Отчет по лабораторной работе №6

Модель SIR

Бурдина Ксения Павловна

2022 Mar 15th

Содержание

List of Figures

List of Tables

1 Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели SIR на примере задачи об эпидемии.

2 Задание

В ходе работы необходимо:

1. Прописать уравнения для построения модели SIR изменения численности здоровых, заболевших и восприимчивых к болезни особей при условии, что общее число проживающих на острове $N = 11200$.

2. Построить график изменения числа особей в каждой их трех групп в случае, если $I(0) \leqslant I^*$.

3. Построить график изменения числа особей в каждой их трех групп в случае, если $I(0) > I^*$.

3 Теоретическое введение

Постановка задачи следующая:

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 11200$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей, являющихся распространителями инфекции, $I(0) = 230$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 45$. Таким образом, число людей, восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Решение исходной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = -0.02 * I \\ \frac{dR}{dt} = 0.02 * I \end{cases}$$

в случае, когда $I(0) \leqslant I^*$ и

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -0.01 * S \\ \frac{dI}{dt} = 0.01 * S - 0.02 * I \\ \frac{dR}{dt} = 0.02 * I \end{cases}$$

в случае, когда $I(0) > I^*$, с начальными условиями:

$$\begin{cases} I(0) = 230 \\ R(0) = 45 \\ S(0) = N - I(0) - R(0) \end{cases}$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

2. Определим переменную I^* как критическое значение инфицированных особей. До того момента, как число заболевших не превышает данного критического значения, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

3. Определим уравнение, описывающее скорость изменения числа здоровых, но восприимчивых к болезни особей $S(t)$ [1]. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha S, I(t) > I^* \\ \frac{dS}{dt} = 0, I(t) \leqslant I^* \end{cases}$$

где α - коэффициент заболеваемости.

Можно понять, что каждая восприимчивая к болезни особь, которая в какой-то момент тоже заболевает, сама становится инфекционной. Из этого следует, что скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Поэтому уравнение, описывающее изменение числа инфицированных и заражающих других особей, будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha S - \beta I, I(t) > I^* \\ \frac{dI}{dt} = -\beta I, I(t) \leqslant I^* \end{cases}$$

при условии, что α - коэффициент заболеваемости, β - коэффициент выздоровления.

Есть еще одна группа особей - выздоравливающие и приобретающие иммунитет к болезни. Уравнение, описывающее скорость изменения численности данной группы особей имеет следующий вид:

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

где β - это, соответственно, коэффициент выздоровления.

4. Для однозначного решения соответствующих уравнений необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени t_0 особи с иммунитетом к болезни составляют $R(0) = 45$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей определяется как $I(0) = 230$ и $S(0) = N - I(0) - R(0)$ соответственно.

   Для анализа картины протекания эпидемии рассмотрим два случая:

   1. Когда $I(0) \leqslant I^*$
   2. Когда $I(0) > I^*$

5. Напишем программу для расчёта изменения числа особей в каждой из трёх групп в OpenModelica. Зададим начальное состояние системы:

$$I0 = 230$$

$$R0 = 45$$

$$S0 = N - I0 - R0$$

Запишем параметры для решения системы:

$$a = 0.01, b = 0.02, N = 11200$$

Установим, что переменные I, R, S имеют начальные значения $I0, R0, S0$ соответственно. Запишем уравнения, описывающие нашу модель, для первого случая, когда $I(t) \leqslant I^*$:

$$der(S) = 0$$

$$der(I) = -b * I$$

$$der(R) = b * I$$

```
model lab6_1

parameter Real a = 0.01; //коэф.заболеваемости
parameter Real b = 0.02; //коэф.выздоровления
parameter Real N = 11200; //числ.популяции
parameter Real I0 = 230; //кол-во инфицированных
parameter Real R0 = 45; //кол-во здоровых
parameter Real S0 = N - I0 - R0; //кол-во восприимч.

Real I(start=I0);
Real R(start=R0);
Real S(start=S0);

equation

der(S) = 0;
der(I) = -b*I;
der(R) = b*I;

end lab6_1;
```

