1. Пример решения задач по теме №7

(П1) Изучить зависимость скорости вращения тяжелого вала с моментом инерции J и коэффициентом ν в моменте вязкого трения на валу вращения от вращающего момента $M(t)$

Записываем второй закон Ньютона для вращательных движений,

используя $w = \dot{\varphi}$, где φ - угол поворота:

$$J\dot{w} = -\nu w + M(t) \xrightarrow[\text{при н.у.}=0]{} w^*(p)(Jp+\nu) = M^*(p)$$

$$w^*(p) = \boxed{\frac{1}{Jp+\nu}} \cdot M^*(p).$$ Коэф-т передачи $K(p)=\frac{1}{Jp+\nu}$

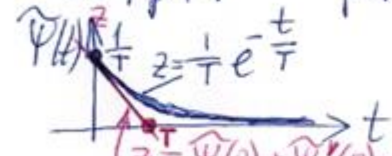
Запишем в более стандартном виде $K(p)=\frac{k}{Tp+1}$, где $k = 1/\nu$ - усилитель,

$T = J/\nu$ - параметр инерционной части $\frac{1}{Tp+1}$

Изучим его: понятно, что множитель $k = 1/\nu$ просто изменяет величину сигнала в k раз.

Как работает инерционное звено?

$$]\ \tilde{K}(p) = \frac{1}{Tp+1} = \frac{1/T}{p+1/T} \div \tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$ — имп. перех-я ф-ция инерционного звена



$$z = \underbrace{\tilde{\varphi}(0)}_{=\frac{1}{T}} + \underbrace{\tilde{\varphi}'(0)}_{=-\frac{1}{T^2}} \cdot t$$ — линейная апроксимация

Найдем точку пересечения линейной апроксимации с осью: $\frac{1}{T} - \frac{1}{T^2}\cdot t_{пер.} = 0$

! $\Rightarrow t_{пер} = T \Rightarrow$ Сигнал, порожденный воздействием δ-функции у инерционного звена, в основном затухает за время $\approx T$

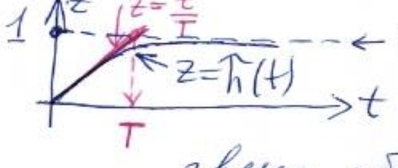
Получим $\hat{h}(t)$ — функцию переходной проводимости для инерц. звена $\hat{K}(p)=\frac{1}{Tp+1}$

Подадим на вход $\hat{K}(p)$ $1(t)$. $\Rightarrow$

$$\hat{Y}(p)=\hat{K}(p)\cdot\frac{1}{p}=\frac{1/T}{p+1/T}\cdot\frac{1}{p}=\frac{A^{=1}}{p}+\frac{B^{=-1}}{p+1/T}$$

$$\Rightarrow \hat{h}(t)=1(t)\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Лин. приближение $z=\hat{h}(0)+\hat{h}'(0)t=0+\frac{t}{T}$



Вывод: инерционное звено обеспечивает достаточно точное отслеживание на выходе уровня входного сигнала спустя время, примерно равное T. Оно обеспечивает плавную задержку уровня входного сигнала на время T на выходе.

Поскольку тяжелый вал имеет ещё коэффициент усиления $k=1/\nu$, то установившаяся угловая скорость вращения $\omega(t)$ будет отличаться от входного вращающего момента $M(t)$ в $1/\nu$ раз и будет отставать от изменений $M(t)$ примерно на время $T=J/\nu$.

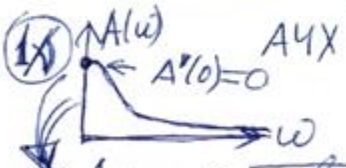
Запаздывание связано с инерционностью вала!

Время запаздывания возрастает пропорционально увеличению момента инерции J и убывает ~~про~~ обратно пропорционально с возрастанием коэффициента вязкого трения. Коэффициент усиления скорости ω по отношению к $M(t)$ возрастает как $1/\nu$ с уменьшением коэффициента трения ν.

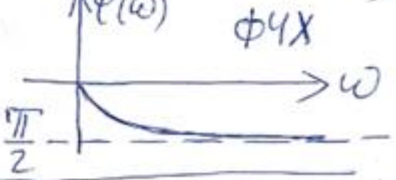
Продолжим пример 1. Исследуем частотные свойства. Вид АФЧХ:

$K(i\omega)=\frac{1}{Ji\omega+1}$. Построим годограф.

