maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Интенсивный курс
«Как найти производную?»

Данная методичка позволяет в кратчайшие сроки (буквально часы) ***научиться дифференцировать (находить производные)*** *функции одной переменной. Материал предназначен* ***для учащихся*** *средней школы* ***и студентов-заочников с начальным уровнем подготовки****.*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Как найти производную?

Или, что то же самое, **как взять производную?** Для прохождения этого интенсивного курса нам потребуются *Приложения* ***Горячие школьные формулы*** *и* ***Правила дифференцирования и таблица производных***. По возможности их лучше распечатать (особенно второе) и положить рядышком – чтобы справочные материалы постоянно были под рукой, перед глазами и в сердце =)

Есть? Приступим. У меня для вас есть **две новости**: хорошая и очень хорошая.

Хорошая новость состоит в следующем: чтобы научиться находить производные совсем не обязательно знать и понимать, что такое производная. И очень хорошая новость состоит в том, что научиться брать производные не так сложно – существует довольно чёткий алгоритм решения (и объяснения) этого задания. Интегралы или пределы, например, освоить труднее.

В рамках данной методички я не буду останавливаться на понятии производной, а попытаюсь в доступной форме, шаг за шагом, **научить вас находить** эти самые производные. Вся информация изложена подробно, простыми словами. Собственно, сразу рассмотрим пример:

Пример 1

Найти производную функции $y=\sqrt{x}$. И здесь нужно сделать ***немедленное замечание***: *функцию можно равноценно записать через* $f(x)=\sqrt{x}$*, однако, на практике чаще встречается «игрек», и поэтому я буду пользоваться буквой «игрек».*

Решение: $y'=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Это простейший пример, пожалуйста, найдите его в таблице производных. До сих пор не под рукой?! …Ай-яй-яй…, негоже пренебрегать рабочей таблицей!

Теперь посмотрим на решение и проанализируем, что же произошло? А произошла следующая вещь: у нас была функция $y=\sqrt{x}$, которая в результате решения превратилась в функцию $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Говоря совсем просто, **для того чтобы найти производную функции, нужно по определенным правилам превратить её в другую функцию**. Посмотрите еще раз на таблицу производных – там функции превращаются в другие функции. Единственным исключением является экспоненциальная функция $y=e^x$, которая превращается сама в себя.

Операция нахождения производной называется <u>дифференцированием</u>.

Обозначения: производную обозначают y', $f'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$

Вернемся к нашей таблице производных. Из данной таблицы желательно **запомнить наизусть**: правила дифференцирования и производные некоторых элементарных функций, особенно:

производную константы:
$(C)' = 0$, где C – постоянное число;

производную степенной функции:

$(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x)' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Зачем запоминать? Данные знания являются элементарными знаниями о производных. И если вы не сможете ответить преподавателю на вопрос «Чему равна производная числа?», то учеба в ВУЗе может для вас закончиться (лично знаком с двумя подобными случаями из жизни). Кроме того, это наиболее распространенные формулы, которыми приходится пользоваться практически каждый раз, когда мы сталкиваемся с производными.

В реальности простые табличные примеры – редкость, обычно при нахождении производных **сначала** используют правила дифференцирования, а **затем** – таблицу.

В этой связи переходим к рассмотрению **правил дифференцирования**:

1) Постоянное число можно (и нужно) вынести за знак производной

$(Cu)' = Cu'$, где C – постоянное число (константа)

Пример 2

Найти производную функции $y = 3\cos x$

Смотрим в таблицу производных. Производная косинуса там есть, но у нас $3\cos x$.

Решаем:

$y' = (3\cos x)'$

Самое время использовать правило, выносим постоянный множитель за знак производной:

$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)'$

А теперь превращаем наш косинус по таблице:

$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x)$

Ну и результат желательно немного «причесать» – ставим минус на первое место, заодно избавляясь от скобок:

$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x) = -3\sin x$

2) Производная суммы равна сумме производных

$$(u+v)'=u'+v'$$

! Напоминаю*, что разность всегда можно представить в виде суммы:* $u-v=u+(-v)$*, следовательно:* $(u-v)'=(u+(-v))'=u'+(-1\cdot v)'=u'-v'$ *(по Правилу 1)*

Данное правило, очевидно, справедливо не только для двух, но и для бОльшего количества слагаемых:

Пример 3

Найти производную функции $y=6+x+3x^2-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}-11ctgx$

Решаем. Как вы, наверное, уже заметили, **первое действие**, которое всегда выполняется при нахождении производной, состоит в том, что мы заключаем в скобки всё выражение и ставим штрих справа вверху:

$$y'=\left(6+x+3x^2-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-11ctgx\right)'$$

Применяем второе правило:

$$y'=\left(6+x+3x^2-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-11ctgx\right)'=$$
$$=(6)'+(x)'+(3x^2)'-(\sin x)'-\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)'+(x^{-2})'-(11ctgx)'$$

Обратите внимание, что для дифференцирования все корни, степени нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$, а если они находятся в знаменателе, то переместить их вверх. Как это сделать – рассмотрено в *Приложениях*.

Теперь вспоминаем о первом правиле дифференцирования – постоянные множители (числа) выносим за знак производной:

$$y'=\left(6+x+3x^2-\sin x-2\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-11ctgx\right)'=$$
$$=(6)'+(x)'+(3x^2)'-(\sin x)'-\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)'+(x^{-2})'-(11ctgx)'=$$
$$=(6)'+(x)'+3(x^2)'-(\sin x)'-2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+(x^{-2})'-11(ctgx)'$$

Обычно в ходе решения эти два правила применяют одновременно (чтобы не переписывать лишний раз длинное выражение).

Все функции, находящиеся под штрихами, являются элементарными табличными функциями, с помощью таблицы осуществляем превращение:

$$y' = \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx\right)' =$$

$$= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - (11ctgx)' =$$

$$= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - 11(ctgx)' =$$

$$= 0 + 1 + 3 \cdot 2x - \cos x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + (-2) \cdot x^{-3} - 11 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

Можно всё оставить в таком виде, так как штрихов больше нет, и производная найдена. Тем не менее, подобные выражения обычно упрощают:

$$\ldots = 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$$

Все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ желательно снова представить в виде корней, степени с отрицательными показателями – сбросить в знаменатель. Хотя этого можно и не делать, ошибкой не будет.

Пример 4

Найти производную функции $y = 5\ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + arctgx - \lg 20 \cdot 2^x + tg3$

Попробуйте решить данный пример самостоятельно.

3) Производная произведения функций

Вроде бы по аналогии напрашивается формула $(uv)' = u'v'$ …., но неожиданность состоит в том, что:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Эта необычное правило *(как, собственно, и другие)* следует из определения производной, но с теорией мы пока повременим – сейчас важнее научиться решать:

Пример 5

Найти производную функции $y = x^3 \arcsin x$

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от x. Сначала применяем наше странное правило, а затем превращаем функции по таблице производных:

$$y' = (x^3 \arcsin x)' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' =$$
$$= 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Сложно? Вовсе нет, вполне доступно даже для чайника.

Пример 6

Найти производную функции $y = (x^2 + 7x - 1)\log_3 x$

В данной функции содержится произведение двух функций – квадратного трехчлена $(x^2 + 7x - 1)$ и логарифма $\log_3 x$. Со школы мы помним, что умножение и деление имеют приоритет перед сложением и вычитанием.

Здесь всё так же. **СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения:

$$y' = ((x^2 + 7x - 1)\log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)'$$

Теперь для скобки $(x^2 + 7x - 1)'$ используем два первых правила:

$$y' = ((x^2 + 7x - 1)\log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' =$$
$$= ((x^2)' + 7(x)' - (1)')\log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)'$$

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных превращаем их в другие функции:

$$y' = ((x^2 + 7x - 1)\log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' =$$
$$= ((x^2)' + 7(x)' - (1)')\log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' =$$
$$= (2x + 7 \cdot 1 - 0)\log_3 x + (x^2 + 7x - 1) \cdot \frac{1}{x \ln 3} =$$
$$= (2x + 7)\log_3 x + \frac{(x^2 + 7x - 1)}{x \ln 3}$$

Готово.

При определенном опыте нахождения производных, простые производные вроде $(x^2 + 7x - 1)'$ не обязательно расписывать так подробно. Вообще, они обычно находятся в уме, и сразу записывается, что $(x^2 + 7x - 1)' = 2x + 7$.

Пример 7

Найти производную функции $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} \cos x$

Это пример для самостоятельного решения.

4) Производная частного

В потолке открылся люк, не пугайся, это глюк.

А вот это вот суровая действительность:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Пример 8

Найти производную функции $y = \dfrac{2(3x-4)}{x^2+1}$

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь…. С чего бы начать?! Есть сомнения, нет сомнений, но, **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа вверху ставим штрих:

$$y' = \left(\frac{2(3x-4)}{x^2+1}\right)'$$

Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:

$$y' = \left(\frac{2(3x-4)}{x^2+1}\right)' = 2\cdot\left(\frac{3x-4}{x^2+1}\right)'$$

Заодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.

Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{2(3x-4)}{x^2+1}\right)' = 2\cdot\left(\frac{3x-4}{x^2+1}\right)' =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{(3x-4)'(x^2+1)-(3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right)$$

Таким образом, наша страшная производная свелась к производным от двух простых скобок. Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, вы уже немного освоились в производных:

$$y' = \left(\frac{2(3x-4)}{x^2+1}\right)' = 2\cdot\left(\frac{3x-4}{x^2+1}\right)' =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{(3x-4)'(x^2+1)-(3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right) =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{3\cdot(x^2+1)-(3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right)$$

Штрихов больше нет, задание выполнено.

