# Модуль 4 (продолжение).
# Стационарное уравнение теплопроводности.
# Консервативные разностные схемы для решения модельных задач (применение метода баланса)

## 4.1. «Разрывная модельная задача»

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right)-q(x)u=-f(x) \\ u(a)=\mu_1,\, u(b)=\mu_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

решением которой является функция $u(x), x\in[a,b]$. Коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ и значения $\mu_1$ и $\mu_2$ считаем заданными. При выполнении условий

$$\begin{cases} k(x)>0,\, x\in[a,b] \\ q(x)\geq 0,\, x\in[a,b] \end{cases} \tag{4.1*}$$

задача (4.1) классифицируется как **первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности**.

Дифференциальное уравнение задачи (4.1) представляет собой запись закона сохранения тепла для тонкого и однородного в каждом поперечном сечении стержня. Левый конец стержня соответствует точке $x=a$, правый – точке $x=b$. Длина стержня равна $l$, причем $l=b-a$. Уравнение (4.1) есть **дифференциальная форма записи закона сохранения тепла на отрезке** $[a,b]$.

Функция $u(x)$ описывает **стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры** на стержне. Значение $u(x)$ есть температура стержня в поперечном сечении с координатой $x\in[a,b]$. В соответствии с граничными условиями задачи (4.1), на левом и правом концах стержня поддерживаются постоянные (по времени) температуры $\mu_1$ и $\mu_2$ соответственно.

Коэффициенты дифференциального уравнения имеют следующий смысл:

- $k(x)>0$ есть коэффициент теплопроводности в поперечном сечении стержня с координатой $x\in[a,b]$;
- $q(x)\geq 0$ есть интенсивность теплообмена стержня с окружающей средой через контур поперечного сечения с координатой $x\in[a,b]$;
- $f(x)$ есть плотность источников (стоков) тепла в поперечном сечении стержня с координатой $x\in[a,b]$ – например, вследствие выделения или поглощения тепла химических реакций или электрических токов.

В рамках модели (4.1) теплообмен стержня с окружающей средой описывается законом Ньютона: тепло, поступающее через контур поперечного сечения с координатой $x$, пропорционально разности температуры стержня $u(x)$ и температуры окружающей среды $\theta(x)$:

$-q(x)\,(u(x)-\theta(x))$.

Если $q(x)\neq 0$, коэффициент $f(x)$ в уравнении (4.1) включает в себя слагаемое $q(x)\,\theta(x)$.

Функцию

$$w(x) = -k(x)u'(x)$$

называют **функцией теплового потока**. В соответствии с законом Фурье тепловой поток через поперечное сечение стержня пропорционален градиенту температур в том же сечении. Дифференциальное уравнение задачи (4.1) иногда записывают в виде

$$\frac{d\,w(x)}{dx} + q(x)u(x) - f(x) = 0$$

Далее задачу (4.1) рассматриваем в каждом из двух случаев:

- коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ при $x\in[a,b]$ являются достаточно гладкими;
- коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ являются достаточно гладкими за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода, расположенных на отрезке $[a,b]$.

Второе предположение оказывается полезным при изучении объектов («стержней»), составленных из материалов с разными физическими свойствами или помещенных в среду, параметры которой существенно неоднородны по координате $x\in[a,b]$.

*Формулировки теорем о существовании и единственности решения задачи (4.1) в случае гладких и разрывных коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ см. в учебной литературе.*

Если коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ имеют точки разрыва, постановку задачи необходимо дополнить **условиями сопряжения.**

Предположим, что $\xi\in(a,b)$ – точка разрыва 1-го рода хотя бы для одного из коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ и точечные (сосредоточенные) источники (стоки) тепла на стержне отсутствуют. Тогда условия сопряжения принимают вид:

$$\begin{cases} u_+ = u_-,\; u_+ = \lim\limits_{x\to\xi+0} u(x),\; u_- = \lim\limits_{x\to\xi-0} u(x), \\ w_+ = w_-,\; w_+ = \lim\limits_{x\to\xi+0} w(x),\; w_- = \lim\limits_{x\to\xi-0} w(x) \end{cases} \tag{4.1**}$$

Условие $u_+ = u_-$ есть требование **непрерывности температуры** в точке $\xi\in(a,b)$, условие $w_+ = w_-$ есть требование **непрерывности теплового потока** в точке $\xi\in(a,b)$.

