

Обязательное домашнее задание № 1

Зайцева Ксения

20 февраля 2023

1 Задача

1.1 а)

y	0	1	2	3	5
p	0,286	0,143	0,143	0,286	0,143

1.2 б)

$$P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

1.3 в)

$$E(y) = 0,143 + 0,143 * 2 + 0,286 * 3 + 0,143 * 5 = 2,002$$

1.4 г)

$$D(y) = E(y^2) - (E(y))^2$$

$$D(y) = (0,143 + 4 * 0,143 + 9 * 0,286 + 25 * 0,143) - (2,002)^2 \approx 2,86$$

$$std(y) = \sqrt{D(y)} = \sqrt{2,86} \approx 1,7$$

2 Задача

H	0	1
p	0,5	0,5

R	0	1
p	0,2	0,8

G	0	1
p	0,9	0,1

2.1 а)

$$P(H, R, G) = 0,5 * 0,8 * 0,1 = 0,04$$

2.2 b)

$$P(H, G, \bar{R}) = 0,5 * 0,1 * 0,2 = 0,01$$

2.3 c)

$$P(H \text{ or } G \text{ or } R) = (0,5 * 0,2 * 0,9) + (0,5 * 0,8 * 0,9) + (0,5 * 0,2 * 0,1) = 0,46$$

2.4 d)

Обозначим случайную величину отчитанных учеников как x , тогда:

$$P(0) = 0,5 * 0,2 * 0,9 = 0,09$$

x	0	1	2	3
p	0,09	0,46	0,41	0,04

$$P(1) = (0,5 * 0,2 * 0,9) + (0,5 * 0,8 * 0,9) + (0,5 * 0,2 * 0,1) = 0,46$$

$$P(3) = 0,5 * 0,8 * 0,1 = 0,04$$

$$P(2) = 1 - (0,09 + 0,46 + 0,04) = 0,41$$

$$E(x) = 0,46 + 2 * 0,41 + 3 * 0,04 = 1,4$$

3 Задача

$$n = 6$$

$$p = 0,5$$

$$q = 1 - p = 0,5$$

3.1 a)

$$\text{Единогласно за: } C_6^6 * 0,5^6 * 0,5^0 = 1 * 0,5^6 = 0,015625$$

$$\text{Единогласно против: } C_6^0 * 0,5^0 * 0,5^6 = 1 * 0,5^6 = 0,015625$$

Вероятности равны. Это можно объяснить тем, что вероятность того, что человек проголосует за (p) равна вероятности того, что человек проголосует против (q)
 $\Leftrightarrow P(S_n = 6) = P(S_n = 0)$, так как $p = q = 0,5$

3.2 b)

$$P(S > 4) = C_6^5 * 0,5^5 * 0,5^1 + C_6^6 * 0,5^6 * 0,5^0 = 6 * 0,5^6 + 0,5^6 = 0,094 + 0,015625 \approx 0,11$$

4 Задача

4.1 а)

$$\frac{1}{11} \approx 0,09$$

4.2 б)

U	0	1
p	0,91	0,09

$$E(U) = 0,09$$

$$D(U) = 0,09 - (0,09)^2 = 0,09 - 0,0081 = 0,0819$$

4.3 в)

$$n = 12$$

$$p = 0,09$$

$$q = 1 - p = 0,91$$

$$E(V) = 12 * 0,09 = 1,08$$

$$D(V) = 1,08 * 0,91 = 0,9828$$

$$std(V) = \sqrt{0,9828} \approx 0,991363$$

5 Задача

5.1 а)

	y	100	200	300	
x	1	0,05	0,08	0,08	0,21
	2	0,11	0,11	0,12	0,34
	3	0,13	0,14	0,18	0,45
		0,29	0,33	0,38	