На практике обычно (но не всегда) ответ упрощают «школьными» методами:

$$\ldots = 2\cdot\left(\frac{3x^2+3-6x^2+8x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{2(-3x^2+8x+3)}{(x^2+1)^2}$$

Самостоятельно:

Пример 9

Найти производную функции $y = \dfrac{3^x+5}{\cos x}$

Время от времени встречаются хитрые задачки:

Пример 10

Найти производную функции $y = \dfrac{x^2+\sqrt{x}-3}{x}$

Смотрим на данную функцию. Здесь снова дробь. Однако перед тем как использовать правило дифференцирования частного (а его можно использовать), всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли упростить саму дробь, или вообще избавиться от нее?

Дело в том, что формула $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ достаточно громоздка, и применять ее совсем не хочется.

В данном случае можно почленно поделить числитель на знаменатель.

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{x^2+\sqrt{x}-3}{x} = x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x}$$

Ну вот, совсем другое дело, теперь дифференцировать просто и приятно:

$$y'=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}\right)'=(x)'+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'-3(x^{-1})'=$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}-3(-1)x^{-2}=1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}+\frac{3}{x^2}$$

Готово.

Пример 11

Найти производную функции $y=\frac{x}{e^{-x}}$

Здесь ситуация похожа, превратим нашу дробь в произведение, для этого поднимем экспоненту в числитель, сменив у показателя знак:

$$y=\frac{x}{e^{-x}}=xe^x$$

Произведение все-таки дифференцировать проще:

$$y'=(xe^x)'=(x)'e^x+x(e^x)'=1\cdot e^x+xe^x=e^x(x+1)$$

Вот и всё.

Пример 12

Найти производную функции $y=-\frac{arcctgx}{\sqrt[3]{x}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Поздравляю вас с первыми успехами!

Однако если что-то осталось недопонятым, то перечитайте материал ещё раз! Хотя проблемы здесь, как правило, бывают не с производными, а с алгебраическими действиями, в частности, с преобразованием степеней. В случае подобных затруднений следует немного освежить в памяти школьную программу.

Едем дальше:

2. Производная сложной функции

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в таблицу на правило (№5) дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u я буду называть **внешней функцией**, а функцию v – **внутренней (или вложенной) функцией**.

! Примечание*: данные определения не являются теоретическими и не должны фигурировать в чистовом оформлении заданий. Я применяю неформальные выражения «внешняя» функция и «внутренняя» функция только для того, чтобы вам легче было понять материал.*

Проясним ситуацию на конкретном примере:

Пример 13

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$$

В данном примере уже из этих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем двучлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x - 5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x - 5)$ понятно, что под синус вложен двучлен $3x - 5$. Но как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике, перелистываем страничку:

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ *(вместо единицы может быть любое число)*.

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно выполнить следующее действие: $3 \cdot 1 - 5 = -2$, поэтому двучлен $3x-5$ и есть внутренняя функция v:

$$y = \sin\underbrace{(3x-5)}_{v}$$

Во вторую очередь нужно найти $\sin(-2)$, поэтому синус – внешняя функция:

$$y = \underbrace{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Начинаем решать. Как мы помним из предыдущего параграфа, оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем выражение в скобки и ставим справа вверху штрих:

$$y' = (\sin(3x-5))'$$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса). Для этого смотрим в таблицу производных и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. Но это только цветочки! **Все табличные формулы применимы и в том случае, если «икс» заменить сложным выражением!**

В данном случае:

$$u'(v) = \cos(3x-5)$$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x-5$ не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно понятно, что $v' = (3x-5)'$.

Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в самое начало:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение своей рукой и еще раз прочитайте объяснения.

Разминаемся:

Пример 14

Найти производную функции $y=\cos 2x$

И продолжаем:

Пример 15

Найти производную функции $y=(2x+1)^5$

Как всегда записываем:
$$y' = ((2x+1)^5)'$$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x=1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2\cdot 1+1=3$, значит, двучлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y=(\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y=\underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$$

Снова подчёркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5\cdot(\underbrace{2x+1}_{\text{не меняется}})^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Готово. Теперь ваша очередь:

Пример 16

Найти производную функции $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^7}$

Решение и ответ в конце методички.

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

Пример 17

а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Есть? Тогда добавим оборотов. И «наворотов»:)

Пример 18

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15} = (x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$:

$$y' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 19

Найти производную функции $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Интересно отметить, что в последних примерах можно было использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но подобное решение смотрелось бы необычно. Вот ещё более характерный пример:

Пример 20

Найти производную функции $y = -\dfrac{1}{\cos x}$

Здесь можно применить формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции. Для этого поднимаем косинус наверх:

$$y = -\frac{1}{\cos x} = -\cos^{-1} x$$

Минус *(константу –1)* сразу выносим за знак производной:

$$y' = -(\cos^{-1} x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция.

Используем наше правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot \cos^{-2} x \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, а косинус сбрасываем обратно вниз:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot \cos^{-2} x \cdot (\cos x)' =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

Пример 21

Найти производную функции $y = \frac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения.

Как вы уже успели заметить, правило дифференцирования сложной функции очень часто применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования.

Пример 22

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u+v)' = u' + v'$ и заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)'$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции e^{3x}, $\sin 7x$. Несмотря на то, что этой простейшие из сложных функций (такой вот каламбур), я распишу их производные подробно. Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)' =$$
$$= -2(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot (3x)') + (2x - 4 + 0)\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)\cos 7x \cdot (7x)' =$$
$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x - 4)\sin 7x + 7(x^2 - 4x + 3)\cos 7x$$

Готово.

! Обратите внимание на приоритет (порядок) применения правил: <u>правило дифференцирования сложной функции применяется в последнюю очередь</u>.

<u>Пример 23</u>

Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 4} \cdot \ln(\sin\ x)$

Это пример для самостоятельного решения.

В ходе изучения математического анализа дифференцировать придется часто, и поэтому **крайне желательно научиться находить не очень трудные производные УСТНО**. Более того, во многих заданиях и не требуется подробная роспись – предполагается, что вместо длинной цепочки $(tg2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2 2x}$ студент сразу сможет записать, что $(tg2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$.

…Представьте, что в 3 часа ночи у вас раздался телефонный звонок, и приятный голос спросил: «Чему равна производная тангенса двух икс?». На это должен последовать почти мгновенный и вежливый ответ, что $(tg2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$! И как раз отработке этого навыка будет посвящён:

<u>Математический диктант</u>

Найти следующие производные <u>устно</u>, в одно действие, например: $(e^{2x})' = 2e^{2x}$. Очень хорошо, если у вас всё на бумаге – записывайте ответы прямо тут – справа:

$(\sqrt{1 - x^2})' =$

$((2 - x)^4)' =$

$\left(\frac{1}{2x + 1}\right)' =$

$(e^{\frac{x}{5}})' =$

$$\left(\left(\frac{x}{3}+4\right)^{10}\right)' =$$

$$\left(7^{\frac{1}{2}x^2}\right)' =$$

$$(\ln(x-x^2))' =$$

$$(\sin^2 x)' =$$

$$(\sin x^2)' =$$

$$(\cos(2x^2-x+1))' =$$

$$(tg\sqrt{x})' =$$

$$(ctg(3x+5))' =$$

$$(e^{\sin x})' =$$

$$(\sqrt{\log_3 x})' =$$

$$(\ln(arctgx))' =$$

$$(arctg(\ln x))' =$$

$$(2^{x^3+x-4})' =$$

$$(arctg4x)' =$$

$$(arcctg^4 x)' =$$

$$(\arcsin(2x^3))' =$$

$$(\arccos(3-5x))' =$$

Пожалуй, достаточно. Свериться с правильными ответами можно в конце методички. И ничего страшного, если где-то попутались – это быстро проходит =)

Теперь лучше сделать небольшой перерыв, чтобы с новыми силами приступить к изучению следующего параграфа.

3. Производная очень сложной функции :)

До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где как матрёшки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

Пример 24

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Для этого вспоминаем наш технический вспомогательный приём, а именно пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\boxed{\arcsin}^2 x}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin}^2 x}}$$

И, наконец, семёрку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin}^2 x}}$$

То есть, в данном примере у нас два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$. Единственное отличие – вместо «икс» у нас сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Как мы только что убедились, внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень.

Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» выражение:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Готово.

Пример 25

Найти производные следующих функций:

а) $y = \ln^2(2x-1)$

б) $y = \cos\sqrt{arctg(x^3)}$

Это пример для самостоятельного решения.

…ну как оно, сложно? Следует отметить, что сложность сложности рознь – **зачастую, то, что кажется сложным, вовсе не является таковым!** Давайте, наконец, сформулируем это **золотое правило**:

Перед тем, как находить производную, всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли как-нибудь упростить запись функции ещё ДО дифференцирования?

Зачем? Чтобы жить было легче:

Пример 26

Найти производную функции $y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}$

Изучаем нашу функцию. По первой оглядке, здесь нужно взять производную от корня, затем от 4-й степени, затем от синуса, и в последнюю очередь ещё и от дроби. Перспектива, так скажем, малоприятная. И поэтому зададимся вопросом, а нельзя ли записать функцию как-нибудь попроще?

