# *Модуль 12 – Практикум по теме 12.2*

# *Интерполяция полиномами (часть I)*

**Пример 1 (степень полинома 1, данные без вычислительной погрешности, интерполяция в точке)**

Функция $f(x) = (1-x)^8$ задана на сетке **без вычислительной погрешности:**

| $x_i$ | 0.01 | 0.02 |
|---|---|---|
| $f_i$ | $(0.99)^8$ | $(0.98)^8$ |

$$(0.98)^8 = 0.850\ 763\ 022\ 581\ 786\ 600$$

$$(0.99)^8 = 0.922\ 744\ 694\ 427\ 920\ 100$$

**Нужно:**

1) построить интерполяционный полином (по всем узлам сетки, их 2)

2) вычислить приближенно $f(0.017)$ с помощью ИП

3) провести анализ погрешности

4) оценить $f(0.017)$ с учетом погрешности

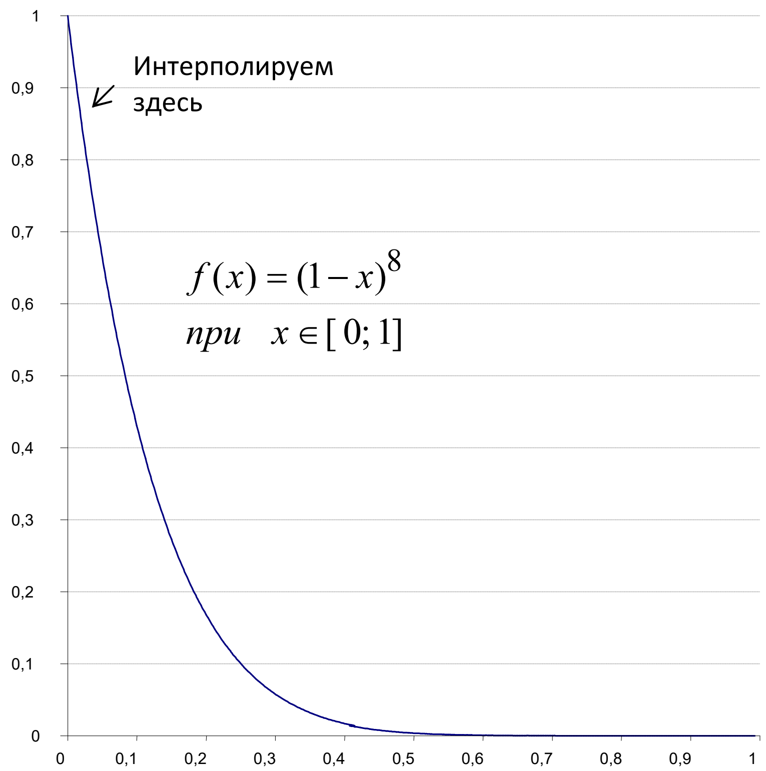


Рисунок 1

## О постановке задачи

В этом примере с целью освоения приемов интерполяции **вычислительная погрешность исключена абсолютно**.

Данные для примера сверены с Таблицами Питера Барлоу: это изданные в 1814 г. и с тех пор многократно проверенные и повторно изданные (в том числе в нашей стране) *таблицы квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел до 15 000*. В изданиях 20 столетия (М., «Наука», 1975 год) включены степени от 4 до 10 для целых чисел от 1 до 1000 и ряд других функции целых чисел.

Как используют Таблицы: если нужно значение $(0.99)^4$, находим

$$99^2 = 9801 \quad (9801)^2 = 92\ \ 236\ \ 816$$

Значит, $(0.99)^4 = 0.922\ \ 368\ \ 160$ и вычислительная погрешность отсутствует.

В этом тексте по Таблицам проверены:

– значения функции в узлах интерполяции (указаны выше);

– значения для оценки погрешности интерполяции:

$$(0.98)^6 = 0.885\ \ 842\ \ 380\ \ 864$$

$$(0.99)^6 = 0.941\ \ 480\ \ 149\ \ 401$$

– без потери точности найдено значение интерполяционного полинома:

$$0.7 \cdot (0.98)^8 + 0.3 \cdot (0.99)^8 = 0.872\ \ 357\ \ 524\ 135\ \ 625\ \ 950$$

– использовано значение для сверки с результатом интерполяции:

$$(0.983)^8 = 0.871\ \ 822\ \ 639\ \ 630\ \ 584\ 198\ 373\ \ 441$$

## Модель решения задачи

- В этом примере, используя абсолютно точные значения $(0.99)^8$ и $(0.98)^8$, нужно вычислить неизвестное значение $(0.983)^8$ **методом линейной интерполяции.**
- Оценить погрешность, откорректировать значение.
- Сравнить с истинным значением $(0.983)^8$ (оно взято из Таблиц Барлоу).
- В процессе решения освоить сопутствующие определения и теоремы.
- Рассматривать происходящее как интерполяцию функции $f(x) = (1-x)^8$ на отрезке $[a;\ b] = [0.01; 0.02]$

**Р е ш е н и е**

**Ш а г 1**

*Рассмотрим отрезок* $[a;\ b\,] = [0.01; 0.02]$, *сетку* $x_0 = 0.01; x_1 = 0.02$.

*Участков сетки* $n = 1$.

*Точные значения функции в узлах сетки обозначены через* $f_i\,, i = 0, 1$.

*Общий вид интерполяционный полинома степени 1*

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot f_1$$

*В данной задаче ИП принимает вид*

$$P_1(x) = \frac{(x - 0.01)}{(0.02 - 0.01)} \cdot (0.98)^8 + \frac{(x - 0.02)}{(0.01 - 0.02)} \cdot (0.99)^8$$

*Упростим выражение, получим:*

$$P_1(x) = 100 \cdot (x - 0.01) \cdot (0.98)^8 - 100 \cdot (x - 0.02) \cdot (0.99)^8$$

*Значение ИП в точке* $x = 0.017$ *составит*

$$P_1(0.017) = 100 \cdot (0.017 - 0.01) \cdot (0.98)^8 - 100 \cdot (0.017 - 0.02) \cdot (0.99)^8$$

*то есть*

$$P_1(0.017) = 0.7 \cdot (0.98)^8 + 0.3 \cdot (0.99)^8$$

*В качестве приближенного значения функции* $f(x) = (1 - x)^8$ *в точке* $x = 0.017$ *принимаем значение ИП в этой же точке:*

$$f(0.017) \approx P_1(0.017)$$

$$f(0.017) \approx 0.7 \cdot (0.98)^8 + 0.3 \cdot (0.99)^8$$

*Теперь в числах:*

$$f(0.017) = (1 - 0.017)^8 = (0.983)^8$$

$$0.7 \cdot (0.98)^8 + 0.3 \cdot (0.99)^8 = 0.872\ \ 357\ \ 524\ \ 135\ \ 625\ \ 950$$

