§3. Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

►На окружности радиуса $r=1$ возьмём дугу AB с центральным углом, радианная мера которого равна x, $0<x<\pi/2$ (рис. 3.1) и рассмотрим треугольники OAB, OAC, а также сектор OAB. Для их площадей выполняется неравенство: $S_{\Delta OAB}<S_{\text{сект.}OAB}<S_{\Delta OAC}$. Использовав известные формулы для площадей этих фигур, приходим к соотношению:

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

поделив все члены которого на $\frac{1}{2}\sin x$, получим: $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$. Перейдём в этом неравенстве к обратным величинам:

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,\ 0<x<\pi/2. \qquad (3.1)$$

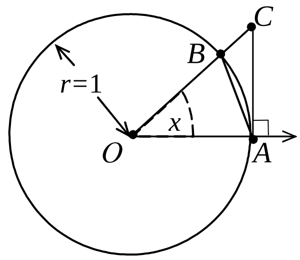

Рис. 3.1. К доказательству первого замечательного

Функции $\dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ – чётные, поэтому неравенство (3.1) остаётся справедливым и для $\forall x\in(-\pi/2,0)$. Итак, показано, что неравенство (3.1) выполняется для $\forall x\in(-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (пример 1.2), то из теоремы о сжатой функции (теорема 2.3) следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.◄

Замечание 3.1. В процессе доказательства первого замечательного предела доказано неравенство $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x$ или $\sin x<x$ для $0<x<\pi/2$. Его можно записать в виде: $|\sin x|<|x|$. Легко убедиться в том, что последнее неравенство верно и для $-\pi/2<x<0$. Для $|x|\ge\pi/2$ оно очевидно, так как $|\sin x|\le 1$, $\pi/2>1$. Итак, $|\sin x|<|x|$ для $\forall x\ne 0$.

Следствия из первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

Первые два из этих пределов будут вычислены ниже в примерах 3.1, 3.2, а последние два будут вычислены в главе 4.

Пример 3.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

► $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\dfrac{1}{2}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}=\left|x/2=u\right|=$ $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin^2 u}{u^2}=1$ (первый замечательный предел), поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.◄

Пример 3.2. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$.

► $\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\Big/\cos x$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел) и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (пример 1.2), то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$ по теореме 2.2.◄

Пример 3.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg}3x}$.

► $\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg}3x}=\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\mathrm{tg}3x}\cdot\dfrac{2x}{3x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\left|2x=u\right|=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ (1-й замечательный предел). Аналогично получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\mathrm{tg}3x}=1$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg}3x}=\dfrac{2}{3}$ (теорема 2.2).◄

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

►Докажем сначала, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x)^x=e$. Так как $x\to+\infty$, то можно считать, что $x>0$. Пусть $n=[x]$, где $[x]$ – целая часть числа x, имеем $n\le x<n+1$ или $\dfrac{1}{n}\ge\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{n+1}$, отсюда $1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}\le 1+\dfrac{1}{n}$, возведём члены последнего неравенства в степени $n, x, n+1$: $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Если $x\to+\infty$, то и $n\to+\infty$. Вычислим пределы крайних членов последнего соотношения:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+1/(n+1))^{n+1}}{1+1/(n+1)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/(n+1))^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/(n+1))}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Отсюда следует: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x)^x=e$ (теорема о сжатой функции (теорема 2.3)).

Доказывая равенство $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+1/x)^x=e$, перейдём к новой переменной y: $x=-(y+1)$. Имеем: $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+1/x)^x=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{y+1-1}{y+1}\right)^{-(y+1)}=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-y-1}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^y\left(\frac{y+1}{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(\frac{y+1}{y}\right)=e\cdot 1=e.$$

Объединяя оба случая, окончательно получаем $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$.

Равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ обосновывается с помощью замены переменной: $1/x=y$.◄

Следствия из второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu,\ \mu\in\boldsymbol{R}.$$

Эти пределы будут вычислены в главе 4.

Замечание 3.2. Во всех вышеприведённых пределах x можно заменить любой функцией, стремящейся к нулю.

Пример 3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{\ln(1-3x)}$.

► $\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{\ln(1-3x)}=2\cdot\dfrac{(1+x/8)^{1/3}-1}{\ln(1-3x)}=2\cdot\dfrac{(1+x/8)^{1/3}-1}{x/8}\cdot\dfrac{-3x}{\ln(1-3x)}\cdot\dfrac{x/8}{-3x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x/8)^{1/3}-1}{x/8}=\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x}{\ln(1-3x)}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{\ln(1-3x)}=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{-24}=-\dfrac{1}{36}$ (следствия из 2-го замечательного предела и теорема 2.2). ◄