Модуль 10. Теоретический аппарат для построения и применения итерационных методов решения СЛАУ

Нормы векторов и матриц, согласованные и подчиненные нормы. Собственные числа, их свойства и оценка. Спектральный радиус, оценка нормы матрицы. Норма обратной матрицы. Симметричные и симметричные положительно определенные матрицы, их свойства и нормы. Число обусловленности, его влияние на свойства СЛАУ. Примеры плохой обусловленности. Механизм влияния обусловленности на погрешность решения СЛАУ. Нормализация. Скорость сходимости. Презентация модельных задач

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$Ax = b \tag{10.1}$$

Здесь $x \in R^n$, $b \in R^n$, $A\ (n \times n)$, $\det A \neq 0$ (невырожденная матрица).

Через x^* обозначим решение задачи (10.1), $x^* \in R^n$.

Итерационные методы решения СЛАУ генерируют последовательность приближенных решений задачи (10.1):

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots x^{(s)} \ldots$$

Определение. Итерационный метод называется сходящимся, если при любом выборе начального приближения последовательность приближенных решений сходится к точному решению:

$$\forall x^{(0)} \in R^n \quad \lim_{s \to +\infty} \left\| x^{(s)} - x^* \right\| = 0 .$$

Далее представлен теоретический аппарат, необходимый для построения итерационных методов и изучения их сходимости.

10.1. Нормы векторов и матриц, согласованные и подчиненные нормы

Определение. Нормой вектора $x \in R^n$ называется функционал $\| x \|$, удовлетворяющий трем аксиомам нормы:

1. $\| x \| \geq 0; \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Здесь $x, y \in R^n$, $\alpha -$ число.

Примеры. Обычно используют нормы

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i | \qquad \| x \|_2 = \sqrt{(x, x)} \qquad \| x \|_\infty = \max_{i=1,n} | x_i |$$

Определение. **Нормой матрицы** $A\ (n\times n)$ называется функционал $\| A \|$, удовлетворяющий четырем аксиомам нормы:

1. $\| A \| \geq 0; \| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\| \alpha A \| = | \alpha | \cdot \| A \|, \forall \alpha \in R$
3. $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$
4. $\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$

Здесь A, B – матрицы $(n\times n)$, α – число.

Определение. Норма матрицы **согласована** с нормой вектора, если $\forall x \in R^n$

$$\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \| \qquad (10.2)$$

Определение. Нормой матрицы, **подчиненной** норме вектора, называют функционал

$$\| A \| = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \qquad (10.3)$$

Примеры

Если в (10.3) использовать $\| x \|_1$ и $\| Ax \|_1$, получим норму $\| A \|_1$.

Если в (10.3) использовать $\| x \|_2$ и $\| Ax \|_2$, получим норму $\| A \|_2$.

Если в (10.3) использовать $\| x \|_\infty$ и $\| Ax \|_\infty$, получим норму $\| A \|_\infty$.

Для подчиненных норм справедливо следующее:

Утверждение 1. Функционал (10.3), то есть **подчиненная** норма, соответствует всем 4-м аксиомам нормы.

Утверждение 2. **Подчиненная** норма является **согласованной:** если $\| A \|$ удовлетворяет (10.3), то $\forall x \in R^n$ справедливо (10.2).

При изучении сходимости методов обычно используют подчиненные нормы. Это связано с тем, что оценки вида (10.2), записанные в подчиненных нормах, **оптимальны**: улучшить такие оценки можно только за счет сужения области их применения:

Утверждение 3. Пусть A – матрица $(n\times n)$. Рассмотрим оценки вида

$$\| Ax \| \leq M \cdot \| x \| \qquad (10.4)$$

Если выбрано $M \geq \| A \|$, оценка (10.4) верна для $\forall x$.

Если выбрано $M < \| A \|$, оценка (10.4) не может быть верна для $\forall x$.

При $M = \| A \|$ получим (10.2) и улучшить (10.2) нельзя.

(утверждения 1-3 доказать самостоятельно).

