ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ 3

ЗАДАНИЕ №3– КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

***По тематике раздела 3 студент должен уметь*:**

Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, через одну точку в заданном направлении (на плоскости и в пространстве).Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Находить точку пересечения прямой и плоскости. Находить углы между прямыми и плоскостями.Приводить уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду (при отсутствии членов с произведением координат), строить кривую.Делать приближённые чертежи поверхностей 2-го порядка, заданных каноническими уравнениями. Делать приближённые чертежи цилиндрических поверхностей вида $f(x,y)=0$, $f(x,z)=0$, $f(y,z)=0$ и поверхностей вращения

Задание 3-4. (Кривые второго порядка.)

Приведите уравнения линий к каноническому виду и постройте линии, определяемые этими уравнениями.

3-4.1. $x^2+4x+4y^2-5=0$. **3-4.2.** $4x^2+4y^2+8y=0$. **3-4.3.** $x^2+8x-4y^2=9$.

3-4.4. $x=-2y^2+8y-9$. **3-4.5.** $y=3x^2-18x+25$.

Задание 3-6. (Поверхности второго порядка.). Во всех задачах нужно сделать чертеж поверхности.

3-6.1. Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$?

3-6.2. Какое из уравнений: А) $x^2+2y^2-z^2=1$, Б) $x^2+2y^2-z^2=-1$, В) $x^2+y^2+2z^2=1$
Г) $x^2-y^2-z^2=0$, Д) $y^2-z^2=1$определяет эллипсоид?

3-6.3 Какое из уравнений: А) $x^2+2y^2-z^2=-1$, Б) $x^2+2y^2-z^2=1$, В) $x^2+y^2+2z^2=1$
Г) $x^2-y^2-z^2=0$, Д) $y^2-z^2=1$ определяет однополостный гиперболоид?

3-6.4. Какое из уравнений: **А)** $x^2+2y^2-z^2=1$, **Б)** $x^2-y^2-z^2=1$ **В)** $x^2+y^2+2z^2=1$
Г) $x^2-y^2-z^2=0$, **Д)** $y^2-z^2=1$определяет двуполостный гиперболоид?

3-6.5. Какое из уравнений: А) $x^2+2y^2-z^2=1$, Б) $x^2-y^2-z^2=1$ В) $x^2+y^2+2z^2=1$ Г)
Г) $x^2-y^2+z^2=0$, Д) $y^2-z^2=1$определяет конус?

3-6.6. Какое из уравнений: **А)** $x^2+4y^2+z=0$, **Б)** $x^2-y^2-z^2=1$, **В)** $x^2-2y^2-z=0$, **Г)** $y^2-z^2=1$,
Д) $x^2-y^2+z^2=0$ определяет эллиптический параболоид?

3-6.7. Какое из уравнений: **А)** $x^2+4y^2+z=0$, **Б)** $x^2-y^2-z^2=1$, **В)** $x^2-2y^2-z=0$, **Г)** $y^2-z^2=1$,
Д) $x^2-y^2+z^2=0$ определяет гиперболический параболоид?

3-6.8. Какое из уравнений: **А)** $x^2+4y^2+9z=0$, **Б)** $4x^2-y^2-2z^2=1$, **В)** $x^2-2y^2-z=0$,
Г) $y^2+z^2=1$, **Д)** $x^2-y^2+z^2=0$ определяет цилиндр?

3-6.9. Какое из уравнений: **А)** $x^2+4y^2+z=0$, **Б)** $x^2-4y^2-z^2=1$, **В)** $y^2=2x$, **Г)** $x^2-2y^2-z=0$,
Д) $x^2-y^2+8z^2=0$ определяет цилиндр?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ (РЕШЕНИЯ) К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ 2

ЗАДАНИЕ №3

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Задание 3-4. (Линии второго порядка.)

3-4.1. $\dfrac{\bar{x}^2}{3^2}+\dfrac{\bar{y}^2}{(3/2)^2}=1$ ($\bar{x}=x+2$, $\bar{y}=y$) – уравнение эллипса. График см. на рис.1.

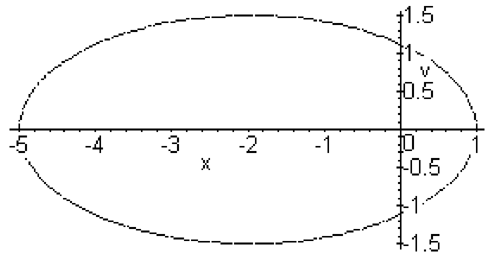

Рис.1.

3-4.2. $\bar{x}^2+\bar{y}^2=1, \bar{x}=x, \bar{y}=y+1$. Окружность с радиусом, равным 1 и с центром в точке (0,-1).

3-4.3. $\dfrac{\bar{x}^2}{4^2}-\dfrac{\bar{y}^2}{2^2}=1$,($\bar{x}=x+4$, $\bar{y}=y$) . Гипербола с центром в точке (-4,0).

3-4.4. $\bar{x} \;=-2\bar{y}^2$, $\bar{x}=x+1, \bar{y}=y-2$. Парабола с вершиной в точке (-1,2). Ось симметрии – прямая *y=2.* Ветви параболы направлены влево по оси *OX,*

3-4.5. $\bar{y}=3\bar{x}^2$, $\bar{x}=x-3, \bar{y}=y+2$. Парабола с вершиной в точке (3,-2). Ось симметрии – прямая *x=3*. Ветви параболы направлены влево по оси *OУ,*

Задание 3-6. (Поверхности второго порядка.)

3-6.1. Эллипсоид с полуосями $a=2$, $b=3$, $c=4$.

3-6.2. Уравнение В: $x^2+y^2+2z^2=1$

3-6.3 Уравнение Б: $x^2+2y^2-z^2=1$,

3-6.4. Уравнение Б: $x^2-y^2-z^2=1$,

3-6.5.: Уравнение Г: $x^2-y^2+z^2=0$.

3-6.6. Уравнение А: $x^2+4y^2+z=0$

3-6.7. Уравнение В: $x^2-2y^2-z=0$,

3-6.8. Уравнение Г:. $y^2+z^2=1$

3-6.9. Уравнение В: $y^2=2x$

РЕШЕНИЯ

Задание 3-6. (Поверхности второго порядка.)

***Предварительные замечания*.**

** *Прочтите еще раз главу 3, раздел 3 учебника «Поверхности 2-го порядка*. Напомним основное.

Поверхностью второго порядка называется множество точек, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0, \qquad (*)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbf{R}$, а $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0$.

При надлежащем выборе прямоугольной системы координат множество точек, определяемое уравнением (*) будет задано одним из ниже перечисленных уравнений:

1). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; Эллипсоид

2). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; Однополостный гиперболоид

3). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$; Двуполостный гиперболоид

4). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;. Конус второго порядка

5). $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$; Эллиптический параболоид

6). $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$;. Гиперболический параболоид

7). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; Эллиптический цилиндр

8). $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; Гиперболический цилиндр

9). $y^2=2px$; Параболический цилиндр

3-6.2. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1)-(9), приходим к выводу, что только уравнение $x^2+y^2+2z^2=1$ получается из уравнения (1) при условии, что $a^2=1,\ b^2=1,\ c^2=\frac{1}{2}$. Следовательно, это уравнение-(В)- определяет эллипсоид (рис. 2).

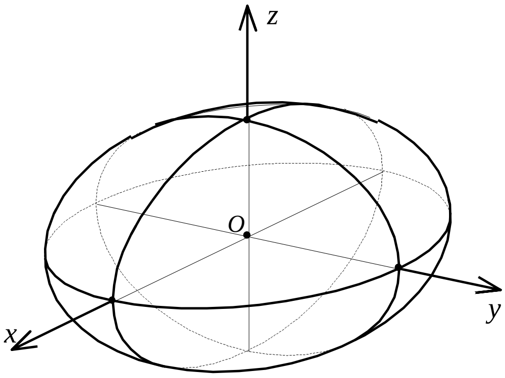

Рис.2. Эллипсоид, определяемый уравнением (1).

3-6.3 .Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1)-(9), приходим к выводу, что уравнение $x^2+2y^2-z^2=1$, получается из уравнения (2) при условии, что $a^2=1,\ b^2=\frac{1}{2},\ c^2=1$. Следовательно, это уравнение -(Б)- определяет однополостный гиперболоид (рис. 3). **

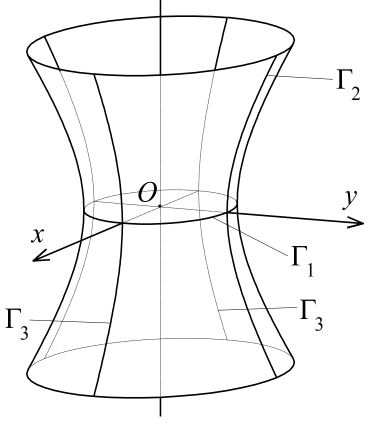

Рис.3. Однополостный гиперболоид, определяемый уравнением (2).

3-6.4. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1)-(9), приходим к выводу, что двуполостный гиперболоид определяет уравнение $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, поскольку его можно преобразовать к виду: $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$ или $y^2 + z^2 - x^2 = -1$. Последнее уравнение получается из уравнения (3) при условии, что $a^2 = 1$, $b^2 = 1$, $c^2 = 1$, а оси координат направлены так, как на рис. 4.

