

3. В полуавтоматическом режиме с помощью бегунков подберите значения параметров для стабилизации вначале только верхнего положения, затем верхнего положения и точки опоры. Сделайте экспериментальные выводы о влиянии значений коэффициентов, отвечающих за угловую (координатную) и скоростную коррекции, на процесс стабилизации, в том числе на скорость сходимости и на характер процесса (колебательный или апериодический).

### **5.3. Стабилизация курса лодки**

#### **5.3.1. Общая модель движения лодки без управления и с управлением**

Рассмотрим процесс движения лодки (аналогично движутся корабль, самолет). Пусть лодка движется с некоторой постоянной скоростью, так что сила сопротивления ее движению компенсируется силой тяги весел или гребного винта. Если набегающий на лодку поток направлен точно вдоль ее корпуса, то никакого момента сил не возникает. Момент сил (не уменьшая общности, будем рассматривать моменты сил относительно центра масс лодки) возникает только при отклонении набегающего потока воды от продольной оси лодки. Пусть  $\varphi$  – угол отклонения лодки от заданного курса (рис. 5.7). Тогда в грубом приближении угол расхождения скорости движения центра масс лодки и направления ее продольной оси определяется скоростью ее вращения  $\dot{\varphi}$  и вызывает момент сил вязкого трения, который при не очень больших по модулю значениях  $\dot{\varphi}$  равен  $-h\dot{\varphi}$ . При этом в зависимости от конструкции лодки коэффициент  $h$  может быть как положительным (обычное вязкое трение, препятствующее вращению лодки), так и отрицательным («отрицательное трение», которое разгоняет процесс вращения). Обычное трение наблюдается у приземистых удлиненных лодок, которые называют **шлюпками** (другое название – **городецкая лодка**, от названия города Городец Нижегородской области; форма лодки связана с особенностями поведения Волги в этом месте: вода относительно спокойная, высокие волны отсутствуют, поэтому в районе Го-

90

рода рыбаки использовали лодки именно такой конструкции). Отрицательное же трение характерно для лодок с возвышенным носом и, как следствие, смещенным центром масс. Такие лодки называют **великовражками** (от названия села Великий Враг в Нижегородской области; в этом месте на Волге нередко возникали волны большой высоты, и поэтому рыбаки здесь использовали лодки соответствующей конструкции).

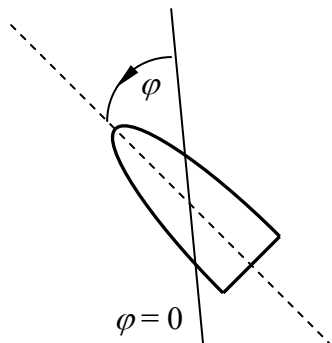


Рис. 5.7

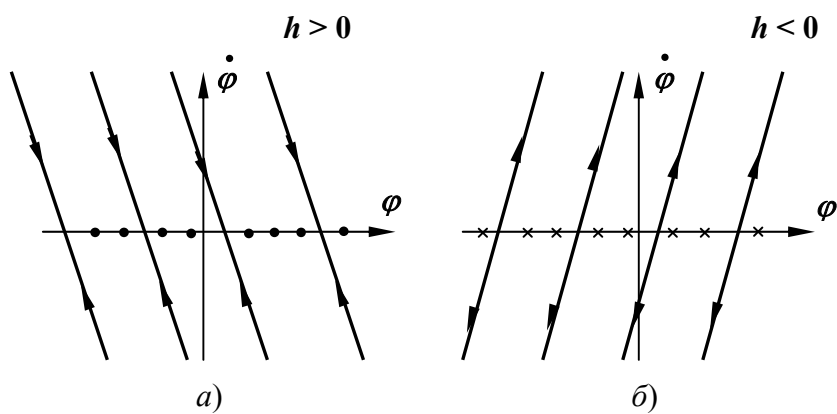


Рис. 5.8

Пусть  $J$  – момент инерции лодки относительно ее центра масс (точнее – относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр масс). Тогда уравнение движения лодки имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -h\dot{\varphi}. \quad (5.13)$$

Фазовым пространством динамической системы (5.13) является двумерный цилиндр  $\{(\varphi, \dot{\varphi}) : -\pi < \varphi \leq \pi, -\infty < \dot{\varphi} < +\infty\}$ . Но при рисовании фазовых портретов мы будем рассматривать развертку этого цилиндра на плоскость.

