Задача №4

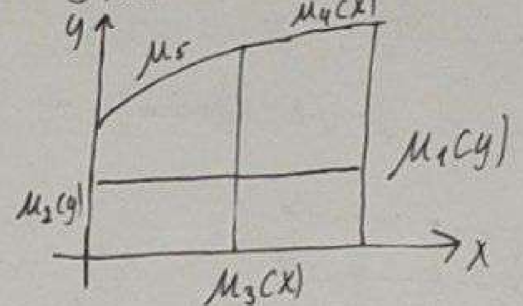
Задача Дирихле для ур-я Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -f(x,y) & (x,y)\in G \\ u(x,y) = \mu(x,y) & (x,y)\in \partial G \end{cases}$$

Область $G\subset R^2$ вложена вместе с границей ∂G в прямоугольник

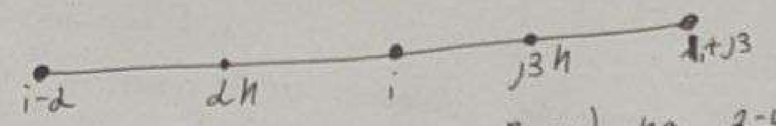
$x\in[a,b]$, $y\in[c,d]$

Этап 1. Построение численного решения



Рассмотрим $f(x)$, сетка x_i, $x_{i-\alpha} = x_{i-\alpha}h$, $x_{i+\beta} = x_{i+\beta}h$

$f'(x_i)$ - ?



Строим интерполяционный полином $P_2(x)$ по 2-ум точкам:

$P_2(x_i) = f(x_i)$; $P_2(x_i+\beta h) = f(x_i+\beta h)$

$P_2(x_i-\alpha h) = f(x_i-\alpha h)$, полагаем, что $P_2''(x_i)\sim f''(x_i)$

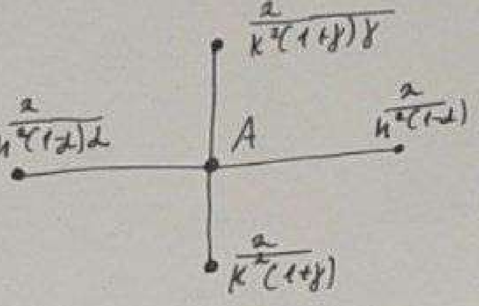
$$P_2''(x_i) = \frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)\alpha} f_{i-\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} f_i + \frac{1}{(\alpha+\beta)\beta} f_{i+\beta}\right) \text{ причём}$$

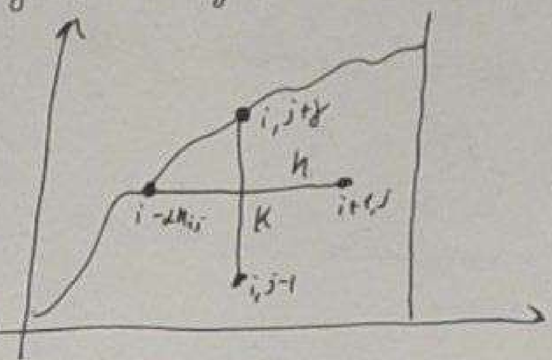
$$f''(x_i) = P_2(x_i) + \left(\frac{h(\alpha-\beta)}{3} f'''(x_i) - \frac{h}{12}\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta} f^{IV}(x_i) + O(h^2)\right)$$

$P_2''(x_i) = (f_{x\bar{x}})_i$ - 3-х точечный разностный оператор для вычисления 2-й производной на несимметричном шаблоне, если аппроксимирует $f'(x_i)$ с 1-м порядком по h, если $\alpha\neq\beta$ (если $\alpha=\beta$, то со вторым)

На некоим несимметричном шаблоне, непрямоугольной сетке и в узле(i,j) аппроксимируемая разностным оператором $(u_{x\bar{x}})_{ij} + (u_{y\bar{y}})_{ij}$, с первым порядком по h и k

$A = -2\left(\frac{1}{h^2\alpha} + \frac{1}{k^2\gamma}\right)$ при $\beta = \gamma = 1$ получим шаблон крест.

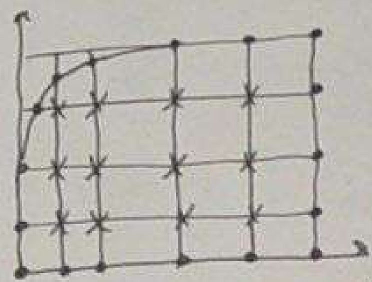




Задача Дирихле на прямоугольнике с закруглением краев.

$x_i = a + ih \qquad h = \frac{b-a}{n}, \; i = \overline{0,n}$

$y_j = c + jk \qquad k = \frac{d-c}{m}, \; j = \overline{0,m}$



ω_H - внутр. узлы, на которых можно использовать сим. либо несим. шаблон

γ_H - гран. узлы, которые участвуют в ур-ии для узлов из ω_H.

