ЛЕКЦИЯ 3

Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ – некоторая область, точки пространства обозначаем (x, y). Рассмотрим линейное относительно старших производных дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \tag{1}$$

Предполагаем, что коэффициенты a, b и c имеют непрерывные производные до второго порядка включительно и не обращаются одновременно в ноль, то есть $|a|+|b|+|c| \neq 0$. Уравнению соответствует квадратичная форма

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2.$$

Запишем уравнение для определения собственных значений матрицы коэффициентов при старших производных:

$$\det(A - \lambda I) = 0, \ \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Согласно теореме Виета, корни уравнения удовлетворяют равенству

$$\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2.$$

Таким образом, уравнение принадлежит (в точке или области):
гиперболическому типу, если $b^2 - ac > 0$;
параболическому типу, если $b^2 - ac = 0$;
эллиптическому типу, если $b^2 - ac < 0$.
Пусть функции φ, ψ – дважды непрерывно дифференцируемые, якобиан

$$\det J = \begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial x, & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x, & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix}$$

не обращается в ноль в области Ω. Выполним преобразование переменных

$$\xi = \varphi(x,y), \ \eta = \psi(x,y).$$

Получаем, обозначая $v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Подставляя значения производных в уравнение (1), имеем

$$\bar{a}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\bar{b}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{c}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \bar{F} = 0, \tag{2}$$

где

$$\bar{a} = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\bar{b} = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\bar{c} = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных.

Если исходное уравнение линейно, то есть

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu + f,$$

то

$$\bar{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \bar{d}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{e}\frac{\partial v}{\partial \eta} + gv + \bar{f},$$

$$\bar{d} = a\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + d\frac{\partial \xi}{\partial x} + e\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\bar{e} = a\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + d\frac{\partial \eta}{\partial x} + e\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\bar{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi), y(\eta)).$$

В том, что при преобразовании переменных, допускающих обратное, тип уравнения не меняется, можем в рассматриваемом случае убедиться непосредственно, поскольку

$$\bar{b}^2 - \bar{a}\bar{c} = (b^2 - ac)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = (b^2 - ac)(\det J)^2.$$

Выберем функции φ и ψ, задающие преобразование переменных, так, чтобы уравнение приняло более простую форму.

Рассмотрим уравнение

$$a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** дифференциального уравнения (1). Пусть $z = \varphi(x, y)$ - частное решение этого уравнения, такое, что на кривой $\varphi(x, y) = 0$ $\operatorname{grad} \varphi$ не обращается в ноль. Тогда кривая $\varphi(x, y) = 0$ называется характеристической линией или **характеристикой** уравнения (1).

Предположим, что каждая кривая семейства $\varphi(x, y) - C = 0$, $c_1 < C < c_2$, есть характеристика уравнения (1). Так как на каждой характеристике $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$, это семейство заполняет некоторую область, через каждую точку которой проходит одна и только одна характеристика. Пусть функция φ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда, если в преобразовании переменных взять $\xi = \varphi$, коэффициент $\bar{a}$ обратится в нуль.

Таким образом, задача о выборе новых переменных связана с решением уравнения с частными производными 1-го порядка.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $z = \varphi(x, y)$ - частное решение уравнения (3) такое, что $\partial\varphi/\partial y \neq 0$, то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения*

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0. \tag{4}$$

Обратно, если $\varphi(x, y) = C$, где $\partial\varphi/\partial y \neq 0$, представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (4), то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (3).

Доказательство. Пусть z удовлетворяет равенству (3) в некоторой области. Тогда равенство

$$a\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0$$

является в этой области тождеством по переменным x, y.

При выполнении условия $\varphi_y \neq 0$ равенство $\varphi(x, y) = C$ определяет функцию

$$y = f(x, C),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x,C)},$$

где квадратные скобки и индекс указывают, что в правой части равенства переменная y не является независимой переменной, а имеет значение $f(x, C)$. Отсюда следует, что

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = \left[a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c\right]_{y=f(x,C)} = 0,$$

то есть $y = f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (4). Таким образом, выражение $\varphi(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (4).