Интегрируя (5.13) по времени, находим уравнение фазовых траекторий (точнее – интегральных кривых на фазовой плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ ):

$$J\dot{\varphi} + h\varphi = C, \quad (5.14)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Учитывая, что с течением времени величина  $\varphi$  растет при  $\dot{\varphi} > 0$  и убывает при  $\dot{\varphi} < 0$ , из (5.14) получаем фазовые портреты шлюпки (рис. 5.8а) и великовражки (рис. 5.8б). У каждой из этих лодок имеется континуум состояний равновесия – прямая  $\dot{\varphi} = 0$ . Для шлюпки каждое из этих равновесий будет устойчивым, но не асимптотически (так как по определению локальной асимптотической устойчивости траектории должны приходить в данное состояние равновесия из некоторой его круговой окрестности, но согласно рис. 5.8а ни одно из равновесий не обладает этим свойством). Таким образом, шлюпка обязательно придет на *какой-то* курс, зависящий от начальных условий. Великовражка же не придет ни на какой курс: все состояния равновесия неустойчивы и лодка будет ускоренно раскручиваться. На рис. 5.8 устойчивые состояния равновесия отмечены черными закрашенными кружками, а неустойчивые – крестиками.

Мы же хотим, чтобы лодка с течением времени вышла на заданный курс ( $\varphi = 0$ ) и в дальнейшем оставалась там. Для этого лодкой необходимо управлять. Управление организуем с помощью руля (рис. 5.9). Пусть  $\psi$  – угол отклонения руля от продольной оси лодки. Тогда за счет набегающего на руль потока появляется дополнительный вращающий момент от руля, кото-

рый является функцией от  $\psi$  (будем обозначать эту функцию через  $M(\psi)$ ). Тогда уравнение движения лодки, снабженной рулем, примет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -h\dot{\varphi} + M(\psi). \quad (5.15)$$

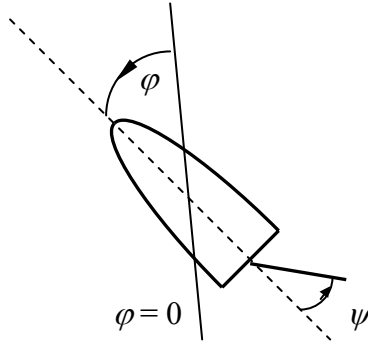


Рис. 5.9

Если принять, что и лодка, и руль имеют симметричную форму относительно своих продольных осей, то можно считать, что функция  $M(\psi)$  нечетная и возрастает по модулю при увеличении модуля  $\psi$ . При этом из физики процесса видно, что момент, сообщаемый лодке рулем, по направлению противоположен углу поворота руля.

Простейшей аппроксимацией функции  $M(\psi)$ , обладающей указанными свойствами, является линейная функция:  $M(\psi) = -k\psi$ , где  $k = \text{const} > 0$ . Такая аппроксимация, конечно, приемлема только при не очень больших  $\psi$ . Подставим эту функцию в (5.15) и получим следующее уравнение движения лодки, снабженной рулем:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) предполагает  $\dot{\varphi}$  и  $\psi$  малыми, а  $\varphi$  может быть любым.

### 5.3.2. Линейная стратегия управления

Чтобы сделать движение лодки по заданному курсу  $\varphi = 0$  асимптотически устойчивым, выберем стратегию управления в виде линейной функции от состояния (аналогично перевернутому маятнику):

$$\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}. \quad (5.17)$$

Подставляя (5.17) в (5.16), получаем уравнение движения лодки, снабженной линейным рулем (или **линейным авторулевым**, если руль работает автоматически):

$$J\ddot{\varphi} + (h + kb)\dot{\varphi} + ka\varphi = 0. \quad (5.18)$$

Уравнение (5.18) является уравнением линейного осциллятора и в отличие от (5.13) имеет (при  $a \neq 0$ ) *единственное* состояние равновесия ( $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ ), соответствующее движению лодки по заданному курсу. Это равновесие будет асимптотически устойчивым, если все коэффициенты его характеристического уравнения

$$J\lambda^2 + (h + kb)\lambda + ka = 0 \quad (5.19)$$

будут иметь одинаковые знаки и отличаться от нуля. Так как по физическому смыслу  $J > 0$ , это означает, что все коэффициенты уравнения (5.19) должны быть положительными, т.е. коэффициенты  $a$  и  $b$  должны удовлетворять условиям:

$$a > 0, \quad b > -\frac{h}{k}. \quad (5.20)$$

Смысл стратегии (5.17) при условии (5.20) такой же, как и при жонглировании перевернутым маятником, но если ранее требовалось достаточно большое значение параметра  $a$  (угловая коррекция), то теперь при  $h < 0$  это требование накладывается на параметр  $b$  (скоростная коррекция). Из этого следует, что *иллюшкой* управлять сравнительно *просто* (можно даже обойтись без скоростной коррекции, положив  $b = 0$ ), но *великовражской* управлять гораздо сложнее, так как требуется достаточно большая и правильная скоростная коррекция.

### 5.3.3. Теоретическое задание

Напишите условия, которым должны удовлетворять параметры управления  $a$  и  $b$ , чтобы процесс прихода лодки к асимптотически устойчивому заданному курсу был апериодическим (во избежание неприятностей для пассажиров, которые не переносят угловых колебаний лодки).

### 5.3.4. Релейная стратегия управления

Следуя [4], рассмотрим теперь другую стратегию управления лодкой – **релейную (двухпозиционную)**, когда угол поворота руля  $\psi$  может принимать только два крайних значения:  $\psi_0$  и  $-\psi_0$ , где  $\psi_0 > 0$ . Именно, положим  $\psi = \psi_0 \operatorname{sign} \sigma$ , где  $\sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}$  (здесь по определению считается, что функция  $\operatorname{sign} \sigma$  при  $\sigma = 0$  может принимать *любое* значение от  $-1$  до  $1$ ). Известно, что данная стратегия является **оптимальной по быстродействию**, т.е. приводит лодку на заданный курс за минимальное время (обеспечивает максимальную скорость приведения и одерживания). Если управление осуществляется с помощью авторулевого, то это **релейный** или **двухпозиционный авторулевой**.

Математическая модель движения лодки, снабженной релейным рулем, имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi_0 \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}. \quad (5.21)$$

Параметр  $a$ , отвечающий за угловую коррекцию, будем считать положительным по аналогии с линейной стратегией управления (условие  $a > 0$  обеспечивает правильное направление поворота руля на этапе приведения – в ту же сторону, куда отклонена лодка).

Фазовым пространством здесь также будет двумерный цилиндр, но мы будем рассматривать развертку этого цилиндра на плоскость  $(\varphi, \dot{\varphi})$ . Проведем на этой плоскости прямую  $\sigma = 0$  (рис. 5.10 соответствует случаю  $b > 0$ ). Она делит плоскость на две части (полуплоскости):  $\Phi^+$ , где  $\sigma > 0$ , и  $\Phi^-$ , где  $\sigma < 0$ . В

каждой из этих полуплоскостей уравнение движения лодки будет линейным:

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\phi} + h\dot{\phi} &= -k\psi_0 & \text{в } \Phi^+, \\ J\ddot{\phi} + h\dot{\phi} &= k\psi_0 & \text{в } \Phi^-. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Каждое из уравнений (5.22) может быть проинтегрировано.

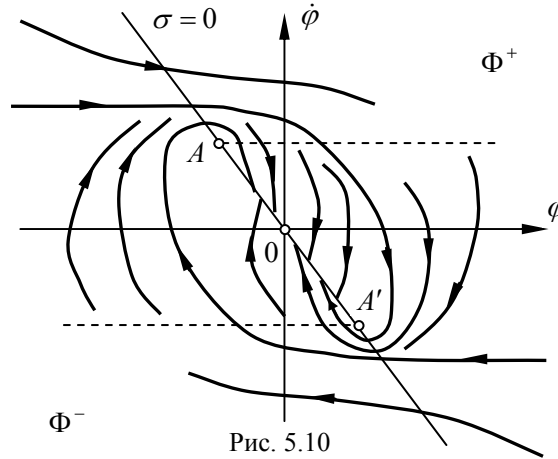


Рис. 5.10

Следует отметить, что при одновременной замене  $\varphi$  на  $-\varphi$  и  $\dot{\phi}$  на  $-\dot{\phi}$  уравнения (5.21) не изменяются (первое уравнение системы (5.21) при подстановке в него второго уравнения и одновременной замене  $\varphi$  на  $-\varphi$  и  $\dot{\phi}$  на  $-\dot{\phi}$  целиком умножится на  $-1$ ). Это означает, что фазовые траектории в полуплоскостях  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  симметричны друг другу относительно начала координат, и поэтому для полного их изучения достаточно построить фазовый портрет, например, только в полуплоскости  $\Phi^+$ .

