

Отчет по лабораторной работе №8

Модель конкуренции двух фирм

Бурдина Ксения Павловна

2022 Apr 1th

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	8
5	Выводы	19
6	Список литературы	20

List of Figures

4.1	Код программы в случае 1	13
4.2	Значения переменных в случае 1	14
4.3	Интервал, на котором рассматривается изменение объемов продаж	14
4.4	График изменения объемов продаж двух фирм в случае 1	15
4.5	Код программы в случае 2	16
4.6	Значения переменных в случае 2	17
4.7	График изменения объемов продаж двух фирм в случае 2	18

1 Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели конкуренции двух фирм на примере задачи о конкурирующих фирмах, производящих взаимозаменяемые товары и находящихся на одной рыночной нише.

2 Задание

В ходе работы необходимо:

1. Прописать уравнения для построения модели изменения оборотных средств фирм 1 и 2 при условии, что число потребителей производимого продукта $N = 95$, а в начальный момент времени объём продаж у первой и второй фирм составляет $M_0^1 = 7.5$ и $M_0^2 = 8.5$ соответственно.
2. Построить графики изменения объёмов продаж у каждой из фирм со временем для двух случаев:
 - когда конкурентная борьба ведётся только рыночными методами и конкуренты могут влиять на противника путём изменения параметров своего производства;
 - когда, помимо экономического фактора влияния, используются социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены.

3 Теоретическое введение

Постановка задачи следующая:

Рассматриваются две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише.

В случае 1 считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом). Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем.

В данном случае решение исходной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2\end{aligned}$$

В случае 2 помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед M_1M_2 будет отличаться.

В данном случае решение исходной задачи сводится к решению следующей

системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0.00016\right)M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Сначала рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.
2. Введем обозначения переменных для использования в уравнениях, необходимых при решении задач:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия.

τ – длительность производственного цикла.

p – рыночная цена товара.

\tilde{p} – себестоимость продукта, т.е. переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

k – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

3. Функцию спроса товаров длительного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{p}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = \frac{Sq}{k}$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в пороговой (то есть, $Q(\frac{S}{p}) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ . При заданном M уравнение, написанное выше, описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

4. Заменим уравнение для рыночной цены p алгебраическим соотношением:

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

Из него следует, что равновесное значение цены p равно:

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}\right)$$

В итоге уравнение для рыночной цены приобретает вид:

$$\frac{dM}{dt} = M \frac{\delta}{\tau} \left(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1\right) - M^2 \left(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}}\right)^2 \frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Полученное уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$:

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = kNq \frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Из вышепредставленного уравнения следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения M равны:

$$\tilde{M}_+ = Nq \frac{\tau}{\delta} \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right) \tilde{p}, \tilde{M}_- = k\tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние \tilde{M}_+ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние \tilde{M}_- неустойчиво, так что при $M < \tilde{M}_-$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет

к банкротству. По смыслу \tilde{M}_- соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

5. Перейдем к случаям конкуренции двух фирм [1]. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом).

Уравнение динамики оборотных средств запишем в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2\end{aligned}$$

Коэффициенты в данных уравнениях находятся с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq} \\ b &= \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq} \\ c_1 &= \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}\end{aligned}$$

Для решения также введем нормировку $t = c_1 \theta$.

6. Рассмотрим также иной случай. Теперь при построении модель будем учитывать то, что помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться.

Уравнения для данного случая имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0.00016\right)M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2\end{aligned}$$

Для решения соответствующих уравнений необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало конкуренции объем продаж в момент времени t_0 у фирмы 1 и фирмы 2 составлял M_0^1 млн. и M_0^2 млн. единиц соответственно.

7. Напишем программу для расчёта изменения объемов продаж в OpenModelica.

Введем значения для параметров, используемых при решении уравнений:

$$p(cr) = 40, N = 95, q = 1$$

$$tau1 = 30, tau2 = 27$$

$$p1 = 11.5, p2 = 9.5$$

Зададим начальное состояние системы:

$$M01 = 7.5$$

$$M02 = 8.5$$

Установим, что переменные $M1, M2$ имеют начальные значения $M01, M02$ соответственно.

