Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне

Бурдина Ксения Павловна

2022 Feb 17th

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели для дальнейшего решения задачи о погоне на примере задачи преследования браконьеров береговой охраной.

2 Задание

В ходе работы необходимо:

1. Выполнить расчёты и вывести уравнение движения катера при условии, что расстояние в момент обнаружении лодки составляет 15.5 км от катера, а скорость катера превышает скорость лодки в 4.5 раза.

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев, в зависимости от начального положения катера относительно полюса.

3. Найти по графику точку пересечения траектории движения катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Постановка задачи следующая:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 15.5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4.5 раза больше скорости браконьерской лодки.

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dt}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt(19.25)v \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ r = \frac{k}{5.5} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \theta = -\pi \\ r = \frac{k}{3.5} \end{cases}$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Принимаем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = 15.5$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_0, а полярная ось проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

3. Заметим, что траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Изначально катер береговой охраны двигается прямолинейно, а после того, как оказывается на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров, начинает двигаться вокруг полюса, удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/4.5v$ (во втором случае $x + k/4.5v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующих уравнений:

$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.5v}$
для первого случая и $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{4.5v}$
для второго случая.

При решении уравнений получаем следующие начальные условия для решения задачи: $\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{k}{5.5} \end{cases}$ для первого случая и $\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{k}{3.5} \end{cases}$ для второго случая.
Видим, что значение $x_1 = \frac{k}{5.5}$, а значение $x_2 = \frac{k}{3.5}$.
В результате мы будем решать задачу для двух случаев.

2. Нахождение начальных расстояний.

При условии 1:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4{,}5v}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{k-x}{4{,}5}$$

$$4{,}5x = k - x$$

$$5{,}5x = k$$

$$x = \frac{k}{5{,}5}$$

При условии 2:

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4{,}5v}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{k+x}{4{,}5}$$

$$4{,}5x = k + x$$

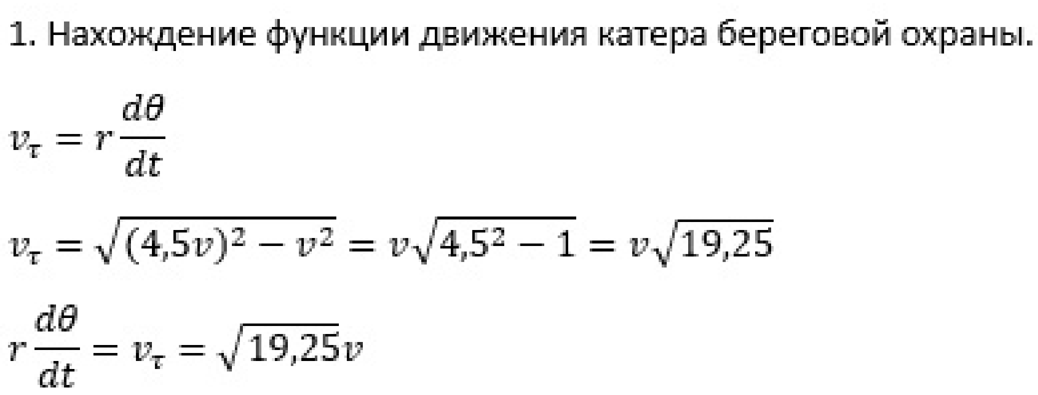
$$3{,}5x = k$$

$$x = \frac{k}{3{,}5}$$

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно

полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, то есть $v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$.

По теореме пифагора получаем следующее уравнение:
$v_\tau = r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt((4.5v)^2 - v^2) = \sqrt(19.25)v$.



1. Нахождение функции движения катера береговой охраны.

$$v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_\tau = \sqrt{(4{,}5v)^2 - v^2} = v\sqrt{4{,}5^2 - 1} = v\sqrt{19{,}25}$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v_\tau = \sqrt{19{,}25}v$$

Figure 4.1: рис 3. Вычисление тангенциальной скорости катера

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений с начальными условиями. Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt(19.25)}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

7. Напишем программу для расчёта траектории движения в SciLab. Зададим начальное растояние s = 15.5. В функции dr, которая описывает движение катера береговой охраны, укажем получившееся значение по формуле, а именно запишем значение константы, равное 19.25. Далее установим $r0 = s/5.5$ и $tetha0 = 0$ (они были найдены в системе начальных условий для первого случая).