Для исследования траекторий в  $\Phi^+$  рассмотрим их поведение по отношению к прямой  $\sigma = 0$ . Геометрический смысл величины  $\sigma$  – это расстояние (с учетом знака) от заданной точки  $(\varphi, \dot{\phi})$  до прямой  $\sigma = 0$ . Выясним, как меняется величина  $\sigma$  вдоль

траекторий первого уравнения системы (5.22). Для этого найдем полную производную от  $\sigma$  по времени в силу первого уравнения системы (5.22):

$$\dot{\sigma} = -\frac{kb\psi_0}{J} + \left(a - \frac{bh}{J}\right)\dot{\phi}.$$

При  $\dot{\phi} = \dot{\phi}^* = kb\psi_0 / (Ja - bh)$  имеем  $\dot{\sigma} = 0$ . Пусть  $a > bh / J$  (это предположение вполне допустимо, если момент инерции лодки  $J$  большой, а коэффициент вязкого трения  $h$  достаточно малый). Тогда если  $\dot{\phi} < \dot{\phi}^*$ , то  $\dot{\sigma} < 0$ , а если  $\dot{\phi} > \dot{\phi}^*$ , то  $\dot{\sigma} > 0$ . Так как в  $\Phi^+$  значение  $\sigma$  положительное, то при  $\dot{\phi} > \dot{\phi}^*$  фазовые траектории уходят от прямой  $\sigma = 0$  в направлении увеличения  $\sigma$ . При  $\dot{\phi} < \dot{\phi}^*$  траектории идут в направлении уменьшения  $\sigma$  и «втыкаются» в прямую  $\sigma = 0$ . При  $\dot{\phi} = \dot{\phi}^*$  величина  $\sigma$  вдоль фазовой траектории достигает своего максимума. Кроме того, полупрямая  $\dot{\phi} = -k\psi_0 / h$ ,  $\sigma > 0$  является фазовой траекторией в  $\Phi^+$ , и выше этой прямой имеет место неравенство  $\ddot{\phi} < 0$  (т.е.  $\dot{\phi}$  уменьшается), а ниже этой прямой имеем  $\ddot{\phi} > 0$  (т.е.  $\dot{\phi}$  увеличивается). С учетом всего сказанного, а также симметрии траекторий относительно начала координат приходим к качественному виду фазового портрета динамической системы (5.21), изображенному на рис. 5.10 (при  $b > 0$ ; случаи  $b = 0$  и  $b < 0$  рассматриваются аналогично). Здесь считается, что  $Ja - bh > 0$  и  $\dot{\phi}^* < k\psi_0 / h$ .

Из рис. 5.10 видно, что на прямой  $\sigma = 0$  имеется отрезок  $AA'$  (с координатами концов  $A(-b\dot{\phi}^* / a, \dot{\phi}^*)$  и  $A'(b\dot{\phi}^* / a, -\dot{\phi}^*)$ ), в который фазовые траектории «втыкаются» с двух сторон: как из полуплоскости  $\Phi^+$ , так и из полуплоскости  $\Phi^-$ . Вне этого отрезка траектории приходят к прямой  $\sigma = 0$  в одной полуплоскости и уходят от этой прямой в другой полуплоскости. Поведение траекторий на самой прямой  $\sigma = 0$  не определено, так как правая часть уравнения (5.21) при  $\sigma = 0$  терпит конечный разрыв и не удовлетворяет условиям теоремы существования и единственно-



сти (Коши – Пикара). Разрыв правой части (5.21) влечет разрывность величины  $\ddot{\varphi}$ , но при этом скорость  $\dot{\varphi}$  должна меняться непрерывно, так как скачок скорости требует бесконечной величины момента силы. Таким образом, уравнения (5.21) не определяют полностью оператора динамической системы и, следовательно, не являются полной математической моделью движения лодки с релейным авторулевым. Требуется еще доопределить модель при  $\sigma = 0$ .