10.2. Собственные числа и спектральный радиус

Определение. **Собственными числами** матрицы A ($n \times n$) называются корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (10.5)$$

Обозначим их через $\lambda_i(A), i = 1,...n$, и напомним основные свойства:

1) Для любой квадратной матрицы A ($n \times n$) количество собственных чисел с учетом кратности корней *характеристического уравнения* (10.5) равно n. Если элементы матрицы A являются действительными числами, собственные числа могут быть как действительными, так и комплексными.

2) **Алгебраической кратностью** собственного числа λ называется кратность соответствующего корня характеристического уравнения (10.5).

3) Каждое собственное число λ имеет хотя бы один (с точностью до постоянного множителя) собственный вектор v.

4) Ненулевой вектор v называется собственным и ему соответствует собственное число λ, если $Av = \lambda v$.

5) Количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих некоторому собственному числу λ, называют **геометрической кратностью** собственного числа.

6) **Геометрическая кратность** собственного числа не меньше, чем 1, и не превосходит его **алгебраической кратности.**

7) Вырожденная матрица имеет нулевое собственное число:

$(\det A = 0) \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$ имеет корень $\lambda = 0$.

8) Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда все ее собственные числа отличны от нуля :

$$(\det A \neq 0) \Leftrightarrow (\lambda_i(A) \neq 0, i = 1,...n) \qquad (10.6))$$

Покажем, как связаны собственные числа и согласованные матричные нормы.

Определение. **Спектром** матрицы A называют **множество всех ее собственных чисел** (на комплексной плоскости).

Определение. **Спектральным радиусом** $\rho(A)$ матрицы A называют **модуль максимального по модулю собственного числа матрицы** A:

$$\rho(A) = \max_{i=1,n} |\lambda_i(A)| \qquad (10.7)$$

(спектральный радиус есть расстояние от нуля (на комплексной плоскости) до наиболее удаленного от нуля собственного числа).

Утверждение 4. Если норма матрицы согласована с нормой вектора, норма матрицы не может быть меньше, чем спектральный радиус:

$$\| A \| \geq \rho(A). \qquad (10.8)$$

Доказательство

Пусть v – собственный вектор матрицы A, λ – соответствующее ему собственное число: $Av = \lambda v$. Тогда по аксиомам нормы вектора

$$\| Av \| = \| \lambda v \| = | \lambda | \cdot \| v \|$$

По свойству согласованности норм

$$\| Av \| \le \| A \| \cdot \| v \|$$

откуда следует, что $| \lambda | \le \| A \|$. Это справедливо для любого собственного числа, в том числе для максимального по модулю, откуда следует (10..6).

Утверждение 5. Если норма матрицы подчинена евклидовой норме вектора, то

$$\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \qquad (10.9)$$

(доказательство в учебной литературе).

10.3. Оценка собственных чисел по теореме Гершгорина

Теорема Гершгорина. Собственные числа матрицы $A = \{ a_{ij} \}, i, j = 1,\ldots n$ расположены на комплексной плоскости в кругах следующего вида:

$$| z - a_{ii} | \le \sum_{\substack{j=1, \\ j \ne i}}^{n} | a_{ij} |, i = 1,\ldots n \qquad (10.10)$$

Если множество кругов (10.10) состоит из нескольких связных компонент, каждая связная компонента содержит столько собственных чисел, сколько кругов ее составляют.

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0.5 \\ 1 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & 15 \end{bmatrix}$$

Круги Гершгорина на комплексной плоскости имеют вид:

$| z - 7 | \le 3.5$ $\qquad | z - 9 | \le 2$ $\qquad | z - 15 | \le 3$

Круги образуют *два связных множества*: объединение кругов с центрами в точках 7 и 9, и круг с центром в точке 15. Два собственных числа расположены в объединении двух кругов, и одно собственное число – в изолированном круге с центром в точке 15. *Из расположения кругов следует:*

1) *спектральный радиус* (модуль максимального по модулю собственного числа) можно оценить сверху и снизу:

$12 \le \rho\,(A) \le 18$), см. (10.7);

2) модуль *минимального по модулю собственного числа* можно оценить сверху и снизу:

$$3.5 \le \min_{i=1,2,3} | \lambda_i (A) | \le 11;$$

3) матрица не является вырожденной: $\det A \ne 0$, потому что нулевого собственного числа нет, см. (10.6).

