计算机算法分析—习题课

第八章、第九章：回溯法与分支限界法

1 、解释下列术语的含义

- 状态空间树、显式约束条件、隐式约束条件、问题状态、解状态、答案状态、活结点、 E 结点、死结点和限界函数。

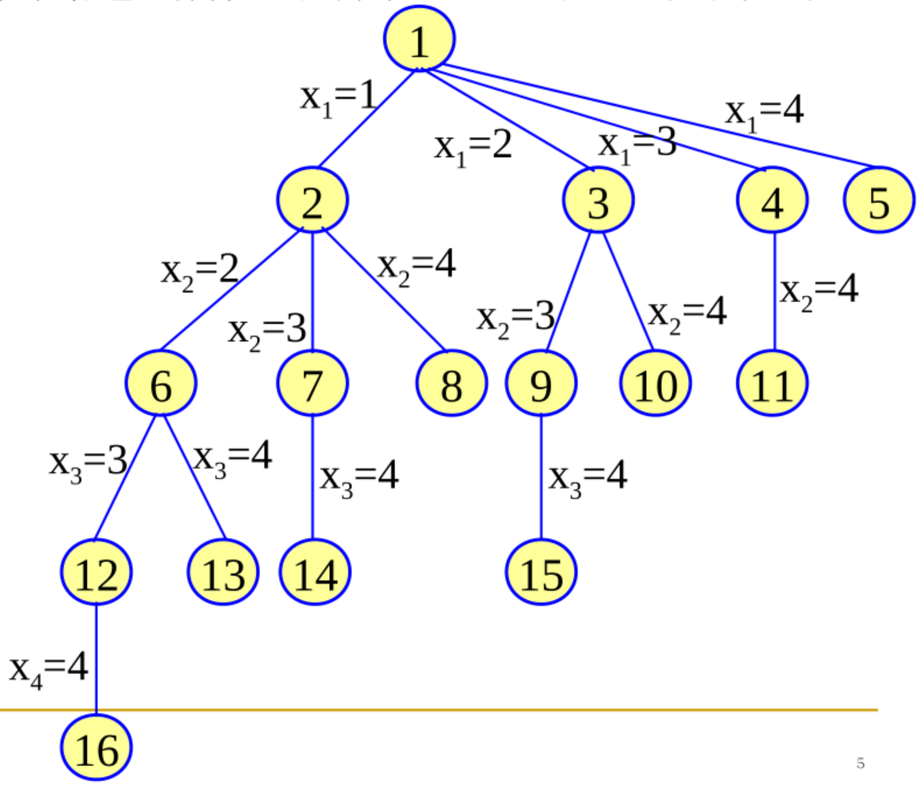
1 、解释下列术语的含义

- 状态空间树：所求问题的解空间的树结构
- 显式约束：限定每个 x 只从一个给定的集合上取值，可以与所求解问题的实例有关也可以无关
- 隐式约束：规定问题的实例的解空间中的那些实际上满足规范函数的元组，描述了 xi 必须彼此相关的情况
- 问题状态：解空间树中的每一个节点确定所求解问题的一个问题状态
- 解状态：这样一些问题状态 S，对于这些问题状态，由根到 S 的哪条路径确定了这解空间的一个元组。
- 答案状态：这样的一些解状态 S，对于这些解状态而言，由根到 S 的这条路径确定了这问题的一个解（它满足隐式约束条件）
- 活结点：如果已经生成一结点，而它的所有儿子结点还没有全部生成，则这个结点就叫活结点。
- E 结点：当前正在生成其儿子节点的活结点
- 死结点：不再进一步扩展或者其儿子结点已全部生成的结点
- 限界函数：所求解的问题需要求一个是某一限界函数 P （x1 ，x2……）取极大值（或取极小值或满足该限界函数）的向量，表示问题的约束条件或目标。

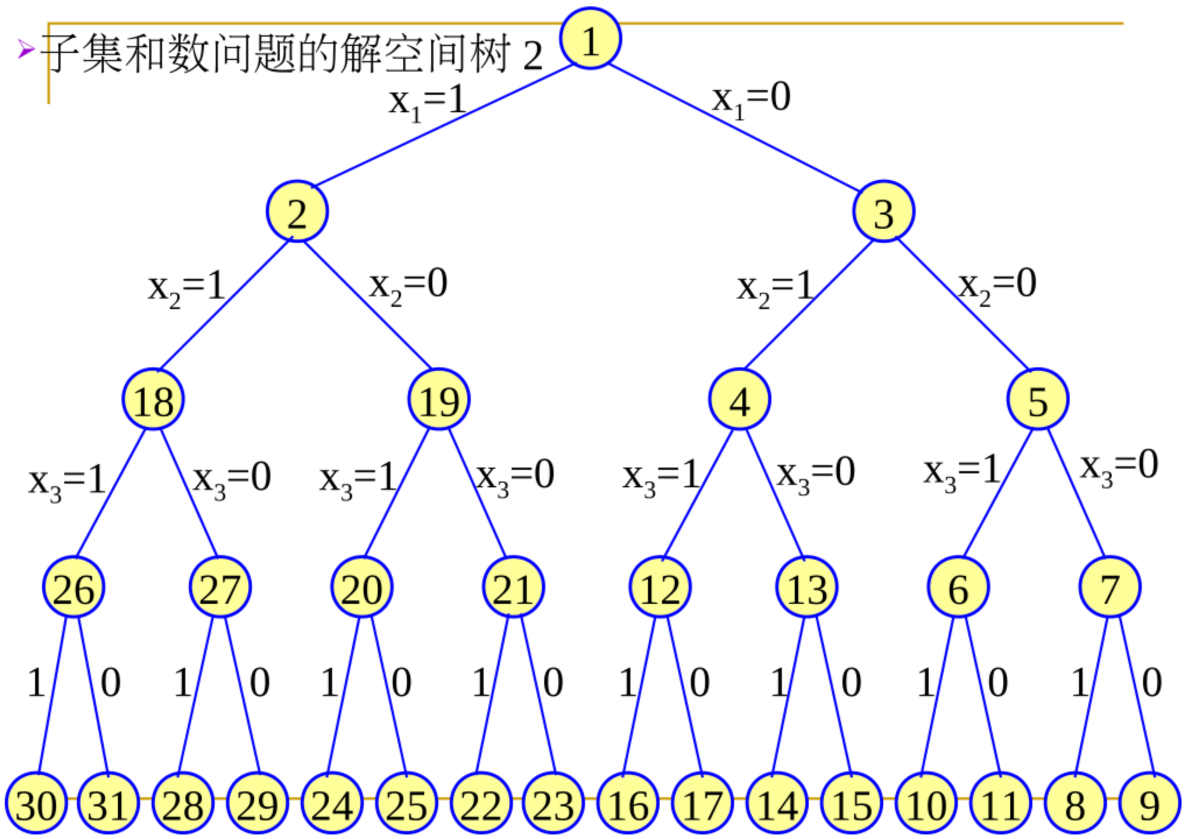
2 、

- **针对元组大小固定和元组大小可变的两种解的表示法，分别画出 n=4 时子集和数问题的状态空间树。**

子集和数问题的解空间树 1—— 元组大小可变



- 子集和数问题的解空间树 2



3 、回溯法的效率估计问题

- **(1)** 求 **6** 皇后问题静态的状态空间树的结点总数；
- **(2)** 按图 **1** 所示，采用蒙特卡罗方法估计不受限结点数（即实际扩展的结点数）；
- **(3)** 根据 **(2)** 的结果计算回溯算法的不受限结点数占结点总数的比例。

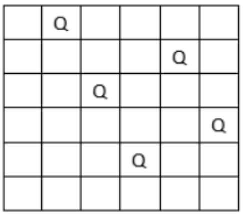
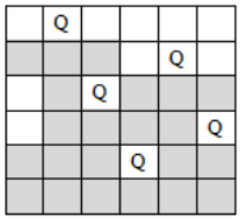


