§2. Операция сложения векторов и её свойства

Действие сложения векторов вводится двумя эквивалентными способами: с помощью «правила треугольника» или «правила параллелограмма».

Определение 2.1 (*сложение векторов по правилу треугольника*)**.** Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 2.1).

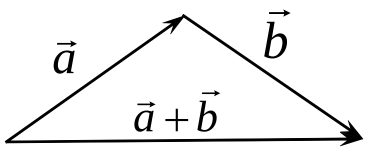

Рис. 2.1. Сложение векторов по правилу треугольника

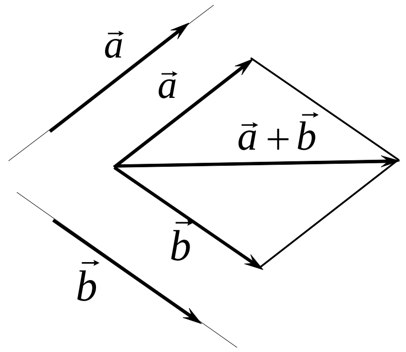

Рис. 2.2. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Определение 2.2 (*сложение двух неколлинеарных векторов по правилу параллелограмма*). Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В какой-либо точке строят векторы, равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Далее на этих векторах, как на сторонах, строят параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма, исходящая из общего начала данных векторов, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.2).

Оба рассмотренных правила сложения для неколлинеарных векторов эквивалентны, т.е. если вектор $\vec{a}+\vec{b}$ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в смысле определения 2.1, то он есть сумма этих векторов и в смысле определения 2.2. и наоборот (рис. 2.3).

Свойства операции сложения векторов

Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – произвольные векторы. Тогда

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативное или переместительное свойство).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативное или сочетательное свойство).
3. Существует единственный вектор, равный нуль-вектору $\vec{0}$, такой что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.
4. Для любого вектора $\vec{a}$ противоположный ему вектор $(-\vec{a})$ является единственным, для которого справедливо равенство $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

►Для доказательства свойств 1 и 2 достаточно сослаться на рис. 2.3 и 2.4, отдельно рассмотрев случай, когда векторы коллинеарны.

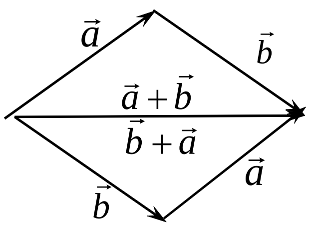

Рис. 2.3. Иллюстрация коммутативного свойства сложения векторов

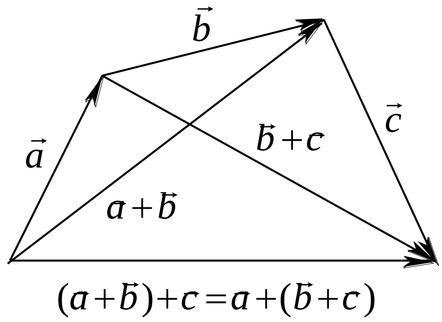

Рис. 2.4. Иллюстрация ассоциативного свойства сложения векторов

Справедливость равенства $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ (свойство 3) следует из определения 2.1. Остаётся показать, что нуль-вектор является единственным, для которого выполняется это равенство. Рассуждая от противного, предположим, что существует вектор $\vec{b}\neq\vec{0}$ такой, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$. Возьмём $\vec{a}=\vec{0}$, тогда $\vec{0}+\vec{b}=\vec{0}$ и $\vec{0}+\vec{b}=\vec{b}$, т.е. $\vec{b}=\vec{0}$, что противоречит предположению.

Равенство: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ из свойства 4 справедливо для любого вектора $\vec{a}$ в силу определения 2.1. Остаётся доказать, что вектор $(-\vec{a})$ является единственным, для которого оно выполняется. Рассуждая опять от противного, предположим, что существует вектор $\vec{b}\neq-\vec{a}$, такой, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Прибавим к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec{a})$, получим $\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{0}+(-\vec{a})$. Для правой части последнего равенства имеем: $\vec{0}+(-\vec{a})=-\vec{a}$. С другой стороны, его левую часть, в силу первых трёх свойств, можно записать в виде: $\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{b}+(\vec{a}+(-\vec{a}))=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$, что приводит к равенству $\vec{b}=-\vec{a}$. Полученное противоречие доказывает единственность вектора $(-\vec{a})$ и тем самым свойство 4 доказано.◄

Понятие суммы двух векторов с помощью метода математической индукции можно обобщить на случай сложения n векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, сумма которых $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$ определяется следующим образом: к концу первого вектора прикладывается начало второго вектора, к концу второго вектора – начало третьего и т. д. Тогда начало вектора $\vec{a}$ совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом последнего вектора (рис.2.5).

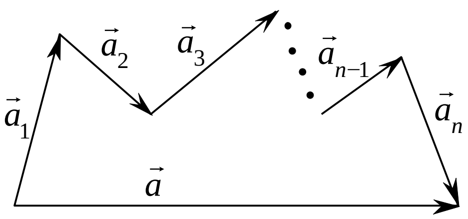

Рис. 2.5. Сложение векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$

Определение 2.3. *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (рис. 2.6). Обозначение: $\vec{a}-\vec{b}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой:

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

В самом деле,

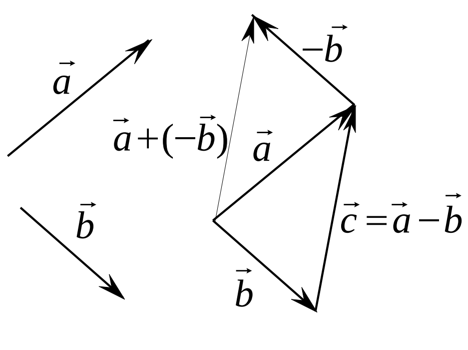

Рис. 2.6. Разность векторов

$$\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Существует единственный вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Действительно, предположим, что кроме $\vec{c}$ существует ещё один вектор $\vec{d}$ со свойством $\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}$. Тогда, с одной стороны, $(\vec{d}+\vec{b})+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}$, а с другой – $\vec{d}+\left(\vec{b}+(-\vec{b})\right)=\vec{d}+\vec{0}=\vec{d}$, т.е. $\vec{d}=\vec{c}$.

Непосредственно из определений 2.1 и 2.3 вытекает правило построения разности $\vec{a}-\vec{b}$: разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к общему началу, представляет собой вектор, идущий из конца вектора $\vec{b}$ (вычитаемого) в конец вектора $\vec{a}$ (уменьшаемого) (рис. 2.6).