Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Операционные системы исчисления и линейные динамические системы

(

(Методическая разработка по курсу «Теория управления». Часть 1.)

Нижний Новгород
1988

ББК В181+Б161.61
Операционные системы исчисления и линейные динамические системы. Часть 1. Методическая разработка по курсу «Теория управления» для студентов специальности «Прикладная математика и информатика.-/Сост. Ю.И.Неймарк,– Н.Новгород: ННГУ, 1988. с.

Методическая разработка рассматривает один из математических аппаратов современной теории автоматического управления – операционные системы исчисления, занимающие значительное место в прикладной математике и оказавшие существенное влияние на её методы и общее направление развития. Исследуются изоморфизмы операционных систем, порождаемых преобразованиями Фурье, Лапласа и -z преобразованием, а также применение этих операционных систем исчисления к исследованию линейных динамических систем.
Изложение предназначено для студентов 3 курса факультета ВМК специальности «Прикладная математика и информатика» и включает вопросы, входящие в курс «Теория управления».

Составители: Неймарк Ю.И. д.т.н., академик РАН, проф. каф. ТУи ДМ;

Рецензент: Бутенина Н.Н., канд.физ.-мат. наук, доц.каф. ЧиФА.

Нижегородский государственный университет
1988

I. ЧАСТЬ 1

Операционные исчисления, порождаемые преобразованиями Лапласа, Фурье и z преобразованием

ВВЕДЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.[♣] Ниже рассказывается об операционных системах исчисления, являющихся не только одним из важнейших математических аппаратов современной теории автоматического регулирования, но и основой инженерных методов расчета и проектирования автоматических управляющих систем. Их значение далеко не исчерпывается собственно теорией автоматического управления. Они занимают значительное место в прикладной математике и оказали существенное влияние на её методы и общее направление развития.

Открыты операционные исчисления были в конце 19 века. Тогда, да и в начале 20 века, казались они чем-то таинственным и носили название символических исчислений. Так, например, дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + x = 1 \tag{1}$$

В духе символического исчисления решались следующим образом. Дифференцирование заменялось операцией p и дифференциальное уравнение записывалось в виде $px + x = 1$. Далее из этого уравнения формально находят, что $x = \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1/p}{1+1/p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p^3} - \dfrac{1}{p^4} + \ldots$. Далее принималось, что если p - операция дифференцирования, то $1/p$ - обратная ей операция интегрирования и поэтому $x = \dfrac{1}{p}1 - \dfrac{1}{p^2}1 + \dfrac{1}{p^3}1 - \ldots = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} - \ldots$ что и на самом деле является решением.

Многим современникам такие способы решения представлялись сомнительными трюками, далекими от настоящей математики. Один из создателей операционного исчисления Хэвисайд, отбивая многочисленные нападки, в свое оправдание сказал: «Стану ли я отказываться от своего обеда только потому, что я не полностью понимаю процесс пищеварения». Это означало: я умею решать трудные задачи, которые до меня решать не умели; я не смогу объяснить, как находятся эти решения, но могу проверить их правильность в каждом отдельном случае, а то, что я не могу объяснить ни как они находятся, ни доказать их правильность в общем виде, не может служить основанием для того, чтобы ими не пользоваться.

Хэвисайд оказался прав, такое обоснование вскоре было найдено, и не одно, таких обоснований с совершенно разных сторон по крайней мере два: одно на основе интегральных преобразований и теории функций комплексного переменного, другое в духе символического исчисления. Однако самое интересное, что сейчас, спустя много лет, стало ясно, что в основе операционных исчислений лежит давно используемая идея изоморфизма закономерностей одна из общих идей всей науки, на которую опираются такие древние науки, как геометрия и алгебра и новые, как применения вычислительных машин и моделирование. Так часто бывает. Придумывается что-то новое. Сначала идея кажется неверной, спорной, затем

[♣] Автор выражает благодарность Людмиле Владимировне Коган, Николаю Яковлевичу Когану и Виктору Шлемовичу Берману за предоставленные записи его лекций для студентов факультета ВМК ННГУ.

необоснованной, а потом она оказывается «давно известной, очевидной и тривиальной». Но это после того, как она понята, осмыслена и становится общим достоянием.

В чем же состоит идея изоморфизма закономерностей? Изложим её в виде несколько более общем, чем это необходимо применительно только к операционным исчислениям.

1.1. Изоморфизм операционных систем

Представим себе, что имеется некоторое множество объектов – назовем его X. Это могут быть какие-то реальные объекты: детали, электрические поля или токи, химические вещества и т.д. Это могут быть и числа, допустим, все действительные или комплексные числа, или функции и т.д. Кроме того, имеется какое-то множество операций L, которые можно с этими объектами производить. Это могут быть вычислительные операции, если X - множество чисел. Это могут быть операции обработки и сборки, если X - некоторое множество деталей и заготовок. Это могут быть те преобразования, которые происходят с вещами, образующими множество X в силу естественных законов природы. В отношении множества операций L предполагается, что любое их применение к объектам множества X опять приводит к объектам, принадлежащим множеству X предполагается замкнутым по отношению ко всем операциям L. Такую систему (X, L) будем называть операционной системой.

Теперь представим себе, что помимо операционной системы (X, L) имеется еще некоторое другое множество объектов, которое назовем X^*. Скажем X - это числа, а X^* - детали. Пусть далее каждому элементу x множества X ставится в соответствие некоторый элемент x^* из множества X^* и пусть это соответствие взаимно однозначное. Это означает, что имеется некоторое однозначное отображение T множества X и X^*, имеющее однозначное обратное отображение T^{-1} множества X^* на X. Отображения T и T^{-1} вместе определяют взаимно однозначное соответствие элементов множеств X и X^*, наглядно изображенное на рис.1.

