Лекция 25

Уравнения эллиптического типа

Уравнение Лапласа

Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u(x,y,z)=0. \qquad (1)$$

Функция $u\in C^2(\Omega)$ называется гармонической в открытой ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, если она удовлетворяет уравнению Лапласа (1) во всех точках области Ω; функция $u\in C^2(\Omega)$ называется гармонической в неограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, если она удовлетворяет уравнению Лапласа (1) и равномерно стремится к нулю при $x^2+y^2+z^2\to\infty$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует R_ε, вообще говоря, зависящее от ε такое, что

$$|u(x,y,z)|<\varepsilon$$

при $x^2+y^2+z^2>R_\varepsilon^2$.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ – точки пространства $\mathbf{R}^3$, Ω – открытая область в $\mathbf{R}^3$. Тогда функция

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

– гармоническая функция переменных (x,y,z) в любой области Ω, не содержащей точки M_0.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\ \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

откуда следует, что функция u вида (2) удовлетворяет (1) во всех точках, где $r\neq 0$.

Функция u вида (2) называется фундаментальным решением уравнения Лапласа (1).

Замечание. В двумерном случае $\Omega\subset\mathbf{R}^2$, $u=u(x,y)$, $\Delta u=u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)$ фундаментальным решением называется функция

$$u=\ln\frac{1}{r}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

во всех точках $M(x,y) \in \Omega$, отличных от $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Формулы Грина и интегральное представление произвольной функции

Пусть Ω – открытое ограниченное подмножество в $\mathbf{R}^3$ с границей Г, в каждой точке которой определен единичный вектор внешней нормали $\vec{n}\{n_1, n_2, n_3\}$ ($n_1 = \cos(nx)$, $n_2 = \cos(ny)$, $n_3 = \cos(nz)$ – направляющие косинусы нормали $\vec{n}$). Для произвольных функций $P, Q, R \in C^1(\overline{\Omega})$ справедлива формула Гаусса–Остроградского

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} [P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz)] d\Gamma. \qquad (3)$$

Пусть $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Положим в (3)

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x},\ Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, R = u\frac{\partial v}{\partial z},$$

тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dxdydz =$$

$$\iint\limits_{\Gamma} u\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)\cos(nz) \right] d\Gamma = \iint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma.$$

Применяя к первому интегралу этого уравнения формулы дифференцирования произведения, получим первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma - \iiint\limits_{\Omega} u\Delta v dxdydz. \qquad (4)$$

Если в первой формуле Грина (4) поменять u и v местами и вычесть из получившегося выражения (4), то получим вторую формулу Грина

$$\iiint\limits_{\Omega} [u\Delta v - v\Delta u] dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\Gamma. \qquad (5)$$

Справедлива

Лемма 2. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^3$ с регулярной границей Г. Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ справедливо представление

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iint\limits_{\Gamma} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] d\Gamma - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dxdydz, \qquad (6)$$

где $r = |MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (M_0 – точка наблюдения, M – переменная точка интегрирования).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M_0 \in \Omega$, $B_\varepsilon(M_0)$ – шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0 такой, что его замыкание $\overline{B}_\varepsilon(M_0) \subset \Omega$. Обозначим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(M_0)$ – открытое ограниченное подмножество в $\mathbf{R}^3$ с границей $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup S_\varepsilon(M_0)$, $S_\varepsilon(M_0)$ – сфера радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0. Тогда, как было отмечено выше, функция $v = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{|MM_0|}$ как функция переменных (x, y, z) будет гармонической в Ω_ε и, в частности, будет выполнено

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,\ (x, y, z) \in \Omega_\varepsilon. \tag{7}$$

Поэтому, применяя вторую формулу Грина (5) для $v = \dfrac{1}{r}$, получим в Ω_ε

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\Gamma + \iint\limits_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\Gamma. \tag{8}$$

Рассмотрим в последнем выражении предел при $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что из включения $u \in C^2(\overline{\Omega})$ по теореме Вейерштрасса существует такая положительная постоянная $M > 0$, что

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \le M, \tag{9}$$

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_x| \le M,\ \max_{\overline{\Omega}} |u_y| \le M,\ \max_{\overline{\Omega}} |u_z| \le M, \tag{10}$$

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_{xx}| \le M,\ \max_{\overline{\Omega}} |u_{yy}| \le M,\ \max_{\overline{\Omega}} |u_{zz}| \le M. \tag{11}$$

Поэтому для любого единичного вектора $\vec{n}$

$$\max_{\overline{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| = \max_{\overline{\Omega}} |u_x \cos(nx) + u_y \cos(ny) + u_z \cos(nz)| \le \max_{\overline{\Omega}} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \le \sqrt{3} M, \tag{12}$$

откуда

$$\max_{\overline{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \le \sqrt{3} M, \tag{13}$$

$$\max_{\overline{\Omega}} |\Delta u| \le 3M. \tag{14}$$

Рассмотрим

$$I_\varepsilon^{(1)} = \iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dxdydz - \iiint\limits_{B_\varepsilon(M_0)} \frac{\Delta u}{r} dxdydz. \tag{15}$$

В сферической системе координат с центром в точке M_0

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon(M_0)} \frac{\Delta u}{r} dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon} \Delta u \cdot r \sin\theta d\theta d\varphi dr.$$

Поэтому с учетом (14)

$$\left| \iiint\limits_{B_\varepsilon(M_0)} \frac{\Delta u}{r} dxdydz \right| \le \frac{3M\varepsilon^2 \cdot 2\pi \cdot 2}{2} = 6\pi M \varepsilon^2.$$

Сопоставляя последнюю оценку с (15), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^{(1)} = \iiint_\Omega \frac{\Delta u}{r} dxdydz . \tag{16}$$

Рассмотрим далее

$$I_\varepsilon^{(2)} = \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma . \tag{17}$$

На S_ε согласно (13) выполнено

$$r = \varepsilon, \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \le \sqrt{3}M ,$$

поэтому

$$| I_\varepsilon^{(2)} | \le \frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\sqrt{3}M\varepsilon .$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^{(2)} = 0 . \tag{18}$$

Пусть

$$I_\varepsilon^{(3)} = \iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\Gamma .$$

Очевидно, на $S_\varepsilon(M_0)$ $r = \varepsilon$ и

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} ,$$

поэтому

$$I_\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} u d\Gamma . \tag{19}$$

По теореме о среднем

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} u d\Gamma = 4\pi\varepsilon^2 u(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*) \tag{20}$$

где $M_\varepsilon^*(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*)$ – некоторая точка сферы $S_\varepsilon(M_\varepsilon)$. Поскольку $M_\varepsilon^* \to M_0$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^{(3)} = 4\pi u(x_0, y_0, z_0) . \tag{21}$$

Переходя к пределу в (8) при $\varepsilon \to 0$ и учитывая (15)–(19), (21), получим (6). Лемма доказана.

Список литературы

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.