(арифметика с сохранением всех разрядов числа)

*Значение* $f(0.017)$ *с помощью ИП степени 1 вычислено:*

$f(0.017) \approx 0.872\ 357\ 524\ 135\ 625\ 950$

*Интерполяционный полином построен:*

$$P_1(x) = (85.076\ 302\ 258\ 178\ 660) \cdot (x - 0.01) -$$
$$- (92.274\ 469\ 442\ 792\ 010) \cdot (x - 0.02)$$

**Шаг 2**

*Проведем анализ погрешности.*

*Как обсуждали выше, в данном примере*

*1) отсутствует погрешность исходных данных*

*2) интерполяционный полином записан (задан) точно*

*3) его значение вычислено абсолютно без погрешности.*

*Погрешностью интерполяции в точке* $x$ *называют разность значения функции в этой точке и значения интерполяционного полинома в этой точке:*

$r_1(x) = f(x) - P_1(x)$

*Погрешность И. в точке* $x$ *обозначают* $r_1(x)$ (1 – степень полинома)

*По Теореме о погрешности интерполяции (экстраполяции) погрешность И. равна выражению*

$$r_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$ (это теорема для степени 1)

*где точка* $\xi$ *для каждого значения* $x$ *«своя», ее нахождение неизвестно, но она обитает на отрезке* $\xi \in [\min[a; x]; \max[b; x]]$

*Отличия интерполяции/экстраполяции*

*Если полином используется в точке* $x \in [a; b]$ *, это интерполяция*

*Тогда* $\xi \in [a; b]$

*Если полином используется в точке* $x < a$ *, это экстраполяция слева.*

*Тогда* $\xi \in [x; b]$

*Если полином используется в точке* $x > b$ *, это экстраполяция справа.*

*Тогда* $\xi \in [\, a; x]$

*Термин «погрешность интерполяции» допустимо использовать и в случаях интерполяции, и в случаях экстраполяции.*

*В данной задаче погрешность И. в точке* $x = 0.017$ *есть разность значения функции в точке* $x = 0.017$ *и интерполяционного полинома в точке* $x = 0.017$

$r_1(0.017) = f(0.017) - P_1(0.017)$ (по определению)

*По Теореме она равна выражению*

$$r_1(0.017) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (0.017 - 0.01)(0.017 - 0.02), \;\; \xi \in [0.01;\; 0.02]$$

*В данной задаче интерполяция:* $x = 0.017 \in [\, 0.01; 0.02]$ *, поэтому* $\xi \in [0.01;\; 0.02]$.

*Подставим вторую производную и вычислим скобки*

$$r_1(0.017) = \frac{(-1)\cdot(-1)\cdot 8\cdot 7\cdot(1-\xi)^6}{2!} \cdot (0.007)\cdot(0.003)\cdot(-1), \;\; \xi \in [0.01;\; 0.02]$$

$$r_1(0.017) = -28 \cdot 21 \cdot 10^{-6} \cdot (1-\xi)^6, \;\; \xi \in [0.01;\; 0.02]$$

*Для погрешности интерполяции в точке* $x = 0.017$
*получено выражение*

$$r_1(0.017) = -0.588 \cdot 10^{-3} \cdot (1-\xi)^6, \;\; \xi \in [0.01;\; 0.02]$$

*Очевиден знак : она <u>строго отрицательна</u>:* $r_1(0.017) < 0$

*Очевидна оценка: если* $\xi \in [0.01;\; 0.02]$ *тогда*

$$(0.98)^6 \le (1-\xi)^6 \le (0.99)^6$$

*Для погрешности И. построим оценку сверху и снизу:*

$$\underbrace{-0.588\cdot10^{-3}\cdot(0.99)^6}_{\substack{\text{это нижняя граница}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности } И.}} \le \underbrace{r_1(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестная нам}\\ \text{погрешность } И.}} \le \underbrace{-0.588\cdot10^{-3}\cdot(0.98)^6}_{\substack{\text{это верхняя граница}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности } И.}} < 0$$

*Еще раз в числах:*

*Абсолютно точные значения* $(0.99)^6$ и $(0.98)^6$ *взяты из Таблиц Барлоу, нижняя и верхняя границы погрешности И. вычислены абсолютно без погрешности:*

$$0.588\cdot10^{-3}\cdot(0.99)^6 = 0.553\ 590\ 327\ 847\ 788\cdot10^{-3}$$

$$0.588\cdot10^{-3}\cdot(0.98)^6 = 0.520\ 875\ 319\ 948\ 032\cdot10^{-3}$$

*Для погрешности И. в точке* $x = 0.017$ *получена оценка*

$$\underbrace{-0.5536\cdot10^{-3}}_{\substack{\text{'это нижняя граница}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности } И.}} \le \underbrace{r_1(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестная нам}\\ \text{погрешность } И.}} \le \underbrace{-0.5208\cdot10^{-3}}_{\substack{\text{это верхняя граница}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности } И.}} < 0$$

*(нижнюю границу с учетом отрицательного значения округлили в меньшую сторону, верхнюю границу – в большую сторону)*

*Комментарий:* *не запрещено использовать верную, но грубую оценку* $0 < (1-\xi)^6 \le 1$. *Тогда получится верная, но грубая оценка*

$$\underbrace{-0.588\cdot10^{-3}}_{\substack{\text{это оценка}\\ \text{нижней границы}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности } И.}} \le \underbrace{r_1(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестная нам}\\ \text{погрешность Ию}}} < \underbrace{0}_{\substack{\text{это оценка}\\ \text{верхней границы}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности } И.}}$$

*Оценка погрешности интерполяции построена.*
*Продолжим работать с негрубой оценкой*

**Шаг 3**

*Интервальная оценка неизвестного значения функции*

*Чтобы «переосмыслить» приближенное значение* $f(0.017)$, *вспомним определение погрешности интерполяции:*

$$r_1(0.017) = f(0.017) - P_1(0.017)$$

*Подставим, получим*

$$\underbrace{-0.5536\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{'это нижняя граница}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности И.}}} \le \underbrace{f(0.017) - P_1(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестная нам}\\ \text{погрешность И.}}} \le \underbrace{-0.5208\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{это верхняя граница}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности И.}}} < 0$$

*В каждой части неравенства добавим* $P_1(0.017)$, *получим оценку*

$$\underbrace{P_1(0.017) - 0.5536\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{нижняя оценка}\\ \text{неизвестного}\\ \text{значения функции}}} \le \underbrace{f(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестное}\\ \text{значение функции}}} \le \underbrace{P_1(0.017) \ - 0.5208\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{верхняя оценка}\\ \text{неизвестного}\\ \text{значения функции}}}$$