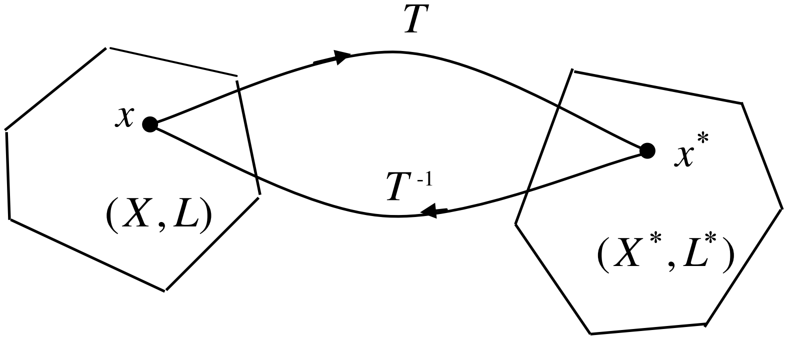

Рис.1

Множество L состоит из операций, которые можно совершать над элементами множества X. Это могут быть операции, совершаемые над отдельными элементами множества X или некоторыми совокупностями этих элементов. Рассмотрим сначала операции ℓ, совершаемые над отдельным элементом x. При этом элемент x переходит в какой-то другой элемент y. Оба элемента x и y принадлежат множеству X. Пусть в множестве X^* им отвечают соответственно элементы x^* и y^* в соответствии со схемой (рис.2).

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{T} & x^* \\ {\scriptstyle \ell}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*} \\ y & \xrightarrow{T} & y^* \end{array}$$

Рис.2

Согласно этой схеме, при совершении операции ℓ над элементом x, переводящей его в элемент y, в множестве X^* элементу x^* ставится в соответствие элемент y^*. Это соответствие можно рассматривать как некоторую операцию ℓ^* в множестве X^*, преобразующую элемент x^* в элемент y^*. От элемента x^* можно перейти к элементу y^* путем перехода от x^* к x, затем от x к y и, наконец, от y к y^*. Первый переход соответствует преобразованию T^{-1}, второй - операции ℓ и третий – преобразованию T, так что

$$\ell^* = T\ell T^{-1} \qquad (2)$$

Формула (2) каждой однозначной операции ℓ в множестве L ставит в соответствие однозначную операцию ℓ^*. Таким образом, взаимно однозначное отображение T элементов множества X на элементы множества X^* множество операций L^*, находящееся во взаимно однозначном с операциями множества L.

Эти утверждения относятся к операциям, совершаемым над отдельным элементом. В действительности же в операционной системе (X, L) наряду с такими операциями могут быть и операции, которые совершаются над несколькими элементами. Так в операциях сборки участвуют несколько деталей, в операции умножения участвуют два числа, или две функции и т.д.

Пусть в соответствии с этим над несколькими элементами $x_1, x_2, ..., x_n$ производится операция ℓ, переводящая их в элементы $y_1, y_2, ..., y_m$. При этом, вообще говоря, $m \neq n$. Элементам $x_1, x_2, ..., x_n$ операционной системы (X, L) отвечают элементы $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ множества X^* и соответственно элементам $y_1, y_2, ..., y_m$. Все это можно изобразить на рис.3.

$$\begin{tikzcd}
x_1, x_2, ..., x_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\ell"] & x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \arrow[d, "\ell^*"] \\
y_1, y_2, ..., y_m \arrow[r, "T"] & y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*
\end{tikzcd}$$

Рис.3

Из схемы рис.3 следует, что операции ℓ, переводящие $x_1,..., x_n$ в $y_1,..., y_m$, соответствует некоторая операция ℓ^*, преобразующая $x_1^*,..., x_n^*$ в $y_1^*,..., y_m^*$. Найдем эту операцию ℓ^*.

Пусть $\ell^*(x_1^*,..., x_n^*) = (y_1^*,..., y_m^*)$.

Далее

$$(y_1^*,..., y_m^*) = (Ty_1,..., Ty_m),$$
$$(y_1, y_2,..., y_m) = \ell(x_1, x_2,..., x_n),$$
$$(x_1,..., x_n) = (T^{-1}x_1^*,..., T^{-1}x_n^*).$$

Записывая последовательность операций T^{-1}, ℓ и T, найдем, что $T\ell T^{-1}(x_1^*,..., x_n^*) = (y_1^*,..., y_m^*)$. Но операция, которая переводит $x_1^*,..., x_n^*$ в $y_1^*,..., y_m^*$ - это и есть ℓ^*. Так что

$$\ell^* = T\ell T^{-1}. \qquad (2^*)$$

По виду это совпадает с тем, что имело место для операции над одним объектом.

Таким образом, каждой операции ℓ взаимно-однозначно соответствует операция ℓ^*, вне зависимости от того применяется ли она к одному объекту или ко многим.

Попробуем ответить на следующий вопрос.

Когда операции ℓ над элементами множества X отвечает такая же операция ℓ^* над элементами множества X^*, то есть, когда ℓ совпадает с ℓ^*?

Так, если (ℓ, x) и (ℓ^*, x^*) - вычислительные системы, то когда операция сложения ℓ соответствует операция сложения ℓ^*?

Обратимся к формуле (2). Если бы операции ℓ и T были коммутативны, т.е. можно было бы изменить порядок их применения, то тогда можно было бы записать, что $T\ell T^{-1} = \ell TT^{-1}$. Но $TT^{-1} = E$, где E - тождественное преобразование и поэтому $\ell^* = \ell$. Нетрудно видеть, что коммутативность операций ℓ и T - есть необходимое и достаточное условие одинаковости операции ℓ и ℓ^*. Достаточность установлена. Необходимость следует из того, что равенство $\ell = T\ell T^{-1}$ влечет $\ell T = T\ell$.