Запишем выражения для подсчета значений коэффициентов $a1, a2, b, c1, c2$, на основе которых будем решать систему уравнений. Запишем непосредственно дифференциальные уравнение, описывающие нашу модель, для первого случая:

$$der(M1) = M1 - (b/c1) * M1 * M2 - (a1/c1) * M1 * M1$$

$$der(M2) = (c2/c1) * M2 - (b/c1) * M1 * M2 - (a2/c1) * M2 * M2$$

```

1  model lab08_1
2
3  parameter Real p_cr = 40;
4  parameter Real tau1 = 30;
5  parameter Real p1 = 11.5;
6  parameter Real tau2 = 27;
7  parameter Real p2 = 9.5;
8  parameter Real N = 95;
9  parameter Real q = 1;
10
11 parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
12 parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
13 parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
14 parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
15 parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
16
17 parameter Real M0_1 = 7.5;
18 parameter Real M0_2 = 8.5;
19 Real M1(start=M0_1);
20 Real M2(start=M0_2);
21
22 equation
23
24 der(M1) = M1 - (b/c1)*M1*M2 - (a1/c1)*M1*M1;
25 der(M2) = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2*M2;
26
27 end lab08_1;
28

```

Figure 4.1: Код программы в случае 1

Переменные	Значение	Display Unit
<input checked="" type="checkbox"/> lab08_1		
<input type="checkbox"/> M0_1	7.5	
<input type="checkbox"/> M0_2	8.5	
<input checked="" type="checkbox"/> M1	23351.9	
<input checked="" type="checkbox"/> M2	18580	
<input type="checkbox"/> N	95.0	
<input type="checkbox"/> a1	3.53751e-06	
<input type="checkbox"/> a2	6.39973e-06	
<input type="checkbox"/> b	5.37679e-11	
<input type="checkbox"/> c1	0.0826087	
<input type="checkbox"/> c2	0.118908	
<input type="checkbox"/> der(M1)	-0.000221...	
<input type="checkbox"/> der(M2)	1.27987e-08	
<input type="checkbox"/> p1	11.5	
<input type="checkbox"/> p2	9.5	
<input type="checkbox"/> p_cr	40.0	
<input type="checkbox"/> q	1.0	
<input type="checkbox"/> tau1	30.0	
<input type="checkbox"/> tau2	27.0	

Figure 4.2: Значения переменных в случае 1

Установим, что промежуток времени, на котором мы рассматриваем изменение объемов продаж: $t \in [0 : 30]$, а шаг составляет 0.01

Основное	Интерактивная Симуляция	Translation Flags	Флаги Симуляции	Вывести	Data Reconciliation
Интервал Симуляции					
Начальное Время:		0		secs	
Конечное Время:		30		secs	
<input type="radio"/> Число Интервалов:		500			
<input checked="" type="radio"/> Interval:		0.01		secs	

Figure 4.3: Интервал, на котором рассматривается изменение объемов продаж

В результате выполнения данной программы получаем следующий график изменения объемов продаж первой и второй фирм:

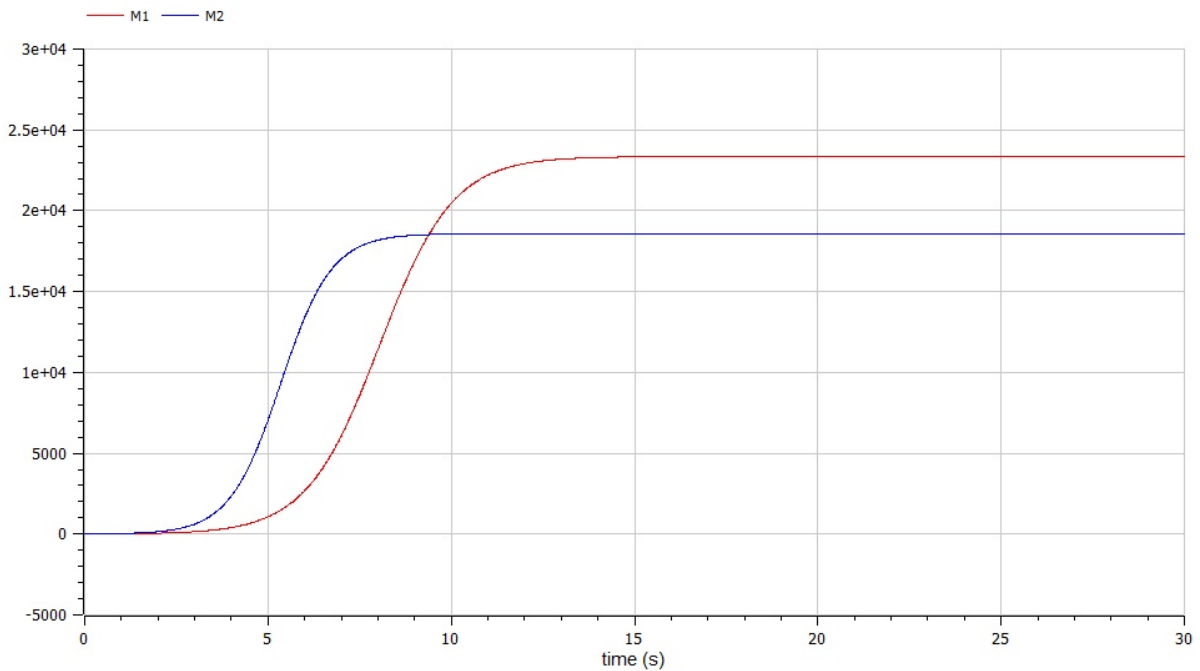


Figure 4.4: График изменения объемов продаж двух фирм в случае 1

8. Напишем программу для расчёта изменения объемов продаж для второго случая. Начальное состояние системы остается прежним:

$$M01 = 7.5$$

$$M02 = 8.5$$

Значения для параметров, используемых при решении уравнений, остаются прежними:

$$p(cr) = 40, N = 95, q = 1$$

$$tau1 = 30, tau2 = 27$$

$$p1 = 11.5, p2 = 9.5$$

Выражения для подсчета значений коэффициентов a_1, a_2, b, c_1, c_2 , также не изменяются.

Дифференциальные уравнение, описывающие нашу модель в случае 2:

$$\text{der}(M1) = M1 - (b/c1 + 0.00016) * M1 * M2 - (a1/c1) * M1 * M1$$

$$\text{der}(M2) = (c2/c1) * M2 - (b/c1) * M1 * M2 - (a2/c1) * M2 * M2$$

```

1  model lab08_2
2
3  parameter Real p_cr = 40;
4  parameter Real tau1 = 30;
5  parameter Real p1 = 11.5;
6  parameter Real tau2 = 27;
7  parameter Real p2 = 9.5;
8  parameter Real N = 95;
9  parameter Real q = 1;
10
11 parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
12 parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
13 parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
14 parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
15 parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
16
17 parameter Real M0_1 = 7.5;
18 parameter Real M0_2 = 8.5;
19 Real M1(start=M0_1);
20 Real M2(start=M0_2);
21
22 equation
23
24 der(M1) = M1 - (b/c1+0.00016)*M1*M2 - (a1/c1)*M1*M1;
25 der(M2) = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2*M2;
26
27 end lab08_2;
28

