Контрольные вопросы и задачи к разделу 12, глава 2

1. Дайте определение диаметра ограниченного множества точек. Чему равен диаметр: а) квадрата со стороной 2; б) равностороннего треугольника со стороной 2?

2. Интегрируема ли функция $1/(x-y)$ по квадрату $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$?

3. Не вычисляя интеграла $\iint\limits_D \ln(1-\sin(x+y))dxdy$, установите его знак, если $D=\{(x,y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le \pi/6\}$.

4. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ к повторному двумя способами, если: а) (D) – область, ограниченная линиями $y=3x^2$, $y=6-3x$;

б) (D) – трапеция с вершинами $(-1{,}4)$, $(5{,}4)$, $(1{,}1)$, $(4{,}1)$.

5. Измените порядок интегрирования в интеграле:

$\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2-2x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$ и.

6. Найдите среднее значение $f(x,y)=x+2y$ по прямоугольнику, ограниченному прямыми $x=1$, $y=2$ и осями координат.

7. Изобразите на плоскости *Oxy* образ фигуры $G'=\{(r,\varphi): 2 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le \pi/4\}$ при отображении $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Является ли это отображение взаимно однозначным?

8. Интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ с помощью подходящей замены переменных преобразовать к определённому, если область *D* ограничена гиперболами: $xy = 1$, $xy = 4$ и параболами $y^2 = x$, $y^2 = 2x$. *Указание*. Выполнить преобразование координат по формулам: $xy = u$, $y^2 = vx$.

9. Вычислите интеграл $\oint\limits_{\Gamma} xy^2dy - x^2ydx$, где Γ – окружность $x^2+y^2=a^2$, применяя формулу Грина.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $xy=4$, $x+y=5$;

б) $(x^2+y^2)=8xy$, $x^2+y^2=1$ ($x^2+y^2 \le 1$).

11. Найдите площадь конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

12. Найдите площадь части конической поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, вырезанной цилиндром $x^2=4z$.

13. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями $z=\ln(1+x^2+y^2)$,

$z = 0,\ x^2 + y^2 = 2$.

14. Найдите координаты центра тяжести однородной плоской пластины, ограниченной линиями $x + y = 4,\ x^2 = 2y$.

Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 12, глава 2

1. а) $2\sqrt{2}$; б) a. 2**.** нет, так как на прямой $x = y$ подынтегральная функция неограничена. 3**.** Интеграл имеет знак минус, так как подынтегральная функция отрицательна на области интегрирования.

4. а) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{3x^2}^{6-3x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{y/3}}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{12} dy \int\limits_{-\sqrt{y/3}}^{2-y/3} f(x,y)\,dx$. (см. рис.)

б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{(5-3x)/2}^{4} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1}^{4} dx \int\limits_{1}^{4} f(x,y)\,dy + \int\limits_{4}^{5} dx \int\limits_{3x-11}^{4} f(x,y)\,dy = \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{(5-2y)/3}^{(y+11)/3} f(x,y)\,dx$.

5. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{x} f(x,y)\,dx$. 6**. 5/2. 8.** $3\ln 2 \int\limits_{1}^{4} f(u)\,du$. 9**.** $\dfrac{\pi a^4}{2}$**. 11.** $\pi\sqrt{2}$.

12. $4\pi\sqrt{2}$**. 13.** $\pi(3\ln 3 - 2)$. 14**.** $(-1, \dfrac{16}{5})$.

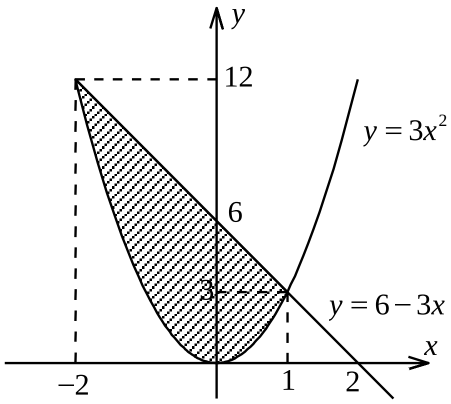

Рис. 1. К примеру 4а

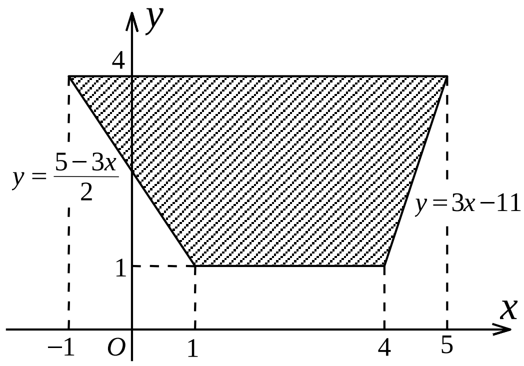

Рис. 2. К примеру 4б