lab02_1.sce lab02_2.sce

```
s=15.5;// начальное расстояние от лодки до катера
fi=3*%pi/4;

//функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr=f(tetha, r)
 dr=r/sqrt(19.25);
endfunction;

//начальные условия в случае 1
r0=s/5.5;
tetha0=0;
tetha=0:0.01:2*%pi;

r=ode(r0,tetha0,tetha,f);

//функция, описывающая движение лодки браконьеров
function xt=f2(t)
 xt=tan(fi)*t;
endfunction

t=0:1:20;

polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории
//движения катера в полярных координатах
plot2d(t,f2(t),style = color('red'));
```

Figure 4.2: рис 4. Код программы в случае 1

В результате выполнения данной программы получаем следующий график:

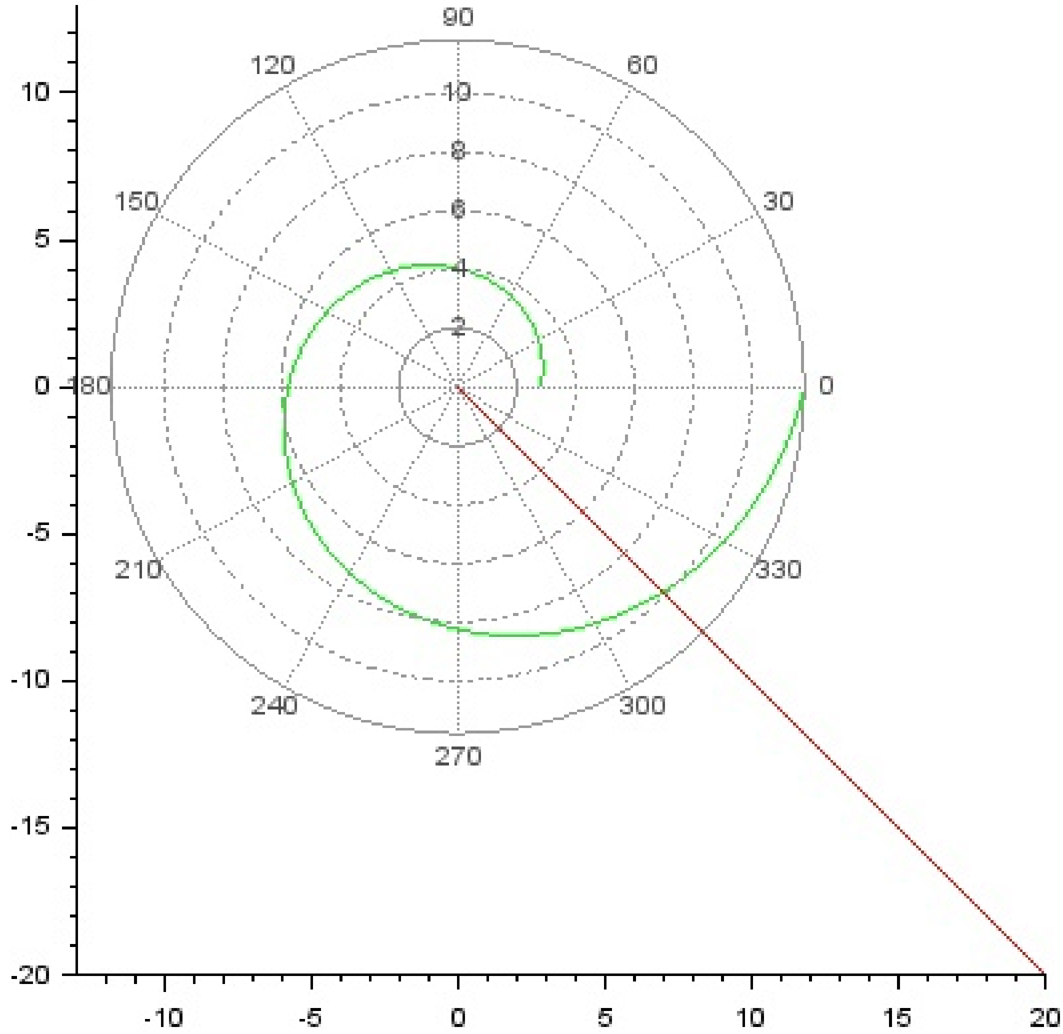


Figure 4.3: рис 5. Траектория движения катера и лодки в случае 1

По графику видим, что траектории движения лодки и катера пересекутся на растоянии 7.2 км.