10.4. Симметричные матрицы, их нормы

В приложениях часто встречаются СЛАУ с **симметричной** матрицей A и, в частности, с **симметричной, положительно определенной** матрицей A. Для решения указанных классов задач разработаны специальные прямые и итерационные методы.

Покажем, как связаны нормы таких матриц с их собственными числами.

Определение. Матрица называется симметричной, если она совпадает с результатом своего транспонирования: $A = A^T$.

Утверждение 6. Все собственные числа матрицы $A = A^T$ действительны, их можно упорядочить: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ и существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Спектральный радиус матрицы $A = A^T$ определяется ее «крайними» собственными числами, а именно **модулем минимального** или **модулем максимального** собственного числа:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\} \tag{10.11}$$

(это следует из (10.7) и упорядоченности собственных чисел).

Утверждение 7. Пусть $A = A^T$. Тогда норма матрицы, согласованной с нормой вектора, *оценивается* модулем минимального или модулем максимального собственного числа:

$$\| A \| \ge \rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\} \tag{10.12}$$

Норма матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора, *определяется* модулем минимального или модулем максимального собственного числа:

$$\| A \|_2 = \rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\} \tag{10.13}$$

Доказательство

(10.12) следует из (10.11) и утверждения 4, а (10.13) – из (10.11) и утверждения 5.

Для (10.13) проведем детальное обоснование. Во-первых, для любой квадратной матрицы A $(n \times n)$

$\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, где $\rho(A^T A) = \max\limits_{i=1,n} \left| \lambda_i (A^T A) \right|$ есть модуль

максимального по модулю собственного числа матрицы $A^T A$.

Пусть $A = A^T$ (симметричная). Тогда $A^T A = A^2$ и собственными числами матрицы A^2 являются квадраты собственных чисел матрицы A: если $Av = \lambda v$, то $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Тогда

$$\rho(A^T A) = \rho(A^2) = \max_{i=1,n} \left| \lambda_i (A^2) \right| = \max_{i=1,\ldots n} \left| [\lambda_i(A)]^2 \right| =$$

$$= \max_{i=1,\ldots n} |\lambda_i(A)|^2 = \left(\max_{i=1,\ldots n} |\lambda_i(A)| \right)^2 = [\rho(A)]^2$$

что означает: для $A = A^T$ выполняется $\rho(A^2) = [\rho(A)]^2$.

Поэтому для симметричной матрицы $A = A^T$

$$\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A), \quad (10.14)$$

откуда с учетом (10.11) следует (10.13).

10.5. Норма обратной матрицы

Выясним, каковы собственные числа и собственные векторы обратной матрицы.

Утверждение 8. Пусть A – матрица размерности $n \times n$, $\det A \neq 0$. Тогда матрицы A и A^{-1} имеют одинаковый комплект линейно независимых собственных векторов, а их собственные числа связаны соотношением

$$\lambda_i\,(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i\,(A)},\ i = 1,\ldots n. \quad (10.15)$$

Доказательство

Пусть v – собственный вектор, λ – собственное число матрицы A: $Av = \lambda v$. Умножим левую и правую части равенства на обратную матрицу (слева):

$A^{-1}A\,v = A^{-1}(\lambda v) = \lambda \cdot \left(A^{-1}v\right)$, что означает $v = \lambda \cdot \left(A^{-1}v\right)$.

Разделим левую и правую части равенства на число λ (потому что $\lambda \neq 0$):

$$A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v. \quad (10.16)$$

Из (10.16) следует, что v – собственный вектор матрицы A^{-1} и число $1/\lambda$ – ее собственное число.

Повторим выкладки для всех линейно независимых собственных векторов матрицы A и получим некоторый комплект линейно независимых собственных векторов матрицы A^{-1}. Затем, повторив выкладки для всех собственных векторов матрицы A^{-1}, убеждаемся в том, что A и A^{-1} располагают одинаковым комплектом линейно независимых собственных векторов. Утверждение доказано.

Покажем, как оценить норму обратной матрицы.

