказать, что если для какой-нибудь последовательности классических решений $u_n(x,t)$ ее начальные функции $u_n(x,0)$ и $\partial u_n(x,0)/\partial t$ равномерно стремятся к нулю на отрезке $[0,l]$, то $u_n(x,t) \to 0$ в области Q. Это сразу вытекает из энергетической оценки.

Аналогично можно рассмотреть обобщенные решения неоднородного уравнения.

Пусть в (2) $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3), если существуют классические решения $u_n(x,t)$ этой задачи с правыми частями $f_n(x,t)$, такие что при $n \to \infty$ последовательность $f_n(x,t)$ сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{Q}$ к $f(x,t)$, а последовательность $u_n(x,t)$ сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{Q}$ к функции $u(x,t)$.

Можно построить обобщенные решения задачи (1)-(3) при еще более слабых условиях на функцию $f(x,t)$. Для этого потребуется использовать оператор, сопряженный оператору

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

с однородными краевыми условиями.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \tag{9}$$

Пусть $\bar{Q} = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$. Функция $u(x,t) \in C(\bar{Q})$ называется обобщенным решением задачи (7)-(9), если

$$\int_{\bar{Q}} u(x,t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dxdt = \int_{\bar{Q}} v(x,t)f(x,t)dxdt \tag{10}$$

для любой функции $v(x,t)$, имеющей в $\bar{Q}$ непрерывные производные вплоть до четвертого порядка и такой, что

$$v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0,\ v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Если ввести обозначение

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

то равенство (10) записывается в виде

$$\int_{\bar{Q}} u(x,t)Lv(x,t)dxdt = \int_{\bar{Q}} v(x,t)f(x,t)dxdt. \tag{11}$$

Проверим, что любое классическое решение является обобщенным. Возьмем классическое решение задачи (7)-(9). Обозначим

$$B = \{v \in C^4(\bar{Q}) : v(x,T) = v_t(x,t) = 0,\ v(0,t) = v(l,t) = 0\}.$$

Рассмотрим функцию из класса B, умножим на нее уравнение (7) и проинтегрируем по $\bar{Q}$. Левую часть получившегося равенства

$$\int_{\bar{Q}} v(x,t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdt$$

проинтегрируем по частям. Тем самым проверено выполнение равенства (10). При интегрировании по частям нужно убедиться, что все внеинтегральные члены, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial t}v,\ \frac{\partial v}{\partial t}u \text{ при } t=0,\ t=T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}v,\ \frac{\partial v}{\partial x}u \text{ при } x=0,\ x=l$$

равны нулю. Это выполняется в силу условий, наложенных на v и краевых условий задачи.

Таким образом, для рассматриваемых функций справедливо равенство

$$\int_{\bar{Q}} uLvdxdt = \int_{\bar{Q}} vLudxdt.$$

Это означает, что дифференциальный оператор L с условиями

$$v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0,\ v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

является сопряженным оператору L с условиями (8), (9).

Теорема 3. *Для любой функции $f(x,t) \in C(\bar{Q})$ существует и единственно обобщенное решение задачи (7)-(9).*

Доказательство. Докажем существование обобщенного решения посредством перехода к пределу по последовательности классических решений. Построим последовательность функций $f_n \in C^4(\bar{Q})$, которые обращаются в тождественный нуль в окрестности отрезков $x=0$, $0 \le t \le T$, $x=l$, $0 \le t \le T$, и стремятся к функции f в среднеквадратичном в $\bar{Q}$ при $n \to \infty$.

Существует решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + f_n(x,t),$$

удовлетворяющее условиям (8), (9). Для разности решений справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 (u_n - u_m)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 (u_n - u_m)}{\partial x^2} = f_n(x,t) - f_m(x,t).$$

Имеет место оценка

$$|u_n - u_m| \leq M \left(|f_n - f_m|^2 dxdt\right)^{1/2}.$$

Следовательно, последовательность u_n сходится равномерно в $\bar{Q}$ к $u \in C(\bar{Q})$ при $n \to \infty$. Как показано выше, для любого $v \in B$ справедливо равенство

$$\int_{\bar{Q}} u_n L v dxdt = \int_{\bar{Q}} v f_n dxdt.$$

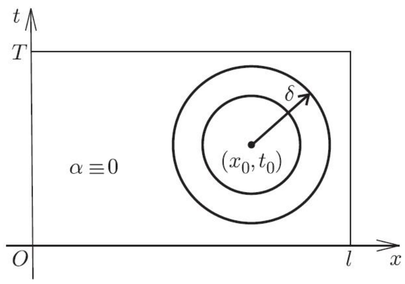
Переходя к пределу при $n \to \infty$, приходим к равенству (10). Существование обобщенного решения доказано.

Докажем единственность обобщенного решения задачи. Для этого достаточно доказать, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Итак, пусть для всех $v \in B$

$$\int_Q u(x,t) L v dxdt = 0. \tag{12}$$

Требуется доказать, что $u \equiv 0$.

Проведем доказательство от противного: противоположное утверждение означает, что найдется внутренняя точка $(x_0, t_0) \in Q$, в которой значение функции не равно 0.



Без ограничения общности будем считать, что $u(x_0, t_0) > 0$ и, следовательно, $u(x,t) > \gamma > 0$ во внутренней окрестности Ω точки (x_0, t_0), $\Omega = \{(x,t) : (x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 < \delta\}$. Пусть $\alpha \in C^4(Q)$ - неотрицательная функция, которая тождественно равна нулю при

$$(x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 > \delta$$

и больше единицы при

$$(x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 < \delta/2.$$

Пусть $v(x,t)$ - решение уравнения $Lv = \alpha(x,t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0, \ v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Такая задача, очевидно, сводится к задаче (7)-(9) простой заменой переменных $\tau = T - t$. Следовательно, решение $v(x,t)$ существует. Равенство (12) приобретает вид

$$\int_Q u(x,t)\alpha(x,t) dxdt = 0,$$

что противоречит предположению о знаке $u(x,t)$ и построению функции α.

Список литературы

[1] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.