```

Figure 4.5: Код программы в случае 2

Переменные	Значение	Display Unit
▼ MAT (Active) lab08_2		
<input type="checkbox"/> M0_1	7.5	
<input type="checkbox"/> M0_2	8.5	
<input checked="" type="checkbox"/> M1	-5.3...e-10	
<input checked="" type="checkbox"/> M2	18580.2	
<input type="checkbox"/> N	95.0	
<input type="checkbox"/> a1	3.53751e-06	
<input type="checkbox"/> a2	6.39973e-06	
<input type="checkbox"/> b	5.37679e-11	
<input type="checkbox"/> c1	0.0826087	
<input type="checkbox"/> c2	0.118908	
<input type="checkbox"/> der(M1)	1.05557e-09	
<input type="checkbox"/> der(M2)	-3.8...e-06	
<input type="checkbox"/> p1	11.5	
<input type="checkbox"/> p2	9.5	
<input type="checkbox"/> p_cr	40.0	
<input type="checkbox"/> q	1.0	
<input type="checkbox"/> tau1	30.0	
<input type="checkbox"/> tau2	27.0	

Figure 4.6: Значения переменных в случае 2

В результате выполнения данной программы получаем следующий график изменения объемов продаж первой и второй фирм:

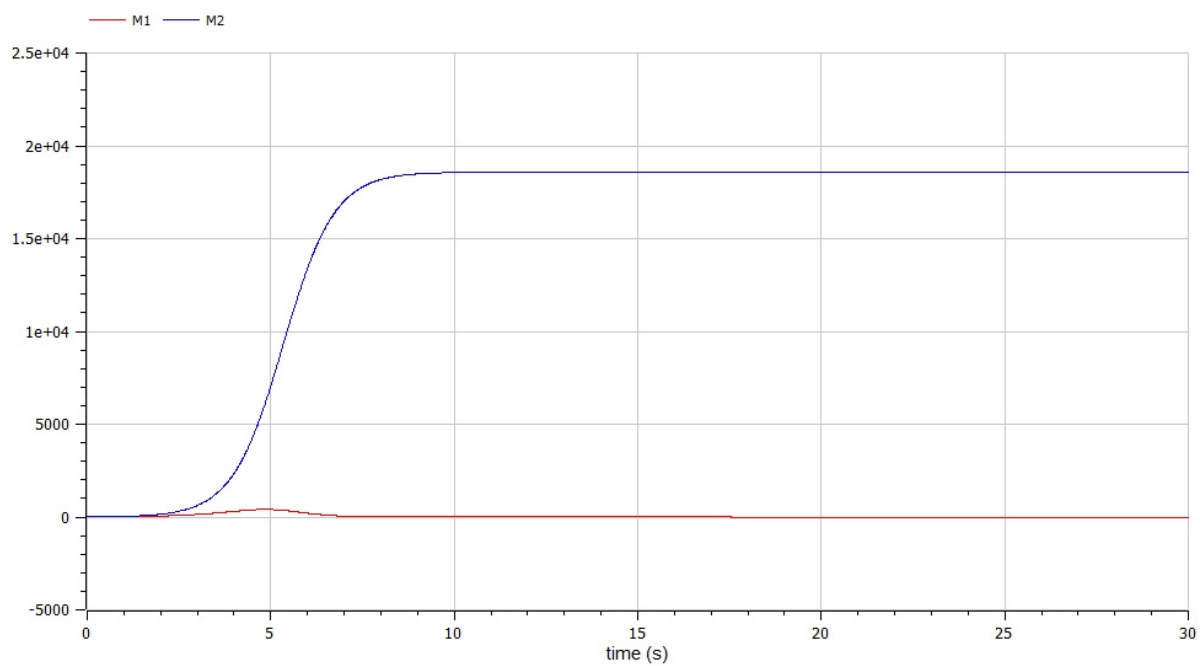


Figure 4.7: График изменения объемов продаж двух фирм в случае 2

5 Выводы

В процессе выполнения работы мы построили модель конкуренции двух фирм на примере задачи об изменении объемов продаж первой и второй фирм с течением времени. Получили дифференциальные уравнения для построения модели изменения объемов продаж с учетом начального состояния системы для двух случаев. Построили графики изменения объемов продаж с учетом условий, когда конкурентная борьба ведётся только рыночными методами и когда, помимо экономического фактора влияния, используются социально-психологические факторы.

6 Список литературы

1. Методические материалы курса “Математическое моделирование” [1].
2. Динамическая модель конкуренции двух фирм на однородном рынке. Электронный справочник [2].