Обратно, пусть $\varphi = C$ – общий интеграл (4). Докажем, что

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \tag{5}$$

для любой точки (x, y). Зафиксируем произвольную точку (x_0, y_0). Проведём через неё интегральную кривую уравнения (4), полагая $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ и рассматривая кривую $y = f(x, C_0)$. Очевидно, $y_0 = f(x_0, C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = \left[a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c\right]_{y=f(x,C_0)} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_0$, получаем

$$a\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2b\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + c\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0.$$

В силу произвольности точки (x_0, y_0) это означает, что (5) – тождество и φ – его решение, что и требовалось доказать.

Уравнение (4) называется **уравнением характерик** для уравнения (1). Его интегралы $\varphi(x, y) = C$, такие, что $\partial\varphi/\partial y \neq 0$, являются характеристиками уравнения (1).

Рассмотрим область, во всех точках которой уравнение (1) имеет один и тот же тип. Уравнение характеристик (4) распадается на два уравнения:

$$a dy - (b + \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0, \tag{6}$$

$$a dy - (b - \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0, \tag{7}$$

или, если $a \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Таким образом, через каждую точку области проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа (подкоренное выражение в (6), (7) положительно) характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа - комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Рассмотрим преобразование переменных в уравнении (1) для каждого типа уравнения отдельно.

Уравнения гиперболического типа

Предположим, в рассматриваемой области хотя бы одна из функций a, c не обращается в ноль. Без ограничения общности считаем, что $a \neq 0$.

Так как $b^2 - ac > 0$, общие интегралы $\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$ уравнений (6) и (7) действительны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик для уравнения (1).

Выполним замену переменных

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \psi(x, y).$$

Из уравнений (6), (7) получаем

$$\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y} = -\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},\ \frac{\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y} = -\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Якобиан преобразования равен

$$\det J = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0.$$

Как показано выше, при такой замене $\bar{a} = 0$ и $\bar{c} = 0$, то есть получаем

$$2\bar{b}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{F} = 0.$$

Так как $\bar{b}^2 - \bar{a}\bar{c} > 0$, то коэффициент перед $v_{\xi\eta}$ не обращается в ноль, и после деления на него получаем, что уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial\xi}, \frac{\partial v}{\eta}). \tag{8}$$

Это уравнение называется **канонической формой** уравнения (1).

Часто пользуются второй канонической формой, которая соответствует определению канонического вида уравнения второго порядка, данному на прошлой лекции.

Чтобы её получить, новые переменные вводятся по формулам

$$\xi = \varphi(x,y) + \psi(x,y),\ \eta = \varphi(x,y) - \psi(x,y).$$

Тогда

$$\bar{a} = -\bar{c},\ \bar{b} = 0, \tag{9}$$

и уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \Phi(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\eta}). \tag{10}$$

Если в уравнении (1), имеющем гиперболический тип, $a = c = 0$, то разделив уравнение на $2b(x,y) \neq 0$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F_1 = 0,$$

то есть каноническую форму гиперболического уравнения.

Уравнения параболического типа

Пусть $b^2 - ac = 0$. Так как коэффициенты уравнения не обращаются одновременно в ноль, можно считать, что в рассматриваемой области хотя бы один из коэффициентов a и c отличен от нуля. Пусть $a \neq 0$.

Уравнения (6) и (7) совпадают и принимают вид

$$ady - bdx = 0. \tag{11}$$

Пусть $\varphi(x,y) = C$ – общий интеграл уравнения (11), определяющий семейство действительных характеристик для уравнения (1). Функция φ – решение уравнения

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Сделаем в уравнении (1) замену переменных

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y),$$

где ψ - любая гладкая функция такая, что эта замена переменных взаимно однозначна в рассматриваемой области. Например, поскольку $\partial\varphi/\partial y \neq 0$, можно взять $\eta = x$.

