1. Общая структура системы с наблюдаемой и ненаблюдаемой частями. «Полное» разложение Калмана. Алгоритм построения матрицы замены.

Есть система с управлением и одним выходом:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

В первую очередь проверяется управляемость и наблюдаемость системы. Для этого:

- ищем матрицу $\mathbb{C} = [B, AB, A^2B, \dots]$, ищем ранг этой матрицы. Ранг матрицы – это будет управляемое подпространство системы.

- ищем матрицу $\mathrm{O} = [C, CA, CA^2, \dots]$, ищем ранг этой матрицы. Ранг матрицы – это будет наблюдаемое подпространство системы.

Далее нужно составить матрицу преобразования $T = [T_1, T_2, T_3, T_4]$

Составлять T начинаем с T_2

1) T_2 – блок матрицы преобразования, базис пересечения образа матрицы управляемости и ядра матрицы наблюдаемости.

$$T_2 = Im\,\mathbb{C}\{A, B\} \cap Ker\ O\{A, C\}$$

Количество векторов в образе матрицы управляемости – это ранг матрицы.

Количество векторов в ядре матрицы наблюдаемости – это размерность матрицы минус ее ранг.

Таким образом, нашли T_2

2) T_1 – это дополнение до базиса в образе (оно не всегда есть, если его нет, то T_1 – пустой блок, его не будет)
3) T_4 – это дополнение до базиса ядра матрицы наблюдаемости
4) T_3 – дополнение всего T до нужной размерности

Итак, нашли матрицу преобразования T.

Ищем:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT$$

Далее записываем полученную систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}\hat{u} \\ \eta = \tilde{C}\xi \end{cases}$$

Далее выделяем управляемое и неуправляемое подпространтсва (были найдены ранее), наблюдаемое и ненаблюдаемое подпространства (их размерность также была найдена ранее). Наблюдаемое подпространство выделяется с первого ненулевого элемента в векторе $\tilde{C}$

Далее для исследования стабилизируемости рассматриваются собственные числа неуправляемой части. Если в неуправляемлй части есть положительные собственные числа, то система не стабилизируема.

Далее для исследования детектируемости рассматриваются собственные числа ненаблюдаемой части. Если в ненаблюдаемой части есть положительные собственные числа, то система не детектируема.

Рассмотрим пример для наглядности

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1\ 1\ 0]x$$

1) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Rank C = 1; $\mathbb{R}^1$ – управляемое подпространство, $\mathbb{R}^2$ – неуправляемое подпространство

2) $O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rank O = 1; $\mathbb{R}^1$ – управляемое подпространство, $\mathbb{R}^2$ – неуправляемое подпространство

Составим матрицу преобразования T:

3) $T_2 = Im\ \mathbb{C}\{A, B\} \cap Ker\ O\{A, C\}$

Найдем $Im\ \mathbb{C}\{A, B\}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -v_2 & v_3 \end{bmatrix} = [v_1 - v_2\ v_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Im\ \mathbb{C}\{A, B\} = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

*span – линейная оболочка

Найдем $Ker\ O\{A, C\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = 0, \forall v_3$$

$$Ker\ O\{A, C\} = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T_2 = Im\ \mathbb{C}\{A, B\} \cap Ker\ O\{A, C\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4) T_1 – дополнение до базиса в образе, в данном случае его нет

5) T_4 – дополнение до базиса ядра матрицы наблюдаемости

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) T_3 – дополнение всего T до нужно размерности

$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица преобразования

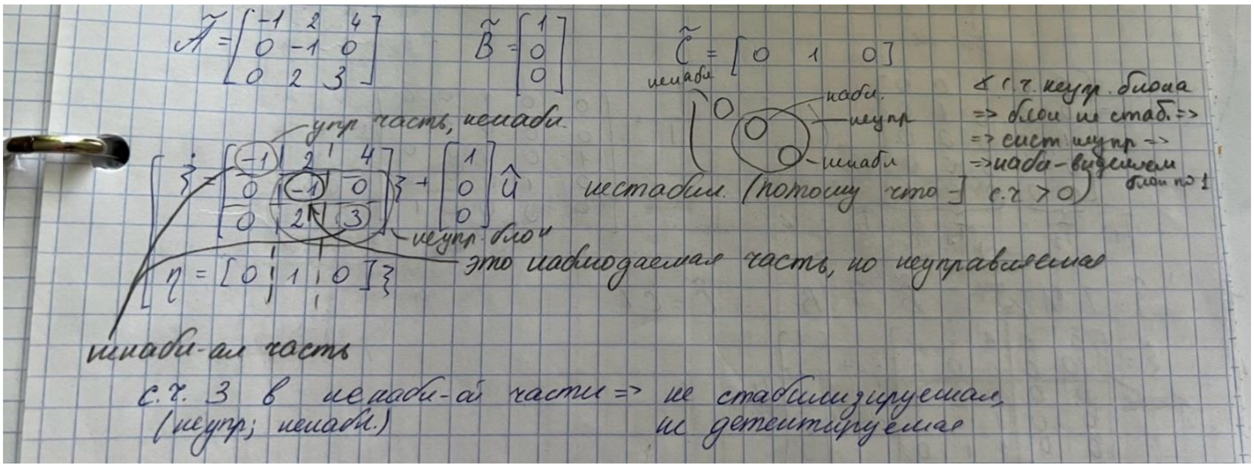
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = [0\ 1\ 0]$$

Выделяем управляемую и неуправляемую, наблюдаемую и ненаблюдаемую части.



Проверяем стабилизируемость: в неуправляемлй части есть собственное число 3>0, значит не стабилизируемая.

Проверяем детектируемость: в ненаблюдаемой части есть собственное число 3>0, не детектируемая

Значит не можем построить регулятор и наблюдатель.

2 Постановка задачи линейно-квадратичного регулирования. Вывод уравнения Беллмана для стационарного случая на бесконечном промежутке времени. Решение задачи синтеза оптимального регулятора. Алгебраическое матричное уравнение Риккати и условия существования неотрицательно определенного решения.

Задача линейно-квадратичного управления: $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\min_u \int_0^{+\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt - \text{квадратичный функционал}$$

$Q = Q^T \geq 0;\ R = R^T > 0$ *(функционал выпуклый вниз, достигается нижняя граница).*

Предполагаем, что решение существует:

Введем функцию оптимальных затрат на оставшемся участке пути, если в момент t находимся в x: $V(t, x(t)) = \min_u \int_t^{+\infty} (x^T Qx + u^T Ru)d\tau.$ – функция Беллмана.

