

и изображены на рис. 4.12. Из этого рисунка следует, что оптимальной оказывается дуальная стратегия.

На этом закончим рассмотрение задачи о прихлопывании комара. Эта задача, несмотря на свою несколько шуточную постановку, очень серьезна, таким же образом могут быть поставлены и решены многие другие очень важные и ответственные задачи. По существу, в ней ставится и решается вопрос о многоэтапном воздействии на стохастический объект, приводящем к наилучшему конечному результату. Это почти общая постановка задачи управления. Ее специфика состоит в том, что при заданной стратегии управления $g_n(x_i)$ ($n=1, 2, \dots, N$) наш объект управления является нестационарной марковской системой,

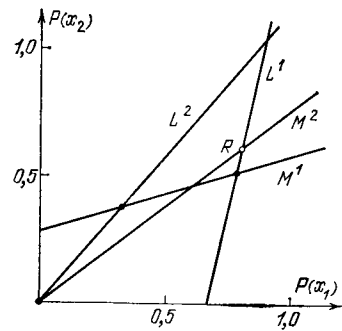


Рис. 4.12

а в случае стационарной стратегии управления $g(x_i)$ — стационарной (однородной) марковской системой. Состояниями этой динамической марковской системы являются x_1 и x_2 , x_3 и x_4 , фазовым ее состоянием — вероятности $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$ и $p(x_4)$ этих состояний. Вероятности смен этих состояний заданы, это $p(x_i \rightarrow x_j, g_n(x_i))$ или, для стационарной стратегии, $p(x_i \rightarrow x_j, g(x_i))$. Вероятности перехода из состояния x_i в состояние x_j зависят на каждом этапе смены состояний только от состояния x_i и не зависят от предшествующих состояний системы, как и требуется для

марковской системы. Последующее фазовое состояние $p_{n+1}(p_{n+1}(x_1), p_{n+1}(x_2), p_{n+1}(x_3), p_{n+1}(x_4))$ связано с предыдущим $p_n(p_n(x_1), p_n(x_2), p_n(x_3), p_n(x_4))$ соотношением вида

$$p_{n+1} = p_n P_n,$$

где P_n — матрица вероятностей перехода из состояния x_i в x_j при стратегии $g_n(x_i)$. В случае стационарной стратегии $g_n(x_i) = g(x_i)$ при всех n , и поэтому матрица P_n одна и та же при всех n , что соответствует стационарной марковской системе.

Итак, мы пришли к тому, что задача о прихлопывании комара представляет собой задачу об управлении динамической марковской системой.

Марковскую систему, вероятности смен состояний которой зависят от управляемой переменной или переменных, называют *управляемой марковской системой*. Управляемые марковские системы — это важный и обширный класс стохастических систем управления. В общем случае они имеют конечное или бесконечное число состояний, вероятности смен которых зависят от управления и самого состояния. Предшествующие смены состояний не имеют никакого влияния на эти вероятности, они как бы забываются. Именно благодаря этому «забыванию» вероятности состояний оказываются полным описанием,

соответствующим фазовому состоянию. Рассмотрение управляемых марковских систем в дальнейшем будет продолжено. В качестве перехода к этому продолжению выясним, не связаны ли между собой стратегии управления при различных числах этапов N , и что происходит с ними при неограниченном возрастании N .

Пусть $g_1^N(x_i), \dots, g_s^N(x_i), \dots, g_N^N(x_i)$ — оптимальная стратегия при N этапах. Пусть мы начали ловить комара и израсходовали s действий и пусть мы его не прихлопнули и он не улетел. У нас осталось в резерве еще $N-s$ действий. Согласно нашим упрощенным представлениям то, что комара уже хлопали и спугивали, не оказало никакого влияния на его поведение: он улетает и садится с теми же вероятностями, с теми же вероятностями он обнаруживает и не обнаруживает себя. Эти же упрощенные представления относятся и к нам: мы не стали его лучше хлопать или спугивать. Такое упрощение задачи приводит к очень важному выводу: ловля комара после s попыток (этапов), если он после них не улетел и не прихлопнут, ничем не отличается от его ловли с самого начала при наличии в резерве $N-s$ этапов. Это означает, что оптимальный выбор действий на $s+1, \dots, N$ этапах должен быть такой же, как и на $1, 2, \dots, N-s$ этапах при ловле с резервом $N-s$ этапов, т. е.

$$q_{s+1}^N(x_i) = g_1^{N-s}(x_i), \dots, g_N^N(x_i) = g_{N-s}^{N-s}(x_i).$$

Эта связь между оптимальными стратегиями при резервах в N и $N-s$ действий ($s=1, 2, \dots, N-s$) является выражением знаменитого и широкоизвестного принципа динамического программирования Р. Беллмана. Именно он будет положен в основу при дальнейшем рассмотрении оптимального управления динамическими процессами и, в частности, марковскими системами.

Осталось еще рассмотреть, что происходит с оптимальной стратегией при $N \rightarrow \infty$. При очень больших значениях N с вероятностью, близкой к единице, комар либо будет прихлопнут, либо улетит, и поэтому на первых этапах «ничего не изменится», если это очень большое число допустимых этапов N будет увеличено или даже станет равным бесконечности. Если это так, то существует предельная стратегия $g_1^\infty(x_i)$ и эта предельная оптимальная стратегия ловли комара на первом этапе является оптимальной на втором, третьем и любом, если резерв действий неограничен. Таким образом, мы пришли к тому, что при $N=\infty$ оптимальная стратегия стационарна.

§ 3. Авторулевой

Представьте себе, что Вы плывете на лодке и, вдруг, замечаете, что она сбилась с курса. Вы поворачиваете руль и выводите лодку на курс. Вы управляете ее движением.

Человек управляет движением и более сложных объектов. Если говорить о поддержании курса, то здесь управление малыми и большими, речными и океанскими судами, велосипедом, автомобилем, под-

водной лодкой, самолетом, трактором и комбайном, вообще, всевозможными движущимися объектами. Человек более или менее быстро научается этому и делает это довольно хорошо. Мы не знаем, как он это делает. Мы не знаем, как наш мозг решает столь сложные задачи. А в ряде случаев нужно управлять объектами в автоматическом режиме. Как же научить управлять движением динамического объекта автомат, если мы не знаем, как это делаем сами? Какие нужно решить для этого задачи? Как их решать?

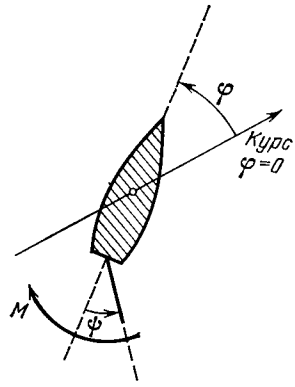


Рис. 4.13

Некоторые из этих вопросов мы рассмотрим на простейшем примере управления курсом судна, скажем, лодки.

Рассмотрим лодку, которая за счет мотора или весел движется с некоторой скоростью V . В силу разных причин (течение, волны, ветер и т. д.) лодка уклоняется от заданного курса. Будем считать, что это отклонение происходит путем поворота лодки вокруг ее центра масс, и обозначим угол отклонения продольной оси лодки от курса через φ (рис. 4.13). Чтобы заставить лодку плыть куда надо, т. е. по нашей воле поворачивать ее вокруг центра масс, есть руль. Угол отклонения руля от продольной оси лодки обозначим через ψ . Поворачивая руль, мы можем менять положение лодки относительно заданного курса, т. е. можем ею управлять.

В чем состоит цель такого управления? Цель состоит в том, чтобы как можно точнее обеспечить движение лодки по заданному курсу. Чем точнее выдерживается курс, тем лучше управление. Ясно, что самым лучшим является управление, при котором лодка все время идет по курсу, т. е. $\varphi \equiv 0$. Добиться, чтобы лодка все время шла по курсу, трудно. Это идеальная цель управления, но тем не менее мы пытаемся ее осуществить, поворачивая руль должным образом. Руль — это средство реализации цели управления. А как надо поворачивать руль? Как с помощью средств управления добиться осуществления цели управления?

Чтобы как-то ответить на этот вопрос, надо прежде всего построить математическую модель объекта управления, т. е. математическую модель лодки. Для этого надо выбрать соответствующее описание и записать уравнения движения лодки. Вообще, движение лодки в воде — это сложная гидродинамическая задача, и на сегодня существуют различные уровни подробности ее рассмотрения и решения. Мы же напишем самое простое уравнение.

Пусть φ — угол поворота лодки относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр масс, и I — момент инерции относительно этой оси. Вода действует на корпус лодки и руль, создавая некоторые моменты относительно вертикальной оси. Ясно, что момент от руля

зависит от угла его поворота и в самом простейшем виде пропорционален ему с некоторым коэффициентом k , т. е. $M(\psi) = -k\psi$. Знак минус означает, что момент от руля всегда направлен против направления отклонения руля (рис. 4.13). Момент, действующий на корпус лодки, в грубом приближении равен $-h\dot{\varphi}$, причем в зависимости от

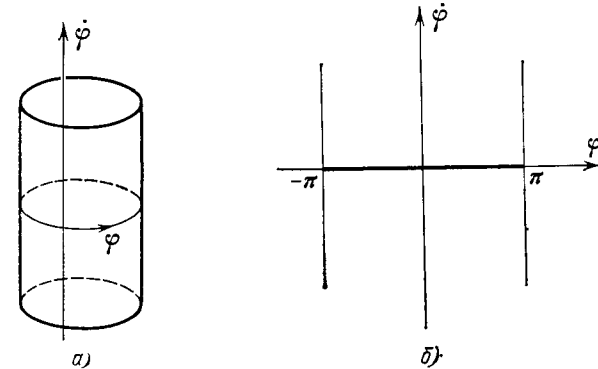


Рис. 4.14

конструкции лодки коэффициент h может быть положительным, отрицательным или равным нулю. При этих предположениях уравнение движения лодки запишется в виде

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\varphi. \quad (3.1)$$

Нас интересует вопрос, как выбирать $\psi(t)$, чтобы реализовать цель управления $\varphi(t) = 0$. Но прежде всего разберемся в том, как ведет себя лодка без управления, т. е. если $\psi(t) \equiv 0$. Это означает, что руль установлен вдоль продольной оси лодки, закреплен, и никто его не трогает. Тогда, согласно (3.1), уравнение неуправляемой лодки имеет вид

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = 0. \quad (3.2)$$

Чтобы разобраться, как ведет себя неуправляемая лодка, надо построить ее фазовый портрет. Эта система механическая, значит, ее состояние есть совокупность φ и $\dot{\varphi}$. Так как φ — это угол, а $\dot{\varphi}$ — угловая скорость, то фазовым пространством, как в случае физического маятника, является цилиндр. По направляющей цилиндра откладывается φ , а по образующей $\dot{\varphi}$ (рис. 4.14, а). Этот цилиндр можно рисовать в виде развертки. Надо его разрезать по образующей и развернуть. Получится полоса шириной 2π (рис. 4.14, б).

Граничные точки полосы надо отождествить, т. е. считать, что точки $\varphi = -\pi$, φ и $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi}$ отвечают одному и тому же состоянию. Теперь будем строить фазовый портрет динамики лодки без руля. Интегрируя по времени уравнение (3.2), получим первый интеграл $I\dot{\varphi} + h\varphi = c$,

где c — постоянная. Он дает связь между φ и $\dot{\varphi}$, т. е. уравнение фазовых траекторий. На полоске это прямые с угловым коэффициентом $-h/I$; на цилиндре винтовые линии (рис. 4.15; $-h/I$ принимается отрицательным, что соответствует положительному h). Фазовая точка движется по траектории в направлении, показанном стрелкой; где $\dot{\varphi} > 0$, там φ возрастает, а там, где $\dot{\varphi} < 0$, φ убывает. Пусть фазовая точка, двигаясь по траектории, приходит в точку A (рис. 4.15, а)

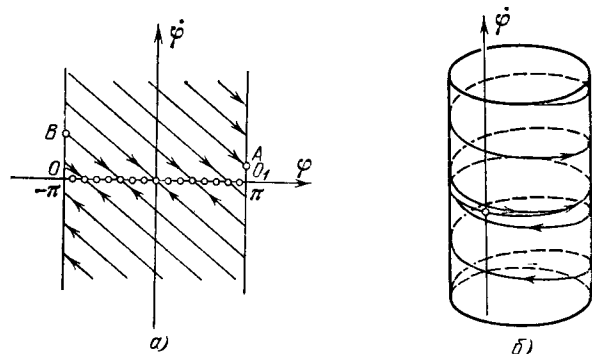


Рис. 4.15

Дальнейшее ее движение происходит по той же самой траектории, но уже из точки B . Двигаясь дальше, фазовая точка приближается к отрезку OO_1 .

Что собой представляют точки этого отрезка? Для них $\dot{\varphi} = 0$. Но из уравнения (3.2) видно, что для них и $\ddot{\varphi} = 0$, т. е. $\dot{\varphi} \equiv 0$, откуда следует, что $\varphi = \text{const}$ является решением уравнения (3.2). К такому же выводу можно прийти и непосредственно, обнаружив подстановкой, что $\varphi = \text{const}$ — решение уравнения (3.2). Следовательно, каждая точка отрезка OO_1 (точнее, окружности, поскольку точки O и O_1 отождествлены) является состоянием равновесия нашей динамической системы, а в ее фазовом пространстве есть целый отрезок состояний равновесия, к точкам которого приближаются все остальные фазовые траектории.

А теперь разберемся, что представляет собой фазовый портрет с точки зрения действительных движений лодки. Прежде всего — состояния равновесия. В них $\varphi = \text{const}$ и $\dot{\varphi} = 0$, т. е. со временем угол φ не меняется. Лодка движется прямолинейно под некоторым постоянным углом к заданному курсу и не отклоняется от этого направления ни вправо, ни влево. Она по существу придерживается одного курса. Скажем, вы толкнули ее в некотором направлении, так она и движется прямолинейно, не отклоняясь от этого направления. Ясно, что таких направлений сколько угодно, и можно толкнуть лодку по любому из них. А следовательно, и состояний равновесия сколько угодно. Вот

отрезок состояний равновесия и отвечает прямолинейным движениям неуправляемой лодки по всевозможным направлениям. Фазовые траектории верхней части фазового пространства, где $\dot{\varphi} > 0$, соответствуют вращению лодки в положительном направлении, а нижней части — в отрицательном направлении. Ну, а если мы отклоним неуправляемую лодку от прямолинейного движения, например, крутнув ее в направлении увеличения угла φ ? Как она будет вести себя после этого? С точки зрения фазового портрета этот толчок, отклоняющий ее от прямолинейного движения, отвечает изменению начального состояния, а дальнейшему движению лодки соответствует движение фазовой точки по фазовой траектории из этого начального состояния. Как видно из рис. 4.15, а, б, фазовая точка смещается в верхнюю полуплоскость и затем движется по фазовой траектории в направлении увеличения угла φ , но угловая скорость $\dot{\varphi}$ при этом уменьшается и стремится к нулю, т. е. фазовая точка приближается к некоторому, уже новому состоянию равновесия. Это новое состояние равновесия также соответствует прямолинейному движению лодки, но по другому направлению.

