§2. Свойства определённого интеграла

Изучаемые далее свойства определённого интеграла позволяют вывести формулу для его вычисления (формула Ньютона – Лейбница), а также облегчают действия с интегралами.

Свойство 1 (*об интеграле с равными пределами*).

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ (по определению).} \tag{2.1}$$

Интеграл в равных пределах равен нулю.

Свойство 2 (*о перемене местами пределов интегрирования*).

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ (по определению).} \tag{2.2}$$

При смене местами пределов интегрирования интеграл меняет лишь знак.

Эти два свойства расширяют применение понятия определённого интеграла на случаи, не охваченные его первичным определением.

Свойство 3 (*линейность интеграла*).

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx. \tag{2.3}$$

Частные случаи.

1) $$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx. \tag{2.4}$$

Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла.

2) $$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \tag{2.5}$$

Определённый интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности определённых интегралов от слагаемых.

► Составим интегральную сумму для функции $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$, предполагая, что произведены разбиение промежутка $[a,b]$ на части и выбор точек ξ_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}[C_1 f_1(\xi_k) + C_2 f_2(\xi_k)]\Delta x_k = C_1\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k + C_2\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Напомним, что все функции предполагаются интегрируемыми, следовательно, при $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k \to 0$ каждая интегральная сумма стремится к соответствующему интегралу. В пределе получим доказываемую формулу. ◄

Свойство 4 (*аддитивность интеграла по промежутку*). Если промежуток $[a,b]$ точкой c разбит на два промежутка $[a,c]$ и $[c,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ по всему промежутку равен сумме интегралов от этой функции по частичным промежуткам

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.6}$$

► В силу предположенной интегрируемости функции $f(x)$ можно произвести разбиение промежутка $[a,b]$ на части так, чтобы точка c оказалась одной из точек деления (рис. 2.1д).

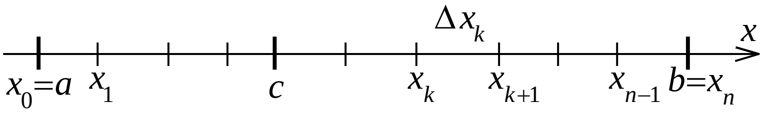

Рис. 2.1д. Разбиение промежутка $[a,b]$ на части, при котором точка c является одной из точек деления

Предел интегральных сумм по определению интеграла не зависит от способа дробления. Составим интегральную сумму для промежутка $[a,b]$. Ее обозначим $\sigma([a,b])$. Эта сумма разобьётся на две интегральные суммы, соответствующие промежуткам $[a,c]$ и $[c,b]$. Их обозначим соответственно $\sigma([a,c])$ и $\sigma([c,b])$. При этом выполняется равенство

$$\sigma([a,b]) = \sigma([a,c]) + \sigma([c,b]). \qquad (*)$$

Увеличение числа n точек дробления будем производить так, чтобы точка c всегда оставалась одной из точек дробления. Тогда при $\lambda = \max_k \Delta x_k \to 0$ каждая из интегральных сумм, участвующих в равенстве $(*)$, стремится к соответствующему интегралу. В пределе получаем доказываемое равенство. ◄

Замечание 2.1. Свойство 4 остается справедливым, если точка c совпадает с концами промежутка или находится вне промежутка $[a,b]$.

► Рассмотрим, например, случай, когда $a < b < c$. Тогда по доказанному ранее имеем: $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$. Отсюда $\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$, так как $\int_c^b = -\int_b^c$. Для краткости здесь опущена запись подынтегральных выражений. ◄

Свойство 5 (*о знаке интеграла*). Если подынтегральная функция на промежутке интегрирования неотрицательна, то определенный интеграл от этой функции также неотрицателен:

$$f(x) \geq 0;\ x \in [a,b];\ (a < b) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

► Составим интегральную сумму для данного интеграла: $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Так как $f(\xi_k) \geq 0$ и $\Delta x_k > 0$ для любого $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то все слагаемые суммы и сама сумма σ_n неотрицательны. Предел неотрицательной переменной σ_n при $\lambda \to 0$ неотрицателен. В пределе получаем $\lim_{\lambda \to 9} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx \geq 0$. ◄

Свойство 6 (*об интегрировании неравенства*). Если на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ связаны неравенством $f(x)\le\varphi(x)$, то и интегралы от этих функций связаны тем же неравенством:

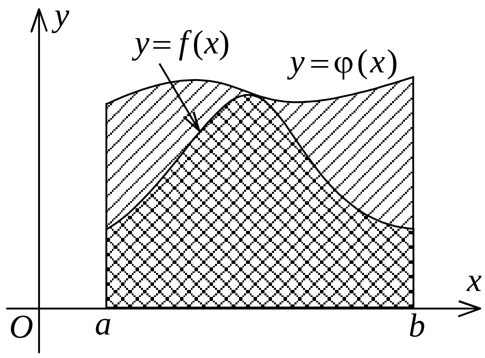

Рис. 2.1. Иллюстрация свойства 6 об интегрировании неравенства

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (2.7)$$

Геометрически при $f(x)\ge 0$ это означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=\varphi(x)$, не меньше, чем площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$. При этом обе трапеции опираются на один и тот же промежуток $[a,b]$ (рис. 2.1).

► Для доказательства рассмотрим разность $\varphi(x)-f(x)$, которая является неотрицательной функцией: $\varphi(x)-f(x)\ge 0$. Тогда по свойству 5 получаем

$\int_a^b[\varphi(x)-f(x)]dx\ge 0$. Отсюда $\int_a^b\varphi(x)dx-\int_a^b f(x)dx\ge 0$ и $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\varphi(x)dx$. ◄

Свойство 7 (*об оценках интеграла*). Если в на промежутке интегрирования $[a,b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам $m\le f(x)\le M$, то справедливы следующие оценки интеграла снизу и сверху:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\ . \qquad (2.8)$$

Геометрически при $m>0$ это свойство означает, что площадь криволинейной трапеции, выраженная данным интегралом, не меньше площади входящего прямоугольника и не больше площади выходящего прямоугольника (рис. 2.2).

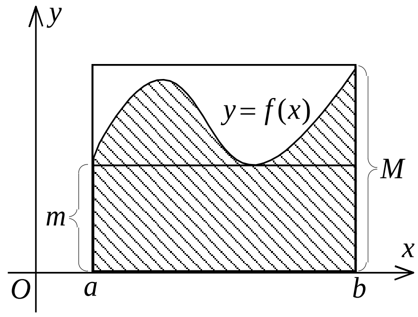

Рис. 2.2. Иллюстрация свойства 7 об оценках интеграла

► Пользуясь свойством 6, проинтегрируем неравенства $m\le f(x)\le M$. Получим

$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M\,dx$. Отсюда $m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx$. Но $\int_a^b dx=b-a$ (см. пример 1.1). Тогда имеем $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$. ◄

Свойство 8 (*об оценке модуля интеграла*). Модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx, \quad a<b. \qquad (2.9)$$

► Проинтегрируем очевидное неравенство $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, получаем: $-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)x \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$ (свойство 6) или $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$ (свойства абсолютных величин). ◄

9°. Свойство устойчивости интеграла. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по промежутку $[a,b]$. Если в конечном числе точек промежутка $[a,b]$ изменить значения функции, оставив ее ограниченной, то от этого интегрируемость функции не нарушится и величина интеграла не изменится.

Доказательство этого свойства можно найти, например, в [1,7]