*§8. Сравнение бесконечно больших функций.

Для бесконечно больших функций можно ввести классификацию, подобную той, которая описана в определениях 6.1– 6.4.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$, где a может быть не только числом, но и одним из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 8.1. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ конечный и не равный нулю, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно большими одного порядка при $x \to a$. Если этот предел равен нулю, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой более низкого порядка роста по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, в этом случае принято обозначение $f(x) = o(g(x))$. Если данный предел бесконечен, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка роста по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, при этом $g(x) = o(f(x))$. Если $\nexists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются несравнимыми при $x \to a$.

Рассмотрим два многочлена: $P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$, при этом $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. В п.1 §5 рассмотрен предел отношения этих многочленов при $x \to \infty$ (см. (5.1)). В силу равенства (5.1) и определения 8.1, заключаем:

а) если $k = n$, то $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ – бесконечно большие одного порядка при $x \to \infty$;

б) если $k < n$, то $P_k(x)$ имеет более низкий порядок роста при $x \to \infty$, чем $Q_n(x)$, или $P_k(x) = o(Q_n(x))$ при $x \to \infty$;

в) если $k > n$, то $P_k(x)$ имеет более высокий порядок роста при $x \to \infty$, чем $Q_n(x)$.

Пример 8.1. Показать, что функция $f(x) = x^2(3 - \sin x)$ – бесконечно большая и несравнима с функцией $g(x) = x^2$ при $x \to +\infty$.

►Неравенство $2x^2 \le f(x) \le 4x^2$ верно для $\forall x \in \boldsymbol{R}$. Так как $2x^2 \to +\infty$, $4x^2 \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то функция $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ по теореме о сжатой функции (теорема 2.3), которая справедлива и для бесконечно больших функций. Поскольку не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}(3 - \sin x)$ (ибо не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, пример 1.3, замена $x = 1/u$), то функции $f(x)$ и $g(x)$ несравнимы при $x \to +\infty$ (определение 8.1).◄

Определение 8.2. Бесконечно большая функция $f(x)$ называется бесконечно большой k-го порядка роста по отношению к бесконечно большой функции $g(x)$ при $x \to a$, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g^k(x)} = C \neq 0, \infty$.

Пример 8.2. Определить порядок роста функции $f(x) = \dfrac{2x^3+5x}{7x-3}$ относительно функции $g(x) = x$ при $x \to \infty$.

► $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g^k(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x}{x^k(7x-3)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2+5x^{-2})}{x^{k+1}(7-3x^{-1})} = \dfrac{2}{7} \neq 0, \infty$ при $k = 2$, порядок роста функции $f(x)$ относительно $g(x)$ при $x \to \infty$ равен 2.◄

Определение 8.3. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно большими при $x \to a$.

Обозначение: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ эквивалентен его первому члену $a_0 x^n$ при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{a_0 x^n} = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \dfrac{a_1}{a_0}x^{-1} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_0}x^{1-n} + \dfrac{a_n}{a_0}x^{-n}) = 1$.

Замечание 8.1. Эквивалентные бесконечно большие функции – частный случай бесконечно больших одного порядка. Их свойства аналогичны свойствам эквивалентных бесконечно малых функций.

Пример 8.3. Показать, что функции $f(x) = \operatorname{ctg}\pi x$ и $g_1(x) = 1/(\pi(x-1))$, $f(x)$ и $g_2(x) = 1/(2\pi(\sqrt{x}-1))$ эквивалентны при $x \to 1$.

► $\dfrac{f(x)}{g_1(x)} = \pi(x-1)\operatorname{ctg}\pi x = \begin{vmatrix} x-1=y, \\ x=y+1 \end{vmatrix} = \pi y \operatorname{ctg}\pi(y+1) = \pi y \operatorname{ctg}\pi y = \dfrac{\pi y \cos\pi y}{\sin\pi y}$,

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\pi y\cos\pi y}{\sin\pi y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\pi y\cos\pi y}{\pi y} = 1$, поэтому функции $f(x)$ и $g_1(x)$ эквивалентны при $x \to 1$ по определению 8.3. Поскольку $\dfrac{f(x)}{g_2(x)} = 2\pi(\sqrt{x}-1)\operatorname{ctg}\pi x = \dfrac{2\pi(x-1)\operatorname{ctg}\pi x}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{f(x)}{g_1(x)}$, то $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g_2(x)} = 1$ и, следовательно, функции $f(x)$ и $g_2(x)$ также эквивалентны при $x \to 1$.◄

Определение 8.4. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, являющиеся бесконечно большими при $x \to a$. Функция $g(x)$ называется главной частью функции $f(x)$ при $x \to a$, если $f(x)$ при $x \to a$ можно представить в виде:

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \tag{8.1}$$

где $o(g(x))$ имеет смысл, описанный в определении 8.1.

Из (8.1) следует утверждение: “функция $g(x)$ есть главная часть бесконечно большой функции $f(x)$ при $x \to a$ в том и только том случае, если эти функции эквивалентны при $x \to a$”. Поэтому функция $f(x)$ может иметь несколько главных частей при $x \to a$. Так, функции $1/(\pi(x-1))$, $1/(2\pi(\sqrt{x}-1))$ – главные части $\operatorname{ctg}\pi x$ при $x \to 1$, ибо обе они эквивалентны

$\operatorname{ctg}\pi x$ при $x \to 1$ (пример 8.3).

Обычно главную часть функции, бесконечно большой при $x \to a$, находят в наиболее простом виде, например, в виде степенной функции $C(x-a)^{-k}$ при $a \in \boldsymbol{R}$ или Cx^k при $a = \infty$ ($k > 0$). Найти для функции $f(x)$ такую главную часть – значит определить константу C и порядок k этой функции относительно дроби $1/(x-a)$ или относительно x. Для $\operatorname{ctg}\pi x$ при $x \to 1$ главной частью указанного вида является функция $1/(\pi(x-1))$, при этом $C = 1/\pi$, $k = 1$, а для многочлена $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ при $x \to \infty$ – его первый член $a_0 x^n$.

Пример 8.4. Выделить главную часть вида Cx^k из бесконечно большой функции $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x}{7x-3}$ при $x \to \infty$.

► $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{Cx^k} = 1$ при $C = \dfrac{2}{7}$ и k = 2 (пример 8.2), поэтому $\dfrac{2x^2}{7}$ – главная часть функции $f(x)$ при $x \to \infty$.◄