§5. Линейные уравнения

Определение. ***Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида***

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{5.1}$$

где $p(x)$ ***и*** $q(x)$ ***– непрерывные функции.***

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (5.1) обращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$

Будем искать решение уравнения (5.1) способом Бернулли в виде произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + v'u.$$

Тогда уравнение (5.1) примет вид

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x),$$

откуда

$$u'v + u\left[v' + p(x)v\right] = q(x). \tag{5.2}$$

Упростим уравнение (5.2), выбрав функцию $v(x)$ так, чтобы она обращала в тождественный нуль выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$v' + p(x)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -p(x)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \tag{5.3}$$

При функции v, определяемой по формуле (5.3), уравнение (5.2) примет вид:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

откуда

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Тогда общее решение $y = uv$ линейного уравнения (5.1) запишется следующим образом:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \tag{5.4}$$

Линейное уравнение не имеет особых решений: из самого вывода формулы (5.4) ясно, что в ней содержатся все решения уравнения (5.1).

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + \dfrac{y}{x} = \ln x$.

▶ $y = uv \;\Rightarrow\; y' = uv' + v'u$,

$$uv' + vu' + \frac{uv}{x} = \ln x \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v + \frac{v}{x}\right) = \ln x\,,$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}\,,$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x\ln x \quad \Rightarrow \quad u = \int x\ln x\,dx + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\,,$$

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right)\frac{1}{x}\,.$$

Общее решение

$$y = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}\,.$$ ◀