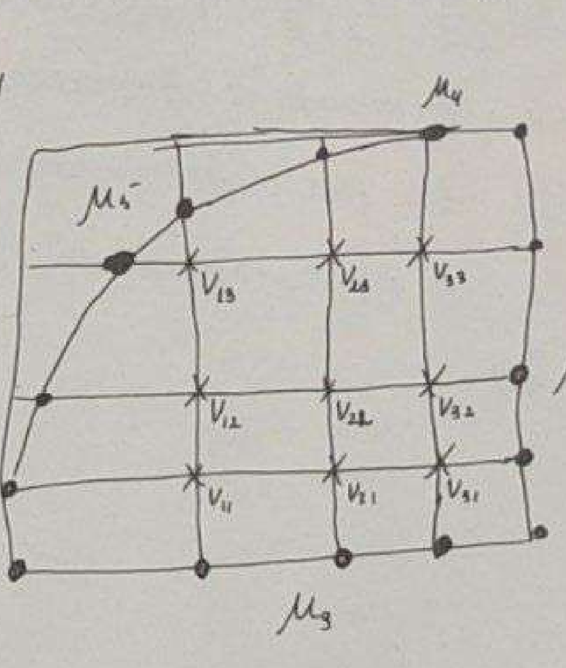
Сетка: $\Omega_H = \gamma_H \cup \omega_H$

$H = \{h, k\}$

Разностная схема:

$$\begin{cases} (v_{x\bar{x}})_{ij} + (v_{y\bar{y}})_{ij} = -f_{ij}, & i,j \in \omega_H \\ v_{ij} = \mu(x_i, y_j) & (i,j) \in \gamma_H \end{cases}$$

] $n = 4$, $m = 4$



$$
\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & & \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & \\
& \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & \\
\frac{1}{k^2} & & & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & \\
& \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & A & \tilde{A} & \frac{2}{\tau} & \frac{1}{k^2} \\
& & \frac{1}{k^2}\frac{2}{D} & & \frac{1}{h^2} & \tilde{A} & & & \frac{1}{h^2} \\
& & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & & \\
& & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \\
& & & & & & & & A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \\ V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \\ V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-f_{11} - \frac{1}{h^2}\mu_2 - \frac{1}{k^2}\mu_3 \\
-f_{21} - \frac{1}{k^2}\mu_3 \\
-f_{31} - \frac{1}{h^2}\mu_1 - \frac{1}{k^2}\mu_3 \\
-f_{12} - \frac{1}{h^2}\mu_2 \\
-f_{22} \\
-f_{32} - \frac{1}{h^2}\mu_1 \\
-f_{13} - \frac{2}{D\gamma}\mu_5 - \frac{2}{c\lambda}\mu_5 \\
-f_{23} - \frac{1}{k^2}\mu_4 \\
-f_{33} - \frac{1}{h^2}\mu_1 - \frac{1}{k^2}\mu_4
\end{pmatrix}
$$

Алгоритм решения схемы МПИ

$$\lambda_{min} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2n} + \frac{4}{k^2}\sin^2\frac{\pi}{2m}$$

$$\lambda_{max} = \frac{4}{h^2}\sin\frac{\pi(n+1)}{2n} + \frac{4}{k^2}\sin^2\frac{\pi(m-1)}{2m}$$

Код:

```
{   double eps_cur =0.0
    double h2 = 1/h·h
    double k2 = 1/k·k
    int iter=0
    auto solution:non_old =new maxr
    doube v_old ,v_new
    while (true) {
        if(max_iters ==0)
            break
      iter++
      eps_max=0
      for(int j=0 ; j<=m ; j++)
        for( int i=0 ; i<=n ; i++)
          (solition_old )[i][j]=(*solution)[j][i]
       for( int j=1; j< m/2 ; j++)
          for(int i=1; i<n ; i+1] {
            a2 =-2 * (h2+k2)
            double x1 =a +i*h
            double y1 = b +j*k
            v_old =(* solutin_old)[i][j]
            v_new = v_old +τ (k2((*sdution_old) [j-1] [i] +
          + (*solution_old)[j+1][i])+h2*((*solution_old]
          [j] [j-1] + solution_old) [j][i+1]+a2 + v_old + f(x1,y1);
```

```
eps-cur= abs(v-old - v_new);
 if( eps-cur > eps_max)
     eps_max = eps-cur
     (*solution)[j][i] = v_new
for(int j = m/2; j < m; j+1)
    for(int i = n/2; i < n; i++){



    }
for (int j = m/2 ; j < m; j++)
   for(int i = 1; i < n/2; i++){
a1 = -2(1/h*h + a) + 1/(k*k+y);
 double xi = a+i*h
 double yi = c +j*k;
 v_old = 1/(a+h*a*h);
 eps_cur= abs(v_old - v_new);
   if(eps_cur > eps_max)
       eps_max = eps_cur;
   (*solution)[i][j] = v_new;

 }
 if((eps_max > eps) || (iter > = max-iters))
      break
 } total_iters = iter;
}
```

Этап. 2 . Анализ погрешности.