Утверждение 9. **Спектральный радиус** обратной матрицы A^{-1} является величиной, **обратной модулю минимального по модулю собственного числа** исходной матрицы A:

$$\rho\,(A^{-1}) = \frac{1}{\min\limits_{i=1,n} |\,\lambda_i\,(A)\,|} \quad (10.17)$$

Доказательство

$$\rho(A^{-1}) = \max_{i=1,\ldots n} \left|\,\lambda_i\,(A^{-1})\,\right| = \max_{i=1,\ldots n} \frac{1}{|\,\lambda_i\,(A)\,|} = \frac{1}{\min\limits_{i=1,n} |\,\lambda_i\,(A)\,|}.$$

Из (10.17) и утверждения 4 следует

Утверждение 10. Пусть A – невырожденная матрица размерности $n \times n$, $\det A \neq 0$. Тогда норма обратной матрицы, согласованная с нормой вектора, *оценивается* величиной, обратной модулю минимального по модулю собственного числа:

$$\| A^{-1} \| \geq \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\min\limits_{i=1,n} |\lambda_i(A)|} \tag{10.18}$$

Из (10.14), (10.17), и утверждения 5 следует

Утверждение 11. Пусть $A = A^T$ – невырожденная симметричная матрица размерности $n \times n$, $\det A \neq 0$. Тогда обратная матрица симметрична

$$A^{-1} = [A^{-1}]^T$$

и норма обратной матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора, *определяется* величиной, обратной модулю минимального по модулю собственного числа:

$$\| A^{-1} \|_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\min\limits_{i=1,n} |\lambda_i(A)|} \tag{10.19}$$

10.6. Симметричные положительно определенные матрицы

Определение. Матрица A $(n \times n)$ называется **положительно определенной** (обозначается $A > 0$), если $\forall h \neq 0, h \in R^n$ $(Ah, h) > 0$.

Утверждение 12. Собственные числа положительно определенной матрицы положительны: $\lambda_i(A) > 0, i = 1,...n$, и такая матрица невырождена: $\det A \neq 0$.

Доказательство

1) Пусть v – некоторый собственный вектор матрицы A, λ – соответствующее ему собственное число: $Av = \lambda v$.

Так как $v \neq 0, v \in R^n$ и $A > 0$, получим $(Av, v) > 0$.

Используя свойства собственных чисел и собственных векторов, запишем $(Av, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v) > 0$.

Учитывая $(v, v) > 0$, получим $\lambda > 0$.

2) $\det A \neq 0$ следует из того, что $A > 0$ не имеет нулевого собственного числа.

Наличие двух свойств одновременно (симметричность и положительная определенность) обозначается как $A = A^T > 0$.

Утверждение 13. Все собственные числа матрицы $A = A^T > 0$ положительны, их можно упорядочить: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ и существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Сформулируем и докажем критерий положительной определенности для симметричных матриц:

У т в е р ж д е н и е 1 4 . Если матрица симметрична $A = A^T$, необходимым и достаточным условием положительной определенности, т.е. выполнения условия

$$\forall h \neq 0, h \in R^n \ (Ah, h) > 0 \tag{10.20}$$

является положительность всех ее собственных чисел:

$$\lambda_i(A) > 0, i = 1,\ldots n \tag{10.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) из условия $\forall h \neq 0, h \in R^n \quad (Ah, h) > 0$ следует $\lambda_i(A) > 0, i = 1,\ldots n$ (см. утверждение 14).

2) пусть $\lambda_i(A) > 0, i = 1,\ldots n$. Покажем, что $\forall h \neq 0, h \in R^n \ (Ah, h) > 0$.

Для этого используем ортонормированный базис из собственных векторов $v_1,\ v_2 \ldots v_n$. Базис имеет свойства

$$(v_i, v_i) = 1, i = 1,\ldots n$$
$$(v_i, v_l) = 0, i, l = 1,\ldots n, i \neq l$$
$$Av_i = \lambda_i v_i, i = 1,\ldots n$$

Запишем вектор $h \in R^n$, $h \neq 0$ в виде $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Среди коэффициентов разложения по базису есть хотя бы один, отличный от нуля: $\exists\, \alpha_s \neq 0$. Тогда

$$(Ah, h) = (A\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, \sum_{l=1}^{n}\alpha_l v_l) =$$
$$= (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i (Av_i), \sum_{l=1}^{n}\alpha_l v_l) == (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \alpha_i v_i, \sum_{l=1}^{n}\alpha_l v_l) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \alpha_i^2 (v_i, v_i) \geq \lambda_s \alpha_s^2 > 0$$

Критерий доказан.

