Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Буякова Ксения Сергеевна

Отчет по практическому заданию №4 на тему:

Решение уравнения теплопроводности и краевой задачи в круге с помощью пакета FeniCS

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка краевой задачи в круге

В рамках текущего практического задания рассматривалась следующая краевая задача в круге радиуса R:

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f(x,y), & 0 < x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < y < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{y>0} = -g(x,y), & x^2 + y^2 = R^2, \\ u|_{y<0} = h(x,y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

Перед использованием пакета FeniCS необходимо перейти к соответствующей нашей системе вариационной задаче для уравнения Пуассона, определив билинейную форму и линейный функционал следующим образом:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x,y) \nabla v(x,y) dx dy + \alpha \int_\Omega u(x,y) v(x,y) dx dy$$

$$L(v) = \int_\Omega f(x,y) v(x,y) dx dy - \int_{\partial\Omega} g(x,y) v(x,y) ds$$

В качестве аналитической возьмём следующие функции:

1. $u_{ex_1} = x\cos(y)$
2. $u_{ex_2} = \cos(x)\sin(y)$
3. $u_{ex_3} = \sin(x)\sin(y)$

Перепишем исходную систему для каждого из случаев:

1. $u_{ex_1} = x\cos(y)$

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = (1+\alpha) x \cos(y), & 0 < x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < y < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{y>0} = -(-\cos(y)\dfrac{x}{R} + x\sin(y)\dfrac{y}{R}), & x^2 + y^2 = R^2, \\ u|_{y<0} = x\cos(y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

2. $u_{ex_2} = \cos(x)\sin(y)$

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = (2+\alpha) \cos(x)\sin(y), & 0 < x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < y < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{y>0} = -(\sin(x)\sin(y)\dfrac{x}{R} - \cos(x)\cos(y)\dfrac{y}{R}), & x^2 + y^2 = R^2, \\ u|_{y<0} = \cos(x)\sin(y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

3. $u_{ex_3} = \sin(x)\sin(y)$

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = (2+\alpha) \sin(x)\sin(y), & 0 < x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < y < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{y>0} = -(-\cos(x)\sin(y)\dfrac{x}{R} - \sin(x)\cos(y)\dfrac{y}{R}), & x^2 + y^2 = R^2, \\ u|_{y<0} = \sin(x)\sin(y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