*Для расчета левой и правой части неравенства используем значение*

$$P_1(0.017) = 0.872\ \ 357\ \ 524\ \ 135\ \ 625\ \ 950$$

*Оценка неизвестного значения* $f(0.017)$ *получена*

$$\underbrace{0.871\ \ 803\ \ 933\ \ 807\ \ 778}_{\substack{\text{нижняя оценка}\\ \text{неизвестного}\\ \text{значения функции}}} \le f(0.017) \le \underbrace{0.871\ \ 836\ \ 648\ \ 815\ \ 678}_{\substack{\text{верхняя оценка}\\ \text{неизвестного}\\ \text{значения функции}}}$$

*Стоит отметить:*

$$\underbrace{f(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестное}\\ \text{значение функции}}} \le \underbrace{P_1(0.017) \ - 0.5208\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{верхняя оценка}\\ \text{неизвестного}\\ \text{значения функции}}} < \underbrace{P_1(0.017}_{\substack{\text{это интерполяционный}\\ \text{полином в точке } x=0.017}}$$

*Значение* $f(0.017)$ *оказалось строго меньше значения интерполяционного полинома, и этот «зазор» между ними известен*

**И т о г и**

*1) Значение функции* $f(0.017) = (0.983)^8$ *оценено на основе интерполяционного полинома и оценок погрешности интерполяции:*

$$0.871\ 803 \le (0.983)^8 \le 0.871\ 837$$

*(нижняя граница округлена в меньшую сторону, правая – в большую)*

*2) В качестве приближенного значения* $f(0.017) = (0.983)^8$ *можно взять середину интервала и записать*

$$(0.983)^8 = 0.871\ 820 \pm 0.17 \cdot 10^{-4}$$

*3) Точное значение из Таблиц Барлоу*

$$(0.983)^8 = 0.871\ 822\ 639\ 630\ 584\ 198\ 373\ 441$$

*или кратко*

$$(0.983)^8 = 0.871\ 823 \pm 0.5 \cdot 10^{-6}$$

*попадает в интервал, полученный приемом линейной интерполяции*

$$0.871\ 823\ \in [0.871\ 803;\ 0.871\ 837]$$

**Ответ (пример ответа):**

**1) построить интерполяционный полином (по всем узлам сетки, их 2)**

$$P_1(x) = 100 \cdot (x - 0.01) \cdot (0.98)^8 - 100 \cdot (x - 0.02) \cdot (0.99)^8$$

**2) вычислить приближенно $f(0.017)$ с помощью ИП**

$$f(0.017) = (1 - 0.017)^8 = (0.983)^8$$

$$f(0.017) \approx 0.872\ \ 357\ \ 524\ \ 135\ \ 625\ \ 950$$

**3) провести анализ погрешности**

1) Погрешность исходных данных отсутствует

2) Погрешность задания (описания) ИП отсутствует

3) Погрешность вычисления ИП отсутствует

4) Погрешность интерполяции принимает отрицательное значение

$$r_1(0.017) = -0.588 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - \xi)^6, \ \ \xi \in [0.01;\ \ 0.02]$$

5) Оценка погрешности интерполяции

$$\underbrace{-0.5536 \cdot 10^{-3}}_{\substack{\textit{это нижняя граница} \\ \textit{погрешности И.}}} \le r_1(0.017) \le \underbrace{-0.5208 \cdot 10^{-3}}_{\substack{\textit{это верхняя граница} \\ \textit{погрешности И.}}} < 0$$

**4) оценить $f(0.017)$ с учетом погрешности интерполяции**

$$0.871\ \ 803 \le f(0.017) \le 0.871\ \ 837$$

или

$$f(0.017) = 0.871\ \ 820 \pm 0.17 \cdot 10^{-4}$$

(в качестве «нового» приближенного значения взята середина интервала)

Точное значение из Таблиц Барлоу

$$(0.983)^8 = 0.871\ \ 822\ \ 639\ \ 630\ \ 584\ \ 198\ \ 373\ \ 441$$

попадает в интервал, полученный приемом линейной интерполяции

$$0.871\ \ 823 \in [0.871\ \ 803;\ \ 0.871\ \ 837]$$

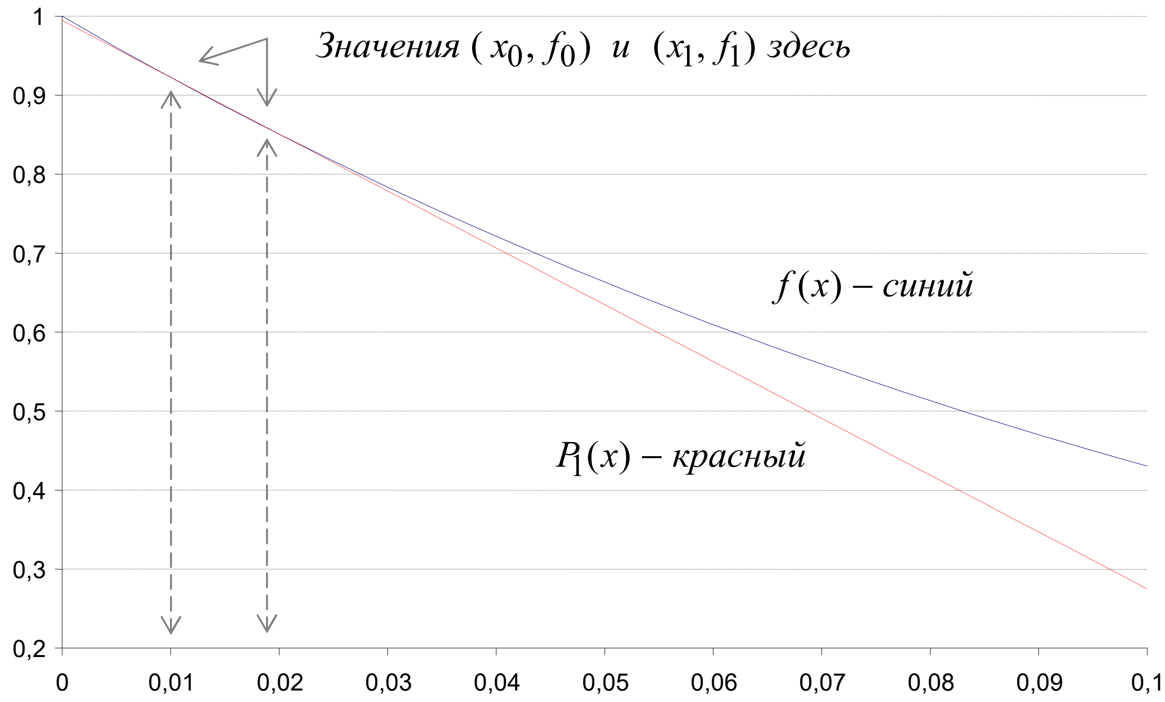


Рисунок 2

На рисунке показан отрезок $[0; 0.1]$, функция $f(x) = (1-x)^8$ и полином $P_1(x)$, интерполирующий данную функцию на отрезке $[0.01; 0.02]$. На рисунке видно, что **по мере удаления от отрезка интерполяции погрешность экстраполяции** нарастает.

