

Отчет по лабораторной работе №5

Модель хищник-жертва

Бурдина Ксения Павловна

2022 Mar 08th

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	8
5	Выводы	16
6	Список литературы	17

List of Figures

4.1	рис 1. Код программы	10
4.2	рис 2. Значения переменных	11
4.3	рис 3. График зависимости численности хищников от численности жертв	12
4.4	рис 4. График изменения численностей популяций со временем .	12
4.5	рис 5. Код программы при стационарном состоянии системы . . .	13
4.6	рис 6. Значения переменных при стационарном режиме	14
4.7	рис 7. График численностей хищников и жертв в стационарном режиме	15

List of Tables

1 Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели Лотки-Вольтерры “хищник-жертва” на примере задачи о зависимости численности волков от численности зайцев.

2 Задание

В ходе работы необходимо:

1. Прописать уравнения для построения модели изменения численности популяции хищников и жертв при условии, что $x_0 = 3$, $y_0 = 9$.
2. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв и графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях.
3. Найти стационарное состояние заданной системы.

3 Теоретическое введение

Постановка задачи следующая:

В лесу проживают x волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу y . Пока число зайцев достаточно велико для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого, на численность стаи влияют болезни и старение.

Решение исходной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.44x(t) + 0.055x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.33y(t) - 0.022x(t)y(t) \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 9 \end{cases}$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Рассмотрим модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

- Численность популяции жертв x и хищников y зависит только от времени;
- В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
- Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
- Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

2. Определим уравнения, описывающие изменение численности жертв и хищников [1]. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

где x - число жертв, y - число хищников.

В данной системе коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия

жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

- Заметим, что у нас имеет место на существование стационарное состояние системы, то есть положение равновесия, не зависящее от времени решения. Оно будет находиться в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}$$

$$y_0 = \frac{a}{b}$$

где $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. В стационарном состоянии в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

- Напишем программу для расчёта изменения численности популяции хищников и жертв в OpenModelica. Зададим начальное состояние системы $x_0 = 3$ и $y_0 = 9$. Далее запишем параметры для решения системы:

$$a = 0.44, b = 0.055, c = 0.33, d = 0.022$$

Установим, что переменные x, y имеют начальные значения x_0, y_0 соответственно. Запишем уравнения, описывающие нашу модель:

$$der(x) = -a * x + c * x * y$$

$$der(y) = b * y - d * x * y$$

```
1 model lab05
2 parameter Real a = 0.44;
3 parameter Real b = 0.33;
4 parameter Real c = 0.055;
5 parameter Real d = 0.022;
6
7 parameter Real x0 = 3;
8 parameter Real y0 = 9;
9
10 Real x(start = x0);
11 Real y(start = y0);
12
13 equation
14
15 der(x) = -a*x + c*x*y;
16 der(y) = b*y - d*x*y;
17
18 end lab05;
19
```

Figure 4.1: рис 1. Код программы

<input type="checkbox"/> a	0.44
<input type="checkbox"/> b	0.33
<input type="checkbox"/> c	0.055
<input type="checkbox"/> d	0.022
<input type="checkbox"/> der(x)	-4.44983
<input type="checkbox"/> der(y)	0.0618247
<input checked="" type="checkbox"/> x	13.642
<input type="checkbox"/> x0	3.0
<input checked="" type="checkbox"/> y	2.06933
<input type="checkbox"/> y0	9.0

Figure 4.2: рис 2. Значения переменных

В результате выполнения данной программы получаем следующий график зависимости численности хищников от численности жертв:

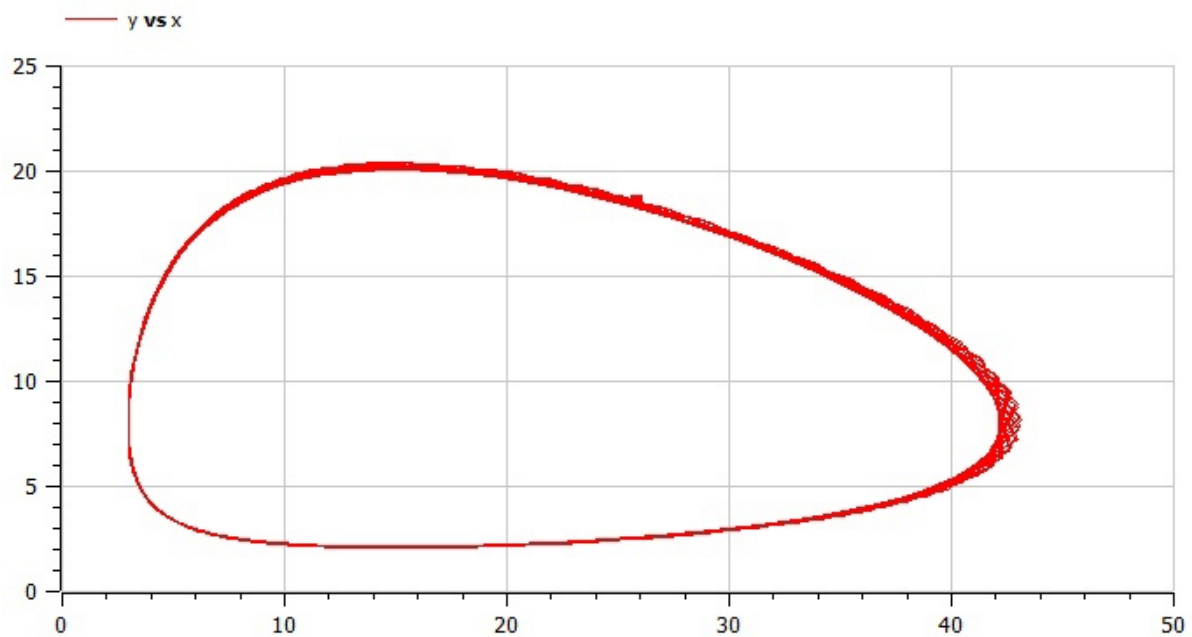


Figure 4.3: рис 3. График зависимости численности хищников от численности жертв

Также можем увидеть график изменения численности хищников и численности жертв со временем:

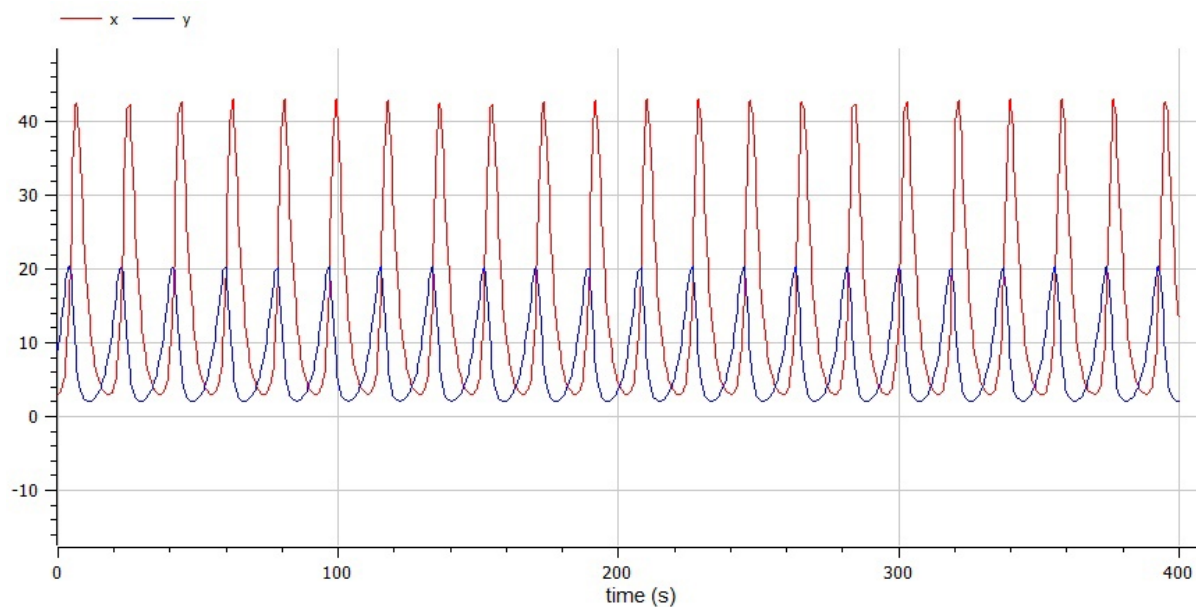


Figure 4.4: рис 4. График изменения численностей популяций со временем

5. Напишем программу для нахождения стационарного графика системы. Параметры для решения системы остаются теми же. Начальное состояние системы мы изменяем, опираясь на формулы из теории:

$$x_0 = \frac{c}{d} = \frac{0.33}{0.022}$$

$$y_0 = \frac{a}{b} = \frac{0.44}{0.055}$$

Установим, что переменные x, y имеют начальные значения x_0, y_0 соответственно. Уравнения, описывающие нашу модель, остаются прежними:

$$\text{der}(x) = -a * x + c * x * y$$

$$\text{der}(y) = b * y - d * x * y$$

```
1  model lab05_st
2  parameter Real a = 0.44;
3  parameter Real b = 0.33;
4  parameter Real c = 0.055;
5  parameter Real d = 0.022;
6
7  parameter Real x0 = 0.33/0.022;
8  parameter Real y0 = 0.44/0.055;
9
10 Real x(start = x0);
11 Real y(start = y0);
12
13 equation
14
15 der(x) = -a*x + c*x*y;
16 der(y) = b*y - d*x*y;
17
18 end lab05_st;
19
```