Итак, неуправляемая лодка, лодка «без руля и без ветрил», не обладает целенаправленным поведением. Она может плыть прямолинейно по любому направлению. А если ее движение что-то изменит, она покрутится немного и снова придет к прямолинейному движению, но уже, вообще, по другому направлению.

Но не все лодки обладают таким поведением. И те, кто любит лодочные прогулки и ездил на разных лодках, знают это. Вот, например, шлюпка. Если ее толкнуть прямо, она прямо и движется. Но есть другие лодки. Одну из них хорошо знают волгари. Это такая красивая лодка с высоким носом. Ее называют великоовражкой по названию одного из красивых волжских мест под городом Горьким. Если такую лодку толкнуть, то она моментально начинает куда-нибудь поворачиваться, либо вправо, либо влево. Прямо она не идет никогда. С чем это связано? Как объяснить такое несколько неожиданное поведение?

Давайте возьмем то же самое уравнение (3.2), но будем считать, что $h < 0$. Что это означает? Мы знаем, что когда $h > 0$, то, если даже лодку крутнуть, ее вращение замедляется. Это связано с тем, что при $h > 0$ момент $-h\dot{\varphi}$ — демпфирующий и поэтому противодействует любому движению лодки, отличному от движения по определенному курсу. Если же $h < 0$, то момент $-h\dot{\varphi}$ направлен в ту же сторону, куда направлена угловая скорость. Следовательно, если возникает угловая скорость $\dot{\varphi}$, то этот момент не уменьшает ее, не демпфирует, а, наоборот, увеличивает. Пока лодка плывет прямо — ничего не происходит. Но если ее чуть-чуть отклонили от курса, то это отклонение не уменьшается, а, наоборот, увеличивается. Причем, если вначале лодка отклоняется медленно, то потом отклоняется все быстрее и быстрее. И тот, кто плавал на такой лодке, знает, что нельзя давать ей сильно отклоняться. А если презевал, то с ней уже очень трудно справиться.

Таким образом, лодкам типа шлюпок отвечают $h > 0$, а лодкам типа великоовражки $h < 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $h < 0$. Фазовое пространство то же самое. Уравнение фазовых траекторий то же: $I\dot{\varphi} + h\varphi = c$. Только теперь на развертке цилиндра это уравнение прямых с положительным коэффициентом $-h/I > 0$ (рис. 4.16, а). На фазовом цилиндре эти траектории имеют вид винтовых линий, изображенных на рис. 4.16, б.

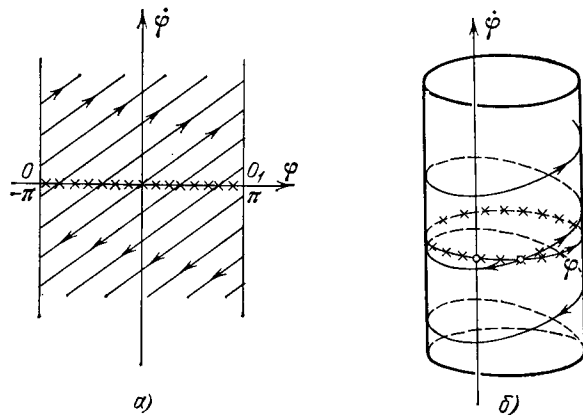


Рис. 4.16

Если при $h > 0$ фазовая точка по траекториям приближается к отрезку OO_1 , то теперь при $h < 0$ она удаляется от него, и тем быстрее, чем дальше от него находится. Точки отрезка OO_1 — по-прежнему состояния равновесия, только теперь это совсем другие состояния равновесия. Если при $h > 0$ это были настоящие реальные равновесия, то сейчас это какие-то «призрачные» состояния равновесия. Потому что, если вы чуть тронете лодку, то она уже не придет к состоянию равновесия, а будет поворачиваться. Такие состояния равновесия называют неустойчивыми. Практически же их как равновесных режимов нет. Лишь с точки зрения фазового портрета они имеют смысл; в данном случае как разделители вращений в одну сторону от вращений в другую.

Итак, мы познакомились с объектом — лодкой без управления в двух случаях, когда $h > 0$ и когда $h < 0$. В первом случае объект устойчивый, можно сказать, «послушный». При $h < 0$ объект неустойчивый, «непослушный». Однако и в том и в другом случае лодка сама по себе не может обеспечить поддержание заданного курса. Ею нужно управлять. Но управлять «послушной» лодкой, по-видимому, легче и проще, чем «непослушной». «Послушную» лодку нужно только направлять куда надо, а «непослушную» нужно не только направлять, но и справляться с ее плохим «характером», с ее «желанием» все время вертеться.

Представим себе, что лодка, уклонившись от заданного курса на некоторый угол φ_0 , еще и начала вращаться в ту же сторону с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$ (рис. 4.17, а). Мы должны, поворачивая руль, т. е. меняя угол ψ , привести ее к курсу и не только привести, но и удерживать на нем. Как это сделать? Считая начальным момент времени $t=0$, изобразим в системе координат (t, φ) начальное состояние лодки точкой и вектором (рис. 4.17, б). Точка определяет начальное отклонение лодки от курса, а тангенс угла наклона вектора к оси t равен $\dot{\varphi}_0$. Нам надо так менять ψ , чтобы из начального состояния $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ перейти на прямую $\varphi=0$ и на ней остаться, т. е. перейти к состоянию $\varphi=\dot{\varphi}=0$.

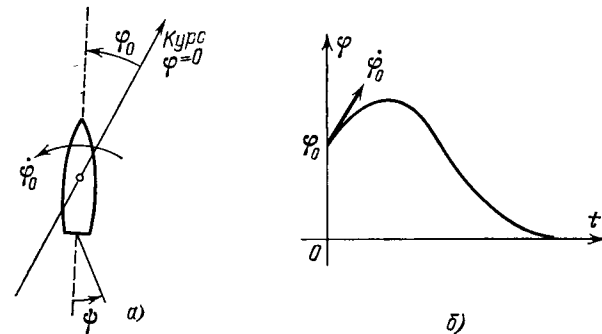


Рис. 4.17

Ясно, что это можно сделать разными способами, как, например, показано на рис. 4.17, б. Единственное естественное ограничение состоит в том, что график кривой $\varphi(t)$ должен быть гладким. Действительно, если есть точка нарушения гладкости, то в ней первая производная меняется скачком, а следовательно, вторая производная бесконечна. Но в силу уравнения (3.1), для того чтобы $\ddot{\varphi}$ была бесконечна, надо, чтобы момент в правой части был бесконечен, а это невозможно — руль создает только конечные моменты.

Пусть из всех законов приведения лодки к курсу нам понравился один: $\varphi^*(t)$. Как организовать управление, чтобы реализовать этот закон? Мы не знаем, как должен меняться угол ψ поворота руля, но зато знаем, как должен меняться угол φ поворота лодки. Подставляя $\varphi^*(t)$ в уравнение (3.1), получим для ψ условие

$$\psi^*(t) = -\frac{1}{k} [I\ddot{\varphi}^*(t) + h\dot{\varphi}^*(t)].$$

Посмотрим, как примерно выглядит $\psi^*(t)$. Там, где выражение в скобках отрицательное, $\psi^*(t)$ положительно, т. е. руль надо поворачивать в положительную сторону, а там, где это выражение положительное, — в отрицательную. Согласно рис. 4.18 вначале $\psi^*(t)$ положительно, а затем отрицательно. Как это можно понять? На первом

участке мы поворачиваем руль так, чтобы φ уменьшалось, т. е. лодка приводилась к курсу. Эту фазу управления назовем «приведением». В процессе приведения лодка приобретает довольно большую угловую скорость, и если не принять меры, то она проскочит курс и отклонится в другую сторону. Для того чтобы этого не было, надо переложить руль в обратную сторону, т. е. надо как бы «одерживать» лодку. Эту фазу управления будем называть «одерживанием». Таким образом,

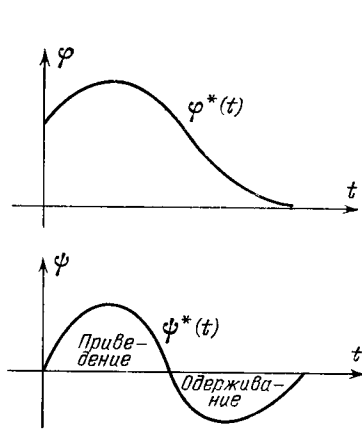


Рис. 4.18

если лодкой управляет опытный рулевой, то, увидев, что она отклоняется от курса, он сначала поворачивает руль так, чтобы лодка приводилась к курсу, а затем, когда она начинает быстро приближаться к нему, поворачивает руль в обратную сторону, чтобы одерживать ее и не дать излишне повернуться.

Управление, которое мы рассмотрели, называется *программным*. Это название в полной мере отражает суть рассмотренного способа управления. Действительно, сначала мы составляем программу или план своих действий, а затем находим управление, его реализующее. С такой ситуацией приходится встречаться довольно часто. Бывает, скажем, так. Вы спешите на работу или в университет, а на вашем пути препятствие — большая лужа, в которой кое-где разбросаны камешки. Вы не идете как попало, а некоторое время смотрите на лужу, на камешки и вырабатываете план движения. Потом быстро его реализуете, уверенно перемещаясь с камня на камень.

Так и в случае управления лодкой. У нас в руках руль. Лодка отклоняется от курса. Мы соображаем, как надо ее привести к курсу, и в соответствии с этим вырабатываем некоторый план управления. Задавая функцию $\varphi^*(t)$, мы программируем желаемый способ приведения лодки к курсу; $\varphi^*(t)$ — программа. Затем определяем, как надо поворачивать руль, чтобы реализовать принятую программу, т. е. определяем $\psi^*(t)$ — программное управление.

А теперь рассмотрим еще несколько вариантов программ приведения лодки к курсу и способов их реализации. На рис. 4.19 приведены несколько кривых $\varphi^*(t)$ для различных начальных состояний лодки и примерные графики для соответствующих им функций $\psi^*(t)$. Ради простоты пусть $h=0$. Тогда программное управление имеет вид

$$\psi^*(t) = -\frac{1}{k} I \ddot{\varphi}^*(t).$$

Кривые 1 рис. 4.19 описывают приведение лодки к курсу из начального состояния, когда лодка отклонена на некоторый угол φ_0 , но не вращается, т. е. $\dot{\varphi}_0=0$. График функции $\varphi^*(t)$ обязательно имеет точку перегиба. До значения t_n , соответствующего точке перегиба, $\varphi^*(t) > 0$ — это фаза «приведения», затем $\varphi^*(t) < 0$ — фаза «одерживания». Второй вариант начальных условий: лодка не отклонена, $\varphi_0=0$, но есть угловая скорость $\dot{\varphi}_0 > 0$. Этому случаю соответствуют кривые 2. Здесь опять есть фаза «приведения» и фаза «одерживания». Наконец, кривые 3 соответствуют случаю, когда лодка сильно отклонена от курса, но вращается по направлению к нему, $\varphi_0 > 0$, $\dot{\varphi}_0 < 0$, т. е. сама к нему приводится. В этом случае не надо приводить лодку к курсу, она сама к нему приходит. Надо ее слегка «одерживать», чтобы не дать ей пересечь курс и как-то плавно к нему привести. Таким образом, каждый раз, когда надо управлять лодкой, чтобы привести ее к курсу, это управление должно состоять из двух этапов: этап «приведения» и этап «одерживания». Нужно поворачивать руль так, чтобы добиться быстрого поворота лодки по направлению к курсу, а потом переложить руль в обратную сторону и нужным образом «одерживать» ее.

Всякий ли из запрограммированных законов управления можно выполнить? По-видимому, не всякий. И связано это прежде всего с ограниченными возможностями средств управления. Одно из таких ограничений мы уже рассмотрели. Оно связано с конечностью усилия, создаваемого рулем, и проявляется в том, что реализовать можно только гладкий закон управления. Это ограничение можно уточнить. Руль нельзя поворачивать на какой угодно угол, т. е. $|\psi^*(t)| \leq \psi_0$. Предельные углы $-\psi_0$ и ψ_0 поворота руля могут быть различными, но ясно, что больше 90° они быть не могут. Ограниченность углов поворота руля означает, что в любой момент времени величина $\frac{1}{k} |I \ddot{\varphi}^*(t) + h \dot{\varphi}^*(t)|$ должна быть меньше ψ_0 , т. е. мы можем реализовать только те программы, для которых выполняется ограничение $\frac{1}{k} |I \ddot{\varphi}^*(t) + h \dot{\varphi}^*(t)| \leq \psi_0$. Точно так же, когда, скажем, мы подходим к луже и видим, что она метра два с половиной шириной, то и мысли не возникает ее перешагнуть. Почему? Потому, что длина шага ограничена.

Итак, мы можем реализовать различные движения лодки. Но какое из них предпочтительнее? Какое является лучшим? Ответ на этот вопрос зависит от цели, которую мы ставим перед собой. Обычно,

когда мы стоим перед лужей, наши действия зависят от того, спешим мы или нет. В зависимости от этого мы принимаем ту или иную программу. Если спешим, то пойдем прямо по луже; если не спешим, то обойдем ее, даже если расстояние, которое надо пройти, очень велико.

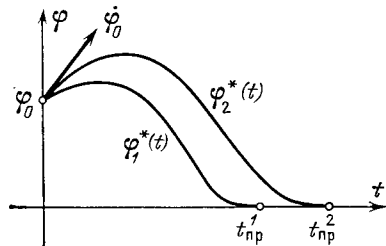


Рис. 4.20

Так и в случае управления лодкой. Для того чтобы сказать, какой способ управления лучше, надо сформулировать критерий того, что лучше, а что хуже. Один из самых естественных критериев состоит в том, чтобы привести лодку к курсу как можно быстрее. Если есть два способа приведения лодки к курсу, как показано на рис. 4.20, то надо выбрать первый, время $t_{нр}$ приведения лодки к курсу для которого меньше. Нетрудно понять, что это время сделать очень маленьким нельзя, так как при этом $\ddot{\varphi}^*(t)$ должно быть большим и может нарушиться условие $\frac{1}{k} |I\ddot{\varphi}^*(t) + h\dot{\varphi}^*(t)| \leq \psi_0$. Итак, для данного критерия цели задача программирования движения состоит в выборе кривой $\varphi^*(t)$, соединяющей точки $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ и $(\varphi(t_{нр})=0, \dot{\varphi}(t_{нр})=0)$, для которой $t_{нр}$ принимает минимальное значение при условии, что для всех промежуточных значений времени выполняется условие $\frac{1}{k} |I\ddot{\varphi}^*(t) + h\dot{\varphi}^*(t)| \leq \psi_0$.