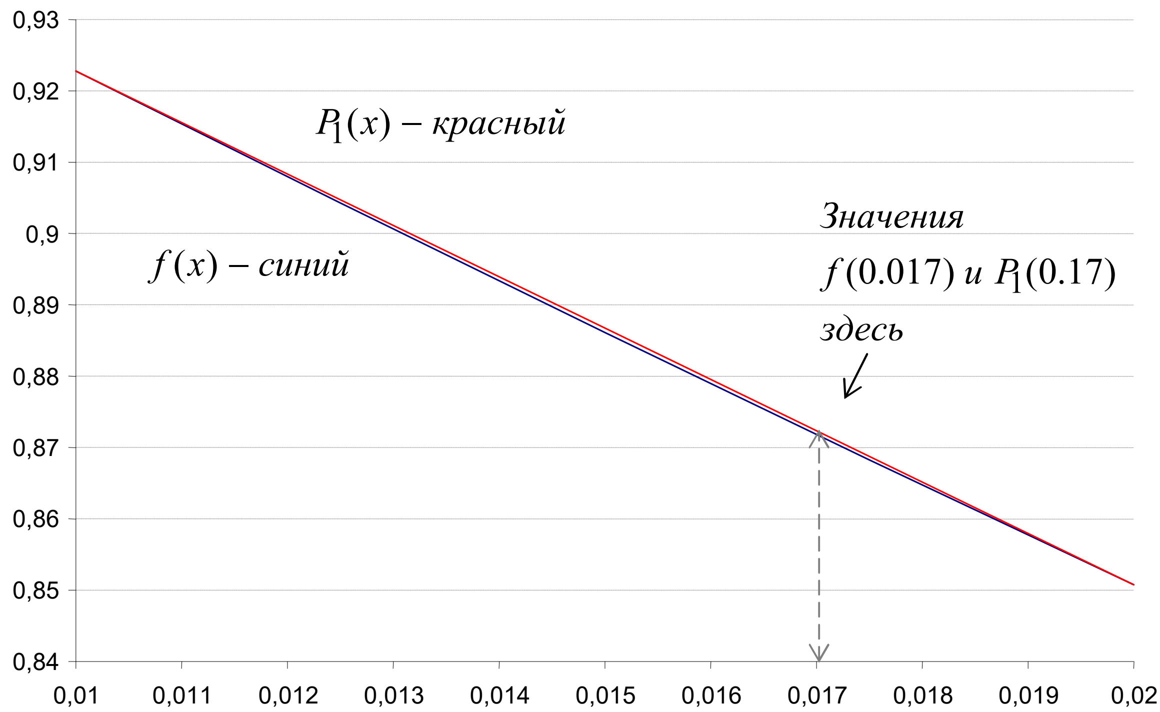


Рисунок 3

На рисунке показан отрезок $[0.01; 0.02]$, функция $f(x) = (1-x)^8$ и полином $P_1(x)$, интерполирующий данную функцию на этом отрезке. Полином находится выше функции.

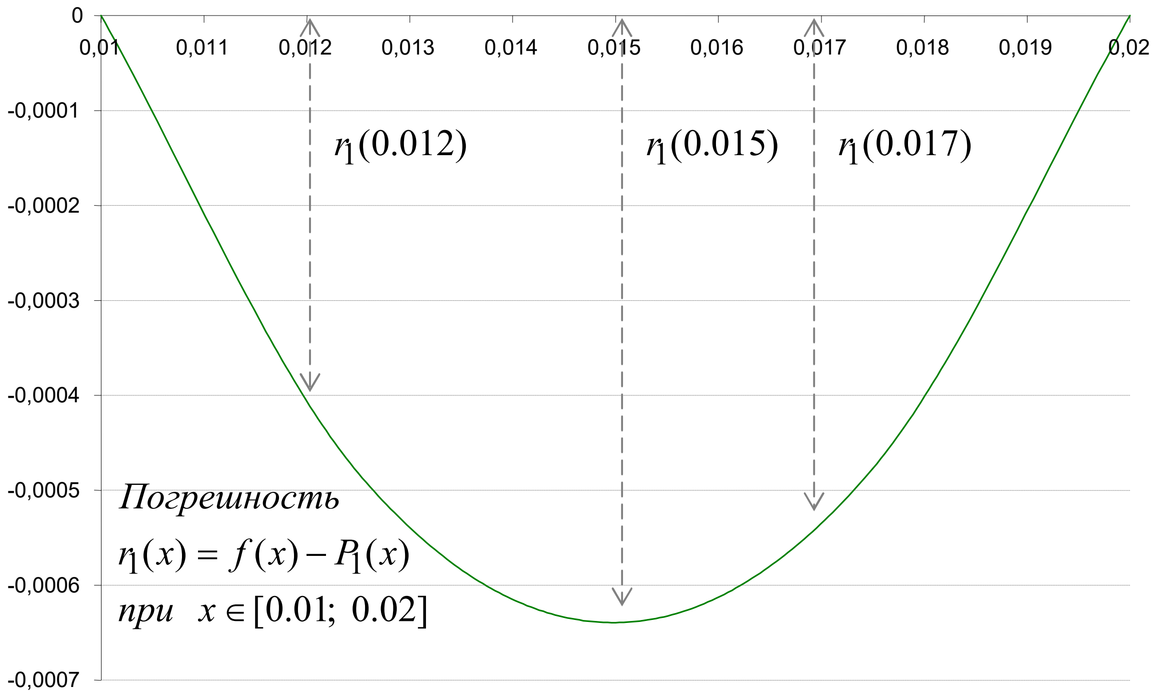


Рисунок 4

На рисунке погрешность интерполяции $r_1(x) = f(x) - P_1(x)$ вычислена как

$$r_1(x) = (1-x)^8 - 100 \cdot \{(x-0.01)\cdot(98)^8 - (x-0.02)\cdot(99)^8\}$$

Погрешность обращается в ноль в узлах интерполяции.

В остальных точках отрезка $[0.01;\ 0.02]$ является величиной отрицательной.

Максимальное по модулю значение – в середине отрезка.

График погрешности напоминает график параболы $Const \cdot (x-0.01)\cdot(x-0.02)$.

Но это не парабола: формула погрешности

$$r_1(x) = (-0.5)\cdot \sin(\xi(x))\cdot(x-0.01)\cdot(x-0.02)$$

содержит «дополнительную» зависимость от $x$.

**Вопрос**

Сюжет задачи таков, что значения $f(0.01) = (0.99)^8$ и $f(0.02) = (0.98)^8$ известны, значение $f(0.017) = (0.983)^8$ неизвестно, его находят приближенно с помощью полинома $P_1(x)$ и затем уточняют на основе Теоремы.