Таблица 1: маргинальные распределения

x	1	2	3
p	0,21	0,34	0,45

y	100	200	300
p	0,29	0,33	0,38

5.2 b)

$$Cov(x, y) = E(x * y) - E(x) * E(y)$$

$$E(x) = 0,21 + 0,34 * 2 + 0,45 * 3 = 2,24$$

$$E(y) = 0,29 * 100 + 0,33 * 200 + 0,38 * 300 = 209$$

x*y	100	200	300	400	600	900
p	0,05	0,19	0,21	0,11	0,26	0,18

$$E(x * y) = 0,05 * 100 + 0,19 * 200 + 0,21 * 300 + 0,11 * 400 + 0,26 * 600 + 0,18 * 900 = 468$$

$$Cov(x, y) = 468 - 468,16 = -0,16$$

5.3 c)

$$Cor(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{std(x) * std(y)}$$

$$D(x) = (0,21 + 0,34 * 4 + 0,45 * 9) - 5,0176 = 0,6024$$

$$D(y) = (0,21 * 10000 + 0,34 * 40000 + 0,45 * 90000) - 43681 = 12519$$

$$std(x) = \sqrt{0,6024} \approx 0,78$$

$$std(y) = \sqrt{12519} \approx 111,9$$

$$Cor(x, y) = \frac{-0,16}{0,78 * 111,9} \approx -0,002$$

5.4 d)

Корреляции ($Cor(x, y)$) — слабая и отрицательная, так как её коэффициент:
 $-0,002 \in (-0,4; 0,4)$

6 Задача

6.1 a)

$$P(x = 0 \cap y = 0) = \frac{2}{7} * \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$$

Мы с коллегой попали в выходной день ($\frac{2}{7}$), причем коллега попал в четный день, т.е. в субботу ($\frac{1}{7}$)

$$P(x = 0 \cap y = 1) = \frac{2}{7} * \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$$

Мы с коллегой попали в выходной день ($\frac{2}{7}$), причем коллега попал в нечетный день, т.е. в воскресенье ($\frac{1}{7}$)

$$P(x = 1 \cap y = 0) = (\frac{5}{7} * \frac{1}{7}) + \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{9}{49}$$

Первая скобочка означает, что я попал в будний день ($\frac{5}{7}$), а значит мой коллега точно попал в выходной день (т.к. в будни попал только один из нас), при этом коллега попал в чётный день \Rightarrow это суббота ($\frac{1}{7}$). Вторая скобочка означает, что я попал в выходной день ($\frac{2}{7}$), а значит мой коллега попал в будний день + мы знаем, что он попал в четный день \Rightarrow это вторник и четверг ($\frac{2}{7}$)

$$P(x = 1 \cap y = 1) = \frac{5}{7} * \frac{1}{7} + \frac{3}{7} * \frac{2}{7} = \frac{11}{49}$$

$$P(x = 2 \cap y = 0) = \frac{5}{7} * \frac{2}{7} = \frac{10}{49}$$

Мы с коллегой попали в будни ($\frac{5}{7}$), причем коллега попал в четный день, т.е. во вторник или четверг ($\frac{2}{7}$)

$$P(x = 2 \cap y = 1) = \frac{5}{7} * \frac{3}{7} = \frac{15}{49}$$

Мы с коллегой попали в будни ($\frac{5}{7}$), причем коллега попал в нечетный день, т.е. в понедельник, среду или пятницу ($\frac{3}{7}$)

	y	0	1	
x	0	2/49	2/49	4/49
	1	9/49	11/49	20/49
	2	10/49	15/49	25/49
		3/7	4/7	

Таблица 2: Совместное распределение и маргинальные распределения

x	0	1	2
p	$\frac{4}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{25}{49}$

y	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

6.2 b)

$$P(x = 0 \cap y = 0) = \frac{2}{49}$$

$$P(x = 0) * P(y = 0) = \frac{4}{49} * \frac{3}{7} = \frac{12}{343}$$

$P(x = 0 \cap y = 0) \neq P(x = 0) * P(y = 0) \Rightarrow x$ и y – не являются независимыми величинами