Во-первых, можно преобразовать корень:

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right)$$ *(корень 5-й степени относится именно к синусу).*

И во-вторых, можно упростить начинку синуса, ибо использовать правило $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ как-то… да ну его. Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) = \sin^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

Таким образом, на поверку здесь оказалось не три, а всего лишь два вложения: под степень вложен синус, а под синус вложено выражение $\left(1-\frac{3}{x}\right)$. Найдем производную, используя правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ два раза:

$$y' = \left(\sin^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)' = \frac{4}{5}\cdot\sin^{-\frac{1}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)' =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\cdot\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)' = \frac{4\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)}{5\cdot\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\cdot\left(0+\frac{3}{x^2}\right) = \frac{12\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)}{5x^2\cdot\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}$$

Ну и для красоты можно восстановить первоначальный марафет:

$$\ldots = \frac{12\cos\left(\frac{x-3}{x}\right)}{5x^2\cdot\sqrt[5]{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}}$$

Готово.

Следующая интересность для самостоятельного разбора:

Пример 27

Найти дифференциал функции $y = \sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}$

Готовы? Тогда без комплексов и страхов переходим к следующим примерам:

Пример 28

Найти производную функции $y=\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}$

Нет-нет-нет, я вовсе не изверг, такие штуки реально встречаются на практике, и более того, их любят предлагать на зачётах и экзаменах, в том числе студентам-заочникам! И поэтому я не рекомендую вам пропускать ближайшие примеры.

Как уже отмечалось, при нахождении производной сложной функции, прежде всего, необходимо **правильно** РАЗОБРАТЬСЯ во вложениях. В тех случаях, когда есть сомнения, берём подопытное значение «икс», например, $x=1$ и пробуем (мысленно или на черновике) подставить данное значение в «страшное выражение».

1) Сначала нам нужно вычислить выражение $1+\sqrt{1}=2$, значит, сумма $(x+\sqrt{x})$ – самое глубокое вложение.

2) Затем необходимо вычислить логарифм: $\ln 2$

3) Далее косинус: $\cos(\ln 2)$

4) Потом косинус возвести в куб: $\cos^3(\ln 2)$

5) На пятом шаге – разность: $3-\cos^3(\ln 2)$

6) И, наконец, самая внешняя функция – это квадратный корень: $\sqrt{3-\cos^3(\ln 2)}$

Формула дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ применятся в обратном порядке, от самой внешней функции, до самой внутренней. Сначала полное решение, затем комментарии:

$$y'=\left(\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}\right)'\overset{(1)}{=}\frac{1}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}}\cdot(3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x})))'\overset{(2)}{=}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}}\cdot((3)'-(\cos^3(\ln(x+\sqrt{x})))')\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}}\cdot(0-3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot(\cos(\ln(x+\sqrt{x})))')\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{-3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot(-\sin(\ln(x+\sqrt{x})))\cdot(\ln(x+\sqrt{x}))'}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot\sin(\ln(x+\sqrt{x}))}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot(x+\sqrt{x})'\overset{(6)}{=}$$

$$=\frac{3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot\sin(\ln(x+\sqrt{x}))}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

(1) Берем производную от квадратного корня.

(2) Берем производную от разности, используя правило $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) Производная тройки равна нулю. Во втором слагаемом берем производную от степени (куба).

(4) Берем производную от косинуса.

(5) Берем производную от логарифма.

(6) И, наконец, берем производную от самого глубокого вложения $(x + \sqrt{x})$.

Вроде без ошибок….

Самостоятельно:

Пример 29

Найти производную функции $y = 5x^2 + xarctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})$

***Подсказка**: в первую очередь используем свойство линейности, затем правило дифференцирования произведения*

Настало время перейти к чему-нибудь более компактному и симпатичному.
Не редка ситуация, когда в примере дано произведение не двух, и трёх функций. Как найти производную от произведения трёх множителей?

Пример 30

Найти производную функции $y = x^2 e^{3-2x} \log_2 x$

Сначала смотрим, а нельзя ли произведение трех функций превратить в произведение двух функций? Например, если бы у нас в произведении было два многочлена, то можно было бы раскрыть скобки. Но в рассматриваемом примере все функции разные: степень, экспонента и логарифм.

В таких случаях нужно **последовательно** применить правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$ **два раза**.

Фокус состоит в том, что за «у» мы обозначим произведение двух функций: $u = x^2 e^{3-2x}$, а за «вэ» – логарифм: $v = \log_2 x$. Почему так можно сделать? А разве $(x^2 e^{3-2x}) \cdot \log_2 x$ – это не произведение двух множителей и правило не работает?! Ничего сложного нет:

$$y' = (x^2 e^{3-2x} \cdot \log_2 x)' = (x^2 e^{3-2x})' \cdot \log_2 x + x^2 e^{3-2x} \cdot (\log_2 x)'$$

Теперь осталось применить правило $(uv)' = u'v + uv'$ к скобке $(x^2e^{3-2x})'$:

$$y' = (x^2e^{3-2x} \cdot \log_2 x)' = (x^2e^{3-2x})' \cdot \log_2 x + x^2e^{3-2x} \cdot (\log_2 x)' =$$
$$= ((x^2)'e^{3-2x} + x^2(e^{3-2x})') \cdot \log_2 x + x^2e^{3-2x} \cdot \frac{1}{x\ln 2} = (2xe^{3-2x} - 2x^2e^{3-2x}) \cdot \log_2 x + \frac{xe^{3-2x}}{\ln 2}$$

Ответ лучше оставить именно в таком виде – легче будет проверять.

Данный пример можно решить вторым способом:

$$y' = (x^2 \cdot e^{3-2x} \log_2 x)' = (x^2)' \cdot e^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot (e^{3-2x} \log_2 x)' =$$
$$= 2xe^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot ((e^{3-2x})' \log_2 x + e^{3-2x} (\log_2 x)') =$$
$$= 2xe^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot \left(-2e^{3-2x} \log_2 x + \frac{e^{3-2x}}{x\ln 2} \right)$$

Следует отметить, что этот путь совершенно равноценен в плане правильности решения, разница здесь может быть только в простоте, и, разумеется, во вкусе – кому как удобнее, кому как нравится.

Пример 31

Найти производную функции $y = (x+1) \cdot \sqrt{x^3 + 2} \cdot (2x^2 - 1)$

Это пример для самостоятельного решения, в образце он решен первым способом.

Рассмотрим аналогичные примеры с дробями.

Пример 32

Найти производную функции $y = \dfrac{x\cos x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}}$

Здесь можно пойти несколькими путями:

$$y' = \left(x \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} \right)' = (x)' \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} + x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} \right)'$$

или так:

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} \cdot \cos x \right)' = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} \right)' \cdot \cos x + \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} \cdot (\cos x)'$$

Но решение запишется более компактно, если в первую очередь использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, приняв за u весь числитель:

$$y' = \left(\frac{x\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\right)' = \frac{(x\cos x)'\cdot\sqrt[3]{x^3+3x+1} - x\cos x\cdot((x^3+3x+1)^{\frac{1}{3}})'}{(\sqrt[3]{x^3+3x+1})^2} =$$

$$= \frac{((x)'\cos x + x(\cos x)')\cdot\sqrt[3]{x^3+3x+1} - x\cos x\cdot\dfrac{1}{3}(x^3+3x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^3+3x+1)'}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} =$$

$$= \frac{(\cos x - x\sin x)\cdot\sqrt[3]{x^3+3x+1} - \dfrac{x\cos x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}}\cdot(3x^2+3)}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}}$$

В принципе, пример решён, и если ответ оставить в таком виде, то это не будет ошибкой. Но при наличии времени всегда желательно проверить на черновике, а нельзя ли его упростить?

$$\ldots = \frac{(\cos x - x\sin x)\cdot\sqrt[3]{x^3+3x+1} - \dfrac{x(x^2+1)\cos x}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(\cos x - x\sin x)\cdot(x^3+3x+1) - x(x^2+1)\cos x}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} =$$

$$= \frac{(\cos x - x\sin x)\cdot(x^3+3x+1) - x(x^2+1)\cos x}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^4}}$$

Минус дополнительных упрощений состоит в том, что есть риск допустить ошибку уже не при нахождении производной, а при банальных «школьных» преобразованиях. В частности, следует очень внимательно (и аккуратно!) разбираться с трёхэтажной дробью *(см. Приложение* ***Горячие школьные формулы****).*

С другой стороны, преподаватели нередко бракуют задание и просят «довести до ума» производную. В результате, чего, кстати, может получиться и «конфетка».

Такая вот дилемма.

Более простой пример для самостоятельного решения:

Пример 33

Найти производную функции $y = \dfrac{x^2\ln x}{x-2}$

Продолжаем осваивать приёмы нахождения производной, и сейчас мы рассмотрим типовой случай, когда для дифференцирования предложен «страшный» логарифм:

Пример 34

Найти производную функции $y=\ln\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}$

Тут можно пойти длинным путём, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$y'=\left(\ln\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}\right)'$$

Но первый же шаг сразу повергает в уныние – предстоит взять неприятную производную от дробной степени $\frac{1}{5}$, а потом ещё и от дроби $\frac{1-x}{1+x}$.