Вместе с тем на Рисунках 1-3 показаны значения функции $f(x)$ и полинома $P_1(x)$.

А на рисунке 4 – погрешность интерполяции $r_1(x) = f(x) - P_1(x)$ (ее точные значения).

**Как соотносятся приемы, использованные для оценки погрешности, и возможность наблюдать погрешность непосредственно на рисунке 4?**

**Приемы, использованные для расчета $f(0.017)$, и возможность видеть $f(x)$ практически при любых значениях аргумента на графике?**

### Ответ

1) Рисунки 1-4 сделаны на компьютере. При построении графиков использована формула для полинома и стандартная библиотека для расчета функции. **Сейчас такие средства общедоступны и многие из них используют (внутри) прием интерполяции с малым шагом.**

2) **Функция** $f(x)=(1-x)^8$ **выбрана как «модель», чтобы видеть погрешность интерполяции без влияния погрешности вычислений, а сетка задачи выбрана грубой, чтобы погрешность интерполяции (**$\approx 0.5\cdot 10^{-3}$**) все-таки было видно.**

**3) Интерполяционные полиномы и методы оценки погрешности интерполяции в настоящее время используются:**

а) при разработке математического обеспечения в целях создания библиотек для расчета наиболее востребованных математических функций;

б) для приближенного вычисления функции, если формула для ее непосредственного расчета отсутствует или такой расчет является трудоемким.

> **Важно:** Погрешность интерполяции (для полинома степени n) можно оценить, используя производную порядка n+1. **Производную в оценке часто заменяют разделенными или конечными разностями**. Для их подсчета нужно знать **только узлы сетки и значения функции в этих узлах**.

в) как основа других численных методов: дифференцирования, интегрирования, решения нелинейных алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений и т.д.

### Альтернативное решение

### Шаг 3 на базе грубой оценки

*Выясним, какой будет интервальная оценка неизвестного значения* $f(0.017)$*, если на Шаге 2 сделать грубую оценку погрешности интерполяции. Напомним грубую оценку:*

$$\underbrace{-0.588\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{это оценка}\\ \text{нижней границы}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности И.}}} \le \underbrace{r_1(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестная нам}\\ \text{погрешность И.}}} < \underbrace{0}_{\substack{\text{это оценка}\\ \text{верхней границы}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности И.}}}$$

*Используем определение*

$$r_1(0.017)=f(0.017)-P_1(0.017)$$

*подставим его в неравенство и получим*

$$\underbrace{-0.588\cdot 10^{-3}}_{\substack{\text{'это оценка}\\ \text{нижней границы}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности И.}}} \le \underbrace{f(0.017)-P_1(0.017)}_{\substack{\text{это неизвестная нам}\\ \text{погрешность И.}}} < \underbrace{0}_{\substack{\text{это оценка}\\ \text{верхней границы}\\ \text{неизвестной}\\ \text{погрешности И.}}}$$

*В каждой части неравенства добавим* $P_1(0.017)$

$$\underbrace{P_1(0.017)-0.588\cdot 10^{-3}}_{\text{это нижняя оценка неизвестного значения функции}} \le \underbrace{f(0.017)}_{\text{это неизвестное значение функции}} < \underbrace{P_1(0.017)}_{\text{это верхняя оценка неизвестного значения функции}}$$

*Для расчета левой и правой части неравенства используем значение*

$P_1(0.017)=0.872\ \ 357\ \ 524\ \ 135\ \ 625\ \ 950$

*Оценка неизвестного значения* $f(0.017)$ *получена*

$$\underbrace{0.871\ \ 769\ \ 524\ \ 135\ \ 626}_{\text{нижняя оценка неизвестного значения функции}} \le f(0.017) \le \underbrace{0.872\ \ 357\ \ 524\ \ 135\ \ 626}_{\text{верхняя оценка неизвестного значения функции}}$$

**Итоги будут такими**

*1) Значение* $f(0.017)=(0.983)^8$ *оценено грубо, но верно, на основе ИП и оценок погрешности И.:*

$0.871\ \ 769 \le (0.983)^8 \le 0.872\ \ 358$

*(нижняя оценка округлена в меньшую сторону, верхняя – в большую)*

*2) В качестве приближенного значения* $f(0.017)=(0.983)^8$ *можно взять середину интервала*

$(0.983)^8 = 0.872\ \ 064 \pm 0.295\cdot 10^{-3}$

*3) Точное значение из Таблиц Барлоу*

$(0.983)^8 = 0.871\ \ 822\ \ 639\ \ 630\ \ 584\ \ 198\ \ 373\ \ 441$

*разумеется, попадает в этот «грубый» интервал*

$0.871\ \ 823 \in [0.871\ \ 769;\ \ 0.872\ \ 358]$

**Сопоставление решений**

*Оба варианта решения являются правильными.*

*При этом на базе одного и того же ИП степени 1*

*более точная оценка* $r_1(0.017)$ *гарантирует, что* $(0.983)^8 = 0.8718$,

*более грубая оценка* $r_1(0.017)$ *гарантирует, что* $(0.983)^8 = 0.872$

**Пример 2 (экстраполяция)**

Условия задачи как в **Примере 1.** Вместо $f(0.017)$ исследуется $f(0.022)$.

**Модель решения задачи**

- В примере 2, используя абсолютно точные значения $(0.99)^8$ и $(0.98)^8$, нужно вычислить неизвестное значение $(0.978)^8$ **методом линейной интерполяции.**
- Оценить погрешность, откорректировать значение.
- Сравнить с истинным значением $(0.978)^8$ (сверить с Таблицами Барлоу).
- В процессе решения освоить сопутствующие определения и теоремы.
- Рассматривать происходящее как **экстраполяцию** функции $f(x) = (1-x)^8$ **интерполяционным полиномом**, построенным на отрезке $[a;\ b] = [0.01;\ 0.02]$

**Комментарии к решению**

*Интерполяционный полином, соответствующий условиям*

$$P_1(x_0) = f(x_0),\ \ P_1(x_1) = f(x_1)$$

*имеет тот же вид, что и в Примере 1:*

$$P_1(x) = 100 \cdot (x - 0.01) \cdot (0.98)^8 - 100 \cdot (x - 0.02) \cdot (0.99)^8$$

*Его значение в точке* $x = 0.022$

$$P_1(0.022) = 100 \cdot (0.022 - 0.01) \cdot (0.98)^8 - 100 \cdot (0.022 - 0.02) \cdot (0.99)^8$$

*составит*

$$P_1(0.022) = 1.2 \cdot (0.98)^8 + 0.2 \cdot (0.99)^8$$

*В качестве приближенного значения функции* $f(x) = (1-x)^8$ *в точке* $x = 0.022$ *принимаем значение ИП в этой же точке:*

$$f(0.022) \approx P_1(0.022)$$

$$f(0.022) \approx 1.2 \cdot (0.98)^8 + 0.2 \cdot (0.99)^8$$

*(при оформлении решения значение полинома нужно будет вычислить)*

*Так как* $x = 0.022 \notin [\,0.01;\ 0.02]$ *, говорят о экстраполяции значения функции* $f(x) = (1-x)^8$ *интерполяционным полиномом* $P_1(x)$.

