ЛЕКЦИЯ 13

Метод разделения переменных

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Проведём изложение этого метода для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений уравнения также является его решением. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим **основную вспомогательную задачу**. Найти решение уравнения (1), не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям (2) и представимое в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4}$$

где X – функция только переменного x, T – функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в уравнение (1), получим

$$X''T = \frac{1}{a^2}T''X,$$

или, после деления на XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{5}$$

Чтобы функция (4) была решением уравнения (1), равенство (5) должно удовлетворяться тождественно, то есть для всех значений независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (5) является функцией только переменного t, а левая - только x. Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (5) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{6}$$

где λ – постоянная, которую для удобства последующих выкладок берём со знаком "минус ничего не предполагая при этом о её знаке.

Из соотношения (6) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций X и T:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X \neq 0, \tag{7}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0,\ T \neq 0. \tag{8}$$

Граничные условия (2) дают

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция X должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{9}$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \text{ и } u(x,t) = 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции T в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции X мы приходим к простейшей **задаче о собственных значениях**.

Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\begin{gathered} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения - собственными функциями задачи (10). Сформулированную таким образом задачу часто называют **задачей Штурма-Лиувилля**.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

Пусть $\lambda < 0$. Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничные условия дают

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-l\sqrt{-\lambda}},$$

то есть

$$C_1 = -C_2,\ C_1(e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае число $l\sqrt{-\lambda}$ действительно и положительно, так что

$$e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}} \neq 0.$$

Поэтому

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

Таким образом, при $\lambda < 0$ задача (10) не имеет нетривиальных решений.

При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (10) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают

$$X(0) = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

то есть $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (10) может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0, \tag{11}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n – любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (10) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Эттим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где D_n – произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

существуют нетривиальные решения задачи (10)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{13}$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \tag{14}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Таким образом, решениями основной вспомогательной задачи являются функции

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{15}$$

Функции u_n - частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2). Начальные условия (3) исходной задачи будут выполнены для этих решений только в частных случаях начальных функций φ и ψ.

Обратимся к решению задачи (1)-(3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{16}$$

также удовлетворяет данному уравнению и граничным условиям (2). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n. Потребуем, чтобы функция (16) удовлетворяла условиям (3):

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{18}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \le x \le l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{19}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \tag{20}$$

Если функции φ и ψ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,\ \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,\ \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \tag{22}$$

Сравнение этих рядов с формулами (17), (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n,\ B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \tag{23}$$

чем полностью определяется функция (16), дающая решение исследуемой задачи.

Теорема 1. *Если на отрезке* $[0, l]$ *функция* φ *дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0;\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \tag{24}$$

а функция ψ *непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям*

$$\psi(0) = \psi(l) = 0, \tag{25}$$

то функция u*, определяемая рядом (16), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и начальным условиям (3). При этом возможно почленное дифференцирование ряда (16) по* x *и* t *два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при* $0 \le x \le l$ *и любом* t.

Доказательство. Докажем, что ряд (16) и ряды, полученные его почленным дифференцированием до второго порядка включительно, равномерно сходятся при $0 \le x \le l$ и любом t.

Пользуясь неравенством

$$|u_n(x,t)| \le |A_n| + |B_n|,$$

заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|) \tag{26}$$

является мажорантным для ряда (16). Если мажорантный ряд (26) сходится, то ряд (16) сходится равномерно. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{\pi n}{l}\left(-A_n \sin\frac{\pi n}{l}at + B_n\cos\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{27}$$

мажорантным является ряд

$$\frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|), \tag{28}$$

а для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\cos\frac{\pi n}{l}x \tag{29}$$

– ряд

$$\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|).$$

Наконец, рядам

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

с точностью до множителей пропорциональности соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|). \tag{30}$$

Так как

$$A_n = \varphi_n,\ B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\ \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$

то задача сводится к доказательству сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\varphi_n|\ (k=0,1,2),\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k|\psi_n|\ (k=-1,0,1). \tag{31}$$

Из теории рядов Фурье известно, что если непрерывная периодическая функция f имеет непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка включительно, а производная k-го порядка кусочно-непрерывна, то коэффициенты Фурье f_n функции f удовлетворяют неравенству

$$|f_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}},$$

где M - некоторое положительное число.

Продолжая функции φ и ψ нечетно относительно точек $x = 0$ и $x = l$, получаем, что при выполнении условий теоремы

$$|\varphi_n| \leq \frac{M}{n^4},\ |\psi_n| \leq \frac{M}{n^3},$$

и, следовательно, ряды (31) сходятся.

Таким образом, ряд (16) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно, что означает непреывность функции u и её производных до второго порядка включительно.

Поскольку сходящиеся ряды можно складывать, функция u удовлетворяет уравнению (1), справедливость начальных и граничных условий вытекает из непрерывности функции u.

Список литературы

[1] Ильин А.М. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2009. - 192 с.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.