Поэтому **перед тем** как брать производную от «навороченного» логарифма, его предварительно упрощают, используя известные школьные свойства; ввиду важности и актуальности выпишу их из *Приложения* ***Горячие школьные формулы***:

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$

$$\ln a^{b}=b\ln a$$

Совершенно понятно, что функцию выгодно преобразовать:

$$y=\ln\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{5}(\ln(1-x)-\ln(1+x))$$

Вот теперь находим производную:

$$y'=\left(\frac{1}{5}(\ln(1-x)-\ln(1+x))\right)'=\frac{1}{5}((\ln(1-x))'-(\ln(1+x))')=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)'-\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{-2}{(1-x^{2})}\right)=\frac{2}{5(x^{2}-1)}$$

Как видите, предварительное преобразование самой функции значительно упростило решение. Таким образом, когда для дифференцирования предложен подобный логарифм, то его всегда целесообразно «развалить».

И это уже даже не золотое, а дважды платиновое правило =)

А сейчас пара несложных примеров для самостоятельного решения:

Пример 35

Найти производную функции $y = \ln\sqrt{x^2 + 3x}$

Пример 36

Найти производную функции $y = \ln\dfrac{x^2 + 4}{\sqrt[3]{x-1}}$

Успехов!

4. Логарифмическая производная

Если производная от логарифмов – это такая сладкая музыка, то возникает вопрос, а нельзя ли в некоторых случаях организовать логарифм искусственно?

Можно! И даже нужно:

Пример 37

Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

Похожие примеры мы недавно рассмотрели. Что делать? Можно последовательно применить правило дифференцирования частного, а потом правило дифференцирования произведения. Недостаток способа состоит в том, что получится огромная трехэтажная дробь, с которой совсем не хочется иметь дела.

Но в теории и практике есть такая замечательная вещь, как логарифмическая производная. Логарифмы можно организовать искусственно, «навесив» их на обе части:

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

Теперь нужно максимально «развалить» логарифм правой части (формулы перед глазами?). Я распишу этот процесс очень подробно:

$$\ln y = \ln\sqrt[5]{(x+4)^3} - \ln((x-1)^2(x+3)^5)$$

$$\ln y = \ln(x+4)^{\frac{3}{5}} - (\ln(x-1)^2 + \ln(x+3)^5)$$

$$\ln y = \frac{3}{5}\ln(x+4) - (2\ln(x-1) + 5\ln(x+3))$$

$$\ln y = \frac{3}{5}\ln(x+4) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)$$

Собственно приступаем к дифференцированию.

Заключаем под штрих обе части:

$$(\ln y)' = \left(\frac{3}{5}\ln(x+4) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)\right)'$$

Производная правой части достаточно простая, её я комментировать не буду, поскольку если вы читаете этот текст, то должны уверенно с ней справиться.

Как быть с левой частью?

В левой части у нас **сложная функция**. Предвижу вопрос: «Почему, там же одна буковка «игрек» под логарифмом?».

Дело в том, что эта «одна буковка игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Поэтому логарифм – это внешняя функция, а «игрек» – внутренняя функция. И здесь мы используем то же самое правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3}{5}(\ln(x+4))' - 2(\ln(x-1))' - 5(\ln(x+3))'$$

В левой части как по мановению волшебной палочки у нас «нарисовалась» производная y'. Далее по правилу пропорции перекидываем «игрек» из знаменателя левой части наверх правой части:

$$y' = \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x+3)}\right) \cdot y$$

А теперь вспоминаем, о каком таком «игреке»-функции мы рассуждали при дифференцировании? Смотрим на условие: $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

Окончательный ответ:

$$y' = \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x+3)}\right) \cdot \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

Пример 38

Найти производную функции $y = x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

Это пример для самостоятельного решения. Примерный образец чистового оформления задания в конце методички.

С помощью логарифмической производной можно решить любой из примеров №№30-33 *(ссылки живые)*, другое дело, что там функции проще, и, скорее всего, использование логарифмической производной не слишком-то и оправдано.

Производная степенно-показательной функции

Данную функцию мы еще не рассматривали. Степенно-показательная функция – это функция, у которой **и степень и основание зависят от «икс»**. Классический пример, который вам приведут в любом учебнике или на любой лекции:

$$y = x^x$$

Как найти производную от степенно-показательной функции?

Необходимо использовать только что рассмотренный приём – логарифмическую производную. Навешиваем логарифмы на обе части:

$$\ln y = \ln x^x$$

Как правило, в правой части из-под логарифма выносится степень:

$$\ln y = x \ln x$$

В результате в правой части у нас получилось произведение двух функций, которое будет дифференцироваться по стандартной формуле $(uv)' = u'v + uv'$.

Находим производную, для этого заключаем обе части под штрихи:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

Дальнейшие действия прозрачны:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \ln x + x(\ln x)'$$

Окончательно:

$$y' = \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot y = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

Если какое-то преобразование не совсем понятно, пожалуйста, внимательно перечитайте объяснения Примера №37.

В практических заданиях степенно-показательная функция само собой будет сложнее, чем рассмотренный лекционный пример:

Пример 39

Найти производную функции $y = (\ln x)^{3x}$

Выполняем стандартное действие:

$$\ln y = \ln(\ln x)^{3x}$$
$$\ln y = 3x\ln\ln x$$

В правой части у нас константа и произведение двух множителей – «икса» и «логарифма логарифма икс» (в логарифм вложен еще один логарифм). При дифференцировании константу, как мы помним, лучше сразу вынести за знак производной, чтобы она не мешалась под ногами; после чего применяем знакомое правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$(\ln y)' = (3x\ln\ln x)'$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = 3((x)'\ln\ln x + x(\ln\ln x)')$$

И как обычно, отправляем «игрек» наверх:

$$y' = 3\left(\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'\right)\cdot y = 3\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\cdot(\ln x)^{3x}$$

Как видите, алгоритм применения логарифмической производной не содержит в себе каких-то особых хитростей или уловок, и нахождение производной степенно-показательной функции обычно не связано с «мучениями».

Заключительные примеры параграфа предназначены для самостоятельного решения.

Пример 40

Найти производную функции $y = x^{2x^2}$

Пример 41

Найти производную функции $y = (x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}}$

…Ну что же, после таких героических усилий пришло время сбавить обороты:

5. Производные второго и более высоких порядков

На самом деле здесь тоже есть трудные примеры, но я ограничусь достаточно простыми заданиями – чтобы у вас было **само понимание**, как находить вторую, третью, четвёртую, … и т.д. производные.

Начнём с производной второго порядка. Всё очень просто. Вторая производная – это **производная от первой производной**: $(y')'$

Распространённые обозначения второй производной:

y'', $f''(x)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (дробь читается так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»).

Чаще всего вторую производную обозначают первыми двумя вариантами. Но третий вариант тоже встречается, причем, его очень любят включать в условия контрольных заданий, например: «Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции…». А студент сидит и битый час чешет репу, что это вообще такое.

Рассмотрим простейший пример. Найдем вторую производную от функции $y = 2x - 1$.

Для того чтобы найти вторую производную, как многие догадались, нужно сначала найти первую производную:

$$y' = (2x-1)' = 2$$

Теперь находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = (2)' = 0$$

Готово.

Рассмотрим более содержательные примеры.

Пример 42

Найти вторую производную функции $y = \sin^2 \dfrac{x}{3}$

Найдем первую производную:

$$y' = \left(\sin^2 \frac{x}{3}\right)' = 2\sin\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}\right)' = 2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{2}{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$$

Теперь нам предстоит дифференцировать произведение двух функций, но мы избавимся от этой неприятности *(золотое правило!)*, применив известную тригонометрическую формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Точнее говоря, использовать формулу будем в обратном направлении: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, в данном случае $\alpha = \frac{x}{3}$:

$$y' = \frac{2}{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3} = \frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}$$

Находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{2x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cos\frac{2x}{3}\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{9}\cos\frac{2x}{3}$$

Готово.

Можно было пойти другим путём – понизить степень функции еще перед дифференцированием, используя формулу $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$:

$$y = \sin^2\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2x}{3}\right)$$

Для интереса возьмите первую и вторую производные снова. Результаты, естественно, должны совпасть.

Формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ **запишите, зазубрите, запомните!**

Для самостоятельного решения:

Пример 43

Найти вторую производную функции $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

На каждом шаге смотрим, нельзя ли что-нибудь упростить!

Наверное, многим уже понятно, что такое третья, четвёртая, пятая и т.д. производная.

Найдём третью производную, например, в Примере 42. Для этого нужно взять производную от второй производной:

$$y''' = (y'')' = \frac{2}{9}\left(\cos\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{9}\cdot\left(-\sin\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)' =$$
$$= -\frac{2}{9}\sin\frac{2x}{3}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{4}{27}\sin\frac{2x}{3}$$

Вот и всё! …всё только начинается =):

Распишем каноничный пример с многочленом:
$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

Найдём первую производную этой функции:
$y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 4x + 3$

И вторую:
$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 3)' = 6x + 4$

Третья производная – есть производная от 2-й производной:
$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$

Четвёртная производная – это производная от 3-й производной:
$y^{IV} = (y''')' = (6)' = 0$

Пятая производная: $y^{V} = (y^{IV})' = (0)' = 0$, и очевидно, что все производные более высоких порядков тоже будут равны нулю:
$y^{VI} = y^{VII} = y^{VIII} = y^{IX} = y^{X} = ... = 0$

Помимо римской нумерации на практике часто используют следующие **обозначения**:
$y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}, ...$, производную же энного порядка обозначают через $y^{(n)}$. **При этом надстрочный индекс нужно обязательно заключать в скобки** – чтобы отличать производную от «игрека» в степени.

Иногда встречается такая запись: $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}, ...$ – третья, четвёртая, пятая, …, энная производные соответственно.