*Так как* $x = 0.022 > 0.02$ *, это экстраполяция справа.*

*Для анализа погрешности Э. применяют те же самые определения, подходы и теоремы.*

*По определению, погрешность Э. в точке* $x = 0.022$ *есть разность значения функции в точке* $x = 0.022$ *и интерполяционного полинома в точке* $x = 0.022$

$$r_1(0.022) = f(0.022) - P_1(0.022)$$

*По Теореме она равна выражению*

$$r_1(0.022) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (0.022 - 0.01)(0.022 - 0.02), \ \xi \in [0.01; \ 0.022]$$

*Границы неизвестной точки* $\xi$ *(Кси) определены по правилу*

$\xi \in [\,\min[a; x]; \max[b; x]\,]$, *то есть*

$$\xi \in [\,\min[0.01; 0.022]; \max[0.02; 0.022]\,] = [0.01; \ 0.022]$$

*Подсчитаем погрешность (все, что можно подсчитать в данном выражении):*

$$r_1(0.022) = \frac{(-1)\cdot(-1)\cdot 8 \cdot 7 \cdot (1-\xi)^6}{2!} \cdot (0.012)\cdot(0.002), \ \xi \in [0.01; \ 0.022]$$

$$r_1(0.022) = 28 \cdot 24 \cdot 10^{-6} \cdot (1-\xi)^6, \ \xi \in [0.01; \ 0.022]$$

*Для погрешности Э. получено выражение*

$$r_1(0.022) = 0.672 \cdot 10^{-3} \cdot (1-\xi)^6, \ \xi \in [0.01; \ 0.022]$$

*В данном примере погрешность Э. положительна:* $r_1(0.022) > 0$

*Если* $\xi \in [0.01; \ 0.022]$ *для неизвестного множителя верна оценка*

$$(0.978)^6 \le (1-\xi)^6 \le (0.99)^6$$

*Для* $r_1(0.022) > 0$ *построена оценка*

$$0 < \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3} \cdot (0.978)^6}_{\text{это нижняя граница неизвестной погрешности Э.}} \le \underbrace{r_1(0.022)}_{\text{это неизвестное значение погрешности Э.}} \le \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3} \cdot (0.99)^6}_{\text{это верхняя граница неизвестной погрешности Э.}}$$

*Не запрещено использовать неравенство*

$$0 < \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3} \cdot (0.97)^6}_{\text{это оценка нижней границы неизвестной погрешности Э.}} \le \underbrace{r_1(0.022)}_{\text{это неизвестное значение погрешности Э.}} \le \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3} \cdot (0.99)^6}_{\text{это оценка верхней границы неизвестной погрешности Э.}}$$

*либо проще*

$$0 < \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3} \cdot (0.9)^6}_{\text{это оценка нижней границы неизвестной погрешности Э.}} \le \underbrace{r_1(0.022)}_{\text{это неизвестное значение погрешности Э.}} \le \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3}}_{\text{это оценка верхней границы неизвестной погрешности Э.}}$$

*либо совсем просто*

$$\underbrace{0}_{\text{это оценка нижней границы неизвестной погрешности Э.}} < \underbrace{r_1(0.022)}_{\text{это неизвестное значение погрешности Э.}} \le \underbrace{0.672 \cdot 10^{-3}}_{\text{это оценка верхней границы неизвестной погрешности Э.}}$$

*Выбор оценки неизвестного значения* $r_1(0.022)$ *скажется на точности интервальной оценки значения функции.*

**Дальше как в Примере 1**

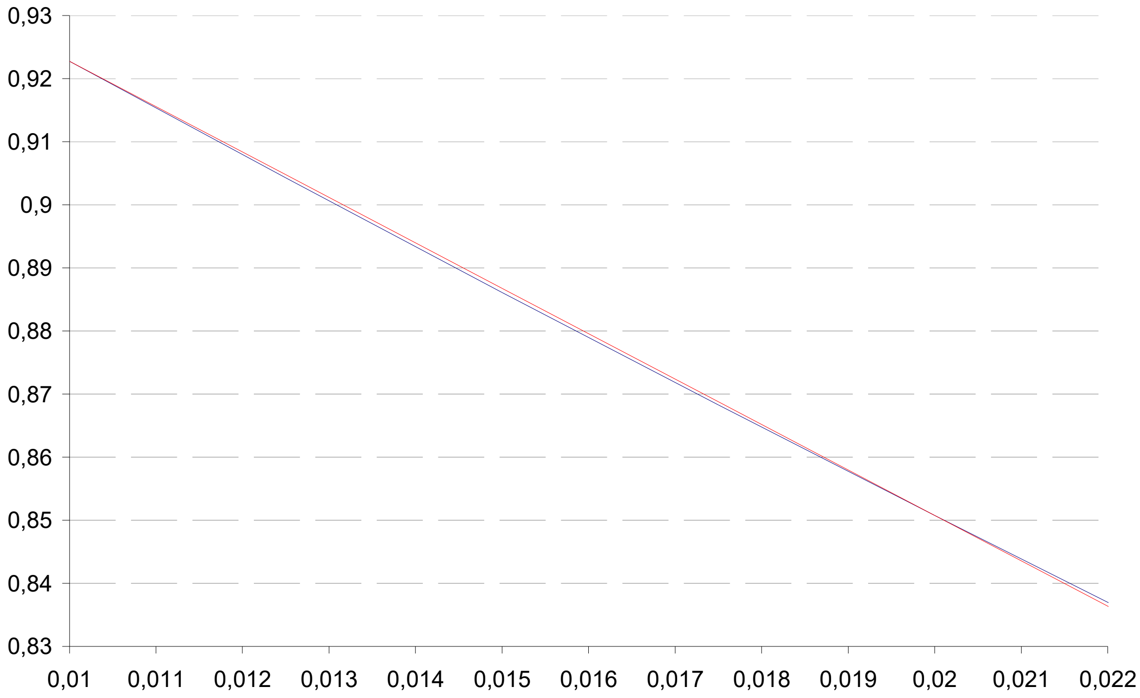


Рисунок 5

На рисунке показан отрезок $[0.010;\ 0.022]$, функция $f(x) = (1-x)^8$ и полином $P_1(x)$, интерполирующий данную функцию на отрезке $[0.010;\ 0.020]$. Полином находится выше функции на участке интерполяции и ниже функции на участке экстраполяции.