2 Результаты вычислений краевой задачи

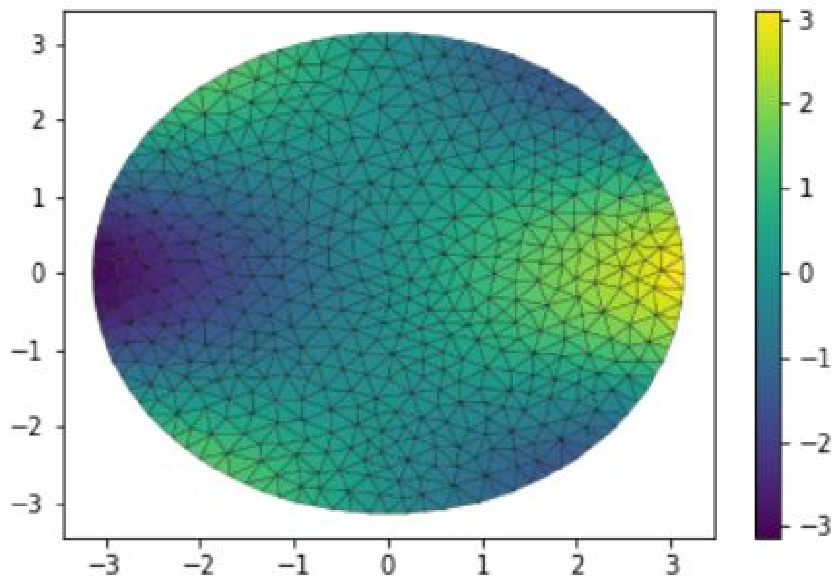

Рис. 1: Точное решение $u_{ex_1} = x\cos(y)$

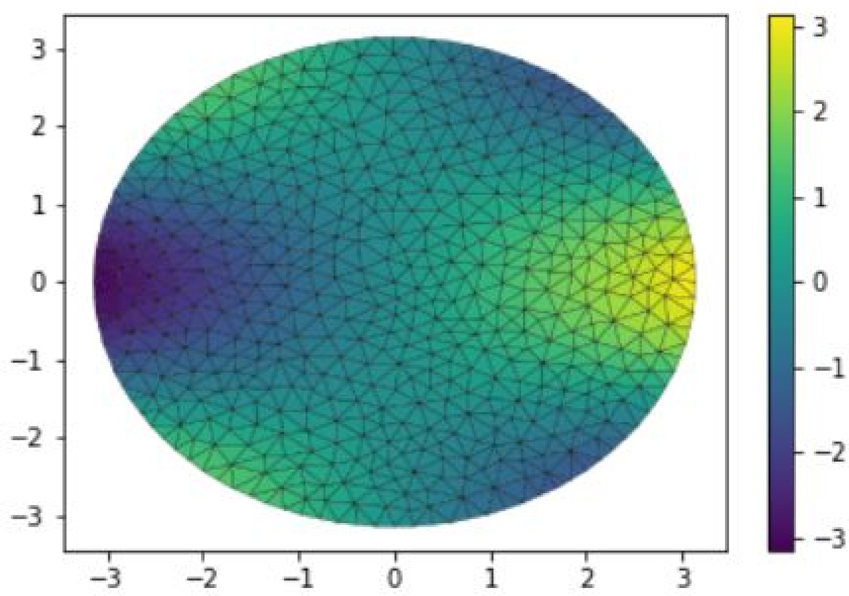

Рис. 2: Приближенное решение

error_L2 $= 0.04499643716698366$ **error_C** $= 0.026023705264$

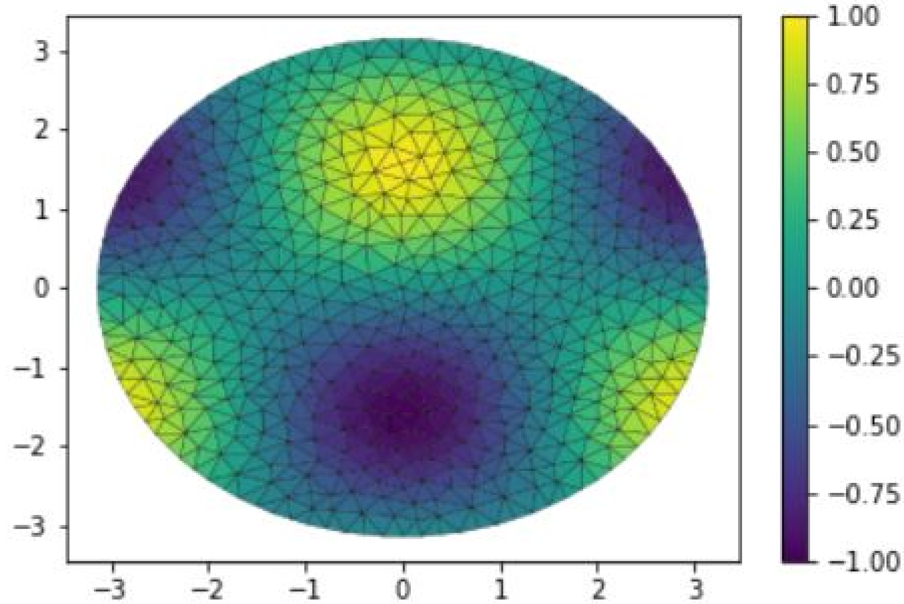

Рис. 3: Точное решение $u_{ex_2} = \cos(x)\sin(y)$

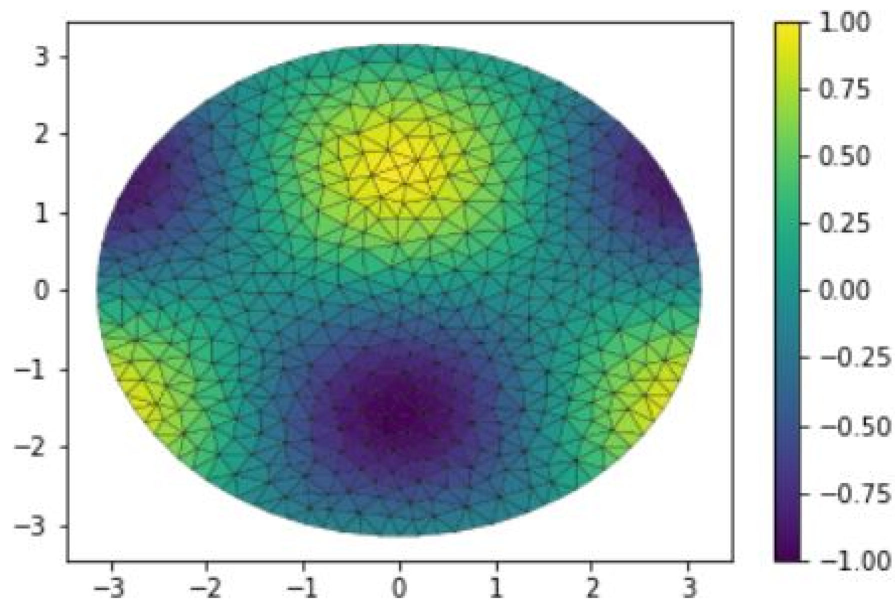

Рис. 4: Приближенное решение

error_L2 $= 0.03109314955045062$ **error_C** $= 0.00947236508958$

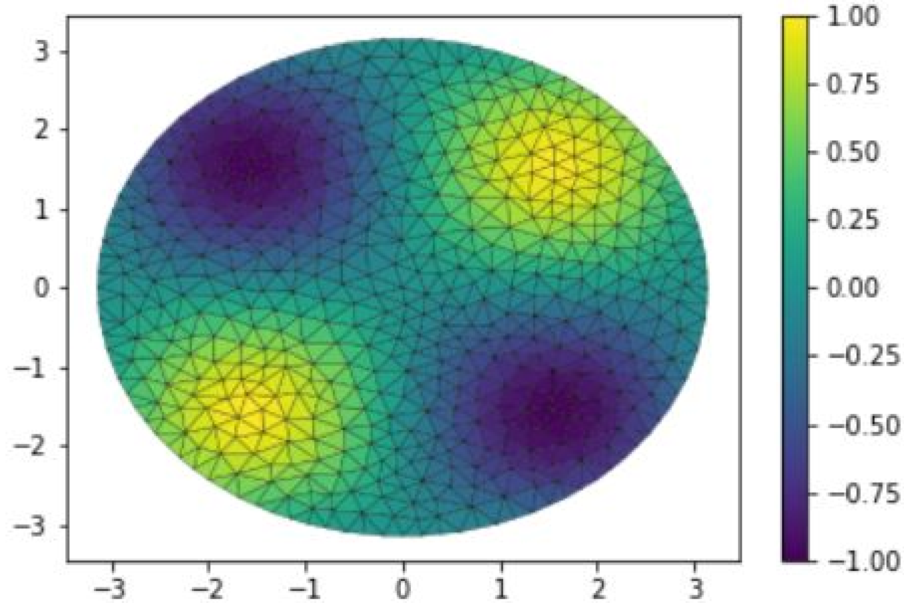

Рис. 5: Точное решение $u_{ex_3} = \sin(x)\sin(y)$

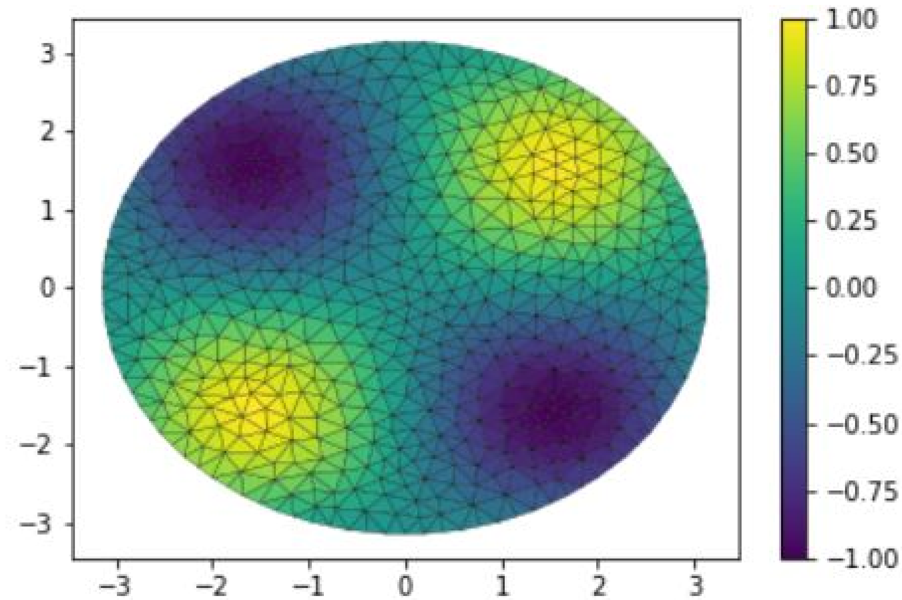

Рис. 6: Приближенное решение

error_L2 $= 0.02902829897532047$ **error_C** $= 0.00973018509745$

