Лекция 19

Задача Коши для волнового уравнения. Принцип Гюйгенса

Рассмотрим волновое уравнение в трехмерном пространстве

$$u_{tt}(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = 0\,, \tag{1}$$

дополненное начальными условиями

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,z)\,, \tag{2}$$

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = u_1(x,y,z)\,. \tag{3}$$

Здесь u_0, u_1 – заданные, определенные во всем пространстве $\mathbf{R}^3$ функции; a – положительная постоянная, характеризующая скорость распространения возмущений в пространстве; $u \equiv u(x,y,z,t)$ – неизвестная, подлежащая определению, функция при $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $t > 0$; Δ – дифференциальный оператор (лапласиан) следующего вида

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,.$$

Сформулированная выше задача (1)–(3) – начальная задача (или *задача Коши*) для волнового уравнения.

Пусть M – точка в $\mathbf{R}^3$ с координатами (x,y,z) $(M = M(x,y,z))$, N – точка в $\mathbf{R}^3$ с координатами (ξ,η,ζ) $(N = N(\xi,\eta,\zeta))$;

$$|\,MN\,| = r_{MN} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta, - y)^2 + (\zeta - z)^2}\,.$$

Расстояние между точками M и N в $\mathbf{R}^3$ также может обозначаться $r = r_{MN} = |\,MN\,|$.

Через S_r будем обозначать сферу радиуса $r > 0$ с центром в точке $M(x,y,z)$.

Произвольная функция $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbf{R}^3$ определяет при всех $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ и $t > 0$ функции

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r} dS\,, \tag{4}$$

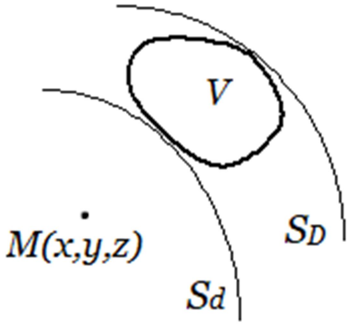
где $r = at$, интегрирование осуществляется на сфере S_a радиуса at с центром в точке $M(x,y,z)$; dS – элемент площади сферы; $N(\xi,\eta,\zeta)$ – точка интегрирования, $N \in S_{at}$. Непосредственно проверяется, что функция $u(x,y,z,t)$, определяемая равенством (4), для произвольной функции φ является решением однородного волнового уравнения (1) (см. [1, стр. 106–109]), а функция $u(x,y,z,t)$, определяемая следующим равенством

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S_{at}} \frac{u_0(\xi,\eta,\zeta)}{r} dS + \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}} \frac{u_1(\xi,\eta,\zeta)}{r} dS \tag{5}$$

(здесь $r = at$) является решением задачи Коши (1)–(3). Формула (5) – *формула Пуассона* для волнового уравнения, выражающая решение задачи Коши через сферические волны.

Распространение сферических волн в пространстве

Пусть начальные возмущения $u_0(x,y,z)$ и $u_1(x,y,z)$ локализованы в пространстве, т.е., вне некоторого ограниченного объема $V \subset \mathbf{R}^3$ функции u_0 и u_1 тождественно равны нулю:



$$u_0(x,y,z) = 0 \text{ при } (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus V,$$
$$u_1(x,y,z) = 0 \text{ при } (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus V.$$

Пусть $M(x,y,z)$ – некоторая точка, расположенная вне объема *V*. Определим

$$d = \inf |MN|,\ N \in V,$$
$$D = \sup |MN|,\ N \in V$$

(d – расстояние от точки *M* до *V*); S_d, S_D – сферы с радиусами d и D соответственно с центром в точке *M*. Тогда из формулы Пуассона следует, что при достаточно малых временах $t < d/a$ в точке M будет выполнено $u(x,y,z,t) = 0$; момент времени $t = d/a$ соответствует приходу в точку M переднего фронта волны; при $t > D/a$ в точке *M* будет выполнено $u(x,y,z,t) = 0$, и момент времени $t = D/a$ будет соответствовать прохождению через *M* заднего фронта волны. Существование переднего и заднего фронтов волны, порождаемой локализованным в пространстве возмущением начальных данных u_0 и u_1 называется *принципом Гюйгенса*, который может быть сформулирован и так: локализованные в пространстве возмущения начальных данных приводят в каждой точке пространства к локализованным во времени возмущениям.