Условия сопряжения означают: несмотря на разрыв 1-го рода какого-либо из коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ в точке $\xi \in (a,b)$ температура $u(x)$ и тепловой поток $w(x)$ должны быть непрерывны по $x$ на всем отрезке $[a,b]$. **Такие условия гарантируют существование и единственность решения задачи (4.1).**

Далее «разрывной модельной задачей» называем задачу (4.1) с коэффициентами (4.1*), без точек разрыва коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ или с единственной точкой разрыва (разрыв 1-го рода в точке $\xi \in (a,b)$). В случае разрыва коэффициентов ставятся условия сопряжения (4.1**).

Без ограничения общности «разрывную модельную задачу» запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} k(x) > 0, \ x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0, \ x \in [a,b] \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} k^{(1)}(x), \ x \in [a,\xi] \\ k^{(2)}(x), \ x \in [\xi,b] \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} q^{(1)}(x), \ x \in [a,\xi] \\ q^{(2)}(x), \ x \in [\xi,b] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x), \ x \in [a,\xi] \\ f^{(2)}(x), \ x \in [\xi,b] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi+0} u(x), = \lim\limits_{x \to \xi-0} u(x), \\ \lim\limits_{x \to \xi+0} \left(k^{(2)}(x)u'(x)\right) = \lim\limits_{x \to \xi-0} \left(k^{(1)}(x)u'(x)\right) \end{cases}$$

**С целью численного решения «разрывной модельной задачи» (I) построим однородную консервативную разностную схему**
**методом баланса**
**(интегрально-интерполяционным методом).**

## 4.2. Построение однородной консервативной разностной схемы методом баланса (интегрально-интерполяционный метод)

Чтобы решить «разрывную модельную задачу» численно, определим на отрезке $[a;b]$ равномерную сетку с узлами $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n}$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг сетки.

Такую сетку называем сеткой размерности $n$ (число $n$ соответствует числу участков, на которые разбит отрезок). Заметим, что на сетке размерности $n$ определены $n+1$ узлов.

Строим вспомогательную сетку с узлами $x_{i+0.5} = a + (i+0.5)h,\ \ i = \overline{0,n-1}$.

Такие узлы расположены в центре участков основной сетки: узел $x_{i+0.5}$ расположен в центре отрезка $[x_i; x_{i+1}]$, $i = \overline{0,n-1}$.

**Для построения консервативной разностной схемы перейдем от дифференциальной формы записи закона сохранения тепла к интегральной форме.**

Для этого дифференциальное уравнение задачи (4.1) интегрируем на каждом из участков вспомогательной сетки:

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\,\frac{du}{dx}\right)dx - \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx = -\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx\,, \qquad i = \overline{1,n-1} \tag{4.2}$$

Каждое из уравнений (4.2) представляет собой **запись закона сохранения тепла на «своем» участке $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ в интегральной форме.**

Чтобы переписать правую часть (4.2), введем новые коэффициенты

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f\,(x)\;dx\;,\quad i = \overline{1,n-1} \tag{4.3}$$

и для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$-\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = -h\cdot\frac{1}{h}\cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\;dx = -\,\varphi_i h\,. \tag{4.4}$$

Чтобы преобразовать левую часть (4.2), используем приближение

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i)\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)dx\,,$$

введем новые коэффициенты

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\,dx\,, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{4.5}$$

и для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i)\, d_i h \tag{4.6}$$

Несложно показать, что на каждом из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ в уравнении (4.2) присутствует разность тепловых потоков: функция теплового потока определена как $w(x) = -k(x)u'(x)$, откуда следует

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx = -\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx} w(x)\,dx = w(x_{i-0.5}) - w(x_{i+0.5}) \tag{4.7}$$