$x(t) - \text{н. у.}, x - \text{решение ДУ при НУ и управлении.}$

$$V\big(t, x(t)\big) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} (\dots)d\tau + \int_{t+\Delta t}^{+\infty} (\dots)d\tau \right\} = \min_{\substack{u \\ [t;t+\Delta t)}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} (\dots)d\tau + \min_{\substack{u \\ [t+\Delta t,+\infty)}} \int_{t+\Delta t}^{+\infty} (\dots)d\tau \right\}$$

$$\min_{\substack{u \\ [t+\Delta t,+\infty)}} \int_{t+\Delta t}^{+\infty} (\dots)d\tau = V\big(t + \Delta t, x(t + \Delta t)\big)$$

$$\Rightarrow \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} (\dots)d\tau + V\big(t + \Delta t, x(t + \Delta t)\big) - V\big(t, x(t)\big) \right\} = 0$$

Разделим на Δt и $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (x^T Qx + u^T Ru)d\tau = (t \leq \xi \leq t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \big(x^T(\xi)Qx(\xi) + u^T(\xi)Ru(\xi)\big) \cdot (t + \Delta t - t) = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)$$

$$\min_u \left\{ x^T Qx + u^T Ru + \frac{dV\big(x, x(t)\big)}{dt} \right\} = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

$\min_u \left\{ x^T Qx + u^T Ru + \frac{\partial V}{\partial t} + < \Delta V, Ax + Bu > \right\} = 0$ - Уравнение Беллмана.

Если существует такая функция V, удовлетворяющая уравнения Беллмана, и оно имеет решение относительно u, то нашлось оптимальное управление. (min)

Предположение: функция Беллмана в виде квадратичной формы, то есть ищем в виде: $V\big(t, x(t)\big) = x^T X(t)x - \text{предположение}, X(t) = X^T(t) \geq 0, \text{больше } 0 \text{ т. к. } Q \text{ и } R \geq 0 \Rightarrow \text{интеграл} > 0 \Rightarrow V \geq 0 \text{ найденно решение } \exists!$

функция Беллмана не зависит от времени ⇒ не будет $\frac{dV}{dt}$

$$\min\big(x^T Qx + u^T Ru + (\nabla V, Ax + Bu)\big) = 0$$

$$V(t, x) = V\big(x(t)\big) = x^T(t)Xx(t)$$

$$\nabla V = 2Xx - \text{вектор столбец}$$

$$\min_u (x^T Qx + u^T Ru + 2 < Xx, Ax + Bu >) = 0$$

2 неизвестных: u и матрица X (ее существование мы предположили)

$< x, y > = x^T y = y^T x -$ скалярное произведение
$< x, y > = \frac{1}{2}(x^T y + y^T x)$

$\min\{x^T Q x + u^T R u + X^T x(Ax + Bu) + (Ax + Bu)^T X x\} = 0$

$f(u) = x^T(Q + A^T X + XA)x + u^T R u + x^T X B u + u^T B^T X x$

$\nabla_u f = 0 + 2Ru + 2B^T X x = 0 \Rightarrow Ru = -B^T X x \Rightarrow u = -R^{-1} B^T X x$ это д.б. min

$\nabla_{xx}^2 = 2R > 0 \Rightarrow f$ выпукла вниз $\Rightarrow$ найдется $(\cdot)$ min

Нашли единственную точку минимума в предположении, что $X(t) = X^T(t) \geq 0$.

Сведем решение к уравнению Риккати:

$$x^T Q x + (-R^{-1} B^T X x)^T R(-R^{-1} B^T X x) + (Ax - BR^{-1} B^T X x)^T X x + x^T X(Ax - BR^{-1} B^T X x) = 0$$

$$x^T Q x + x^T X B R^{-1} R R^{-1} B^T X x + x^T A^T X x + x^T X A x - x^T X B R^{-1} B X x - x^T X B R^{-1} R R^{-1} B^T X x = 0$$

$x^T(Q + A^T X + XA - XBR^{-1} B^T X)x = 0 \Leftrightarrow Q + A^T X + XA - XBR^{-1} B^T X = 0$ – алгебраическое уравнение Риккати.

Замечание: при транспонировании уравнение Риккати не изменится; если существует решение уравнения Риккати, то существует симметрическое решение

Нужно показать, что уравнение Риккати имеет решение и доказать, что решение будет неотрицательно определенным.

Теорема. (о существовании решения алгебраического уравнения Риккати). (сильная формулировка)

Пусть $Q = Q^T > 0$ – матрица Q – положительно определена и симметрическая, и пара матриц (A,B) – управляема, тогда существует единственное симметрическое положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати. $X = X^T > 0$ (решений может быть много, но положительно определенное только одно).

Теорема. (Ослабленная версия)

Пусть пара (A,B) – стабилизируема и пара матриц $(A,Q^{1/2})$ – детектируема, тогда существует единственное симметрическое неотрицательно определенное решение уравнения Риккати. $X = X^T > 0$, обладающее свойством $A_c = A - BR^{-1} B^T X$ (матрица замкнутой системы асимптотически устойчива)

Убедимся, что это решение будет давать min своего квадратичного функционала.

БОЛЬШИЕ РАССУЖДЕНИЯ.

Теорема. (решение задачи линейно-квадратичного управления)

Пусть (A,B) – стабилизируема и пара матриц $(A,Q^{1/2})$ – детектируема, тогда решение задачи оптимального линейно-квадратичного управления существует и единственно, задается формулой $u = -R^{-1} B^T X x$, где X-решение care $\Rightarrow$ оптимальное значение фукнционала $x_0^T X x_0$ (док-во в больших рассуждениях).

+ ЕСТЬ ТЕОРИЯ ПО ДИСКРЕТНОМУ СЛУЧАЮ

3 Постановка задачи линейно-квадратичного управления при постоянно действующих возмущениях. Постановка задачи слежения. Решение задачи синтеза оптимального линейно-квадратичного следящего регулятора.

Постановка задачи линейно-квадратичного управления при постоянно действующих возмущениях:

Задача: $\dot{x} = Ax + Bu + f(t), x(0) = x_0$.

$I = \int_0^t ((x - x_0(t))^T Q(x - x_0(t)) + u^T Ru)dt$

$\min\limits_u I$

f(t) принадлежит классу, в котором дифференциальное уравнение имеет единственное решение, f(t) должна быть интегрируема по Риману.

Задача – найти управление, минимизирующее заданный квадратичный функционал при заданном внешнем воздействии.

? постановка задачи слежения

ОЧЕНЬ МНОГО РАССУЖДЕНИЙ+док-во теоремы

Теорема.

Задача имеет решение тогда и только тогда, когда существует решение алгебраического уравнения Риккати.
В этом случае оптимальное управление имеет вид $u = -R^{-1}B^T(X\xi + \mu)$, где функция μ является решением уравнения $\dot{\mu} = -(A - BR^{-1}B^T X)^T \mu - Xg$, которое можно выразить формулой $\mu = \int_t^{+\infty} e^{A_c^T(t-\tau)} Xg(\tau)d\tau$, в этом случае оптимальное ур-е функционала задается $I_{min} = \xi^T(0)X\xi(0) + 2\mu^T(0)\xi(0) + \nu(0)$, и функция ν удовлетворяет уравнению $-\dot{\nu} = \mu^T BR^{-1}B^T \mu + 2\mu^T g$.

4 Постановка задачи оценивания. Метод наименьших квадратов. Пример. Рекуррентный метод наименьших квадратов. Пример.