Могут ли быть другие критерии? Могут. Скажем, мы хотим, чтобы лодка приводилась к курсу достаточно быстро и чтобы приведение осуществлялось комфортно. Что здесь имеется в виду? Скажем, вы едете в трамвае. Трамвай трогается с остановки. Водителю хочется ехать быстро, чтобы не выбиться из графика. Он резко включает полный ток. Пассажиры падают, ругаются. Зато он выдерживает график. Даже, может быть, очень хорошо. За что и получает премию. А другой водитель ток включает плавно. Трамвай идет спокойно. Пассажиры не чувствуют неудобства. Но он, конечно, проигрывает во времени. Так и в случае управления лодкой. Вы хотите управлять ею плавно, чтобы никто не ушибся и не упал за борт. В чем состоит критерий комфортабельности? Оказывается, он состоит в том, чтобы вторая производная от угла поворота лодки менялась медленно, т. е. чтобы $\ddot{\varphi}(t)$ была невелика: $|\ddot{\varphi}^*(t)| < \varepsilon$. Ну, а если мы, кроме того, хотим, чтобы приведение было не слишком долгим, то программу $\varphi^*(t)$ надо выбирать так, чтобы было минимальным $t_{нр}$ при условии

$$\frac{1}{k} |I\ddot{\varphi}^*(t) + h\dot{\varphi}^*(t)| \leq \psi_0, \quad |\ddot{\varphi}^*(t)| < \varepsilon.$$

Могут быть и другие критерии, например энергетические, когда надо выбрать программу из условия минимума энергетических затрат, т. е. когда вы хотите достичь цели, затратив для этого наименьшую энергию. Во всех случаях, когда программируемое движение объекта определяется из условия минимума или максимума некоторого критерия цели, его называют *оптимальным*. Управление, реализующее оптимальное программное движение объекта, называют оптимальным программным управлением.

Разберемся в том, что нужно знать, чтобы реализовать оптималь-

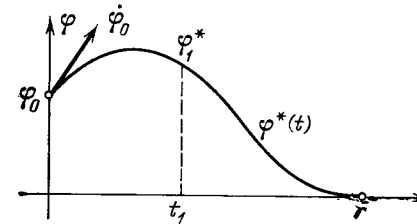


Рис. 4.21

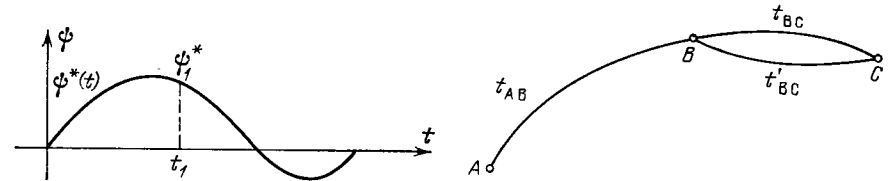


Рис. 4.22

ное программное управление. Пусть $\Phi = \{\varphi(t), 0 \leq t \leq T\}$ — множество программных движений объекта, определяемое начальным $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ и конечным $\varphi_1, \dot{\varphi}_1$ его состояниями и некоторыми естественными ограничениями. Так, в случае управления лодкой эти ограничения связаны с ограниченностью угла поворота руля. Есть некоторый критерий цели управления, который представляет собой функционал $V(\varphi(t))$, заданный на множестве Φ . Надо выбрать программное движение так, чтобы для него функционал принимал наименьшее значение, т. е. надо выбрать $\varphi^*(t) \in \Phi$ так, чтобы $V(\varphi^*(t)) \leq V(\varphi(t))$ для всех $\varphi(t) \in \Phi$. Функция $\varphi^*(t)$ является оптимальной программой. По ней затем нужно найти оптимальное программное управление $\psi^*(t)$. Значит, для того чтобы реализовать оптимальное программное управление, надо решить задачу оптимизации и найти оптимальную программу $\varphi^*(t)$, затем найти оптимальное программное управление $\psi^*(t)$, где-то его записать и в соответствии с ним осуществлять управление (рис. 4.21), т. е. чтобы реализовать оптимальное управление, надо знать его для всех моментов времени.

Но интуитивно ясно, что такое знание является лишним. Ведь в каждый момент времени $0 \leq t_1 < T$ нам нужно знать не всю кривую $\psi^*(t)$, а лишь то, на какой угол мы должны повернуть руль именно в этот момент, т. е. ψ_1^* (рис. 4.21). А что было до этого момента и что будет потом, нас не интересует. Так вот, оказывается, что это действительно так, и нет необходимости определять и запоминать всю кривую $\psi^*(t)$, а можно действовать значительно проще. Для того чтобы

понять это и разобраться в том, что нужно знать для реализации оптимального программного управления, рассмотрим следующее утверждение: пусть $\varphi^*(t)$ — оптимальная программа; тогда, если мы реализовали ее до некоторого значения $\varphi^*(t_1)$ в момент времени t_1 , то оставшаяся часть программы должна быть также оптимальной.

Проиллюстрируем это утверждение на примере. Пусть надо перейти из города A в город B , а из него в город C (рис. 4.22), и сделать это за наименьшее время. Утверждается: для того чтобы перейти из города A в город C за наименьшее время, необходимо переходить из города B в город C за наименьшее время. Если t_{AB} — время перехода из A в B , а t_{BC} — время перехода из B в C , то если время $t_{AB} + t_{BC}$ перехода из A в B — минимальное, то тогда и t_{BC} — минимальное, т. е. нельзя перейти из B в C быстрее. Действительно, если существует способ перехода из B в C за меньшее время $t'_{BC} < t_{BC}$, то все время $t_{AB} + t_{BC}$ не будет минимальным. Почему требуется минимальность времени только на последнем участке пути, ведь минимизируется сумма $t_{AB} + t_{BC}$?

Дело в том, что слагаемые в этой сумме зависимы, причем t_{BC} зависят от t_{AB} , а не наоборот. Это хорошо видно на таком примере. Как опытный спортсмен строит график бега на длинную дистанцию? Первую половину, а может быть, даже $3/4$ дистанции он не стремится бежать за минимальное возможное для себя время, зато оставшуюся часть дистанции он бежит изо всех сил, на пределе своих возможностей, т. е. за минимальное время, а вот неопытный спортсмен иногда сразу начинает вести бег на пределе своих возможностей, и хотя он преодолевает часть дистанции за минимальное время, на оставшуюся часть дистанции сил у него не хватает. Он либо прекращает бег, либо пробегает дистанцию не за оптимальное для себя время.

Таким образом, необходимым условием оптимальности программного движения является оптимальность любого последнего участка движения. Это условие, как было уже сказано, сформулировано американским математиком Р. Беллманом в виде так называемого принципа динамического программирования. Почему так названо это условие? Потому что речь в нем идет об оптимальном программировании движения динамической системы.

А теперь постараемся увидеть, что принцип динамического программирования непосредственно связан с понятием состояния динамической системы.

Вернемся к задаче об управлении лодкой. Пусть из начального состояния $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ в момент времени $t=0$ мы хотим привести лодку к курсу, причем так, чтобы время T приведения было минимальным.

Кроме того, надо учесть ограничение на поворот руля $\frac{1}{k} |\ddot{\varphi}^*(t) + h\dot{\varphi}^*(t)| \leq \varphi_0$. Для отыскания нужного нам управления надо сначала решить оптимизационную задачу и найти оптимальную программу $\varphi^*(t)$. Чем определяется эта функция? Она определяется только на-

начальными условиями $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ и ограничениями. Теперь рассмотрим какой-нибудь промежуточный момент времени t_1 (рис. 4.21). В этот момент времени φ становится равным φ_1^* , а $\dot{\varphi}$ — равной $\dot{\varphi}_1^*$. Так как вся кривая $\varphi^*(t)$ — оптимальная, то и ее часть от t_1 до T — тоже оптимальная. Но ведь функция $\varphi^*(t)$ на этом участке полностью определяется значениями φ_1^* и $\dot{\varphi}_1^*$, т. е. начальными условиями на этом участке. И хотя вся оптимальная программа $\varphi^*(t)$ однозначно определяется начальными значениями φ_0 и $\dot{\varphi}_0$, ее часть от t_1 до T определяется только значениями φ_1^* и $\dot{\varphi}_1^*$ и не зависит от того, что было раньше, т. е. от φ_0 и $\dot{\varphi}_0$. Это так потому, что все, что нужно знать о системе в данный момент времени, и все, что нужно знать, чтобы определить, как она будет двигаться дальше, сосредоточено в величинах φ и $\dot{\varphi}$, т. е. в ее состоянии. В этом смысле можно смотреть на принцип динамического программирования как на естественное следствие понятия состояния.

Оптимальная программа $\varphi^*(t)$ определяет закон изменения положения руля, т. е. $\psi^*(t)$. При $t \geq t_1$ функция $\varphi^*(t)$ зависит только от φ_1 и $\dot{\varphi}_1$, значит, и функция $\psi^*(t)$ при $t \geq t_1$ зависит только от φ_1^* и $\dot{\varphi}_1^*$. Значит, в частности, $\psi^*(t)$ в момент времени t_1 определяется только значениями φ_1^* и $\dot{\varphi}_1^*$. Но так как t_1 — это любой промежуточный момент времени, то отсюда следует, что в каждый момент времени отклонение руля есть функция значений φ и $\dot{\varphi}$ в тот же момент времени, т. е. $\psi^*(t) = f(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$. Вот к какому удивительному результату привел нас принцип динамического программирования. Он показал, что не нужно программировать всю оптимальную программу $\psi^*(t)$, не нужно ее запоминать, а нужно лишь обладать некой функцией от состояния и в соответствии с ней выбирать положение руля. Такая функция от состояния объекта называется *стратегией управления*. Так вот оказывается, что оптимальное программное управление можно реализовать, обладая оптимальной стратегией управления по заданному состоянию, т. е. $\psi^* = f(\varphi, \dot{\varphi})$.

Итак, что означает — обучиться хорошо управлять лодкой? Это значит: во-первых, понять, что такое состояние лодки, и научиться определять его, т. е. измерять угол φ отклонения лодки от курса и скорости $\dot{\varphi}$ его изменения; во-вторых, нужно выработать оптимальную стратегию управления, т. е. выработать такую функцию $f(\varphi, \dot{\varphi})$, которая позволила бы по φ и $\dot{\varphi}$ найти оптимальный угол поворота руля.

Как найти оптимальную стратегию? Это сложный вопрос. Посмотрим, как это делает человек. Скажем, приходит он в спортзал. У него хорошие данные. Он без особой подготовки преодолевает планку на высоте 140 см. Тренер его замечает и начинает с ним заниматься. Он обучает его оптимальной стратегии поведения. Спортсмен прыгает на 160 см, затем выше, но где-то после 190 см происходит заминка.

Проходит год, два, он начинает прыгать выше и достигает своего лучшего результата. Причем надо сказать, что в разное время потолок результатов различен. Скажем, лет 30—35 тому назад он был где-то вблизи 180—190 см. Очень многие показывали такие результаты, а выше прыгали лишь единицы. Сейчас потолок возрос до 200—210 см, выше двух метров прыгают уже очень многие спортсмены. С чем это связано? Связано это с тем, что совершенствуется стратегия и, как следствие, улучшаются результаты. Значит, у человека выбор оптимального поведения осуществляется путем индивидуального и коллективного обучения. Все учатся, а потом передают опыт друг другу. В результате этого формируется оптимальная стратегия. Самые жизненно важные оптимальные стратегии заложены в генетических программах нашего поведения. Так, в частности, в инстинктах заложено много программ оптимального поведения.

А как найти оптимальную стратегию в нашей задаче об управлении лодкой? Мы теперь знаем, что она есть функция состояния лодки. Это, безусловно, большой успех. Но все-таки функция нам неизвестна. Как ее выбрать? К этому вопросу мы еще вернемся, а сейчас пойдем по другому пути. Зададимся несколькими конкретными стратегиями управления и посмотрим, как будет осуществляться процесс управления лодкой.

Сначала возьмем простую стратегию в виде линейной функции от состояния объекта, т. е. $\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}$. Это стратегия простейшего линейного авторулевого. Тогда процесс управления движением лодки описывается уравнением (3.1) объекта и уравнением авторулевого

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \quad \psi = a\varphi + b\dot{\varphi}. \quad (3.3)$$

Сначала рассмотрим простейший случай $b=0$. Поставив ψ в уравнение лодки, получим уравнение для изменения φ :

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + ka\varphi = 0. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий, а λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$I\lambda^2 + h\lambda + ka = 0. \quad (3.5)$$

Как ведет себя решение с увеличением времени? Здесь возможны два качественно различных случая в зависимости от знаков вещественных частей λ_1 и λ_2 . Если вещественные части обоих корней отрицательны, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$, то всегда при любых c_1 и c_2 $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если хотя бы у одного корня вещественная часть положительна, например, $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, то возможно, что $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Но по самой сути управления лодкой надо, чтобы с возрастанием времени всегда угол $\varphi(t) \rightarrow 0$. А значит, надо, чтобы выполнялись условия $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$. Условия, обеспечивающие отрицательность вещественных

частей корней характеристического уравнения, очень просты и следуют непосредственно из формул для корней квадратного уравнения. Они состоят в том, что все коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительными, т. е.

$$I > 0, \quad h > 0, \quad ka > 0. \quad (3.6)$$

Коэффициенты I и k положительны по физическому смыслу. Значит, должны выполняться условия $h > 0$ и $a > 0$. Что они означают? Условие $h > 0$ означает, что управлять можно только «послушной» лодкой. «Непослушной» с $h < 0$ лодкой так ($b=0$) управлять нельзя. Условие $a > 0$ означает, что руль надо переключать в ту же сторону, куда отклонилась лодка. Действительно, если лодка отклонилась влево, то $\varphi > 0$, тогда при $a > 0$ ψ — тоже положительное; если $\varphi < 0$, то $\psi < 0$. Это слишком простая стратегия. Ее простота в том, что рулевой следит лишь за углом отклонения лодки от курса и в зависимости от его величины поворачивает руль в сторону отклонения лодки. Быстро или медленно крутится при этом лодка возле курса — его не интересует. Такая стратегия достаточна для «послушной» лодки с $h > 0$, однако при $h < 0$ она не приводит к цели. Авторулевой с такой стратегией слишком прямолинейный. Но, несмотря на его прямолинейность, при $h > 0$ он позволяет поддерживать требуемый курс движения лодки.

Какие изменения происходят в фазовом портрете лодки, если ею управляет авторулевой? Для выяснения этого представим уравнение (3.4) в виде системы

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{T}(hy + ak\varphi). \quad (3.7)$$

Точка φ, y фазового цилиндра — состояние системы. Состояния равновесия — это точки, где $\dot{\varphi} = 0$ и $\dot{y} = 0$ одновременно. Из (3.7) следует, что у лодки с авторулевым всего лишь одно состояние равновесия $\varphi = 0, y = \dot{\varphi} = 0$. Если выполнено условие $a > 0$, то у «послушной» ($h > 0$) лодки состояние равновесия устойчивое, у «непослушной» ($h < 0$) лодки состояние равновесия неустойчивое. Действительно, так как у «послушной» лодки все решения $\varphi(t)$ и $y(t)$ системы (3.7) стремятся к нулю при возрастании времени, то движение фазовой точки по фазовым траекториям происходит примерно так, как показано на рис. 4.23, а. Фазовая точка приближается к состоянию равновесия. У «непослушной» лодки фазовая точка, наоборот, удаляется от состояния равновесия (рис. 4.23, б).

