ЛЕКЦИЯ 14

Метод разделения переменных. Физический смысл решений. Вынужденные колебания струны.

Решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \tag{3}$$

имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \Big) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{4}$$

$$A_n = \varphi_n,\ B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n.$$

Функцию $u_n(x,t)$ можно представить в виде

$$u_n(x,t) = \Big(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \Big) \sin\frac{\pi n}{l} x = \alpha_n \cos\frac{\pi n}{l} a(t+\delta_n) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{5}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},\ \cos\frac{\pi n}{l} a\delta_n = \frac{A_n}{\alpha_n},\ \sin\frac{\pi n}{l} a\delta_n = -\frac{B_n}{\alpha_n}. \tag{6}$$

Каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания

$$u_n(x_0,t) = \alpha_n \cos\frac{\pi n}{l} a(t+\delta_n) \sin\frac{\pi n}{l} x_0$$

с амплитудой

$$\alpha_n \sin\frac{\pi n}{l} x_0.$$

Движение струны такого типа называется **стоячей волной**. Точки

$$x = \frac{ml}{n},\ m = 1, 2, \ldots, n-1,$$

в которых $\sin(\pi n x/l) = 0$, в течение всего процесса остаются неподвижными и называются **узлами** стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки

$$x = \frac{2m+1}{2n} l,\ m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

в которых $\sin(\pi n x/l) = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой α_n и называются **пучностями** стоячей волны.

Профиль стоячей волны в любой момент времени представляют синусоиду

$$u_n(x,t) = C_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$C_n(t) = \alpha_n \cos\omega_n(t+\delta_n)\ (\omega_n = \frac{\pi n}{l} a).$$

В моменты времени t, при которых $\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t, при которых $\cos\omega_n(t+\delta_n) = 0$, отклонения равны нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \tag{7}$$

Частоты ω_n называются собственными частотами колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a^2 = T/\rho$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{8}$$

Энергия n-й стоячей волны (n-й гармоники) для случая поперечных колебаний струны равна

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\int_0^l \left[\rho\omega_n^2 \sin^2\omega_n(t+\delta_n)\sin^2\frac{\pi n}{l}x + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cos^2\omega_n(t+\delta_n)\cos^2\frac{\pi n}{l}x\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\frac{l}{2}\left[\rho\omega_n^2\sin^2\omega_n(t+\delta_n) + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cos^2\omega_n(t+\delta_n)\right],$$

так как

$$\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x dx = \int_0^l \cos^2\frac{\pi n}{l}x dx = \frac{l}{2}.$$

Пользуясь выражением для α_n ω_n, а также равенством $T = a^2\rho$, получаем

$$E_n = \frac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2}{4}l = \omega_n^2 M\frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \tag{9}$$

где $M = l\rho$ – масса струны.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Можно сказать, что звук струны является наложением "простых тонов соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тоны не является операцией только математического характера. Выделение простых тонов можно произвести экспериментально при помощи резонаторов. Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может издавать струна, определяется самой низкой собственной частотой $\omega_1 = \pi/l\sqrt{T/\rho}$ и называется основным тоном струны. Остальные тоны, соответствующие частотам, кратным ω_1, называются обертонами. Тембр звука зависит от присутствия наряду с основным тоном обертонов и от распределения энергии по гармоникам.

Низший тон струны и её тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяет начальные условия (2), через которые выражаются коэффициенты A_n и B_n. Если $A_1 = B_1 = 0$, то низшим тоном будет тон, соответствующий частоте ω_n, где n – наименьшее число, для которого A_n и B_n отличны от нуля.

Обычно струна издаёт один и тот же тон. В самом деле, приведём струну в колебание, оттягивая её в одну сторону и отпуская без начальной скорости. В этом случае

$$u_t(x,0) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x) > 0$$

и

$$A_1 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi}{l}\xi d\xi > 0,$$

так как

$$\sin\frac{\pi}{l}\xi > 0.$$

Следующие коэффициенты, вообще говоря, значительно меньше A_1, так как функция $\sin\frac{\pi n}{l}\xi$ знакопеременна при $n \geq 2$. В частности, если $\varphi(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $A_2 = 0$. Таким образом, если привести струну в колебание, оттягивая её в одну сторону ($\varphi(x) > 0$), то низшим тоном будет основной тон струны, энергия которого больше энергии других гармоник.

Привести струну в колебание можно и другими способами. Например, если начальная функция нечетна относительно середины струны, то

$$A_1 = 0$$

и низший тон соответствует частоте

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если звучащую струну взять точно за середину, то звук её резко меняется и она звучит в октаву к своему тону. Этот приём изменения тона часто применяется при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах и носит название флажолета. С точки зрения теории колебания струн это явление совершенно ясно. В момент прикосновения к середине струны мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняем лишь гармоники, имеющие в этой точке узлы. Таким образом, остаются только четные гармоники и самой низкой частотой будет ω_2. Если прикоснуться к струне на расстоянии $1/3$ её длины от края, то высота основного тона повышается втрое, так как при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = l/3$.

Формулы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\ \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}, \tag{10}$$

определяющие соответственно частоту и период основного колебания, объясняют следующие законы колебания струн, открытые впервые экспериментально (законы Мерсена).

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебания струны пропорционален её длине.

2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \tag{11}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l, \tag{12}$$

и однородными граничными условиями

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t>0. \tag{13}$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

рассматривая при этом t как параметр. Для нахождения $u(x,t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x,t)$ и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi, \tag{15}$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi, \tag{16}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi. \tag{17}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t)-\ddot{u}_n(t)+f_n(t)\right\}=0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, то есть

$$\ddot{u}_n(t)+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t)=f_n(t). \tag{18}$$

Для определения $u_n(t)$ получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

откуда следует

$$u_n(0)=\varphi_n,\ \dot{u}_n(0)=\psi_n. \tag{19}$$

Эти дополнительные условия полностью определяют решение уравнения (18). Функцию u_n можно представить в виде

$$u_n(t)=u_n^{(I)}(t)+u_n^{(II)}(t),$$

где

$$u_n^{(I)}(t)=\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\cdot f_n(\tau)d\tau \tag{20}$$

– решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями, и

$$u_n^{(II)}(t)=\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}at \tag{21}$$

– решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi na}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi na}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{22}$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях.

Обратимся к изучению первой суммы, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (15) для $f_n(t)$, находим

$$u^{(I)}(x,t)=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi na}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{23}$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi. \tag{24}$$

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть функция $f(\xi,\tau)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0,\tau_0)$:

$$\xi_0\le\xi\le\xi_0+\Delta\xi,\ \tau_0\le\tau\le\tau_0+\Delta\tau.$$

Функция $\rho f(\xi,\tau)$ представляет плотность действующей силы; сила, приложенная к участку $(\xi_0,\xi_0+\Delta\xi)$, равна

$$F(\tau)=\rho\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}f(\xi,\tau)d\xi,$$

причем

$$I=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}F(\tau)d\tau=\rho\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

есть импульс этой силы за время $\Delta\tau$. Если применить теорему о среднем значении к выражению

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

будем иметь

$$u(x,t)=G(x,\bar\xi,t-\bar\tau)\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{25}$$

где

$$\xi_0\le\bar\xi\le\xi_0+\Delta\xi,\ \tau_0\le\bar\tau\le\tau_0+\Delta\tau.$$

Переходя в формуле (25) к пределу при $\Delta\xi \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$, получим функцию

$$u(x,t) = G(x,\xi_0,t-\tau_0)\frac{I}{\rho}, \tag{26}$$

которую можно трактовать как влияние мгновенного сосредоточенного импульса мощности I.

Если известна функция $I/\rho \cdot G(x,\xi,t-\tau)$, представляющая действие единичного сосредоточенного импульса, то непосредственно ясно, что действие непрерывно распределенной силы $f(x,t)$ должно представляться формулой

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{27}$$

совпадающей с формулой (23), полученной выше.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.