Постановка задачи

Проводится серия из N испытаний, выход системы y_k, связь между выходом системы и её состоянием: $y_k = Cx + \omega_k, x \in \mathbb{R}^n; y, \omega \in \mathbb{R}^m$, где ω_k – нормально распределённая случайная помеха не коррелированная на разных шагах:

$$\omega_k \sim \mathcal{N}(0, W_k), M\left\{(\omega_k - 0)(\omega_j - 0)^T\right\} = \begin{cases} 0, k \neq j \\ W_k, k = j \end{cases}.$$

Оценка по методу наименьших квадратов (МНК)

Применим МНК для решения этой задачи. Суть этого метода – минимизация квадрата нормы невязки: $\|\hat{y} - \hat{C}\hat{x}\|_2^2 \longrightarrow \min_{\hat{x}}$, $\hat{x}$ – оценка состояния системы, $\hat{y} = (y_1^T y_2^T \dots y_N^T)^T$ – вектор выходов, $\hat{C} = (C^T C^T \dots C^T)^T$ – матрица матриц наблюдения.

Найдём оценку, для этого раскроем норму, найдём точку экстремума для полученного выражения и убедимся, что это точка минимума.

1) Раскрываем норму $\|\hat{y} - \hat{C}\hat{x}\|_2^2 = (\hat{y} - \hat{C}\hat{x})^2 = \hat{y}^T\hat{y} - 2\hat{x}^T\hat{C}^T\hat{y} + \hat{x}^T\hat{C}^T\hat{C}\hat{x} = f(\hat{x})$.

2) Ищем стационарную точку $\nabla f(\hat{x}) = -2\hat{C}^T\hat{y} + 2\hat{C}^T\hat{C}\hat{x} = 0 \Rightarrow \hat{x}^* = (\hat{C}^T\hat{C})^{-1}\hat{C}^T\hat{y}$.

3) Проверяем, что это точка минимума $\nabla^2 f(\hat{x}) = \hat{C}^T\hat{C} > 0 \Rightarrow \hat{x}^*$ -- т. min.

Получена первая оценка для состояния системы по выходу: $\boldsymbol{\hat{x}^* = (\hat{C}^T\hat{C})^{-1}\hat{C}^T\hat{y}}$, однако она не является удобной.

Построим удобную *рекуррентную оценку*. Допустим мы знаем оценку на k-ом шаге: $\hat{x}_k = \hat{x}_k(y_1, y_2, \dots, y_k)$. И мы хотим узнать оценку на след. шаге с учётом знаний о предыдущей оценке и новом выходе: $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) = f(\hat{x}_k, y_{k+1})$.

Для решения задачи введём новый функционал $G_k(\hat{x}_k) = \sum_{i=1}^{k}(y_i - C\hat{x}_k)^2$, который использует ту же самую идею метода минимума квадратов, только не для всех выходов сразу, а для каждого отдельно. Найдя градиент, выразив стационарную точку и проверив на минимум, получим: $\boldsymbol{\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \frac{1}{k-1}(C^T C)^{-1} C^T (y_{k+1} - C\hat{x}_k)}$.

<u>Пример Обычный МНК</u>

k	1	2	3	4	5
x_k	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918
y_k	0,4055	1,0986	1,5041	1,9459	2,1401

А) $y = ax + b$

Б) $y = ax^2 + bx + c$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

C

$y = Cx + W$

$$\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{pmatrix} = (C^T C)^{-1} C^T y$$

Используем метод МНК

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}6931^2 & 0{,}6931 & 1\\ 1{,}0986^2 & 1{,}0986 & 1\\ 1{,}3863^2 & 1{,}3863 & 1\\ 1{,}6094^2 & 1{,}6094 & 1\\ 1{,}7918^2 & 1{,}7918 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0{,}6931^2 & 1{,}0986^2 & 1{,}3863^2 & 1{,}6094^2 & 1{,}7918^2\\ 0{,}6931 & 1{,}0986 & 1{,}3863 & 1{,}6094 & 1{,}7918\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C^T C)^{-1} = \begin{bmatrix} 12{,}086 & -29{,}8845 & 16{,}5757\\ -29{,}8845 & 75{,}221 & -42{,}728\\ 16{,}5757 & -42{,}728 & 25{,}231 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}0924\\ 1{,}8557\\ -0{,}7671\end{pmatrix}$$

$y = -0{,}0924x^2 + 1{,}8557x - 0{,}7671$

У РС: $y = -0{,}120087x^2 + 1{,}89763x - 0{,}852135$

Для прямой: $= 1{,}6x - 0{,}687$

<u>Рекуррентный МНК:</u>

$\widehat{x_k} = \hat{x}_{k-1} + H_k^{-1} C_k^T (y_k - C_k \hat{x}_{k-1})$

$H_k = H_{k-1} + C_k^T C_k$

$$H_0 = C_0^T C_0 \begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{pmatrix}_0 + H_1^{-1} \quad (*)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^2 & x_2 & 1\\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{pmatrix} = (C^T C)^{-1} C_0^T \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}432478\\ 2{,}48412\\ -1{,}10849 \end{bmatrix}$$

Следующий шаг:

$$H_1 - H_0 + C_1^T C_1 = H_0 + \begin{pmatrix} 1{,}6094^2\\ 1{,}6094\\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}6094^2 & 1{,}6094 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(*) \begin{pmatrix} 1{,}6094^2\\ 1{,}6094\\ 1 \end{pmatrix} \left(1{,}9459 - \begin{pmatrix} 1{,}6094^2 & 1{,}6094 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{pmatrix}_0 \right)$$

//Для линейной аппроксимации. Но берется 2 значения сначала.

5 Построение оптимальной оценки по методу минимума дисперсии для одношагового процесса. Пример.

Постановка задачи

$$y = Cx + \omega, \omega \sim \mathcal{N}(0, W), x \sim \mathcal{N}(\bar{x}, X), M\{(\omega_k - 0)(x - \bar{x})^T\} = 0$$

x – нормально распределённая случайная величина: $x \sim \mathcal{N}(\bar{x}, X)$, помехи не коррелированы с состоянием: $M\{(\omega_k - 0)(x - \bar{x})^T\} = 0$.

Оценка по методу минимума дисперсии

Для получения оценки нам нужно найти минимум дисперсии, точнее, минимум среднеквадратичной ошибки, аргумент этого минимума и будет оценкой: $\hat{x} = \arg\min_{\hat{x}} M\{(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})|y\}$. Так как мы ищем минимум в зависимости от выхода y, мы учитываем его в нашем функционале.

Будем искать решение с конкретно заданным видом оценки: $\hat{x} = Ly$. Распишем выражение дисперсии, преобразуем его и найдём производную и стационарные точки у полученного выражения и проверим, что получили именно минимум.