Погрешность схемы - сеточная ф-я $z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$

u_{ij} - точное решение ДУ

v_{ij} - точное решение разн. схемы.

ПА - невязка разн. схемы при условии, что в нее подставляют решение ДУ

$$\psi_{ij} = [u_{x\bar{x}}]_{ij} + [u_{y\bar{y}}]_{ij} + f_{ij}$$

$$\psi_{ij} = u_{ij} - \mu(x_i, y_j)$$

Схема аппроксимирует задачу со 2 порядком по h и по k, если $\alpha = \beta$. С первым по h и по k – если $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{cases} \max |\psi_{ij}| \le \hat{M}(h+k) \\ \max\limits_{i,j \in \gamma_{hk}} |\psi_{ij}| = 0 \end{cases} \quad \text{– при } \alpha \neq \beta$$

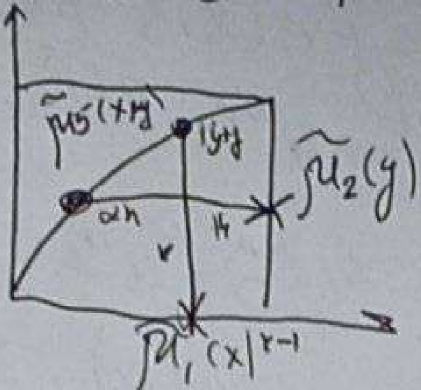
Погр. схемы → при сгущении сетки со 2 порядком по h и k ($\alpha = \beta$) и с первым $\alpha = \beta$

$$\underbrace{\max_{i,j \in \omega_{hk}} |z_{ij}| \le M(h^2 + k^2)}_{\alpha = \beta} \qquad \underbrace{\max_{i,j \in \omega_{hk}} |z_{ij}| \le \hat{M}(h+k)}_{\alpha = \beta}$$

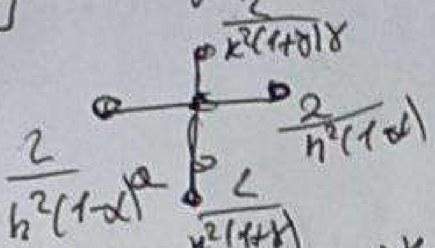
$$\max_{i,j \in \gamma_{hk}} |z_{ij}| = 0$$

Для случая, когда $\alpha=\beta$ уже всё доказано в предыдущей задаче, поэтому будем решать только случай $\alpha\neq\beta$:

Богдашкин



$\widetilde{\mu}_1(x)$ и $\widetilde{\mu}_2$ – знач. во внутренних узлах, мы их знаем, потому что переучен, как считать $\sum \partial \Psi$, область посчитаем остальные треугольники



$*$

$$\Psi_{ij}=\left(\frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)\alpha}u_{i-\alpha j}-\frac{1}{\alpha\beta}u_{ij}+\frac{1}{(\alpha+\beta)\beta}u_{i+\beta j}\right)\right)+$$

$**$

$$+\frac{2}{k^2}\left(\frac{1}{(\gamma+\delta)\gamma}u_{ij+\gamma}-\frac{1}{\gamma\delta}u_{ij}+\frac{1}{(\gamma+\delta)\delta}u_{ij-\delta}\right)+f_{ij}$$

$$\Psi_{i0}=u_{i0}-\widetilde{\mu}_1(x_i)=0 \qquad \Psi_{n_j}=u_{1j}-\widetilde{\mu}_2(y_j)=0$$

$$\Psi_{ij}=u_{ij}-\widetilde{\mu}_5(x_i,y_j)=0,\ \text{при } i,j\in\gamma_n$$

При $\alpha\neq\beta$ разностные операторы $*$ и $**$ аппроксимируют вторую производную с первым порядком по h и по k:

$$[\Psi_{xx}]_{ij}=(u''_{xx})_{ij}-[u_{x\bar{x}}]_{ij}=(u''_{xx})_{ij}-\frac{2}{h^2}\Big(\frac{1}{(\alpha+\beta)\alpha}\underbrace{u_{i-\alpha j}}_{\text{раскладываем}}\ \ominus$$

$$\ominus\ \frac{1}{\alpha\beta}u_{ij}+\frac{1}{(\alpha+\beta)\beta}\underbrace{u_{i+\beta j}}_{\text{раскрыв.}}\Big)\ \ominus$$

распишем $u_{i\alpha j}$

$$u_{i-\alpha j}=u(x_i-\alpha)=u(x_i-\alpha h)=u(x_i)+u'(x_i)(-\alpha h)+u''(x_i)\frac{(-\alpha h)^2}{2!}\ \ominus$$

$$\ominus\ u'''(\xi)\frac{(-\alpha h)^3}{3!},\ \xi\in[x_i-\alpha h;x_i]$$

$$u_{i-\alpha j}=u(x_i)+u'(x_i)(-\alpha h)+u''(x_i)\cdot\frac{(-\alpha h)^2}{2!}+u'''(x_i)\frac{(-\alpha h)^3}{3!}+O(h^3)$$