Из физического смысла ясно, что угол  $\varphi$  со временем должен меняться непрерывно. Скорость  $\dot{\varphi}$ , как было отмечено выше, также должна меняться непрерывно. Поэтому доопределим траектории системы на прямой  $\sigma = 0$  вне отрезка  $AA'$  по непрерывности («сшивку» или «склейка» траекторий по непрерывности). «Сшивку» траекторий данной системы означает, что вне отрезка  $AA'$  фазовая точка переходит с траектории одного из полупространств  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  на траекторию другого полупространства и при этом происходит мгновенная перекладка руля из одного крайнего положения в другое.

На отрезке же  $AA'$  траектории «втыкаются» в прямую  $\sigma = 0$  из обеих полуплоскостей  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ . При этом если траектория попадает на прямую  $\sigma = 0$  в точку, в которой  $\dot{\varphi} \neq 0$ , то она должна обязательно уйти из этой точки, но остаться на прямой. Направление движения точки по прямой  $\sigma = 0$  можно определить по знаку  $\dot{\varphi}$ : в верхней полуплоскости, где  $\dot{\varphi} > 0$ , величина  $\varphi$  возрастает вдоль траекторий, а в нижней полуплоскости, где  $\dot{\varphi} < 0$ , величина  $\varphi$  убывает вдоль траекторий. При  $b > 0$  это означает, что траектории движутся по отрезку  $AA'$  по направлению к точке  $(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0)$ . Такой режим движения, получившийся вследствие доопределения оператора релейной динамической системы, называют **скользящим**.

Более подробное математическое описание скользящего режима можно получить, если понять, что в этом режиме динамиче-

ским уравнением движения точки будет само уравнение прямой  $\sigma = 0$ , т.е.  $a\varphi + b\dot{\varphi} = 0$ . Решая это уравнение, находим:

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{-(a/b)t}. \quad (5.23)$$

При  $a > 0$  и  $b > 0$  формула (5.23) означает, что точка, оказавшись на отрезке скользящего режима  $AA'$ , будет двигаться по этому отрезку по направлению к началу координат.

Следует отметить, что скользящий режим является *идеализированной моделью* движения лодки и руля и находится в противоречии с предположением о том, что руль может находиться только в двух крайних положениях  $\psi_0$  и  $-\psi_0$ . Это противоречие разрешается, если учесть, что в реальности перекладка руля *не мгновенна* (на ее осуществление требуется некоторое время), поэтому величина отклонения руля  $\psi$  изменяется *непрерывно*, но при этом достаточно *быстро* (быстро осциллирующая функция, усредненное значение которой является медленно меняющейся функцией) [4].

Для детального изучения фазового портрета заметим вначале, что модель (5.21) зависит от шести параметров:  $J, h, k, \psi_0, a, b$ . Эти параметры называются **физическими**, так как каждый из них имеет вполне определенный физический смысл. Однако при большом количестве параметров задача построения и исследования фазового портрета становится очень сложной. Поэтому нужно по возможности стремиться к уменьшению количества параметров, выделяя те, от которых реально зависит фазовый портрет. Такие параметры называются **существенными**. Для их нахождения сделаем замену угла и времени с помощью положительных масштабных коэффициентов:  $\tau = \lambda t$ ,  $\varphi = \mu \varphi_n$  ( $\varphi_n$  —  $\varphi$  новое). Тогда уравнения (5.21) переписутся следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{h}{J\lambda} \frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{k\psi_0}{J\lambda^2\mu} f(\sigma), \quad \sigma = a\mu\varphi_n + b\lambda\mu \frac{d\varphi_n}{d\tau},$$

где

$$f(\sigma) = \begin{cases} \text{sign } \sigma & (\sigma \neq 0), \\ -1 \leq f(0) \leq 1 & (\sigma = 0). \end{cases}$$

Выберем масштабные множители так, чтобы количество параметров было как можно меньшим:  $\lambda = J/|h|$ ,  $\mu = J\lambda^2/(k\psi_0)$ . Так как функция  $f(\sigma)$  зависит фактически от знака  $\sigma$ , то она не изменится при умножении аргумента  $\sigma$  на положительное число. Пользуясь этим, умножим  $\sigma$  на  $1/(a\mu)$  под знаком функции  $f$ . Тогда в модели будет только *один* существенный параметр (вместо *шести* физических!):  $\kappa = (b/a)/(J/|h|)$  ( $\kappa$  – греческая буква «каппа»). Если производные по новому времени  $\tau$  обозначать снова точками и опустить индекс «н» (новое) у новой переменной  $\varphi$ , то модель лодки с релейным авторулевым запишется следующим образом:

$$\ddot{\varphi} \pm \dot{\varphi} = -f(\sigma), \quad \sigma = \varphi + \kappa \dot{\varphi}. \quad (5.24)$$

Знак «плюс» в уравнении (5.24) соответствует шлюпке ( $h > 0$ ), знак «минус» – великовражке ( $h < 0$ ).

