§ 6. Ротор (вихрь) векторного поля

<u>Определение 1</u> (ротора векторного поля)

Пусть $\overline{a}\,(M)$ - векторное поле $\forall\, M \in A \subset R^3$.

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$.

Пусть $P, Q, R \in C^1\,(A)$.

Ротором векторного поля $\overline{a}\,(M)$ в точке M называется **вектор** $\overline{W}$:

$$rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{W} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot \bar{k}$$

<u>Замечание:</u>

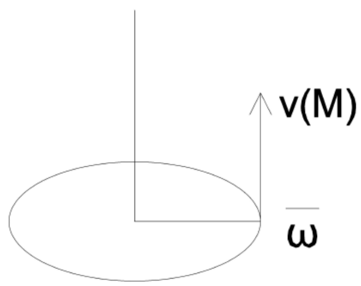
Если для некоторого векторного поля $rot\,\overline{a}\,(M) = \bar{0}\ \forall(\cdot) M \in A \subset R^3$, говорят, что векторное поле является *безвихревым*.

Физический смысл ротора

Пусть имеется ось, вокруг которой вращается твёрдое тело с угловой скоростью $\overline{\omega} = const = \{\omega_x; \omega_y; \omega_z\}$.

Пусть $\overline{\upsilon}(M)$ - линейная скорость твёрдого тела.

$\overline{\upsilon}(M) = \overline{\omega} \times \overline{r}$ ($\overline{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор точки M)



$$\overline{\upsilon}(M)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\underbrace{(z\omega_y-y\omega_z)}_{P}\cdot\bar{i}+\underbrace{(x\omega_z-z\omega_x)}_{Q}\cdot\bar{j}+\underbrace{(y\omega_x-x\omega_y)}_{R}\cdot\bar{k}$$

Тогда $rot\,\overline{\upsilon}(M)=(\omega_x-(-\omega_x))\cdot\bar{i}+(\omega_y-(-\omega_y))\cdot\bar{j}+(\omega_z-(-\omega_z))\cdot\bar{k}=2\overline{\omega}$

Следовательно, $rot\,\overline{\upsilon}(M)$ параллелен оси вращения и $|rot\,\overline{\upsilon}(M)|=2|\overline{\omega}|$,

т.е. с точностью до числового множителя ротор поля скоростей $rot\,\overline{\upsilon}(M)$

представляет собой мгновенную скорость вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Свойства ротора векторного поля

1) $rot\,\overline{a}(M)=\bar{0}\ \forall(\cdot)M\in A\subset R^3\Rightarrow\overline{a}(M)=\bar{c},\ где\ \bar{c}-$ постоянный вектор $\forall(\cdot)M\in A\subset R^3$.

2) $rot\,(\lambda\bar{a})=\lambda\cdot rot\bar{a}$, где $\lambda=const$

2) $rot\,(\lambda_1\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\overline{a_2}(M))=\lambda_1\cdot rot\,\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot rot\,\overline{a_2}(M),\ где\ \lambda_1,\lambda_2=const$

3) $rot\,(\varphi(M)\cdot\overline{a_1}(M))=grad\,\varphi(M)\times\overline{a}(M)+\varphi(M)\cdot rot\,\overline{a}(M)$ (доказать самостоятельно).

Векторная форма записи формулы Стокса

Пусть выполнены условия теоремы Стокса, тогда справедлива формула:

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot dxdy$$

С учетом введенных выше понятий, эту формулу можно записать следующим образом:

$$\oint_{\Gamma}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}=\iint_{\sigma}rot\,\overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)\cdot d\sigma$$

$$\oint_{\Gamma}\overline{a}(M)\cdot\overline{\tau_0}dl=\iint_{\sigma}\Pi p_{\overline{n_0}(M)}rot\,\overline{a}(M)\cdot d\sigma$$

Инвариантные определения ротора векторного поля.

Плотность циркуляции векторного поля

Пусть задано $\bar{a}(M)$ - векторное поле $\forall(\cdot)M \in A \subset R^3$.

Пусть плоскость P и $(\cdot)M \in P$.

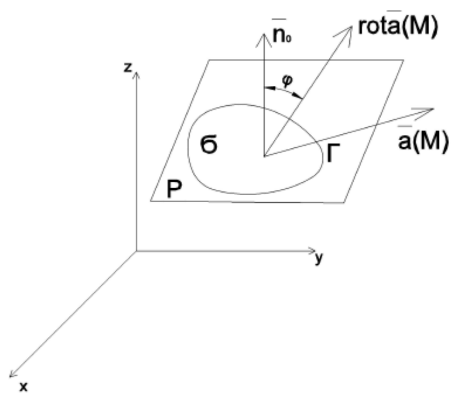
Пусть σ - плоская поверхность, лежащая в плоскости P.

Пусть Γ – замкнутый контур,ограничивающий плоскую поверхность σ

и точка $M \in \sigma$ и лежит внутри контура Γ

Пусть $\bar{n}_0$ – единичный вектор нормали к плоской поверхности σ.

Выбирем на контре Γ напрвление обхода, соответствующее теореме Стокса.



