Тема 10. Возведение в степень и извлечение корня

Формула для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, легко получить следующий результат: модуль произведения n комплексных чисел равен произведению модулей всех сомножителей, сумма аргументов всех сомножителей является аргументом произведения этих чисел. Таким образом, для любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ выполняется формула, которая называется *формулой Муавра*:

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Эта формула верна и для целых отрицательных чисел n. В частности, при $n = -1$ получим

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{r^0(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{-1}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]$$

Вычислить *а)* $\left(\dfrac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\cos 20^0 - i\sin 20^0}\right)^{20}$, *б)* $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{26}$

Решение

$a)$ $$\left[\frac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\cos 20^0 - i\sin 20^0}\right]^{20} = \left[\frac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\cos(-20^0) + i\sin(-20^0)}\right]^{20} = \left[\frac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^{-1}}\right]^{20} =$$

$$= \left[\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^2\right]^{20} = \left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^{40} = \cos 800^0 + i\sin 800^0 =$$

$$= \cos(80^0 + 720^0) + i\sin(80^0 + 720^0) = \cos 80^0 + i\sin 80^0 \bullet$$

$b)$ $$\left[\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)}{\sqrt{2}(1-i)}\right]^{26} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{26}\left[\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}\right]^{26} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{26}\left[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})\right]^{26} = 3^{13}\left[\cos(\frac{7}{12}\pi \cdot 26) + i\sin(\frac{7}{12}\pi \cdot 26)\right] =$$

$$= 3^{13}\left[\cos(14\pi + \frac{7}{6}\pi) + i\sin(14\pi + \frac{7}{6}\pi)\right] = 3^{13}\left[\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right] \bullet$$

- *Число z называется корнем степени n из w (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n = w$.*

Из определения следует, что каждое решение уравнения $z^n = w$ является корнем степени n из числа w. Если $w = 0$, то при любом n уравнение $z^n = w$ имеет единственный корень $z = 0$. Если $w \neq 0$ то и $z \neq 0$, а, следовательно, z и w можно представить в тригонометрической форме.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Тогда уравнение $z^n = w$ примет вид: $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Но два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, следовательно:

$$r^n = \rho \ , \qquad \varphi = \frac{\psi + 2\pi\kappa}{n} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, если корень степени n из w существуют, то он может быть вычислен по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi\kappa}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \qquad (11)$$

Легко видеть, что все числа z_k, получаемые при $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, различны. Если брать значение $k \geq n$, то других комплексных чисел, отличных от $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, не получится. Из (11) следует, что все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль, но разные аргументы, отличающиеся друг от друга на $\frac{2\pi\kappa}{n}$, где k — некоторое число. Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке O.

Найти все значения $\sqrt[3]{-64}$

Решение

Запишем число $w = -64$ в тригонометрической форме:

$$-64 = 64(cos\pi + i\ sin\pi)$$

Применяя формулу (11), получим:

$$z_k = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\kappa}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\kappa}{3}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Следовательно:

$$z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2(1+\sqrt{3}i)$$

$$z_1 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 2(1-\sqrt{3}i).$$

Точки, соответствующие числам z_k, расположены в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 4 с центром в точке O •

Найти все корни 5-й степени из $w = \dfrac{\sqrt{3} - i}{8 + 8i}$

Решение

Пусть $z = \sqrt[5]{w}$

$$|w| = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{64+64}} = \frac{1}{4\sqrt{2}},\ \arg w = \psi = \psi_1 - \psi_2,\ \text{где}\ \psi_1 = -\frac{\pi}{6},\ \ \psi_2 = \frac{\pi}{4}$$

(см. формулу (9))

$$\Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12},$$

$$\sqrt[5]{w} = \sqrt[5]{\frac{1}{(4\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \frac{-\frac{5\pi}{12} + 2\pi\kappa}{5},$$

$$z_k = \sqrt[5]{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\kappa}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\kappa}{5}\right)\right], \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Точки, соответствующие числам z_k, расположены в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке O •