1) Преобразуем дисперсию

$$\begin{aligned} M\{(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})|y\} &= M\{(x - Ly)^T(x - Ly)|y = Cx + \omega\} \\ &= M\{(x - LCx - L\omega)^T(x - LCx - L\omega)\} \\ &= M\{x^T(I - LC)^T(I - LC)x - 2x^T(I - LC)^T L\omega + \omega^T L^T L\omega\} \\ &= M\left\{(x^T\ \omega^T)\begin{pmatrix} (I - LC)^T(I - LC) & -(I - LC)^T L \\ -L^T(I - LC) & L^T L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством мат. ожидания квадратичной формы:

$$\begin{aligned} & M\left\{(\bar{x}^T\ 0)\begin{pmatrix} (I - LC)^T(I - LC) & -(I - LC)^T L \\ -L^T(I - LC) & L^T L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &\quad + tr\left\{\begin{pmatrix} (I - LC)^T(I - LC) & -(I - LC)^T L \\ -L^T(I - LC) & L^T L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}\right\} \\ &\quad = \bar{x}^T(I - LC)^T(I - LC)\bar{x} \\ &\quad + tr\left\{\begin{pmatrix} (I - LC)^T(I - LC)X & -(I - LC)^T LW \\ -L^T(I - LC)X & L^T LW \end{pmatrix}\right\} \\ &\quad = tr\{(I - LC)\bar{x}\bar{x}^T(I - LC)^T\} + tr\{(I - LC)^T(I - LC)X + L^T LW\} \\ &\quad = f(L) \end{aligned}$$

2) Найдем производную

$$\begin{aligned} \nabla f(L) &= tr\{-2C\bar{x}\bar{x}^T(I - LC)^T - 2C^T(I - LC)X + 2LW\} \\ &= tr\{-2C\bar{x}\bar{x}^T - 2C^T X + 2C\bar{x}\bar{x}^T C^T L^T + 2C^T LCX + 2LW\} \\ &= tr\{-2\bar{x}\bar{x}^T C^T - 2XC^T + 2L(C\bar{x}\bar{x}^T C^T + CXC^T + W)\} = 0 \\ &\Rightarrow L = (X + \bar{x}\bar{x}^T)C^T(W + C(X + \bar{x}\bar{x}^T)C^T)^{-1} \end{aligned}$$

3) Проверим, что получили min $\nabla^2 f(L) = W + C(X + \bar{x}\bar{x}^T)C^T > 0 \Rightarrow L$ – т. min.

Запишем полученную оценку: $\boldsymbol{\hat{x} = Ly = (X + \bar{x}\bar{x}^T)C^T(W + C(X + \bar{x}\bar{x}^T)C^T)^{-1}y}$.

Примечание: в наших лекциях было введено обозначение $X = (X + \bar{x}\bar{x}^T)$, поэтому оценка имеет вид: $\hat{x} = Ly = XC^T(CXC^T + W)^{-1}y$.

Пример:

$y_k = 2x + \omega_k, x \sim N(0,1), \omega \sim N(0,0.5)$

Случайные величины на разных шагах не коррелированы.

$y_1 = 2 \quad y_2 = 1.8$

Параметры:

$X = 1, C = (2 \quad 2)^T, W = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, Y = (2.0 \quad 1.8)^T$

Оценка будет иметь вид:

$$\hat{x} = (2 \quad 2)\left(\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 2.0 \\ 1.8 \end{pmatrix} = 0.894118$$

6 Рекуррентное оценивание с минимальной среднеквадратичной ошибкой.

Постановка задачи

$y_k = Cx + \omega_k, x \in \mathbb{R}^n; y, \omega \in \mathbb{R}^m$

$\omega \sim \mathcal{N}(\omega_k, W_k), M\left\{(\omega_k - \overline{\omega}_k)(\omega_j - \overline{\omega}_j)^T\right\} = \begin{Bmatrix} 0, k \neq j \\ W_k, k = j \end{Bmatrix}$

$x \sim \mathcal{N}(\bar{x}, X), M\{(\omega_k - \overline{\omega}_k)(x - \bar{x})^T\} = 0$

Нужно найти рекуррентную оценку по методу минимума дисперсии:

$$\hat{x}_k = \arg\min_{\hat{x}} M\{(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})|y_1, \dots, y_k\}$$

Аргументом этого минимума будет условное мат. ожидание: $\hat{x}_k = M\{x|y_1, \dots, y_k\}$.

Док-во: 1) Запишем выражение в виде функции $\arg\min_{\hat{x}} M\{(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})|y_1, \dots, y_k\} = \min_{\hat{x}} f(\hat{x})$.

2) Найдем стационарную точку: $\nabla f(\hat{x}) = -2M\{(x - \hat{x})|y_1, \dots, y_k\} = 0 \Longrightarrow \hat{x}^*$ – т. min.

3) Проверим, что нашли именно минимум: $\nabla^2 f(\hat{x}) = 2I > 0 \Longrightarrow \hat{x}^*$– т. min.

Мы нашли выражение для оценки на k-ом шаге, зададим рекуррентную формулу. Для этого введём новые с.в.: $\breve{x}_k \sim \mathcal{N}(\hat{x}_k, X_k), \hat{x}_k = M\{x|y_1, \dots, y_k\}, X_k = M\{(\breve{x}_k - \hat{x}_k)(\breve{x}_k - \hat{x}_k)^T\}$. Теперь выразим оценку на k+1 шаге, используя с.в. $\widehat{x_k} = M(x|y_1, \dots y_k) = M(\widehat{x_k}, y_{k+1})$ Это уже известное нам мат ожидание:

$M\{x|y\} = \bar{x} + X_y C^T W^{-1}(y - C\bar{x} - \overline{\omega});$

$X_y = (X^{-1} + C^T W^{-1} C)^{-1} = M\left\{(x - \bar{x}_y)(x - \bar{x}_y)^T\right\}$

И это значит, что мы можем записать рекуррентную формулу:

$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + X_{k+1} C^T W_{k+1}^{-1}(y_{k+1} - Cx_k - \omega_{k+1}); X_{k+1} = (X_k^{-1} + C^T W_{k+1}^{-1} C)^{-1}.$

7 Постановка задачи оптимальной фильтрации. Фильтр Калмана. Пример.

Задача фильтрации:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_u + v_k - \text{дискретная система} \\ y_k = Cx_k + w_k \end{cases}$$

Построить оценку по измерениям текущего состояния. Предположим:

$E\{v_k, \omega_j^T\} = 0$ $\qquad$ $E\{v_k v_j^T\} = V_k \delta_{kj}$

$v_k \sim N(0, V_k)$ $\qquad$ $E\{\omega_k, \omega_j^T\} = W_k \delta_{kj}$

$\omega_k \sim N(0, W_k)$ $\qquad$ $x_0 \sim N(\bar{x}, X_0)$

$\mathrm{E}\{\mathrm{x_j}, v_k^T\} = 0$

$\mathrm{E}\{\mathrm{x_j}, \omega_k^T\} = 0$

$\delta = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$

// оценка на текущем шаге определяется только предыдущим шагом

На каждом шаге определяем оценку min дисперсии

x_0

$x_1 = Ax_0 + v_0$

$y_1 = Cx_1 + \omega_1$

$\widehat{x_1} = \overline{x_1} + k_1(y_1 - C\overline{x_1})$

$\overline{x_1}$ – оценка x_1

$\overline{x_1} = E\{Ax_0 + v_0\} A\overline{x_0}$

$\mathrm{K}_1 = \sum_1 C^T W_1^{-1}$

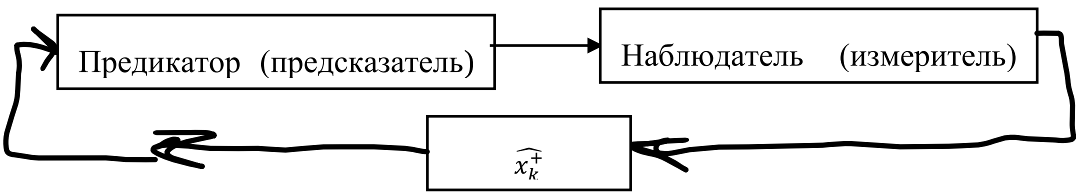
$$\sum_1^{-1} X_1^{-1} + C^T W_1^{-1} C$$