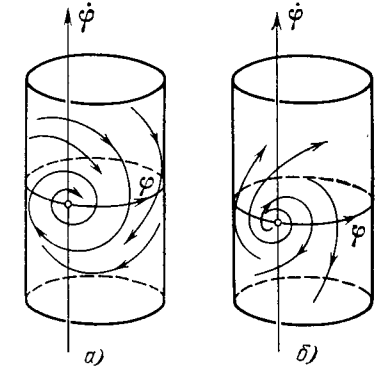


Рис. 4.23

Для того чтобы справиться с «непослушной» лодкой, усложним стратегию управления и возьмем $\dot{\psi} = a\varphi + b\dot{\varphi}$, т. е. учтем, кроме угла φ поворота лодки, еще и скорость $\dot{\varphi}$ ее поворота. Тогда уравнение для лодки с авторулевым будет иметь вид

$$I\ddot{\varphi} + (h + bk)\dot{\varphi} + ak\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Его характеристическое уравнение запишется так:

$$I\lambda^2 + (h + bk)\lambda + ak = 0, \quad (3.9)$$

а условие отрицательности вещественных частей его корней будет

$$I > 0, \quad h + bk > 0, \quad ak > 0. \quad (3.10)$$

Первое неравенство выполняется. Третье неравенство ничего нового не дает. Оно уже было (3.6), а старый опыт не заменяется новым — он сохраняется. Новым является второе неравенство. Для его выполнения надо, чтобы коэффициент b был больше, чем $-h/k$, т. е. $b > -h/k$. Если $h > 0$, то это условие выполняется при любых неотрицательных b , и, в частности, при $b = 0$, но если $h < 0$, то для его выполнения надо, чтобы b было положительным и не просто любым положительным, а большим $b^* = -h/k$.

Разберемся, что это значит. Представим себе, что лодка в некий момент времени $t = 0$ имеет состояние $\varphi > 0$ и $\dot{\varphi} < 0$. При стратегии управления $\dot{\psi} = a\varphi$ мы не обращаем внимания на $\dot{\varphi}$ и поворачиваем руль в сторону отклонения лодки, т. е. влево: $\dot{\psi} > 0$. При второй стратегии $\dot{\psi} = a\varphi + b\dot{\varphi}$, если скорость поворота $\dot{\varphi}$ отрицательна и достаточно велика, то руль надо повернуть не влево, а, наоборот, вправо, т. е. надо не приводить лодку к курсу, она сама к нему приводится, а одерживать ее. Причем чем больше величина h , тем больше b^* , и, следовательно, интенсивнее нужно одерживать лодку.

Таким образом, учет скорости внес в стратегию управления лодкой, кроме понятия приведения лодки к курсу, понятие одерживания. Если вы управляете «непослушной» лодкой, то вы должны хорошо делать две вещи: во-первых, не давать ей сильно уклоняться от курса; во-вторых, когда она уклонилась от курса и быстро к нему приводится, то надо ее одерживать. Такая тактика, состоящая в разумном сочетании приведения и одерживания, является, как видите, уже достаточной, чтобы управлять «непослушной» лодкой.

Итак, авторулевой, реализующий стратегию управления $\dot{\psi} = a\varphi + b\dot{\varphi}$ при выполнении условий (3.10), обеспечивает движение лодки по заданному курсу и возвращение на него после любых отклонений. С точки зрения фазового портрета это означает существование единственного *устойчивого состояния равновесия*, к которому стремятся все фазовые траектории системы (рис. 4.23, а). Различие в поведении фазовых траекторий может состоять лишь в характере их приближения к состоянию равновесия. То, как фазовая точка приближается к состоянию равновесия системы, описывается решением

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dot{\varphi}(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Это решение зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (3.9). При выполнении условий (3.10) вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$. Рассмотрим два основных случая:

1. Корни λ_1 и λ_2 — действительные и отрицательные.
2. Корни λ_1 и λ_2 — комплексные сопряженные, т. е. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, причем $\alpha < 0$.

Если λ_1 и λ_2 — действительные, то $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ меняются плавно без колебаний (рис. 4.24, а). В этом случае процесс перехода лодки

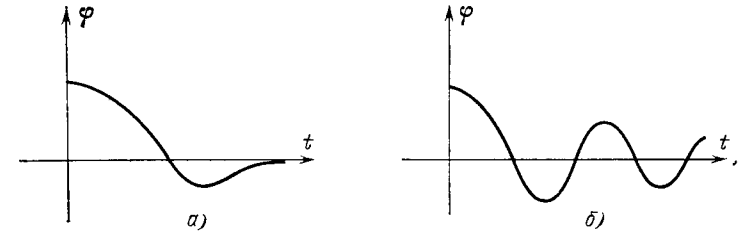


Рис. 4.24

из начального состояния к курсу называют аperiодическим. Если λ_1 и λ_2 — комплексные, то процесс колебательный. Лодка приводится к курсу, совершая колебания возле него. Приходя к курсу, она проскакивает его и поворачивается в другую сторону, затем опять приводится и проскакивает и т. д. (рис. 4.24, б). Условие, при котором λ_1 и λ_2 — комплексные, имеет вид

$$(h + bk)^2 - 4Ika < 0.$$

Итак, теперь мы знаем, как надо управлять лодкой, чтобы обеспечить устойчивое движение ее по курсу. Но устойчивость состояния равновесия лодки с авторулевым гарантирует поддержание курса лишь по отношению к начальным возмущениям, т. е. возмущениям, действующим кратковременно. На самом же деле возмущения, такие, скажем, как ветер, волны, течение и т. д., действуют на лодку постоянно. Как будет вести себя лодка с авторулевым при постоянно действующих возмущениях? Возмущения могут быть любыми, вообще говоря, случайными. Однако мы рассмотрим одно из самых простых — постоянное возмущение. Как его можно себе представить? Скажем, до некоторого момента на лодку не действовали никакие возмущения, но, начиная с этого момента, подул ветер и дует с постоянной скоростью. Это соответствует тому, что возмущение появляется в момент времени $t = 0$ и его величина после этого постоянна и равна некоторому M_0 . До этого момента времени возмущений не было и лодка плыла по курсу, т. е. при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$. При $t > 0$ уравнение движения лодки будет иметь вид

$$I\ddot{\varphi} + (h + bk)\dot{\varphi} + ak\varphi = M_0. \quad (3.11)$$

Его решение при нулевых начальных условиях $t=0$, $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$ имеет вид

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{M_0}{ak}, \quad \dot{\varphi}(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения, а постоянные c_1 и c_2 равны

$$c_1 = \frac{M_0 \lambda_2}{ak(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad c_2 = \frac{M_0 \lambda_1}{ak(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Посмотрим, как ведут себя $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ при увеличении времени. При $t \rightarrow \infty$ слагаемые с $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$ стремятся к нулю, так как $\text{Re } \lambda_1 <$

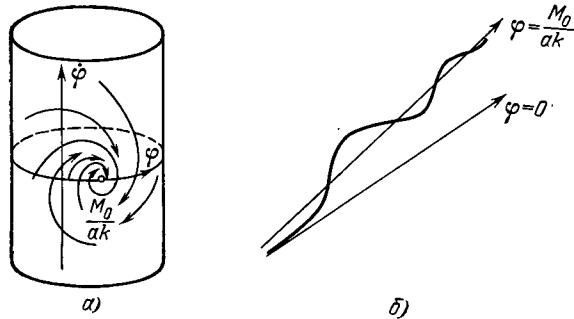


Рис. 4.25

< 0 , $\text{Re } \lambda_2 < 0$ и $\varphi \rightarrow \varphi^* = M_0/(ak)$, $\dot{\varphi} \rightarrow 0$. Что это означает? Под воздействием момента M_0 у лодки с авторулевым появилось новое состояние равновесия. Без постоянного возмущения состояние равновесия было $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$, а теперь состоянием равновесия является $\varphi=M_0/(ak)$, $\dot{\varphi}=0$. Чем отличается фазовый портрет в этом случае от предыдущего? Раньше состоянием равновесия была точка $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$, а теперь точка $\varphi=M_0/(ak)$, $\dot{\varphi}=0$ (рис. 4.25, а). Все остальное остается таким же, как и прежде, т. е. характер приближения фазовых траекторий к состоянию равновесия не меняется по сравнению с рис. 4.23, а.

Теперь посмотрим, как в соответствии с фазовым портретом будет двигаться лодка (рис. 4.25, б). Лодка движется по курсу до того момента времени, когда на нее стал действовать момент M_0 , т. е. ее фазовое состояние изображалось точкой $\varphi=\dot{\varphi}=0$. Угол начинает возрастать, затем убывать и т. д., и лодка приходит к новому курсу. Появляется установившаяся ошибка в курсе, и она равна $\varphi=M_0/(ak)$. Лодка плывет не туда куда надо. Однако все же она с управлением ведет себя лучше, чем если бы этого управления не было. Действительно, без авторулевого лодка под действием постоянного момента просто вращалась бы и не придерживалась бы никакого курса. Если

же есть авторулевой, то лодка не вращается, но и не плывет точно туда куда нужно, появляется ошибка. Естественно стремиться к тому, чтобы сделать эту ошибку как можно меньше. Для этого надо увеличивать ak . Что это означает? Прежде всего, k — это коэффициент пропорциональности между поворотом руля и моментом, который он вызывает, т. е. величина k характеризует, насколько сильно влияет поворот руля на лодку. Величина k зависит от очень многих факторов, в частности, ясно, что чем больше руль, тем больше k . Если руль — маленький, то k — маленькое, и таким рулем ничего нельзя сделать против ветра, т. е. руль должен быть достаточно большим. Но сделать руль больше лодки нельзя, он должен быть много меньше лодки, поэтому k имеет вполне определенные пределы. Его можно увеличивать, но слишком большим сделать нельзя. Следовательно, остается возможность уменьшать ошибку только за счет увеличения a . Что такое a ? Это коэффициент стратегии управления $\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}$. Казалось бы, ничего нам не мешает взять a достаточно большим. Условия устойчивости $a > 0$ и $b > -h/k$ при этом не нарушаются, и, увеличивая a , можно добиться сколь угодно малой установившейся ошибки. Этот вывод совершенно точно следует из рассмотренной нами модели. Но что означает большое a , скажем, $a \approx 10^6$? Это значит, что $\psi \approx 10^6 \varphi$, и если лодка отклоняется от курса за одну секунду на угол $\approx 1^\circ$, то угол поворота руля должен быть $\approx (10^6)^\circ$, т. е. руль надо поворачивать по кругу более 2000 раз. Но это бессмысленно. Руль по кругу вращать нельзя. Более того, известно, что руль можно поворачивать только в ограниченных пределах $|\psi| < \psi_0$. С другой стороны, стремление увеличить a , чтобы уменьшить установившуюся ошибку, ставит вопрос о возможности реализации стратегии управления в том виде, как мы ее написали, т. е. $\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}$. Более того, если, скажем, $a \approx 100$, то при $\varphi \approx 0,5^\circ$ надо повернуть руль на угол $\approx 50^\circ$. Но для того, чтобы повернуть руль на такой угол, нужно время. Ведь повернуть руль мгновенно нельзя. Можно поворачивать достаточно быстро, но мгновенно нельзя. Любой привод всегда имеет конечную мощность. Значит, мы не только не можем поворачивать руль на любые углы, но и не можем поворачивать его сколь угодно быстро. Поэтому реализовать стратегию управления в виде $\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}$ невозможно. Это идеальный рулевой. Чтобы построить более точную и реалистическую модель авторулевого, разберемся подробнее, что он собой представляет.

Вернемся вновь к постановке задачи об управлении курсом лодки. Есть лодка, у нее есть руль. Этот руль поворачивается либо непосредственно человеком, либо рулевой машинкой. Лодка может отклониться от курса. Это отклонение характеризуется углом φ . Но откуда он берется? Значит, должны быть какие-то измерительные устройства, которые измеряют φ . Кроме того, для реализации стратегии управления нужно знать $\dot{\varphi}$, которую можно получить либо дифференцированием φ , либо непосредственным измерением.

Рулевая машинка поворачивает руль, реализуя стратегию управления, но делает это не сама по себе, а по команде, зависящей от того, что надо получить. А нужно в соответствии с выбранной стратегией получить поворот руля, равный $\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}$. Значит, должно

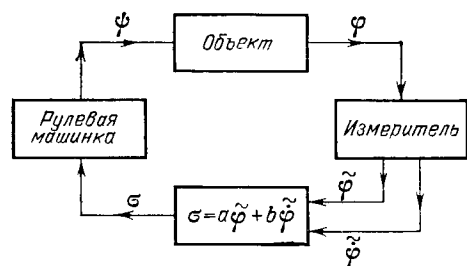


Рис. 4.26

быть устройство, которое формирует такую команду.

Итак, реальный авторулевой представляет собой довольно сложную систему, состоящую из нескольких устройств, каждое из которых выполняет свои вполне определенные функции. Судно и авторулевой представляют собой систему автоматического управления, которую схематически изобразим на рис.

4.26. Здесь судно и каждый функциональный блок авторулевого изображены в виде прямоугольников со входящими в них и выходящими из них стрелками. Входящие стрелки соответствуют входным переменным блока; выходящие — выходным.

Начнем рассмотрение схемы на рис. 4.26 с судна. Мы управляем курсом судна, поэтому естественно назвать его объектом управления. Чем он характеризуется? Углом φ , и это есть выход объекта. Управляем мы поворотом руля, т. е. углом ψ , и это есть вход объекта. Какова цель управления? Цель управления — обеспечить $\varphi=0$, т. е. движение судна по заданному курсу. Ясно, что это идеальная цель, и реально достичь ее невозможно; естественнее определить цель, скажем, так: обеспечить $|\varphi| \leq \delta$, где δ мало.

Дальше идет измерительное устройство, которое, воспринимая поворот судна, выдает значения $\tilde{\varphi}$ и $\dot{\tilde{\varphi}}$. Это выходы измерительного устройства. Измеренные значения $\tilde{\varphi}$ и $\dot{\tilde{\varphi}}$ поступают на блок, который формирует в соответствии с выбранной стратегией командный сигнал σ для рулевой машинки, скажем, $\sigma = a\tilde{\varphi} + b\dot{\tilde{\varphi}}$. Рулевая машинка исполняет команду и поворачивает руль. Именно по такой схеме осуществляется реальное автоматическое управление курсом судна. В ней отражен смысл того, как это происходит на самом деле. Такая схема называется структурной. Но это еще не математическая модель. Чтобы ее получить, надо выяснить, что представляет собой каждый из этих «ящиков», надо найти, как у них связаны выход со входом.

Прежде всего, объект управления. Его мы будем по-прежнему описывать уравнением

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi.$$

Это и есть связь между углом ψ отклонения руля и углом φ отклонения судна от курса.

Измерительное устройство. Это сложное устройство. Мы пока не будем описывать его детально, а учтем только простейшую неприятность, которая с ним связана. Дело в том, что результаты измерения выдаются с некоторым запаздыванием. Скажем, если мы просто смотрим на компас и снимаем с него данные, то нужно время, чтобы установилась стрелка, нужно их как-то записать и передать. Кроме того, если угловая скорость не измеряется, а определяется дифференцированием, то для этого надо накопить значения угла отклонения. Для всего этого также требуется время. Поэтому в момент времени t измеритель определяет не φ и $\dot{\varphi}$, а $\tilde{\varphi} = \varphi(t-\tau)$ и $\dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi}(t-\tau)$, где τ — некоторое время запаздывания. Ранее рассмотренный авторулевой соответствует идеальному измерителю, для которого $\tilde{\varphi} = \varphi$, $\dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi}$. Но учет одного только запаздывания при описании измерителя, конечно, очень грубое приближение. В действительности все обстоит много сложнее.