Вперёд без страха и сомнений:

Пример 44

Дана функция $y = e^{3x}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение: что тут попишешь… – вперёд за четвёртой производной:)

$$y' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

$$y'' = (y')' = (3e^{3x})' = 3(e^{3x})' = 3e^{3x} \cdot 3 = 3^2 e^{3x}$$

$$y''' = (y'')' = (3^2 e^{3x})' = 3^2 e^{3x} \cdot 3 = 3^3 e^{3x}$$

Четыре штриха ставить уже не принято, поэтому переходим на числовые индексы:

$$y^{(4)} = (y''')' = (3^3 e^{3x})' = 3^3 e^{3x} \cdot 3 = 3^4 e^{3x}$$

Ответ: $y^{(4)} = 3^4 e^{3x}$

Хорошо, а теперь задумаемся над таким вопросом: что делать, если по условию требуется найти не 4-ю, а например, 20-ю производную? Если для 3-4-5-й производной решение оформляется достаточно быстро, то до производных более высоких порядков мы «доберёмся» ой как не скоро. Не записывать же, в самом деле, 20 строк!

В подобной ситуации нужно **проанализировать несколько найдённых производных, увидеть закономерность и составить формулу энной производной**. Так, в рассмотренном примере легко увидеть, что при каждом следующем дифференцировании перед экспонентой будет «выскакивать» дополнительная «тройка», причём на любом шаге степень «тройки» равна номеру производной, следовательно:

$y^{(n)}=3^n e^{3x}$, где n – произвольное натуральное число.

И действительно, если $n=1$, то получается в точности 1-я производная: $y'=3^1e^{3x}=3e^{3x}$, если $n=2$ – то 2-я: $y''=3^2e^{3x}$ и т.д. Таким образом, двадцатая производная определяется мгновенно: $y^{(20)}=3^{20}e^{3x}$ – и никаких «километровых простыней»!

Решаем самостоятельно:

Пример 45

Найти $y^{(5)}$ функции $y=5^x$. Записать производную n-го порядка

После бодрящей разминки рассмотрим более сложные примеры, в которых отработаем вышеприведённый алгоритм решения:

Пример 46

Найти $y^{(10)}$ для функции $y=\ln(2x-1)$.

Решение: чтобы прояснить ситуацию найдём несколько производных:

$y'=(\ln(2x-1))'=\dfrac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)'=\dfrac{1\cdot 2}{2x-1}$ – полученные наверху числа перемножать не спешим! ;-)

$$y''=\left(\frac{1\cdot 2}{2x-1}\right)'=1\cdot 2\cdot((2x-1)^{-1})'=-1\cdot 2\cdot(2x-1)^{-2}\cdot(2x-1)'=-\frac{1\cdot 2}{(2x-1)^2}\cdot 2=-\frac{1\cdot 2^2}{(2x-1)^2}$$

$$y'''=\left(-\frac{1\cdot 2^2}{(2x-1)^2}\right)'=-1\cdot 2^2\cdot((2x-1)^{-2})'=-1\cdot 2^2\cdot(-2)\cdot(2x-1)^{-3}\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 2^3}{(2x-1)^3}$$

$$y^{(4)}=\left(\frac{1\cdot 2\cdot 2^3}{(2x-1)^3}\right)'=1\cdot 2\cdot 2^3\cdot((2x-1)^{-3})'=1\cdot 2\cdot 2^3\cdot(-3)\cdot(2x-1)^{-4}\cdot 2=-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^4}{(2x-1)^4}$$

Пожалуй, хватит….

На следующем шаге лучше всего составить формулу «энной» производной *(коль скоро, условие этого не требует, то можно обойтись черновиком)*. Для этого **смотрим на полученные результаты и выявляем закономерность**, по которой получается каждая следующая производная.

Во-первых, они знакочередуются. Поскольку 1-я производная положительна, то в общую формулу войдёт «мигалка»: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot ...$. Подойдёт и эквивалентный вариант $(-1)^{n-1}$, но лично я, как оптимист, люблю знак «плюс» =)

Во-вторых, в числителе «накручивается» **факториал**, причём он «отстаёт» от номера производной на одну единицу: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot ...$

И, в-третьих, в числителе растёт степень «двойки», которая равна номеру производной. То же самое можно сказать о степени знаменателя. Окончательно:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 2^n}{(2x-1)^n}$$

В целях проверки подставим парочку значений «эн», например, $n = 3$ и $n = 4$:

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad y^{(3)} = \frac{(-1)^4 \cdot 2! \cdot 2^3}{(2x-1)^3} = \frac{2! \cdot 2^3}{(2x-1)^3};$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad y^{(4)} = \frac{(-1)^5 \cdot 3! \cdot 2^4}{(2x-1)^4} = -\frac{3! \cdot 2^4}{(2x-1)^4}.$$

***! Еще надёжнее** проверить все найденные производные, т.е. подставить 1 и 2*

Замечательно, теперь допустить ошибку – просто грех:

$$n = 10 \quad \Rightarrow \quad y^{(10)} = \frac{(-1)^{11} \cdot 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$$

Ответ: $y^{(10)} = -\dfrac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$

Повторюсь, что составлять энную производную здесь вовсе не обязательно, но она практически 100%-но убережёт от ошибки! Поэтому настоятельно рекомендую.

Более простая функция для самостоятельного решения:

Пример 47

Найти $y^{(20)}$ функции $y = \dfrac{1}{x-2}$.

И переходим к **важнейшему** параграфу:

6. Производная функции, заданной неявно

Или короче – производная неявной функции. Встречается часто и повсеместно. Начнём с традиционного вопроса: что это такое? И что такое вообще функция? Таки сформулирую:

Функция одной переменной $y = f(x)$ – это правило, по которому каждому значению независимой переменной x соответствует одно и только одно значение функции y.

Переменная x называется **независимой переменной** или **аргументом**.
Переменная y называется **зависимой переменной** или **функцией**.

Грубо говоря, буковка «игрек» в данном случае – и есть функция.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в *явном* виде. Что это значит? Устроим разбор полётов на конкретных примерах.

Рассмотрим функцию $y = 3x^4 + x^2 - 1$

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек» (функция), а справа – **«только иксы»**. То есть, функция y **в явном виде** выражена через независимую переменную x.

Рассмотрим другую функцию: $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Здесь переменные x и y расположены «вперемешку». Причём **никакими способами невозможно** выразить «игрек» в виде $y = f(x)$. Что это за способы? Перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, вынесение за скобки, перекидывание множителей по правилу пропорции и другие «школьные» методы. Перепишите равенство $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ на бумагу и попробуйте выразить «игрек» в явном виде: $y = \textit{всё зависит от } x$. Можно крутить-вертеть уравнение часами, но у вас этого не получится.

Разрешите познакомить: $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ – пример **неявной функции**.

В курсе математического анализа доказано, что неявная функция **существует** *(однако не всегда)*, у неё есть график *(точно так же, как и у «нормальной» функции)*. У неявной функции точно так же **существует** *(при определённых условиях)* первая производная, вторая производная и т.д. Как говорится, все права секс-меньшинств соблюдены. …Хотя, если задуматься, то это большинство =)

И на этом уроке мы научимся находить производную от функции, заданной неявно. Это не так сложно! Тем более что **все правила дифференцирования и таблица производных остаются в силе!** Разница будет в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим прямо сейчас.

Да, и сообщу хорошую новость – рассмотренные ниже задания выполняются по довольно жесткому и чёткому алгоритму:

Пример 48

Найти производную от функции, заданной неявно $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Поехали:

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:

$$(3x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$$

2) Используем правило линейности производной *(помним такое?)*:

$$3(x^2y^2)' - 5(x)' + (\sin y)' = 3(y)' - (1)'$$

3) Непосредственное дифференцирование.

Как дифференцировать $(x)'$ и $(1)'$ совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

$(y)'$ – просто до безобразия, *производная от функции равна её производной*: $(y)' = y'$.

Как дифференцировать $(\sin y)' = ?$

Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Потому что буковка «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ** (см. определение в начале параграфа). Таким образом, синус – внешняя функция, y – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$(\sin y)' = \cos y \cdot y' = y' \cos y$$

Произведение дифференцируем по обычному правилу $(uv)' = u'v + uv'$:

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)'$$

Обратите внимание, что $(y^2)'$ – тоже сложная функция, и вообще – **любой «игрек с наворотами» – это сложная функция**:

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:

$$3((x^2)'y^2 + x^2(y^2)') - 5 + \cos y \cdot y' = 3y' - 0$$
$$3(2xy^2 + x^2 \cdot 2yy') - 5 + y' \cos y = 3y'$$

Если есть скобки, то раскрываем их:

$$6xy^2 + 6x^2yy' - 5 + y' \cos y = 3y'$$

4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть переносим всё остальное:

$$6x^2yy' + y'\cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$$

5) В левой части выносим производную y' за скобки:

$$(6x^2y + \cos y - 3)y' = 5 - 6xy^2$$

6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

$$y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2y + \cos y - 3}$$

Производная найдена. Готово.

Интересно отметить, что в неявном виде можно переписать и «обычную» функцию. Например, функцию $y = 3x^4 + x^2 - 1$ можно переписать так: $1 - x^2 = 3x^4 - y$. И более того, продифференцировать её по только что рассмотренному алгоритму.

