ПРАКТИКА

Поверхностные интегралы II рода.

Основные формулы

Пусть в точках двусторонней поверхности σ задана непрерывная функция$f(x, y, z)$. Выберем на поверхности определенную сторону и нормаль к этой стороне поверхности

Общим видом поверхностного интеграла второго типа служит интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \qquad (4.1)$$

где

$$P(x,y,z), \; Q(x,y,z), \; R(x,y,z)$$

- это функции от преременных x, y, z , определенные и непрерывные в точках

двусторонней поверхности σ.

По определению (4.1) это:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy\,. \qquad (4.2)$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает всеми свойствами

поверхностного интеграла первого типа, за исключением одного:

при изменении стороны поверхности интеграл (4.1) меняет знак.

Вычисление поверхностныех интегралов второго рода.

Первый способ
(проекция поверхности σ на координатные плоскости)

Пусть нормаль к выбранной стороне поверхности имеет координаты

$$\overline{n_0} = \{cos\alpha; cos\beta; cos\gamma\}.$$

1)Поверхность σ однозначно проектируется в область (S_1) плоскости *Oxy* и

$$\sigma: \quad \boldsymbol{z = z(x, y).}$$

Тогда

$$\iint_\sigma R(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{S_1} R(x, y, z(x, y))dxdy, \qquad (4.3)$$

где $S_1 = \text{Пр}_{xy}\sigma$ и
знак «**+**» - если $cos\gamma > 0$ (т.е. угол $\gamma -$ острый) и
знак « **-** « – если $cos\gamma < 0$ (т.е. угол $\gamma -$ тупой).

2) Поверхность σ однозначно проектируется в область (S_2) плоскости *Oxz* и

$$\sigma: \boldsymbol{y = y(x, z)}$$

Тогда

$$\iint_\sigma Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint_{S_2} Q(x, y(x, z), z)dxdz, \qquad (4.4)$$

где $S_2 = \text{Пр}_{xz}\sigma$ и
знак «**+**» - если $cos\beta > 0$(т.е. угол $\beta -$ острый) и
знак « **-** « – если $cos\beta < 0$ (т.е. угол $\beta -$тупой) .

3) Поверхность σ однозначно проектируется в область(S_3) плоскости *Oyz* и

$$\sigma : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

Тогда

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{S_3} Q(x(y,z),y,z)dydz, \qquad (4.5)$$

где $S_3 = \text{Пр}_{yz}\sigma$ и
знак «**+**» - если $cos\alpha > 0$ (т.е. угол $\alpha -$ острый) и
знак « **-** « - если $cos\alpha < 0$ (т.е. угол $\alpha -$ тупой) .

В более сложных случаях поверхность σ разбивается на поверхности, обладающими указанными свойствами, а интеграл (4.2) - на сумму интегралов по этим поверхностям.

<u>Второй способ.</u>

Поверхностный интеграл второго рода можно записать через поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_{(\sigma)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left(P\cos\ \alpha + Q\cos\ \beta + R\cos\ \gamma \right) d\boldsymbol{\sigma} \qquad (4.6)$$

где $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к выбранной стороне поверхности , по которой берется интеграл.

1) Поверхность σ однозначно проектируется в область (S_1) плоскости *Oxy* и

$$\sigma : \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Тогда

$$cos\alpha = \pm\frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\ ; \quad cos\beta = \pm\frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}};$$

$$cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \quad (4.7)$$

где знак «**+**» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности угол γ — острый , и знак « **-** « – если угол γ — тупой.

Здесь $S_1 = \text{Пр}_{xy}\sigma$ и

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$$

2) Поверхность σ однозначно проектируется в область(S_2) плоскости *Oxz* и

$$\sigma : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

Тогда

$$cos\alpha = \pm\frac{-y'_x}{\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}};\ cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}};$$

$$cos\gamma = \pm\frac{-y'_z}{\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}}, \qquad (4.8)$$

где знак «**+**» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности угол β — острый , и знак « **-** « – если угол β — тупой.

Здесь $S_2 = \text{Пр}_{xz}\sigma$ и

$$d\sigma = \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}dxdz$$

3) Поверхность σ однозначно проектируется в область(S_3) плоскости *Oyz* и

$$\sigma : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

Тогда

$$cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}}; \qquad cos\beta = \pm \frac{-x'_y}{\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}};$$

$$cos\gamma = \pm \frac{-x'_z}{\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}}, \qquad (4.9)$$

где знак «**+»** берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности угол $\alpha -$ острый , и знак « **-** « – если угол $\alpha -$ тупой.

Здесь $S_3 = \text{Пр}_{yz}\sigma$ и

$$d\sigma = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\ dydz.$$