图 1. 6 皇后问题的一个状态

答案： (1)

1+6+(6*5)+(6*5*4)+(6*5*4*3)+(6*5*4*3*2)+(6*5*4*3*2*1)

=1975



(2) （ 6,3,2,2,1 ）

1+6+(6*3)+(6*3*2)+(6*3*2*2) +(6*3*2*2*1)
=205

(3) 205/1975=10.5%

第九章 分支－限界法

1 、回溯法和分支－限界法的状态空间生成方式有何不同？简述两种方法的基本思想。

答案：（1）**回溯法的状态生成方法：**当前的 E- 结点 R 一旦生成一个新的儿子结点 C，这个 C 结点就变成一个新的 E- 结点，当检测完了子树 C 后，R 结点就再次成为 E- 结点，生成下一个儿子结点。**分支－限界方法的状态生成方法：**一个 E- 结点一直保持到变成死结点为止。

（2）**回溯法**：加限界的深度优先生成方法称为回溯法。回溯法在包含问题所有解的解空间树中，按深度优先的策略，从根结点出发搜索解空间树。搜索至解空间树的任一结点时，先判断该结点是否肯定不包含问题的解。如果肯定不包含，则跳过以该结点为根的子树，逐层向其祖先结点回溯。否则就进入该子树，继续按深度优先的策略进行搜索。

分支－限界法：生成当前 E- 结点全部儿子之后，再生成其他活结点的儿子；使用限界函数帮助避免生成不包含答案结点子树的状态空间。

2 、 15 谜问题

- **(1)** 判定图中初始状态是否能达到目标状态？（需要计算过程）
- **(2)** 设 **ĉ(X)=f(X)+ĝ(X)** 。 **f(X)=** 根到结点 **X** 路径的长度， **ĝ(X)=** 不在其目标位置的非空白牌数目，用 **LC** 检索法，画出从初始状态到达目标状态的状态空间树，并标出树中每个状态节点的 **ĉ** 值。

1	2	3	4
5	6		8
9	10	7	11
13	14	15	12

初始状态

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

目标状态

图 2. 15 谜问题

(1) 定理： 当且仅当 Σ LESS (i)+X 是偶数时，目标状态可由此初始状态到达。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Less	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	9

- LESS (i) 是使牌 j< 牌 i ， 且 POSITION(j)> POSITION(i) 的 j 的数目 .
- 空格位值 X=1.