Далее идет устройство, которое по данным измерителя формирует командный сигнал $\sigma = a\tilde{\varphi} + b\dot{\tilde{\varphi}}$ для рулевой машинки. В соответствии с командным сигналом рулевая машинка должна обеспечить поворот руля на угол $\psi = \sigma$. Но мгновенно выполнить команду может только идеальная рулевая машинка. На самом деле никто и ничто не может обеспечить мгновенную перекладку руля. Для этого нужно время. Если, скажем, до прихода командного сигнала $\psi=0$, и командный сигнал равен σ_0 , то идеальная рулевая машинка осуществляет мгновенный перевод руля из положения $\psi=0$ в положение $\psi=\sigma_0$. Реально же изменение угла происходит не скачком, а плавно, как, скажем, показано на рис. 4.27. Здесь кривая 1 отвечает идеальной рулевой машинке, а кривые 2 и 3 описывают, как реально изменяется угол ψ поворота руля. Причем переход руля из положения $\psi=0$ в положение $\psi=\sigma_0$ по кривой 2 происходит быстрее, чем по кривой 3. А теперь построим некоторую математическую модель рулевой машинки, учитывающую, что руль мгновенно повернуть нельзя. Если уравнение идеальной рулевой машинки $\psi = \sigma$, то реальную опишем так:

$$T\dot{\psi} + \psi = \sigma.$$

Покажем, что такой закон связи командного сигнала с углом поворота руля действительно отражает тот факт, что руль мгновенно повернуть нельзя. Пусть до момента $t=0$ командный сигнал равен $\sigma=0$ и угол поворота руля равен нулю, $\psi=0$. В момент $t=0$ пришел командный сигнал $\sigma=\sigma_0$. Тогда, в соответствии с уравнением $T\dot{\psi} + \psi = \sigma_0$, изменение угла ψ будет происходить следующим образом: $\psi = \sigma_0(1 - e^{-t/T})$. График этой функции изображен на рис. 4.28. На рисунке изображено несколько кривых, отвечающих различным значениям параметра T . Чем меньше T , тем быстрее руль приходит к значению σ_0 ; чем больше T , тем медленнее происходит поворот руля, т. е. величина T является характеристикой того, насколько

быстро рулевая машинка исполняет команду. Действительно, при $t=T$ значение угла будет $\psi = \sigma_0(1 - e^{-1})$, т. е. команда почти выполнялась. Параметр T обычно называют постоянной времени. Это характерный параметр, означающий быстроту, с которой исполнительное устройство выполняет командный сигнал. Если, скажем,

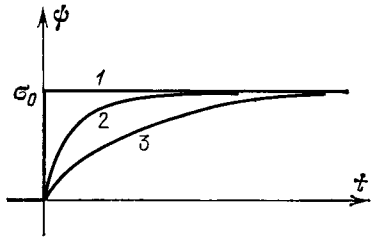


Рис. 4.27

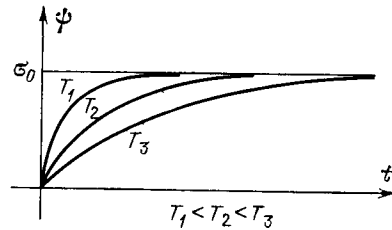


Рис. 4.28

$T=10$ с, то это означает, что для выполнения команды нужно примерно 10 с. Так, если мы управляем шлюпкой, то для поворота руля нужно 0,5—2 с. Если же мы управляем большим судном, то T может быть порядка 10—20 с и более.

Теперь мы можем записать математическую модель системы управления судном на курсе, более полно учитывающую то, что происходит на самом деле. Правда, измеритель будем по-прежнему считать идеальным:

$$I\ddot{\psi} + h\dot{\psi} = -k\psi, \quad T\dot{\psi} + \psi = a\varphi + b\dot{\varphi}. \quad (3.12)$$

При $T=0$ получаем идеальное исполнительное устройство и приходим к прежним уравнениям (3.8). Значит, уточненная модель включает как частный случай первоначальную модель.

Исследование модели с идеальной рулевой машинкой показало, что установившуюся ошибку авторулевого можно сделать сколь угодно малой за счет увеличения a . Будет ли это сохраняться для уточненной модели? Прежде всего рассмотрим вопрос об устойчивости авторулевого. Изменение угла φ отклонения судна от курса в этом случае получается как решение уравнений (3.12) и имеет вид

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t},$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные, зависящие от начальных условий, а λ_1, λ_2 и λ_3 — корни характеристического уравнения. Характеристическое уравнение системы запишется так:

$$\begin{vmatrix} I\lambda^2 + h\lambda & k \\ -a - b\lambda & T\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Его можно переписать в виде кубического уравнения

$$IT\lambda^3 + (I + Th)\lambda^2 + (h + bk)\lambda + ak = 0. \quad (3.13)$$

Устойчивость авторулевого означает, что $\varphi \rightarrow 0$ с увеличением времени. Для этого нужно, чтобы у всех корней характеристического уравнения (3.13) вещественные части были отрицательными, т. е. $\text{Re}\lambda_1 < 0, \text{Re}\lambda_2 < 0, \text{Re}\lambda_3 < 0$. Уравнение (3.13) — это алгебраическое уравнение третьей степени, установление знаков действительной части его корней — задача не очень сложная, но и не очень простая. Поэтому мы просто сформулируем условия, при которых все три корня имеют отрицательные действительные части.

Пусть дано уравнение

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Для того чтобы все корни этого уравнения имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{и} \quad a_1a_2 - a_3 > 0. \quad (3.14)$$

Запишем эти условия в нашем случае. Сначала запишем простые условия положительности коэффициентов характеристического уравнения $IT > 0, I + hT > 0, h + kb > 0, ak > 0$ и посмотрим, что они означают.

Первое неравенство выполняется по физическому смыслу, третье и четвертое нам хорошо знакомы по предыдущей модели и ничего нового не дают. Из них следует $a > 0$ и $b > -h/k$. Второе неравенство новое. При $h > 0$ оно выполняется и никаких новых ограничений на параметры не дает. Но если $h < 0$, то оно выполняется при условии $T < -1/h$. Что это значит? Это значит, что если судно «норовистое» ($h < 0$), то команды управления надо выполнять достаточно быстро. Если, скажем, вы обладаете очень плохой реакцией, то лучше в «норовистую» лодку рулевым не садитесь, управлять ею вы не сможете.

Теперь рассмотрим последнее неравенство (3.14). Оно имеет вид

$$(I + Th)(h + kb) - ITak > 0.$$

Разделим неравенство на IT и перепишем в виде

$$\frac{1}{T} > \frac{k}{h + kb} a - \frac{h}{T}. \quad (3.15)$$

Построим в плоскости параметров a и $1/T$ область, где выполняются все условия устойчивости (3.14). Неравенства $a > 0$ и $1/T > 0$ вместе с (3.15) определяют эту область. Она называется областью устойчивости. На рис. 4.29, а показана область устойчивости при $h > 0$, а на рис. 4.29, б — при $h < 0$. Как следует из рисунков, при любом конечном T существует критическое значение $a = a_{кр}(T)$, больше которого брать a нельзя ввиду появления неустойчивости. Следовательно, при $T \neq 0$ условие устойчивости налагает ограничение на значение a , и неограниченно увеличивать a нельзя. С уменьшением T критическое значение $a_{кр}(T)$ увеличивается.

Итак, какое бы ни было T , пусть даже очень маленькое, всегда существует порог для значений a , поэтому есть порог для значения установившейся ошибки. Этот порог можно уменьшить, если уменьшать T , но сделать его равным нулю нельзя.

Сделаем некоторые выводы из результатов исследования динамики управления судном на курсе. Модель авторулевого при $T=0$ (идеальное исполнительное устройство) дает следующие условия

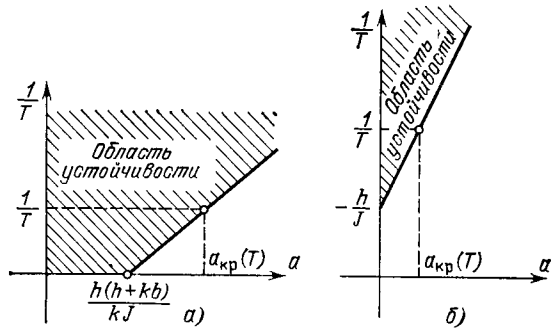


Рис. 4.29

устойчивости: $a > 0$, $b > -h/k$. Модель при $T \neq 0$ (учитывается постоянная времени исполнительного устройства) дает такие условия устойчивости:

$$a > 0, \quad b > -\frac{h}{k}, \quad Th + I > 0, \quad a < \frac{\left(\frac{I}{T} + h\right)(h + kb)}{Ik}.$$

Если в условиях для второй модели устремить T к нулю, то они переходят в условия первой модели. Значит, обе модели согласованы. Выводы, полученные из более простой модели, следуют из выводов более полной. Но полная модель дает нечто новое. Она, во-первых, показывает, что нужно обладать достаточно хорошей реакцией, чтобы быстро исполнять команды, и, во-вторых, что нельзя выбирать a произвольно, надо, чтобы a было меньше некоторого $a_{кр}(T)$.

Учтем теперь неидеальность измерительного устройства, а рулевое устройство будем считать идеальным. Чистая задержка в измерениях означала бы, что $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t - \tau)$, где τ — время задержки. Наличие инерционности в измерителе можно отразить так же, как это было сделано для рулевой машинки, т. е. принять, что

$$\tau \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = \varphi. \quad (3.16)$$

Принимая (3.16), приходим к следующим уравнениям авторулевого:

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \quad \psi = \sigma, \quad \sigma = a\xi + b\dot{\xi}, \quad \tau\ddot{\xi} + \dot{\xi} = \varphi.$$

Первое уравнение — это уравнение объекта управления, оно связывает курс лодки φ с углом поворота руля ψ . Второе уравнение —

это уравнение идеального исполнительного устройства, идеальной рулевой машинки. Третье уравнение отражает принятую стратегию управления. В нем ξ — другое обозначение для измеренного значения φ угла φ . Наконец, последнее уравнение отражает динамику процесса измерения отклонения корабля от курса.

Устойчивость единственного состояния равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = \psi = \sigma = \xi = 0$ зависит от корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} I\lambda^2 + h\lambda & ka + kb\lambda \\ -1 & \tau\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$I\tau\lambda^3 + (I + \tau h)\lambda^2 + (h + kb)\lambda + ak = 0.$$

Это характеристическое уравнение имеет с точностью до замены T на τ такой же вид, как характеристическое уравнение (3.13) в ранее рассмотренной математической модели авторулевого, учитывающей динамику рулевой машинки. Поэтому все выводы, сделанные ранее с учетом замены T на τ , относятся и к рассматриваемой сейчас модели авторулевого, в которой учитывается динамика измерительного процесса. В частности, остаются в силе выводы, что необходимо достаточно быстро измерять и что $a > 0$ не может быть слишком большим, а также то, что упрощенная стратегия с $b = 0$ возможна только при $h > 0$.

Учтем теперь неидеальность как измерителя, так и исполнительного устройства. Это приведет к следующей системе уравнений:

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \quad T\dot{\psi} + \psi = \sigma, \quad \sigma = a\xi + b\dot{\xi}, \quad \tau\ddot{\xi} + \dot{\xi} = \varphi.$$

Составляя обычным образом для этой системы линейных дифференциальных уравнений характеристическое уравнение в виде определителя

$$\begin{vmatrix} I\lambda^2 + h\lambda & k & 0 \\ 0 & T\lambda + 1 & -a - b\lambda \\ -1 & 0 & \tau\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

и раскрывая его, найдем, что им является уравнение уже четвертой степени вида

$$IT\tau\lambda^4 + [I(T + \tau) + hT\tau]\lambda^3 + [I + h(T + \tau)]\lambda^2 + (kb + h)\lambda + ka = 0.$$

Выяснение для него условий устойчивости — это уже довольно сложная задача. Ее постановка еще в прошлом веке связана с зарождающейся тогда теорией автоматического регулирования. Была эта задача в общей постановке для уравнения произвольной степени решена независимо и в различных формах Раусом и Гурвицем. Раус нашел алгоритмическое ее решение, а Гурвиц — в виде конечных детерминантных неравенств. Сейчас эти условия широко известны и именуются условиями устойчивости Рауса — Гурвица. Позднее мы с ними познакомимся. А сейчас постараемся понять, что в первую

очередь нам от этих условий нужно. Точнее, не нам, а конструктору и, возможно, наладчику авторулевого. Обычно лодка (судно или корабль), на которой хотят поставить авторулевую, уже имеется. Поэтому параметры I , h и k имеют какие-то определенные значения, не подлежащие изменению. В несколько меньшей мере заданы и постоянные времени τ и T . На корабле уже есть рулевая машинка, не человек же поворачивает его громадный руль, и имеются сконструированные ранее измерительные системы. Так что основное внимание

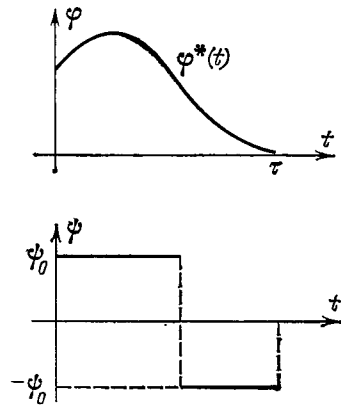


Рис. 4.30

конструктора, естественно, уделяется выбору параметров a и b . Как бы он их ни выбирал, он обязан их выбирать так, чтобы авторулевой был устойчив, т. е. параметры a и b должны выбираться из некоторой области на плоскости a, b , именуемой *областью устойчивости*. Эта область устойчивости не определяет, какие нужно взять значения для параметров a и b стратегии управления, она лишь указывает, среди чего их можно выбирать.

Вернемся к идеальному авторулевому. Пусть в начальный момент времени $t=0$ судно отклонено от заданного курса на угол φ_0 и продолжает уходить от него с начальной скоростью $\dot{\varphi}_0$. Мы хотим привести судно на заданный курс и сделать это как можно быстрее, т. е. за минимально возможное время τ . Попробуем, основываясь на интуиции и на том, что любая стратегия управления судном на курсе реализует этапы приведения и одерживания, понять, какова оптимальная стратегия в этом случае. Ясно, что вначале мы должны повернуть руль так, чтобы с максимальной скоростью приводить судно к курсу. Для этого надо отклонить руль на максимально возможный угол и так держать его (рис. 4.30). Но если долго держать руль в крайнем положении, то скорость приведения станет нарастать и судно проскочит курс. Значит, нужно вовремя переложить руль и одерживать судно. Но чтобы выполнить этот этап как можно быстрее, нужно его выполнять с максимальной интенсивностью, т. е. руль надо переложить в другое крайнее положение. Интуитивно ясно, что именно такая стратегия, когда руль переключается из одного крайнего положения в другое крайнее положение, является оптимальной. На самом деле так оно и есть. Оптимальная стратегия характеризуется тем, что угол поворота руля принимает лишь два крайних значения φ_0 и $-\varphi_0$. Учитывая, что оптимальная стратегия есть функция состояния судна и принимает только два значения ψ_0 и $-\psi_0$, можем записать $\psi = \psi_0 \operatorname{sign} \sigma$, где $\sigma = g(\varphi, \dot{\varphi})$. Для отыскания функции $\sigma = g(\varphi, \dot{\varphi})$ нужно решать специальную оптимизационную задачу.