Каждой операции ℓ над любой совокупностью элементов X соответствует некая операция ℓ^*. Значит, если мы что-то делаем в системе (X, L), то это взаимно-однозначно или, как говорят, изоморфно отображается в том, что-то делается в системе (X^*, L^*).

В частности, когда в киностудии актеры играют, совершают какие-то действия, то это, вообще говоря, система, в которой есть объекты и есть операции – движения, режиссерские команды, произнесения слов. Потом все это отображается в том, что вы видите на экране. В данном случае, правда, на экране отображается не все, а только часть происходящего на съемке. В частности, лишние слова, которые при съемке произносятся в большом количестве, естественно, не отображаются на экране.

Пока мы нашли такое соответствие лишь для отдельных операций. Однако на самом деле мы обычно выполняем серии операций.

Что же отвечает серии операций?

Интуитивно ясно, что серии операций ℓ будет отвечать серия операций ℓ^*

$$\ell_k, \ell_{k-1}, \dots, \ell_1 \to \ell_k^*, \ell_{k-1}^*, \dots, \ell_1^*.$$

Это так и есть, но не всегда. Так будет при некотором предположении в отношении свойств операционной системы (X, L) и отображения T.

Допустим, что над каким-то элементом x мы совершаем две операции. Сначала делаем операцию ℓ_1, потом совершаем операцию ℓ_2 $\quad \ell_2(\ell_1 x) = \ell x$. Операции $\ell = \ell_2 \ell_1$ отвечает операция ℓ^* равная $\ell^* = T\ell T^{-1} = T(\ell_2 \ell_1)T^{-1}$.

Предположим, что полученное выражение можно переписать в виде $\ell^* = (T\ell_2)(\ell_1 T^{-1})$. Это предполагает ассоциативность операции ℓ и отображения T. Прибегнем к некоторой хитрости и введем тождественное преобразование, что всегда дозволено $\ell^* = (T\ell_2)(TT^{-1})(\ell_1 T^{-1})$. Далее опять, в предположении ассоциативности операций, перепишем это выражение в виде $\ell^* = (T\ell_2 T^{-1})(T\ell_1 T^{-1})$. Теперь непосредственно находим, что $\ell^* = \ell_2^* \ell_1^*$, т.е. произведению $\ell_2 \ell_1$ операций ℓ_1 и ℓ_2 в операционной системе (X, L) соответствует операция $\ell_2^* \ell_1^*$ в операционной системе (X^*, L^*) - $\ell_2 \ell_1 \to \ell_2^* \ell_1^*$. Тем самым при сделанных предположениях имеется взаимно-однозначное, изоморфное соответствие не только между отдельными операциями, но и последовательностями операций.

Соответствие между элементами и операциями операционных систем (X, L) и (X^*, L^*) названо изоморфным, так как для него выполняется схема

$$\begin{array}{ccc} x_1, x_2, \dots, x_n & \to & x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \\ \downarrow \ell & & \ell^* \downarrow \\ y_1, y_2, \dots, y_n & \to & y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^* \end{array},$$

которая означает, что если операция ℓ преобразует элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ в элементы $y_1, y_2, ..., y_m$, то соответствующая операции ℓ операция ℓ^* преобразует элементы $\overset{*}{x_1}, \overset{*}{x_2}, ..., \overset{*}{x_n}$ в элементы $\overset{*}{y_1}, \overset{*}{y_2}, ..., \overset{*}{y_m}$. Из изоморфного соответствия операционных систем следует, что выполнение операции ℓ в одной системе может быть заменено выполнением операции ℓ^* в другой, согласно соотношениям $\ell^* = T\ell T^{-1}$ и $\ell = T^{-1}\ell^* T$.

Давайте теперь посмотрим, есть в этом что-то новое или это только формализация того, к чему мы уже давным-давно привыкли, но не очень себе в этом отдаем отчет.

Скажем, в геометрии – есть фигуры, с ними что-то делается; есть реальные объекты, Вы их изображаете линиями, точками, потом появляются числа и с их помощью выполняются вычисления. При этом Вы находите результат и говорите: «То, что я вычислил, и есть на самом деле».

Если вдуматься, то в этом случае Вы воспользовались идеей изоморфизма.

В реальном мире происходят какие-то операции, и Вы хотите узнать их результат, выполняя соответствующие действия в изоморфной геометрической или алгебраической системе.

Более того, вычислительные машины или даже наше логическое мышление – они тоже есть некие изоморфизмы закономерностей природы.

В основе всякого моделирования тоже лежит некоторый изоморфизм.

Давайте попробуем понять, зачем эта идея нужна, почему мы прибегаем к этой идее. В чем смысл использования изоморфизма?

Возьмем вычислительную машину. Мы хотим решить дифференциальное уравнение – это достаточно сложно. Тогда мы его переводим в изоморфную систему, а в этой изоморфной системе машина, манипулируя с токами, зарядами и импульсами, быстро находит «решение» дифференциального уравнения.

Какие операции мы выполняем просто и какие сложно? Сложение, умножение – хорошие операции, они выполняются легко, а вот извлечение корня квадратного потруднее. Извлечение кубического корня еще труднее. Ну, а пятой, шестой … . Но еще хуже дифференцирование, интегрирование. Грубо говоря, в вычислительной системе есть операции, которые мы умеем легко выполнять, а есть такие, которые выполнять трудно, а иногда даже невозможно. Вот тогда-то и прибегаем к идее изоморфизма.

Давайте придумаем такой изоморфизм, чтобы те операции, которые в нашей вычислительной системе трудны, превратились в изоморфные операции, но легкие.

Скажем, дифференцирование заменим умножением, решение дифференциальных уравнений заменим какими-то алгебраическими операциями и т.д.

