§7. Метод трапеций для приближённого вычисления определенного интеграла

При наличии современной компьютерной техники метода трапеций достаточно для приближенного вычисления определенного интеграла с любой степенью точности, поэтому более сложные методы не рассматриваются.

Требуется приближенно вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Промежуток $[a, b]$ интегрирования разбивается на n равных по длине частичных промежутков точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. На каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ с длиной Δx построим прямолинейную трапецию с параллельными основаниями, длины которых равны $y_k = f(x_k)$, $y_{k+1} = f(x_{k+1})$. Предполагаем сначала, что $f(x) \ge 0$ в промежутке интегрирования. Тогда площадь частичной прямолинейной трапеции будет равна $\frac{1}{2}\left(y_k + y_{k+1}\right)\Delta x$. Площадь фигуры, составленной из частичных прямолинейных трапеций, равна

$$\Delta x\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right). \qquad (7.1)$$

В то же время она приближенно равна площади криволинейной трапеции, выражаемой определенным интегралом (рис. 7.1). Таким образом, получаем приближенное равенство после сложения одинаковых слагаемых в формуле (7.1):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (7.2)$$

Это равенство тем более точное, чем больше n.

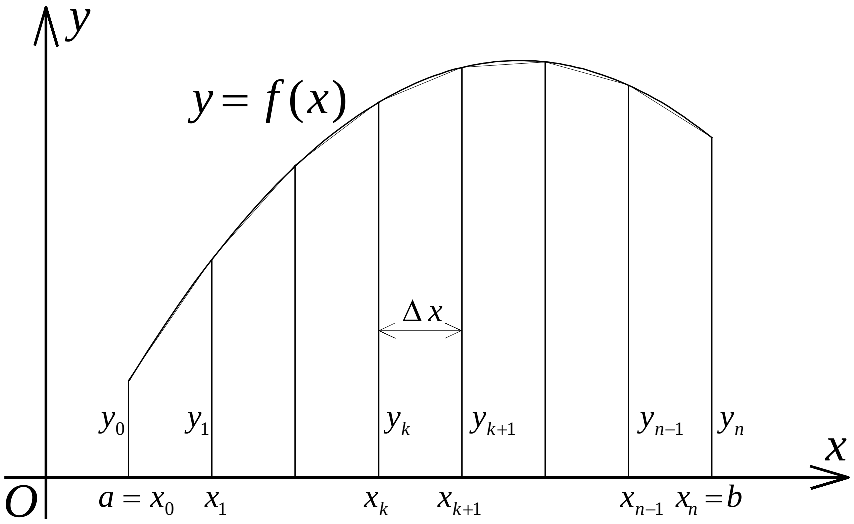

Рис. 7.1. Иллюстрация метода трапеций приближенного вычисления определенного интеграла

Погрешность R_n приближенной формулы трапеций (7.2) может быть оценена по формуле

$$|R_n| \le \frac{b-a}{12}(\Delta x)^2 \cdot \max_{x\in[a,\,b]}|f''(x)|. \tag{7.3}$$

Формула (7.2), полученная на основе геометрических соображений при $f(x) \ge 0$, справедлива при любых знаках подынтегральной функции в промежутке интегрирования.

Если точность формулы (7.2) при выбранном n недостаточна, то число n удваивается и формула (7.2) применяется снова.

Формула (7.3), в силу сложности нахождения $\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, для оценки погрешности применяется редко. Практически применяется *правило Рунге*.

Пусть S_n равно правой части формулы (7.2) и ε – заданная точность вычислений интеграла. Тогда удвоение числа n производится до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{3}|S_{2n} - S_n| < \varepsilon. \tag{7.4}$$

Пример 7.1. Вычислить приближенно по формуле трапеций определенный интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$. Заметим при этом, что неопределенный интеграл $\int e^{-x^2}dx$ является неберущимся.

▶ В формуле трапеций (7.2) возьмем $n = 4$. Тогда

$$\Delta x = 1/4 = 0.25;\quad x_0 = 0;\quad x_1 = 0.25;\quad x_2 = 0.5;\quad x_3 = 0.75;\quad x_4 = 1.$$

$$y_0 = \exp(0) = 1;\quad y_1 = \exp(-0.0625) = 0.939413;\quad y_2 = \exp(-0.25) = 0.778801;$$

$$y_3 = \exp(-0.5625) = 0.569783;\quad y_4 = \exp(-1) = 0.367879.$$

Получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \Delta x\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right)=0.742984\,.$$

Сравним этот результат с более точным, взятым из таблиц. Для этого воспользуемся специальной функцией $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$, которая называется интегралом вероятностей, или функцией ошибок (error function):

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}1=0.74682412\,.$$

Сравнивая это более точное значение интеграла с полученным по формуле трапеций, находим абсолютную погрешность вычислений $\Delta \approx 0.004$.

Удвоим число точек деления промежутка, взяв $n=8$. Тогда

$$\Delta x=0.125;\quad x_0=0;\quad x_1=0.125;\quad x_2=0.25;\quad x_3=0.375;$$

$$x_4=0.5;\quad x_5=0.625;\quad x_6=0.75;\quad x_7=0.975;\quad x_8=1.$$

К старым значения функции добавились 4 новых:

$$y_1=\exp(-0.125^2)=0.984496;\quad y_3=\exp(-0.375^2)=0.868815;$$

$$y_5=\exp(-0.625^2)=0.676634;\quad y_7=\exp(-0.875^2)=0.465043.$$

Подставляя старые и новые значения функции в формулу

$$J=\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \Delta x\left(\frac{y_0+y_8}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7\right),$$

получим $J\approx 0.745866$. Это приближенное значение интеграла – более точное. Абсолютная погрешность в этом случае $\Delta \approx 0.000958 < 0.001$. По формуле Рунге (7.4) получаем

$$\frac{1}{3}\left|S_8-S_4\right|=\frac{1}{3}\left(0.745860-0.742984\right)=0.000959<0.001\,.$$

Видим, что точность вычислений $\varepsilon=0.001$ при $n=8$ обеспечивается и при ориентировке на правило Рунге.