ЛЕКЦИЯ 12

Сферические и цилиндрические волны. Неоднородное волновое уравнение.

Метод спуска.

Решение в пространстве R^3 задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),\ x \in \mathrm{R}^3. \tag{2}$$

имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}} \frac{\varphi}{at} d\gamma_{at} + \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}} \frac{\psi}{at} d\gamma_{at}. \tag{3}$$

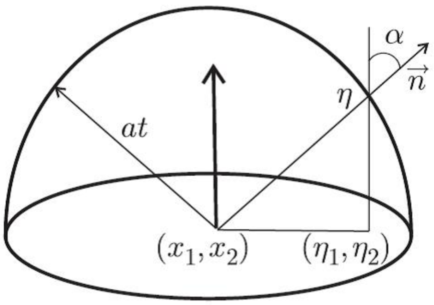
Начальные условия в задаче задаются, вообще говоря, произвольными функциями переменных (x_1, x_2, x_3). Если начальные функции не зависят от одной из переменных, например, x_3, то, очевидно, и функция u, определенная формулой (3), также не будет зависеть от переменной x_3. Следовательно, эта функция будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

и начальным условиям

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2).$$

Таким образом, формула, дающая решение пространственной задачи, позволяет также решить задачу для плоскости.



Пусть $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ – точка сферы S_{at}. В силу независимости начальных данных от x_3 интегрирование по верхней полусфере можно заменить интегрированием по кругу Σ_{at}, получающемуся при пересечении сферы S_{at} с плоскостью $(\eta_1\eta_2)$. Элемент поверхности $d\gamma$ связан с элементом плоскости $d\eta_1 d\eta_2$ соотношением

$$d\eta_1 d\eta_2 = d\gamma \cos\alpha,$$

где α – угол между внешней нормалью к сфере в точке η осью η_3.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x_1 - \eta_1)^2 - (x_2 - \eta_2)^2}}{at}.$$

То же относится к интегрированию по нижней полусфере. Следовательно, интеграл по кругу следует взять дважды. В результате приходим к формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{at}} \frac{\varphi(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(at)^2-(x_1-\eta_1)^2-(x_2-\eta_2)^2}} + \right.$$

$$\left. + \iint_{\Sigma_{at}} \frac{\psi(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(at)^2-(x_1-\eta_1)^2-(x_2-\eta_2)^2}}\right], \qquad (4)$$

в которой интегрирование производится по внутренности круга радиуса at с центром в точке (x_1, x_2).

Аналогично, если начальные функции φ и ψ зависят только от одной переменной x_1, то формула (3) позволяет найти функцию $u(x_1, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

с начальными данными

$$u(x_1, 0) = \varphi(x_1),\ \frac{\partial u}{\partial t}u(x_1, 0) = \psi(x_1).$$

Для этого введём сферическую систему координат, направив полярную ось по оси x_1. Тогда

$$\eta_1 = x_1 + r\cos\theta,\ d\xi = -r\sin\theta d\theta.$$

Элемент поверхности $d\gamma$ выразится следующим образом:

$$d\gamma = r^2\sin\theta d\theta d\phi = -r d\phi d\eta_1.$$

Интегрируя в формуле Пуассона (3) по ϕ, получим, опуская индекс у переменных x, η

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\eta)d\eta_1 + \int_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)d\eta\right].$$

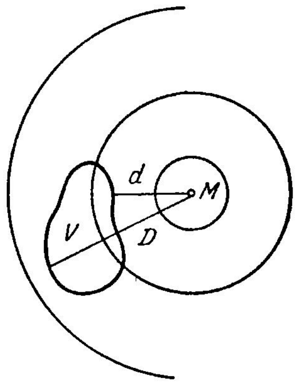
Выполняя в первом интеграле дифференцирование по t, приходим к формуле Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)d\eta.$$

Уравнение колебаний с тремя, двумя и, соответсвенно, одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн. Эта терминология вполне соответсвует примененному выше методу, называемому методом спуска, поскольку при решении уравнения колебаний на плоскости и на прямой мы исходили из пространственной задачи, как бы "спускаясь"к меньшему числу переменных. Полученные решения для двух и одного переменного носят характер цилиндрических и плоских волн.

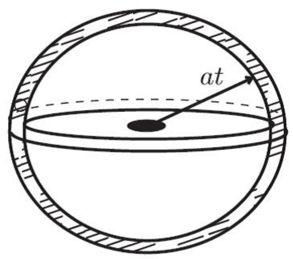
Метод спуска применим не только к уравнению колебаний, но и к другим типам уравнений и позволяет в ряде случаев из формулы, определяющей решение уравнения для многих переменных, извлечь решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

Формулы (3) и (4) дают возможность выяснить физическую картину распространения сферических и цилиндрических волн.