На рис. 5.11 изображен качественный вид фазового портрета системы (5.24) при  $h > 0$  (система со знаком «плюс» в левой части) и  $\kappa > 0$ . Прямая  $\sigma = 0$  делит фазовую плоскость на две полуплоскости:  $\Phi^+$ , где  $\sigma > 0$ , и  $\Phi^-$ , где  $\sigma < 0$ . Переход фазовой траектории из одной полуплоскости в другую после пересечения прямой  $\sigma = 0$  соответствует одному переключению (перекладке) руля, поэтому будем называть прямую  $\sigma = 0$  **прямой переключений**. Система (5.24) во *всей фазовой плоскости* является *кусочно-линейной*, но в *каждой из полуплоскостей*  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  уравнение движения фазовой точки является *линейным*. Как уже отмечалось выше, фазовые траектории в  $\Phi^-$  симметричны фазовым траекториям в  $\Phi^+$  относительно начала координат. На прямой переключений существует отрезок скользящих режимов  $AA'$ , концы которого имеют следующие координаты:

$$A\left(-\frac{\kappa^2}{1-\kappa}, \frac{\kappa}{1-\kappa}\right), A'\left(\frac{\kappa^2}{1-\kappa}, -\frac{\kappa}{1-\kappa}\right).$$

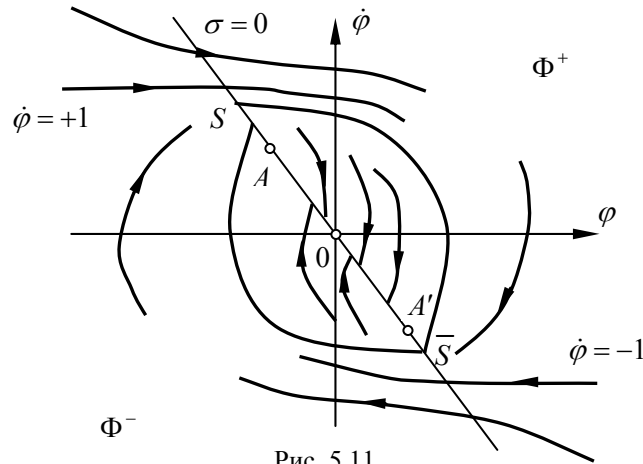


Рис. 5.11

Если фазовая точка попадет на этот отрезок, то в дальнейшем она будет двигаться по нему к началу координат, т.е. лодка стабилизируется на заданном курсе. Рисунок 5.11 соответствует случаю  $0 < \kappa < 1$ .

В принципе, фазовая точка *может* попасть на отрезок  $AA'$  как из  $\Phi^+$ , так и из  $\Phi^-$ . Однако на вопрос, действительно ли точка *попадет* на этот отрезок при произвольных начальных условиях, фазовый портрет в общем случае не дает ответа. Здесь необходимо применять метод точечных отображений (отображений Пуанкаре).

Из фазового портрета (в частности, из проделанного выше анализа знака величины  $\sigma$ ) следует, что прямую переключений  $\sigma = 0$  можно взять в качестве секущей для построения точечного отображения, порождаемого фазовыми траекториями. При этом в силу симметрии фазовых траекторий можно рассматривать только траектории в  $\Phi^+$ . Именно, в качестве точки-прообраза с коор-

динатой  $\dot{\varphi} = S$  можно взять точку, например, на верхнем луче прямой переключения ( $\dot{\varphi} > 0$ ), а в качестве точки-образа с координатой  $\dot{\varphi} = \bar{S}$  – точку на нижнем луче ( $\dot{\varphi} < 0$ ) (рис. 5.11). Дело в том, что далее для продолжения построения последовательности точек пересечения траекторий с прямой переключений нужно провести траекторию в  $\Phi^-$  из точки с координатой  $\dot{\varphi} = \bar{S}$ , но эта траектория будет симметрична траектории, проходящей в  $\Phi^+$  из точки  $\dot{\varphi} = -\bar{S}$ , относительно начала координат.