В настоящем параграфе мы не будем заниматься такой задачей, а возьмем $\sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}$ и посмотрим, как будет управлять судном такой двухпозиционный авторулевой.

Уравнения, описывающие изменение угла φ поворота судна, управляемого двухпозиционным авторулевым, запишутся так:

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi_0 \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}. \quad (3.17)$$

Параметр a в стратегии управления будем считать положительным, $a > 0$. Это условие, как следует из анализа авторулевого с линейной стратегией, обеспечивает правильное направление поворота руля на этапе приведения в ту же сторону, куда отклонено судно. Будем изучать возможные движения судна по изменению состояния $(\varphi, \dot{\varphi})$ в фазовом пространстве. Фазовым пространством здесь будет двумерный цилиндр, развертку которого будем рисовать в виде плоскости. Проведем на этой плоскости прямую $\sigma=0$ (рис. 4.31). Она разделяет плоскость на две части: Φ^+ , где $\sigma > 0$, и Φ^- , где $\sigma < 0$. В каждой из них уравнения движения линейны вида

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} &= -k\psi_0 & \text{в } \Phi^+, \\ I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} &= k\psi_0 & \text{в } \Phi^-, \end{aligned} \quad (3.18)$$

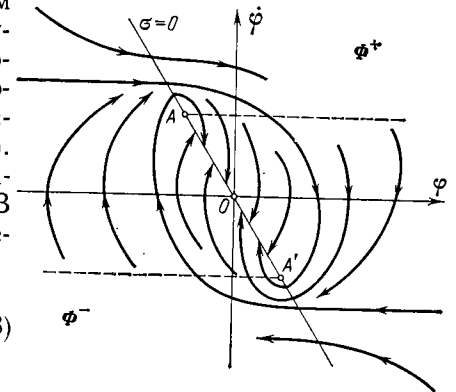


Рис. 4.31

которые легко могут быть проинтегрированы. Заметим еще одну особенность системы уравнений (3.17). При замене φ на $-\varphi$ и $\dot{\varphi}$ на $-\dot{\varphi}$ уравнения (3.17) не изменяются, т. е. фазовые траектории симметричны относительно начала координат, и поэтому их достаточно изучить, скажем, только на полуплоскости Φ^+ .

Посмотрим, как ведут себя фазовые траектории в Φ^+ и, в частности, вблизи прямой $\sigma=0$. Уравнение движения в Φ^+ имеет вид

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi_0. \quad (3.19)$$

Найдем, как меняется вдоль фазовых траекторий величина $\sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}$. Считая φ решением уравнения (3.19), получим, что

$$\dot{\sigma} = -\frac{kb\psi_0}{I} + \left(a - \frac{bh}{I}\right)\dot{\varphi}. \quad (3.20)$$

Пусть $a > bh/I$. При $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^* = kb\psi_0 / (Ia - bh)$ имеет место $\dot{\sigma} = 0$. Если $\dot{\varphi} < \dot{\varphi}^*$, то $\dot{\sigma} < 0$, а если $\dot{\varphi} > \dot{\varphi}^*$, то $\dot{\sigma} > 0$. Так как в Φ^+ значение σ — положительное, то при $\dot{\varphi} > \dot{\varphi}^*$ фазовые траектории уходят от прямой $\sigma=0$ в направлении увеличения σ . При $\dot{\varphi} < \dot{\varphi}^*$ фазовые траектории

идут в направлении уменьшения σ и втыкаются в прямую $\sigma=0$. На полупрямой $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}^*$, $\sigma>0$ значение σ вдоль фазовой траектории достигает своего максимума. Если еще учесть, что полупрямая $\dot{\varphi}=-k\psi_0/h$, $\sigma>0$ является фазовой траекторией в Φ^+ и что выше этой прямой $\dot{\varphi}<0$, т. е. $\dot{\varphi}$ уменьшается, а ниже этой прямой $\dot{\varphi}>0$, т. е. $\dot{\varphi}$ увеличивается, то приходим к качественному виду поведения фазовых траекторий, показанному на рис. 4.31. При этом фазовые траектории на полуплоскости Φ^- изображены по соображениям их симметрии относительно начала координат траекториям на полуплоскости Φ^+ . Здесь, кроме указанных уже предположений $a>0$, $b>0$, $al - bh>0$, считается, что $\dot{\varphi}^*<k\psi_0/h$.

Из рис. 4.31 видно, что на прямой $\sigma=0$ есть отрезок AA' (с координатами концов $A(-b\dot{\varphi}^*/a, \dot{\varphi}^*)$ и $A'(b\dot{\varphi}^*/a, -\dot{\varphi}^*)$), в который фазовые траектории втыкаются с двух сторон, как из полупространства Φ^+ , так и из Φ^- . Вне отрезка AA' фазовые траектории втыкаются в прямую $\sigma=0$ в одной полуплоскости и уходят с нее в другой. Что будет на самой прямой $\sigma=0$, неясно, так как значение правой части уравнения (3.17) в этих точках не определено. Но дело не только в том, что правая часть уравнения (3.17) на прямой $\sigma=0$ не определена и неизвестно, как должна двигаться попавшая на нее фазовая точка. Дело еще и в том, что на этой прямой правая часть дифференциального уравнения (3.17) испытывает разрыв непрерывности и не удовлетворяет хорошо известным условиям существования решения. Разрыв непрерывности правой части влечет разрывность второй производной $\ddot{\varphi}$, но скорость при этом должна меняться непрерывно, так как скачок скорости требует бесконечной величины момента силы. Таким образом, дифференциальное уравнение (3.17) по меньшей мере нельзя назвать полной математической моделью авторулевого. Попробуем доопределить модель, определяя поведение фазовой точки на прямой $\sigma=0$ на основе понятия состояния и фазового портрета. Так как состояние $(\varphi, \dot{\varphi})$ системы со временем изменяется непрерывно, то фазовые траектории должны быть непрерывными линиями, и поэтому естественно доопределить поведение фазовой точки на прямой $\sigma=0$ вне отрезка AA' по непрерывности. В этой части прямой $\sigma=0$ фазовая точка переходит с фазовой траектории одного полупространства на фазовую траекторию другого, и при этом происходит мгновенная перекладка руля из одного крайнего положения в другое. Иногда в таком случае говорят, что фазовые траектории сшиваются по непрерывности.

На отрезке AA' дело обстоит значительно сложнее. Здесь фазовые траектории втыкаются в прямую $\sigma=0$ с обеих сторон. Такое поведение фазовых траекторий возможно, если все точки AA' являются состояниями равновесия. Но здесь этого нет. В точках отрезка AA' , за исключением одной точки $O(\varphi=0, \dot{\varphi}=0)$, значение $\dot{\varphi}$ не равно нулю, т. е. состояние должно меняться. Но как? Ведь фазовая точка

не может уйти ни в полупространство Φ^+ , ни в полупространство Φ^- . Значит, остается одно: она остается на прямой $\sigma=0$. Следовательно, имеет место уравнение $a\dot{\varphi}+b\ddot{\varphi}=0$, решение которого $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0 e^{-(a/b)t}$ означает, что фазовая точка движется по отрезку AA' к точке O с координатами $\varphi=\dot{\varphi}=0$.

Доопределение поведения фазовой точки на прямой $\sigma=0$ завершает построение фазового портрета системы в рассмотренном случае. Как следует из рис. 4.31, любая фазовая траектория после конечного числа пересечений прямой $\sigma=0$ приходит на отрезок AA' и дальнейшее движение фазовой точки происходит по нему к точке O . Это означает, что после некоторого переходного процесса судно приходит к заданному курсу и на нем удерживается.

Итак, мы построили фазовый портрет управления судном двухпозиционным авторулевым, реализующим стратегию, при которой руль в зависимости от командного сигнала σ находится то в одном крайнем положении ψ_0 , то в другом $-\psi_0$. При $\sigma=0$ происходит мгновенная перекладка руля из одного крайнего положения в другое крайнее положение. После конечного числа переключений руля авторулевой переходит в режим, когда σ все время равно нулю. В таком режиме судно монотонно приближается к курсу и на нем удерживается. Этот последний режим движения авторулевого находится в противоречии с тем, что руль может быть только в двух крайних положениях ψ_0 и $-\psi_0$. Ни при $\psi=\psi_0$, ни при $\psi=-\psi_0$ фазовая точка не движется по линии $\sigma=0$. Фазовая точка $M(\varphi, \dot{\varphi})$, лежащая на отрезке скользящих движений AA' , движется при $\psi=\psi_0$ с фазовой скоростью v_+ , а при $\psi=-\psi_0$ — со скоростью v_- (рис. 4.32). Ни скорость v_+ , ни v_- не направлены вдоль линии $\sigma=0$. Что же происходит на самом деле? Чтобы это понять, следует учесть конечность времени переключения руля из одного крайнего положения в другое. Пусть точка $M(\varphi, \dot{\varphi})$ приходит на отрезок скользящих движений AA' со скоростью v_+ . Руль начинает переключаться, в соответствии с чем скорость v_+ , меняясь, становится равной v_- . При этом фазовая точка успевает пересечь линию $\sigma=0$ и после окончания переключения руля снова движется к линии $\sigma=0$, пересекает ее и так далее. Таким образом, фазовая точка, колеблясь возле линии $\sigma=0$, движется к точке O . Эти колебания тем более быстрые, чем быстрее происходят переключения руля. В пределе они совершаются бесконечно быстро и фазовая точка движется по отрезку скользящих движений. Ясно, что такой характер управления, связанный с мгновенной перекладкой руля, может осуществляться только идеальным авторулевым и реально реализован быть не может. Поэтому важно выяснить, насколько математиче-

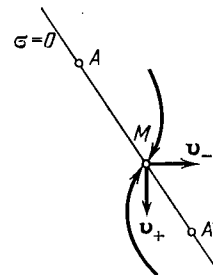


Рис. 4.32

ская модель адекватна тому, что происходит на самом деле. Для этого надо обратиться к реальному авторулевому и детальнее разобраться, как он реализует двухпозиционное управление.

Рассмотрим одну из возможных систем, реализующих поворот руля из одного крайнего положения в другое. Схематически такая система изображена на рис. 4.33. Руль поворачивается электромотором с помощью червячного редуктора. Мотор — реверсивный,

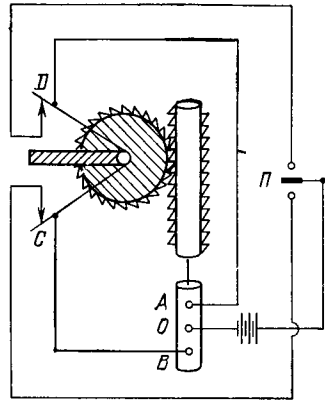


Рис. 4.33

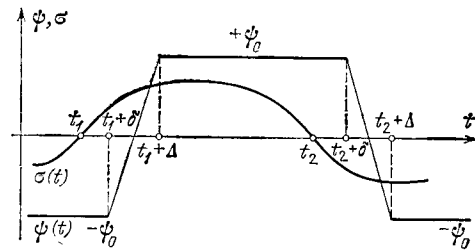


Рис. 4.34

питается от источника постоянного тока. Он может вращаться в обе стороны в зависимости от знака прикладываемого напряжения. Один полюс источника присоединен к общему контакту О. Другой полюс через реле переключателя П и контакты С и D ограничителя поворота руля может подключаться либо к контакту А, либо к В. В зависимости от того, к каким контактам подводится напряжение, мотор поворачивает руль либо вправо, либо влево. Реле переключателя управляется командным сигналом σ. При σ=0 якорь реле занимает нейтральное положение. Мотор выключен. Как только появляется командный сигнал, скажем, σ>0, переключатель П подключает мотор к контактам ОВ, и мотор начинает вращаться, поворачивая руль в крайнее, например, правое положение ψ₀. Как только руль упрется в упор, фиксирующий положение ψ₀, размыкается контакт С, двигатель перестает вращаться и поворачивать руль. Аналогично происходит поворот руля в крайнее левое положение при σ<0.

Посмотрим, как реально происходит изменение положения руля с течением времени, если σ меняет знак. Кривые изменения σ(t) и ψ(t) изобразим на рис. 4.34. Пусть при t<t₁ командный сигнал σ — отрицательный и руль занимает крайнее левое положение ψ=−ψ₀. В момент времени t₁ командный сигнал обращается в нуль, σ(t₁)=0, и затем становится положительным. Переключатель П включает мотор на поворот руля вправо, однако происходит это не в момент времени t₁, а чуть позже, в момент времени t₁+δ. Это происходит из-за того, что в переключателе есть зазор и нужно время, чтобы его выбрать. Значит, до момента времени t₁+δ руль будет находиться

в положении −ψ₀. Затем с момента t₁+δ мотор начнет быстро, но не мгновенно поворачивать руль до положения ψ₀, так что на некотором интервале времени от t₁+δ до t₁+Δ функция ψ(t) меняется непрерывно от значения −ψ₀ до значения ψ₀. Далее, при t≥t₁+Δ до момента времени t₂, когда σ(t) вновь меняет знак, ψ(t)=ψ₀. После смены знака σ(t) произойдет аналогичный процесс перекадки руля.

Теперь сравним закон ψ(t)=ψ₀ sign σ(t) изменения угла поворота руля, который принят в математической модели авторулевого, с тем, как он меняется на самом деле. Математическая модель правильно отражает реальную ситуацию, за исключением малых промежутков времени длительности Δ, когда руль переводится из одного крайнего положения в другое. Идеализация состоит в том, что мы пренебрегаем реальным поведением авторулевого на этих интервалах времени длительности Δ, считая, что руль мгновенно перекадывается из одного крайнего положения в другое. Но чтобы идеализированная модель отражала поведение реального авторулевого при σ=0 и, в частности, учитывала, что при перекадке руль может занимать любое положение между −ψ₀ и ψ₀, мы во всяком случае должны доопределить модель так, чтобы при σ=0 угол ψ мог принимать любое значение между −ψ₀ и ψ₀. Тогда идеализированную модель двухпозиционного авторулевого можно записать так:

$$\psi = \begin{cases} \psi_0 \operatorname{sign} \sigma & \text{при } \sigma \neq 0, \\ -\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0 & \text{при } \sigma = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Можно ли двухпозиционное управление описать более точно? Можно, например, принять, что мотор поворачивает руль с постоянной скоростью ω. Тогда скорость изменения угла поворота руля определяется следующим образом:

$$\dot{\psi} = \begin{cases} \omega, & \text{если } \sigma > \delta, \psi < \psi_0, \\ -\omega, & \text{если } \sigma < -\delta, \psi > -\psi_0, \\ 0, & \text{если } -\delta < \sigma < \delta, \psi = \psi_0, \sigma > 0; \psi = -\psi_0, \sigma < 0. \end{cases}$$

Это уже более точное описание. Но и оно не полное. Ведь, если мотор включается, то его скорость не сразу становится равной ω или −ω. Значит, надо учесть время разгона двигателя и написать уравнение

$$T\dot{\psi} + \psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \sigma > \delta, \psi < \psi_0, \\ -\omega, & \text{если } \sigma < -\delta, \psi > -\psi_0, \\ 0, & \text{если } -\delta < \sigma < \delta, \psi = \psi_0, \sigma > 0; \psi = -\psi_0, \sigma < 0. \end{cases}$$

Но и это еще не все. Можно учесть еще действие пружины ограничителя и то, что мотор останавливается не сразу, и т. д. и т. п. До каких же пор уточнять? Ведь каждое уточнение усложняет модель и требует более сложного исследования. Поэтому нужно выбрать та-

кую модель, чтобы она, во-первых, была адекватна тому, что есть на самом деле, и, во-вторых, не была очень сложной, чтобы в ней можно было разобраться. Поэтому попробуем ограничиться уточнением, даваемым формулой (3.21). Достаточно ли этого для полного описания всех возможных движений авторулевого? В какой мере эти движения соответствуют реальным движениям авторулевого, точнее, его движениям при условии, что перекладки руля происходят очень быстро? В идеализации — бесконечно быстро.