Перейдем к оценке нормы $A = A^T > 0$ и обратной матрицы.

Спектральный радиус матрицы $A = A^T > 0$ определяется ее **максимальным** собственным числом (оно положительное):

$$\rho(A) = \lambda_n(A) \tag{10.22}$$

Спектральный радиус матрицы A^{-1}, обратной $A = A^T > 0$ определяется величиной, **обратной минимальному собственному числу** матрицы A (оно положительное):

$$\rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1(A)} \tag{10.23}$$

Указанные неравенства (10.22) и (10.23) вытекают из (10.11) и (10.17).

Из (10.22) и утверждения 7 следует

Утверждение 15. Пусть $A = A^T > 0$. Тогда норма матрицы, согласованной с нормой вектора, *оценивается* максимальным собственным числом:

$$\| A \| \geq \rho(A) = \lambda_n(A) \tag{10.24}$$

Норма матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора, *определяется* максимальным собственным числом:

$$\| A \|_2 = \rho(A) = \lambda_n(A) \tag{10.25}$$

Утверждение 16. Матрица, обратная к $A = A^T > 0$, симметрична и положительно определена $A^{-1} = [A^{-1}]^T > 0$ (доказать самостоятельно).

Из утверждения 16, утверждения 7 и (10.23) следует

Утверждение 17. Пусть A – матрица размерности $n \times n$, $A = A^T > 0$. Тогда норма обратной матрицы, согласованная с нормой вектора, *оценивается* величиной, обратной минимальному собственному числу матрицы A:

$$\| A^{-1} \| \geq \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1(A)} \tag{10.26}$$

Норма обратной матрицы, подчиненная евклидовой норме вектора, *определяется* величиной, обратной минимальному собственному числу исходной матрицы:

$$\| A^{-1} \|_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1(A)} \tag{10.27}$$

10.7. Число обусловленности и его влияние на свойства СЛАУ

Определение. **Число обусловленности** невырожденной матрицы A обозначают μ_A и определяют как

$$\mu_A = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \tag{10.28}$$

В формуле (10.28) используются матричные нормы, согласованные с нормами векторов.

Определение. **Число обусловленности Тодта** невырожденной матрицы A размерности $n \times n$ обозначают μ_A^T и определяют как

$$\mu_A^T = \frac{\max\limits_{i=1,n} | \lambda_i(A) |}{\min\limits_{i=1,n} | \lambda_i(A) |}. \tag{10.29}$$

Утверждение 18. При выборе матричной нормы, согласованной с нормой вектора

$$\mu_A \geq \mu_A^T \geq 1. \tag{10.30}$$

(число обусловленности Тодта оценивает снизу число обусловленности μ_A и само оценивается снизу единицей).

Доказательство

Из (10.7), (10.8) и (10.17) и определения числа обусловленности следует

$$\| A \| \geq \rho(A) = \max_{i=1,n} | \lambda_i(A) |$$

$$\| A^{-1} \| \geq \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\min\limits_{i=1,n} | \lambda_i(A) |}$$

$$\mu_A = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \geq \frac{\max\limits_{i=1,n} | \lambda_i(A) |}{\min\limits_{i=1,n} | \lambda_i(A) |} = \mu_A^T \geq 1$$

Утверждение 19. Пусть A – матрица размерности $n \times n$, $A = A^T > 0$. Пусть число обусловленности μ_A определено на основе матричной нормы, подчиненной евклидовой норме вектора. Тогда

$$\mu_A = \| A \|_2 \cdot \| A^{-1} \|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \mu_A^T \geq 1 \qquad (10.31)$$

Доказательство

Из (10.25), (10.27) и определения числа обусловленности следует

$$\| A \|_2 = \rho(A) = \lambda_n$$

$$\| A^{-1} \|_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\mu_A = \| A \|_2 \cdot \| A^{-1} \|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \mu_A^T \geq 1$$

Обусловленность матриц и СЛАУ

С числом μ_A связаны следующие свойства СЛАУ и итерационных методов.