1 способ $A(\omega)=|K(i\omega)|=\frac{1}{|Ji\omega+V|}=\frac{1}{\sqrt{V^2+J^2\omega^2}}$



$\varphi(\omega)=\arg K(i\omega)=0-\arg(V+Ji\omega)=$
$=-\mathrm{arctg}\, J\omega$

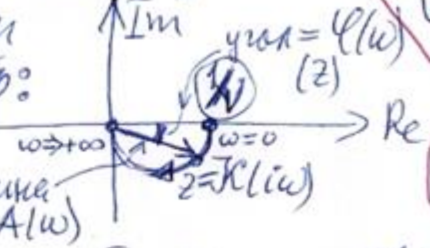


Амплитуда вынужденных колебаний W(t)-угловой скорости убывает с ростом частоты колебаний M(t)

С ростом частоты ω колебания угловой скорости вращения W(t) по фазе отстают всё более от колебаний M(t) стремятся к четверти периода

Совмещаем на комплексной плоскости:

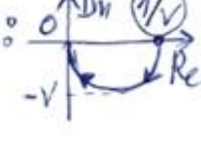
Получаем годограф:



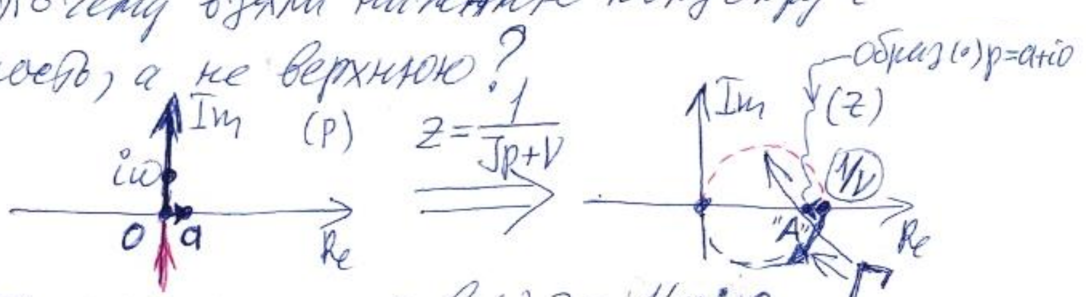
Это выводы о поведении системы. Объясните для себя эти выводы с точки зрения "физики" системы!

2 способ Берем $K(p)=\frac{1}{Jp+V}$ – это дробно линейное конформное отображение!

Нам нужно понять во что перейдет положительная полуось $p=i\omega$. Образом оси $i\omega$ ($\omega\in(-\infty,+\infty)$) будет окружность, локально ортогональная образу действительной оси. Действительная ось перейдет в действительную $\Rightarrow$ Годограф будет полуокружностью, локально ортогональной действительной оси:

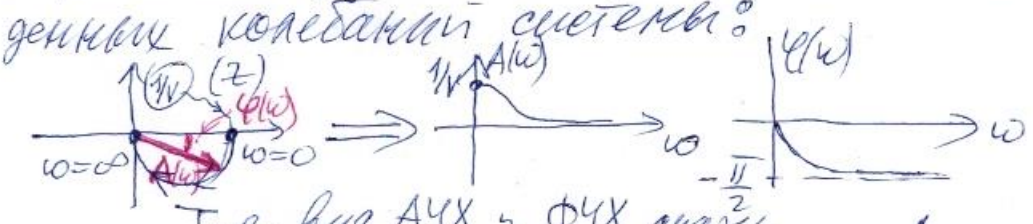


Почему взяли нижнюю полуокружность, а не верхнюю?



Точка p=0 переходит в (•) $z=1/V+i\cdot 0$
Точка p=a+i0 при малом a>0 перейдет в точку z на действительной оси, смещенную левее точки $1/V+i0$. Далее, в силу конформности отображения $z=K(p)$, если при движении по оси $p=i\omega$ вверх точка $p=a+i0$ оставалась справа, то движение точки образа $z=K(i\omega)$ по кривой Г из $(\cdot)z=1/V+i0$ должно происходить так, чтобы образ "A" точки p=a оставался также справа по обходу. Следовательно при $\omega>0$ смещаемся из $(\cdot)\ z=1/V+i0$ по кривой Г вниз!

Построив годограф по способу 2 можно сразу качественно показать, как с возрастанием частоты ω изменяется амплитуда $A(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$ вынужденных колебаний системы:



Т.е. вид АЧХ и ФЧХ сразу получаем исходя из вида годографа!