Figure 4.1: рис 1. Код программы в случае 1

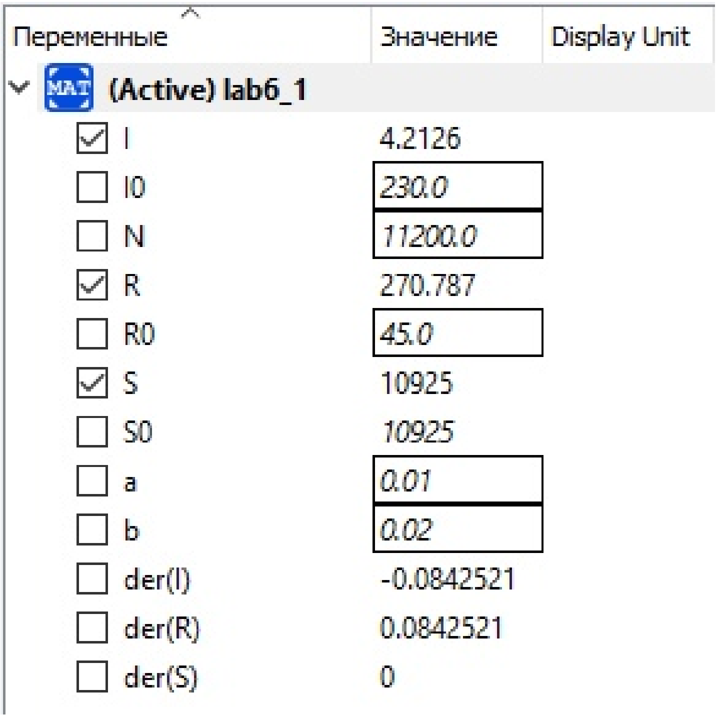

Figure 4.2: рис 2. Значения переменныхв случае 1

Установим, что промежуток времени, на котором мы рассматриваем изменение численности: $t \in [0 : 200]$, а шаг составляет 0.01

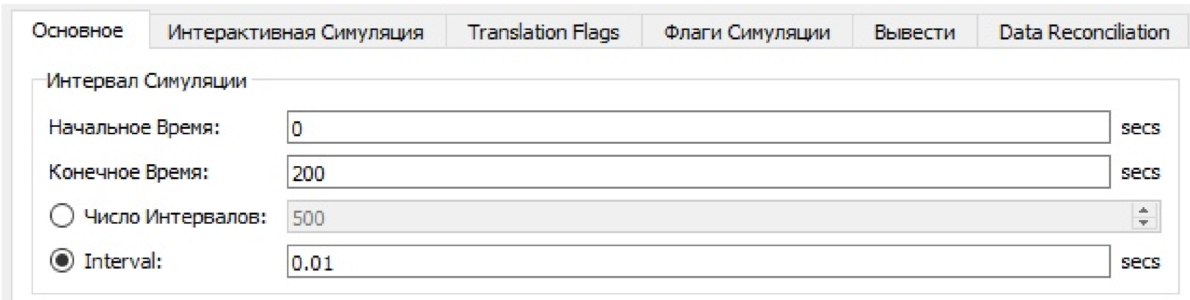

Figure 4.3: рис 3. Интервал, на котором рассматриваются изменения численности особей

В результате выполнения данной программы получаем следующий график изменения числа особей в каждой из трёх групп при условии, что $I(t) \leqslant I^*$:

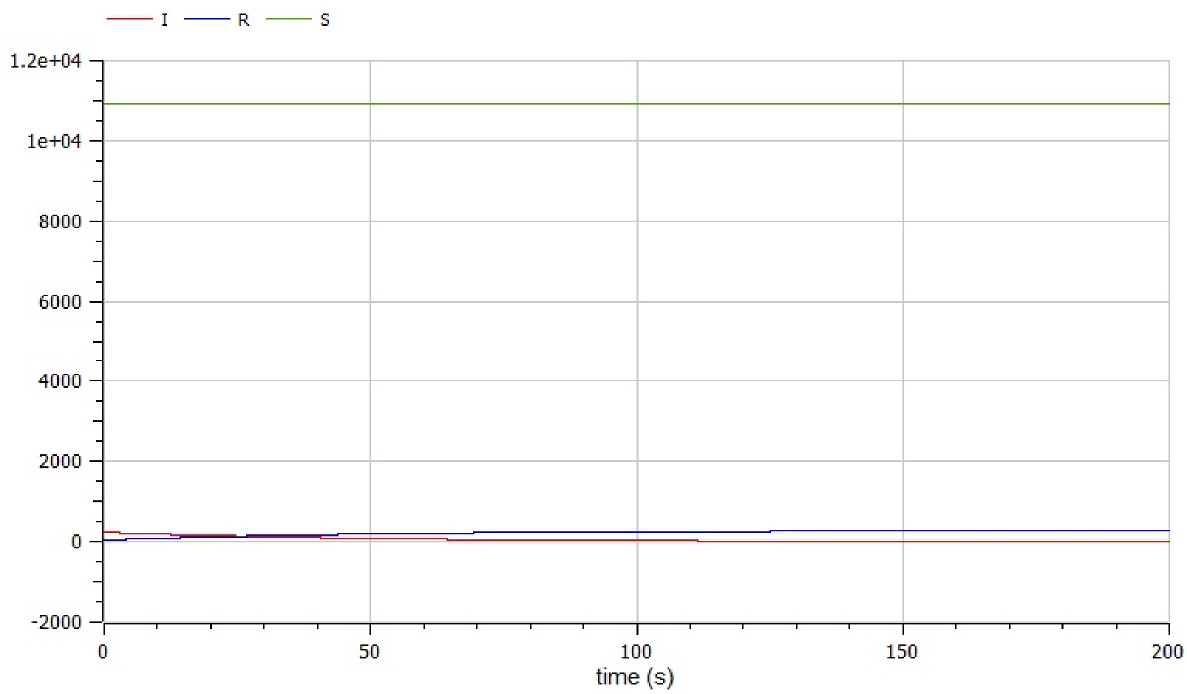

Figure 4.4: рис 4. График изменения численностей особей в случае 1

6. Напишем программу для расчёта изменения числа особей в каждой из трёх групп для второго случая. Начальное состояние системы остаётся прежним:

$$I0 = 230$$

$$R0 = 45$$

$$S0 = N - I0 - R0$$

Параметры для решения системы также сохраняются с первого случая:

$$a = 0.01, b = 0.02, N = 11200$$

Переменные I, R, S имеют начальные значения $I0, R0, S0$ соответственно. Уравнения, описывающие нашу модель, для второго случая, когда $I(t) > I^*$:

$$der(S) = -a * S$$

$$der(I) = a * S - b * I$$

$$der(R) = b * I$$

```
model lab6_2

parameter Real a = 0.01; //коэф.заболеваемости
parameter Real b = 0.02; //коэф.выздоровления
parameter Real N = 11200; //числ.популяции
parameter Real I0 = 230; //кол-во инфицированных
parameter Real R0 = 45; //кол-во здоровых
parameter Real S0 = N - I0 - R0; //кол-во восприимч.

Real I(start=I0);
Real R(start=R0);
Real S(start=S0);

equation

der(S) = -a*S;
der(I) = a*S - b*I;
der(R) = b*I;

end lab6_2;