3 Постановка задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + f(x,y,t), \quad 0 < x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < y < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{y>0} = -g(x,y,t), \qquad x^2 + y^2 = R^2, \\ u|_{y<0} = h(x,y,t), \qquad x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

Перейдём к соответствующей нашей системе вариационной задаче для уравнения Пуассона, определив билинейную форму и линейный функционал:

$$a(u,v) = \alpha \Delta t \int_\Omega \nabla u(x,y) \nabla v(x,y) dxdy + \int_\Omega u(x,y) v(x,y) dxdy$$

$$L_{n+1}(v) = \Delta t \int_\Omega f^{n+1}(x,y) v(x,y) dxdy + \int_\Omega u^n(x,y) v(x,y) dxdy - \alpha \Delta t \int_{\partial\Omega} g(x,y) v(x,y) ds$$

$$a_0(u,v) = \int_\Omega u^0 v(x,y) dxdy = L_0(v)$$

Зададим следующую аналитическую функцию:

$$u_{exact} = 1 + x^2 + \gamma y^2 + \beta t$$

Перепишем исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + (\beta - 2\alpha(1+\gamma)), \quad 0 < x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < y < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{y>0} = -(-\dfrac{2x^2}{R} - 2\gamma \dfrac{2y^2}{R}), \qquad x^2 + y^2 = R^2, \\ u|_{y<0} = 1 + x^2 + \gamma y^2 + \beta t, \qquad x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

Результаты вычислений представлены в формате .gif.
Для этого необходимо перейти по ссылкам:
$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad \beta = 1.2$ Come/to/gif1
$\alpha = 1.2, \quad \gamma = 1, \quad \beta = 1.2$ Come/to/gif2
$\alpha = 1.2, \quad \gamma = 0.1, \quad \beta = 1.2$ Come/to/gif3

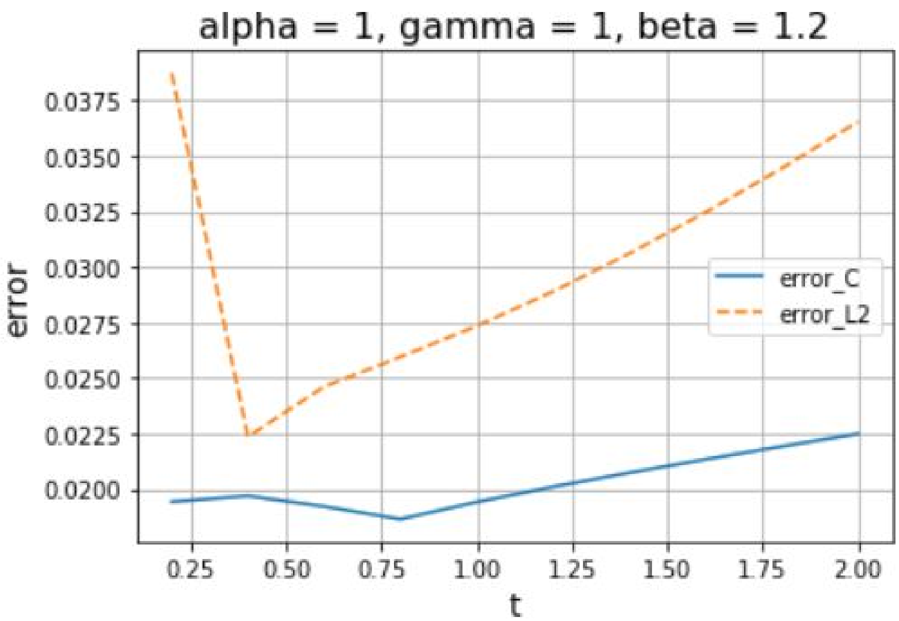
alpha = 1, gamma = 1, beta = 1.2
error
0.0375
0.0350
0.0325
0.0300
0.0275
0.0250
0.0225
0.0200
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
t
error_C
error_L2