Распишем $u_{i+\beta_i}$

$$u_{i+\beta_i} = u(x_{i+\beta}) = u(x_i + \beta h) = u(x_i) + u'(x_i)\beta h +$$

$$+ u''(x_i)\frac{(\beta h)^2}{2} + u'''(\xi)\frac{(\beta h)^3}{3!}, \quad \xi \in [x_i, x_i + \beta h]$$

$$u_{i+\beta_i} = u(x_i) + u'(x_i)\beta h + u''(x_i)\frac{(\beta h)^2}{2!} + u'''(x_i)\frac{(\beta h)^3}{3} + o(h^3)$$

$$= u''(x_i) - \frac{2}{h^2}\left(\frac{2}{(\alpha+\beta)\alpha}\left(\frac{u(x_i)}{h^2} - \frac{\alpha h u'(x_i)}{h} + \frac{\alpha^2 h^2}{2}u''(x_i) -\right.\right.$$

$$- \left.\frac{\alpha^3 h^3}{6}u'''(\xi)\right) - \frac{2}{\alpha\beta h}u_{ij} + \frac{2}{(\alpha+\beta)\beta}\left(\frac{u(x_i)}{h^2} + \frac{\beta h u'(x_i)}{h} +\right.$$

$$+ \left.\frac{\beta^2 h^2}{2}u''(x_i) + \frac{\beta^3 h^3}{6}u'''(\xi)\right) =$$

$$= u''(x_i) - \Bigg[\underbrace{\left(\frac{2}{(\alpha+\beta)\alpha} + \frac{2}{(\alpha+\beta)\beta} - \frac{2}{\alpha\beta}\right)}_{=0}\frac{u(x_i)}{h^2} + \underbrace{\left(\frac{2}{\alpha+\beta} - \frac{2}{\alpha+\beta}\right)}_{}\frac{u'_x}{h}$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)u''(x_i) + \left(\frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)\cdot 3} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)\cdot 3}\right)\cdot h\, u'''(\xi)\Bigg] =$$

$$= u''(x_i) - \left[u''(x_i) + \left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)\cdot h\, u'''(\xi)\right] = u''(x_i) - u''(x_i) -$$

$$- \frac{\beta-\alpha}{3}h \cdot u'''(\xi) = -\frac{\beta-\alpha}{3}u'''(\xi)h = \frac{\alpha-\beta}{3}u'''(\xi)\cdot h$$

$$\boxed{[\psi_{x\bar{x}}]_i = \frac{\alpha-\beta}{3}u'''(\xi_i)h, \quad \xi \in [x_i - \alpha h; x_i + \beta h]}$$

Определение порядка погрешности оператора:

$$u''(x_i) - \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{(\alpha+\beta)\alpha}\left(u(x_i) - \alpha h u'(x_i) + \frac{\alpha^2 h^2}{2}u''(x_i) -\right.\right.$$

$$- \left.\frac{\alpha^3 h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^3)\right) - \frac{1}{\alpha\beta}u(x_i) + \frac{1}{(\alpha+\beta)\beta}\left(u(x_i) + \beta h u'(x_i) +\right.$$

$$+ \left.\left.\frac{\beta^2 h^2}{2}u''(x_i) + \frac{\beta^3 h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^3)\right)\right] = \frac{\alpha-\beta}{3}u'''(x_i)h + O(h)$$

Главный член: $\frac{\alpha-\beta}{3}u''(x_i)h + O(h)$

Главный член $\frac{\alpha-\beta}{3}u'''(x_i)h$

Порядок $k=1$

Получается, что (C аппроксимирует вторую производную) с 1 порядком по h и оценка также

$|\psi_i| \le h \cdot \hat{M}$, где $\hat{M} = \max \left| \frac{\alpha-\beta}{3} u^{IV}(\xi) \right|$, $\xi \in [x_i - \alpha h, x_i + \alpha h]$

Аналогично показывается, что будет аппроксимация с 1 порядком по k, 1 порядка в итоге получим:

$\psi_{ij} = (u_{x\bar{x}})_{ij} + (u_{y\bar{y}})_{ij} + f_{ij} - (u_{xx} + u_{yy} + f(x,y))|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} =$

$= (u_{x\bar{x}})_{ij} - u_{xx}(x_i, y_j) + u(y\bar{y})_{ij} - u_{yy}(x_i, y_j) =$

$= \frac{h}{3} u'''_{xxx}(\xi_1, y_j)(\alpha-\beta) + \frac{k}{3}(\gamma+\delta) u'''_{yyy}(x_i, \xi_2)$

$\xi_1 \in [x_{i-\alpha}, x_{i+\beta}]$, $\xi_2 \in [y_{i-j}, y_{\alpha+\gamma}]$

$\Rightarrow$ $\cancel{\psi_{ij} = (u_{x\bar{x}})_{ij} + (u_{y\bar{y}})_{ij} + f_{ij} (u_{xx} + u_{yy} + f(x,y))|}$

$\psi_{ij} = \frac{1}{3}\left(h(\alpha+\beta) u'''_{xxx}(\xi_1, y_j) + k(\gamma+\delta) u'''_{yyy}(x_i, \xi_2)\right)$

Для граничных точек погреш. аппрокс. нулевые.