```

Figure 4.5: рис 5. Код программы в случае 2

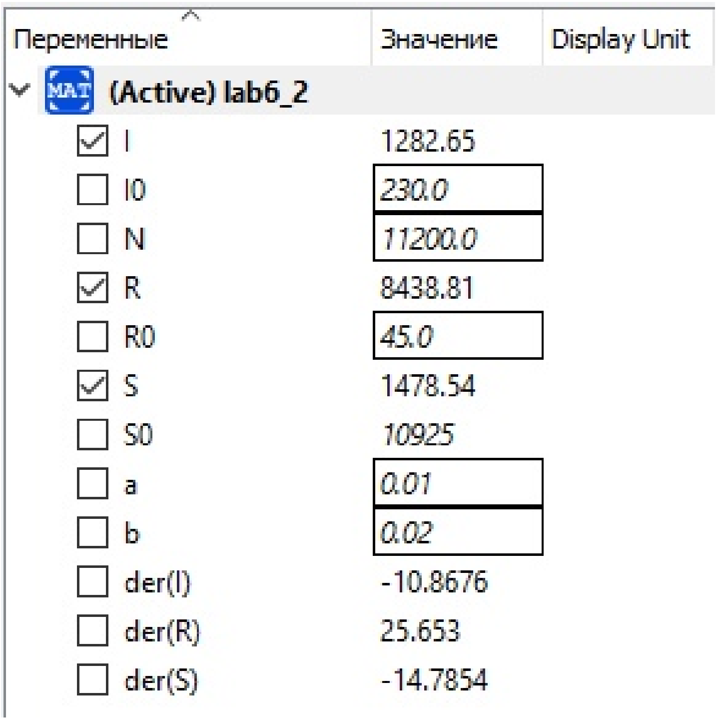

Figure 4.6: рис 6. Значения переменныхв случае 2

В результате выполнения данной программы получаем следующий график изменения числа особей в каждой из трёх групп при условии, что $I(t) > I^*$:

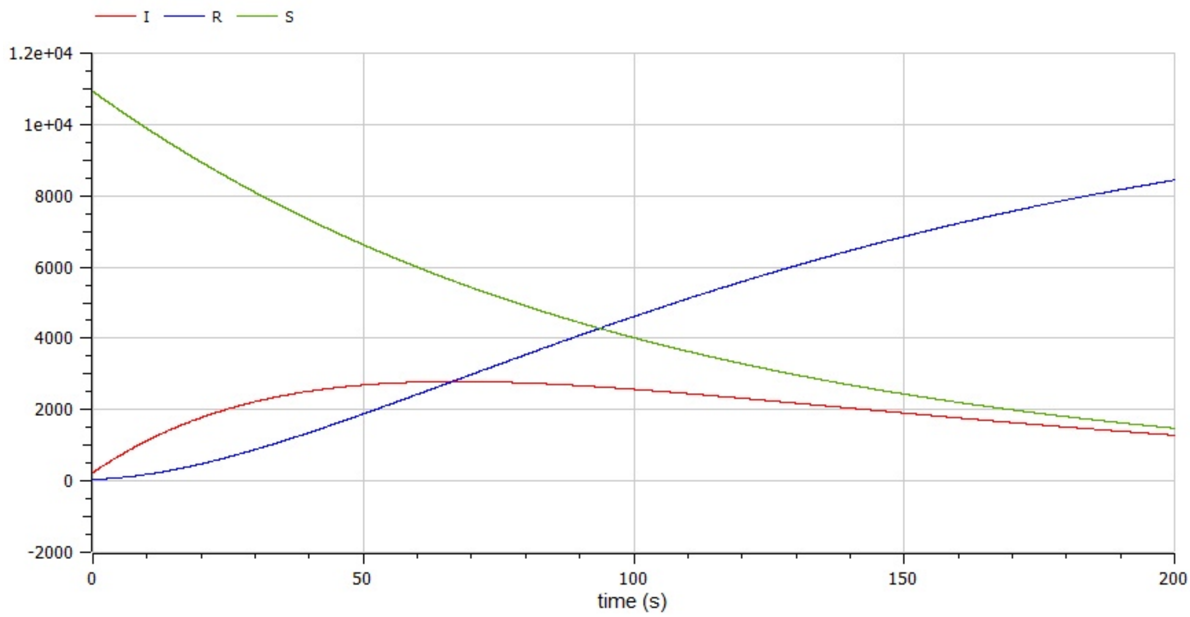

Figure 4.7: рис 7. График изменения численностей особей в случае 2

5 Выводы

В процессе выполнения работы мы построили модель SIR на примере задачи об эпидемии. Получили дифференциальные уравнения для построения модели изменения численности здоровых, заболевших и восприимчивых к болезни особей с учетом начального состояния системы для двух случаев. Построили график изменения числа особей в каждой их трех групп для случая, когда $I(0) \leqslant I^*$, а также для случая, когда $I(0) > I^*$.

6 Список литературы

1. Методические материалы курса “Математическое моделирование” [1].

2. Применение SIR модели в моделировании эпидемий. Электронный справочник: [2].