§7. Использование степенных рядов в приближённых вычислениях

Степенные ряды находят применение к приближённым вычислениям значений функций, для этого используют первые члены разложения в ряд Тейлора. Кроме того, использование разложений функции в степенные ряды позволяет вычислять некоторые неберущиеся интегралы, а также решать дифференциальные уравнения.

Пример 7.1. Вычислить с точностью до $0{,}001$ интеграл $I=\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

► Используя разложение (6.4), имеем

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Данный ряд сходится при любых $x\in(-\infty,+\infty)$, следовательно, его можно почленно интегрировать по любому промежутку, например, по промежутку $[0,1]$. Таким образом, получим

$$I=\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=\int\limits_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^1\frac{x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Bigg|_0^1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1320}-\ldots\ .$$

Частичные суммы ряда имеют вид $s_1=1$, $s_2=\frac{2}{3}$, $s_3=\frac{23}{30}$, $s_4=\frac{312}{420}$, … . Ряд сходится к своему пределу довольно быстро: в силу признака Лейбница абсолютная величина разности между n-й частичной суммой и суммой ряда не превосходит $\frac{1}{n!(2n+1)}$, что уже при $n=5$ равно $\frac{1}{1320}$, следовательно, $I\approx\frac{312}{420}+\frac{1}{216}\approx 0{,}747$. ◄

Пример 7.2. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y''-y'=x, \qquad (7.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1)=1, \qquad (7.2)$$

$$y'(1)=0. \qquad (7.3)$$

► Допустим, что решение $y=f(x)$ существует и представимо в виде ряда Тейлора по степеням $x-1$:

$$y=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots\ .$$

Нам нужно найти $y(1)$, $y'(1)$, $y''(1)$, … . Но это можно сделать, исходя из уравнения (7.1) и условий (7.2) и (7.3).

Из условий (7.2) и (7.3) следует $y(1)=1$, $y'(1)=0$. Используя уравнение (7.1), получаем

$$y'' = x + y', \tag{7.4}$$

откуда, полагая $x = 1$, находим $y''(1) = 1 + y'(1) = 1$.

Дифференцируя обе части уравнения (7.4) по x, получаем

$$y'''(x) = 1 + y''(x), \tag{7.5}$$

и, следовательно, $y'''(1) = 1 + y''(1) = 2$. Дифференцируя соотношение (7.5) ещё раз по x, получим

$$y^{\mathrm{IV}}(x) = y'''(x), \tag{7.6}$$

откуда $y^{\mathrm{IV}}(1) = 2$. Из (7.6), последовательно дифференцируя по x, находим $y^{\mathrm{V}}(1) = y^{\mathrm{IV}}(1) = \ldots = 2$, и, следовательно,

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4 + \ldots\ . \tag{7.7}$$

Ряд (7.7) сходится, по признаку Даламбера, при всех x. Это и есть решение уравнения (7.1).