На самом деле фразы «функция, заданная в неявном виде» и «неявная функция» отличаются одним смысловым нюансом. Фраза «функция, заданная в неявном виде» более общая и корректная, $1 - x^2 = 3x^4 - y$ – эта функция задана в неявном виде, но здесь можно выразить «игрек» и представить функцию в явном виде. Под фразой «неявная функция» чаще понимают «классическую» неявную функцию, когда «игрек» выразить нельзя.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 49

Найти производную от функции, заданной неявно $3x^4y^5 + e^{7x-4y} = 4x^5 + 2y^4$

Навешиваем штрихи на обе части:

$$(3x^4y^5 + e^{7x-4y})' = (4x^5 + 2y^4)'$$

Используем свойство линейности:

$$3(x^4y^5)' + (e^{7x-4y})' = 4(x^5)' + 2(y^4)'$$

Находим производные:

$$3((x^4)'y^5 + x^4(y^5)') + e^{7x-4y} \cdot (7x - 4y)' = 4 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4y^3y'$$
$$3(4x^3y^5 + x^4 \cdot 5y^4y') + e^{7x-4y} \cdot (7 - 4y') = 20x^4 + 8y^3y'$$

Раскрываем все скобки:

$$12x^3y^5 + 15x^4y^4y' + 7e^{7x-4y} - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 + 8y^3y'$$

Переносим все слагаемые с y' в левую часть, остальное собираем в правой части:

$$15x^4y^4y' - 8y^3y' - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5$$

В левой части выносим y' за скобку:

$$(15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y})y' = 20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5$$

Окончательный ответ:

$$y' = \frac{20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5}{15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y}}$$

Пример 50

Найти производную от функции, заданной неявно $y\sin x = \cos(x-y)$

Это пример для самостоятельного решения.

Не редкость, когда после дифференцирования возникают дроби. В таких случаях от дробей нужно избавляться:

Пример 51

Найти производную от неявной функции $e^{xy} + \dfrac{y}{x} = \cos 3x$

Заключаем обе части под штрихи и используем свойство линейности:

$$\left(e^{xy} + \frac{y}{x}\right)' = (\cos 3x)'$$

$$(e^{xy})' + \left(\frac{y}{x}\right)' = (\cos 3x)'$$

Дифференцируем, используя правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ и правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$e^{xy}\cdot(xy)' + \frac{y'x - y(x)'}{x^2} = -\sin 3x\cdot(3x)'$$

$$e^{xy}\cdot((x)'y + xy') + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

$$e^{xy}\cdot(y + xy') + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

Раскрываем скобки:

$$ye^{xy}+xy'e^{xy}+\frac{y'x-y}{x^2}=-3\sin 3x$$

Теперь нам нужно избавиться от дроби. Это можно сделать и позже, но рациональнее сделать сразу же. В знаменателе дроби находится x^2. Умножаем обе части на x^2. Если подробно, то выглядеть это будет так:

$$x^2\cdot\left(ye^{xy}+xy'e^{xy}+\frac{y'x-y}{x^2}\right)=x^2\cdot(-3\sin 3x)$$

$$x^2\cdot ye^{xy}+x^2\cdot xy'e^{xy}+x^2\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=-3x^2\sin 3x$$

$$x^2ye^{xy}+x^3y'e^{xy}+y'x-y=-3x^2\sin 3x$$

Примечание: *иногда после дифференцирования появляется 2-3 дроби. Если бы у нас была еще одна дробь, например,* $\frac{3x^2+y'}{x^3+y}$*, то операцию нужно было бы повторить – умножить обе части на* (x^3+y).

Далее алгоритм работает стандартно, после того, как все скобки раскрыты, все дроби устранены, слагаемые, где есть «игрек штрих», собираем в левой части, а в правую часть переносим всё остальное:

$$x^3y'e^{xy}+y'x=y-3x^2\sin 3x-x^2ye^{xy}$$

В левой части выносим y' за скобку:

$$(x^3e^{xy}+x)y'=y-3x^2\sin 3x-x^2ye^{xy}$$

Окончательный ответ:

$$y'=\frac{y-3x^2\sin 3x-x^2ye^{xy}}{x^3e^{xy}+x}$$

Пример 52

Найти производную от неявной функции $\ln y=arctg\frac{x}{y}$

Это пример для самостоятельного решения. Единственное, в нём, перед тем как избавиться от дроби, предварительно нужно будет избавиться от трехэтажности самой дроби *(см. Приложение **Горячие школьные формулы**)*.

7. Производная параметрически заданной функции

Не напрягаемся, в заключительном параграфе тоже всё просто. Можно записать общую формулу параметрически заданной функции, но для того, чтобы было понятно, я сразу запишу конкретный пример. В параметрическом виде функция задается двумя уравнениями: $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t^3 \end{cases}$. Частенько уравнения записывают не под фигурными скобками, а последовательно: $x = 3t + 1$, $y = t^3$.

Переменная t называется параметром и может принимать значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Рассмотрим, например, значение $t = 1$ и подставим его в оба уравнения: $\begin{cases} x = 3 \cdot 1 + 1 \\ y = 1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$. Или по человечески: «если икс равен четырем, то игрек равно единице». На координатной плоскости можно отметить точку $(4; 1)$, и эта точка будет соответствовать значению параметра $t = 1$. Аналогично можно найти точку для любого значения параметра «тэ». Как и для «обычной» функции, для параметрически заданной функции все права обычно тоже соблюдены: можно построить график, найти производные и т.д.

В простейших случаях есть возможность представить функцию в явном виде. Выразим из первого уравнения параметр:

$x = 3t + 1 \quad \Rightarrow \quad 3t = x - 1 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x-1}{3}$ – и подставим его во второе уравнение:

$y = t^3 = \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}(x-1)^3$ – в результате получена обыкновенная кубическая функция.

В более «тяжелых» случаях такой фокус не прокатывает. Но это не беда, потому что для нахождения производной параметрической функции существует формула:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Находим производную от «игрека по переменной тэ»:

$$y'_t = (t^3)'_t = 3t^2$$

Все правила дифференцирования и таблица производных справедливы, естественно, и для буквы t, таким образом, **какой-то новизны в самом процессе нахождения производных нет**. Просто мысленно замените в таблице все «иксы» на букву «тэ».

Находим производную от «икса по переменной тэ»:

$$x'_t = (3t + 1)'_t = 3$$

Теперь только осталось подставить найденные производные в нашу формулу:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{3} = t^2$$

Готово. Производная, как и сама функция, тоже зависит от параметра t.

Что касается обозначений, то в формуле вместо записи y'_x можно было просто записать y' без подстрочного индекса, поскольку это «обычная» производная по «икс». Но в литературе чаще встречается вариант y'_x, поэтому я не буду отклоняться от стандарта.

Пример 53

Найти производную от функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = \arcsin(t-1) \end{cases}$

Используем формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

В данном случае:

$$y'_t = (\arcsin(t-1))'_t = \frac{1}{\sqrt{1-(t-1)^2}} \cdot (t-1)'_t = \frac{1}{\sqrt{1-(t^2-2t+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2+2t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}$$

$$x'_t = (\sqrt{2t-t^2})'_t = \frac{1}{2\sqrt{2t-t^2}} \cdot (2t-t^2)'_t = \frac{(2-2t)}{2\sqrt{2t-t^2}} = \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}$$

Таким образом:

$$y'_x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}}{\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}} = \frac{1}{1-t}$$

И здесь у нас снова актуален «золотой» мотив: **на каждом шаге результат выгодно максимально упрощать**. Так, в рассмотренном примере при нахождении y'_t я раскрыл скобки под корнем (хотя мог этого и не делать). Велик шанс, что при подстановке x'_t и y'_t в формулу многие вещи хорошо сократятся. Хотя встречаются, конечно, примеры и с корявыми ответами.

Самостоятельно:

Пример 54

Найти производную функции $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1+\sin t} \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$

Для параметрически заданной функции довольно часто предлагают найти и вторую производную. Без проблем – вот готовая формула: $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Пример 55

Найти первую и вторую производные от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg^2 t \end{cases}$$

Сначала найдем первую производную. Используем формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

В данном случае:

$$y'_t = (tg^2 t)'_t = 2tgt \cdot (tgt)'_t = \frac{2tgt}{\cos^2 t}$$

$$x'_t = (\cos^2 t)'_t = 2\cos t \cdot (\cos t)'_t = -2\cos t \sin t$$

Подставляем найденные производные в формулу. В целях упрощений используем тригонометрическую формулу $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$y'_x = \frac{\frac{2tgt}{\cos^2 t}}{-2\cos t \sin t} = -\frac{2tgt}{2\cos^2 t \cos t \sin t} = -\frac{tgt}{\cos^3 t \sin t} =$$

$$= -\frac{\sin t}{\cos t \cos^3 t \sin t} = -\frac{1}{\cos^4 t}$$

Вот так-то оно лучше, брать производную от $-\frac{1}{\cos^4 t}$ гораздо проще, чем от $-\frac{tgt}{\cos^3 t \sin t}$. Распечатайте, кстати, тригонометрические формулы, если вы ещё не успели этого сделать – материал крайне полезный.

Вторую производную найдём по формуле $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Знаменатель x'_t уже найден на предыдущем шаге. Осталось найти числитель – производную от первой производной по переменной «тэ»:

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{1}{\cos^4 t}\right)'_t = -(\cos^{-4} t)'_t = -(-4)\cos^{-5} t \cdot (\cos t)'_t =$$

$$= \frac{4}{\cos^5 t} \cdot (-\sin t) = -\frac{4\sin t}{\cos^5 t}$$

Подставляем завоёванные трофеи в формулу и проводим финальное упрощение:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-\dfrac{4\sin t}{\cos^5 t}}{-2\cos t\sin t}=\frac{-4\sin t}{-2\cos t\sin t\cos^5 t}=\frac{2}{\cos^6 t}$$

Готово.