$X_1 = E\{(x_1 - \overline{x_1})(x - \overline{x_1})^T\} = E\{(Ax_0 + v_0 - Ax_0)(\dots)^T\} = E\{(A(x_0 - \overline{x_0}) + v_0)(\dots)^T\} = AE\{(x_0 - \overline{x_0})^T\}A^T + 2AE\{(x_0 - \overline{x_0})v_0^T\} + E\{v_0 v_0^T\} \Longrightarrow X_1 = AX_0A^T + V_0$

$\widehat{x_k^+}$ – апостериорная оценка состояния x_k при условии проведенного y_k

$\widehat{x_k^-}$ – априорная оценка x_k при условии до проведения y_k

Фильтр Калмана строит $\widehat{x_k^-}$, корректирует и получает $\widehat{x_k^+}$, переходит на следующий шаг



$\widehat{x_k^-} = A\widehat{x_k^+}$ (если ничего не знаем, то лучшая оценка – мат ожидание

$$\sum_k^{-1} A \sum_{k-1}^{+} A^T + V_{k-1} = E\{(x_k - \widehat{x_k^-})(x_k - \widehat{x_k^-})^T\}$$

Новая матрица невязки до опытов (априорная)

Коррекция априорных оценок: $\widehat{x_k^+} = \widehat{x_k^-} + K_k(y_k - C\widehat{x_k^-})$,

$$K_k = \sum_k^- C^T W_k^{-1}$$

Дальше вычисляем апостериорную матрицу ошибок:

$$\sum_k^+ = \sum_k^- + C^T W_k^{-1} C$$

Эти формулы определяют фильтр Калмана.

8 Линейные матричные неравенства: определение и свойства. Связь с уравнением Ляпунова.

Определение: Линейно-матричные неравенства (LMI) – выражение вида $F(x) < (>) 0, x \in \mathbb{R}^n, F = F^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$

Примечание: 1) Матрица F симметрична -> все ее с.ч. действительны. 2) Знак меньше (больше) означает знакоопределенность матрицы.

– **основные формы записи:**

А) каноническая форма записи

$$F(x) = F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k x_k < 0, F_k = F_k^T \in \mathbb{R}^{m\times m}, k = 0, \dots, n$$

Б) стандартная форма записи

$$F(x) < 0, X = X^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Пример

$$A^T X + XA < 0, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Стандартную форму записи можно свести к канонической с помощью замены

$$X = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} E_k x_k$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{pmatrix}, \dots$$

– **свойства:**

1) $D = \{x \in R^n : F(x) < 0\}$ – выпуклая область.

Док-во: множество D выпукло $\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \forall x, y \in D: \alpha x + (1-\alpha) y \in D$

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) = (\alpha + 1 - \alpha)F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k(\alpha x_k + (1-\alpha)y_k)$$
$$= \alpha\left(F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k x_k\right) + (1-\alpha)\left(F_0 + \sum_{k=1}^{n} F_k y_k\right) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) < 0$$
$$\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in D$$

2) $F_k(x) > 0, k = 1, \dots, m \;\Leftrightarrow diag\big(F_1(x), \dots, F_m(x)\big) > 0$ – сохранение знака при объединении в блочно-диагональную матрицу.

3) $F(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -F(x) < 0$

4) Сохранение знака при преобразовании (не было в лекциях)

$$\forall S \in R^{m\times m}: det S \neq 0, F(x) < 0 \Rightarrow S^T F(x) S < 0, S^{-1} F(x) S < 0$$

5) $F(x) < 0 \Leftrightarrow \lambda_{max}(F) < 0$

6) Оценка квадратичной формы (не было в лекциях)

$$\lambda_{min}(A) x^T x \le x^T A x \le \lambda_{max}(A) x^T x$$

Док-во: $x = Sy, S^T S = I \Rightarrow y^T S^T A S y = y^T D y, D = diag(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$

$$\lambda_{min}(A) y^T y \le y^T D y = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \lambda_k \le \lambda_{max}(A) y^T y \Leftrightarrow \lambda_{min}(A) x^T x \le x^T A x \le \lambda_{max}(A) x^T x$$

7) **Лемма о дополнении Шура** (было в лекциях, нет в файле)

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_{22} > 0 \\ X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T > 0 \end{cases}$$

$$X_{11} = X_{11}^T, X_{22} = X_{22}^T$$

Или

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_{11} > 0 \\ X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0 \end{cases}$$

Док-во:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$v^T X v = v^T \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} v = v_1^T X_{11} v_1 + v_2^T X_{22} v_2 + v_1^T X_{12} v_2 + v_2^T X_{12} v_1$$
$$= (v_1 + X_{11}^{-1} X_{12} v_2) X_{11} (v_1 + X_{11}^{-1} X_{12} v_2) + v_2^T (X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12}) v_2$$

$$X_{11} > 0, (X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12}) > 0$$

Если $X > 0$, то $X_{11} > 0, (X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12}) > 0$

- **задачи LMI:**

5) Задача линейно матричной оптимизации (задача полуопределенного программирования) (переписывала с тетради)

$$\lambda_{max}(A)$$

A – квадратная матрица, с.ч. – вещественные, A – симметрическая

$$y = Ax;\ y^T y = x^T A^T A x;\ \frac{y^T y}{x^T x} = \frac{||y||_2^2}{||x||_2^2};\ sup_{x \neq 0} \frac{x^T A^T A x}{x^T x} = \lambda_{max}(A^T A) = \lambda_{max}^2(A)$$

$$sup_{x \neq 0} \left(\frac{x^T A^T A x}{x^T x} - \lambda_{max}^2(A) \right) = 0 \Rightarrow sup_{x \neq 0} \left(\frac{x^T A^T A x - \lambda_{max}^2(A) x^T x}{x^T x} \right) \Rightarrow x^T (A^T A - \lambda_{max}^2(A) I) x \leq 0$$

$\Rightarrow (A^T A - \lambda_{max}^2(A) I) x \leq 0 - LMI$

$$\begin{cases} \min \gamma^2 \\ (A^T A - \gamma^2 I \leq \Leftrightarrow \gamma^2 I - A^T A \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma^2 I & A \\ A & I \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

Пояснение про теорему Ляпунова:

Рассмотрим непрерывную линейную систему

$$\dot{x} = Ax$$

- устойчива, когда все собственные числа A принадлежат левой полуплоскости

По т. Ляпунова:

$V(x) = \begin{cases} > 0, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ – функция Ляпунова

Если $\frac{dV}{dt} < 0$, то устойчива

Если $V = x^T X x, X = X^T > 0, \frac{dV}{dt} =< \nabla V, Ax >= x^T (A^T X + XA) x < 0$

$$\Longrightarrow A^T X + XA < 0$$

$\dot{x} = Ax$ – устойчива (или A – устойчива) тогда и только тогда, когда:

$\begin{cases} \exists X = X^T > 0 \\ A^T X + XA < 0 \end{cases}$ – стандартная(общая) форма LMI

Пример (мб не надо)

Линейная система с полной информацией о состоянии $\dot{x} = Ax + Bu$.