Идея операционных исчислений состоит в том, чтобы подобрать такой изоморфизм, который недоступные, тяжелые для нас операции превратил бы в простые, легко выполнимые.

Как, скажем, древние греки умножали?

Нужно было много лет учиться у крупнейших философов, чтобы научиться умножать трехзначные числа. Почему? Потому что в то время, по-видимому, недостаточно владели идеей изоморфизма, владея ею, они бы поняли, что трудности их порождены тем, что они не подобрали такого множества X, на котором эти операции легко бы выполнялись, и пользовались своими римскими цифрами, с которыми умножение выполнять очень трудно.

Наверное, когда арабы придумали десятичную систему, то они не очень понимали, что они реализуют изоморфизм, в котором операция умножения делается легко выполнимой, что низводит величайших ученых античности в разряд обыкновенных счетоводов.

По-видимому, история познания в значительной мере состоит в том, что мы пытаемся овладеть наиболее общими идеями. И когда мы этого достигаем, создается такая ситуация, что будто бы и учиться нечему.

Какие есть еще общие идеи, которыми мы оперируем, когда хотим научиться выполнять что-то сложнее? По-видимому, самая важная вещь - это идея изоморфизма. Прогресс науки неразрывно связан с прогрессом в изобретении новых изоморфизмов. Но вот, по-видимому, наряду с этой идеей, есть другая важная общая идея. Это идея погружения. Представим, что некую операцию в системе (X, L) трудно выполнить. Оказывается, что в таком случае, во что полезно сделать. Полезно погрузить исходную систему (X, L) в некоторую более общую $(\tilde{X}, \tilde{L})$

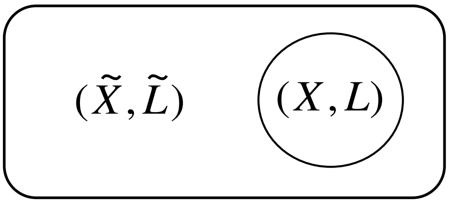

Рис.4

Что значит погрузить? Это значит, что элементы X - только часть элементов $\tilde{X}$, а операции L - только часть операций $\tilde{L}$.

Удивительная вещь. Иногда надо сделать такое расширение понятий, мыслить шире. И то, что раньше было недоступно, становится выполнимым. Примеров много.

Скажем, была очень простая операция, которую не умели выполнять – это решение квадратных уравнений. Иногда решается, иногда не решается. Потом кто-то догадался нужно расширить X. X - раньше были только действительные числа, а нужно расширить X до множества комплексных чисел $\tilde{X}$, и когда это расширение сделали, то все квадратные уравнения стали решаться. Так произошло великое расширение операционной системы чисел от действительных до комплексных и после этого возможности выполнения операций необычайно возросли.

В наше время тоже произошли такие расширения. Сначала были просто хорошие функции, потом ввели функции, интегрируемые по Риману, по Лебегу, измеримые функции. Затем появилась теория обобщенных функций. Теория обобщенных функций была создана совсем недавно, четыре десятилетия тому назад. Появились векторное и тензорное исчисления.

Расширения X и расширения L использовались давно. Уже давно известно, что для того, чтобы что-то сделать, полезно взглянуть на это с общей точки зрения. Но сформулировано это было сравнительно недавно. Сформулировал это Беллман, как некий принцип расширения или, как было названо им, принцип инвариантного погружения.

1.2. Преобразование Фурье, Лапласа и z-преобразование.

Обратимся к конкретным, частным изоморфизмам, которые позволяют сложные операции дифференцирования, интегрирования, в частности, решения дифференциальных уравнений и некоторые другие сложные операции превратить в простые операции.

Таких преобразований в настоящее время уже довольно много. Остановимся на трех, которые получили наиболее широкое распространение не только в науке, но и в инженерной практике. Это преобразования Фурье, Лапласа, и так называемое, z - преобразование. Вычислительные машины породили новые операционные машинные и человеко-машинные системы, но о них речь не пойдет. В описываемых дальше операционных исчислениях X - это множества функций. Отображение T - это преобразование Фурье, Лапласа или z - преобразования. Рассмотрим последовательно каждое из них. Начнем с преобразования Фурье.

Преобразование Фурье. Если мы имеем какую-то функцию действительного переменного $x(t)$, то она преобразуется в функцию $x^*(\omega)$, которая находится следующим образом: $x(t)\xrightarrow{T_\Phi}x^*(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt.$ Операция эта применима не к любой функции $x(t)$, а только к такой, у которой существует интеграл в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Он будет существовать (это достаточное условие), если $|x(t)|$ интегрируем, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<+\infty$. Если это условие выполняется, то отображение T_Φ существует. Это условие определяет то множество X, для которого отображение Фурье заведомо можно установить.

Что такое $x^*(\omega)$? нетрудно видеть, что это функция не обязательно действительная. ω - действительное число, а функция $x^*(\omega)$, вообще говоря, комплексная, т.е. $x^*(\omega)$ - комплексные функции действительного переменного ω, которое меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Для того, чтобы был изоморфизм, недостаточно только однозначности отображения T_Φ, необходимо, чтобы существовало однозначное обратное преобразование T_Φ^{-1}, т.е. чтобы отображение T_Φ было взаимно-однозначным.

Обратное преобразование Фурье, как Вам известно, из «математического анализа», существует и может быть записано в виде $x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega$.

Важное свойство преобразования Фурье – его линейность. Если применить T_Φ к сумме, то $T_\Phi(x+y)=T_\Phi x+T_\Phi y$, т.е. операции сложения в множестве X соответствует операция сложения в множестве X^*. Операция сложения сохранилась. По существу, это есть свойство коммутируемости преобразования

Фурье и сложения. Кроме того, свойство линейности означает, что $T_Ф \lambda x = \lambda T_Ф x$, где λ - число. И это соотношение можно трактовать как коммутативность отображения $T_Ф$ и умножения на λ.