Цилиндрические волны

В случае, когда решения u уравнения (1) зависят только от x, y, t (сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси z), эти решения называются цилиндрическими волнами. Задача Коши для цилиндрических волн ставится следующим образом

$$u_{tt}(x,y,z,t) - a^2(u_{xx}(x,y,z,t) + u_{yy}(x,y,z,t)) = 0, \tag{6}$$

$$u(x,y,t) = u_0(x,y), \tag{7}$$

$$u_t(x,y,t)\big|_{t=0} = u_1(x,y). \tag{8}$$

где u_0, u_1 – заданные функции, определенные на всей плоскости $\mathbf{R}^2$.

Решение задачи (6)–(8) может быть получено из формулы Пуассона (5) как частный случай ([1, стр. 111, 112]) и имеет вид

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_{at}} \frac{u_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_{at}} \frac{u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \tag{9}$$

Здесь D_{at} – круг радиуса $r = at > 0$ с центром в точке $M(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Отметим, что для цилиндрических волн принцип Гюйгенса не имеет места. Как и в трехмерном случае, при $t < d/a$ выполнено $u(x,y,t)=0$ (существует передний фронт волны), но при $t > D/a$ $V \cap D_{at} \neq \emptyset$, и, вообще говоря, $u(x,y,t) \neq 0$ (при всех $t > d/a$ отсутствует задний фронт волны).

Плоские волны

В случае, когда решения u уравнения (1) зависят только от x и t (сохраняют постоянное значение на всякой плоскости, перпендикулярной оси x), эти решения называются плоскими волнами, распространяющимися в направлении оси x. Решение соответствующей задачи записывается с помощью формулы Даламбера, выведенной ранее при изучении задачи о свободных колебаниях неограниченной струны.

Неоднородное волновое уравнение в трехмерном пространстве. Формула Кирхгофа [1, стр.120–124]

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение в трехмерном пространстве

$$u_{tt}(x,y,z,t) - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t), \tag{10}$$

дополненное начальными условиями

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,z), \tag{11}$$

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = u_1(x,y,z). \tag{12}$$

В этом случае решение задачи Коши (10)–(12) записывается с помощью формулы Кирхгофа

$$\begin{gathered} u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S_{at}} \frac{u_0(\xi,\eta,\zeta)dS}{r} + \\ + \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}} \frac{u_1(\xi,\eta,\zeta)dS}{r} + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{B_{at}} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta,-y)^2 + (\zeta - z)^2}$, B_{at} – шар радиуса at с центром в точке $M(x,y,z)$. Последнее слагаемое в формуле Кирхгофа (13)

$$v(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{B_{at}} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

называется запаздывающим потенциалом. Это название отражает содержание правой части: вклад источников f в возмущение в точке $M(x,y,z)$ в момент времени $t > 0$ обусловлен значением функции f в точке $N(\xi,\eta,\zeta)$ в момент времени $t - r/a$, отличающийся от t на r/a – время, необходимое для преодоления волной, движущейся со скоростью a, расстояния $r = |MN|$.

Соответствующие формулы в двумерном и одномерном случаях имеют вид

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}}\frac{u_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}}\frac{u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint_{\rho\le a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\right]d\tau,$$

где $\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Теорема о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения

Докажем теорему о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения в пространственно двумерном случае (в случае любой другой размерности рассуждения будут аналогичными). Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt}(x,y,t)-a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t))=f(x,y,t), \qquad (14)$$

$$u(x,y,t)|_{t=0}=\varphi(x,y), \qquad (15)$$

$$u_t(x,y,t)|_{t=0}=\psi(x,y). \qquad (16)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $a=1$ (этого можно добиться, сделав замену $at\to t$).

Пусть задача (6)–(8) имеет два решения $u_1(x,y,t)$ и $u_2(x,y,t)$. Тогда их разность

$$v(x,y,t)=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t), \qquad (17)$$

как следует из (14)–(16) при $a=1$ должна являться решением задачи

$$v_{tt}(x,y,t)-(v_{xx}(x,y,t)+v_{yy}(x,y,t))=0, \qquad (18)$$

$$v(x,y,t)|_{t=0}=0, \qquad (19)$$

$$v_t(x,y,t)|_{t=0}=0. \qquad (20)$$

Докажем, что $v(x,y,t)=0$ при всех $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ и $t>0$. В пространстве переменных (x,y,t) возьмем точку $M_0(x_0,y_0,t_0)$ и построим конус с вершиной в M_0, боковая поверхность которого задается уравнением

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0 \qquad (21)$$

а нижнее основание – круг в плоскости $t=0$, высекаемый поверхностью (21). Очевидно, радиус этого круга будет равен t_0, а центр будет располагаться в точке (x_0,y_0,t_0). Конус в пространстве переменных (x,y,t), задаваемый уравнением (21), называется *характеристическим конусом* для волнового уравнения (18).