8. Теперь заменим в коде значения начальных условий при случае 1 для получения траектории движения в случае 2. Для этого зададим значения $r0 = s/3.5$ и $tetha0 = -$ (они были найдены в системе начальных условий для второго случая).

lab02_2.sce

```
s=15.5;// начальное расстояние от лодки до катера
fi=3*%pi/4;

//функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr=f(tetha, r)
 dr=r/sqrt(19.25);
endfunction;

//начальные условия в случае 2
r0=s/3.5;
tetha0=-%pi;
tetha=0:0.01:2*%pi;

r=ode(r0,tetha0,tetha,f);

//функция, описывающая движение лодки браконьеров
function xt=f2(t)
 xt=tan(fi)*t;
endfunction

t=0:1:30;

polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории
//движения катера в полярных координатах
plot2d(t,f2(t),style = color('red'));

```

Figure 4.4: рис 6. Код программы в случае 2

В результате выполнения данной программы получаем следующий график:

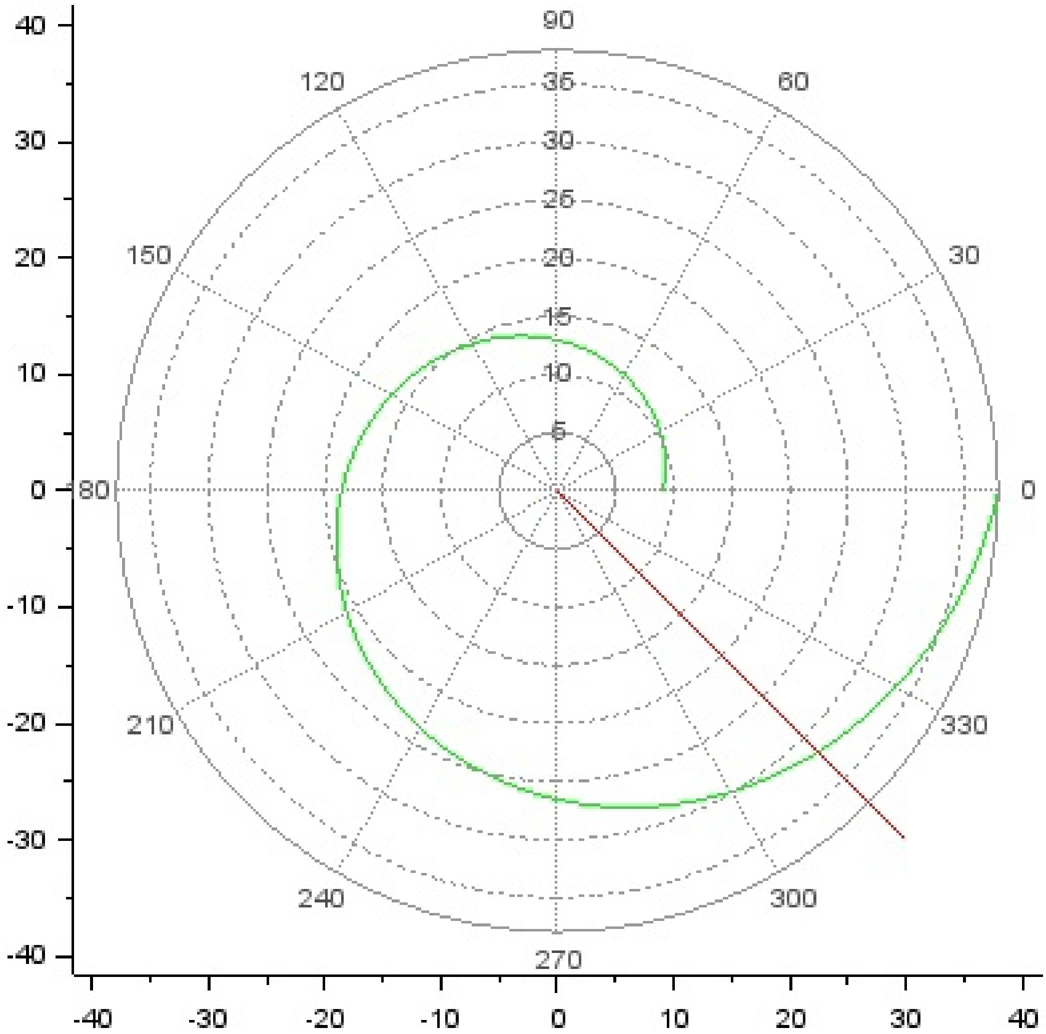


Figure 4.5: рис 7. Траектория движения катера и лодки в случае 2

По графику видим, что траектории движения лодки и катера пересекутся на растоянии 23 км.

5 Выводы

В процессе выполнения работы мы построили математическую модель для решения задачи о погоне на примере задачи преследования браконьеров береговой охраной. Мы записали дифференциальные уравнения, описывающие движение катера, построили графики движения катера и лодки для двух случаев и нашли точки пересечения траекторий движения катера и лодки для двух случаев.

6 Список литературы

1. Методические материалы курса “Математическое моделирование”.

2. Куроткин В. И., Стерлигов В. Л. Самонаведение ракет. М. -Военное издательство Минобороны СССР: 1963, 88 с.