Свойство 1. Если $\mu_A >> 1$, то при решении СЛАУ вида $Ax = b$ небольшие погрешности исходных данных могут приводить к значительным погрешностям решения (независимо от выбора метода решения), см. утверждение 20.

Свойство 2. Если $\mu_A >> 1$, то при решении СЛАУ вида $Ax = b$ итерационными методами скорость сходимости, как правило, медленная, см. теоремы о сходимости итерационных методов (Модуль 11).

В связи с указанными свойствами различают **хорошо** и **плохо обусловленные матрицы**, **хорошо** и **плохо обусловленные СЛАУ**.

Если $\mu_A >> 1$, матрица A и система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ называется **плохо обусловленной**.

Если $\mu_A \approx 1$, матрица A и система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ называется **хорошо обусловленной**.

Сформулируем и докажем утверждение, характеризующее влияние числа обусловленности на погрешность решения СЛАУ.

Утверждение 20. Пусть A – матрица размерности $n \times n$, $\det A \neq 0$.

Рассматривается исходная система уравнений

$Ax = b$, где x^* – решение, и система уравнений с возмущенной правой частью

$Ax = b + \Delta b$, где $x^* + \Delta x$ – решение.

Тогда

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x^* \|} \le \mu_A \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|} \tag{10.32}$$

Здесь μ_A – число обусловленности матрицы A.

Величину $\| \Delta b \|$ называют абсолютным возмущением правой части,

величину $\| \Delta x \|$ – абсолютным возмущением решения. Аналогично:

$\dfrac{\| \Delta b \|}{\| b \|}$ – относительное возмущение правой части;

$\dfrac{\| \Delta x \|}{\| x^* \|}$ – относительное возмущение решения.

Доказательство

Так как $Ax^* = b$, запишем

$$\| b \| = \| A x^* \| \le \| A \| \cdot \| x^* \|$$

и получим оценку

$$\| x^* \| \ge \frac{\| b \|}{\| A \|} \tag{10.33}$$

(норма матрицы должна быть согласована с нормой вектора).

Так как $A(x^* + \Delta x) = b + \Delta b$, запишем $A\Delta x = \Delta b$ и выразим $\Delta x = A^{-1}\Delta b$.

Проведем оценку

$$\| \Delta x \| = \| A^{-1}\Delta b \| \le \| A^{-1} \| \cdot \| \Delta b \| \tag{10.34}$$

(норма матрицы согласована с нормой вектора).

Применим (10.33) и (10.34) для оценки относительного возмущения решения:

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x^* \|} \le \frac{\| A^{-1} \| \cdot \| A \| \cdot \| \Delta b \|}{\| b \|} \le \mu_A \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|}$$

Неравенство (10.32) доказано.

Комментарии

Если $\mu_A \approx 1$, то небольшой относительной погрешности правой части соответствует небольшая относительная погрешность решения.

Если $\mu_A >> 1$, то небольшому относительному возмущению правой части может соответствовать значительное относительное возмущение решения.

Если оценка (10.32) получена на основе **подчиненных** норм, оценку улучшить нельзя: для $\forall A$ при некоторых b и Δb (10.32) выполняется как равенство.

10.8. Примеры плохой обусловленности

Пример плохо обусловленной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}$$

Матрица симметрична: $A = A^T$. Собственные числа (решения $\det(A - \lambda E) = 0$):

$\lambda_1 = -0.00505$ и $\lambda_2 = 198.00505$

Для числа обусловленности (в любой согласованной норме) верно

$$\mu_A \ge \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} = 39208.92 >> 1$$

Число обусловленности (в норме, подчиненной евклидовой норме вектора) составит

$$\mu_A = 39208.92 >> 1.$$

Пример исходной и возмущенной СЛАУ, для которых малая относительная погрешность правой части СЛАУ влечет за собой большую относительную погрешность решения

Исходная система (с плохо обусловленной матрицей) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 \\ 197 \end{bmatrix}$$

