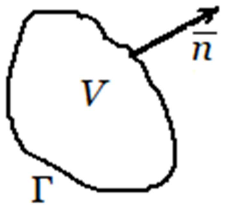
Лекция 21

Уравнения параболического типа. Постановка основных задач для уравнения теплопроводности

Вывод уравнения теплопроводности

Пусть V – некоторое подмножество в пространстве переменных $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $t>0$ с границей Γ, в каждой точке которой определен единичный вектор внешней нормали $\vec{n}(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $(x,y,z)\in\Gamma$; $u(x,y,z,t)$ – температура в точке $(x,y,z)\in V$ в момент времени t; $k(x,y,z)$ – коэффициент теплопроводности среды в точке $(x,y,z)\in V$; $\rho(x,y,z)$, $c(x,y,z)$ – объемная плотность среды и удельная теплоемкость соответственно. Количество тепла, сосредоточенного в объеме V определяется выражением



$$Q_V(t)=\iiint\limits_V \rho c u\,dxdydz, \qquad (1)$$

и изменение количества тепла за промежуток времени $[t_1,t_2]$ в объеме V может быть записано в виде

$$Q_V(t_2)-Q_V(t_1)=\iiint\limits_V \rho c u(x,y,z,t_2)dxdydz-\iiint\limits_V \rho c u(x,y,z,t_1)dxdydz=$$
$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V \rho c\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}dxdydzdt. \qquad (2)$$

Изменение количества тепла в объеме V может быть обусловлено, во-первых, внутренними источниками или стоками тепла, которые характеризуются плотностью тепловых источников $F(x,y,z,t)$. При этом

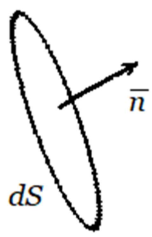
$$\iiint\limits_V F(x,y,z,t)dxdydz$$

– количество поглощенного или выделенного тепла внутренними источниками в единицу времени в объеме V,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V F(x,y,z,t)dxdydzdt \qquad (3)$$

– изменение количества тепла за промежуток времени $[t_1,t_2]$ в этом объеме.

Во-вторых, оно может быть обусловлено притоком или оттоком тепла через поверхность Γ, ограничивающую объем V. Потоки тепла в объеме характеризуются векторным полем $\vec{q}(x,y,z,t)$ ($\vec{q}$ – поток тепла), которое по формуле $(\vec{q}\cdot\vec{n})dS$ определяет количество тепла, проходящее в направлении $\vec{n}$ через площадку dS в единицу времени. Таким образом,



$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Gamma}(\vec{q}\cdot\vec{n})d\Gamma dt \tag{4}$$

– количество тепла, поступающего в объем V через поверхность Г за промежуток времени $[t_1,t_2]$ (знак «–» обусловлен тем, что $\vec{n}$ – внешняя нормаль).

В большинстве реальных ситуаций выполняется закон Фурье

$$\vec{q}(x,y,z,t)=-k\,\mathrm{grad}\,u(x,y,z,t), \tag{5}$$

откуда следует, что

$$(\vec{q}\cdot\vec{n})=-k(\mathrm{grad}\,u\cdot\vec{n})=-k\frac{\partial u}{\partial n}, \tag{6}$$

$\partial u/\partial n$ – производная от функции u по направлению $\vec{n}$ (в нашем случае – производная по нормали $\vec{n}$). Соотношение (6) допускает естественную физическую интерпретацию. Если температура u возрастает в направлении $\vec{n}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial n}>0$ и тепло, распространяясь от более нагретых участков к менее нагретым, будет создавать поток в направлении, противоположным $\vec{n}$ (это обеспечивает знак «–» в (6)). При этом интенсивность потока тепла пропорциональна коэффициенту теплопроводности, а также резкости изменения температуры, характеризуемой $\left|\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|$.

Учитывая (4), (6) для количества тепла, поступающего в объем V через поверхность Г за промежуток времени $[t_1,t_2]$, записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Gamma}k\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma dt=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}dxdydzdt\,. \tag{7}$$

При переходе в (7) от поверхностного интеграла к объемному использовалась теорема Гаусса–Остроградского

$$\iiint_{V}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{\Gamma}(w_1n_1+w_2n_2+w_3n_3)d\Gamma=$$

$$=\iint_{\Gamma}(\vec{w}\cdot\vec{n})d\Gamma=\iint_{\Gamma}k\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma,$$

где $\{n_1,n_2,n_3\}$ – координаты (направляющие косинусы вектора внешней нормали $\vec{n}_1$, $\vec{w}\{w_1,w_2,w_3\}$ – вектор с координатами

$$w_1=k\frac{\partial u}{\partial x},\ w_2=k\frac{\partial u}{\partial y},\ w_3=k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Составляя уравнение баланса для изменения количества тепла в объеме V за промежуток времени $[t_1,t_2]$ с учетом (2), (3), (7) получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V}\rho c\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+F\right\}dxdydzdt \tag{8}$$

Поскольку равенство (8) справедливо для любого объема и произвольного промежутка времени, из него следует равенство подынтегральных выражений

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F(x,y,z,t) \tag{9}$$

Уравнение (9) – уравнение теплопроводности.

