Говорят, что числа правят миром.
Нет, они только показывают, как правят миром.

(Иоганн Вольфганг фон Гёте)

Числовая информация в памяти компьютера. Компьютерные вычисления.

Информатика, 1 курс.
Лекция 6.

Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В этой лекции:

- Типы числовой информации.
- Число как модель.
- Представление чисел в компьютере.
- Аппаратная реализация выполнения арифметических действий

Числовая информация: основные роли

Числа в нашей жизни выступают в одной из трёх ролей:

- Число
  - Количество, величина
  - Порядковый номер
  - Идентификатор

Число как модель (примеры)

61.13.27, 30.03.16

26.07.2008

87

+15

182

88-54-90

8-952-131-13-13

Число интересно не само по себе, а как модель какого-то объекта.

Число нуждается в метаданных – пояснении, что оно означает.

Это вы проходили в школе:

Требования к представлению чисел в ЭВМ:

1. Кодирование с помощью элементов с двумя состояниями (вкл/ выкл).
2. Возможность выполнения арифметических и других операций.
3. Компактность.

Системы счисления

Десятичная

$5072=2\cdot10^0+7\cdot10^1+0\cdot10^2+5\cdot10^3$

N –ичная.

$ABC_N=C\cdot N^O+B\cdot N^1+A\cdot N^2$

Двоичная.

$100101_2=1\cdot2^0+0\cdot2^1+1\cdot2^2+0\cdot2^4+0\cdot2^5 = 37_{10}$

Информация в ЭВМ представляется в двоичной системе.

Представление чисел в компьютере

Отрицательные целые числа

Проверим: 17-5 = 17 + (-5)?

$17_{10}=10001_2$
$5_{10}=101_2$

Обратный код числа 5 (считая, что это байт): 11111010
Дополнительный код:
11111011
Вычисляем обе части проверяемого равенства – получаем одинаковый ответ:
$00001100_2=12_{10}$.

−	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	1	0	0

+	0	0	0	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1	0	0

Числа с плавающей точкой

$$X = A * B^{C}$$

A – мантисса
B – основание
C – порядок (экспонента)

IEEE754-2008

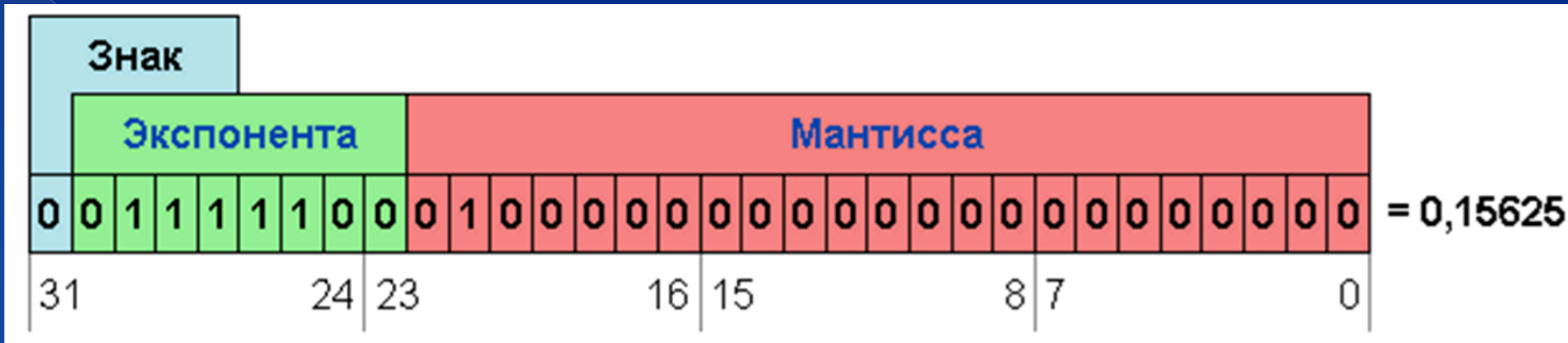
– действующий стандарт представления чисел с плавающей точкой.

– половинная точность (16 разрядов);

- одинарная точность (32 разряда);

- двойная точность (64 разряда);

- четверная точность (128 разрядов)



Для вычисления показателя степени из восьмиразрядного поля экспоненты вычитается смещение экспоненты равное $127_{10} = 7F_{16} = 01111111_2$, (то есть, $01111100_2 - 01111111_2 = 124_{10} - 127_{10} = -3_{10}$).