Для отыскания функциональной связи  $\bar{S} = F(S)$  необходимо найти уравнение траекторий динамической системы (5.24). Интегрируя уравнение (5.24) при  $\sigma > 0$  и начальных условиях  $\varphi = -\kappa S$ ,  $\dot{\varphi} = S$ , получаем:

$$\bar{S} = e^{-\tau} \cdot S - (1 - e^{-\tau}), \quad (5.25)$$

где  $\tau$  – время движения фазовой точки по траектории из точки  $S$  в точку  $\bar{S}$ , определяемое из уравнения

$$(1 - \kappa)(1 - e^{-\tau})(S + 1) - \tau = 0. \quad (5.26)$$

Исключить отсюда  $\tau$  (выразить  $\tau$  через  $S$ ) не удастся, поэтому построить отображение в *явном* виде  $\bar{S} = F(S)$  нельзя. Однако из (5.26) можно выразить  $S$  через  $\tau$ :

$$S = -1 + \frac{\tau}{(1 - \kappa)(1 - e^{-\tau})}. \quad (5.27)$$

Подставляя (5.27) в (5.25), получаем формулы точечного отображения в *параметрическом* виде ( $\tau$  – параметр):

$$S = -1 + \frac{\tau}{(1 - \kappa)(1 - e^{-\tau})}, \quad \bar{S} = -1 + \frac{\tau}{(1 - \kappa)(e^{\tau} - 1)}. \quad (5.28)$$

Симметрия фазовых траекторий относительно начала координат позволяет построить отображение так, чтобы координаты  $\dot{\varphi}$  у точек прообраза и образа имели одинаковые знаки. Для этого умножим формулу для  $\bar{S}$  в (5.28) на  $-1$  и переобозначим  $-\bar{S}$  через  $\bar{S}$  (т.е. образом будет точка на верхнем луче, симметричная от-

носителем начала координат точке, в которую придет траектория, начавшаяся в точке  $S$ ). В итоге получим точечное отображение в виде:

$$S = -1 + \frac{\tau}{(1-\kappa)(1-e^{-\tau})}, \quad \bar{S} = 1 - \frac{\tau}{(1-\kappa)(e^{\tau}-1)}. \quad (5.29)$$

Изучение отображения (5.29) при различных  $\kappa$  приводит к следующим результатам. При  $0 < \kappa < 1/2$  диаграмма Ламерея представлена на рис. 5.12. При  $\tau = 0$   $S(0) = \kappa / (1-\kappa)$  и  $\bar{S}(0) = -\kappa / (1-\kappa)$ . При  $\tau \rightarrow +\infty$   $S(\tau) \rightarrow +\infty$  и  $\bar{S}(\tau) \rightarrow 1$ . Диаграмма Ламерея показывает, что при любых начальных угле и угловой скорости лодка после конечного числа переключений руля обязательно попадет на отрезок скользящего режима (и, следовательно, придет по скользящему режиму в начало координат).

При  $1/2 \leq \kappa < 1$  и  $\kappa > 1$  диаграммы Ламерея показаны соответственно на рис. 5.13 и 5.14. По сравнению со случаем  $0 < \kappa < 1/2$  лодка приходит к скользящему режиму за меньшее число переключений руля, однако движение по самому отрезку становится медленнее (так как увеличение  $\kappa$  соответствует уменьшению отношения  $a/b$ , что приводит к уменьшению скорости затухания экспоненциального процесса (5.23)).

Случай  $\kappa < 0$  при  $a > 0$  соответствует правильной реализации этапа приведения и неправильной – одерживания ( $b < 0$ ). Диаграмма Ламерея при  $\kappa < 0$  представлена на рис. 5.15а. Из нее следует, что фазовые траектории много раз пересекают прямую переключений, но теперь нет отрезка скользящего режима, а есть *неподвижная точка отображения*  $S^*$ , соответствующая *предельному циклу*, причем этот цикл является *глобально асимптотически устойчивым*. Таким образом, при неправильном одерживании лодка с течением времени придет в автоколебательный режим при любых начальных условиях. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 5.15б.