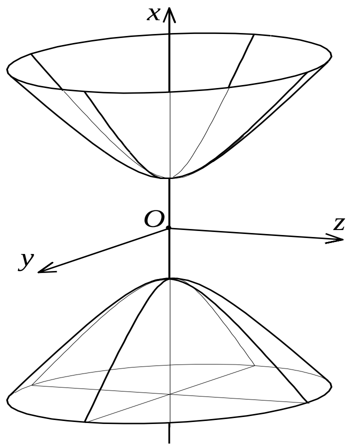

рис. 4

3-6.5. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1)-(9), приходим к выводу, что конус определяет уравнение $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, поскольку его можно преобразовать к виду: $x^2 + z^2 - y^2 = 0$. Последнее уравнение получается из уравнения (4) при условии, что $a^2 = 1$, $b^2 = 1$, $c^2 = 1$, а оси координат направлены так, как на рис. 5.

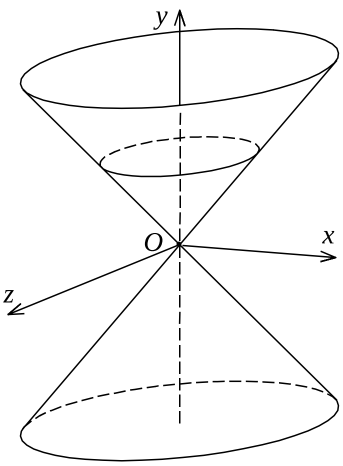

рис. 5.

3-6.6. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1)-(9), приходим к выводу, что эллиптический параболоид определяет уравнение $x^2 + 4y^2 + z = 0$, поскольку его можно преобразовать к виду: $2x^2 + 8y^2 = -2z$. Последнее уравнение получается из уравнения (5) при условии, что $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{8}$. Эллиптический параболоид расположен так, как на рис. 6.

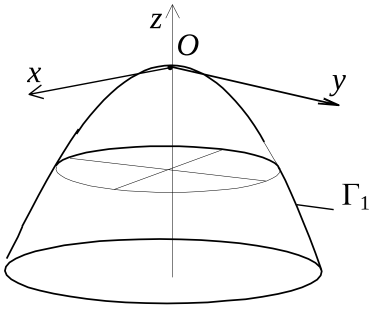

рис. 6.

3-6.7. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1)-(9), приходим к выводу, что гиперболический параболоид определяет уравнение $x^2 - 2y^2 - z = 0$, поскольку его можно преобразовать к виду: $2x^2 - 4y^2 = 2z$. Последнее уравнение получается из уравнения (6) при условии, что $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ (рис.7).

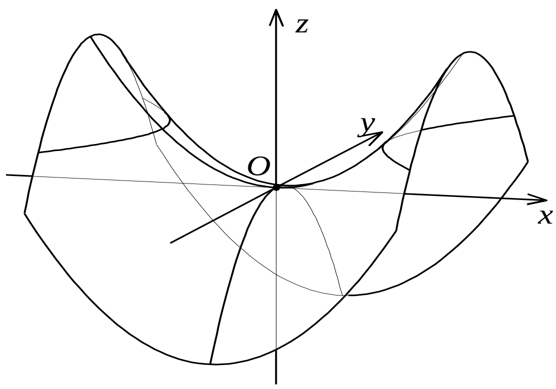

Рис.7. Гиперболический параболоид, определяемый уравнением (7).

3-6.8. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1) – (9), приходим к выводу, что цилиндр определяет уравнение $y^2 + z^2 = 1$, поскольку оно получается из уравнения (7) при условии, что $a^2 = 1$, $b^2 = 1$, а оси координат направлены так, как на рис. 8. Рассматриваемое уравнение определяет круговой цилиндр.

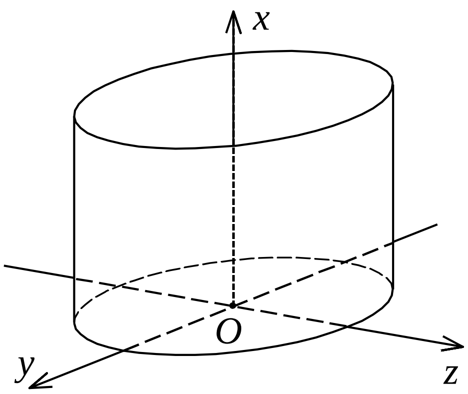

рис. 8..

3-6.9. Сравнивая данные уравнения с каждым из уравнений (1) – (9), приходим к выводу, что цилиндр определяет уравнение $y^2 = 2x$, поскольку оно получается из уравнения (9) при условии, что $p = 1$. Рассматриваемое уравнение определяет параболический цилиндр (рис. 9). **

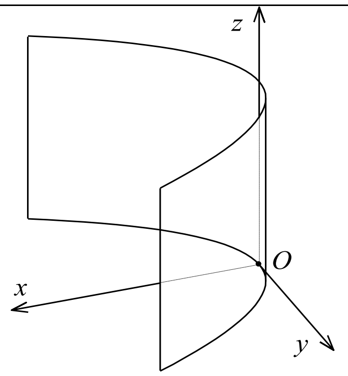

Рис. 9. Параболический цилиндр, определяемый уравнением (9).