Синтезировать управление в виде обратной связи по состоянию $u = \Theta x$. Матрица замкнутой системы будет иметь вид: $A_c = A + B\Theta$. Найти такое управление можно с помощью LMI.

$A_c = A + B\Theta$ – асимптотически устойчива $\Leftrightarrow$ $\exists X = X^T > 0$: $A_c^T X + XA_c < 0$

$$A_c^T X + XA_c < 0 \Leftrightarrow A^T X + \Theta^T B^T X + XA + XB\Theta < 0$$

Умножим слева и справа на X^{-1}: $X^{-1}A^T + X^{-1}\Theta^T B^T + AX^{-1} + B\Theta X^{-1} < 0$. Замена $Y = X^{-1}, Z = \Theta Y$, тогда получим ЛМН.

(нужно ли это?)

Теорема. Линейная система стабилизируема в виде обратной связи по состоянию тогда и только тогда, когда разрешима система: $\begin{cases} Y = Y^T > 0 \\ YA^T + AY + Z^T B^T + BZ < 0 \end{cases}$, в этом случае $\Theta = ZY^{-1}$

9 Понятие D-устойчивости линейной системы. LMI-область: определение и свойства. Вывод линейный матричных неравенств для простейших LMI-областей (полуплоскость, внутренность круга, горизонтальная полуполоса, внутренность угла). Теорема об устойчивости относительно LMI-области.

Определение: Множество $D = \{z \in C: F(z) < (>)0\}$ – LMI-область, если $\exists L = L^T, M \in R^{m\times m}: F(z) = L + Mz + M^T\bar{z} < (>)0$

– **свойства:**

1) LMI-область всегда выпукла

$\forall \alpha \in [0,1] \quad \forall z_1, z_2 \in D \overset{?}{\Rightarrow} \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 \in D$

$(1-\alpha) z_2 + \alpha z_1 \overset{?}{\in} D \Rightarrow f(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) \overset{?}{<} 0 \Rightarrow L + M(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) +$

$+ M^T(\alpha \bar{z}_1 + (1-\alpha)\bar{z}_2) = \alpha(L + Mz_1 + M^T\bar{z}_1) + (1-\alpha)(L + Mz_2 + M^T\bar{z}_2) =$

$= \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2) < 0 \longrightarrow \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2) < 0$

т.к. $z_1, z_2 \in D \Rightarrow f(z_1) < 0, \ f(z_2) < 0$ ч.т.д.

2) Симметрия относительно действительной оси

Док-во: $F(\bar{z}) = L + M\bar{z} + M^T\bar{\bar{z}} = L + M\bar{z} + M^T z = (L^T + M^T\bar{z} + Mz)^T = (L + M^T\bar{z} + Mz)^T = F^T(\bar{z})$

3) Объединение нескольких областей в одну:

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} D_i, \forall i = 1, \dots, n: D_i = z \in C: F_i(z) = L_i + M_i z + M_i^T \bar{z} < (>)0\}$$

Тогда $D = \{z \in C: F(z) = L + Mz + M^T\bar{z} < (>)0\}$ - LMI область, где $L = diag(L_1, \dots, L_n), M = diag(M_1, \dots, M_n)$.

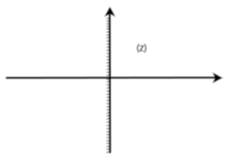
Определение: Матрица $A \in R^{n\times n}$ – D-устойчивая, если все ее с.ч. принадлежат области D.

Определение: Матрица A: $specA \in Rez < 0$ – Гурвичева

Определение: Матрица A: $specA \in |z| < 1$ – Шуровская

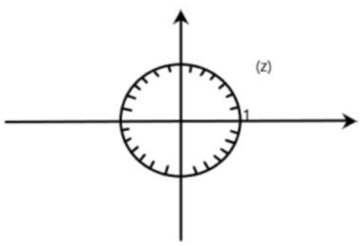
– **примеры LMI-областей**:

1) $D = \{z \in C: Rez < 0\}$



$$Rez = \frac{z + \bar{z}}{2} < 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0 \Rightarrow L = 0, M = 1$$

2) $D = \{z \in C: |z| < 1\}$



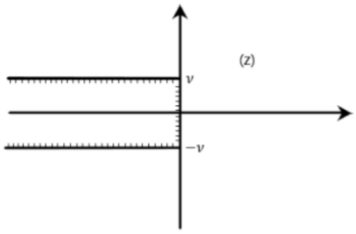
$$|z| < 1 \Leftrightarrow |z|^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - z\bar{z} > 0$$

Используем критерий Сильвестра, чтобы сделать это выражение LMI – областью. Для этого нужно представить это выражение как определитель матрицы или один из ее миноров. В данном случае:

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow 1 > 0, 1 - z\bar{z} > 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $D = \{z \in C: Rez < 0, |Imz| < v\}$



A) |Imz|<v

$$|Imz| < v \Leftrightarrow \left|\frac{z - \bar{z}}{2i}\right|^2 < v^2 \Leftrightarrow -(z - \bar{z})^2 < 4v^2 \Leftrightarrow 4v^2 + (z - \bar{z})^2 > 0$$

Воспользуемся критерием Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} 1 & z - \bar{z} \\ -(z - \bar{z}) & 4v^2 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow 1 > 0, 4v^2 + (z - \bar{z})^2 > 0$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4v^2 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

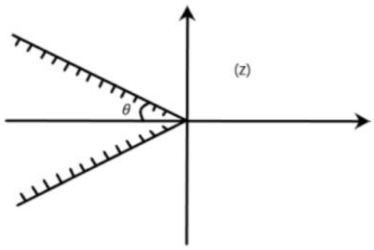
B) Rez<0

$$z + \bar{z} < 0 \Leftrightarrow -z - \bar{z} > 0 \Rightarrow L_2 = 0, M_2 = -1$$

Воспользуемся свойством LMI-области об объединении и получим:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4v^2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $D = \{z \in C: |Imz| < -\tan\Theta\, Rez, \Theta \in [0;0.5\pi]\}$



$$|Imz| < -tan\Theta Rez \Leftrightarrow \left|\frac{z - \bar{z}}{2i}\right|^2 < tan^2\Theta\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2$$

$$-(z - \bar{z})^2 < tan^2\Theta(z + \bar{z})^2 \Leftrightarrow tan^2\Theta(z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 > 0$$

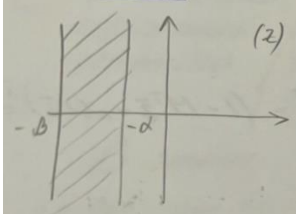
Применим критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} tan\Theta(z + \bar{z}) & z - \bar{z} \\ -(z - \bar{z}) & tan\Theta(z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0, tan^2\Theta(z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 > 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} tan\Theta & 1 \\ -1 & tan\Theta \end{pmatrix}$$

Неравенство $tan^2\Theta(z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 > 0$ задает область, показанную на рисунке, и симметричную, это компенсируется неравенством $z + \bar{z} < 0$.

