ЛЕКЦИЯ 32

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

Рассмотрим потенциал простого слоя непрерывной плотности μ, распределенной по поверхности Ляпунова S:

$$u(M) = \iint_S \frac{\mu(P)}{r} ds, \ r = |MP|. \tag{1}$$

Во всех точках пространства, не принадлежащих поверхности S, потенциал простого слоя имеет производные любого порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Можно показать, что потенциал простого слоя стремится к нулю на бесконечности как $1/R$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Покажем, что потенциал простого слоя непрерывен во всём пространстве. Для этого достаточно доказать непрерывность потенциала в точках поверхности S. Пусть $N \in S$ – произвольная точка поверхности. Построим в точке N местную систему координат. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta \le d/4$ и S_1 – часть поверхности S, определенная условием $\xi^2 + \eta^2 \le \delta^2$ в местных координатах. Пусть, далее, σ – круг радиусом δ с центром в точке N в касательной плоскости, ρ – длина проекции отрезка MN на касательную плоскость, $|\mu(P)| \le A$. Тогда, принимая во внимание, что $ds = d\xi d\eta / \cos\gamma$, где γ – угол между векторами нормали в точках N и P,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \ge \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

и предполагая, что δ настолько мало, что $\cos\gamma > 1/2$, получаем

$$\left| \iint_{S_1} \frac{\mu(P) ds}{r} \right| \le 2A \iint_\sigma \frac{d\xi d\eta}{\rho}.$$

Положим, что точка M находится внутри сферы радиуса δ с центром в N. При этом проекция M_1 точки M на касательную плоскость принадлежит кругу σ. Круг σ_1 радиуса 2δ с центром в M_1 содержит весь круг σ, поэтому

$$\left| \iint_{S_1} \frac{\mu(P) ds}{r} \right| \le 2A \iint_{\rho \le 2\delta} \frac{d\xi d\eta}{\rho} = 2A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 8\pi A\delta.$$

Эта оценка не зависит от положения точки N на поверхности S. Фиксируя теперь δ так, чтобы $8\pi A\delta < \varepsilon$, получаем, что при любом положении точки M в шаре радиуса δ с центром в N справедлива оценка

$$\left| \frac{\mu(P)}{r} ds \right| \le \varepsilon. \tag{2}$$

Это означает, что интеграл (1) сходится равномерно в точке N и, следовательно, функция u непрерывна в точке N, лежащей на поверхности S, что и требовалось доказать.

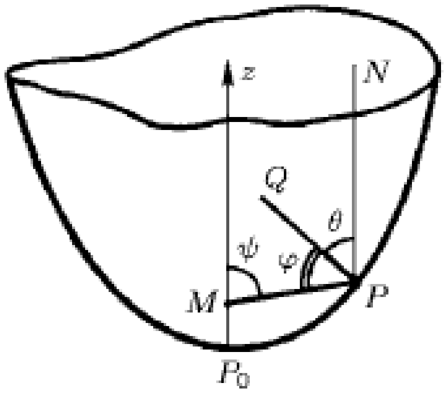
Нормальная производная потенциала простого слоя

Пусть ν_e – направление внешней нормали в некоторой точке P_0 поверхности S. Если M лежит не S, то потенциал простого слоя $u(M)$ можно дифференцировать по направлению ν_e под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \nu_e} = \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_e} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \mu(P) \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

Отметим разницу между последним интегралом и потенциалом двойного слоя. В выражении для потенциала двойного слоя $\varphi = (\vec{r}, \nu)$, где ν – единичный вектор внешней нормали в переменной точке P, а в полученном интеграле $\psi = (\vec{r}, \nu_e)$, где ν_e – единичный вектор внешней нормали в фиксированной точке P_0. В обоих случаях $\vec{r}$ – единичный вектор, сонаправленный вектору MP.

Покажем, что нормальные производные простого слоя имеют на S разрыв такого же типа, как и потенциал двойного слоя.



Пусть $P_0 \in S$ – некоторая точка поверхности. Из точки P_0 проведём ось z, которую можно направить либо вдоль внешней, либо вдоль внутренней нормали. Рассмотрим производную du/dz в некоторой точке M оси z. Обозначим через $(du/dz)_i$ и $(du/dz)_o$ пределы производной du/dz при стремлении точки M к точке P_0 с внутренней или наружной стороны поверхности S.

