1. Запишите следующие линейные матричные неравенства в стандартной форме и найдите их решения, изобразите полученные области на плоскости.

(а) $F(x) = \begin{bmatrix} 1-x-y & y-x \\ y-x & 4x-2y-1 \end{bmatrix} < 0;$ **(б)** $F(x) = \begin{bmatrix} 1-x & y-x \\ y-x & 2x-1 \end{bmatrix} > 0.$

2. Покажите, что следующие области являются LMI-областями:

(а) $D = \{(x,y) : x < 0, |y| < r\}$; **(б)** $D = \{(x,y) : x > ay^2 + c\}$; **(в)** $D = \{(x,y) : x^2 + py^2 < r^2\}$.

3. Проверьте, что линейная система

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4.2386 & -0.2026 & 0.7193 \\ 2.6649 & -2.8342 & 0.0175 \\ 0.0344 & 0.0005 & -3.1772 \end{bmatrix} x(t)$$

является D-устойчивой, где область D имеет вид:

$$D = H_2 \cap D_{3,3} = \{(x,y) : x < -2, (x+3)^2 + y^2 < 9\}.$$

Для этого сформулируйте задачу в терминах линейных матричных неравенств и проверьте их разрешимость, используя либо пакет cvx, либо MATLAB LMI Toolbox (в качестве альтернативы можно использовать пакет cvxopt и язык программирования Python).

4. Используя линейные матричные неравенства, проверить является ли система стабилизируемой:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u.$$

5. Используя линейные матричные неравенства, проверить является ли система детектируемой:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} x.$$

6. Используя линейные матричные неравенства, **(а)** проверить является ли система стабилизируемой и детектируемой, **(б)** синтезировать асимптотический наблюдатель.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

7. Синтезируйте стабилизирующую линейную обратную связь по состоянию для систем:

(а) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 250 & 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u;$ **(б)** $x_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k.$

Можно ли синтезировать линейную обратную связь так, чтобы матрица замкнутой системы имела характеристические числа, расположенные внутри области $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 3,\ x < -1,\ |x| > |y|\}$.

8. Пусть характеристическая функция LMI-области D задается матрицами:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Синтезируйте D-стабилизирующую линейную обратную связь по состоянию для систем:

(а) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u;$ **(б)** $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1.5 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} u.$