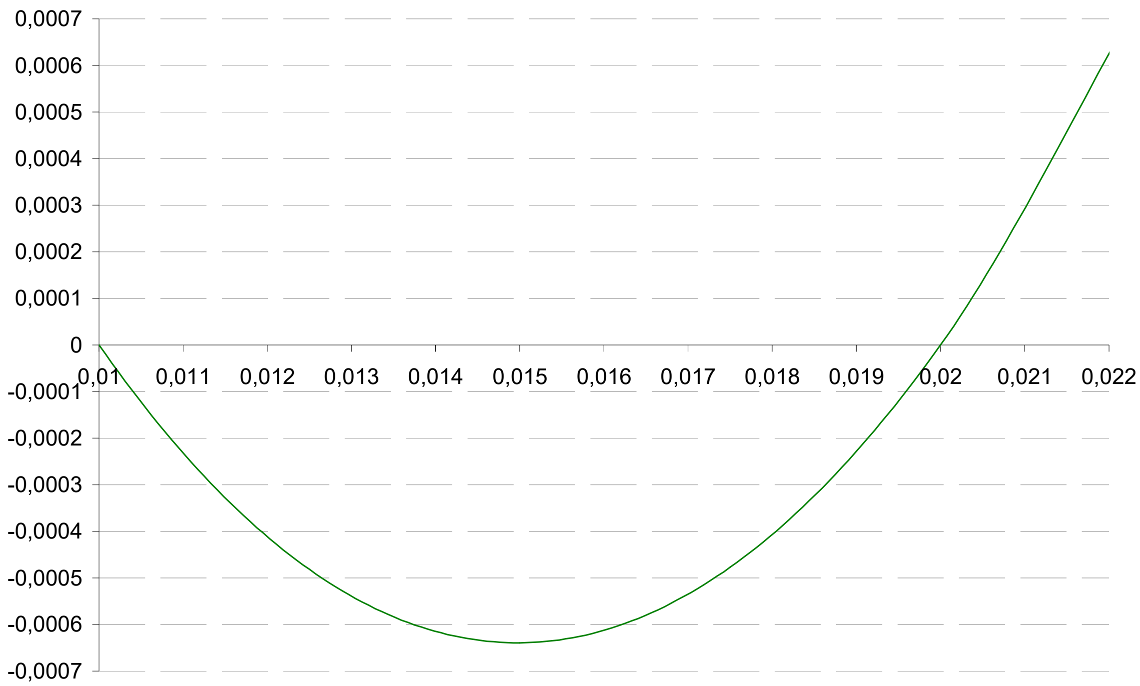


Рисунок 6

Показана погрешность $r_1(x) = f(x) - P_1(x)$: она вычислена «по определению». Погрешность обращается в ноль в узлах интерполяции, на участке интерполяции $[0.010;\ 0.020]$ является отрицательной, на участке экстраполяции $[0.020;\ 0.022]$ - положительной. За пределами участка интерполяции быстро нарастает.

### Пример 3 (интерполяция/экстраполяция на отрезке)

Данные взять в **Примере 1**.

Вместо конкретного значения $f(0.017)$ или $f(0.022)$ исследовать последствия интерполяции (экстраполяции) $f(x)$ интерполяционным полиномом, построенным на отрезке $[a;\ b]$, при условии, что полином применяется для любого значения $x$, взятого на некотором (в общем случае совсем другом) отрезке $x \in [\alpha;\ \beta]$

В Примере 3 полином строится на отрезке $[a;\ b] = [0.01;\ 0.02]$, и применяется для любого $x \in [\alpha, \beta] = [0.012;\ 0.022]$.

### Модель решения задачи

- Используя абсолютно точные значения $(0.99)^8$ и $(0.98)^8$, получить формулы для вычисления неизвестного значения $f(x) = (1-x)^8$ для любого $x \in [0.012;\ 0.022]$ **методом линейной интерполяции.**
- Рассматривать происходящее как **интерполяцию/экстраполяцию** функции $f(x)$ интерполяционным полиномом, построенным на отрезке $[0.01; 0.02]$ и применяемым на отрезке $[0.012;\ 0.022]$, в любой его точке.
- Получить оценку погрешности, верную для любого $x \in [0.012;\ 0.022]$, то есть любой точки, где применяется полином
- В процессе решения освоить определения, теоремы и способ их применения: **«не в точке, а на отрезке»**

### Решение

**Шаг 1 (начинаем как в Примере 1)**

*Рассмотрим отрезок* $[a;\ b\ ] = [0.01; 0.02]$, *сетку* $x_0 = 0.01; x_1 = 0.02$.

*Участков сетки* $n = 1$.

*Точные значения функции в узлах сетки обозначены через* $f_i, i = 0, 1$.

*Общий вид интерполяционный полинома степени 1*

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot f_1$$

*В данной задаче ИП принимает вид*

$$P_1(x) = \frac{(x - 0.01)}{(0.02 - 0.01)} \cdot (0.98)^8 + \frac{(x - 0.02)}{(0.01 - 0.02)} \cdot (0.99)^8$$

*Упростим выражение, получим:*

$$P_1(x) = 100 \cdot (x - 0.01) \cdot (0.98)^8 - 100 \cdot (x - 0.02) \cdot (0.99)^8$$

*В качестве приближенного значения функции* $f(x) = (1 - x)^8$ *в точке* $x \in [0.012; 0.022]$ *принимаем значение интерполяционного полинома в этой же точке:*

$f(x) = (1 - x)^8 \approx P_1(x)$ (вычислять ничего не нужно)

**Шаг 2 (начинаем как в Примере 1)**

*В данном примере*

*1) отсутствует погрешность исходных данных*

*2) интерполяционный полином записан (задан) точно*

*Полагаем, что значение ИП для любого* $x \in [\alpha, \beta] = [0.012;\ 0.022]$ *будет вычислено абсолютно без погрешности.*

*Тогда погрешность сводится к погрешности интерполяции (экстраполяции).*

*Погрешностью интерполяции (экстраполяции) в точке* $x$ *называют разность значения функции в этой точке и значения ИП в этой точке:*

$$r_1(x) = f(x) - P_1(x)$$

*По Теореме о погрешности интерполяции (экстраполяции) она равна выражению*

$r_1(x) = \dfrac{f''(\xi(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$ (это теорема для степени 1)

*где точка* $\xi$ *для каждого значения* $x$ *«своя», ее нахождение неизвестно, но она живет на отрезке* $\xi \in [\,\min[a; x]; \max[b; x]\,]$

*При* $x \in [0.012;\ 0.020]$ *имеет место интерполяция, а при* $x \in [0.020;\ 0.022]$ *– экстраполяция. Далее это различие носит терминологический характер и для расчетов и оценок несущественно.*

