§1. Многомерные арифметические пространства

Определение. ***Упорядоченная группа из m вещественных чисел $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется точкой m-мерного пространства; совокупность всевозможных таких точек образует m-мерное пространство. Если речь идёт о точке $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются её координатами. Точку, все координаты которой равны нулю, называют началом координат.***

Например, $X(x, y)$ – точка двумерного пространства, $X(x, y, z)$ – точка трёхмерного пространства.

Из аналитической геометрии известно, что в двумерном пространстве расстояние между точками $X(x, y)$ и $Y(a, b)$ определяется по формуле

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Множество точек $X(x, y)$, для которых $Ax + By + C = 0$, есть прямая линия. Множество точек, для которых $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, где a, b, R – постоянные, именуют *окружностью*, а множество точек, для которых $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$, называется *открытым кругом*. Открытый круг $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$ при $\delta > 0$ называют также δ-окрестностью точки (a, b).

Непрерывной кривой (или линией) в двумерном пространстве называют множество точек $X(x, y)$, координаты которых задаются как непрерывные функции вспомогательного параметра t, изменяющегося в некотором промежутке:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t).$$

В частности, если эти функции линейны, т. е.

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2,$$

линия будет прямой.

Аналогично, в трёхмерном пространстве расстояние между точками $X(x, y, z)$ и $Y(a, b, c)$ определяется по формуле

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Сферой называется множество точек, одинаково удаленных от данной точки, именуемой *центром*. Если $Y(a, b, c)$ – центр сферы, R – радиус сферы, а $X(x, y, z)$ – произвольная точка на сфере, то эта точка находится на сфере в том и только в том случае, когда $\rho(X, Y) = R$, т. е.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Последнее равенство называется *каноническим уравнением сферы*.

Множество точек $X=(x,y,z)$, для которых $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<R^2$, называется *открытым шаром*. Открытый шар $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<\delta^2$ при $\delta>0$ называют также δ-*окрестностью* точки (a,b,c).

Непрерывной кривой (или *линией*) в трёхмерном пространстве называют множество точек $X=(x,y,z)$, координаты которых задаются как непрерывные функции вспомогательного параметра t, изменяющегося в некотором промежутке:

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t),\quad z=\varphi_3(t).$$

В частности, если эти функции линейны, т. е.

$$x=a_1t+b_1,\quad y=a_2t+b_2,\quad z=a_3t+b_3,$$

линия является *прямой*.

В случае m-мерного пространства *расстоянием* между точками $X(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и $Y(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ называется (по аналогии с двумерным и трёхмерным случаями) число

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}\,. \tag{1.1}$$

Множество точек $X(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, для которых $A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_mx_m+A_{m+1}=0$, называется *гиперплоскостью* (или плоскостью в m-мерном пространстве).

Множество точек, для которых $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2=R^2$, называется m-*мерной сферой*, а множество точек, для которых $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2<R^2$, называется *открытым* m-*мерным шаром*. Открытый m-мерный шар $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2<\delta^2$ при $\delta>0$ называют также δ-*окрестностью* точки $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$.

Непрерывной кривой в m-мерном пространстве именуют множество точек $X(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, – координаты которых задаются как непрерывные функции вспомогательного параметра t, изменяющегося в некотором промежутке:

$$x_1=\varphi_1(t),\quad x_2=\varphi_2(t),\quad \ldots,\quad x_m=\varphi_m(t).$$

В частности, если эти функции линейны, т. е.

$$x_1=a_1t+b_1,\quad x_2=a_2t+b_2,\quad \ldots,\quad x_m=a_mt+b_m,$$

линия называется *прямой*.

Определение. ***m-мерное пространство с расстоянием, определяемым по формуле (1.1), называется m-мерным арифметическим пространством.***