§7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Определение 7.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 до n–го порядка включительно. Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{7.1}$$

называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$.

Пример 7.1. Для функции $f(x) = (x-1)/(x-2)$ написать многочлен Тейлора $T_3(x)$ при $x_0 = 3$.

► $f'(x) = \dfrac{x-2-(x-1)}{(x-2)^2} = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{6}{(x-2)^4}$,
$f(3) = 2$, $f'(3) = -1$, $f''(3) = 2$, $f'''(3) = -6$. В силу формулы (7.1) получаем:
$T_3(x) = 2 - (x-3) + (x-3)^2 - (x-3)^3$. ◄

Равенство (7.1) является разложением многочлена $T_n(x)$ по степеням разности $x - x_0$. В виду единственности такого разложения (§6) имеем: $\dfrac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!} = \dfrac{f_n^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Отсюда следует равенство:

$$T_n^{(k)}(x_0) = f_n^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.2}$$

выражающее свойство многочлена Тейлора. При этом в случае $k=0$ подразумевается равенство $T_n(x_0) = f(x_0)$.

Итак, в точке x_0 функция $f(x)$, её многочлен Тейлора $T_n(x)$ и их производные до n – го порядка включительно совпадают. Однако на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ функция $f(x)$ совпадает со своим многочленом Тейлора тогда и только тогда, когда она сама на $\overset{\circ}{U}(x_0)$ является многочленом n–ой степени.

Далее предполагаем, что функция $f(x)$ не является многочленом на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Разность между $f(x)$ и её многочленом Тей-лора $T_n(x)$ обозначим через $R_n(x)$: $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$, $R_n(x)$ есть погрешность представления функции $f(x)$ её многочленом Тейлора $T_n(x)$ на $U(x_0)$. Преобразуем последнее равенство к виду:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x). \tag{7.3}$$

Заменив в (7.3) $T_n(x)$ на правую часть равенства (7.1), получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \tag{7.4}$$

Равенство (7.4) называется *формулой Тейлора* функции $f(x)$, а $R_n(x)$ называется *остаточным членом*.

Свойства остаточного члена $R_n(x)$

1. $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

2. Если на некоторой окрестности $U(x_0)$ существует $f^{(n+1)}(x)$, то на $U(x_0)$ существует $R_n^{(n+1)}(x)$ и справедливо равенство

$$f^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x). \tag{7.5}$$

Свойство 1 следует из определения $R_n(x)$ и равенства (7.2), а свойство 2 – из равенства (7.3) с учётом соотношения $T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$.

Теорема 7.1. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n–го порядка включительно, то для этой функции на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \tag{7.6}$$

где под $o((x - x_0)^n)$ понимается бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$.

Равенство (7.6) называется *формулой Тейлора функции* $f(x)$ *с остаточным членом в форме Пеано* (Д. Пеано (1858-1932) – итальянский математик).

►Пусть $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора функции $f(x)$ (формула (7.4)). Надо доказать, что $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$. Функции $R_n(x)$ и $(x - x_0)^n$, а также их производные до ($n-1$)-го порядка включительно удовлетворяют условиям применения правила Лопиталя (теорема 5.1), поэтому имеем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2(x - x_0)}.$$

Правило Лопиталя применено $n-1$ раз. В числителе последней дроби вычтем равное нулю число $R_n^{(n-1)}(x_0)$, получим:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)}.$$

По определению производной правая часть последнего соотношения равна $\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)$. Приходим к равенству $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, поскольку $R_n^{(n)}(x_0) = 0$ (свойство 1 остаточного члена), отсюда заключаем, что $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.◄

Пример 7.2. Написать для функции $f(x) = (x-1)/(x-2)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $x_0 = 3$ и $n = 3$.

►Из формулы (7.3) следует равенство $f(x) = T_3(x) + R_3(x)$. Заменяя в нём $T_3(x)$ на $2 - (x-3) + (x-3)^2 - (x-3)^3$ (см. пример 7.1), а $R_3(x)$ на $o((x - x_0)^3)$ в силу теоремы 7.1 имеем: $f(x) = 2 - (x-3) + (x-3)^2 - (x-3)^3 + o((x-3)^3)$.◄

Замечание 7.1. При $x_0 = 0$ формула (7.6) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{7.7}$$

и называется *формулой Маклорена* с остаточным членом в форме Пеано (К. Маклорен (1698 – 1746) – шотландский математик).

Напишем формулы Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$, имеющих при $x=0$ производные любого порядка. В главе 1 приведены формулы (9.2) – (9.6) для производных n–го порядка от этих функций. При $x=0$ из этих формул получаем соотношения:

$$f(x)=e^x, \qquad f^{(n)}(0)=1,$$

$$f(x)=\sin x, \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{k-1}, & n=2k-1,\end{cases} \quad k\in\mathbf{N},$$

$$f(x)=\cos x, \qquad f^{(n)}(0)=\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ (-1)^{k}, & n=2k,\end{cases} \quad k\in\mathbf{N},$$

$$f(x)=\ln(1+x), \qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f(x)=(1+x)^\alpha, \qquad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)).$$

Подставляя в формулу (7.7) поочередно указанные выражения для $f^{(n)}(0)$ каждой из пяти данных функций, приходим к следующим равенствам:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \tag{7.8}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}), \tag{7.9}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}), \tag{7.10}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n), \tag{7.11}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n). \tag{7.12}$$

Теорема 7.2. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n–го порядка включительно и на некоторой окрестности точки x_0 эта функция представлена равенством:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \tag{7.13}$$

где под $o((x-x_0)^n)$ понимается бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$, то для коэффициентов a_k этого равенства справедлива формула:

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=0,1,\ldots,n, \tag{7.14}$$

т.е. представление данной функции равенством (7.13) единственно.