<u>Преобразование Лапласа -</u> $T_Л$. Преобразование Лапласа всякую функцию действительного переменного $x(t)$ преобразует в комплексную функцию комплексного переменного $x(t) \xrightarrow{T_Л} x^*(p) = \int\limits_0^\infty x(t) e^{-pt} dt$, где p - комплексное число. Для того, чтобы это выражение имело смысл, нужно, чтобы интеграл сходился. Этот интеграл будет сходиться в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma$, если для некоторого M $|x(t)| < Me^{\sigma t}$, то для всех $t \geq 0$.

Таким образом, определено множество функций, к которым заведомо можно применять преобразования Лапласа.

Если приведенное условие выполняется, то для $\operatorname{Re} p \geq \sigma' > \sigma$ интеграл, определяющий отображение $T_Л$, сходится, поскольку

$\int\limits_0^\infty \left| x(t) e^{-pt} \right| dt \leq M \int\limits_0^\infty e^{\sigma t} e^{-\sigma' t} dt = \dfrac{M}{\sigma' - \sigma}$. Ясно, что при $\operatorname{Re} p \geq \sigma' > \sigma$ эта сходимость равномерная.

Подынтегральная функция – это аналитическая функция комплексного переменного p. Следовательно, в результате интегрирования по параметру t в силу равномерной сходимости получаем тоже аналитическую в плоскости $\operatorname{Re} p > \sigma$ функцию p. Таким образом, функция $x^*(p)$ - аналитическая функция.

Итак, множеству X действительных функций $x(t)$ преобразование Лапласа $T_Л$ ставит в соответствие множество X^* аналитических функций $x^*(p)$ комплексного переменного p.

Что можно сказать о преобразовании Лапласа? Оно однозначно и линейно. Нетрудно видеть, что взаимной однозначности преобразование Лапласа не обеспечивает. Вызвано это тем, что интеграл берется от 0 до ∞ и совершенно не зависит от значений $x(t)$ при $t < 0$. Две разные функции $x(t)$, отличающиеся при $t < 0$, будут иметь одно и то же преобразование Лапласа.

Есть довольно простой способ, иногда приводящий к цели, добиться взаимной однозначности. Он состоит в том, что если на всём множестве нет взаимной однозначности – то может быть она есть на части этого множества.

Легко понять, как, используя эту общую идею, в случае преобразования Лапласа добиться взаимной однозначности. Возьмем не все функции $x(t)$, а только те, которые при $t < 0$ равны нулю. Следовательно, это будут все функции $x(t)$, для которых $x(t) = 0$ при $t < 0$ и $|x(t)| < Me^{\sigma t}$ при $t \geq 0$, для некоторых σ и M, своих для каждой функции $x(t)$.

Таким образом, выбранных функций преобразование Лапласа будет взаимно однозначным. Обратное преобразование Лапласа записывается следующим образом $x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} x^*(p) e^{pt} dp$. Здесь интеграл берется по комплексному переменному p по некоторому контуру. Этим контуром является прямая $\mathrm{Re}\, p = \sigma' > \sigma$.

Z- преобразование. Перейдем к z - преобразованию. Согласно z-преобразованию , последовательности $x_0, x_1, x_2, ...$ ставится в соответствие функция комплексного переменного $x^*(z)$, определяемая степенным рядом $x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + ...$. z - преобразование T_z полубесконечной последовательности ставит в соответствие функцию $x^*(z)$ комплексного переменного z. Для того, чтобы это имело место, необходимо, чтобы ряд сходился к некоторой области, т.е., чтобы существовал радиус сходимости R, не равный нулю, т.е. чтобы $R = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|x_n|}} > 0$. Это следует из формулы Коши Адамара. Тем самым z - преобразование определено не для всякой числовой последовательности, а только для тех, которые удовлетворяют критерию Коши. Это условие заведомо выполнено, если при некотором $q > 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| q^n = 0$. Функция $x^*(z)$ внутри круга сходимости $|z| < R$ аналитическая. Обратное преобразование T_z^{-1} определяет последовательность $x_1, x_2, ...$ по функции $x^*(z)$. Ясно, что $x_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n x^*(z)}{dz^n} \Big|_{z=0}$. Есть и другой способ обращения z - преобразования, основанный на теореме о вычетах. Возьмем интеграл по любой замкнутой кривой Γ, которая лежала бы внутри круга сходимости и охватывала один раз точку $z = 0$ $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{x^*(z)}{z^{n+1}} dz$. Этот интеграл равен x_n.

Действительно, если поделить степенной ряд $x^*(z)$ на z^{n+1}, то получится ряд Лорена, содержащий как отрицательные степени, так и положительные. Интеграл от z^s с $s \neq -1$ по замкнутому контуру равен нулю, а при $s = -1$ он равен x_n. Таким образом, z - преобразование взаимно-однозначно, линейно и ставит в соответствие последовательности чисел аналитическую функцию комплексного переменного z.

1.3. Связи между преобразованиями Фурье, Лапласа и z - преобразованием.

Перейдем к рассмотрению связей между преобразованиями Фурье - $T_Ф$, Лапласа - $T_Л$ и z преобразованием - T_Z. Связь между $T_Ф$ и $T_Л$ настолько тесная, что с точностью до замены переменной можно сказать, что это одно и то же. Выпишем преобразования $T_Ф$ и $T_Л$

$$T_Ф x(t) = x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$T_Л x(t) = x^*(p) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

Из этих формул видно, что $T_Л$ переходит $T_Ф$ при замене p на $i\omega$. Нужно только иметь в виду, что преобразование $T_Л$ и $T_Ф$ определены на разных множествах функций $X_Л$ и $X_Ф$ и поэтому указанная связь между $T_Л$ и $T_Ф$ имеет место только на их пересечении (рис.5), т.е. на функциях равных нулю при $t < 0$, с одно стороны, и для которых применимо преобразование Фурье, с другой. (Из применимости преобразования Фурье следует применимость преобразования Лапласа, но обратное место не имеет).