Figure 4.5: рис 5. Код программы при стационарном состоянии системы

<input type="checkbox"/> a	0.44
<input type="checkbox"/> b	0.33
<input type="checkbox"/> c	0.055
<input type="checkbox"/> d	0.022
<input type="checkbox"/> der(x)	0
<input type="checkbox"/> der(y)	0
<input checked="" type="checkbox"/> x	15
<input type="checkbox"/> x0	15.0
<input checked="" type="checkbox"/> y	8
<input type="checkbox"/> y0	8.0

Figure 4.6: рис 6. Значения переменных при стационарном режиме

В результате выполнения данной программы получаем следующий график численности хищников и численности жертв:

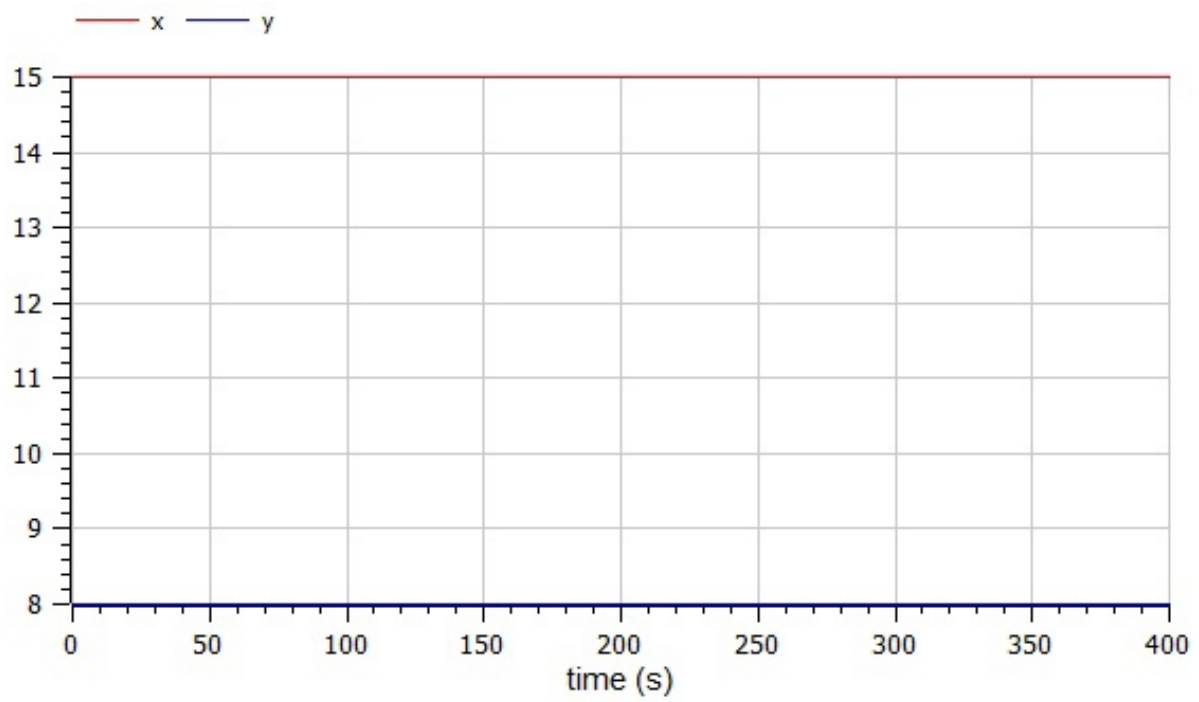


Figure 4.7: рис 7. График численностей хищников и жертв в стационарном режиме

5 Выводы

В процессе выполнения работы мы построили модель Лотки-Вольтерры “хищник-жертва” на примере задачи о зависимости численности волков от численности зайцев. Получили дифференциальные уравнения для построения модели с учетом начального состояния системы. Построили график зависимости численности хищников от численности жертв. Нашли зависимость изменения численности популяций от времени, а также стационарное состояние системы.

6 Список литературы

1. Методические материалы курса “Математическое моделирование”.
2. Модель “хищник-жертва”. Электронный справочник: [<https://spravochnick.ru/informacionzhertva/>].