*В некоторой заданной точке* $x \in [0.012;\, 0.022]$ *погрешность интерполяции (экстраполяции) будет равна выражению*

$$r_1(x) = \frac{8 \cdot 7 \cdot (1-\xi(x))^6}{2!} \cdot (x-0.01)\,(x-0.02)$$

$$\xi \in [\,\min[0.01;\, x];\, \max[0.02;\, x]\,]$$

*Так как* $x \ge 0.012$, $\xi \in [\,0.01;\quad \max[0.02;\, x]\,]$. *Так как некоторые* $x$ *из отрезка* $[0.012;\, 0.022]$ *превышают* $0.02$, *для таких* $x$ *неизвестная* $\xi(x)$ *может оказаться на отрезке* $\xi \in [\,0.010;\quad 0.022]$

*Очевидно, что в узлах интерполяции погрешность обращается в ноль:*

$r_1(0.01) = 0$ $\qquad\qquad$ $r_1(0.02) = 0$

*При этом (в данном примере) <u>погрешность интерполяции</u>, то есть погрешность при* $x \in [0.012;\;\, 0.020]$, *<u>отрицательная</u>, а <u>погрешность экстраполяции</u>, то есть погрешность при* $x \in [0.020;\;\, 0.022]$ *– <u>положительная</u>.*

*Оценим модуль погрешности* $r_1(x) = f(x) - P_1(x)$ *на участке применения ИП. Будем строить такую оценку, которая будет верна для любой точки отрезка, на котором <u>используется</u> интерполяционный полином:*

$$\underbrace{\max_{x \in [0.012;\, 0.022]}}_{\substack{\text{при таких}\\ \text{значениях}\\ \text{используют}\\ \text{ИП}}} \left| r_1(x) \right| =$$

$$= \max_{x \in [0.012;\, 0.022]} \left| 28 \cdot (1-\xi(x))^6 \cdot (x-0.01)(x-0.02) \right| \le$$

$$\le 28 \cdot \underbrace{\max_{\xi \in [0.010;\, 0.022]}}_{\substack{\text{такими}\\ \text{могут быть}\\ \text{значения } \xi,\\ \text{когда ИП}\\ \text{используют}\\ \text{на отрезке}\\ [0.012;\, 0.022]}} \left| (1-\xi)^6 \right| \cdot \underbrace{\max_{x \in [0.012;\, 0.022]}}_{\substack{\text{при таких}\\ \text{значениях } x\\ \text{используют}\\ \text{ИП}}} \left| (x-0.01)(x-0.02) \right|$$

*Очевидно, что максимум*

$$\underbrace{\max_{\xi\in[0.010;\,0.022]}}_{\substack{\text{таkими могут быть значения } \xi,\\ \text{когда ИП используют на отрезке}\\ [0.012;\,0.022]}} \left|(1-\xi)^6\right| \le (0.99)^6 < 1$$

*достигается на левой границе отрезка, т.е. при* $\xi = 0.010$*, потому что функция* $(1-\xi)^6$ *на отрезке* $\xi\in[\,0.010;\ \ 0.022]$ *убывающая.*

*Максимум модуля параболы*

$$\underbrace{\max_{x\in[0.012;\,0.022]}}_{\substack{\text{при таких значениях } x\\ \text{используют ИП}}} \left|\,(x-0.01)(x-0.02)\,\right|$$

*достигается либо на концах отрезка* $[0.012;\,0.022]$*, либо в точке локального экстремума (непрерывной функции под знаком модуля) на отрезке* $x\in[0.012;\ \ 0.022]$

*Проверим все три значения. На левой границе*

$$\left|\,(0.012-0.010)(0.012-0.020)\,\right| = 0.002\cdot 0.008 = 16\cdot 10^{-6}$$

*На правой границе*

$$\left|\,(0.022-0.010)(0.022-0.020)\,\right| = 0.002\cdot 0.012 = 24\cdot 10^{-6}$$

*В точке экстремума (аргумент вершины параболы находится посередине между ее корнями 0.01 и 0.02)*

$$\left|\,(0.015-0.010)(0.015-0.020)\,\right| = 0.005\cdot 0.005 = 25\cdot 10^{-6}$$

*Получилось, что максимум достигается в точке*

$x = 0.015 \in [0.012;\ \ 0.022]$

*(это середина отрезка между узлами интерполяции, см. рисунок)*

*Подведем итоги. Максимум модуля погрешности И. (Э.) на отрезке* $[0.012;\,0.022]$*, где применяется ИП, оценивается как*

$$\max_{x\in[0.012;\,0.022]} \left|\,r_1(x)\,\right| \le 28\cdot 25\cdot 10^{-6}\cdot (0.99)^6 = 700\cdot 10^{-6}\cdot (0.99)^6$$

*или более грубо*

$$\max_{x\in[0.012;\,0.022]} \left| r_1(x) \right| \le 0.7\cdot 10^{-3}$$

*Для погрешности построена симметричная оценка*

$$\underbrace{-0.7\cdot 10^{-3}\cdot (0.99)^6}_{\text{это нижняя граница погрешности И.(Э.)}} \le \underbrace{r_1(x)}_{\text{это неизвестная погрешность И.(Э.) в точке на отрезке } [0.012;\,0.022]} \le \underbrace{0.7\cdot 10^{-3}\cdot (0.99)^6}_{\text{это верхняя граница погрешности И.(Э.)}}$$

**Шаг 3**

*Построим интервальную оценку значения функции.*

*Определение погрешности*

$$r_1(x) = f(x) - P_1(x)$$

*подставим в неравенство, получим*

$$-0.6591\cdot 10^{-3} \le \underbrace{f(x) - P_1(x)}_{\text{это неизвестная погрешность И.(Э.) в произвольной точке на отрезке } [0.012;\,0.022]} \le 0.6591\cdot 10^{-3}$$

*(подсчитали нижнюю и верхнюю границы)*

*В каждой части неравенства добавим* $P_1(x)$ *и получим интервальную оценку, справедливую для любого* $x\in[\alpha,\,\beta]=[0.012;\;\;0.022]$

$$\underbrace{P_1(x) - 0.6591\cdot 10^{-3}}_{\text{это нижняя оценка неизвестного значения функции}} \le \underbrace{f(x)}_{\text{это неизвестное значение функции в произвольной точке отрезка } [0.012;\,0.022]} \le \underbrace{P_1(x) + 0.6591\cdot 10^{-3}}_{\text{это верхняяоценка неизвестного значения функции}}$$

**Итоги**

*При* $x\in[0.012;\;\;0.022]$ *для* $f(x)=(1-x)^8$ *верно*

$$f(x) = P_1(x) \pm 0.6591\cdot 10^{-3}$$

$$P_1(x) = 100\cdot (x-0.01)\cdot (0.98)^8 - 100\cdot (x-0.02)\cdot (0.99)^8$$

*где* $P_1(x)$ *есть ее интерполяционный полином степени 1, построенный на отрезке* $x\in[0.010;\;\;0.020]$

*P.S. Есть смысл записывать функцию в виде* $f(x) = P_1(x) \pm 0.7\cdot 10^{-3}$