Если ось z направлена по внешней (внутренней) нормали, то эти значения называются внутренними и внешними предельными значениями производной по внешней (внутренней) нормали в точке P_0. Предел разностного отношения

$$\frac{u(M) - u(P_0)}{|MP_0|}$$

при $M \to P_0$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу изнутри для производной по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_0.

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на S. Производная du/dz в точке M оси z, направленной по внутренней нормали, равна

$$\frac{du(M)}{dz} = \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \iint_S \frac{\cos\psi}{r^2} \mu(P) ds, \tag{3}$$

где ψ – угол между осью z и вектором $\vec{MP}$. Проведём из точки P нормаль PQ и прямую PN, параллельную оси z (нормали в точке P_0), и обозначим через θ угол NPQ, равный углу между нормалями в точках P и P_0. Очевидно, что θ и $\sin\theta$ стремятся к нулю, когда $P \to P_0$.

Выражение для потенциала двойного слоя $w(M)$ содержит множитель $\cos\varphi/r^2$, где φ равен углу MPQ. Так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то

$$\cos(\pi - \psi) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\Omega = -\cos\psi,$$

где Ω – двугранный угол с ребром PQ. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = -\iint_S \mu\cos\theta \frac{\cos\varphi}{r^2} ds - \iint_S \mu\sin\theta\cos\Omega \frac{\sin\varphi}{r^2} ds = -w_1(M) - v(M),$$

где $w_1(M)$ – потенциал двойного слоя с плотностью $\mu_1 = \mu\cos\theta$, имеющий разрыв на поверхности S.

Поскольку $\sin\theta \to 0$ при $M \to P_0$, интеграл $v(M)$ сходится равномерно в точке P_0, то есть является функцией, непрерывной в P_0.

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i = -w_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - v(P_0),\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o = -w_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - v(P_0). \qquad (4)$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = -w_1(P_0) - v(P_0) =$$

$$= \left[-\iint_S \mu\cos\theta\frac{\cos\varphi}{r^2}ds - \iint_S \mu\sin\theta\cos\Omega\frac{\sin\varphi}{r^2}ds\right]_{M=P_0} = \iint_S \mu\frac{\cos\psi_0}{|P_0P|^2}ds,$$

где ψ_0 – угол между осью z и вектором $\vec{P_0P}$. Замечая, что $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$, находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_i}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_i}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0),\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_i}\right)_o = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_i}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \qquad (5)$$

так как по условию ось z направлена по внутренней нормали.

Если направить ось z по внешней нормали, то знак $\cos\psi$ изменится и получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_e}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_e}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_e}\right)_o = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_e}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0). \qquad (6)$$

Для случая двух переменных имеют место аналогичные формулы с заменой 2π на π.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

При помощи поверхностных потенциалов краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона могут быть сведены к интегральным уравнениям. Рассмотрим внутренние краевые задачи для некоторого контура C:

Найти функцию u, гармоническую в области D, ограниченной контуром C, и удовлетворяющую на C граничным условиям

$$u|_C = f \text{ первая краевая задача}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_C = f \text{ вторая краевая задача,}$$

где ν – единичный вектор внутренней нормали.

Аналогично ставятся внешние краевые задачи.

Будем искать решение внутренней первой краевой задачи в виде потенциала двойного слоя:

$$w(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{r}\mu(P)ds = -\int_C \frac{d}{d\nu_P}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mu(P)ds.$$

При любом выборе μ функция w удовлетворяет уравнению Лапласа внутри C. Функция w разрывна на контуре C. Для выполнения граничного условия, очевидно, надо, чтобы

$$w_i(M) = f(M),\ M \in C.$$

Получаем, таким образом, уравнение для определения функции μ:

$$\pi\mu(M) + \int_C \frac{\cos\varphi}{r}\mu(P)ds = f(M),\ M \in C. \tag{7}$$

Обозначим через s_0 и s дуги контура C, соответствующие точкам M и P. Уравнение (7) можно переписать в виде

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0), \tag{8}$$

где L – длина контура C,

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{d\nu_P}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\varphi}{r},\ r = |PM|.$$

