§5. Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы

Определение 5.1. *Минором* M_k матрицы A размера $m\times n$ $\left(k\le\min(m,n)\right)$ называется определитель k-го порядка, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении любых её k строк с любыми k столбцами.

Пример 5.1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\-1&1&-1&2\\0&2&4&3\end{pmatrix}$. Определить число её миноров 2-го порядка и найти какой-нибудь один из них.

►Очевидно, в силу определения 5.1, данная матрица A может иметь несколько миноров данного порядка. Число N миноров второго порядка M_2 равно $N=N_1N_2$, где N_1 – число способов, которыми можно выбрать 2 строки из трёх, а N_2 – число способов, которыми можно выбрать 2 столбца из четырёх. Поскольку $N_1=3,\ N_2=6$, то N = 18. Одним из миноров M_2 будет, например, определитель $\begin{vmatrix}1&3\\-1&2\end{vmatrix}=5$, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении её первой и второй строк с третьим и четвёртым столбцами.◄

Определение 5.2. *Базисным минором* матрицы A размера $m\times n$ называется любой её минор порядка r $\left(r\le\min(m,n)\right)$, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $(r+1)$ либо равны нулю, либо не существуют. Порядок r базисного минора называется *рангом* матрицы A, а её строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются *базисными*.

Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю. Для ранга матрицы A приняты обозначения: $\operatorname{rang} A$, $\operatorname{rank} A$, $r(A)$.

Так, например, ранг матрицы A из примера 5.1 равен 3, так как у нее есть минор $M_3\neq0$, $M_3=\begin{vmatrix}2&0&1\\-1&1&-1\\0&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-1\\-1&1&-1\\0&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\2&4\end{vmatrix}=10\neq0$, а миноров 4-го порядка она не имеет. ◄

Пример 5.2. Найти $\operatorname{rang} A$, если $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-1&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}$.

► $\exists M_2=\begin{vmatrix}1&0\\3&-1\end{vmatrix}=-1\neq0\Rightarrow\operatorname{rang}A\ge2.$ Данная матрица имеет только один минор третьего порядка $M_3=\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&-1&0\\4&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&-1&3\\0&-1&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\operatorname{rang}A=2$. ◄

Теорема 5.1. Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

►В самом деле, рассмотрим минор, составленный из элементов, находящихся на пересечении ненулевых строк данной матрицы и столбцов, выбранных так, чтобы получить треугольный определитель. Этот минор отличен от нуля, ибо на его главной диагонали находятся элементы, не равные нулю (пример 3.2, глава 1). Порядок этого минора равен числу ненулевых строк, а миноры более высоких порядков всегда либо содержат нулевые строки и, следовательно, они равны нулю, либо не существуют.◄

Пример 5.3. Найти $\operatorname{rang} A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

► Матрица A – ступенчатая (см. определение 1.6, гл.1), у нее три ненулевые строки, поэтому её ранг, в силу теоремы 5.1, равен 3. ◄

Теорема 5.2. При элементарных преобразованиях над матрицей ранг не изменяется, т. е. ранг полученной матрицы равен рангу исходной.

Доказательство см., например, в [3].

Теоремы 5.2 и 5.1 положены в основу вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований, при этом матрицу A преобразуют к ступенчатой форме A_1. Такая операция всегда возможна согласно теореме 1.2 главы 1. Ранг A_1 определяется по теореме 5.1, а ранг матрицы A получают из равенства:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1.$$

Пример 5.4. Методом элементарных преобразований найти $\operatorname{rang} A$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

►Выполним следующие элементарные преобразования:

1) переставим 1-ую и 2-ую строки, после чего из 4-ой строки вычтем 1-ую, а из

2-ой – 1-ую, умноженную на 2, получим

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix};$$

2) переставим 2-ую и 3-тью строки, затем из 3-тьей строки вычтем 2-рую, умноженную на 2, в полученной матрице переставим 3-тью и 4-ую строки:

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2\end{pmatrix};$$

3) из 4-ой строки вычтем 3-тью, умноженную на 2,

$$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку A_1 – ступенчатая матрица, имеющая три ненулевых строки, то по теореме 5.1 rang A_1=3. Но тогда и rang A= rang A_1=3.◄

Понятие ранга матрицы применяется в теории систем линейных алгебраических уравнений и в других разделах математики.