$\psi_{ij} = u_{ij} - \mu(x_i, y_j) = 0$, поэтому её можно оценить так: $\max\limits_{\substack{i=0,n-1 \\ j=1,m-1}} |\psi_{ij}| \le \frac{1}{3}(h+k)\bar{M}$, где $\bar{M} = \max\limits_{\substack{x\in(0,1) \\ y\in(0,1)}} \{ |\alpha+\beta| u'''_{xxx}(x,y)|, |(\gamma+\delta)| u'''_{yyy}(x,y)| \}$

Связь ПА и погрешности схемы:

Подставим вектор z в разностн. схему:

$\frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{\cancel{\alpha+\beta\alpha}} z_{i+\alpha j} - \frac{1}{\alpha\beta} z_{ij} + \frac{1}{(\alpha+\beta)\beta} z_{i+\beta j}\right) + \frac{2}{k^2}\left(\frac{2}{k^2}\left(\frac{1}{(\gamma+\delta)\gamma} z_{i,j+\gamma}\right.\right.$

$+ \frac{1}{(\gamma+\delta)\delta} z_{ij-\delta}) \boxed{=}$

$$\boxed{=}\ \frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)\alpha}u_{i-\alpha_i} - \frac{1}{\alpha\beta}u_{ij} + \frac{1}{(\alpha+\beta)\beta}u_{i+\beta_j}\right) +$$

$$+\ \frac{2}{k^2}\left(\frac{1}{(\gamma+\delta)\delta}u_{ij+\gamma} - \frac{1}{\gamma\delta}u_{ij} + \frac{1}{(\gamma+\delta)\delta}u_{ij-\delta}\right) = \psi_{ij}$$

$$\frac{2}{h^2}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)\alpha}z_{i\alpha j} - \frac{1}{\alpha\beta}z_{ij} + \frac{1}{(\alpha+\beta)}z_{ij\beta i}\right) +$$

$$+\ \frac{2}{k^2}\left(\frac{1}{(\gamma+\delta)\gamma}z_{ij+\gamma} - \frac{1}{\gamma\delta}z_{ij} + \frac{1}{(\gamma+\delta)\delta}z_{ij-\delta}\right) = \psi_{ij}$$

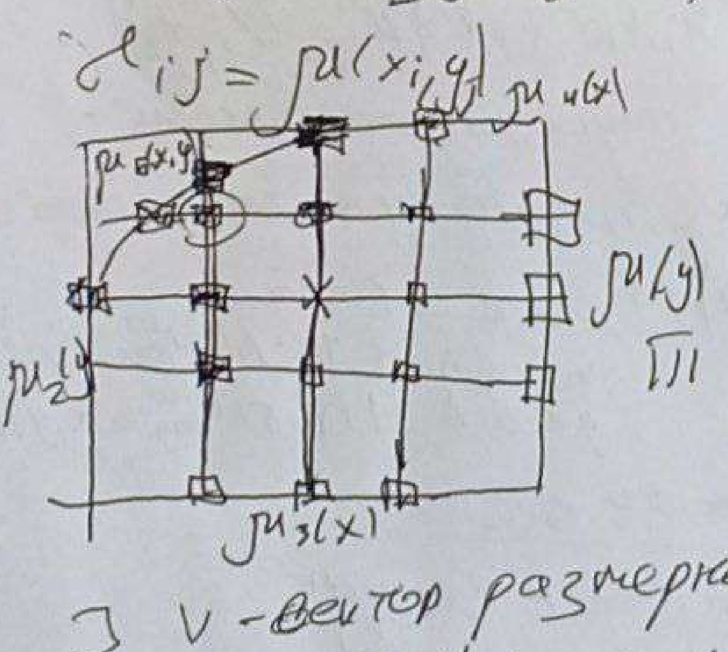
$i = 1,..,n-1$
$j = 1,..,m-1$

2) (сформулировать и д-ть аналог теоремы "Принцип максимума")

Записан схему в вид:

$(v_{x\bar{x}})_{ij} + (v_{y\bar{y}})_{ij} = -f_{ij}$, $(i,j) \in \omega_{hk}$
$(i,j) \in \gamma_{hk}$

$v_{ij} = \mu(x_i, y_j)$



внутр. узел 1-го типа
остальные граничные
$n=4$ $m=4$

$\Rightarrow$ т.е. 3×3

$\exists$ V - вектор размерности $(n-1)(m-1)$

$$V = (\underbrace{v_{11}\ v_{21}\ v_{31}}_{H_1},\ \underbrace{v_{12}\ v_{22}\ v_{32}}_{H_2},\ \underbrace{v_{13}\ v_{23}\ v_{33}}_{H_3}$$

(11) Пусть сетка задачи является связной $\exists$ для некоторого $V \in R^{3\times 3}$ $AV \geq 0$. Тогда $V \leq 0$. Д-во аналогично тому, что в задаче про треугольную область с выб. углом, всё тоже самое, потому что сетка связная.