Постараемся ответить на эти не очень простые вопросы. Они не очень просты уже потому, что ответы на них были получены далеко не сразу.

Итак, пусть фазовая точка $M(\varphi, \dot{\varphi})$ приходит на линию переключения $\sigma=0$ ради определенности с полуплоскости Φ^- . Пока она движется на полуплоскости Φ^- , имеем $\psi = -\psi_0$, как только она попадает на линию $\sigma=0$, угол ψ нам неизвестен, но $-\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0$. В соответствии с этим скорость движения фазовой точки M , пришедшей на линию $\sigma=0$, заключена между скоростями ее при $\psi = -\psi_0$ и $\psi = \psi_0$ и, следовательно, пересекает линию $\sigma=0$, переходя с полуплоскости Φ^- на полуплоскость Φ^+ . Это дает полное обоснование сшивания решений на $\dot{\sigma}=0$ вне отрезка AA' .

Рассмотрим теперь, что происходит, если фазовая точка $M(\varphi, \dot{\varphi})$ приходит на отрезок AA' . Согласно принятой идеализации на отрезке AA' движение авторулевого описывается уравнением

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \quad (3.22)$$

где $-\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0$, пока $\sigma=0$.

Нетрудно видеть, что эти условия однозначно определяют возможные значения угла ψ . Действительно, из уравнения (3.22) находим, что

$$\dot{\sigma} = a\dot{\varphi} + b\ddot{\varphi} = a\dot{\varphi} + b\left(-\frac{k}{I}\psi - \frac{h}{I}\dot{\varphi}\right) = \left(a - \frac{bh}{I}\right)\dot{\varphi} - \frac{bk}{I}\psi. \quad (3.23)$$

Мыслимы три возможности: $\dot{\sigma} > 0$, $\dot{\sigma} < 0$ и $\dot{\sigma} = 0$. Две первые отпадают. Поскольку, например, из $\dot{\sigma} > 0$ следует $\sigma > 0$ и, следовательно, $\psi = \psi_0$. Но при $\psi = \psi_0$, согласно (3.23), $\dot{\sigma} < 0$. Так что остается только возможность $\dot{\sigma} = 0$. Из нее, согласно (3.23), находим, что

$$\psi = \frac{a}{kb} \left(I - \frac{bh}{a} \right) \dot{\varphi}.$$

Таким образом, ψ найдена и движение фазовой точки подчиняется уравнению (3.22) с этим значением ψ . Из него следует, что

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -\frac{a}{b} \left(I - b\frac{h}{a} \right) \dot{\varphi},$$

или

$$a\dot{\varphi} + b\ddot{\varphi} = 0,$$

что означает движение фазовой точки $M(\varphi, \dot{\varphi})$ по отрезку AA' скользящих движений к точке O по закону

$$\varphi = \varphi_0 e^{-(a/b)t}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{a}{b} \varphi_0 e^{-(a/b)t}.$$

Итак, уточненная математическая модель полностью определяет изменение фазового состояния авторулевого как при $\sigma \neq 0$, так и $\sigma = 0$. Однако соответствует ли она реальным движениям авторулевого? На этот вопрос нельзя дать однозначный ответ, поскольку он зависит от того, как же на самом деле работает рулевая машинка, как она выполняет команды управления σ . Примем, что полная перекладка руля при смене знака σ происходит достаточно быстро, но все-таки за некоторое конечное время. Тогда фазовая точка, пришедшая на отрезок скользящих движений AA' , его пересечет, немного удалится от него, затем станет снова к нему приближаться, пересечет его, немного удалится, потом будет приближаться и так далее (рис. 4.35). При этом до тех пор, пока пересекается отрезок AA' , фазовая точка не может от него уйти далеко, так что выполняется условие

$$\sigma = a\varphi + b\dot{\varphi} = \varepsilon(t), \quad (3.24)$$

где $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ вместе со стремлением к нулю времени перекладки руля.

Из (3.24) находим, что

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-(a/b)t} + \frac{1}{b} \int_0^t e^{-(a/b)(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau$$

и, следовательно,

$$|\varphi(t) - \varphi_0 e^{-(a/b)t}| < \frac{\varepsilon}{b} \int_0^t e^{-(a/b)(t-\tau)} d\tau < \frac{\varepsilon}{a}.$$

Таким образом, предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ изменение фазовых переменных φ и $\dot{\varphi}$ уточненная модель также описывает верно. Осталось установить, верно ли она описывает изменение угла поворота руля. Как и прежде, из соотношения (3.24) и уравнения движения (3.22) находим, что

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{1}{k} (-I\ddot{\varphi} - h\dot{\varphi}) = \frac{1}{k} \left(-I \frac{\dot{\varepsilon}(t) - a\dot{\varphi}}{b} - h\dot{\varphi} \right) = \\ &= \frac{a}{kb} \left(I - \frac{hb}{a} \right) \dot{\varphi} - \frac{I}{kb} \dot{\varepsilon}(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

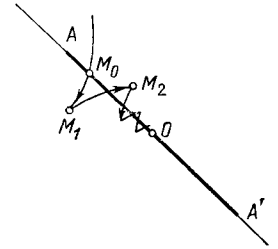


Рис. 4.35

Это соотношение не позволяет найти ψ , поскольку из малости ε вовсе не следует малость $\dot{\varepsilon}(t)$. Однако все же некоторые сведения о ψ из него извлечь можно: $\psi(t)$ может представлять собой быстро осциллирующую функцию, размах колебаний которой лежит между $-\psi_0$ и ψ_0 . Но усредненное значение ψ будет медленно меняющейся функцией. Именно, из (3.25) находим, что

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \psi(\tau) d\tau = \frac{a}{kb} \left(I - \frac{hb}{a} \right) \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \dot{\psi}(\tau) d\tau - \frac{I}{kb} \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{a}{kb} \left(I - \frac{hb}{a} \right) \bar{\dot{\psi}} - \frac{I}{kb} \frac{1}{2T} (\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T))\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left| \bar{\psi} - \frac{a}{kb} \left(I - \frac{hb}{a} \right) \bar{\dot{\psi}} \right| < \frac{I}{kb} \frac{\varepsilon}{T}.$$

Или, выбирая время усреднения $T = \sqrt{\varepsilon}$, получим

$$\left| \bar{\psi} - \frac{a}{kb} \left(I - \frac{hb}{a} \right) \bar{\dot{\psi}} \right| < \frac{I}{kb} \sqrt{\varepsilon}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $\bar{\dot{\psi}} \rightarrow \dot{\psi}$, и поэтому

$$\bar{\psi} = \frac{a}{kb} \left(I - \frac{hb}{a} \right) \dot{\psi}. \quad (3.26)$$

Таким образом, уточненная модель не дает, вообще говоря, правильного представления о том, как меняется угол поворота руля ψ , поскольку (3.26) дает не сам угол поворота $\psi(t)$, а его скользящее среднее значение $\bar{\psi}$.

Теперь перейдем к детальному изучению фазового портрета судна, управляемого идеальным двухпозиционным авторулевым. Но прежде чем построить фазовый портрет, разберемся с зависимостью его от параметров системы. Как следует из (3.17), динамика судна с авторулевым зависит от шести параметров: I, h, k, ψ_0, a, b . Каждый из них имеет вполне определенный реальный смысл. Такие параметры называют физическими. Когда их много, задача построения и исследования фазового портрета становится очень сложной. Поэтому нужно стремиться по возможности уменьшать число параметров. Параметры, от которых зависит фазовый портрет, называют существенными. Найдем их для этого конкретного примера. Изменим масштаб времени и масштаб измерения угла, т. е. введем новые переменные: $\tau = \lambda t$ и $\varphi = \mu \psi$. Тогда уравнения (3.17) переписутся так:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \frac{h}{I\lambda} \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= -\frac{k\psi_0}{I\lambda^2\mu} f(\sigma), \\ \sigma &= a\mu\varphi_n + b\lambda\mu \frac{d\varphi_n}{d\tau},\end{aligned}$$

где

$$f(\sigma) = \begin{cases} \text{sign } \sigma & \text{при } \sigma \neq 0, \\ -1 \leq f(0) \leq 1 & \text{при } \sigma = 0. \end{cases}$$

Выберем масштабные множители так, чтобы максимально уменьшить число параметров: $\lambda = I/|h|$, $\mu = I\lambda^2/(k\psi_0)$. Так как функция $f(\sigma)$ зависит, по существу, от знака σ и не меняется при умножении σ на любое положительное число, можно умножить σ на $1/(a\mu)$ и тем

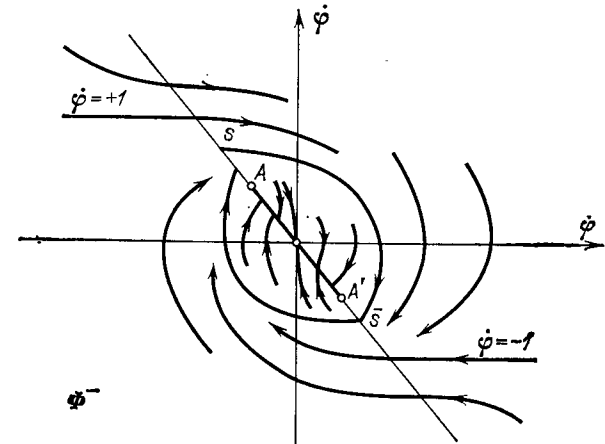


Рис. 4.36

самым довести число параметров до одного: $\kappa = (b/a)/(I/|h|)$. Если производные по новому времени τ обозначать снова точками и опустить индекс у нового значения угла, то уравнения, описывающие динамику судна с идеальным релейным авторулевым, запишутся в виде

$$\ddot{\varphi} \pm \varphi = -f(\sigma), \quad \sigma = \varphi + \kappa \dot{\varphi}. \quad (3.27)$$

Знак плюс в уравнении (3.27) нужно брать, когда $h > 0$, и знак минус, когда $h < 0$.

Итак, в нашем примере фазовый портрет зависит лишь от одного существенного параметра κ .

Перейдем к построению фазового портрета. Будем считать судно послушным с $h > 0$ и поэтому в уравнении (3.27) возьмем знак плюс. Сначала рассмотрим $\kappa > 0$. Качественно вид фазовых траекторий в этом случае мы уже изучили (они приведены на рис. 4.31). Прямая $\sigma = \varphi + \kappa \dot{\varphi}$ — назовем ее *прямой переключения* — делит фазовое пространство на две части: Φ^+ , где $\sigma > 0$, и Φ^- , где $\sigma < 0$ (рис. 4.36). В каждой из них движение фазовой точки описывается, согласно (3.18), линейным дифференциальным уравнением. Фазовые траектории в Φ^- симметричны относительно начала координат траекториям в Φ^+ . На прямой переключения существует отрезок AA' скользящих движений, на который фазовая точка приходит как из Φ^+ , так и из

Φ^- . В дальнейшем она движется по отрезку AA' в направлении к состоянию равновесия $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$, асимптотически к нему приближаясь. Этим движениям отвечает скользящий режим авторулевого. Координаты точек A и A' следующие:

$$A\left(-\frac{\kappa^2}{1-\kappa}, \frac{\kappa}{1-\kappa}\right) \text{ и } A'\left(\frac{\kappa^2}{1-\kappa}, -\frac{\kappa}{1-\kappa}\right).$$

На рис. 4.36 изображен случай, когда $0 < \kappa < 1$. Вне отрезка AA' фазовые траектории пересекают прямую переключения, сшиваясь по непрерывности. Фазовая точка, двигаясь по такой траектории, переходит из одного полупространства, скажем, Φ^- в Φ^+ . В полупространстве Φ^+ есть траектория, уравнение которой $\dot{\varphi} = -1$. В Φ^- есть симметричная ей траектория $\dot{\varphi} = 1$. Анализ изменения величины $\sigma = \varphi + \kappa\dot{\varphi}$ вдоль фазовых траекторий, скажем, в Φ^+ , где $\sigma > 0$, показал, что при $\dot{\varphi} > \kappa/(1-\kappa)$ величина σ возрастает и достигает своего максимального значения при $\dot{\varphi} = \kappa/(1-\kappa)$. После этого, т. е. при $\dot{\varphi} < \kappa/(1-\kappa)$, значение σ убывает вплоть до нуля на прямой переключения. Качественный вид фазовых траекторий показан на рис. 4.36.

Чтобы детально изучить фазовый портрет, воспользуемся методом точечных преобразований. В чем он состоит? По существу, он состоит с изучении смены состояния непрерывной во времени динамической системы по изменению состояния $(\varphi, \dot{\varphi})$ в определенные дискретные моменты времени. Как этот метод реализуется в нашем конкретном примере? Из качественного хода фазовых траекторий следует, что все они попадают на прямую переключения и затем вновь и вновь ее пересекают до тех пор, пока, может быть, не попадут на отрезок скользящих движений. Будем интересоваться последовательностью точек пересечения фазовой траектории с прямой переключения. Каждая точка пересечения характеризуется одной переменной, скажем, φ . Чтобы отличить от других, обозначим ее буквой s . Фазовая траектория, выходящая из точки s , например, в Φ^+ пересекает линию переключения в точке, которая также характеризуется значением φ , обозначим ее \bar{s} . Так вот, метод точечных преобразований состоит в следующем: вместо того чтобы изучать, как движутся фазовые точки по траекториям и как фазовые траектории пересекаются с линией переключения, мы будем изучать, как эти точки пересечения переходят друг в друга. Точка s при этом называется предыдущей, а \bar{s} — последующей. Зависимость \bar{s} от s , т. е. $\bar{s} = f(s)$, называется *функцией последования* и является оператором точечного отображения, порождаемого на линии переключения фазовыми траекториями системы. Оказывается, зная эту зависимость, мы, по существу, знаем, как происходит движение нашего судна, т. е., зная значение угла и скорости в моменты перекладки руля, мы знаем, как судно движется.