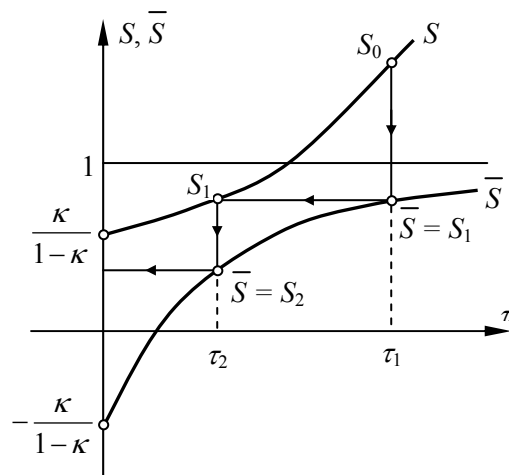


Рис. 5.12

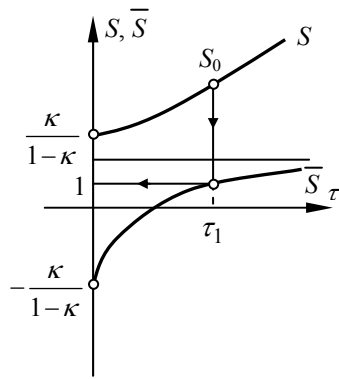


Рис. 5.13

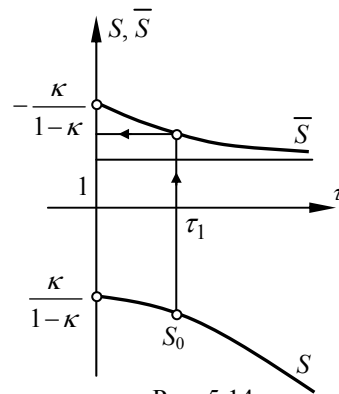


Рис. 5.14

Случай  $\kappa = 0$  при  $a > 0$  соответствует полному отсутствию скоростной коррекции ( $b = 0$ ), т.е. рулевой вообще не одерживает лодку. Диаграмма Ламерея для этого случая представлена на рис. 5.16а. Из нее следует, что лодка с течением времени стабилизируется на заданном курсе, но это произойдет через *счетное*

число переключений руля (а скользящего режима не будет). Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 5.16б.

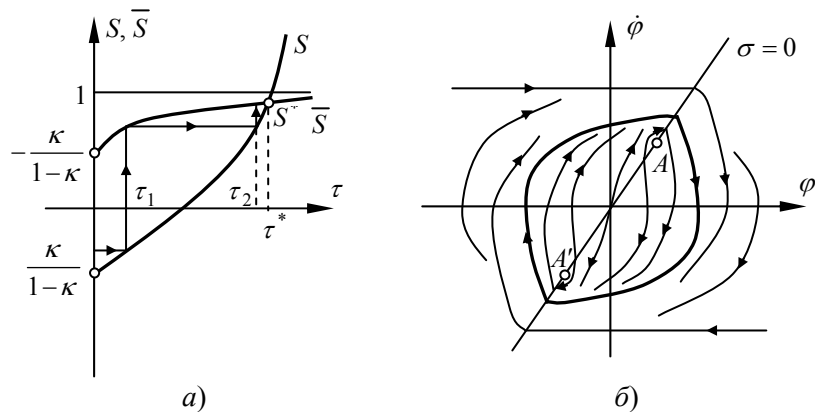


Рис. 5.15

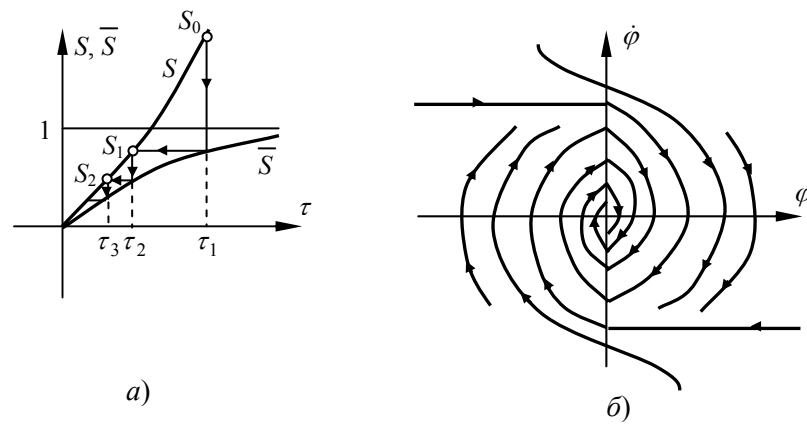


Рис. 5.16

### 5.3.5. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файлах Part9\boat.alp (для линейной стратегии управления) (рис. 5.17) и Part9\boat\_re-