Домашнее задание

Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Скалярное поле

Пример 1.

Вычислить поверхностный интегра 2 рода двумя способами: 1) по теореме о вычислении поверхностного интеграла 2 рода; 2) с помощью формулы Остроградского - Гаусса

$$\iint_{\sigma} 3xdydz + (y+z)dxdz \; + \; (\,x - z)dxdy,$$

где σ: внешняя поверхность пирамиды, образуемая плоскостью

x + 3y +z = 3

и координатными плоскостями.

Пример 2.

Вычислить поверхностный интегра 2 рода двумя способами: 1) по теореме о вычислении поверхностного интеграла 2 рода; 2) с помощью формулы Остроградского - Гаусса

$$\iint_{\sigma} yzdydz - x^2dxdz \; - y^2dxdy,$$

где σ: часть поверхности $x^2 + z^2 = y^2$, заключенная между $0 \leq y \leq 1$ (внешняя поверхность)

Пример 3.

Вычислить криволинейный интеграл по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости *P* с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора ***n*** этой плоскости, двумя способами:

1) по теореме о вычислении криволинейного интеграла 2 рода;

2) с помощью формулы Стокса (в качестве поверхности σ взять плоскость *P*.

$$\int_{\Gamma} \; zdx \; + (y+x)\;dy \; + \; ydz, \quad P\!: 2x + y + 2z = 2.$$

Пример 4

Вычислить криволинейный интеграл по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости *P* с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора ***n*** этой плоскости, двумя способами:

1) по теореме о вычислении криволинейного интеграла 2 рода;

2) с помощью формулы Стокса (в качестве поверхности σ взять плоскость *P*.

$$\int_{\Gamma} 3xdx + (y+x)dy + (x-z)dz, \quad P: x + 3y + z = 3.$$

Пример 5.

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M (1;1;1) по направлению вектора $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, где $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

Пример 6

Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,\ y\ ,z)$ и $\upsilon(x,\ y,\ z)$ в точке M .

$$\upsilon = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad u = \frac{yz^2}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Пример 7.

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz, где

$$u = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz, \quad S:\ x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \quad M(1,\ 1,\ 1).$$

Пример 8.

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S, образующей тупой угол с положительным направлением оси Oz, где

$$u = \operatorname{arctg}(y/x) - 8xyz, \quad S:\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 10, \quad M(2,\ 2,\ \text{-}1).$$

Пример 9.

Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)$ в точке M_0, где $u(M) = y^2z - x^2$ и $M_0\,(0;1;\,1)$.