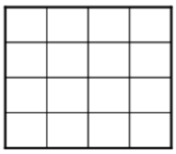
1	2	3	4
5	6		8
9	10	7	11
13	14	15	12

初始状态

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

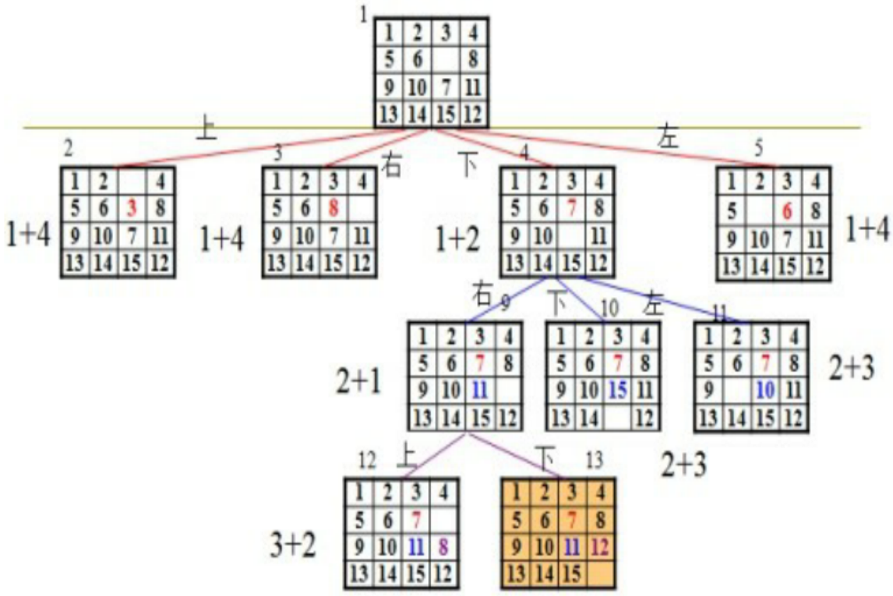
目标状态

图 2. 15 谜问题



初始状态下，如果空格在图的阴影位置中的某一格处，则令 X=1； 否则 X=0 。

- 由于Σ **Less(i)=15** ， 空格位值为 **1. ∑Less(i)+1=16** ， 为偶数，因此，目标状态可到达。



3 、 P242-3

- 带期限的作业排序问题：

  允许作业有不同的处理时间

  每个作业 i 与一个三元组联系 **(p_i, d_i, t_i)**

  目标：**n** 个作业的子集合 **J** ，**J** 中的作业都能在相应的期限内完成，且不在 **J** 中的作业招致的罚款总额最小。

- 给定带期限的作业排序问题：**n=5,(p_1,d_1,t_1)=(6,3,2), (p_2,d_2,t_2)=(3,1,1), (p_3,d_3,t_3)=(4,4,2), (p_4,d_4,t_4)=(8,2,1), (p_5,d_5,t_5)=(5,4,1)**

  按照书上关于 **$\hat{c}$(X)** 和 **u(X)** 的定义，画出 **FIFOBB,LIFOBB** 和 **LCBB** 对上述问题所生成的、大小可变的元组表示的部分状态空间树，求出对应于最优解的罚款。

- 设 S_X 是在结点 X 处选择的作业的子集， $m=\max\{i|i\in S_X\}$ ，

$\hat{c}(X)=\sum_{\substack{i<m\\ i\notin S_X}} p_i$ 子树 X 中最小成本答案结点成本值下界

$u(X)=\sum_{i\notin S_X} p_i$ 子树 X 中最小成本答案结点成本值上界

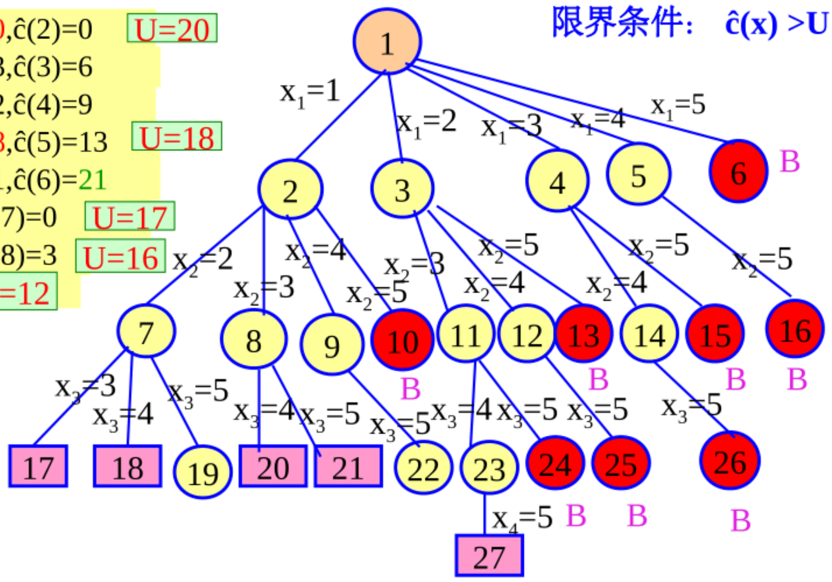
U 整棵树中 C(T) 目标函数上界 (当前找到的最小罚款值)

初值 U=∞ 或 $U=\sum_{1\le i\le n} p_i$

元组大小可变的状态空间树 (FIFOBB—— 队列)