Пусть V – область, ограниченная боковой поверхностью (21) и указанным нижним основанием:

$$V=\{(x,y,t)\in\mathbf{R}^3:0\le t\le t_0,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le(t-t_0)^2\}.$$

Справедливо следующее тождество

$$2v_t(v_{tt}-v_{xx}-v_{yy})=\frac{\partial}{\partial t}\left[(v_t)^2+(v_x)^2+(v_y)^2\right]-2\frac{\partial}{\partial x}(v_tv_x)-2\frac{\partial}{\partial x}(v_tv_y) \qquad (22)$$

(в этом легко убедиться, применив к выражениям правой части (22) формулу производной от произведения). Учитывая (18) и интегрируя при этом (22) по области V, получим

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) dxdydt = 0, \tag{23}$$

где

$$A = (v_t)^2 + (v_x)^2 + (v_y)^2,\ B = -2v_t v_x,\ C = -2v_t v_y. \tag{24}$$

Обозначая боковую поверхность конуса V через

$$\Gamma = \{(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le t \le t_0, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (t-t_0)^2\},$$

а поверхность нижнего основания через

$$\Sigma = \{(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 : t = 0, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le t_0^2\},$$

и применяя к (23) теорему Гаусса–Остроградского и переходя к интегрированию по поверхности, получим

$$\iint\limits_\Gamma \{A\cos(nt) + B\cos(nx) + C\cos(ny)\} d\Gamma = 0. \tag{25}$$

Здесь учтено, что на нижнем основании Σ согласно (19), (20)

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = v_x|_{t=0} = v_y|_{t=0} = 0$$

и поэтому

$$A|_{t=0} = B|_{t=0} = C|_{t=0} = 0.$$

В равенстве (25) через n обозначен единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности Г, а через $\{\cos(nx), \cos(yx), \cos(nt)\}$ – его направляющие косинусы, т.е. косинусы углов между вектором n и соответствующими координатными осями. Очевидно,

$$\cos^2(nx) + \cos^2(yx) + \cos^2(nt) = 1,$$

и в нашем случае

$$\cos(nt) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

поэтому можно записать

$$\cos^2(nt) - \cos^2(nx) - \cos^2(yx) = 0 \tag{26}$$

и – с учетом (24), (26) – переписать равенство (25) в виде

$$\iint\limits_\Gamma \frac{1}{\cos(nt)} \{[v_x \cos(nt) - v_t \cos(nx)]^2 + [v_y \cos(nt) - v_t \cos(ny)]^2\} d\Gamma = 0,$$

и поэтому на поверхности Г выполнено

$$v_x \cos(nt) - v_t \cos(nx) = 0,$$
$$v_y \cos(nt) - v_t \cos(ny) = 0,$$

или

$$\frac{v_x}{\cos(nx)} = \frac{v_y}{\cos(ny)} = \frac{v_t}{\cos(nt)} = \lambda. \tag{27}$$

Пусть l – произвольная образующая конуса (21). Тогда с учетом (27)

$$\frac{\partial v}{\partial l} = v_x \cos(lx) + v_y \cos(ly) + v_t \cos(lt) =$$
$$= \lambda(\cos(nx)\cos(lx) + \cos(ny)\cos(ly) + \cos(nt)\cos(lt)) = 0;$$

т.к. вектор нормали n перпендикулярен образующей конуса. Поэтому доказано, что для любой образующей l конуса (21) выполнено $\partial v / \partial l = 0$ и следовательно, функция $v(x,y,t)$ постоянна вдоль образующей. Т.к. $v(x,y,t)|_{t=0}=0$ при всех $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, то $v(x,y,t)=0$ на любой образующей конуса (21) и, в частности,

$$v(x_0,y_0,t_0)=0.$$

В силу произвольности выбора точки $M_0(x_0,y_0,t_0)$, $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$, $t_0>0$ доказано, что

$$v(x,y,t)=0,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ t>0,$$

и, согласно (17), установлено, что $u_1(x,y,t)\equiv u_2(x,y,t)$, а это означает единственность решения задачи (14)–(16).

Список литературы

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.