Так как в нормализованной двоичной мантиссе целая часть всегда равна единице, то в поле мантиссы записывается только её дробная часть. Для вычисления мантиссы к единице добавляется дробная часть мантиссы из 23-х разрядного поля дробной части мантиссы: $1{,}01000000000000000000000_2$.

Число равно произведению мантиссы со знаком на двойку в степени экспоненты = $1{,}01_2 * 2_{10}^{-3_{10}} = 101_2 * 2_{10}^{-5_{10}} = 5_{10} * 2_{10}^{-5_{10}} = 0{,}15625_{10}$

Как записать число в формате с плавающей точкой

Пример:

13.11

$13_{10}=1101_2$

0.11_{10} переведём:

0.11

0.22

0.44

0.88

1.76

1.52

1.04

0.08…. хватит, надоело! $=0.0001110\ldots_2$

(Проверим: 7/64=0,109375)

Итак: $1101.000111_2=1.1010001110\ldots_2 * 2^3$

Смещённый порядок: $127+3=130_{10}=10000010_2$

Знак – плюс, пишем 0

Получаем:

0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 … 0

Ноль и «не числа»

В IEEE754 **ноль** представляется значением с порядком 127 и нулевой мантиссой, поскольку обычным способом представить 0 нельзя.

Также в IEEE754 предусмотрено представление для специальных чисел, работа с которыми вызывает исключение. К таким числам относится **бесконечность** (±∞) и **неопределенность** (NaN). Эти числа позволяет вернуть адекватное значение при переполнении.

Получить **бесконечность** можно при переполнении и при делении ненулевого числа на ноль.

Неопределенность или NaN (от not a number) – это, к примеру, ∞+(- ∞), 0 × ∞, 0/0, ∞/∞, sqrt(x), где x<0

Любая операция с NaN возвращает NaN.
По определению NaN ≠ NaN, поэтому, для проверки значения переменной нужно просто сравнить ее с собой.

Абсолютная и относительная погрешность

Предположим, при выполнении арифметической операции с числами произошло округление, результат стал не совсем точным. Абсолютная величина этой погрешности не превышает «веса» одного разряда в представлении числа.

С фиксированной точкой
«Вес» последнего разряда определяется разрядностью представления чисел.

Абсолютная погрешность постоянна.

Относительная погрешность переменна, большая для чисел вблизи 0, маленькая для чисел на концах диапазона.

С плавающей точкой
«Вес» последнего разряда мантиссы зависит от порядка.

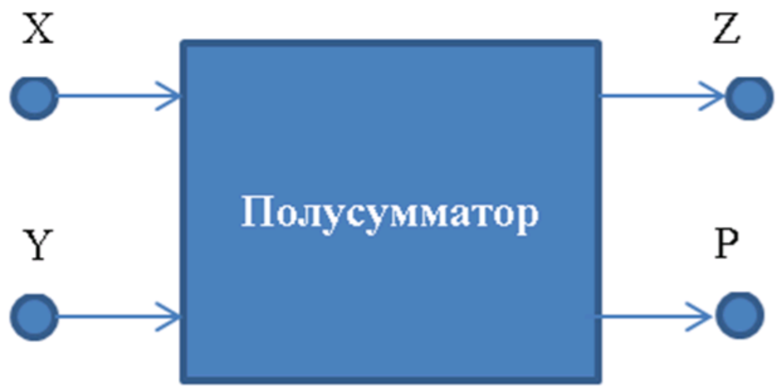
Абсолютная погрешность тоже зависит от порядка, вблизи 0 она маленькая.

