1. Рассмотрим непрерывную линейную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

а) Синтезировать управление в виде линейной обратной связи $u = \Theta x$ так, чтобы характеристические числа матрицы замкнутой системы располагались в точках $\lambda_1^* = -1$ и $\lambda_2^* = -2$. **б)** Используя найденную матрицу обратной связи Θ, определить шаг дискретизации при котором кусочно-постоянное управление вида

$$u(t) = u_k = \Theta x(t_k), \qquad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \qquad t_k = kh,$$

стабилизирует исходную систему. **в)** Что будет происходить в системе, замкнутой кусочно-постоянным регулятором, если шаг дискретизации h приближается к границе области устойчивости? **г)** Используя найденную матрицу обратной связи Θ, определить шаг дискретизации при котором импульсное управление вида

$$u(t) = u_k \delta(t - t_k) = \Theta x(t_k) \delta(t - t_k), \qquad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \qquad t_k = kh,$$

стабилизирует исходную систему.

Указание. Для ответа на поставленный в пунктах б) и в) вопрос, нужно перейти от непрерывной системы к дискретной по формуле:

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1} - t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1} - s)} B u(s) ds$$

и воспользоваться тем, что управление на рассматриваемом интервале является кусочно-постоянной функцией, тогда дискретная система принимает вид:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \qquad A_d = e^{Ah}, \qquad B_d = \int_0^h e^{As} B ds.$$

В этом случае, шаг дискретизации h определяется из условия устойчивости матрицы замкнутой системы:

$$\operatorname{spec}\left(A_d + B_d \Theta\right) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Для исследования устойчивости системы с импульсным управлением выполнить аналогичные шаги и учесть, что

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1} - s)} B u(s) ds = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1} - s)} B u_k \delta(s - t_k) ds = e^{A(t_{k+1} - t_k)} B u_k = e^{Ah} B u_k.$$

В этом случае матрица замкнутой системы имеет вид: $A_c = A_d + e^{Ah} B \Theta = A_d (I + B\Theta)$.

2. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если использовать управление, переводящее характеристические числа матрицы замкнутой системы в точки $\lambda_{1,2}^* = -1 \pm 2i$?

3. Рассмотрим непрерывную линейную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что измеряемый выход доступен только в фиксированные моменты времени t_k, то есть $y_k = Cx(t_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Моменты t_k удовлетворяют условию $t_{k+1} - t_k = h = \text{const}$. Синтезировать стабилизирующее управление по состоянию дискретного наблюдателя. Полюса наблюдателя и регулятора выбрать по своему усмотрению. Для любого ли шага дискретизации h можно добиться устойчивости непрерывной системы? Если нет, то можно ли определить максимально возможный шаг аналитически? Как это сделать?

Указание. Для ответа на поставленный вопрос, нужно перейти от непрерывной системы к дискретной

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \qquad y_k = C x_k, \qquad A_d = e^{Ah}, \qquad B_d = \int\limits_0^h e^{As} B ds$$

и построить асимптотический наблюдатель вида

$$\widehat{x}_{k+1} = A_d \widehat{x}_k + B_d u_k + L\big(y_k - C\widehat{x}_k\big), \qquad \widehat{x}_0 = 0.$$