Подставляя (4.4), (4.6) и (4.7) в уравнения теплового баланса (4.2) и добавив граничные условия (4.1), получим **системy линейных алгебраических уравнений** (СЛАУ)

$$\begin{cases} w(x_{i-0.5}) - w(x_{i+0.5}) - hd_i u(x_i) = -\varphi_i h, \; i = \overline{1, n-1} \\ u(x_0) = \mu_1, u(x_n) = \mu_2 \end{cases} \tag{4.8}$$

Система состоит из $n+1$ уравнений и содержит $2n+1$ неизвестных: не известны значения $w_{i+0.5}, i = \overline{0, n-1}$ *(тепловой поток через поперечные сечения в узлах вспомогательной сетки)* и неизвестны значения $u_i$, $i = \overline{0, n}$ *(температура в поперечных сечениях в узлах основной сетки).*

Чтобы уменьшить число неизвестных, выясним, как связаны потоки и температуры: выразим $w_{i+0.5}, i = \overline{0, n-1}$ через $u_i, i = \overline{0, n}$.

Из определения $w(x) = -k(x)u'(x)$ получим $u'(x) = -\dfrac{w(x)}{k(x)}$.

На каждом участке вида $[x_{i-1}; x_i]$, то есть для индексов $i = \overline{1, n}$, записываем интеграл

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\,dx = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)}dx$$

Слева – интеграл от полной производной температуры: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\,dx = u_i - u_{i-1}$ .

Справа используем приближение

 

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx \approx -w\left(x_{i-0.5}\right) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Тогда справедливо приближенное равенство

$$u_i - u_{i-1} \approx -w\left(x_{i-0.5}\right) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \tag{4.9}$$

Вводим новые коэффициенты

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad i = \overline{1,n} \tag{4.10}$$

и, пренебрегая приближенным характером равенства (4.9), выразим функцию теплового потока:

$$w_{i-0.5} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} a_i, \tag{4.11}$$

Формула (4.11) справедлива для всех $i = \overline{1,n}$: **тепловой поток через поперечное сечение узла вспомогательной сетки можно выразить через разность температур в поперечных сечениях соседних с ним узлов основной сетки**.

Справедлива аналогичная формула

$$w_{i+0.5} = -\frac{u_i - u_{i+1}}{h} a_{i+1} \tag{4.12}$$

(для всех $i = \overline{0, n-1}$).

Подставим (4.11), (4.12) в уравнения (4.8), разделим уравнения на $h$ и преобразуем (4.8) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-1} - u_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i u_i = -\varphi_i, \ i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = \mu_1, u_n = \mu_2 \end{cases} \tag{4.13}$$

Это система линейных алгебраических уравнений, в которой $n+1$ уравнений, $n+1$ неизвестных, неизвестными являются $u_i, i = \overline{0,n}$.

Так как при построении (4.13) на базе (4.2) были использованы приближения (4.6) и (4.9), решение (4.13) будет отличаться от решения (4.2) и, как следствие, отличаться от решения исходной задачи (4.1). Поэтому для записи исходной задачи и записи СЛАУ (разностной схемы) используют разные обозначения.

Через $u(x), x \in [a,b]$ обозначим точное решение задачи (4.1).

Через $u = (u_0, u_1, \dots u_n) \in R^{n+1}$ обозначим точное решение задачи (4.1) в узлах сетки.

Через $v = (v_0, v_1, \dots v_n) \in R^{n+1}$ обозначим точное решение СЛАУ (4.13).