Рис. 7:

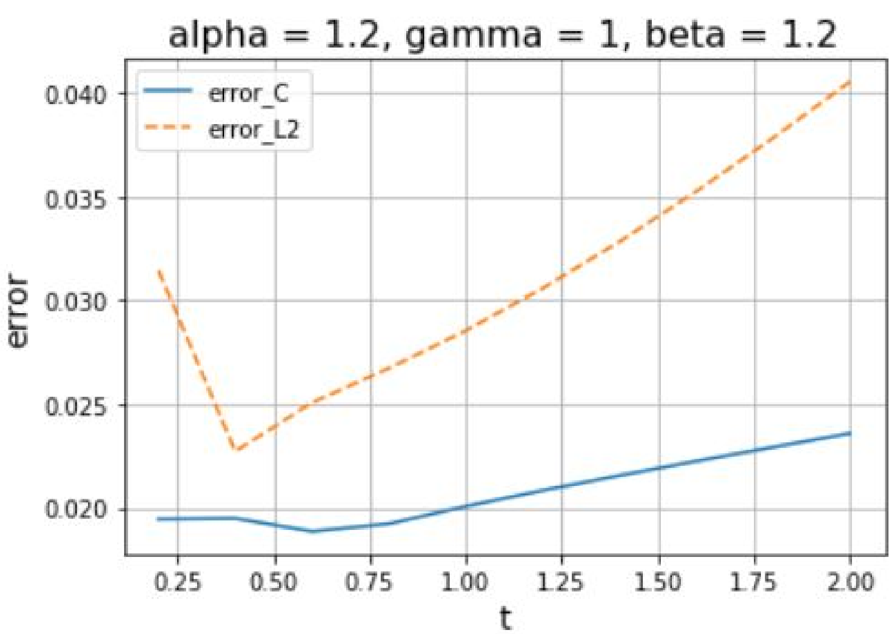
alpha = 1.2, gamma = 1, beta = 1.2
error
0.040
0.035
0.030
0.025
0.020
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
t
error_C
error_L2

Рис. 8:

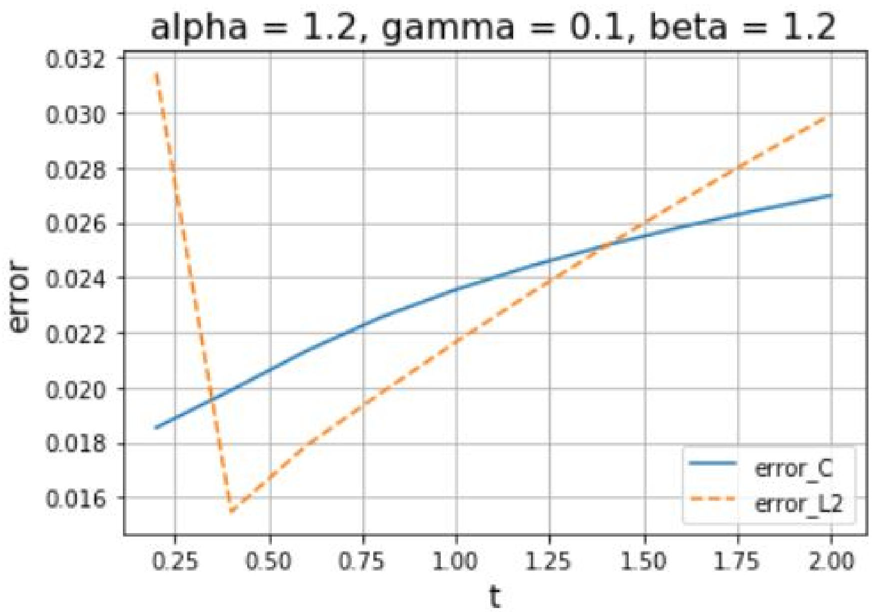
alpha = 1.2, gamma = 0.1, beta = 1.2
0.032
0.030
0.028
0.026
0.024
0.022
0.020
0.018
0.016
error
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
t
error_C
error_L2

Рис. 9: