Модуль 8-9

Задача 1

Вариант 4

Задача Дирихле для уравнения Пуассона имеет вид:

$\Delta u(x,y) = -f(x,y)$ при $x \in (a,b)$, $y \in (c,d)$

$u(a,y) = \mu_1(y)$, $u(b,y) = \mu_2(y)$, $y \in (c,d)$ (1)

$u(x,c) = \mu_3(x)$, $u(x,d) = \mu_4(x)$, $x \in (a,b)$

где $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Функции $f(x,y)$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$ и числа a, b, c, d будем считать заданными. Область – прямоугольник $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$

1) Сетка (n, m): $h = \frac{b-a}{n}$, $k = \frac{d-c}{m}$

(x_i, y_j), где $x_i = a + ih$, $y_i = c + ik$ $i = \overline{0,n}$ $j = \overline{0,m}$ – узлы сетки

$u(x,y)$ – точное решение задачи (1)

$u_{ij} = u(x_i, y_j)$ – значение точного решения в узле (i,j)

Значения функции $u(x,y)$ в граничных узлах известны из граничных условий задачи

$v(x,y)$ – сеточная функция

$v_{ij} = v(x_i, y_j)$ – ее значения в узле (i,j) $i = \overline{0,n}$ $j = \overline{0,m}$

Разностная схема

$$\begin{cases} [v_{x\bar{x}}]_{ij} + [v_{y\bar{y}}]_{ij} = -f_{ij}, \text{ при } i = \overline{1,n-1} \quad j = \overline{1,m-1} \\ v_{0j} = \mu_j = \mu_1(y_j), \ v_{nj} = \mu_{2j} = \mu_2(y_j) \text{ при } j = \overline{1,m-1} \\ v_{i0} = \mu_{3i} = \mu_3(x_i), \ v_{ni} = \mu_{4i} = \mu_4(x_i) \text{ при } i = \overline{1,n-1} \end{cases} \quad (2)$$

где $[v_{x\bar{x}}]_{ij} = \frac{v_{i+1j} - 2v_{ij} + v_{i-1j}}{h^2}$; $[v_{y\bar{y}}]_{ij} = \frac{v_{ij+1} - 2v_{ij} + v_{ij-1}}{k^2}$

$v(x,y)$ - точное решение (2)

Данная функция явл. сеточной.

2) Положим, что вектор неизвестных значений [illegible] функции не подержит компонент, соответствующих граничным узлам, запишем РС в матричном виде:

1) $(n, m) = (2, 2)$
2) $(n, m) = (3, 3)$
3) $n > 3, m > 3 \Rightarrow (4, 4)$

Укажем эл-ты матрицы, компоненты вектора и все компоненты правой части

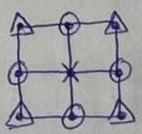
Правило обхода: Компоненты вектора упорядочены „снизу вверх" по y и затем „слева направо" по x

Уравнения схемы упорядочены „слева направо" по x и „сверху вниз" по y.

РС:

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} v_{i-1j} + \frac{1}{k^2} v_{ij-1} - 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) v_{ij} + \frac{1}{k^2} v_{ij+1} + \frac{1}{h^2} v_{i+1j} = -f_{ij} & i = \overline{1, n-1} \quad j = \overline{1, m-1} \\ v_{0j} = \mu_1(y_j) & j = \overline{0, m} \\ v_{nj} = \mu_2(y_j) & j = \overline{0, m} \\ v_{i0} = \mu_3(x_i) & i = \overline{0, n} \\ v_{in} = \mu_4(x_i) & i = \overline{0, n} \end{cases}$$

1) $(n, m) = (2, 2)$



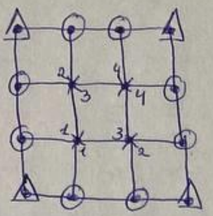
x - точки в которых используется схема

⊙ - учитываются в расчете, известны

△ - известны, но не учит. в расчете

$$-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) v_{11} = -f_{11} - \frac{1}{h^2}\left(\mu_1(y_1) + \mu_2(y_1)\right) - \frac{1}{k^2}\left(\mu_3(x_1) + \mu_4(x_1)\right)$$

2)

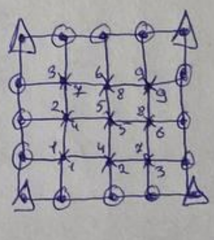


$g \times_e$ g - номер значения в векторе
e - номер значения уравнения

$$\begin{bmatrix} -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ \frac{1}{h^2} & 0 & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & 0 & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -f_{11} - \frac{1}{h^2}\mu_1(y_1) - \frac{1}{k^2}\mu_3(x_1) \\ -f_{21} - \frac{1}{h^2}\mu_2(y_1) - \frac{1}{k^2}\mu_3(x_2) \\ -f_{12} - \frac{1}{h^2}\mu_1(y_2) - \frac{1}{k^2}\mu_4(x_1) \\ -f_{22} - \frac{1}{h^2}\mu_1(y_2) = \frac{1}{k^2}\mu_4(x_2) \end{bmatrix}$$

3) $(n,m) = (4,4)$



$$v = (v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33})$$

$$
\begin{bmatrix}
-2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} & 0 \\
\frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & \frac{1}{k^2} \\
0 & \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-f_{11} - \frac{1}{h^2}\mu_1(y_1) - \frac{1}{k^2}\mu_3(x_1) \\
-f_{21} - \frac{1}{k^2}\mu_3(x_2) \\
-f_{31} - \frac{1}{k^2}\mu_2(y_1) - \frac{1}{k^2}\mu_3(x_3) \\
-f_{\ 2} - \frac{1}{h^2}\mu_1(y_2) \\
-f_{22} \\
-f_{32} - \frac{1}{h^2}\mu_2(y_2) \\
-f_{13} - \frac{1}{h^2}\mu_1(y_3) - \frac{1}{k^3}\mu_4(x_1) \\
-f_{23} - \frac{1}{k^2}\mu_4(x_2) \\
-f_{33} - \frac{1}{h^2}\mu_2(y_3) - \frac{1}{k^2}\mu_4(x_3)
\end{bmatrix}
$$

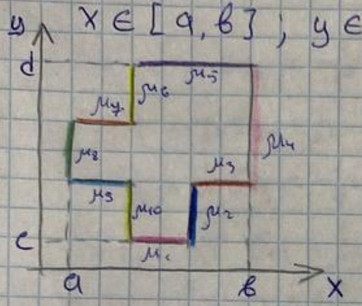
Задача 2

Вариант 5

Этап 1 Построение численного решения

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -f(x,y) & (x,y)\in G \\ u(x,y) = \mu(x,y), & (x,y)\in \partial G \end{cases}$$

$x\in[a,b]$; $y\in[c,d]$



Основная сетка

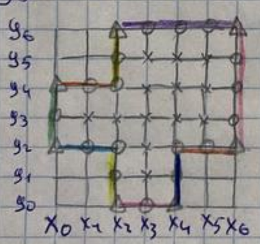
$\Phi = \omega_{hk} \cup \gamma_{hk}$, ω_{hk} – внутренние узлы

γ_{hk} – граничные углы без внешних углов

$h = \frac{b-a}{n}$ $\quad k = \frac{d-c}{m}$

$x_i = a + ih \quad i\in[0,n]$

$y_j = c + ik \quad j\in[0,m]$



$$[v_{\bar{x}x}]_{ij} + [v_{\bar{y}y}]_{ij} = -f_{ij} \quad (i,j)\in\omega_{hk}$$

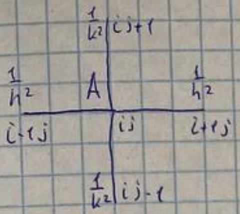
$$v_{ij} = \mu(x_i y_j), \quad (i j)\in\gamma_{hk}$$

$$V = (v_{31}\, v_{32}\, v_{13}\, v_{23}\, v_{33}\, v_{43}\, v_{53}\, v_{34}\, v_{44}\, v_{54}\, v_{35}\, v_{45}\, v_{55})$$

$$\mu \begin{cases} \mu_1(x) = c \\ \mu_2(y) = \frac{2(a+b)}{3} \\ \mu_3(x) = \frac{c+d}{3} \\ \mu_4(y) = b \\ \mu_5(x) = d \\ \mu_6(y) = \frac{a+b}{3} \\ \mu_7(x) = \frac{2(c+d)}{3} \\ \mu_8(y) = a \\ \mu_9(x) = \frac{c+d}{3} = \mu_3(x) \\ \mu_{10}(y) = \frac{a+b}{3} = \mu_6(y) \end{cases}$$

ГУ:

$$\begin{cases} u(x, c) = \mu_1(x) \\ u\left(\frac{2(a+b)}{3}, y\right) = \mu_2(y) \\ u\left(x, \frac{c+d}{3}\right) = \mu_3(x) \\ u(b, y) = \mu_4(y) \\ u(x, d) = \mu_5(x) \\ u\left(\frac{a+b}{3}, y\right) = \mu_6(y) \\ u\left(x, \frac{2(c+d)}{3}\right) = \mu_7(x) \\ u(a, y) = \mu_8(y) \\ u\left(x, \frac{c+d}{2}\right) = \mu_9(x) = \mu_3(x) \\ u\left(\frac{a+b}{3}, y\right) = \mu_{10}(y) = \mu_6(y) \end{cases}$$