**СЛАУ (4.13) записываем в виде**

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i, \; i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = \mu_1, \; v_n = \mu_2 \end{cases} \tag{4.14}$$

**Коэффициенты СЛАУ определим по формулам (4.3), (4.5) и (4.10):**

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \; i = \overline{1, n}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx, \; i = \overline{1, n-1}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx, \; i = \overline{1, n-1}$$

**Система уравнений (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) представляет собой однородную консервативную разностную схему для решения первой краевой задачи стационарного уравнения теплопроводности.**

**Схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) построена методом баланса (интегрально-интерполяционным методом).**

*Схема (4.14) построена для решения «разрывной модельной задачи» (I), а также для решения задач вида (4.1) с большим (но конечным) числом точек разрыва 1-го рода коэффициентов задачи.*

***Комментарии***

*Разностная схема называется консервативной, если в ней реализован разностный аналог физических законов сохранения.*

*Разностная схема называется однородной, если способ записи коэффициентов схемы не зависит от наличия точек разрыва коэффициентов (параметров) дифференциальной задачи (подробнее см. Модуль 7).*

*Примеры неоднородной разностной схемы и неконсервативной разностной схемы представлены в Модуле 7.*

## 4.3. Проверка корректности схемы

**Математическая задача называется корректной, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий (или параметров) задачи.**

**Проверим корректность разностной схемы.**

**Теорема (проверка корректности схемы).** При любом $n \geq 2$ решение разностной схемы (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5), (4.10) существует, единственно и может быть найдено прогонкой. При отыскании решения задачи (4.14) прогонка вычислительно устойчива.

**Доказательство.** Перепишем (4.14) в виде

$$\begin{cases} \frac{a_i}{h^2} \cdot v_{i-1} - \left( \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right) \cdot v_i + \frac{a_{i+1}}{h^2} \cdot v_{i+1} = -\varphi_i, \, i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = \mu_1, v_n = \mu_2 \end{cases} \qquad (4.15)$$

Сравним (4.15) с тем, как записывается СЛАУ с 3-х диагональной матрицей в формулировке *Теоремы о применении прогонки* и проверим выполнение условий *Теоремы о применении прогонки*.

При решении (4.15) необходимо найти $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$.

Так как $k(x) > 0$ при любом $x \in [a,b]$, получим $a_i > 0, i = \overline{1,n}$.

Так как $q(x) \geq 0$ получим $d_i \geq 0, i = \overline{1, n-1}$.

Очевидно выполнение условий

$$\left| \frac{a_i}{h^2} \right| \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\left| \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right| \geq \left| \frac{a_i}{h^2} \right| + \left| \frac{a_{i+1}}{h^2} \right|, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

Коэффициенты $\kappa_1, \kappa_2$, предусмотренные канонической формой записи, в системе (4.15) отсутствуют: $|\kappa_1| = 0 \leq 1; |\kappa_2| = 0 < 1$.

Таким образом, существование и единственность решения задачи (4.15), возможность его получения методом прогонки и вычислительная устойчивость прогонки при получении указанного решения вытекают из *Теоремы о применении прогонки*.

*Непрерывная зависимость решения (4.15) от параметров (коэффициентов) СЛАУ при фиксированном $n$ гарантирована тем, что определитель 3-х диагональной матрицы (в силу Теоремы о применении прогонки) отличен от нуля.*

**Разностная схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) как математическая задача поставлена корректно.**

## 4.4. Теоремы о сходимости схемы

Точное решение задачи (4.1) в узлах сетки обозначим $u = (u_0, u_1,\dots u_n) \in R^{n+1}$.

Точное решение разностной схемы (4.14) обозначим $v = (v_0, v_1,\dots v_n) \in R^{n+1}$.

**Определение.** **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i,\ i = 0,\dots n$. (4.16)

Таким образом, $z = (z_0, z_1,\dots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

**Определение.** Если при сгущении сетки ( $n \to +\infty$ ) погрешность $z$ стремится к нулю ( $\| z \| \to 0$ ) , говорят, что **схема сходится.** Если на всех густых сетках (то есть $\forall n \ge \hat{N}$ ) для погрешности $z$ верна оценка

$$\| z \| \le Mh^k \tag{4.17}$$

где $h > 0$ – шаг сетки и $k > 0$ , $M > 0$ – константы, не зависящие от $h$ , говорят, что **схема сходится** с **порядком** $k$ .

Теоремы о сходимости схемы приведем без доказательства.