5)



$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : -\beta < \operatorname{Re} z < -\alpha\}$

вещ. часть отвечает за скорость затухания

$-2\beta < z+\bar{z} < -2\alpha$

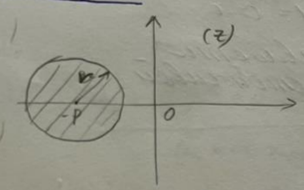
вещ. часть = полусумма z и $\bar{z}$

$$\begin{cases} z+\bar{z}+2\alpha<0 \\ -z-\bar{z}-2\beta<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha+z+\bar{z} & 0 \\ 0 & -2\beta-z-\bar{z} \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & -2\beta \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M} z + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M^T} \bar{z} < 0$$

6)

пример 6:



* критерий Сильвестра

$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : (x+p)^2+y^2<r^2\}$

$x^2+2xp+p^2+y^2<r^2$; $(x^2+y^2)+p^2+(2x)p<r^2$

$z\bar{z}+p^2+(z+\bar{z})p<r^2$

$(z+p)(\bar{z}+p)<r^2$ - неравенство в комплексном виде

применяем матричные нер-ва

$$f(z) = \begin{bmatrix} r & z+p \\ \bar{z}+p & r \end{bmatrix} > 0$$

$$L = \begin{bmatrix} r & p \\ p & r \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– **произведение Кронекера.**

Произведение Кронекера матриц A и B:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in R^{np\times mq}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in R^{n\times m}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \in R^{p\times q},$$

Свойства: отсутствие коммутативности, дистрибутивность, ассоциативность, умножение на скаляр, смешанное произведение, транспонирование, обратимость.

Теорема (критерий D-устойчивости матрицы): Матрица A является D-устойчивой $\Leftrightarrow \exists X = X^T > 0$:

$$L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T < (>)0,$$

$$\text{где } D = \{z \in C : F(z) = L + Mz + M^T\bar{z} < (>)0\}$$

Эта теорема позволит сдвигать с.ч. систем с управление в любую нужную область, если это возможно.

10 Задача модального управления относительно LMI- области. Теорема о существовании стабилизирующего регулятора. Связь с устойчивостью относительно левой полуплоскоти и внутренности единичного круга.

Задача модального управления относительно LMI-области: нужно подвинуть собственные числа матрицы в заданную LMI область, используя критерий D-устойчивости матрицы.

Теорема (о существовании стабилизирующего регулятора)

$\dot{x} = Ax + Bu - D -$ стабилизиуема $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} X = X^T > 0, Z \\ L \otimes X + M \otimes (AX + BZ) + M^T \otimes (AX + BZ)^T < 0 \end{cases}$$

$\theta = ZX^{-1}$

Связь:

Теорема (непрерывная система)

$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ u = \theta x$ является асимптотически устойчивой, если

$\exists X = X^T > 0 : XA^T + AX + BZ + Z^T B^T < 0,\ \ Z = \theta X$

Докажем это с помощью критерия D-устойчивости:

Непрерывная система является асимптотически устойчивой, если все её собственные числа лежат в левой полуплоскости, то есть:

$spec(A + B\theta) \subseteq intD = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} < 0\}$

$D - LMI$-область: $L = 0$, $M = 1$

Критерий D-устойчивости матрицы говорит о том, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$\exists X = X^T > 0 : L \otimes X + M \otimes ((A + B\theta)X) + M^T \otimes \left((A + B\theta)X\right)^T < 0$

Раскроем внутренние скобки:

$L \otimes X + M \otimes (AX + B\theta X) + M^T \otimes (AX + B\theta X)^T < 0$

Сделаем замену:

$]Z = \theta X \Rightarrow L \otimes X + M \otimes (AX + BZ) + M^T \otimes (AX + BZ)^T < 0$

Подставим L и M:

$XA^T + AX + BZ + Z^T B^T < 0$

Теорема (дискретная система)

Система $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,\ \ u_k = \theta x_k$ является асимптотически устойчивой, если

$\exists X = X^T > 0 : \begin{pmatrix} X & AX + BZ \\ XA^T + Z^T B^T & X \end{pmatrix} > 0,\ \ Z = \theta X$

Доказательство:

Для асимптотической устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа лежали внутри единичного круга:

$\operatorname{spec}(A + B\theta) \subseteq \operatorname{int} D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Как мы знаем, единичный круг – это LMI-область:

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Применим критерий D-устойчивости для матрицы замкнутой системы:

$$\exists \mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} > 0 : \mathrm{L} \otimes \mathrm{X} + \mathrm{M} \otimes \big((\mathrm{A} + \mathrm{B}\theta)\mathrm{X}\big) + \mathrm{M}^{\mathrm{T}} \otimes \big((\mathrm{A} + \mathrm{B}\theta)\mathrm{X}\big)^{\mathrm{T}} > 0$$

Раскроем внутренние скобки:

$$\mathrm{L} \otimes \mathrm{X} + \mathrm{M} \otimes (\mathrm{AX} + \mathrm{B}\theta\mathrm{X}) + \mathrm{M}^{T} \otimes (\mathrm{AX} + \mathrm{B}\theta\mathrm{X})^{\mathrm{T}} > 0$$

Сделаем замену:

$$]\mathrm{Z} = \theta\mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{L} \otimes \mathrm{X} + \mathrm{M} \otimes (\mathrm{AX} + \mathrm{BZ}) + \mathrm{M}^{T} \otimes (\mathrm{AX} + \mathrm{BZ})^{\mathrm{T}} > 0$$

Подставим L и M:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & BZ + AX \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ XA^{T} + Z^{T}B^{T} & 0 \end{pmatrix} > 0$$

Итого получаем:

$$\begin{pmatrix} X & \mathrm{AX} + \mathrm{BZ} \\ XA^{T} + Z^{T}B^{T} & X \end{pmatrix} > 0$$

11 Задача робастной устойчивости. Теорема Харитонова

Задача робастной стабилизации может быть представлена в виде:

$$\dot{x} = A(\sigma)x + B(\sigma)u, \quad u = \theta x$$

Необходимо, чтобы система была асимптотически устойчива при любом параметре. Параметр σ вызывает так называемую неопределенность.
Эта задача очень сложная и не может быть решена в общем случае.