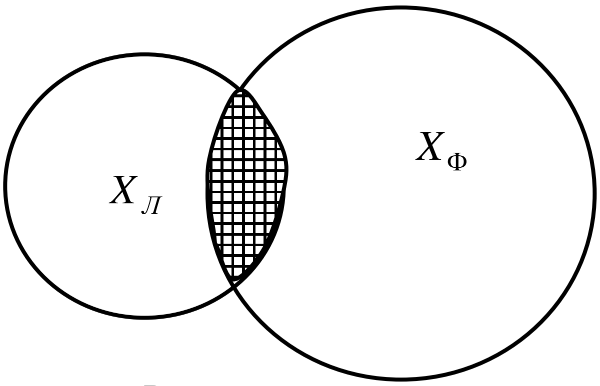

Рис.5

С z-преобразованием несколько сложнее. Попробуем представить z - преобразование в интегральном виде. Представим последовательность $x_0, x_1, x_2, ...$ как некую функцию $x(n)$ от целочисленного переменного n. Что такое функция целочисленного переменного? Такая функция получается тогда, когда каждому значению n ставится в соответствие некое значение $x(n)$, и получается последовательность $x(0) = x_0, x(1) = x_1, ...$, которую можно изобразить в виде частокола (рис.6).

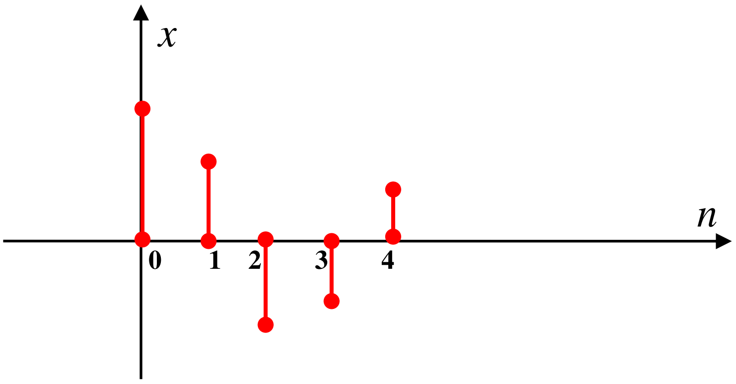

Рис.6

Эту функцию целочисленного переменного можно рассмотреть и как ступенчатую функцию с графиком вида (рис.7).

Эта ступенчатая функция $x(t)$ определяется тем, что ее значение для t от n до $n+1$ постоянно равно $x(n)$. Обозначим её $x([t])$. Возьмем преобразование Лапласа от этой ступенчатой функции

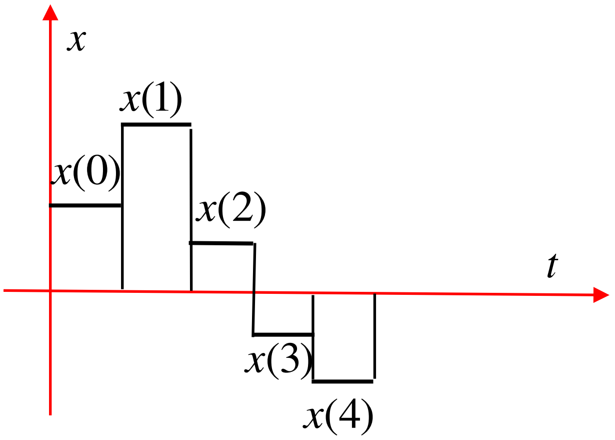

Рис.7

$$T_Л x([t]) = \int_0^\infty x([t]) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} x(n) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^\infty x_n \int_n^{n+1} e^{-pt} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty x_n \left(-\frac{e^{pt}}{p} \right) \Bigg|_{t=n}^{t=n+1} = \sum_{n=0}^\infty x_n e^{-np} \frac{1-e^{-p}}{p} = \frac{1-e^{-p}}{p} \sum_{n=0}^\infty x_n e^{-pn}.$$

Мы получили преобразование Лапласа от ступенчатой функции $x([t])$. Нетрудно видеть, что если взять $z = e^{-p}$, то полученный результат с точностью до множителя $\frac{1-e^{-p}}{p}$ будет совпадать с z- преобразованием от последовательности $x_0, x_1, x_2, ...$, т.е. $T_z(x_0, x_1, x_2, ...) = \frac{p}{1-e^{-p}} T_Л x([t])\Big|_{e^{-p}=z}$. Тем самым устанавливается непосредственная связь между преобразованием Лапласа и z-преобразованием.

Подведем итог. Связь между $T_Л$ и $T_Ф$ определяется заменой p на $i\,\omega$, тем самым преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, потому что комплексное переменное p заменяется чисто мнимым $i\omega$. Но, правда, делается еще нечто неприятное – в преобразовании Лапласа интеграл берется от нуля до ∞, поэтому при переходе получается не общее преобразование Фурье, а преобразование Фурье для функций, равных нулю при $t < 0$. Таким образом, частный случай преобразования Фурье для функций, равных нулю при $t < 0$, получается из преобразования Лапласа заменой комплексного переменного p на чисто мнимое $i\omega$. Кроме того, следует иметь в виду, что преобразование Фурье применимо к менее широкому классу функций, чем преобразование Лапласа!

Относительно связи $T_Л$ и T_Z. Формула связи у нас есть и единственный её недостаток – наличие множителя $\frac{p}{1-e^{-p}}$. Но оказывается, что можно придумать некую модификацию функции, интерпретирующей последовательность, при которой множителя не будет.

