Отчет по лабораторной работе №6

Модель SIR

Бурдина Ксения Павловна

2022 Mar 15th

Содержание

# 1 Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели SIR на примере задачи об эпидемии.

# 2 Задание

В ходе работы необходимо:

1. Прописать уравнения для построения модели SIR изменения численности здоровых, заболевших и восприимчивых к болезни особей при условии, что общее число проживающих на острове .
2. Построить график изменения числа особей в каждой их трех групп в случае, если .
3. Построить график изменения числа особей в каждой их трех групп в случае, если .

# 3 Теоретическое введение

Постановка задачи следующая:

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове () в момент начала эпидемии () число заболевших людей, являющихся распространителями инфекции, , а число здоровых людей с иммунитетом к болезни . Таким образом, число людей, восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени .

Решение исходной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

в случае, когда и

в случае, когда , с начальными условиями:

# 4 Выполнение лабораторной работы

1. Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из особей, подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через . Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их . А третья группа, обозначающаяся через – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.
2. Определим переменную как критическое значение инфицированных особей. До того момента, как число заболевших не превышает данного критического значения, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда , тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.
3. Определим уравнение, описывающее скорость изменения числа здоровых, но восприимчивых к болезни особей [[1]](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1343897/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%205.pdf). Оно имеет следующий вид:

где - коэффициент заболеваемости.

Можно понять, что каждая восприимчивая к болезни особь, которая в какой-то момент тоже заболевает, сама становится инфекционной. Из этого следует, что скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Поэтому уравнение, описывающее изменение числа инфицированных и заражающих других особей, будет выглядеть так:

при условии, что - коэффициент заболеваемости, - коэффициент выздоровления.

Есть еще одна группа особей - выздоравливающие и приобретающие иммунитет к болезни. Уравнение, описывающее скорость изменения численности данной группы особей имеет следующий вид:

где - это, соответственно, коэффициент выздоровления.

1. Для однозначного решения соответствующих уравнений необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени особи с иммунитетом к болезни составляют , а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей определяется как и соответственно.

* Для анализа картины протекания эпидемии рассмотрим два случая:
  1. Когда
  2. Когда

1. Напишем программу для расчёта изменения числа особей в каждой из трёх групп в OpenModelica. Зададим начальное состояние системы:

Запишем параметры для решения системы:

Установим, что переменные имеют начальные значения соответственно. Запишем уравнения, описывающие нашу модель, для первого случая, когда :

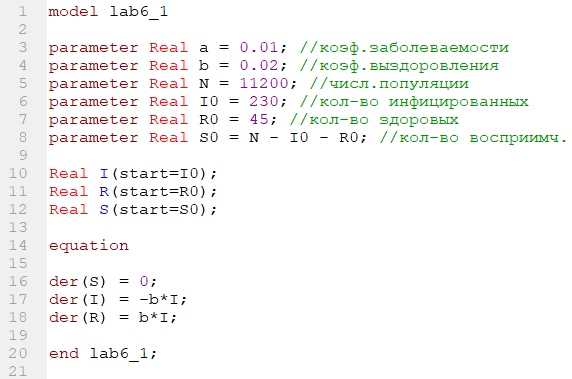


рис 1. Код программы в случае 1

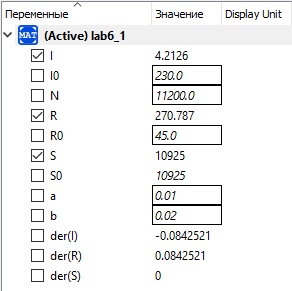


рис 2. Значения переменныхв случае 1

Установим, что промежуток времени, на котором мы рассматриваем изменение численности: , а шаг составляет

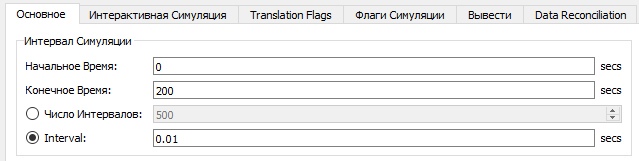


рис 3. Интервал, на котором рассматриваются изменения численности особей

В результате выполнения данной программы получаем следующий график изменения числа особей в каждой из трёх групп при условии, что :