Ее решение: $x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Рассмотрим систему с возмущенной правой частью:

$$\begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199+1 \\ 197-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 196 \end{bmatrix}$$

Ее решение: $x^* + \Delta x = \begin{bmatrix} x_1^* + \Delta x_1 \\ x_2^* + \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-197 \\ 1+199 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -196 \\ 200 \end{bmatrix}$

Очевидно, что относительно малое возмущение правой части, а именно,

возмущение $\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ к правой части исходной задачи $\begin{bmatrix} 199 \\ 197 \end{bmatrix}$,

приводит к существенному относительному возмущению решения, а именно,

возмущению $\begin{bmatrix} -197 \\ +199 \end{bmatrix}$ к решению исходной задачи $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10.9. Механизм влияния обусловленности на погрешность решения СЛАУ

Пусть $A = A^T > 0$ – симметричная положительно определенная матрица ($n \times n$), ее собственные числа положительны и упорядочены: $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$.

Пусть $v_1, v_2 \ldots v_n$ – ортонормированный базис из собственных векторов, собственный вектор v_i соответствует собственному числу λ_i, $i = 1, \ldots n$:

$$(v_i, v_i) = 1, i = 1, \ldots n$$
$$(v_i, v_l) = 0, i, l = 1, \ldots n, i \ne l$$
$$Av_i = \lambda_i v_i, i = 1, \ldots n$$

Рассмотрим задачу $Ax = b$, где $b = v_n$

(правая часть СЛАУ есть нормированный собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу)

Решением СЛАУ является $x^* = \dfrac{v_n}{\lambda_n}$.

Рассмотрим задачу с возмущенной правой частью:

$Ax = b + \Delta b$, где $b + \Delta b = v_n + \alpha \cdot v_1$, то есть $\Delta b = \alpha \cdot v_1$

(возмущение правой части СЛАУ есть нормированный собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу, умноженный на некоторое малое число α)

Решением возмущенной СЛАУ является

$$x^* + \Delta x = \frac{v_n}{\lambda_n} + \alpha \cdot \frac{v_1}{\lambda_1}.$$

Возмущение решения составило $\Delta x = \alpha \cdot \dfrac{v_1}{\lambda_1}$

Подсчитаем величины относительных возмущений для правой части СЛАУ и для ее решения.

Относительное возмущение правой части составит

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}=\frac{\|\alpha\cdot v_1\|}{\|v_n\|}=|\alpha|\frac{\|v_1\|}{\|v_n\|}=|\alpha|$$

Относительное возмущение решения составит

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|}=|\alpha|\cdot\frac{|\lambda_n|\cdot\|v_1\|}{|\lambda_1|\cdot\|v_n\|}=|\alpha|\cdot\frac{\lambda_n}{\lambda_1}=|\alpha|\cdot\mu_A$$

Таким образом, относительное возмущение решения пропорционально относительному возмущению правой части с коэффициентом, значение которого в точности совпадает с величиной числа обусловленности (определенного в евклидовой норме):

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|}=\mu_A\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Нестрогое неравенство (10.32) в данном случае выполняется как равенство.

Если $\mu_A\approx 1$ (хорошо обусловленная матрица), относительное возмущение решения окажется примерно таким, как относительное возмущение правой части.

Если $\mu_A >> 1$ (плохо обусловленная матрица), относительное возмущение решения окажется много больше, чем относительное возмущение правой части.

Комментарий

> В рассмотренном примере правая часть СЛАУ есть собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу, а возмущение правой части – собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу. Величина возмущения (число α) на выполнение (10.32) как равенства не влияет.

Задание

> Приведите пример исходной и возмущенной СЛАУ с плохо обусловленной матрицей, когда малое относительное возмущение правой части приводит к малому относительному возмущению решения. При построении примера используйте базис из собственных векторов.

10.10. Нормализация СЛАУ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (10.1): $Ax=b$

Здесь $x\in R^n, b\in R^n, A\,(n\times n), \det A\neq 0$ (невырожденная матрица).

Умножаем левую и правую части (10.1) слева на A^T и получим СЛАУ

$$A^T Ax=A^T b \qquad (10.35)$$

Утверждение 21. Матрица $A^T A$, где $A\,(n\times n), \det A\neq 0$, симметрична и положительно определена. Задачи (10.1) и (10.35) эквивалентны: имеют одинаковое и единственное решение.