3) Доказать сх-ть схемы, построить оценку и определить порядок сх-ти, указать, в какой норме доказана сх-ть.

Погрешность решения задачи (1) с помощью разн. схемы (2) - это сеточная

Погрешность реш-я задачи (1) с помощью разн. схемы (2) – это сеточная функция $z = u - v$

Рассмотрим ДУ (3):

$$\Delta \hat{z}(x,y) = -5k \le 0,\ x \in (a,b),\ y \in (c,d)$$

$$\hat{z}(x,y) = K\big((x-a)(b-x) + (y-c)(d-y)\big) \leftarrow (3^*)$$

$$\hat{z}(a,y) = k(y-c)(c^*-y) \ge 0 \quad y \in [c, c^*]$$

$$\hat{z}(b,y) = k(y-c)(d-y) \ge 0 \quad y \in [c,d]$$

$$\hat{z}(x,c) = k(x-a)(b-x) \ge 0 \quad x \in [a,b]$$

$$\hat{z}(x,d) = k(x-a^*)(b-x) \ge 0 \quad x \in [a^*, b]$$

$$\hat{z}(x,y) = k\big((x-a)(a^*-x) + (y-c^*)(d-y)\big) \quad x \in [a,a^*],\ y \in [c^*,d]$$

На сетке (4,4) задача (3) решается численно с помощью разностной схемы (4):

$$(\hat{z}_{x\bar{x}})_{ij} + (\hat{z}_{y\bar{y}})_{ij} = -5k \qquad (i,j) \in \omega_{hk}$$

$$\hat{z}_{ij} = \hat{\mu}(x_i, y_j) \qquad (i,j) \in \gamma_{hk},\ \text{где}$$

ф-ю $\hat{\mu}(x,y)$ определяем в топологически граничных узлах:

$$\hat{\mu}(x_i,y_j) = k\big((x_i-a)(b-x_i) + (y_j-c)(d-y_j)\big) \ge 0 \quad (i,j) \in \gamma_{hk}$$

Точным решением (4) является (3^*),

Поскольку $\hat{z}(x,y)$ квадратично зависит от x и y, значения разностных операторов численного диф-я используемых в схеме (4) совпадают со значениями соотв-х частных производных в ур(3)

$$(\hat{z}_{x\bar{x}})_{ij} = \left.\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2}\right|_{(x_i,y_j)},\quad (\hat{z}_{y\bar{y}})_{ij} = \left.\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial y^2}\right|_{(x_i,y_j)} \quad i,j \in \omega_{hk}$$

Для пары задач (1) и (2) погр-ти z и ψ связаны ур-ями:

$$
\begin{aligned}
&(z_{x\bar{x}})_{ij} + (z_{y\bar{y}})_{ij} = \psi_{ij} \qquad && (i,j) \in \omega_{hk} \\
&z_{ij} = 0 && (i,j) \in \gamma_{hk}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Запишем задачи (5) и (4) в матр. виде

$$Az = \psi \quad (5^*)$$

$$A\hat{z} = \hat{\psi} \quad (4^*)$$

$$
\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & & \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & \\
& \frac{1}{h^2} & A & & & \frac{1}{k^2} & & & \\
\frac{1}{k^2} & & & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & \\
& \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & \\
& & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & & & \frac{1}{k^2} \\
& & & \frac{2}{D} & & & \tilde{A} & \frac{2}{C} & \\
& & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} \\
& & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \\ z_{12} \\ z_{22} \\ z_{32} \\ z_{13} \\ z_{23} \\ z_{33}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \psi_{31} \\ \psi_{12} \\ \psi_{22} \\ \psi_{32} \\ \psi_{13} \\ \psi_{23} \\ \psi_{32}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & & \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & & & \\
 & \frac{1}{h^2} & A & & & \frac{1}{k^2} & & & \\
\frac{1}{k^2} & & & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & & \\
 & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & & \frac{1}{k^2} & \\
 & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & & & \frac{1}{k^2} \\
 & & & \frac{2}{D} & & & \tilde{A} & \frac{2}{C} & \\
 & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} \\
 & & & & & \frac{1}{k^2} & & \frac{1}{h^2} & A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\hat{z}_{11} \\ \hat{z}_{21} \\ \hat{z}_{31} \\ \hat{z}_{12} \\ \hat{z}_{22} \\ \hat{z}_{32} \\ \hat{z}_{13} \\ \hat{z}_{23} \\ \hat{z}_{33}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\hat{\psi}_{11} \\ \hat{\psi}_{21} \\ \hat{\psi}_{31} \\ \hat{\psi}_{12} \\ \hat{\psi}_{22} \\ \hat{\psi}_{32} \\ \hat{\psi}_{13} \\ \hat{\psi}_{23} \\ \hat{\psi}_{33}
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\overset{df}{=}
\begin{pmatrix}
-5k - \frac{1}{h^2}\mu_2 - \frac{1}{k^2}\mu_3 \\
-5k - \frac{1}{k^2}\mu_3 \\
-5k - \frac{1}{h^2}\mu_1 - \frac{1}{k}\mu_3 \\
-5k - \frac{1}{h^2}\mu_2 \\
-5k \\
-5k - \frac{1}{h^2}\mu_1 \\
-5k - \frac{2}{D\gamma}\mu_5 - \frac{2}{C\gamma}\mu_5 \\
-5k - \frac{1}{k^2}\mu_4 \\
-5k - \frac{1}{h^2}\mu_4 - \frac{1}{k^2}\mu_4
\end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix}
-5k \\ -5k \\ -5k \\ -5k \\ -5k \\ -5k \\ -5k \\ -5k \\ -5k
\end{pmatrix}
$$

В общем случае в задачах (5^*) и (4^*) искомыми явл. векторы:

$z = (z_{11}, \dots, z_{33})$, $\hat{z} = (\hat{z}_{11}, \dots, \hat{z}_{33})$

Они состоят из компонент погрешности z и значений сеточной ф-ии $\hat{z}$ при $(i,j) \in \omega_{hk}$ соответст.

Первая часть (5*) записывается в виде:

$\psi = (\psi_{11}, \dots, \psi_{33})$ и состоит из компонент вектора погрешности аппроксимации ψ при $(i,j) \in \omega_{hk}$. Правая часть (4*) записана в виде вектора: $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_{11}, \dots, \hat{\psi}_{33})$, компоненты которого определены ф-ями вида:

$$\hat{\psi}_{ij} = -5K - \frac{1}{h^2}(\alpha_1 \hat{\mu}_{ij-1} + \alpha_2 \hat{\mu}_{ij+1}) - \frac{1}{k^2}(\alpha_3 \hat{\mu}_{i-1j} + \alpha_4 \hat{\mu}_{i+1j})$$

$(i,j) \in \omega_{hk}$; $\hat{\mu}_{pq} = \hat{\mu}(x_p, y_q)$ $(p,q) \in \gamma_{hk}$ $\alpha_l \in \{0,1\}$ $l = \overline{1,4}$

Если $(i,j) \in \omega_{hk}$ явл топологическим внутреним узлом 1-го типа, то все коэф.-ты α_l; $l = \overline{1,4}$ равны 0 и $\psi_{ij} = -5k$. Если $(i,j) \in \omega_{hk}$ – топ внутр. узлы 2-го типа, то среди коэф-ов α_l, $l = \overline{1,4}$ найдётся равный 1, причём таких коэф.-ов может быть не более 2

Поскольку $\hat{\mu}_{pq} = \hat{\mu}(x_p, y_q) \geq 0$, $(p,q) \in \gamma_{hk}$, получим $\hat{\psi}_{ij} \leq -5k$. В любом случае $\hat{\psi}_{ij} \leq -5k$ $(i,j) \in \omega_{hk}$

Теперь подберём такие $K > 0$, чтобы модули правых частей задачи (4*) ограничивали модули правых частей задачи (5*)

$5k = \hat{M}_1 h + \hat{M}_2 k$, где $\hat{M}_1, \hat{M}_2$ опред. формулой:

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{3} \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| (\alpha + \beta) U'''_{xxx}(x,y) \right|, \quad \hat{M}_2 = \frac{1}{3} \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| (\gamma + \delta) U'''_{yyy}(x,y) \right|$$

Они не зависят от h и k

$$\text{Ɀ ур-я } A(\hat{z} + z) = (\hat{\psi} + \psi)$$
$$A(\hat{z} - z) = (\hat{\psi} - \psi)$$

Т.к. для A справедлив принцип максимума

$(\hat{\varphi}+\varphi) \le 0 \Rightarrow (\hat{z}+z) \ge 0 \Rightarrow z \ge -\hat{z}$, $(\hat{\varphi}-\varphi) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\hat{z}-z) \ge 0 \Rightarrow z \le \hat{z} \Rightarrow -\hat{z} \le z \le \hat{z}$ или