Уравнение (8) - интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Для внешней задачи аналогично получается уравнение

$$-\pi\mu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0). \tag{9}$$

Решение второй краевой задачи ищут в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_C \mu(P)\ln\frac{1}{r}ds.$$

Для внутренней задачи получается уравнение

$$-\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0), \tag{10}$$

а для внешней задачи – уравнение

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0), \tag{11}$$

где

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial\nu_M}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\psi}{r} = K(s, s_0),\ r = |MP|.$$

Первая краевая задача для круга

Пусть контур C является окружностью радиуса R. Внутренняя нормаль в точке P направлена по диаметру и

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{(\cos\varphi)}{|PP_0|} = \frac{1}{2R},$$

так как φ – это угол P_0PP'. Интегральное уравнение для функции μ принимает вид

$$\mu(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\mu(s)ds = \frac{1}{\pi}f(s_0).$$

Его решением является функция

$$\mu(s) = \frac{1}{4\pi}f(s) + A,$$

где A – некоторая постоянная, подлежащая определению. Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение, имеем

$$\frac{1}{\pi}f(s_0) + A + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{4\pi}f(s) + A\right)ds = \frac{1}{\pi}f(s_0),$$

откуда

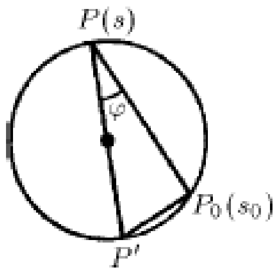
$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)ds.$$

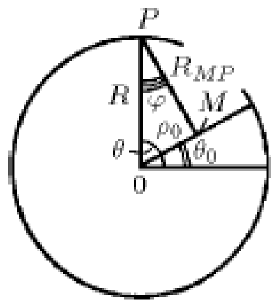
Таким образом, решением интегрального уравнения является функция

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi}f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)ds.$$

Соответствующий потенциал двойного слоя равен

$$w(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{r}\mu(P)ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{r}\left(\frac{1}{\pi}f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s')ds'\right)ds$$





Преобразуем правую часть полученной формулы, предполагая, что M лежит внутри C:

$$w = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{\cos\varphi}{r}f(s)ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s')ds'\right)ds\int_C \frac{\cos\varphi}{r}ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_C \frac{\cos\varphi}{r}f(s)ds - 2\pi\left(\frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)ds\right)ds = \frac{1}{\pi}\int_C \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right)f(s)ds.$$

Из треугольника OPM видно, что $\rho_0^2 = \mathrm{R}^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$ $(r = R_{MP})$ и

$$K = \frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R} = \frac{2R\cos\varphi - r}{2Rr} = \frac{2Rr\cos\varphi - r^2}{2Rr^2} = \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_0))}.$$

Подставляя выражение для K, получаем интеграл Пуассона

$$u = w(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)f(\theta)d\theta}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{12}$$

дающий решение первой краевой задачи для круга.

При любой непрерывной функции f формула (12) определяет гармоническую функцию, непрерывно примыкающую к граничным значениям f. Если функция f кусочно-неппрерывна, то в силу свойства потенциала двойного слоя функция w также непрерывна во всех точках непрерывности f. Из ограниченности функции f $(f < C)$ следует ограниченность функции (12):

$$|w(\rho_0, \theta_0)| < C\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_9)}d\theta = C,$$

так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_9)}d\theta=1.$$

Первая краевая задача для полупространства

Найти гармоническую функцию, непрерывную всюду в области $z \geq 0$, принимающую на границе $z=0$ заданнное значение $f(x,y)$. Будем искать решение этой задачи в виде потенциала двойного слоя:

$$w(x,y,z)=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\varphi}{r^2}\mu(\xi,\eta)d\xi d\eta,\ r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2.$$

В данном случае

$$\frac{\cos\varphi}{r^2}=\frac{z}{R^2}\frac{z}{[(x-\xi)^2}+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}$$

и ядро итегрального уравнения равно нулю. Таким образом, плотность потенциала двойного слоя

$$\mu(P)=\frac{1}{2\pi}f(P),$$

искомая функция равна

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Функция u равномерно стремится к нулю при $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$, если этим свойством обладает функция f.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.