$u(2)=p_2+p_3+p_4+p_5=20, \hat{c}(2)=0$ U=20
$u(3)=p_1+p_3+p_4+p_5=23, \hat{c}(3)=6$
$u(4)=p_1+p_2+p_4+p_5=22, \hat{c}(4)=9$
$u(5)=p_1+p_2+p_3+p_5=18, \hat{c}(5)=13$ U=18
$u(6)=p_1+p_2+p_3+p_4=21, \hat{c}(6)=21$
$u(7)=p_3+p_4+p_5=17, \hat{c}(7)=0$ U=17
$u(8)=p_2+p_4+p_5=16, \hat{c}(8)=3$ U=16
$u(9)=12, \hat{c}(9)=7$ U=12
$u(10)=15, \hat{c}(10)=15$
$u(11)=19, \hat{c}(11)=6$
$u(12)=15, \hat{c}(12)=10$
$u(13)=18, \hat{c}(13)=18$
$u(14)=14, \hat{c}(14)=9$
$u(15)=17, \hat{c}(15)=17$
$u(16)=13, \hat{c}(16)=13$
$u(19)=12, \hat{c}(19)=12$
$u(22)=7, \hat{c}(22)=7$ U=7
$u(23)=11, \hat{c}(23)=6$
$u(24)=14, \hat{c}(24)=14$
$u(25)=10, \hat{c}(25)=10$
$u(26)=9, \hat{c}(26)=9$

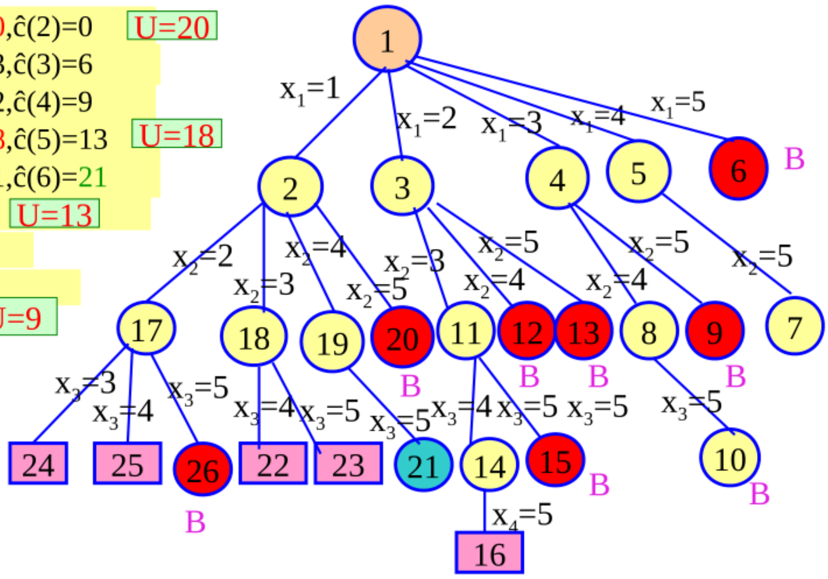
限界条件： $\hat{c}(x)>U$



(p1,d1,t1)=(6,3,2), (p2,d2,t2)=(3,1,1),
(p3,d3,t3)=(4,4,2), (p4,d4,t4)=(8,2,1),
(p5,d5,t5)=(5,4,1)

元组大小可变的状态空间树 (LIFOBB—— 堆栈)