$-\hat{z}_{ij} \le z_{ij} \le \hat{z}_{ij} \quad (i,j) \in \omega_{hk}$

Т.к. при $(i,j) \in \omega_{hk}$ $\hat{z}_{ij} \ge 0$, для компонент погр-ти z

верно $|z_{ij}| \le \hat{z}_{ij} \quad (i,j) \in \omega_{hk}$

Используя (5) и (3*) получим:

$$\max_{(i,j)\in\omega_{hk}} |z_{ij}| \le \max_{(i,j)\in\omega_{hk}} K\left((x_i-a)(b-x_i)+(y_j-c)(d-y_j)\right) \le$$

$$\le \frac{2(\hat{M}_1 h+\hat{M}_2 k)}{3} \max_{(i,j)\in\omega_{hk}} \left((x_i-a)(b-x_i)+(y_j-c)(d-y_j)\right) \le$$

$$\le \frac{4(\hat{M}_1 h+\hat{M}_2 k)}{9} \cdot \left((b-a)^2+(d-c)^2\right)$$

$$\max_{(i,j)\in\omega_{hk}} |z_{ij}| = O$$

□

4) Сформулируйте опр. общ. погрешности, погрешности метода и вычислительной погр-ти; опишите структуру общей погрешности с учётом того, что реш-е СЛАУ (разн. схемы) будет найдено с помощью и методов.

Общая погрешность решения з. (1) с помощью схемы (2) на сетке (n, m) – это сеточная ф-я:

$z_{общ}(x,y) = u(x,y) - v^{**}(x,y)$, где $u(x,y)$ – сет. функц., соотв. точному решению з. (1), $v^{**}(x,y)$ – сеточная ф-я, соотв. численному решению разн.-схемы (2)

Если (2) решена с помощью итер. метода, общую погрешность можно записать в виде:

$z_{общ}(x,y) = u(x,y) - v_s^{**}(x,y)$, причём

$$z_{общ}(x,y) = \underbrace{\left[u(x,y) - v(x,y)\right]}_{\text{погр. реш. зад (1)}} + \underbrace{\left[v(x,y) - v_s(x,y)\right]}_{\text{погр. решен. сх (2) с помощ. итер. мет.}} + \underbrace{\left[v_s(x,y) - v_s^{**}(x,y)\right]}_{\text{погр. счёта на s-ом шаге}}$$

Этап 3 Запись итерац. метода при сгущ. сетки

Если сгущаем сетку и заранее не знаем n и m, то перед запуском метода нужно проверять кратность (n и m должны быть кратны 2):

```
if ((m%2 !=0) || (n%2 !=0)):
    cout <<("Задано нечётное n или m");
else
```

$$\lambda_{min} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2n} + \frac{4}{k^2}\sin^2\frac{\pi}{2m}$$

$$\lambda_{max} = \frac{4}{h^2}\sin\frac{\pi(n-1)}{2n} + \frac{4}{k^2}\sin^2\frac{\pi(m-1)}{2m}$$

$$\tau = 2/(\lambda_{max}+\lambda_{min})$$

нужно вычислить перед примен. метода

```
{ double eps_ =0.0;
  double h2 = 1/(h*h);
  double k2 = 1/(k*k);
  double a2;
  int iter=0;
  auto solution_old = new matrix(m+1, n+1, 0)
  double v_old, v_new;
  While (true){
      if (max_iters ==0)
          break;
      iter++;
      for(int j=0; j<=m; j++)
          for(int i=0; i<=n; i++)
              (*solution_old)[j][i] = (*solution)[j][i];

      for(int j=1; j<m/2; j++)
          for(int i=1; i<n; i++){
```

```
a2 = -2(h2 + k2);
double xi = a + i*h;
double yj = c + j*k;
V_old = (*solution_old)[i][j];
V_new = V_old + τ * (k2((*solution_old)[i-1][i] +
 + (*solution_old)[j+1][i]) + h2*((*solution_old)[j][i-1] +
 + (*solution_old)[j][i+1] + a2*V_old + f(xi, yj));
eps_ = abs(V_old, V_new);
if (eps_ > eps_max)
    eps_max = eps_;
(*solution)[j][i] = V_new;
```

```
for(int j = m/2 ; j<m ; j++)
    for (int j = n/2 ; i<n ; i++) {

    (*)

    }
for ( int j = m/2 ; j<m ; j++)
    for (int i=1; i< n/2 ; i++) {
        a2 = -2*(1/(h*h*α) + 1/(k*k*γ));
        double xi = a + i*h;
        double yj = c + j*k;
        h2 = 1/(h*α*h*α);
        k2 = 1/(k*γ*k*γ);
        V_old = (*solution_old)[j][i];
        V_new = V_old + tau + (k2((*solution_old)[j-1][i] +
         + (*solution_old)[j+1][i]) + h2 * ((*solution_old)[j][i-1] +
         + (*solution_old)[j][i+1]) + a2*V_old + f(xi, yj);
        eps_ = abs(V_old - V_new);
        if (eps_ > eps_max)
            eps_max = eps_
        (*solution)[j][i] = V_new;
    }
  if ((eps_max > eps) || (iter > max_iters))
      break;
  }
  total_iters = iter;
}
```