Вариант 5 Задание 7 Киселева Кс.

382161ПМоп2

$f(x) = ch^2(x) + sh^2(x)$

x	0,0520	0,0570	0,0620	0,0670	0,0720
f(x)	1,00541	1,00651	1,00770	1,00899	1,01039

$$I = \int_{0,052}^{0,072} f(x)dx$$

1) квадратурная формула (трапеций) I_1

$$ВП_1 = \frac{h}{2}(\delta_1 + \delta_2)$$

$$|ВП_1| \le \delta h = 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,005 = 2,5 \cdot 10^{-8}$$

$$|\psi_1| \le \frac{h^3}{12} \max f''(\xi) \quad \xi \in [0,052; 0,072]$$

$$|\psi_1| \le \frac{(0,005)^3}{12}\left(4(ch^2(0,072) + sh^2(0,072))\right) \approx 4,20994 \cdot 10^{-8}$$

$$|ОП_1| \le |\psi_1| + |ВП_1| = 2,5 \cdot 10^{-8} + 4,20994 \cdot 10^{-8} = 6,70994 \cdot 10^{-8}$$

2) составная квадратурная формула $I_{1,m}$ (трапеций) на равном. сетке

$$|ВП_{1,m}| \le \delta h \quad h = \frac{0,072 - 0,052}{4} = 0,005$$

$$|ВП_{1,4}| \le 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,005 = 2,5 \cdot 10^{-8}$$

$$|\psi_{1,m}| \le \frac{1}{12}\sum_{0}^{m-1} h^3 \quad (f''(\xi_i)) \quad \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$$

$$|\psi_{1,4}| \le \frac{4}{12} \cdot (0,005)^3 \Big(ch^2(0,052) + sh^2(0,052) + ch^2(0,057) + sh^2(0,057) +$$

$$+ sh^2(0,062) + ch^2(0,062) + ch^2(0,067) + sh^2(0,067) + ch^2(0,072) + sh^2(0,072)$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 200^3}\big(1,00541 + 1,00651 + 1,0077 + 1,01039\big) = 1,67917 \cdot 10^{-7}$$

$$|ОП_{1,4}| \le 2,667917 \cdot 10^{-8}$$

3) квадратурная формула I_2 (симпсона)

$$|ВП_2| \leq 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,02 = 10^{-7}$$

$$|\Psi_2| \leq \frac{1}{90} \max |f^{IV}(x)| \cdot h^5$$

$$|\Psi_2| \leq \frac{1}{90} 16 \cdot 1,01039 \cdot (0,005)^5 = 5,61328 \cdot 10^{-13}$$

$$|ОП_2| \leq |\Psi_2| + |ВП_2| = 5,61328 \cdot 10^{-13} + 10^{-7} = 1,00001 \cdot 10^{-7}$$

4) составная квадратурная формула $I_{2,m}$ (симпсона) на равн. с

$$|ВП_{2,m}| \leq \delta(b-a) = 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,02 = 10^{-7}$$

$$|\Psi_{2,m}| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \cdot \frac{1}{90} \max_{x \in [0,052;0,072]} f^{IV}(x) = \left(\frac{0,02}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{1}{90} \cdot 16 \cdot 1,01039 =$$

$$= 7,0166 \cdot 10^{-14}$$

$$|ОП_{2,4}| \leq 10^{-7} + 7,0166 \cdot 10^{-14} \approx 10^{-7}$$

Метод	m	Оценка ВП	Оценка Ψ	Оценка ОП
$I_{1,m}$	4	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$0,167917 \cdot 10^{-8}$	$2,667917 \cdot 10^{-8}$
I_1	–	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$4,20994 \cdot 10^{-8}$	$6,70994 \cdot 10^{-8}$
$I_{2,m}$	4	10^{-7}	$7,0166 \cdot 10^{-14}$	10^{-7}
I_2	–	10^{-7}	$5,61328 \cdot 10^{-13}$	$1,000001 \cdot 10^{-7}$

Задание 8

$$I = \int_{2,00}^{2,08} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \sim I_2$$

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(F(a) + 4(f(a+h)) + f(b)\right)$$

$$I_2 = \frac{0,04}{3}\left(\frac{\sin(2)}{2} + 4\left(\frac{\sin(2,04)}{2,04}\right) + \frac{\sin(2,08)}{2,08}\right)$$

$$|ВП_2| \le \delta(b-a) = 0,5\cdot 10^{-8}(2,08-2) = 0,4\cdot 10^{-9}$$

$$|\Psi_2| \le \hat{M} h^5 \quad \left(\hat{M} = \frac{1}{90}\max_{x\in[2;2,08]}|f^{IV}(x)|\right)$$

$$|\Psi_2| \le (0,04)^5 \cdot \frac{1}{90}\, 0,0193 \approx 2,19591\cdot 10^{-11}$$

$$|ОП_2| \le |\Psi_2| + |ВП_2| = 2,1991\cdot 10^{-11} + 0,4\cdot 10^{-9} = 4,21991\cdot 10^{-10}$$

Задание 9

$$I = \int_2^8 \frac{\sin(x)}{x}\,dx \sim I_{2,m}$$

$$I_{2,m} = \sum_0^m \frac{\hat{h}}{3}\left(f_i + 4 f_{i+\frac{1}{2}} + f_{i+1}\right) \quad \hat{h} = \frac{6}{2m} = \frac{1}{3m}$$

$$|ВП_{2,m}| \le \delta(b-a) = 0,5\cdot 10^{-8}\cdot 6 = 3\cdot 10^{-8}$$

$$|\Psi_{2,m}| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M} \quad \left(\hat{M} = \frac{1}{90}\max_{x\in[2,8]}|f^{IV}(x)|\right) =$$

$$= \left(\frac{8-2}{2}\right)^5 \frac{1}{m^4}\cdot\frac{1}{90}\, 0,093 = 0,251\frac{1}{m^4}$$

$$|ОП_{2,m}| \le 3\cdot 10^{-8} + 0,251\frac{1}{m^4} \le \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-6}$$

$$m = 28$$