§7. Понятие числовой функции. График функции. Способы задания функции. Классификация функций

1°. Понятие числовой функции. График функции.

Определение 7.1. Пусть $D\subset \boldsymbol{R}$ – некоторое непустое множество. Если каждому значению переменной $x\in D$ поставлено в соответствие по некоторому закону единственное число $y\in E\subset \boldsymbol{R}$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* (или просто *функция*) и пишут $y=f(x)$. Переменная x называется *аргументом*, а множество D – *областью определения функции*, для неё приняты обозначения $D(f), D(y)$. Число y называется *частным значением функции* в точке x, а совокупность всех частных значений – *множеством значений функции* и обозначается $E(f)$, $E(y)$.

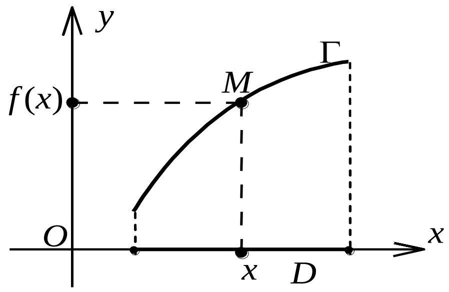

Рис. 7.1. К определению 7.2

Замечание 7.1. Буква f в обозначении функции $y=f(x)$ символизирует вышеуказанный закон. Для обозначения функции могут употребляться и другие буквы, например, $s=g(t)$ и т. д.

Замечание 7.2. Наряду с термином «функция» применяется термин «отображение» и пишут $f:x\to y$ или $f:x\in D\to y\in Y$.

Определение 7.2. *Графиком функции* $y = f(x)$, $x\in D$, называется множество всех точек $M(x,y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$ (рис. 7.1, Г – график функции $y = f(x)$).

2°. Способы задания функции. 1). *Аналитический способ* – задание закона, устанавливающего связь между переменными x и y, с помощью формулы. В школьном курсе математики так были введены обратно пропорциональная зависимость $y=k/x$, квадратная функция $y=ax^2+bx+c$ и т. д. Функции могут задаваться разными формулами на различных участках области определения. Например, функция

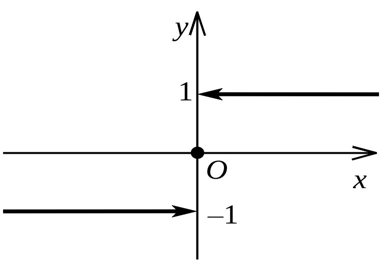

Рис. 7.2. График функции $y=\mathrm{sgn}x$

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0,\\ 0, \text{ если } x=0,\\ 1, \text{ если } x<0\end{cases}$$

задана аналитически на всей вещественной оси (рис. 7.2, стрелки в точках (0,–1) и (0,1) означают, что при $x = 0$ функция не принимает значений –1 и 1, символ sgn$x$ читается как сигнум x, по латыни signum – знак).

2). *Табличный способ* – задание таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции.

3). *Графический способ* – соответствие между аргументом и функцией задаётся посредством графика (получаемого, например, с помощью прибора).

4). *Алгоритмический способ* – задание функции с помощью алгоритма (программы). Этот способ используют при вычислениях на компьютерах.

5). *Задание функции словесным описанием.* Например, функция $y=[x]$, называемая целой частью числа x, определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x.

3°. Классификация функций.

Определение 7.3. Функция $y=f(x)$ называется *чётной (нечётной),* если её область определения $D(f)$ симметрична относительно точки $x=0$ и для $\forall x\in D(f)$ справедливо равенство $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$.

Так, функция $y=x^2$ – чётная, ибо $y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x)$ для $\forall x\in \boldsymbol{R}$, а функция $y=x^3$ – нечётная, поскольку $y(-x)=(-x)^3=-x^3=-y(x)$ для $\forall x\in \boldsymbol{R}$.

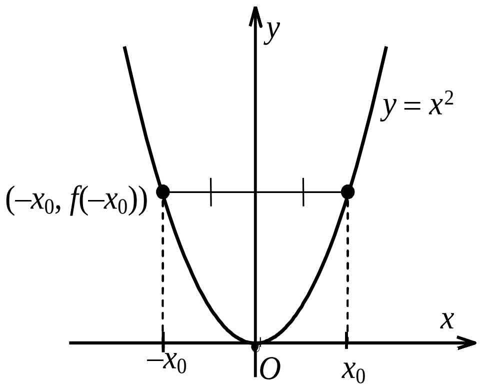

Рис. 7.3. График функции $y=x^2$

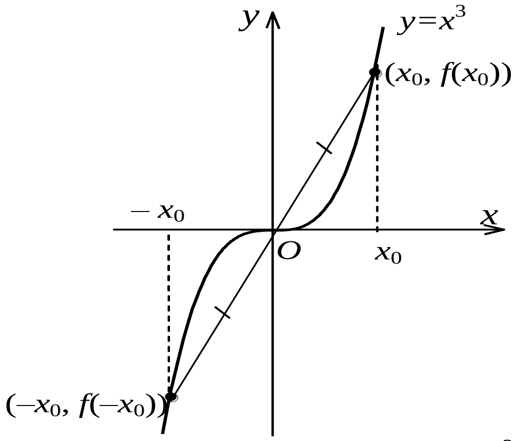

Рис. 7.4. График функции $y=x^3$

График чётной функции обладает симметрией относительно оси Oy, а нечётной – симметрией относительно начала координат (рис. 7.3, 7.4).

Определение 7.4. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T>0$, называемое *периодом* функции, такое, что для $\forall x\in D(f)$ справедливы равенства $x\pm T\in D(f)$ и $f(x\pm T)=f(x)$.

Замечание 7.3. Если число $T>0$ – период данной функции, то и число Tn – период этой функции при $\forall n\in \boldsymbol{N}$. Поэтому под T обычно понимают наименьший положительный период (если он существует).

Замечание 7.4. Любую часть графика периодической функции можно получить путём параллельного переноса вдоль оси Ox его части, соответствующей промежутку, длина которого равна периоду.

Из школьного курса математики известно, что тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ имеют наименьший положительный период $T=2\pi$, а для функций $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ имеем $T=\pi$.

Пример 7.1. Найти период функции $y=|\sin x|$.

►Найдём наименьшее положительное число T такое, что для $\forall x\in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство: $|\sin(x+T)|=|\sin x|$. В частности, оно должно выполняться при $x=0$: $|\sin T|=|\sin 0|$. Отсюда $\sin T=0$ и $T=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Поскольку T – наименьший положительный период, то $T=\pi$. Проверим, что для $\forall x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $|\sin(x+\pi)|=|\sin x|$. Действительно, по формулам приведения $\sin(x+\pi)=-\sin x$, но тогда $|\sin(x+\pi)|=|\sin x|$.◄

Определение 7.5. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X\subset D(f)$, если для $\forall\ x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$ ($f(x_1)\ge f(x_2)$). Если из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)< f(x_2)$ ($f(x_1)> f(x_2)$), то функцию $f(x)$ называют строго возрастающей (строго убывающей) на множестве X.

Возрастающие и убывающие функции объединяют общим термином *монотонные функции*.

Пример 7.2. Показать, что функция $y=(x-1)^2$ строго возрастает на отрезке $[1,3]$.

►Возьмём $\forall x_1, x_2\ [1,3]$: $x_1 < x_2$. Имеем $y(x_2)-y(x_1)=(x_2-1)^2-(x_1-1)^2$ $=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$. Поскольку $x_2-x_1>0$ и $x_2+x_1-2>0$ для любых выше выбранных x_1, x_2, то $y(x_2)-y(x_1)>0$ или $y(x_2)>y(x_1)$ и по определению 7.5 заключаем, что данная функция убывает на $(-\infty, 2)$.◄

Определение 7.6. Пусть $E(f)$ – множество значений функции $y=f(x)$ при $x\in X\subset D(f)$. Если $E(f)$ ограничено сверху (ограничено снизу, ограничено), то данная функция называется *ограниченной сверху (ограниченной снизу, ограниченной) на множестве X*. Точная верхняя (нижняя) грань множества $E(f)$ называется *точной верхней (нижней) гранью данной функции на множестве X* и обозначается $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ ($\inf\limits_{x\in X} f(x)$). Если $\sup\limits_{x\in X} f(x)\in E(f)$ ($\inf\limits_{x\in X} f(x)\in E(f)$), то его называют также *наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве X* и обозначают $\max\limits_{x\in X} f(x)$ ($\min\limits_{x\in X} f(x)$).