Начнём со случая трёх переменных, для которого физический характер процесса распространения существенно отличается от случая двух пространственных переменных. Ограничимся изучения распространения локального возмущения, когда начальное состояние (функции $\varphi > 0$ и $\psi > 0$) отлично от нуля только в некоторой ограниченной области V. Рассмотрим сначала изменение состояния u в точке M, лежащей вне области V.

Состояние u в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t определяется, в силу формулы (3), начальным состоянием в точках, лежащих на сфере S_{at} радиуса at с центром в M. Функция $u(M, t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера S_{at} пересекает область начальных значений V. Пусть d и D – расстояния от точки M до ближайшей и наиболее удаленной точек области V. Если t достаточно мало ($t < t_1 = d/a$), то сфера не пересекается с областью V, поверхностные интегралы в формуле (3) равны нулю: до точки M возмущение ещё не дошло. Начиная с момента $t_1 = d/a$ до момента $t_2 = D/a$ сфера S_{at} будет пересекать область V, поверхностные интегралы в формуле (3), вообще говоря, отличны от нуля: точка M находится в возмущенном состоянии. При дальнейшем увеличении t сфера S_{at} будет содержать область V внутри себя, поверхностные интегралы равны нулю: возмущение прошло точку M. Таким образом, при распространении локального возмущения в трехмерном пространстве явление последействия отсутствует.



Рассмотрим теперь мгновенную пространственную картину возмущения u в некоторый момент t.Точки M, находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы S_{at} с центрами в этих точках пересекают область начальных возмущений. Иными словами, это означает, что геометрическое место W точек, в которых возмущение отлично от нуля, состоит из точек M, находящихся на сферах S_{at} радиуса at с центрами в точках области V. Огибающие семейства этих сфер будут границами области W. Внешняя огибающая называется передним фронтом, внутренняя - задним фронтом распространяющейся волны. На рисунке изображены передний и задний фронты волны для случая, когда начальная область является шаром.

Передний фронт волны представляет собой поверхность, отделяющую точки, которые ещё не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Через точку M пространства передний фронт волны проходит в момент $t_1 = d/a$. Задний фронт волны в заданный момент времени представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые ещё колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось. Через точку M пространства задний фронт волны проходит в момент $t_2 = D/a$. Постоянная a является скоростью распространения фронта волны.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке пространства действие, локализованное во времени. При этом имеет место распространение волны с передним и задним фронтами волн (**принцип Гюйгенса**).

Перейдём к случаю двух переменных. Пусть начальное возмущение задано в некоторой области V на плоскости. Рассмотрим изменение состояния u в точке M, лежащей вне V. Состояние $u(M,t)$ в момент времени t определяется, согласно (4), начальными значениями в точках, принадлежащих кругу радиуса at с центром в M. Пусть снова d и D – расстояния от M до ближайшей и до наиболее удаленной точек области V. Для моментов времени $t < t_1 = d/a$ $u(M,t) = 0$, до точки M возмущение ещё не дошло. В момент $t = t_1$ в точку придёт передний фронт волны. Для значений $t > t_2 = D/a$ круг с радиусом at будет содержать внутри себя всю область V и в формуле (4) интегралы будут браться по области V. Это означает, что после момента времени t_2 функция u не обращается в нуль, как в случае трехмерного пространства.

Таким образом, начиная с момента $t = t_1$ в точке M возникает возмущение, которое сначала, вообще говоря, возрастает, а затем, начиная с некоторого момента, постепенно убывает до нуля (при $t \to \infty$). В этом явлении последействия и заключается отличие плоского случая от пространственного. Влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. Принцип Гюйгенса не имеет места.

Мгновенная картина возмущений на плоскости имеет резко ограниченный передний фронт, но не имеет заднего фронта. Задачу для двух измерений можно рассматривать как пространственную задачу, когда начальные возмущения заданы в бесконечном цилиндре и не зависят от третьей координаты.

Неоднородное волновое уравнение

Найдём решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x,t), \tag{5}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{6}$$

Так же, как и в одномерном случае, рассмотрим вспомогательную задачу определения функции $v(x,t,\tau)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}), \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3, \ t \geq \tau, \tag{7}$$

$$v(x,\tau,\tau) = 0, \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \ x \in \mathrm{R}^3. \tag{8}$$

Решение задачи (7), (8) выражается формулой Пуассона, в которой t заменено на $t - \tau$:

$$v(x,t,\tau) = \frac{t-\tau}{4\pi} \iint_{S_1} f(x + \alpha a(t-\tau), \tau) d\gamma_1. \tag{9}$$

Покажем, что функция u, определенная формулой

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau, \tag{10}$$

является решением задачи (5), (6).