Итак, вместо того чтобы смотреть весь фазовый портрет, мы будем смотреть только состояние нашей системы в момент перекладки руля. Именно в этом состоит идея секущей поверхности, которую впервые в прошлом веке применил Анри Пуанкаре (1854—1912).

Теперь найдем эту функциональную связь $\bar{s} = f(s)$ в нашем случае. Интегрируя уравнение (3.27) при $\sigma > 0$ и начальных условиях $\varphi = -\kappa s$, $\dot{\varphi} = s$, получим

$$\bar{s} = e^{-\tau} \cdot s - (1 - e^{-\tau}),$$

где τ — время движения фазовой точки по траектории из точки s в точку \bar{s} , которое определяется из уравнения

$$(1 - \kappa)(1 - e^{-\tau})(s + 1) - \tau = 0.$$

Исключить τ из уравнения для времени не удастся, и поэтому мы представим зависимость $\bar{s} = f(s)$ в параметрическом виде:

$$s = -1 + \frac{\tau}{(1 - \kappa)(1 - e^{-\tau})}, \quad \bar{s} = -1 + \frac{\tau}{(1 - \kappa)(e^{\tau} - 1)}, \quad (3.28)$$

причем τ меняется от 0 до ∞ .

Итак, (3.28) задают точечное отображение линии переключения в себя, порождаемое фазовыми траекториями полупространства Φ^+ . Фазовые траектории полупространства Φ^- ($\sigma < 0$) также порождают точечное отображение линии переключения в себя. Причем, в силу центральной симметрии фазовых траекторий, оно такое же, как (3.28), но только с заменой s и \bar{s} на $-s$ и $-\bar{s}$. Если выбрать направления отсчета s и \bar{s} противоположными, скажем, s — вверх по линии переключения, а \bar{s} — вниз, то оба отображения запишутся одинаково в виде

$$s = -1 + \frac{\tau}{(1 - \kappa)(1 - e^{-\tau})}, \quad \bar{s} = 1 - \frac{\tau}{(1 - \kappa)(e^{\tau} - 1)}. \quad (3.29)$$

Теперь будем изучать отображение (3.29) при различных значениях параметра κ . Начнем со случая $0 < \kappa < 1$. Графики функций (3.29) показаны на рис. 4.37. При $\tau = 0$ $s(0) = \kappa/(1 - \kappa)$ и $\bar{s}(0) = -\kappa/(1 - \kappa)$. При $\tau \rightarrow +\infty$ $s(\tau) \rightarrow +\infty$, а $\bar{s}(\tau) \rightarrow 1$. Функции $s(\tau)$ и $\bar{s}(\tau)$ при возрастании τ монотонно возрастают и не пересекаются, так как $\bar{s}(\tau) - s(\tau) < 0$ для всех $\tau \geq 0$. Значения $s, \bar{s} \in [-\kappa/(1 - \kappa), \kappa/(1 - \kappa)]$ отвечают отрезку скользящих движений авторулевого. Возьмем любое исходное значение $s = s_0$. По нему найдем время τ_1 и отвечающее этому времени значение $\bar{s} = s_1$. Следующее \bar{s} получим, выбирая исходное $s = s_1$ и т. д. Получаем последовательность s_0, s_1, \dots точек пересечения фазовой траектории с линией переключения и последовательность τ_1, τ_2, \dots времен, по истечении которых фазовая точка вновь попадает на линию переключения. Последовательность s_0, s_1, s_2, \dots отвечает состояниям авторулевого в моменты перекладки руля, а последовательность $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ — промежуткам времени от предыдущей перекладки руля до следующей. Как следует

из графика функции последования, в случае $0 < \kappa < 1$ (рис. 4.37), каким бы ни было исходное положение точки, после конечного числа переходов или, как говорят, итераций точечного отображения она приходит на отрезок скользящих движений. А следовательно, любая фазовая траектория после конечного числа пересечений линии переключения втыкается в отрезок скользящего движения (рис. 4.36). Дальнейшее движение фазовой точки происходит по отрезку скользящих движений

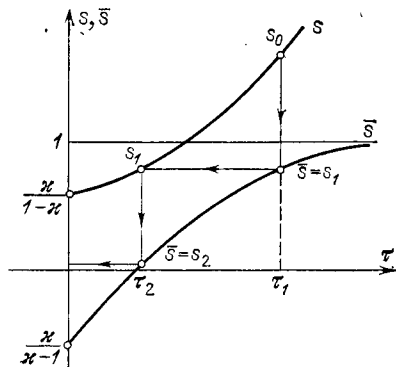


Рис. 4.37

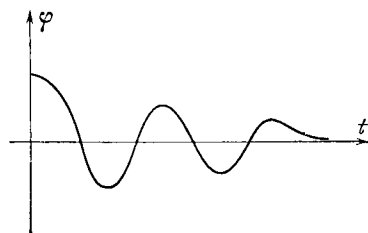


Рис. 4.38

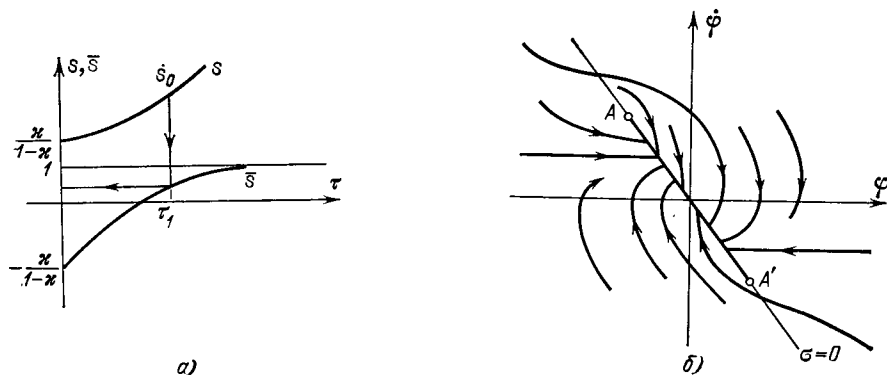


Рис. 4.39

к состоянию равновесия. Таким образом, действительно, точечное отображение $\bar{s} = f(s)$, порожаемое фазовыми траекториями на прямой переключения $\sigma = 0$, определяет фазовый портрет системы. В случае $0 < \kappa < 1$, как следует из рис. 4.36, авторулевой после конечного числа переключений руля переходит в скользящий режим, при котором судно аperiodически приближается к курсу. График изменения угла отклонения от курса судна, управляемого таким авторулевым, пока-

зан на рис. 4.38. Сначала характер приведения судна к курсу колебательный. Затем после конечного числа колебаний, когда авторулевой переходит в скользящий режим, судно монотонно приближается к курсу. Причем чем меньше κ и, следовательно, меньше отрезок AA' скользящего движения, тем большее число колебаний совершает судно,

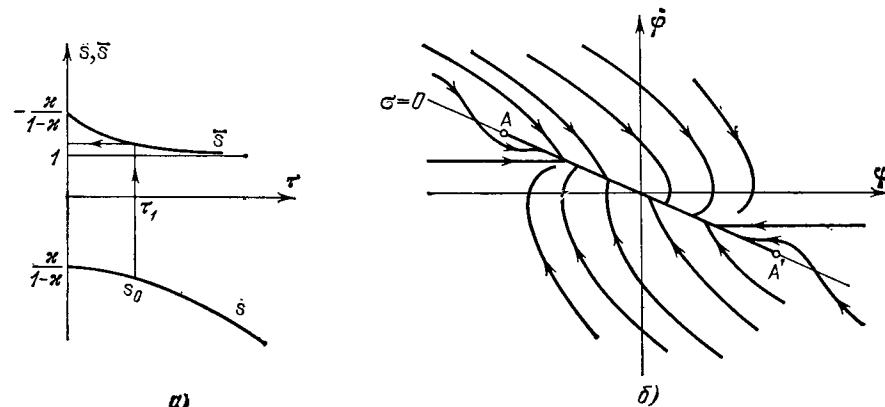


Рис. 4.40

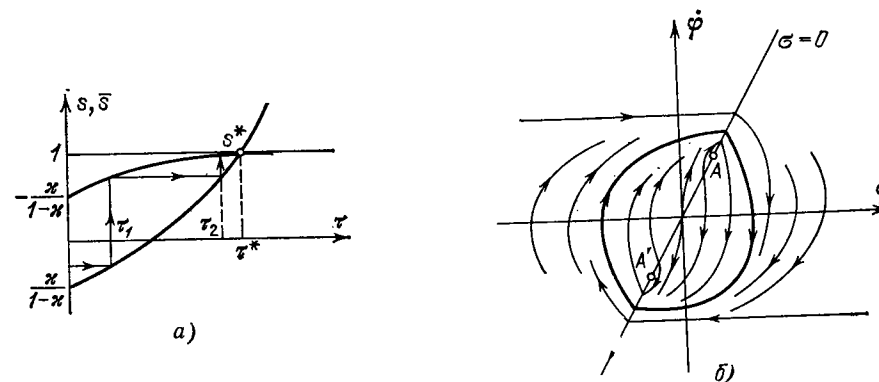


Рис. 4.41

но при этом увеличивается скорость приведения судна к курсу в скользящем режиме. Если κ увеличивается, то число колебаний уменьшается. Авторулевой быстрее входит в скользящий режим. Но скорость приведения в скользящем режиме уменьшается и переходный процесс удлиняется. На рис. 4.36, 4.37 изображены фазовый портрет и функция последования в случае $0 < \kappa < 1/2$. Если $1/2 \leq \kappa < 1$ и $\kappa > 1$, функция последования и фазовые портреты показаны на рис. 4.39 и 4.40. В этих случаях авторулевой входит в скользящий режим не более чем при второй перекладке руля, но приводится судно к курсу медленно.

Теперь посмотрим случай $\kappa \leq 0$. В этом случае авторулевой правильно реализует этап приведения, т. е. переключает руль в сторону отклонения лодки, но либо не реагирует на скорость приведения ($\kappa=0$), либо реагирует, но неправильно, т. е. переключает руль после прохождения судном курса. Как ведет себя судно, управляемое таким авторулевым?

Рассмотрим сначала случай $\kappa < 0$. Качественный анализ фазовых траекторий показывает, что они, как и в случае $\kappa > 0$, вновь и вновь

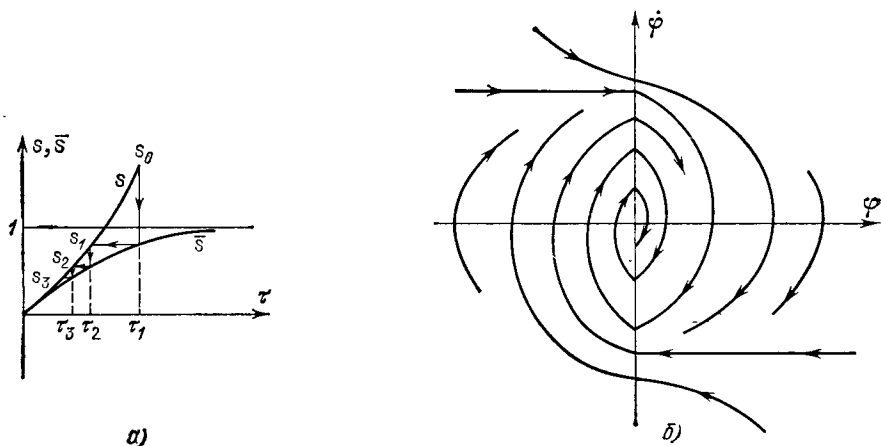


Рис. 4.42

пересекают линию переключения $\sigma=0$, но уже нет отрезка скользящего режима. Фазовые траектории уходят с отрезка AA' как в Φ^+ , так и в Φ^- (рис. 4.41, б). Посмотрим, как выглядит точечное отображение в этом случае (рис. 4.41, а). Теперь график $s(\tau)$ начинается в точке $\kappa/(1-\kappa) < 0$, а график $\bar{s}(\tau)$ — в точке $-\kappa/(1-\kappa) > 0$. Графики функций $s(\tau)$ и $\bar{s}(\tau)$ всегда пересекаются в некоторой точке, назовем ее s^* , τ^* , которая определяется из уравнения $s(\tau) = \bar{s}(\tau)$. Это неподвижная точка отображения. Любая последовательность s_0, s_1, s_2, \dots итераций точечного отображения и соответствующая ей последовательность времен $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ сходятся соответственно к s^* и τ^* . Фазовый портрет системы в этом случае определяется глобально устойчивым предельным циклом (рис. 4.41, б), отвечающим неподвижной точке s^* . Предельному циклу отвечают автоколебания судна с авторулевым. Судно вместо того, чтобы идти по курсу, совершает периодические колебания возле него с периодом, который определяется из уравнения

$$\frac{\tau^*}{2} \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2} = 1 - \kappa.$$

С уменьшением κ уменьшается амплитуда колебаний, уменьшается значение s^* и уменьшается период автоколебаний. В предельном слу-

чае $\kappa=0$, когда авторулевой переключает руль только в зависимости от угла φ поворота судна и не следит за скоростью $\dot{\varphi}$ его изменения, вид точечного отображения и фазовый портрет изображены на рис. 4.42. В этом случае время между последующими переключениями руля

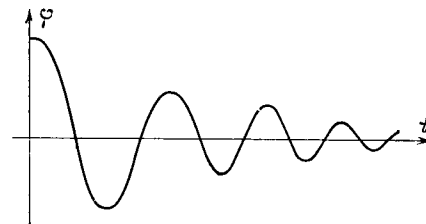


Рис. 4.43

уменьшается, уменьшается и амплитуда рыскания. Авторулевой приводит судно к курсу, все чаще и чаще переключая руль. На рис. 4.43 показано, как меняется угол φ отклонения курса судна, управляемого таким авторулевым.

§ 4. Исследования Максвелла и Вышнеградского систем прямого регулирования

Сейчас рассмотрим некоторые проблемы управления на примере классической задачи, с которой фактически началась теория автоматического регулирования. Это задача о стабилизации скорости вращения вала паровой машины.

Различные регуляторы были известны давно. На древнем Востоке, в Египте, Греции и древнем Риме использовались различные регулирующие устройства. Но первые теоретические исследования, давшие начало теории автоматического регулирования, относятся к середине XIX века и связаны с остро стоявшей проблемой регулирования угловой скорости вращения паровой машины. Изобретенные в конце XVIII века паровые машины широко внедрились в различные области жизни. Для того чтобы паровая машина вращалась плавно, со скоростью, мало зависящей от нагрузки, на вал насаживался маховик, увеличивающий инерционность, и применялся регулятор. Таким регулятором в то время был центробежный регулятор, изобретенный Д. Уаттом (1736—1819). Сначала регуляторы Уатта работали хорошо. Но техника развивалась, появлялись более мощные и скоростные машины. Повысились требования к точности регулирования. Более тщательно стали изготавливаться регуляторы. И вот тогда все чаще и чаще стали проявляться случаи, когда регуляторы не справлялись со своей задачей. Вместо того чтобы обеспечивать постоянство скорости, они вызывали колебания ее, которые зачастую приводили к авариям. Почему хорошо работавшие регуляторы вдруг стали плохими? В чем