Примеры

Векторный потенциал соленоидального поля

Пример.

Найти векторный потенциал $\bar{b}(M)$ для соленоидального поля двумя способами. Сделать проверку

$$\bar{a}(M) = 2y\bar{\imath} - z\bar{\jmath} + 2x\bar{k} \quad \forall\, M(x; y; z) \in R^3$$

Первый способ

Область R^3 звёздная .

Рассмотрим точку $M'(tx; ty; tz) \Longrightarrow \bar{a}(M') = 2ty\bar{\imath} - tz\bar{\jmath} + 2tx\bar{k}$

$$\bar{a}(M') \times \bar{r}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2ty & -zt & 2tx \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-z^2t - 2txy)\cdot\bar{i} + (2tx^2 - 2tyz)\cdot\bar{j} + (2ty^2 + ztx)\cdot\bar{k}$$

Тогда для первого способа:

$$\bar{b}\,(M) = \int_0^1 \left(\bar{a}(M') \times \bar{r}(M)\right)\cdot t \cdot dt = \int_0^1 t^2\left((-z^2 - 2xy)\cdot\bar{i} + (2x^2 - 2yz)\cdot\bar{j} + (2y^2 - zx)\cdot\bar{k}\right)\cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{3}(2xy + z^2)\bar{\imath} + \frac{2}{3}(x^2 - yz)\bar{\jmath} + \frac{1}{3}(2y^2 + xz)\bar{k}$$

Таким образом, получаем:

$$\bar{b}(M) = -\frac{1}{3}(2xy + z^2)\bar{\imath} + \frac{2}{3}(x^2 - yz)\bar{\jmath} + \frac{1}{3}(2y^2 + xz)\bar{k}$$

Проверка: $rot\bar{b} = \bar{a}$ (сделать самостоятельно)

Второй способ:

Будем искать векторный потенциал $\overline{b_1}$ в виде:

$$\overline{b_1}(x;y;z) = P_1(x;y;z)\bar{i} + Q_1(x;y;z)\bar{j} + R_1(x;y;z)\bar{k}$$

Пусть $P_1(x,y,z) \equiv 0$.

Тогда $\overline{b_1}$ примет вид:

$$\overline{b_1}(x;y;z) = Q_1(x;y;z)\bar{j} + R_1(x;y;z)\bar{k}$$

Для нашего примера $P = 2y$; $Q = -z$; $R = 2x$

По формуле (6)

$$Q_1(x,y,z) = \int R(x,y,z)dx$$

имеем:

$$Q_1(x,y,z) = \int 2xdx = x^2$$

По формуле (7)

$$R_1(x,y,z) = \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + P(x,y,z) \right] \cdot dy - \int Q(x,y,z)dx.$$

имеем:

$$R_1(x;y;z) =$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x;y;z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x;y;z)dx + P(x;y;z)\right]dy - \int Q(x;y;z)dx =$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int (-z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int 2xdx + 2y\right]dy - \int (-z)dx =$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial y}(-zx) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2) + 2y\right]dy + zx = \int 2ydy + zx = y^2 + zx$$

Т.о.

$$\overline{b_1}(M) = (x^2)\overline{j} + (y^2 + xz)\overline{k}$$

Проверка: $rot\overline{b_1}(M) = \overline{a}(M)$ (сделать самостоятельно)

Замечание:

Выше мы получили для одного солеидального поля два разных векторных потенциала $\overline{b_1}$ и $\overline{b}$. Они могут отличаться дру от друга на слогаемое, равное градиенту некоторого скалярного поля $f(M)$. В нашем случае.

$$\overline{b_1} - \overline{b} = gradf(M) = -\frac{1}{3}(2xy + z^2)\overline{i} + \frac{2}{3}(x^2 + 2yz)\overline{j} + \frac{1}{3}(y^2 + 2xz)\overline{k}.$$

Для проверки решения следует убедиться, что $rot\big(gradf(M)\big) = \overline{0}$ (самостоятельно).

Нахождение скалярного поля $f(M)$.

Для вектоного поля $(\overline{b_1} - \overline{b})$ функция $f(M)$ являетя потенциалом, так как $\overline{b_1} - \overline{b} = gradf(M),$ а поле $\big(\overline{b_1} - \overline{b}\big)$ – потенциальное поле.
Поэтому, для нахождения скалярного поля $f(M)$ воспользуемся формулой

$$f(M) = \int_{x_0}^{x} P(x; y_0; z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x; y; z_0)dx + \int_{z_0}^{z} R(x; y; z)dx + C$$

где в качестве точки $(x_0; y_0; z_0)$ возьмем точку (0;0;0) из области определения функций $P(x; y; z); Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$.

Тогда получим:

$$f(M) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz + C =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x; y_0; z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x; y; z_0)dx + \int\limits_{z_0}^{z} R(x; y; z)dx + C =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{y} \frac{x^2}{3} dx + \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{z} (2xz + y^2)dx + C =$$

$= \frac{1}{3}(x^2y + y^2z + z^2x) + C,$ где С – произвольная постоянная.

Так как $gradC = \overline{0}$, то можно положить $C = 0$ и, значит

$$f(M) = \frac{1}{3}(x^2y + y^2z + z^2x).$$