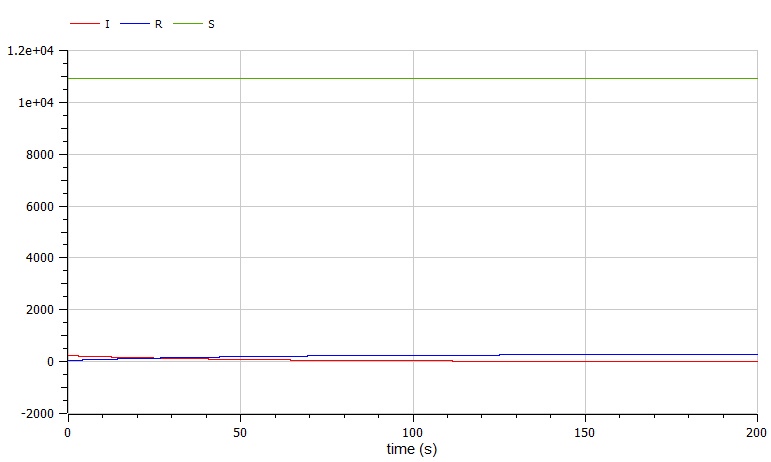


рис 4. График изменения численностей особей в случае 1

1. Напишем программу для расчёта изменения числа особей в каждой из трёх групп для второго случая. Начальное состояние системы остаётся прежним:

Параметры для решения системы также сохраняются с первого случая:

Переменные имеют начальные значения соответственно. Уравнения, описывающие нашу модель, для второго случая, когда :

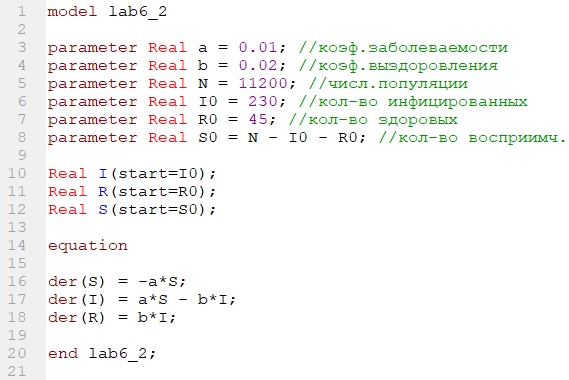


рис 5. Код программы в случае 2

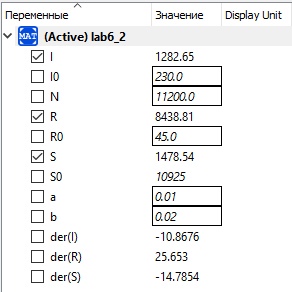


рис 6. Значения переменныхв случае 2

В результате выполнения данной программы получаем следующий график изменения числа особей в каждой из трёх групп при условии, что :

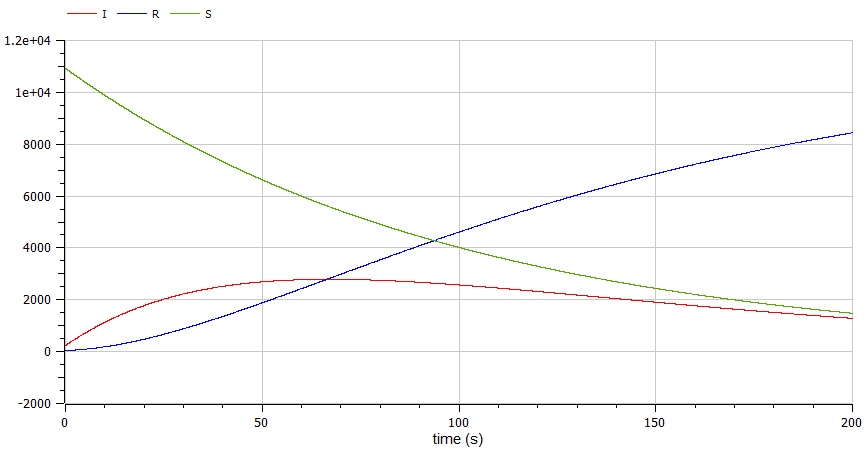


рис 7. График изменения численностей особей в случае 2

# 5 Выводы

В процессе выполнения работы мы построили модель SIR на примере задачи об эпидемии. Получили дифференциальные уравнения для построения модели изменения численности здоровых, заболевших и восприимчивых к болезни особей с учетом начального состояния системы для двух случаев. Построили график изменения числа особей в каждой их трех групп для случая, когда , а также для случая, когда .

# 6 Список литературы

1. Методические материалы курса “Математическое моделирование” [[1]](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1343897/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%205.pdf).
2. Применение SIR модели в моделировании эпидемий. Электронный справочник: [[2]](https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-sir-modeli-v-modelirovanii-epidemiy/viewer).