Пример 7.3. Найти $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\max\limits_{x\in X} f(x)$, $\min\limits_{x\in X} f(x)$, если $f(x)=1/(|x|+1)$ и $X=\boldsymbol{R}$.

►Неравенство $0<1/(|x|+1)\le 1$ верно для $\forall x\in\boldsymbol{R}$, при этом $1=f(0)$. Поэтому $\sup\limits_{x\in X} f(x)=\max\limits_{x\in X} f(x)=1$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)=0$, а $\min\limits_{x\in X} f(x)$ не существует.◄

Определение 7.7. Пусть даны функции $y=f(x)$ и $z=g(y)$, при этом $E(f)\subset D(g)$. Функция $z=g(f(x))$, $x\in D(f)$ называется *сложной функцией (композицией или суперпозицией)* функций f и g.

Определение 7.8. Пусть дана функция $y=f(x)$, $D(f)$ – её область определения, а $E(f)$ – множество значений. Если каждому значению $y\in E(f)$ сопоставляется единственное значение $x\in D(f)$, для которого $f(x)=y$, то говорят, что на $E(f)$ задана функция $x=f^{-1}(y)$, называемая *обратной* по отношению к данной функции $y=f(x)$.

***Замечание** 7.5.* Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции x, а значение y, её записывают в виде $y = f^{-1}(x)$. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (т.е. относительно прямой $y=x$).

Теорема 7.1. Если функция $y = f(x)$ определена и строго возрастает (строго убывает) на $[a,b]$, а отрезок [α, β] является множеством значений этой функции, то на [α, β] существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго возрастающая (строго убывающая) на [α, β]. Её множеством значений служит отрезок $[a,b]$.

Доказательство теоремы 7.1 приведено, например, в [10].

Пример 7.4. Для функции $y = (x-1)^2,\ x \in [1, 3]$, найти обратную.

►Данная функция квадратная, её график приведён на рис. 7.5. Найдём для неё обратную функцию, выразив x через y: $x = 1 + \sqrt{y}$ (перед радикалом взят знак плюс, так как $x \ge 1$ на промежутке [1, 3]). Перейдём к традиционным обозначениям для аргумента и функции: $y = 1 + \sqrt{x}$, $D(y) = [0, 4]$, $E(y) = [1, 3]$. График обратной функции получим, отобразив дугу параболы $y = (x-1)^2$, $x \in [1, 3]$ симметрично относительно прямой $y=x$ (рис. 7.5, график обратной функции выделен жирной линией). Обратная функция $y = 1 + \sqrt{x}$ строго возрастает на отрезке [0, 4], ибо прямая функция $y = (x-1)^2$ строго возрастает на отрезке $[1, 3]$ (теорема 7.1).◄

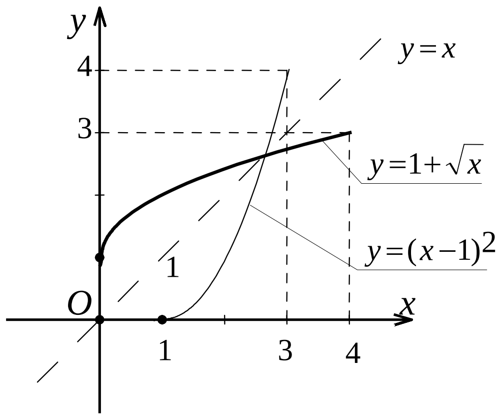

Рис. 7.5. К примеру 7.4