Для закрепления материала:

Пример 56

Найти y'_x и y''_{xx} параметрически заданной функции

а) $\begin{cases} x=\sin^4 3t \\ y=\dfrac{1}{2}\cos^4 3t \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=arctge^t \\ y=\ln(1+e^{2t}) \end{cases}$

Решения и ответы совсем близко.

Поздравляю вас с прохождением курса,
теперь вы сможете найти практически любую производную!

И это не преувеличение – ведь я задал достаточно высокую планку.

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в соответствующем разделе портала mathprofi.ru *(ссылка на аннотацию к разделу)*.

Из учебной литературы рекомендую К.А. Бохана *(попроще)*, Г.М. Фихтенгольца *(посложнее)*, Н.С. Пискунова *(для ВТУЗов)*.

Желаю успехов!

8. Решения и ответы

Пример 4. Решение:

$$y' = \left(5\ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + arctgx - \lg 20 \cdot 2^x + tg3\right)' =$$

$$= 5(\ln x)' + 2(x^{-\frac{7}{5}})' + (arctgx)' - \lg 20 \cdot (2^x)' + (tg3)' =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot x^{-\frac{12}{5}} + \frac{1}{1+x^2} - \lg 20 \cdot 2^x \ln 2 + 0 =$$

$$= \frac{5}{x} - \frac{14}{5 \cdot \sqrt[5]{x^{12}}} + \frac{1}{1+x^2} - \lg 20 \cdot \ln 2 \cdot 2^x$$

В ходе решения данного примера следует обратить внимание, на тот факт, что $\lg 20$ *и* $tg3$ *– постоянные числа, неважно чему они равны, важно, что это константы. Поэтому* $\lg 20$ *выносится за знак производной, а* $(tg3)' = 0$.

Пример 7. Решение:

$$y' = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}\cos x\right)' = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x^2}\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2}((x^{\frac{2}{3}})' \cdot \cos x + \sqrt[3]{x^2} \cdot (\cos x)') =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot \cos x + \sqrt[3]{x^2} \cdot (-\sin x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2}\sin x\right) =$$

$$= \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}\sin x$$

Пример 9. Решение:

$$y' = \left(\frac{3^x + 5}{\cos x}\right)' = \frac{(3^x+5)' \cdot \cos x - (3^x+5) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(3^x \ln 3 + 0) \cdot \cos x - (3^x + 5) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{3^x \ln 3 \cdot \cos x + (3^x + 5)\sin x}{\cos^2 x}$$

Пример 12. Решение:

$$y' = \left(-\frac{arcctgx}{\sqrt[3]{x}}\right)' = -(x^{-\frac{1}{3}}arcctgx)' =$$

$$= -((x^{-\frac{1}{3}})' \cdot arcctgx + x^{-\frac{1}{3}} \cdot (arcctgx)') =$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \cdot arcctgx + x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{arcctgx}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}$$

Пример 14. Решение:

$$y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$$

Пример 16. Решение:

$$y' = \left(\frac{1}{(x^2-1)^7}\right)' = ((x^2-1)^{-7})' = -7(x^2-1)^{-8} \cdot (x^2-1)' = -\frac{7}{(x^2-1)^8} \cdot (2x-0) = -\frac{14x}{(x^2-1)^8}$$

Пример 19. Решение:

$$y' = \left(\frac{5}{\sqrt[5]{x+\ln x}}\right)' = 5 \cdot ((x+\ln x)^{-\frac{1}{5}})' = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (x+\ln x)^{-\frac{6}{5}} \cdot (x+\ln x)' = -\frac{1}{\sqrt[5]{(x+\ln x)^6}} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Пример 21. Решение:

$$y' = (\arccos^{-2} x)' = -2\arccos^{-3} x \cdot (\arccos x)' = -\frac{2}{\arccos^3 x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos^3 x}$$

Пример 23. Решение:

$$y' = (\sqrt{x^2+4} \cdot \ln(\sin\ x))' =$$

$$= (\sqrt{x^2+4})' \cdot \ln(\sin\ x) + \sqrt{x^2+4} \cdot (\ln(\sin\ x))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot (x^2+4)' \cdot \ln(\sin\ x) + \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin\ x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot (2x+0) \cdot \ln(\sin\ x) + \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x =$$

$$= \frac{x\ln(\sin\ x)}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot \cos x}{\sin x}$$

Ответы на Математический диктант:

$$(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$((2-x)^4)' = -4(2-x)^3$$

$$\left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$(e^{\frac{x}{5}})' = \frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}$$

$$\left(\left(\frac{x}{3}+4\right)^{10}\right)' = \frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}+4\right)^9$$

$$\left(7^{\frac{1}{2}x^2}\right)' = x\ln 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$(\ln(x-x^2))' = \frac{1-2x}{x-x^2}$$

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$$

$$(\sin x^2)' = 2x\cos x^2$$

$$(\cos(2x^2-x+1))' = -(4x-1)\sin(2x^2-x+1)$$

$$(tg\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$$

$$(ctg(3x+5))' = -\frac{3}{\sin^2(3x+5)}$$

$$(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cdot\cos x$$

$$(\sqrt{\log_3 x})' = \frac{1}{2x\ln 3\cdot\sqrt{\log_3 x}}$$

$$(\ln(arctgx))' = \frac{1}{(1+x^2)arctgx}$$

$$(arctg(\ln x))' = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

$$(2^{x^3+x-4})' = \ln 2\cdot(3x^2+1)\cdot 2^{x^3+x-4}$$

$$(arctg4x)' = \frac{4}{1+16x^2}$$

$$(arcctg^4 x)' = -\frac{4arcctg^3 x}{1+x^2}$$

$$(\arcsin(2x^3))' = \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$$

$$(\arccos(3-5x))' = \frac{5}{\sqrt{1-(3-5x)^2}}$$

Пример 25. Решение:

а) $y' = (\ln^2(2x-1))' = 2\ln(2x-1)\cdot(\ln(2x-1))' =$

$$= 2\ln(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)' = \frac{2\ln(2x-1)}{2x-1}\cdot(2-0) = \frac{4\ln(2x-1)}{2x-1}$$

б) $y' = (\cos\sqrt{arctg(x^3)})' = -\sin\sqrt{arctg(x^3)}\cdot(\sqrt{arctg(x^3)})' =$

$$= -\sin\sqrt{arctg(x^3)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{arctg(x^3)}}\cdot(arctg(x^3))' =$$

$$= -\sin\sqrt{arctg(x^3)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{arctg(x^3)}}\cdot\frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot(x^3)' =$$

$$= -\sin\sqrt{arctg(x^3)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{arctg(x^3)}}\cdot\frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2$$

Примечание: *ответ лучше оставить именно в таком виде – это значительно облегчает его проверку*

Пример 27. Решение: *преобразуем функцию:*

$$y = \sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{x}+1}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}+1}} = \sqrt[5]{2}\cdot(\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}}$$

Найдем производную:

$$y' = \sqrt[5]{2}\cdot\left((\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}}\right)' = -\frac{\sqrt[5]{2}}{5}\cdot\left((\sqrt{x}+1)\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot(\sqrt{x}+1)' =$$

$$= -\frac{\sqrt[5]{2}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[5]{2}}{10\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}}$$

Пример 29. Решение:

$$y' = \left(5x^2 + x\,arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})\right)' = 5(x^2)' + \left(x\,arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})\right)' =$$

$$= 5\cdot 2x + (x)'\cdot arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + x\cdot\left(arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})\right)' =$$

$$= 10x + arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x}{1+(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})^2}\cdot(\sin^{\frac{1}{3}} e^{3x})' =$$

$$= 10x + arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x}{1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}}\cdot\frac{1}{3}\sin^{-\frac{2}{3}} e^{3x}\cdot(\sin e^{3x})' =$$

$$= 10x + arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x}{3(1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}})\cdot\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}}\cdot\cos e^{3x}\cdot(e^{3x})' =$$

$$= 10x + arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{x\cos e^{3x}}{3(1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}})\cdot\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}}\cdot 3e^{3x} =$$

$$= 10x + arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}}) + \frac{xe^{3x}\cos e^{3x}}{(1+\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}})\cdot\sqrt[3]{\sin^2 e^{3x}}}.$$

Пример 31. Решение:

$$y' = ((x+1)\cdot\sqrt{x^3+2}\cdot(2x^2-1))' = ((x+1)\cdot\sqrt{x^3+2})'\cdot(2x^2-1)+(x+1)\cdot\sqrt{x^3+2}\cdot(2x^2-1)' =$$
$$=((x+1)'\cdot\sqrt{x^3+2}+(x+1)\cdot(\sqrt{x^3+2})')\cdot(2x^2-1)+(x+1)\cdot\sqrt{x^3+2}\cdot 4x =$$
$$=\left(\sqrt{x^3+2}+\frac{3x^2(x+1)}{2\sqrt{x^3+2}}\right)\cdot(2x^2-1)+4x(x+1)\cdot\sqrt{x^3+2}$$

Примечание: *перед дифференцированием можно было раскрыть скобки* $y=(x+1)\cdot\sqrt{x^3+2}\cdot(2x^2-1)=(2x^3+2x^2-x-1)\cdot\sqrt{x^3+2}$ *и использовать правило* $(uv)'=u'v+uv'$ *один раз.*