Установленная связь между $T_Л$ и T_Z получена путем подмены функции целочисленного аргумента – ступенчатой функцией. Вообще говоря, можно взять не только ступенчатую функцию, но и функцию другого вида.

Идея упрощения формулы связи $T_Л$ и T_Z состоит в том, чтобы придумать, какую нужно поставить в соответствие исходной последовательности функцию, чтобы преобразование Лапласа от нее было без множителя. Исходная ступенчатая функция была взята с шириной ступеней равной 1. Возьмем меньшую ширину ступеней и заменим их полосками ширины ε. Раньше мы имели импульсы ширины 1, а теперь ширины ε. Величины площадей импульсов оставим без изменения. Это соответствует замене высоты импульса x_n на $\frac{x_n}{\varepsilon}$. Обозначим эту функцию через $x_\varepsilon(t)$ и найдем преобразование Лапласа $T_Л$ от $x_\varepsilon(t)$

$$T_Л x_\varepsilon(t) = \int\limits_0^\infty x_\varepsilon(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_n^{n+\varepsilon} \frac{x_n}{\varepsilon} e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Bigg|_n^{n+\varepsilon} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-np} \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} = \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-\varepsilon p} = \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \ .$$

Все эти преобразования делались ради избавления от множителя $\dfrac{p}{1-e^{-p}}$, но пока мы ничего не достигли. Раньше мы имели тот же множитель с $\varepsilon = 1$. Казалось бы мы ничего не сделали, но нетрудно видеть, что множитель обращается в 1, если $\varepsilon \to 0$. Действительно, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} = 1$. Таким образом, мы избавились от множителя и можем теперь записать $T_z(x_0, x_1, x_2 ...) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_Л x_\varepsilon(t)$. Было бы приятно несколько изменить положение предела в формуле, поменяв его местами с преобразованием $T_Л$. Посмотрим, что происходит с $x_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Функция $x_\varepsilon(t)$ состоит из импульсов вида, изображенного на рис.8.

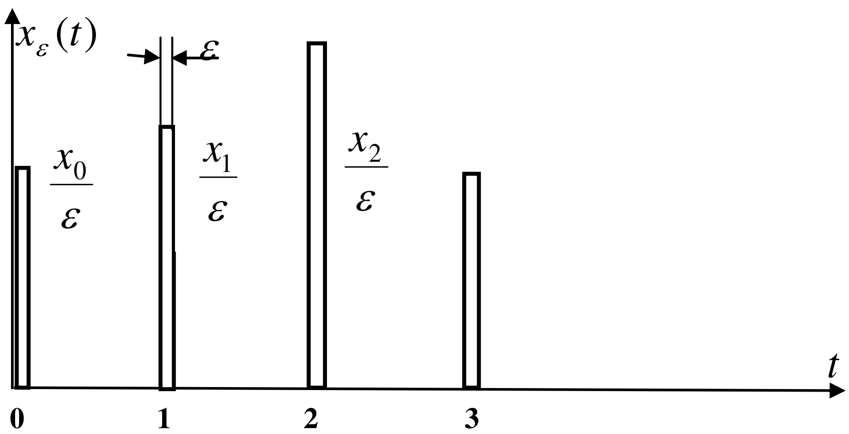

Рис.8

Ясно, что если $\varepsilon \to 0$, то $\dfrac{x_n}{\varepsilon} \to \infty$, а везде вне импульса будет ноль. Это означает, что предельная функция всюду равна нулю, кроме целочисленных значений, в которой она равна бесконечности. Таким образом, эта предельная функция всюду равна бесконечности. Таким образом, эта предельная функция, что-то вроде даже не функция. Она всюду равна нулю, кроме целочисленных точек, где она равна бесконечности. Но если она равна бесконечности, то теряется её связь с исходными значениями x_n. Для того, чтобы как-то восстановить эту связь, обратим внимание на тот факт, что площадь импульса при $\varepsilon \to 0$ остается неизменной, равной $\frac{x_n}{\varepsilon}\varepsilon = x_n$. Это значит, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_n^{n+\varepsilon} x_\varepsilon(t)dt = x_n$. Т.е. значения предельной функции все равны бесконечности, но интегралы от них – различные. Интеграл «помнит», что была за функция и дает её значение x_n.

1.4. Обобщенные функции.

Таким образом, мы приходим к простой связи между z-преобразованием и преобразованием Лапласа. Правда, для этого мы должны были выдумать такие странные функции, которые всюду равны нулю, кроме отдельных точек, где они равны бесконечности, причем интегралы от них в окрестностях этих точек равны исходным значениям x_n. И если эти странные функции взять на вооружение, не пугаясь их странности, то обнаружим связь между $T_Л$ и T_z вида $T_Z(x_0, x_1, ...) = T_Л \lim\limits_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$. Но все же предельная функция несколько необычна и поэтому названа обобщенной функцией. Обобщенную функцию, отвечающую одному импульсу, ввел физик-теоретик Дирак – один из создателей современной квантовой механики. Использовалась она, когда нужно было описать такой физический объект, как точечный заряд (частицу, не имеющую размера, но имеющую массу и заряд). Сейчас ею широко пользуются не только в физике, но и механике, теории управления и математике. δ - функция Дирака, это простейшая обобщенная функция. Она определяется как функция $\delta_1(t)$, равная нулю при $t \neq 0$ и равная ∞ при $t = 0$, и кроме того $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)dt = 1$. Следующая по сложности обобщенная функция – это функция, которая «получается» предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ из функции вида, изображенного на рис.9. Но вот, что интересно. С точки зрения наших действительных функций, обобщенные функции – это какие-то «уроды». Но давайте посмотрим, что представляют собою их преобразования Лапласа.