При таком выборе переменных

$$\bar{a} = 0,$$

и, так как

$$b^2 = ac,\ a\frac{\partial \xi}{\partial x} = -b\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\bar{b} = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\left(-b\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{b^2}{a}\frac{\partial \eta}{\partial y} + b\frac{\partial \eta}{\partial x} + c\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0.$$

После деления преобразованного уравнения на коэффициент $\bar{c}$, получаем каноническую форму уравнения параболического типа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \Phi(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}). \tag{12}$$

Если в правую часть уравнения (12) не входит $\partial v/\partial \xi$, то (12) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от ξ как от параметра.

Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим случай $b^2 - ac < 0$. Правые части уравнений (6) и (7) являются комплексно сопряженными. Пусть $\zeta(x, y) = C$ - комплексный интеграл уравнения (6). Тогда $\zeta^* = C$, где ζ^* – сопряженная ζ функция, будет представлять собой общий интеграл уравнения (7).

Если выберем в качестве новых переменных

$$\xi = \zeta(x, y),\ \eta = \zeta^*(x, y),$$

то уравнение приведём к такому же виду, что и гиперболическое уравнение, якобиан преобразования равен

$$\det J = -2i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y} = -2i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|^2 \neq 0.$$

Пусть

$$\zeta(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где φ и ψ – действительные функции. Сделаем замену переменных в уравнении (1), положив

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \psi(x, y).$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \zeta_x & \zeta_y \\ \zeta_x^* & \zeta_y^* \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 2i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

якобиан этого преобразования отличен от нуля.

В тождестве

$$a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

разделим действительную и мнимую части. Получаем

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$a\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] + 2b\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] + c\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] = 0,$$

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Таким образом,

$$\bar{a} = \bar{c},\ \bar{b} = 0.$$

После деления преобразованного уравнения на $\bar{a}$, получим каноническую форму уравнения эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} = \Phi(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial\xi}, \frac{\partial v}{\partial\eta}). \tag{13}$$

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d_1\frac{\partial u}{\partial x} + d_2\frac{\partial u}{\partial y} + eu + f(x, y) = 0, \tag{14}$$

a, b, c, d_1, d_2, e – постоянные. Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + C_1, \ y = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + C_2.$$

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение приводится к одной из простейших форм:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta v + f_1 = 0 \qquad (15)$$

(эллиптический тип),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \eta} + \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta v + f_1 = 0 \qquad (16)$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta v + f_1 = 0 \qquad (17)$$

(гиперболический тип),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta v + f_1 = 0 \qquad (18)$$

(параболический тип).

Для дальнейшего упрощения введём новую функцию w:

$$v = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot w.$$

Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \lambda w),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\frac{\partial w}{\partial \eta} + \mu w),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} + \lambda^2 w),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \eta} + \lambda \frac{\partial w}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \lambda\mu w),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial \eta} + \mu^2 w).$$

Подставляя в (15) и сокращая, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + (\alpha_1 + 2\lambda)\frac{\partial w}{\partial \xi} + (\alpha_2 + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial \eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\mu + \beta)v + f_1 e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)} = 0.$$

Параметры λ и μ выбираем так, чтобы коэффициенты при первых производных обратились в нуль. В результате получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \gamma w + f_2 = 0$$

Аналогичные операции можно произвести и для случаев (16) – (18).

Таким образом, линейные уравнения с постоянными коэффициентами с двумя переменными имеют следующие канонические формы.

Эллиптический тип

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu + f = 0,$$

гиперболический тип

$$\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + cu + f = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu + f = 0,$$

параболический тип

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial y} + f = 0.$$

Упражнения

1. Докажите соотношения (9).
2. Приведите уравнения (16) – (18) к простейшему виду.
3. Приведите к каноническому виду уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области эллиптичности.

Список литературы

[1] Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970. mathematics/pde.htm.

[4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.