$A = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)$

$Av = F \quad , v \in \mathbb{R} \quad , F \in \mathbb{R}$

$Av_{31} + \frac{1}{k^2} v_{32} = -\frac{1}{k^2}\mu_{10}(y_1) - \frac{1}{h^2}\mu_1(x_3) - \frac{1}{k^2}\mu_2(y_1) - f_{31} = F_1$

$Av_{32} + \frac{1}{k^2} v_{31} + \frac{1}{k^2} v_{33} = -\frac{1}{k^2}\mu_{10}(y_2) - \frac{1}{k^2}\mu_2(y_2) - f_{32} = F_2$

$Av_{13} + \frac{1}{h^2} v_{23} = -\frac{1}{k^2}\mu_8(y_3) - \frac{1}{h^2}\mu_7(x_1) - \frac{1}{h^2}\mu_9(x_1) - f_{13} = F_3$

$Av_{23} + \frac{1}{h^2} v_{13} + \frac{1}{h^2} v_{33} = -\frac{1}{h^2}\mu_7(x_2) - \frac{1}{h^2}\mu_9(x_2) - f_{23} = F_4$

$Av_{33} + \frac{1}{h^2} v_{23} + \frac{1}{h^2} v_{43} + \frac{1}{k^2} v_{32} + \frac{1}{k^2} v_{34} = -f_{33} = F_5$

$Av_{43} + \frac{1}{h^2} v_{33} + \frac{1}{h^2} v_{53} + \frac{1}{k^2} v_{44} = -\frac{1}{h^2}\mu_3(x_4) - f_{43} \; F_6$

$Av_{53} + \frac{1}{h^2} v_{43} + \frac{1}{k^2} v_{54} = -\frac{1}{h^2}\mu_4(y_3) - \frac{1}{k^2}\mu_3(x_3) - f_{53} = F_8$

$Av_{34} + \frac{1}{k^2} v_{33} + \frac{1}{k^2} v_{35} + \frac{1}{h^2} v_{44} = \frac{1}{h^2}\mu_7(y_4) - f_{34} = F_9$

$Av_{44} + \frac{1}{k^2} v_{45} + \frac{1}{k^2} v_{43} + \frac{1}{h^2} v_{34} + \frac{1}{h^2} v_{54} = -f_{44} = F_{10}$

$Av_{54} + \frac{1}{k^2} v_{53} + \frac{1}{k^2} v_{55} + \frac{1}{h^2} v_{44} = -\mu_4(y_3) - f_{54} = F_{11}$

$Av_{35} + \frac{1}{k^2} v_{34} + \frac{1}{h^2} v_{45} = -\mu(x_3) - \mu(y_5) - f_{35} = F_{12}$

$Av_{45} + \frac{1}{h^2} v_{55} + \frac{1}{h^2} v_{35} + \frac{1}{k^2} v_{44} = -\mu(x_4) - f_{45} = F_{13}$

$Av_{55} + \frac{1}{h^2} v_{45} + \frac{1}{k^2} v_{54} = -\mu_5(x_5) - \mu_4(y_5) - f_{55} = F_{14}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\upsilon_{31} & \upsilon_{32} & \upsilon_{13} & \upsilon_{23} & \upsilon_{33} & \upsilon_{43} & \upsilon_{53} & \upsilon_{34} & \upsilon_{44} & \upsilon_{54} & \upsilon_{35} & \upsilon_{45} & \upsilon_{55}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{k^2} & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{k^2} & A & & & \frac{1}{k^2} & & & & & & & & \\
 & & A & \frac{1}{h^2} & & & & & & & & & \\
 & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & & & & & & & \\
 & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{h^2} & A & & & \frac{1}{k^2} & & & \\
 & & & & \frac{1}{k^2} & & & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & \\
 & & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & \\
 & & & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & & & \frac{1}{k^2} \\
 & & & & & & & \frac{1}{k^2} & & & A & \frac{1}{h^2} & \\
 & & & & & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} \\
 & & & & & & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\upsilon_{31} \\ \upsilon_{32} \\ \upsilon_{13} \\ \upsilon_{23} \\ \upsilon_{33} \\ \upsilon_{43} \\ \upsilon_{53} \\ \upsilon_{34} \\ \upsilon_{44} \\ \upsilon_{54} \\ \upsilon_{35} \\ \upsilon_{45} \\ \upsilon_{55}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13}
\end{pmatrix}
$$