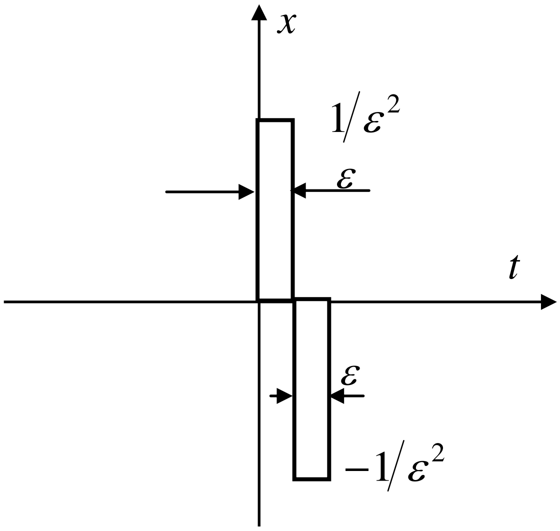

Рис.9

Ведь это преобразование все объекты переводит в какие-то новые объекты. Оказывается, что совершенно «неприемлемые», «плохие» функции, если перейти к преобразованию Лапласа, переводятся в самые обыкновенные «хорошие» функции. Посмотрим в какие. Описанные выше обобщенные функции обозначим через $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$, Введем еще функцию $\delta_0(t)$, определив её следующим образом $\delta_0(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0\\ 1 & \text{при } t\geq 0\end{cases}$. График её имеет вид ступеньки (рис.10).

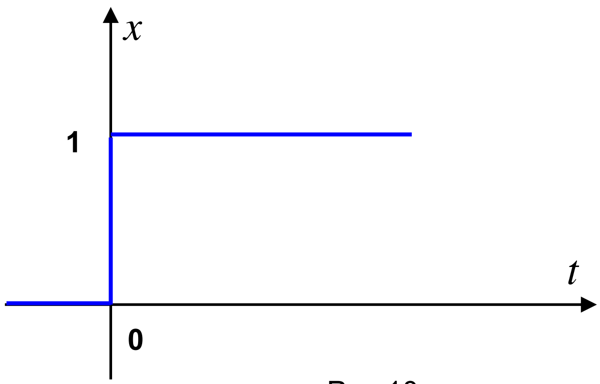

Рис.10

Посмотрим, во что преобразование Лапласа переводит $\delta_0(t)$ и $\delta_1(t)$

$$T_Л \delta_0(t) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

$$T_Л \delta_1(t) = \int_0^\infty \delta_1 \cdot e^{-pt} dt = 1.$$

Второй интеграл кажется трудно сосчитать, но на самом деле это не так. $\delta_1(t)$ всюду равна нулю, кроме нуля, поэтому этот интеграл нужно взять вблизи нуля, где $e^{-pt} \approx 1$, поэтому по теореме о среднем $\int_0^\infty \delta_1(t) e^{-pt} dt =$ $= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon \delta_1(t) e^{-pt} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-p\xi} \int_0^\varepsilon \delta_1(t) dt = 1.$ Итак, функции $\delta_0(t)$ соответствует функция $x^*(p) = \frac{1}{p}$, а «ненормальной» функции $\delta_1(t)$ соответствует функция $x^*(p) = 1$, т.е. самая обычная единица.

Аналогично можно сосчитать, что $T_Л \delta_2(t) = p$. Как оперировать с функциями $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$, мы не знаем. Но всякие действия с функциями $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ можно трансформировать с помощью изоморфизма $T_Л$ в действия с функциями 1 и p.

Сейчас существует две теории обобщенных функций. Теория Минусинского, опирающаяся на изоморфизм, даваемый преобразованием Лапласа, и теория обобщенных функций, основанная на современном функциональном анализе.

Возьмем теперь обобщенную функцию вида $x(t) = \sum_{n=0}^\infty x_n \delta_1(t-n)$, представляющую собою последовательность импульсов $x_n \delta_1(t-n)$, где $(n = 0,1,2,\ldots)$. График такой функции условно представлен на рис.8.

Преобразование Лапласа о последовательности импульсов равно $T_Л x(t) = \sum_{n=0}^\infty x_n e^{-np}$ и после замены переменного $e^{-p} = z$ совпадает с z - преобразованием от последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, так как $\sum_{n=0}^\infty x_n e^{-np} = \sum_{n=0}^\infty x_n z^n = T_z(x_0, x_1, \ldots)$. Мы установили очень простую связь между z = преобразованием и преобразованием Лапласа, при этом пришлось прибегнуть к обобщенным функциям.

Мне хотелось бы помочь Вам не чувствовать себя неуютно в общении с обобщенными функциями. Обобщенные функции введены для описания объектов, таких как точечный заряд, мгновенный импульс, материальная точка и т.д. С ними следует оперировать по некоторым правилам и испытываемые при этом затруднения имеют не больше оснований, чем трудности умножения чисел в римской записи. Они исчезают с переходом в другую операционную систему, например, в систему, порождаемую преобразованием Лапласа точно так же, как трудности умножения чисел уменьшаются с переходом к десятичной системе исчисления.

Я не знаю, те ли я слова произнес, которые облегчат Вам принятие обобщенных функций, но многие трудности вызваны просто тем, что нужно к ним привыкнуть, так же как Вы привыкли со школьной скамьи оперировать сначала с целыми числами, потом дробными и комплексными.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.И.Неймарк. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Наука. М., 1972.
2. Ю. И. Неймарк. Динамические системы и управляемые процессы. М.,Наука, 1978.
3. Г. Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Наука. М., 1995.
4. А.А.Красовский, Г.А.Поспелов. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, М., 1962.
5. Н.Я.Коган. Моделирование на аналоговых и вычислительных машинах. Методическая разработка. Горький. 1980.