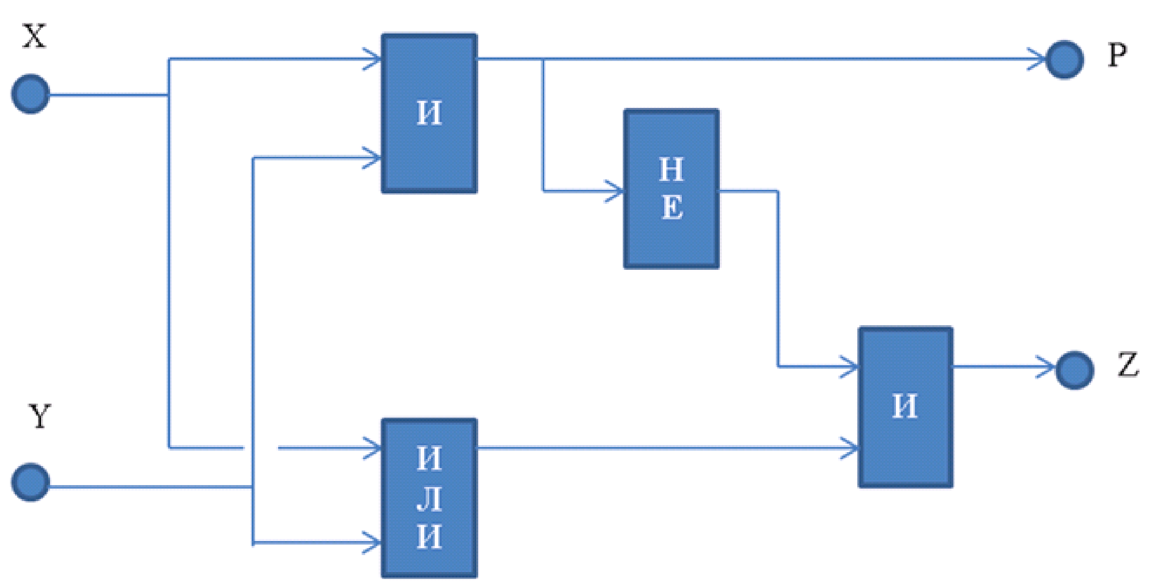
Относительная погрешность постоянна, т.к. «вес» последнего разряда пропорционален числу.

Как выполняются вычисления?

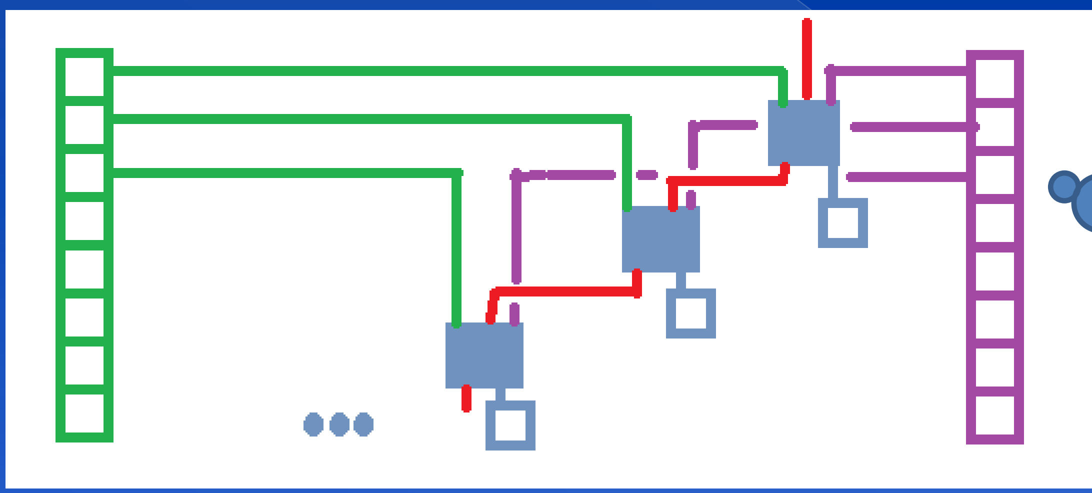
Одноразрядный полусумматор

X	Y	Z	P
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1





Для сложения многоразрядных чисел (байтов) нужно учитывать перенос от сложения предыдущих разрядов.



Не пугайтесь: рисовать такие схемы на экзамене вам пока не придётся

А теперь представьте себе, что складываются числа в формате **с плавающей точкой**…

Операции с плавающей точкой реализуются отдельной частью процессора или сопроцессором, им соответствуют особые команды машинного языка.

Итоги:

- Число может выступать в одной из ролей – количество, номер, идентификатор.
- Число интересно нам не само по себе, а как модель какого-то объекта.
- Представление чисел в компьютере основано на двоичной системе счисления.
- Существуют две совершенно разные формы представления: с фиксированной точкой (целые числа), с плавающей точкой (вещественные числа)
- Числа с плавающей точкой: больше диапазон значений, фиксированная относительная погрешность.
- Числа с фиксированной точкой: быстрее выполняются вычисления, абсолютная погрешность одинакова для всех чисел диапазона.