Коэффициенты матрицы – не постоянные, заданы в каких-то ограничениях. Строится управление, которое стабилизирует систему с неизвестными параметрами.

$\dot{x} = A(\alpha)x, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in D \;\Rightarrow A(\alpha)$ – устойчива, $\forall \alpha \in D$, тогда эта модель называется робастно-устойчивой.

Параметры могут быть заданы по-разному:

1) *Аффинная неопределенность*: $A(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j + A_0$ (важен случай D – политопа, при нем легко получить робастную устойчивость)

2) *Параметрическая неопределенность*: $A(\Omega) = A_0 + E\Omega_0 F,\ \Omega_0^T\Omega_0 \leq \eta^2 I$ (матрица Ω содержит неизвестные параметры).

Определение: Полином вида … называется интервальным.

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n, \forall k\ \underline{a_k} \leq a_k \leq \overline{a_k}, \underline{a_0}, \overline{a_n} > 0$$

Теорема (Харитонова об интервальной устойчивости).

Интервальный многочлен является робастно-устойчивым тогда и только тогда, когда устойчивы следующие многочлены Харитонова:

$Q_1(z) = \ \underline{a_n} + \underline{a_{n-1}}z + \overline{a_{n-2}}z^2 + \overline{a_{n-3}}z^3 + \cdots$

$Q_2(z) = \ \underline{a_n} + \overline{a_{n-1}}z + \overline{a_{n-2}}z^2 + \underline{a_{n-3}}z^3 + \cdots$

$Q_3(z) = \ \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}}z + \underline{a_{n-2}}z^2 + \underline{a_{n-3}}z^3 + \cdots$

$Q_4(z) = \ \overline{a_n} + \underline{a_{n-1}}z + \underline{a_{n-2}}z^2 + \overline{a_{n-3}}z^3 + \cdots$

Устойчивость этих полиномов можно доказывать при помощи критериев Р-Г, Михайлова, метод лямбда переходов.

Необходимое условие робастной устойчивости: $\underline{a_k} > 0$

Теорема Харитонова хороша, но она позволяет лишь ответить на вопрос устойчив ли интервальный многочлен в заданных границах, но не позволяет узнать границы устойчивости. Для этого рассмотрим следующую теорему.

12 Графический критерий робастной устойчивости интервального многочлена. Годограф Цыпкина-Поляка. Радиус робастной устойчивости.

Теорема (Цыпкин-Поляка – частотный критерий).

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

$\left|a_k - a_k^0\right| \leq \gamma\alpha_k \Rightarrow a_k^0 - \gamma\alpha_k \leq a_k \leq a_k^0 + \gamma\alpha_k$ (+поясняющая картинка с осью).

Для робастной устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно: $a_0^0 > \gamma\alpha_0,\ \ a_n^0 < \gamma\alpha_k$ и годограф Поляка-Цыпкина:

$x(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{R(\omega)}, \; y(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{T(\omega)}$

$U_0 = a_0^0 - a_2^0\omega^2 + a_4^0\omega^4 \dots; \; V_0(\omega) = a_1^0 - a_3^0\omega^2 + a_5^0\omega^4 \dots; \; R(\omega) = \alpha_0 + \alpha_2\omega^2 + \alpha_4\omega^4 + \cdots; \; T(\omega) = \alpha_1 + \alpha_3\omega^3 + \alpha_5\omega^5 + \cdots$

Проходит последовательно в положительном направлении через n квадратов, не пересекая квадрат с вершинами в точках $\pm\gamma$.

$\gamma^* = \min\{\gamma, \frac{a_0^0}{\alpha_0}, \frac{a_n^0}{\alpha_n}\}$ – радиус робастной устойчивости интервального полинома.

γ – max возможное значение, при котором годограф Цыпкина-Поляка не пересекает квадрат с вершинами в точках $\pm\gamma$.

Если мы ограничим коэффициенты следующим образом: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(a_k - a_k^0)^2}{\alpha_k^2} \le \gamma^2$, то предыдущая теорема аналогична, только годограф Цыпкина – Поляка проходит в положительном направлении и не пересекает шар с радиусом γ.

Если теперь хотим проверить робастную устойчивость система, матрица которой зависит от параметров, т.е. $\dot{x} = (A + E\Omega F)x; \; \Omega^T\Omega = \eta^2 I$.

Ω содержит неизвестные параметры, принадлежащие некоторому шару, радиуса η (чем больше η, тем больше параметры откланяются от некоторых номинальных значений).

Теорема (достаточное условие).

Матрица $A + E\Omega F$ робасто устойчива, если $\exists X = X^T > 0$

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XE & F^T \\ E^T X & -\zeta I & 0 \\ F & 0 & -\zeta I \end{bmatrix} < 0$$

ζ – фиксированный параметр, неравенство разрешимо. При этом для всех Ω выполняется $\Omega^T\Omega \le \frac{1}{\zeta^2 I}$

Теорема (достаточное условие).

A зависит от параметра s и он принадлежит многограннику W.

$\dot{x} = A(s)x, \; S \in W, S -$ политоп

A – робасто устойчива, если $\exists\, X = X^T > 0{:}\, A^T(s)X + XA(s) < 0, s \in vert(W)$

Система LMI выполняется для всех вершин многогранника. (Если система разрешима, то существует робастная устойчивость).

$A(s) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} s_k A_k, \; \underline{s_k} \le s_k \le \overline{s_k}$ (для аффинной зависимости от параметра).

13 Линейная система с параметрической неопределенностью.Проверка робастной устойчивости с помощью LMI. Вычисление радиуса робастной устойчивости.

$\dot{x} = A(\Omega)x$ Параметрическая неопределенность: $A(\Omega) = A_0 + E\Omega_0 F, \; \Omega_0^T\Omega_0 \le \eta^2 I$

$\dot{x} = (A + E\Omega F)x, \; \Omega^T\Omega \le \eta^2 I$

Ω содержит неизв. параметры, которые принадлежат некоторому шару с радиусом η **Теорема** (дост.условие) $A + E\Omega F$ робастно устойчива, если $\exists X = X^T > 0$:

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XE & F^T \\ E^T X & -\zeta I & 0 \\ F & 0 & -\zeta I \end{bmatrix} < 0, \text{где } \zeta - \text{фиксированный параметр}, \Omega^T\Omega \le \frac{1}{\zeta^2} I$$

Чтобы найти радиус робастной устойчивости, нужно решить задачу нахождения minζ при ограничениях, заданных линейно матричным неравенством

На всякий случай (в билетах нет)

Аффинная неопределенность $A(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j A_j + A_0$

$\dot{x} = A(s)x, \quad s \epsilon W -$ многогранник

$$A(s) = \sum_{j=1}^{m} s_j A_j + A_0, \quad \underline{s}_k \leq s_k \leq \bar{s}_k$$

Теорема (дост. усл.)

А робастно устойчива, если $\exists X = X^{\mathrm{T}} > 0$: $A^{\mathrm{T}}(s)X + XA(s) < 0, s \,\epsilon\, vert(W)$ (система лмн выполняется для всех вершин многогранника)