Тогда по теореме Стокса можно записать

$$\oint_{\Gamma} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = \iint_{\sigma} rot\,\bar{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) \cdot d\sigma = rot\,\bar{a}(M_1) \cdot \overline{n_0}(M_1) \cdot \mu\sigma$$

(последнее равенство получено по теореме о среднем значении поверхностного интеграла, где точка $M_1 \in \sigma$ и $\mu\sigma$ – площадь σ).

Таким образом, имеем:

$$\oint_{\Gamma} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = rot\,\bar{a}(M_1) \cdot \overline{n_0}(M_1) \cdot \mu\sigma$$

Разделим обе части последнего равенства на площадь ($\mu\sigma$) и перейдём к пределу при $diam\,\sigma \to 0$ u $M_1 \to M$:

$$\lim_{diam\sigma \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}}{\mu\sigma} = rot\,\bar{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) = \text{Пр}_{\bar{n}_0} rot\bar{a}(M),$$

где $\mu\sigma -$ площадь плоской поверхности σ с границей Γ и нормальным вектором $\bar{n}_0$.

<u>Определение (</u>плотности циркуляции векторного поля**)**

$\lim_{diam\sigma \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}}{\mu\sigma}$ - называется (удельной) плотностью циркуляции по кривой Г векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M_0.

<u>Обозначение:</u> $\Pi\left(\bar{a}(M); \overline{n_0}\right)$.

<u>Замечание 1:</u>

$\frac{\oint_{\Gamma} \bar{a}(M)d\bar{r}}{\mu\sigma} -$ называется средней плотностью циркуляции по кривой Г векторного поля $\bar{a}(M)$в точке М.

Замечание 2:

Если задано векторное поле $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, то плотность циркуляции в точке M_0 можно найти по формуле.

$$\Pi(\bar{a}(M_0);\ \bar{n}_0) = \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(M_0) & Q(M_0) & R(M_0) \end{vmatrix}$$

Определение 2 (инвариантное определение ротора векторного поля)

Ротором векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M называется вектор $\bar{W}$, проекция которого на любое направление $\bar{n}_0$ равна плотности циркуляции векторного поля.

Обозначение: $Пр_{\bar{n}_0}\bar{W} = \Pi(\bar{a}(M); \bar{n}_0)$ или

$$Пр_{\bar{n}_0} rot\, \bar{a}(M) = \lim_{diam\sigma \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}}{\mu\sigma}.$$

Замечание:

Из определения $rot\bar{a}(M)$ вытекает, что направление ротора – это напрвление вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность по сравнению с циркуляцией вокруг любого другого напрвления, т.е.

$\bar{W} \cdot \bar{n}_0 = |\bar{W}| \cdot |\bar{n}_0| cos\varphi \Longrightarrow$ плотность циркуляции равна $|\bar{W}(M_0)|$.

Определение 3 (инвариантное определение ротора векторного поля)

Ротором (вихрем) векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M называется вектор $\bar{W}$, в направлении которого плотность циркуляции векторного поля принимает максимальное значение (длина этого вектора численно равна максимальной плотности циркуляции).

Обозначение: $rot\bar{a}(M) = \bar{W}$, где $|\bar{W}| = \Pi(\bar{a}(M_0);\ \bar{W})$

§ 7. Соленоидальные, потенциальные и гармонические векторные поля

__Определение__ (соленоидальное поле)

Векторное поле $\overline{a}\,(M)$ для любой точки M, принадлежащей области A, в свою очередь являющейся частью R^3, называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля в точке M равна нулю для любой точки M, принадлежащей области A. (div $\overline{a}\,(M)$ =0 $\forall(\cdot)\, M \in A$)

Свойства соленоидальных полей

1) div $\overline{a}\,(M)$=0 $\Rightarrow$ поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю ($\Pi_\sigma\,\overline{a}\,(M)$=0);

2) div $\overline{a}\,(M)$=0 $\Rightarrow$существует некоторое поле $\overline{b}\,(M)$, такое что его ротор равен $\overline{a}\,(M)$ для любой точки M, принадлежащей области A ($\overline{a}\,(M)= \; rot\,\overline{b}\,(M)\ \forall(\cdot)\, M \in A$). Тогда вектор $\overline{b}$ называется *векторным потенциалом* поля $\overline{a}\,(M)$.

Замечания:

1) 1) и 2) могут быть использованы как определения соленоидального поля;
2) Векторный потенциал определяется неоднозначно. Это следует из свойства 2;
3) Пусть $\overline{a}\,(M)$ - произвольное векторное поле.

   Следовательно, $rot\,\overline{a}\,(M)$- соленоидальное поле, то есть $div\,rot\,\overline{a}\,(M)=0$.

Доказательство 3 свойства:

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$.

$$rot\,\overline{a}\,(M)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{P_1}\cdot \bar{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{Q_1}\cdot \bar{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{R_1}\cdot \bar{k} = \{P_1(M); Q_1(M); R_1(M)\}$$

Тогда $div\,rot\,\overline{a}\,(M)=\dfrac{\partial P_1}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_1}{\partial y}+\dfrac{\partial R_1}{\partial z}=\dfrac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}+\dfrac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}-\dfrac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}-\dfrac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}=0$