**Теорема 1 (о сходимости схемы)**

Пусть для «разрывной модельной задачи» (I) коэффициенты $k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}[a,b]$.

Тогда схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) сходится с порядком 2:

$$\| z \| \le Mh^2 \tag{4.18}$$

**Теорема 2 (о сходимости схемы)**

Пусть для «разрывной модельной задачи» (I) коэффициенты $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)}[a,b]$.

Тогда схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) сходится с порядком 2:

$$\| z \| \le Mh^2 \tag{4.19}$$

В оценках (4.18) и (4.19) $h > 0$ – шаг сетки и $M > 0$ – константа, которая зависит от коэффициентов задачи $k(x), q(x), f(x)$, но не зависит от $h$ .

***Комментарии***

$C^{(2)}[a,b]$ – пространство дважды непрерывно-дифференцируемых функции, заданных на отрезке $[a,b]$.

$Q^{(2)}[a,b]$ – пространство функции, заданных на отрезке $[a,b]$ и имеющих две непрерывные производные, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

## 4.5. Варианты расчета коэффициентов консервативных разностных схем

Для приближенного вычисления интегралов применяются:

формула средних прямоугольников

$$\int_A^B f(x)\,dx \approx f\left(\frac{A+B}{2}\right)(B-A) \tag{4.20}$$

формула трапеций

$$\int_A^B f(x)\,dx \approx \frac{f(A)+f(B)}{2}(B-A) \tag{4.21}$$

**Утверждение 1.** Пусть коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ задачи (4.1) являются достаточно гладкими. Тогда без потери порядка (скорости) сходимости для приближенного решения (4.1) можно использовать однородную консервативную схему

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1}-v_i}{h^2}\cdot\tilde{a}_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2}\cdot\tilde{a}_{i+1} - \tilde{d}_i v_i = -\tilde{\varphi}_i, \quad i=\overline{1,n-1}, \\ v_0=\mu_1, \quad v_n=\mu_2 \end{cases} \tag{4.22}$$

с коэффициентами, вычисленными по формуле «средних прямоугольников»

$\tilde{a}_i = k_{i-0.5}, i=\overline{1,n}$,

$\tilde{d}_i = q_i, i=\overline{1,n-1}$,

$\tilde{\varphi}_i = f_i, i=\overline{1,n-1}$.

или коэффициентами, вычисленными по формуле трапеций

$\tilde{a}_i = \dfrac{2\cdot k_{i-1}\cdot k_i}{k_{i-1}+k_i}, i=\overline{1,n}$,

$$\tilde{d}_i = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2}, \; i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}, \; i = \overline{1, n-1}.$$

***Комментарий***

По формуле средних прямоугольников получим:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{1}{k(x_{i-0.5})} = \frac{1}{k_{i-0.5}}$$

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx k_{i-0.5}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot q(x_i) = q_i$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(x_i) = f_i$$

По формуле трапеций получим:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{1}{k(x_{i-1})} + \frac{1}{k(x_i)} \right) = \frac{k_{i-1} + k_i}{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}$$

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx \frac{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}{k_{i-1} + k_i}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{q(x_{i-0.5}) + q(x_{i+0.5})}{2} = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{f(x_{i-0.5}) + f(x_{i+0.5})}{2} = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}$$

Так как на участках интегрирования длины $h$ погрешность формулы «средних прямоугольников» и погрешность формулы трапеций составляет $O(h^3)$, коэффициенты исходной разностной схемы (4.14) будут вычислены с погрешностью не более $O(h^2)$, и это не приводит к снижению порядка сходимости (см. учебную литературу).

**Утверждение 2.** Пусть коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ задачи (4.1) являются достаточно гладкими за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Тогда однородная консервативная разностная схема (4.22) *с коэффициентами, вычисленными по формуле средних прямоугольников (формуле трапеций) на участках гладкости указанных выше коэффициентов задачи*, сохраняет порядок сходимости.