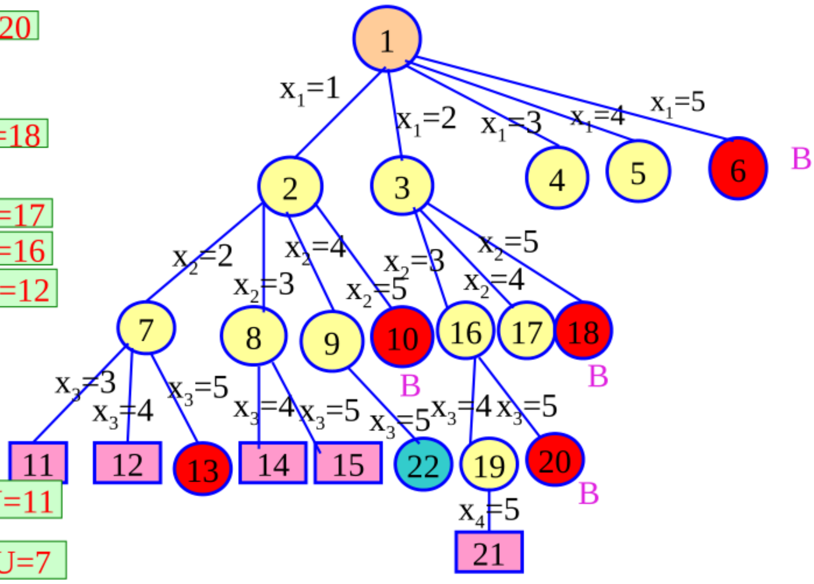
$u(2)=p_2+p_3+p_4+p_5=20, \hat{c}(2)=0$ U=20
$u(3)=p_1+p_3+p_4+p_5=23, \hat{c}(3)=6$
$u(4)=p_1+p_2+p_4+p_5=22, \hat{c}(4)=9$
$u(5)=p_1+p_2+p_3+p_5=18, \hat{c}(5)=13$ U=18
$u(6)=p_1+p_2+p_3+p_4=21, \hat{c}(6)=21$
$u(7)=13, \hat{c}(7)=13$ U=13
$u(8)=14, \hat{c}(8)=9$
$u(9)=17, \hat{c}(9)=17$
$u(10)=9, \hat{c}(10)=9$ U=9
$u(11)=19, \hat{c}(11)=6$
$u(12)=15, \hat{c}(12)=10$
$u(13)=18, \hat{c}(13)=18$
$u(14)=11, \hat{c}(14)=6$
$u(15)=14, \hat{c}(15)=14$
$u(17)=17, \hat{c}(17)=0$
$u(18)=16, \hat{c}(18)=3$
$u(19)=12, \hat{c}(19)=7$
$u(20)=15, \hat{c}(20)=15$
$u(21)=7, \hat{c}(21)=7$ U=7
$u(26)=12, \hat{c}(26)=12$



(p1,d1,t1)=(6,3,2), (p2,d2,t2)=(3,1,1), (p3,d3,t3)=(4,4,2), (p4,d4,t4)=(8,2,1), (p5,d5,t5)=(5,4,1)

元组大小可变的状态空间树 (LCBB—— 堆)

$u(2)=20, \hat{c}(2)=0$ U=20
$u(3)=23, \hat{c}(3)=6$
$u(4)=22, \hat{c}(4)=9$
$u(5)=18, \hat{c}(5)=13$ U=18
$u(6)=21, \hat{c}(6)=21$
$u(7)=17, \hat{c}(7)=0$ U=17
$u(8)=16, \hat{c}(8)=3$ U=16
$u(9)=12, \hat{c}(9)=7$ U=12
$u(10)=15, \hat{c}(10)=15$
$u(13)=12, \hat{c}(13)=12$
$u(16)=19, \hat{c}(16)=6$
$u(17)=15, \hat{c}(17)=10$
$u(18)=18, \hat{c}(18)=18$
$u(19)=11, \hat{c}(19)=6$ U=11
$u(20)=14, \hat{c}(20)=14$
$u(22)=7, \hat{c}(22)=7$ U=7



将堆中具有最小 $\hat{c}(x)$ 的 x 出堆，并将其所有子结点限界并入堆；
终止条件：不再有活结点或 $\hat{c}(x) > U$

(p1,d1,t1)=(6,3,2), (p2,d2,t2)=(3,1,1), (p3,d3,t3)=(4,4,2), (p4,d4,t4)=(8,2,1), (p5,d5,t5)=(5,4,1)