Доказательство

$$\left(A^T A\right)^T = A^T A^{TT} = A^T A.$$

$\forall h \neq 0\ Ah \neq 0$, потому что $\det A \neq 0$

$$\forall h \neq 0\ \ (A^T Ah, h) = (Ah, A^{TT} h) = (Ah, Ah) > 0.$$

$\det A^T A \neq 0$, так как $\lambda_i (A^T A) > 0, i = 1,\ldots n$

$$Ax^* = b \ \ \Rightarrow \ A^T Ax^* = A^T (Ax^*) = A^T b$$

Определение. Замену СЛАУ (10.1) с произвольной невырожденной матрицей на эквивалентную СЛАУ (10.35) с симметричной положительно определенной матрицей называют **нормализацией**.

Комментарий

Недостаток замены в том, что СЛАУ (10.35) может иметь существенно большее число обусловленности, чем исходная СЛАУ: $\mu_{A^T A} >> \mu_A$.

10.11. Скорость сходимости (определение)

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (10.1): $Ax = b$. Здесь $x \in R^n, b \in R^n, A\,(n \times n), \det A \neq 0$ (невырожденная матрица). Решение задачи обозначено через x^*, $x^* \in R^n$. Итерационные методы генерируют последовательность приближенных решений: $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots x^{(s)} \ldots$

Определение. Погрешность итерационного метода на шаге s обозначим через $z^{(s)}$ и определим как разность приближенного и точного решения задачи на шаге s:

$$z^{(s)} = x^{(s)} - x^*.$$

Пусть для погрешности метода на шаге s верна оценка

$$\left\| z^{(s)} \right\| = \left\| x^{(s)} - x^* \right\| \leq Mq^s \left\| z^{(0)} \right\| \qquad (10.36)$$

где $M > 0$, $0 < q < 1$ - константы, характеризующие СЛАУ (10.1) и исследуемый метод и не зависящие от выбора начального приближения $x^{(0)}$.

Тогда величину $\lg\left(\dfrac{1}{q}\right)$ называют **скоростью сходимости метода**.

Если $q \approx 0$ (оценка погрешности быстро стремится к нулю), скорость сходимости велика: $\lg\left(\dfrac{1}{q}\right) >> 1.$

Если $q \approx 1$ (оценка погрешности медленно стремится к нулю), скорость сходимости мала:

$$\lg\left(\frac{1}{q}\right) \approx 0.$$

Комментарий

Смысл показателя, именуемого «скорость сходимости», покажем на примере: сколько нужно сделать шагов, чтобы начальная погрешность решения сократилась в 10 или более раз?

Решение: пусть N – искомое число шагов. Нужно, чтобы

$$\frac{\left\| z^{(0)} \right\|}{\left\| z^{(N)} \right\|} \geq 10.$$

Так как

$$\frac{\left\| z^{(0)} \right\|}{\left\| z^{(N)} \right\|} \geq \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^N,$$

требуем, чтобы $\frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^N \geq 10$. (10.37)

Логарифмируем неравенство (10.37):

$$N \cdot \lg\left(\frac{1}{q}\right) \geq \lg 10 + \lg M.$$

Для искомого N получим

$$N \geq \frac{1 + \lg M}{\lg\left(\frac{1}{q}\right)}. \tag{10.38}$$

Таким образом, чем выше скорость сходимости, тем меньше шагов потребуется для того, чтобы начальная погрешность сократилась в 10 или более раз. Если методы имеют одинаковую скорость сходимости, то для метода с большим значением $M > 0$ нужно большее число шагов N.

При изучении сходимости итерационных методов также используются понятия

– **средней скорости сходимости** (за конечное число шагов)

– **асимптотической скорости сходимости** (когда число проведенных шагов стремится к бесконечности).

10.12. Презентация модельных задач

Итерационные методы применяем с целью численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона: 1) в прямоугольной области, где известны собственные числа матрицы СЛАУ; 2) в области, включенной в прямоугольник, где известны их оценки.