►В условиях теоремы для функции $f(x)$ выполняется равенство (7.6), приравняем правые части равенств (7.6) и (7.13):

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)=$$
$$=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \tag{7.15}$$

В (7.15) перейдём к пределу при $x\to x_0$, получим: $f(x_0)=a_0$. Вычтем из обеих частей равенства (7.15) равные слагаемые $f(x_0)$ и a_0 и все члены полученного соотношения поделим на $x - x_0$:

$$\frac{f'(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{o\left((x - x_0)^n\right)}{x - x_0} = a_1 + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + \frac{o\left((x - x_0)^n\right)}{x - x_0}.$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получим: $\frac{f'(x_0)}{1!} = a_1$, так как $\frac{o\left((x - x_0)^n\right)}{x - x_0} = (x - x_0)^{n-1}\frac{o\left((x - x_0)^n\right)}{(x - x_0)^n} \to 0$ при $x \to x_0$. Повторив описанные преобразования $k-1$ раз, приходим к формуле (7.14).◄

Пример 7.3. Написать для функции $f(x) = e^{x^2}$ формулу Маклорена до членов $2n$–го порядка включительно и найти её производную $f^{(2n)}(0)$.

►Введём обозначение: $z = x^2$. Для функции e^z из (7.8) имеем равенство:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + o(z^n).$$

Подставим в него x^2 вместо z, получим $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$.

Коэффициент $1/n!$ при x^{2n} в правой части последнего соотношения в соответствии с теоремой 7.2 и формулой (7.14) равен $f^{(2n)}(0)/(2n)!$. Таким образом, приходим к равенству $1/n! = f^{(2n)}(0)/(2n)!$, откуда находим $f^{(2n)}(0) = (2n)!/n!$.◄

Замечание 7.2. Равенства (7.8) – (7.12) являются асимптотическими разложениями для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Они служат источником разложений такого рода для некоторого класса элементарных функций. Полученные разложения применяются, например, при вычислении пределов.

Замечание 7.3. Формула Тейлора (7.6) аппроксимирует (т.е. приближает) функцию $f(x)$ её многочленом Тейлора на некоторой окрестности точки x_0, причём эта аппроксимация тем точнее, чем меньше модуль разности $x - x_0$.

Пример 7.4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \sqrt{1 + x^2}}{x^3}$.

►Выражение под знаком предела при $x \to 0$ даёт неопределённость $\frac{0}{0}$. Имеем:

$$e^x - \sin x - \sqrt{1 + x^2} = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3) - (x - x^3/6 + o(x^3)) -$$
$$-(1 + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)) = x^3/3 + o(x^3).$$

Здесь использованы формулы (7.8), (7.9) и (7.12) при $\alpha = 1/2$ и свойства символа o (§6 главы 3 раздела 4). Итак,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \sqrt{1 + x^2}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Здесь использовано определение символа o из упомянутого параграфа.◄

Пример 7.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(e^{6x\cos x}+6\ln(1-x))^{1/x^3}$.

►Выражение под знаком предела при $x\to 0$ даёт неопределённость 1^{∞}. Из (7.10) следует равенство: $6x\cos x=6x(1-x^2/2+o(x^2))=6(x-x^3/2+o(x^3))$ (см. свойства символа *o*, §6 главы 3 раздела 4), поэтому

$$e^{6x\cos x}=e^{6(x-x^3/2+o(x^3))}=1+6(x-x^3/2+o(x^3))+3(x-x^3/2+o(x^3))^2+$$
$$+(x-x^3/2+o(x^3))^3+o((x-x^3/2+o(x^3))^3)=1+6x+3x^2-2x^3+o(x^3)$$

(использованы формула (7.8) и упомянутые в примере 7.2 свойства символа *o*).

Из (7.11) имеем: $6\ln(1-x)=-6x-3x^2-2x^3+o(x^3)$ Сложив асимптотические разложения функций $e^{6x\cos x}$ и $6\ln(1-x)$, получим:

$$e^{6x\cos x}+6\ln(1-x)=1-4x^3+o(x^3).$$

Вычисляемый предел принимает вид:

$$\lim_{x\to 0}(e^{6x\cos x}+6\ln(1-x))^{1/x^3}=\lim_{x\to 0}(1-4x^3+o(x^3))^{1/x^3}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-4x^3+o(x^3))/x^3}$$

(использованы основное логарифмическое тождество и свойство непрерывности показательной функции). Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x^3+o(x^3))}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^3+o(x^3))}{x^3}=\lim_{x\to 0}(-4+\frac{o(x^3)}{x^3})=-4$$

(числитель разложен по формуле (7.11)). Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(e^{6x\cos x}+6\ln(1-x))^{1/x^3}=e^{-4}$.◄

Замечание 7.4. В примерах 7.4 – 7.5 можно было применить правило Лопиталя, однако, это привело бы к более громоздким выкладкам.