Из формулы (10) находим

$$\Delta u = \int_0^t \Delta v(x,t,\tau)d\tau. \tag{11}$$

Дифференцируя выражение (10) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}d\tau + v(x,t,t). \tag{12}$$

Второе слагаемое справа равно нулю в силу первого начального условия в (8). Дифференцируя (12) по t, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}d\tau + \frac{\partial v}{\partial t}(x,t,t),$$

причем второе слагаемое в правой части равно $f(x,t)$ в силу второго из условий (8), то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}d\tau + f(x,t). \tag{13}$$

Из формул (11), (13) и уравнения (7) непосредственно вытекает, что функция u, определенная формулой (10), удовлетворяет неоднородному уравнению (5). Начальные условия (6) также выполнены, что следует из формул (10) и (12) .

Подставляя в формулу (10) выражение для функции v, получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\iint_{S_1} f(x+\alpha a(t-\tau),\tau)d\gamma_1 d\tau.$$

Сделаем замену переменной $r = a(t-\tau)$ во внешнем интеграле и перейдём к сферическим координатам во внутреннем интеграле:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+\alpha r, t-r/a)}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr.$$

Полагая $\xi = x + \alpha r$ и принимая во внимание, что $|\alpha| = 1$, получим $r = |x-\xi|$, и выражение для u окончательно запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{D_{at}} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|/a)}{|x-\xi|}d\xi, \tag{14}$$

где D_{at} – шар радиуса at с центром в точке x.

Выражение (14) называется **запаздывающим потенциалом**. При выполнении интегрирования функция f берётся не в рассматриваемый момент времени t, а в момент времени $t - |x-\xi|/a$, предшествующий моменту t на такой промежуток времени, какой потребуется процессу, распространяющемуся со скоростью a, для прохождения пути от точки ξ до точки x.

Решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,t), \tag{15}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \tag{16}$$

где $x\in \mathrm{R}^3$, $t\geq 0$, имеет, таким образом, вид

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{at}}\frac{\varphi}{t}d\gamma_{at}+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}}\psi d\gamma_{at}+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{D_{at}}\frac{f(\xi,t-|x-\xi|/a)}{|x-\xi|}d\xi. \tag{17}$$

Формула (17) часто называется **формулой Кирхгофа**.

Аналогично можно получить решение неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+f(x,t),\ x=(x_1,x_2)\in \mathrm{R}^2,\ t\geq 0, \tag{18}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0. \tag{19}$$

Это решение имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{\rho\leq a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}d\xi d\tau, \tag{20}$$

где $\rho^2=|x-\xi|^2$.

Точечный источник

Если положим, что свободный член в равнении (5) отличен от нуля только в небольшом шаре с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этого шара к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы в пределе можем получить решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента $t=0$. Пусть

$$f(x,t)=0,\ |x|\geq\varepsilon,\ \iiint_{D_\varepsilon}f(x,t)dx=4\pi a^2\omega(t), \tag{21}$$

где D_ε – шар радиуса ε с центром в начале координат. Пусть $at>|x|$, тогда шар D_{at} содержит шар D_ε при достаточно малых ε. В силу (21) в формуле (14) достаточно произвести интегрирование по шару D_ε. При $\varepsilon\to 0$ величина $r=|x-\xi|$ будет равна расстоянию от точки x до начала координат, то есть $r=|x|$. Принимая во внимание (21), получим

$$u(x,t)=\frac{1}{r}\omega(t-\frac{r}{a}),\ r=|x|<at. \tag{22}$$

При $r>at$ ясно, что $u(x,t)=0$, так как область интегрирования в (14) не пересекается с шаром D_ε при достаточно малых ε.

Отметим, что функция (22) при любом выборе функции $\omega(t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению и представляет собой сферическую волну, расходящуюся радиально со скоростью a от начала координат.

В случае уравнения (18) совершенно так же, как и выше, считаем

$$f(x,t)=0,\ |x|\geq\varepsilon,\ \int_{C_\varepsilon}f(x,t)dx=2\pi a\omega(t),$$

где C_ε – круг с центром в начале координат радиуса ε. Обращаясь к формуле (20) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим решение для точечного источника в случае цилиндрических волн:

$$u(x,t) = \int_0^{t-\rho/a} \frac{\omega(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}},\ at > \rho = |x|, \tag{23}$$

$$u(x,t) = 0,\ at < \rho = |x|.$$

Отметим, что в трехмерном случае воздействие точечного источника на точку x в момент времени t зависит только от интенсивности источника в момент времени $t - |x|/a$. В случае же формулы (23) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от $t = 0$ до момента $t - |x|/a$.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.