Если среда однородна, то коэффициенты c,ρ,k, определяющие свойства среды, не зависят от координат

$$c=\mathrm{const}>0,\ \ \rho=\mathrm{const}>0,\ \ k=\mathrm{const}>0,$$

и уравнение (9) можно записать в виде

$$u_t(x,y,z,t)-a^2\Delta u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t), \tag{10}$$

где

$$a^2=\frac{k}{c\rho},\ f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}. \tag{11}$$

Уравнение (10), также называемое уравнением теплопроводности, будет основным объектом изучения в разделе, посвященном параболическим уравнениям.

Постановка основных задач для уравнения теплопроводности

<u>Задача Коши</u> (начальная задача). В этой задаче решение уравнения теплопроводности (9) ищется в области $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $t>0$, при этом уравнение теплопроводности дополняется начальными условиями

$$u(x,y,z,t)\,|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ \ (x,y,z)\in\mathbf{R}^3, \tag{12}$$

где φ – заданная функция в $\mathbf{R}^3$.

<u>Задача Дирихле</u> (смешанная задача с граничными условиями I рода (условиями Дирихле)). В этой задаче решение уравнения теплопроводности ищется в области $(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$, $t>0$, при этом уравнение теплопроводности дополняется начальными

$$u(x,y,z,t)\,|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ \ (x,y,z)\in\Omega \tag{13}$$

и граничными условиями

$$u(x,y,z,t)=\varphi_\Gamma(x,y,z),\ \ \underset{t\ge 0}{(x,y,z)\in\Gamma} \tag{14}$$

где Γ – граница области Ω; φ, φ_Γ – заданные функции в своих областях определения.

<u>Задача Неймана</u> (смешанная задача с граничными условиями II рода (условиями Неймана)). В этой задаче решение уравнения (9) ищется в области $(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$, $t>0$, при этом уравнение (9) дополняется начальными условиями (13) и граничными условиями

$$k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}+q_\Gamma(x,y,z,t)=0, \tag{15}$$

$(x,y,z)\in\Gamma$, $t>0$, где Γ – граница области Ω; φ, q_Γ – заданные функции в своих областях определения. В условиях (15)

$$q_\Gamma(x,y,z,t)=(\vec{q}(x,y,z,t)\cdot\vec{n}),$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе Г области Ω; $\vec{q}$ – плотность потока тепла в точке $(x,y,z)\in\Gamma$ при $t>0$, k – коэффициент теплопроводности, $\partial/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали $\vec{n}\{n_1,n_2,n_3\}$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=n_1\frac{\partial u}{\partial x}+n_2\frac{\partial u}{\partial y}+n_3\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Граничное условие Неймана соответствует закону Фурье (6) и с физической точки зрения соответствует заданию потока тепла на границе, а с математической – заданию на границе Г производной по нормали от неизвестной функции. В случае, когда $q_\Gamma(x,y,z,t)=0$ при $(x,y,z)\in\Gamma$, $t>0$ (однородные граничные условия), говорят, что поверхность Г теплоизолирована.

<u>Задача Ньютона</u> (смешанная задача с граничными условиями третьего рода (условиями Ньютона, или условиями конвективного теплообмена). В этой задача решение уравнения теплопроводности ищется в области $(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3, t>0$, при этом уравнение (9) дополняется начальными условиями (13) и граничными условиями

$$k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}+h\big(u(x,y,z,t)-T_\Gamma(x,y,z,t)\big)=0, \qquad (16)$$

$(x,y,z)\in\Gamma, t>0$, где Г – граница области Ω; φ, T_Γ – заданные функции в своих областях определения, k – коэффициент теплопроводности, $h>0$ – коэффициент, характеризующий теплообмен между телом Ω и окружающей средой, T_Γ – температура окружающей среды.

Граничное условие Ньютона соответствует предположению о пропорциональности потока тепла через границу Г и разности температур самого тела (температура u) и температурой окружающей среды T_Γ (сравните условия (15) и (16)). С математической точки зрения граничные условия Ньютона соответствуют заданию на границе величины $k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu$.

Граничные условия (14), (15) и (16) становятся однородными, если в них положить $\varphi_\Gamma=0$, $q_\Gamma=0$, $T_\Gamma=0$ соответственно.

Список литературы

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm.