§4. Предел функции нескольких переменных

Рассмотрим в m-мерном пространстве последовательность точек

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots\ , \tag{4.1}$$

где $X_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$. Будем говорить, что эта последовательность сходится к точке $Y = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, если при $n \to \infty$ будет

$$\rho(X_n, Y) \to 0. \tag{4.2}$$

В этом случае пишут $X_n \to Y$ или $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$. Очевидно (из (1.1)), что соотношение (4.2) равносильно совокупности следующих соотношений:

$$x_1^{(n)} \to a_1, \quad x_2^{(n)} \to a_2, \quad \ldots, \quad x_m^{(n)} \to a_m.$$

Понятие предела функции от нескольких переменных вводится совершенно аналогично случаю предела функции одной переменной.

Пусть речь идет о функции $f(X)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, т. е. $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Если для любой последовательности (4.1) точек, отличных от точки Y, принадлежавших области определения функции, сходящейся к точке $Y = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, соответствующая последовательность значений функции $f(X_1),\ f(X_2),\ \ldots,\ f(X_n),\ \ldots$ имеет своим пределом всегда одно и то же число l, то говорят, что l есть *предел функции* $f(X)$ при $X \to Y$ и пишут:

$$\lim_{X\to Y} f(X) = l$$

или

$$\lim_{x_1\to a_1,\, x_2\to a_2, \ldots, x_m\to a_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = l. \tag{4.3}$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_m, l$ – все или некоторые из них – могут означать и символы $\infty,\ +\infty,\ -\infty$.

Замечание. Аналогично случаю функции одной переменной можно дать другое (равносильное приведенному выше) определение предела функции по Коши “на языке $\varepsilon - \delta$ ”.

Пример 4.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{3}{5}$. Действительно, областью определения рассматриваемой функции является вся плоскость с удаленной из нее точкой $(0, 0)$. Пусть

$$(x^{(1)}, y^{(1)}), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}), \quad \ldots, \quad (x^{(n)}, y^{(n)}), \quad \ldots$$

– произвольная последовательность точек, принадлежащих области определения, и такая, что $x^{(n)} \neq 2$, $y^{(n)} \neq 1$ и

$$x^{(n)} \to 2, \quad y^{(n)} \to 1. \tag{4.4}$$

Соответствующим точке $(x^{(n)}, y^{(n)})$ значением функции будет

$$\frac{(x^{(n)})^2-(y^{(n)})^2}{(x^{(n)})^2+(y^{(n)})^2},$$

которое в условиях (4.4) стремится к $3/5$ (что следует из теорем о пределах последовательностей).

Пример 4.2. Исследовать предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

▶ Возьмем последовательность точек

$$(x^{(n)},y^{(n)})=\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0). \tag{4.5}$$

Соответствующая последовательность значений функции

$$\frac{(x^{(n)})^2-(y^{(n)})^2}{(x^{(n)})^2+(y^{(n)})^2}=\frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+0}\to 1. \tag{4.6}$$

Для другой последовательности точек

$$(x^{(n)},y^{(n)})=\left(0,\frac{1}{n}\right)\to(0,0) \tag{4.7}$$

имеем

$$\frac{(x^{(n)})^2-(y^{(n)})^2}{(x^{(n)})^2+(y^{(n)})^2}=\frac{0-\frac{1}{n^2}}{0+\frac{1}{n^2}}\to -1. \tag{4.8}$$

Видим, что для двух различных, но сходящихся к $(0,0)$ последовательностей точек (4.5) и (4.7) пределы соответствующих последовательностей функции не одинаковы. Значит, исследуемый предел не существует (иначе пределы (4.6) и (4.8) должны быть одинаковыми). ◀

Замечание. Рассмотренный предел (4.3) функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ при одновременном стремлении всех аргументов к их пределам нужно отличать от пределов, получаемых в результате ряда последовательных предельных переходов по каждому аргументу в отдельности в том или ином порядке. Первый предел, т. е. предел (4.3), называют mкратным, а последний – *повторным*.

Например, как было показано выше, двукратный предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует. Однако повторные пределы

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

существуют, конечны и в данном случае не равны между собой. Отсюда, в частности, следует, что в повторном пределе менять порядок предельного перехода, вообще говоря, нельзя.