ЛЕКЦИЯ 1

Введение

Математическая физика – это математическая дисциплина, изучающая математические модели физических явлений.

Классическая математическая физика – часть теории дифференциальных уравнений в частных производных. Как известно, дифференциальное и интегральное исчисление возникло в конце XVII века, его основоположники – Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц. В 1687 г. И. Ньютон сормулировал в своей книге «Математические начала натуральной философии» три важнейших закона классической механики - законы Ньютона. Можно считать, что это полужило началом формирования математической физики и её методов. В XVIII веке объектом изучения математической физики являлись колебания струн,

Рис. 1: Исаак Ньютон

стержней и маятников, задачи акустики, гидродинамики, аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Д. Бернулли, П. Лаплас). В XIX веке идеи математической физики получили новое развитиев в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами, теорией устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, К. Гаусс, О. Коши, Л. Больцман, М.В. Остроградский, П. Дирихле, Б. Риман, С.В. Ковалевская, Д. Стокс, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Г. Р. Кирхгоф, Ж. Адамар, Д. Гильберт).

В XX веке к задачам математической физики добавились задачи теории относительности, квантовой физики, новые проблемы газовой динамики, кинетических уравнений, теории ядерных реакторов, физики плазмы (А. Эйнштейн, Н.Н. Боголюбов, П. Дирак, В.С. Владимиров, В.П. Маслов, А. Пуанкаре, Д. Гильберт, , В. А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг). Соответственно расширился и круг используемых математических средств. Наряду с классической теорией дифференциальных и интегральных уравнений для описания физических явлений применяется теория операторов, теория обобщённых функций, теория функций многих комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, теория чисел, p-адический анализ, асимптотические и вычислительные методы.

Математическая модель представляет собой, как правило, замкнутую систему уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и других) для характерных функций изучаемой задачи. Эти уравнения описывают некоторые законы природы (например, законы сохранения энергии, массы, импульса и т.д.), включают информацию о свойствах среды (например, в виде коэффициентов уравнений) и условиях протекания процессов. При этом одни и те же модели могут описывать процессы разной природы. Например, одно и то же дифференциальное уравнение используется для описания процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации, намагничивания.

Большинство рассматриваемых задач в настоящее время решается численно, с применением высокопроизводительной вычислительной техники. Необходимым этапом исследования математической модели является, поэтому, изучение постановок возникающих математических задач. В частности, требуется определить условия, при которых решение задачи существует и единственно, установить характер зависимости решения от входных данных.

В настоящем курсе мы ограничимся изучением базовых моделей математической физики, сводящихся к краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение,связывающее неизвестную функцию нескольких переменных, её частные производные и сами независимые переменные. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения с частными производными.

Обозначим через R^n n-мерное евклидово пространство, и пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точка R^n, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

Уравнение k-го порядка в частных производных от неизвестной функции u переменных x_1,..., x_n имеет вид

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0.$$

Соответственно, дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка –

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется **линейным относительно старших производных**, если имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}). \quad (2)$$

Уравнение назвается **линейным**, если оно линейно как относительно старших производных так и относительно функции и её первых производных:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x). \quad (3)$$

Функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, $a(x)$ называются коэффициентами уравнения, а функция f– свободным членом.

Если коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, уравнения (2) являются, подобно F, функциями x_1,... x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, то уравнение называется **квазилинейным**.

Если коэффициенты линейного уравнения (3) не зависят от x_1,..., x_n, то уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Линейное уравнение называется однородным, если $f = 0$.

Решением уравнения с частными производными называется всякая функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, такая, что если её и её частные производные подставить в уравнение, уравнение обратиться в тождество по независимым переменным.

Решение уравнения будет рассматриваться в некоторой области (непустом связном открытом множестве) в R^n. Если размерность пространства не превосходит трёх, независимые переменные, вместо x_1, x_2, x_3 часто обозначаются x, y, z. Например, линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными можно записать в виде

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d_1u_x + d_2u_y + eu + f = 0,$$

где коэффициенты и f - функции x и y. При описании нестационарных физических процессов иногда используется $n+1$ переменная, из которых одна, обозначаемая буквой t, указывает на момент времени, остальные n переменных характеризуют положение точки в пространстве.

Рассмотрим примеры дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих различные физические процессы.

Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Вводя дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

можкм записать уравнение в виде

$$\Delta u = 0.$$

Соответствующее неоднородное уравнение

$$-\Delta u = F,$$

где $F = F(x)$, называется уравнением Пуассона.

Уравнения Лапласа и Пуассона возникают в разнообразных задачах для описания стационарного (то есть не меняющегося со временем)состояния тех или иных объектов.

Например, стационарное распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся со временем) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворяют уравнению Пуассона. Потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнения Пуассона с функцией F, пропорциональной плотности зарядов (тем самым, в области, где нет зарядов, он удовлетворяет уравнению Лапласа).

Уравнение колебаний

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объёмов) и физики (электромагнитны колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{4}$$

где неизвестная функция u зависит от n пространственных координат и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, в которой происходит колебательный процесс; свободный член F выражает интенсивность внешнего возмущения.

В соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

то есть уравнение (4) можно переписать в виде

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p\Delta u + (\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} u) - qu + F.$$

При $F \neq 0$ колебания называются вынужденными, а при $F = 0$ - свободными.

В случае малых поперечных колебаний натянутой нити, не сопротивляющуюся изгибу, уравнение имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F,$$

где (x, u) есть координаты плоскости, в которой струна совершает поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x, ρ – плотность среды, T_0 – сила, с которой натянута струна.

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \text{ где } a^2 = \frac{T_0}{\rho},\ f = \frac{F}{\rho}.$$

Это уравнение называют также одномерным волновым уравнением.

Уравнение вида (4) описывает также малые продольные колебания упругого стержня

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F,$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения стержня и $E(x)$ - модуль Юнга в точке x.

Частным случаем уравнения колебаний с двумя пространственными переменными является уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F.$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f,\ a^2 = \frac{T_0}{\rho},\ f = \frac{F}{\rho},$$

называют двумерным волновым уравнением.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Волновые уравнения можно записать единой формулой

$$\Box_a u = f,$$

где $\Box_a = \partial^2/\partial t^2 - a^2\Delta$ $(\Box = \Box_1)$ – волновой оператор (оператор Даламбера).

Уравнение Гельмгольца

Пусть в волновом уравнении внешнее возмущение $f(x,t)$ периодическое с частотой ω и амплитудой $a^2 f(x)$, то есть

$$f(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Если искать периодические возмущения $u(x,t)$ с той же частотой и неизвестной амплитудой $u(x)$, то есть

$$u(x,t) = u(x) e^{i\omega t},$$

то подставив в волновое уравнение, получим стационарное уравнение для амплитуды

$$\Delta u + k^2 u = -f(x),\ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2},$$

называемое уравнением Гельмгольца.

К краевым задачам для уравнения Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Уравнения диффузии и теплопроводности

Процессы распространения тепла и диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{5}$$

где ρ - коэффициент пористости среды, а p и q характеризуют её свойства.

Если рассматривается процесс распространения тепла, то $u(x,t)$ есть температура среды в точке x в момент времени t. Считая среду изотропной, обозначим через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ соответственно её плотность, удельную теплоёмкость и коэффициент теплопроводности, а через $F(x,t)$ - интенсивность источников тепла. Процесс распространения тепла описывается функцией, удовлетворяющей уравнению вида

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t).$$

Если среда однородна, то есть c, ρ и k - постоянные, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho},\ f = \frac{F}{c\rho}.$$

Это уравнение называется уравнение теплопроводности. Число n пространственных переменных в этом уравнении может быть любым.

Контрольный вопрос

Запишите матрицы коэффициентов при старших производных для уравнений (4) и (5).

Список литературы

[1] Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

[2] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.