***Комментарий***

Для коэффициента теплопроводности «разрывной модельной задачи» (I)

$$k(x) = \begin{cases} k^{(1)}(x), x \in [a, \xi] \\ k^{(2)}(x), x \in [\xi, b] \end{cases}$$

коэффициент разностной схемы (4.14) имеет вид

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx \begin{cases} \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k^{(1)}(x)} \right)^{-1}, \quad \xi \ge x_i \\ \left( \frac{1}{h} \cdot \left( \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi} \frac{dx}{k^{(1)}(x)} + \int\limits_{\xi}^{x_i} \frac{dx}{k^{(2)}(x)} \right) \right)^{-1}, \quad \xi \in (x_{i-1}; x_i) \\ \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k^{(2)}(x)} \right)^{-1}, \quad \xi \le x_{i-1} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} k^{(1)}(x_{i-0.5}), \quad \xi \ge x_i \\ \left( \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{\xi - x_{i-1}}{k^{(1)}\left( \frac{x_{i-1} + \xi}{2} \right)} + \frac{x_i - \xi}{k^{(2)}\left( \frac{\xi + x_i}{2} \right)} \right) \right)^{-1}, \quad \xi \in (x_{i-1}; x_i) \\ k^{(2)}(x_{i-0.5}), \quad \xi \le x_{i-1} \end{cases}$$

Для $q(x)$ – коэффициента теплообмена «разрывной модельной задачи» (I), а именно

$$q(x)=\begin{cases} q^{(1)}(x),\ x\in[a,\xi] \\ q^{(2)}(x),\ x\in[\xi,b] \end{cases}$$

соответствующий коэффициент разностной схемы (4.14) вычисляется как

$$d_i=\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)dx=\begin{cases} \dfrac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q^{(1)}(x)dx, \quad \xi\ge x_{i+0.5} \\ \dfrac{1}{h}\cdot\left(\int\limits_{x_{i-0.5}}^{\xi} q^{(1)}(x)dx+\int\limits_{\xi}^{x_{i+0.5}} q^{(2)}(x)dx\right), \quad \xi\in(x_{i-0.5};x_{i+0.5}) \\ \dfrac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q^{(2)}(x)dx, \quad \xi\le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{d}_i=\begin{cases} q^{(1)}(x_i), \quad \xi\ge x_{i+0.5} \\ \dfrac{1}{h}\cdot\left(q^{(1)}\left(\dfrac{x_{i-0.5}+\xi}{2}\right)(\xi-x_{i-0.5})+q^{(2)}\left(\dfrac{\xi+x_{i+0.5}}{2}\right)(x_{i+0.5}-\xi)\right), \\ \xi\in(x_{i-0.5};x_{i+0.5}) \\ q^{(2)}(x_i) \quad \xi\le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Для $f(x)$ – коэффициента «разрывной модельной задачи» (I), отвечающего за плотность источников и стоков тепла, а именно

$$f(x)=\begin{cases} f^{(1)}(x),\ x\in[a,\xi] \\ f^{(2)}(x),\ x\in[\xi,b] \end{cases}$$

соответствующий коэффициент разностной схемы (4.14) записывается аналогично:

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f^{(1)}(x)dx, \quad \xi \ge x_{i+0.5} \\ \frac{1}{h}\cdot\left(\int\limits_{x_{i-0.5}}^{\xi} f^{(1)}(x)dx + \int\limits_{\xi}^{x_{i+0.5}} f^{(2)}(x)dx\right), \quad \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ \frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f^{(2)}(x)dx, \quad \xi \le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{cases} f^{(1)}(x_i), \quad \xi \ge x_{i+0.5} \\ \frac{1}{h}\cdot\left(f^{(1)}\left(\frac{x_{i-0.5}+\xi}{2}\right)(\xi - x_{i-0.5}) + f^{(2)}\left(\frac{\xi + x_{i+0.5}}{2}\right)(x_{i+0.5} - \xi)\right), \\ \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ f^{(2)}(x_i) \quad \xi \le x_{i-0.5} \end{cases}$$

***Задание***

Способ вычисления коэффициентов схемы (4.22), основанный на применении формулы трапеций с учетом точки разрыва, запишите самостоятельно.