Пример 33. Решение:

$$y'=\left(\frac{x^2\ln x}{x-2}\right)'=\frac{(x^2\ln x)'\cdot(x-2)-x^2\ln x\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{((x^2)'\ln x+x^2(\ln x)')\cdot(x-2)-x^2\ln x\cdot(1-0)}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{\left(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot(x-2)-x^2\ln x}{(x-2)^2}=\frac{(2x\ln x+x)(x-2)-x^2\ln x}{(x-2)^2}$$

Пример 35. Решение: *сначала преобразуем функцию:*

$$y=\ln\sqrt{x^2+3x}=\ln(x^2+3x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+3x)$$

Найдем производную. Используем правило дифференцирования сложной функции:

$$y'=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+3x)\right)'=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+3x)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+3x)}\cdot(x^2+3x)'=\frac{(2x+3)}{2(x^2+3x)}$$

Пример 36. Решение: *сначала преобразуем функцию:*

$$y=\ln\frac{x^2+4}{\sqrt[3]{x-1}}=\ln(x^2+4)-\ln(x-1)^{\frac{1}{3}}=\ln(x^2+4)-\frac{1}{3}\ln(x-1)$$

Найдем производную:

$$y'=\left(\ln(x^2+4)-\frac{1}{3}\ln(x-1)\right)'=(\ln(x^2+4))'-\frac{1}{3}(\ln(x-1))'=\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{3(x-1)}$$

Пример 38. Решение: *используем логарифмическую производную:*

$$\ln y=\ln\left[x\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}\right]$$

$$\ln y=\ln x+\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x}$$

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

Дифференцируем обе части:

$$(\ln y)' = \left(\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\ln x)' + \frac{1}{2}(\ln(1+x^2))' - \frac{1}{2}(\ln(1-x))'$$

Таким образом:

$$y' = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1+x^2)}\cdot(0+2x) - \frac{1}{2(1-x)}\cdot(0-1)\right]\cdot y = \left[\frac{1}{x} + \frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2(1-x)}\right]\cdot x\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$$

Пример 40. Решение: *используем логарифмическую производную:*

$$\ln y = \ln x^{2x^2}$$

$$\ln y = 2x^2\ln x$$

$$(\ln y)' = (2x^2\ln x)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2((x^2)'\ln x + x^2(\ln x)')$$

$$y' = 2\left(2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot y = 2x(2\ln x + 1)\cdot x^{2x^2}$$

Пример 41. Решение: *используем логарифмическую производную:*

$$y = (x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\ln y = \ln(x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\ln y = \cos\frac{x}{2}\cdot\ln(x^2+1)$$

$$(\ln y)' = \left(\cos\frac{x}{2}\cdot\ln(x^2+1)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \left(\cos\frac{x}{2}\right)'\cdot\ln(x^2+1) + \cos\frac{x}{2}\cdot(\ln(x^2+1))'$$

$$y' = \left(-\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\ln(x^2+1) + \cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)}\cdot(x^2+1)'\right)\cdot y =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\ln(x^2+1) + \frac{2x\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)}\right)\cdot(x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}}$$

Пример 43. Решение*: найдем первую производную:*

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)' = ((x^2+1)^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\cdot(x^2+1)' =$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{(x^2+1)^5}}\cdot 2x = -\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

Пример 45. Решение*: найдём пятую производную:*

$$y' = (5^x)' = 5^x\cdot\ln 5$$
$$y'' = (y')' = (5^x\cdot\ln 5)' = \ln 5\cdot(5^x)' = \ln 5\cdot 5^x\cdot\ln 5 = 5^x\ln^2 5$$
$$y''' = (y'')' = (5^x\ln^2 5)' = \ln^2 5\cdot(5^x)' = \ln^2 5\cdot 5^x\cdot\ln 5 = 5^x\ln^3 5$$
$$y^{(4)} = (y''')' = (5^x\ln^3 5)' = 5^x\ln^4 5$$
$$y^{(5)} = (y^{(4)})' = (5^x\ln^4 5)' = 5^x\ln^5 5$$

Очевидно, что $y^{(n)} = 5^x\ln^n 5$

Ответ*:* $y^{(5)} = 5^x\ln^5 5, \quad y^{(n)} = 5^x\ln^n 5$

Пример 47. Решение*: найдём несколько производных:*

$$y' = ((x-2)^{-1})' = -(x-2)^{-2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$y'' = -((x-2)^{-2})' = -(-2)\cdot(x-2)^{-3} = \frac{1\cdot 2}{(x-2)^3}$$

$$y''' = 1\cdot 2\cdot((x-2)^{-3})' = 1\cdot 2\cdot(-3)\cdot(x-2)^{-4} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x-2)^4}$$

$$y^{(4)} = -1\cdot 2\cdot 3\cdot((x-2)^{-4})' = -1\cdot 2\cdot 3\cdot(-4)\cdot(x-2)^{-5} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x-2)^5}$$

Запишем «энную» производную: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}$

Таким образом: $y^{(20)} = \dfrac{(-1)^{20}\cdot 20!}{(x-2)^{21}} = \dfrac{20!}{(x-2)^{21}}$

Ответ*:* $y^{(20)} = \dfrac{20!}{(x-2)^{21}}$

Пример 50. Решение:

$$(y\sin x)'=(\cos(x-y))'$$
$$y'\sin x+y(\sin x)'=-\sin(x-y)\cdot(x-y)'$$
$$y'\sin x+y\cos x=-\sin(x-y)\cdot(1-y')$$
$$y'\sin x+y\cos x=-\sin(x-y)+y'\sin(x-y)$$
$$y'\sin x-y'\sin(x-y)=-\sin(x-y)-y\cos x$$
$$(\sin x-\sin(x-y))y'=-\sin(x-y)-y\cos x$$

Таким образом: $y'=\dfrac{-\sin(x-y)-y\cos x}{\sin x-\sin(x-y)}=\dfrac{\sin(x-y)+y\cos x}{\sin(x-y)-\sin x}$

Пример 52. Решение:

$$(\ln y)'=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'$$
$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{y-xy'}{y^2+x^2}$$
$$(y^2+x^2)y'=y^2-xyy'$$
$$(y^2+x^2)y'+xyy'=y^2$$
$$(y^2+x^2+xy)y'=y^2$$
$$y'=\frac{y^2}{y^2+x^2+xy}$$

***Пример 54. Решение**: используем формулу* $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. *В данном случае:*

$$y'_t=(\cos t+t\sin t)'_t=(\cos t)'_t+(t\sin t)'_t=-\sin t+(t)'_t\sin t+t(\sin t)'_t=$$
$$=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$$
$$x'_t=\left(\frac{\sin t}{1+\sin t}\right)'_t=\frac{(\sin t)'_t(1+\sin t)-\sin t(1+\sin t)'_t}{(1+\sin t)^2}=$$
$$=\frac{\cos t(1+\sin t)-\sin t\cos t}{(1+\sin t)^2}=\frac{\cos t+\sin t\cos t-\sin t\cos t}{(1+\sin t)^2}=\frac{\cos t}{(1+\sin t)^2}$$

Таким образом:

$$y'_x=\frac{t\cos t}{\frac{\cos t}{(1+\sin t)^2}}=\frac{t\cos t(1+\sin t)^2}{\cos t}=t(1+\sin t)^2$$

Пример 56. Решение:

а) Найдем первую производную. Используем формулу: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

В данном случае:

$$y'_t = \left(\frac{1}{2}\cos^4 3t\right)'_t = \frac{1}{2}\cdot 4\cos^3 3t\cdot(\cos 3t)'_t = 2\cos^3 3t\cdot(-3\sin 3t) = -6\cos^3 3t\sin 3t$$

$$x'_t = (\sin^4 3t)'_t = 4\sin^3 3t\cdot(\sin 3t)'_t = 4\sin^3 3t\cdot 3\cos 3t = 12\sin^3 3t\cos 3t$$

$$y'_x = \frac{-6\cos^3 3t\sin 3t}{12\sin^3 3t\cos 3t} = -\frac{\cos^2 3t}{2\sin^2 3t} = -\frac{1}{2}ctg^2 3t$$

Вторую производную найдём по формуле $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{2}(ctg^2 3t)'_t = -\frac{1}{2}\cdot 2ctg3t\cdot(ctg3t)'_t = -ctg3t\cdot\left(-\frac{3}{\sin^2 3t}\right) = \frac{3ctg3t}{\sin^2 3t}$$

Таким образом:

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{3ctg3t}{\sin^2 3t}}{12\sin^3 3t\cos 3t} = \frac{3ctg3t}{12\sin^5 3t\cos 3t} = \frac{1}{4\sin^6 3t}$$

б) Найдём первую производную:

$$x'_t = (arctge^t)'_t = \frac{1}{1+(e^t)^2}\cdot(e^t)'_t = \frac{e^t}{1+e^{2t}}$$

$$y'_t = (\ln(1+e^{2t}))'_t = \frac{1}{1+e^{2t}}\cdot(1+e^{2t})'_t = \frac{1}{1+e^{2t}}\cdot(0+e^{2t}\cdot(2t)'_t) = \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}} = \frac{2e^{2t}\cdot(1+e^{2t})}{(1+e^{2t})\cdot e^t} = 2e^t$$

Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$(y'_x)'_t = 2(e^t)'_t = 2e^t$$

В результате:

$$y''_{xx} = \frac{2e^t}{\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}} = \frac{2e^t(1+e^{2t})}{e^t} = 2(1+e^{2t})$$