§4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.

Определение 4.1. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Например, последовательность $\{q^n\}$, где $|q|<1$, – бесконечно малая (см. пример 2.1).

Замечание 4.1. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{|x_n|\}$ являются бесконечно малыми одновременно.

Теорема 4.1 (*необходимое и достаточное условие сходимости числовой последовательности*). Для того чтобы число a было пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для общего члена этой последовательности x_n выполнялось равенство: $x_n = a+\alpha_n$, где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

►*Необходимость.* Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\alpha_n = x_n - a$. Так как $x_n \to a$ при $n\to\infty$, то по теореме 3.5 $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Достаточность. Предположим теперь, что выполняется равенство $x_n = a+\alpha_n$, где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в силу теоремы 3.5 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◄

Так, $x_n = \dfrac{2\cdot 6^n + 3^n}{6^n}\to 2$ при $n\to\infty$, поскольку x_n можно представить в виде: $x_n = 2+3^n/6^n = 2+(1/2)^n$, где $(1/2)^n\to 0$ при $n\to\infty$ (пример 2.1).

Арифметические операции над бесконечно малыми последовательностями

Теорема 4.2. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Данная теорема является следствием из теоремы 3.5.

Теорема 4.3. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей – бесконечно малая последовательность.

►Пусть x_n – бесконечно малая последовательность, а y_n – ограниченная последовательность. Для второй из них можно найти положительное число M такое, что неравенство $|y_n|<M$ будет справедливо для $\forall n\in \boldsymbol{N}$ (определение 1.3). Возьмём произвольное положительное число ε. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что неравенство $\in |x_n - 0| = |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ выполняется для $n > N(\varepsilon)$. Тогда $|x_n y_n - 0| = |x_n|\cdot|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon$, а это, в силу определения предела числовой последовательности (определение 2.1), и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.◄

Пример 4.1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n^2)/2^n$.

► $(\sin n^2)/2^n = (1/2^n)\sin n^2 = (1/2)^n \sin n^2 \to 0$ при $n\to\infty$ в силу теоремы 4.3, ибо $(1/2)^n \to 0$ при $n\to\infty$ (см. пример 2.1), а последовательность $\{\sin n^2\}$ ограничена, поскольку $|\sin n^2|\le 1$ при $\forall\, n\in \boldsymbol{N}$.◄

Определение 4.2. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $M>0$ можно найти номер $N(M)$ такой, что при $n>N(M)$ выполняется неравенство $|x_n|>M$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Замечание 4.2. Бесконечно большая последовательность является расходящейся, ибо она не имеет конечного предела в смысле определения 2.1.

В символической форме определение 4.2 можно записать следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)\in \boldsymbol{N}\colon n>N(M) \Rightarrow |x_n|>M$.

Замечание 4.3. Для бесконечно больших последовательностей рассматриваются два частных случая: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Соответствующие им определения в символической форме имеют вид:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)\in \boldsymbol{N}\colon n>N(M) \Rightarrow x_n>M,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N(M)\in \boldsymbol{N}\colon n>N(M) \Rightarrow x_n<-M.$$

Пример 4.2. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$ при $\forall p>0$.

►Зададим $\forall M>0$. Найдём номер $N(M)$ такой, что при $n>N(M)$ выполняется неравенство $n^p>M$. Разрешая это неравенство относительно n, имеем $n>M^{1/p}$, откуда $N(M)=[M^{1/p}]$ – целая часть числа $M^{1/p}$.◄

Теорема 4.4 (*о связи бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей*). Пусть дана последовательность $\{x_n\}$, причём $x_n\ne 0$ при $\forall\, n\in\boldsymbol{N}$. Тогда: 1) если $x_n\to 0$ при $n\to\infty$, то $1/x_n\to\infty$ при $n\to\infty$;

2) если $x_n\to\infty$ при $n\to\infty$, то $1/x_n\to 0$ при $n\to\infty$.

►1) Пусть $x_n\to 0$ при $n\to\infty$. Возьмём произвольное положительное число M и рассмотрим число $\varepsilon=1/M$. Из определения предела числовой последовательности (определение 2.1) следует, что для данного ε можно найти натуральное число $N(\varepsilon)=N(1/M)=N_1(M)$ такое, что для $n>N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство: $|x_n|<\varepsilon=1/M$, но тогда для значений $n>N_1(M)=N(\varepsilon)$ будет выполняется неравенство $|1/x_n|>1/\varepsilon=M$, а это означает согласно определению бесконечно большой последовательности (определение 4.2), что $1/x_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

2) Пусть $x_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Возьмём произвольное положительное число ε и рассмотрим число $M=1/\varepsilon$. Для выбранного числа M в силу определения бесконечно большой последовательности (определение 4.2)

можно найти число $N(M)=N(1/\varepsilon)=N_1(\varepsilon)$ такое, что для $n>N(M)$ будет выполняться неравенство: $|x_n|>M=1/\varepsilon$, тогда для значений $n>N_1(\varepsilon)=N(M)$ будет выполняется неравенство $|1/x_n|<1/M=\varepsilon$, а это, в соответствии с определением предела числовой последовательности (определение 2.1), и означает, что $1/x_n\to 0$ при $n\to\infty$.◄

Пример 4.3. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^p=0$ для $\forall p>0$.

► $\lim\limits_{n\to\infty} n^p=+\infty$ при $\forall p>0$ (пример 4.2), поэтому в силу теоремы 4.4 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^p=0$ для $\forall p>0$.◄

Замечание 4.4. Примеры 4.2, 4.3 приводят к следующему обобщению:

$$\lim_{n\to\infty} n^p=\begin{cases}+\infty, & p>0,\\ 1, & p=0,\\ 0, & p<0.\end{cases}$$

Арифметические операции над бесконечно большими последовательностями

Теорема 4.5. Если $x_n\to\pm\infty$, а $y_n\to\pm\infty$ при $n\to\infty$, либо последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то и $x_n+y_n\to\pm\infty$ при $n\to\infty$ (везде берётся либо знак «+», либо знак «–»).

Теорема 4.6. Если $x_n\to\infty$, а $y_n\to\infty$ или $y_n\to a\neq 0$ при $n\to\infty$, то и $x_n y_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

►Докажем теорему 4.5 для случая $x_n\to+\infty$ и $y_n\to+\infty$. Выберем произвольное число $M>0$. Из замечания 4.2 следует, что существуют числа $N_1(M)$ и $N_2(M)$ такие, что для $n>N_1(M)$ верно неравенство $x_n>M/2$, а для $n>N_2(M)$ – неравенство $y_n>M/2$. Пусть $N(M)=\max\{N_1(M), N_2(M)\}$. Тогда для $n>N(M)$ имеем: $x_n+y_n>M$, а это и означает, что $x_n+y_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Доказательство теоремы 4.6 приведено, например, в [1].◄

Пример 4.4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+\sqrt{n})$.

► $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$ (пример 4.2), $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+\sqrt{n})=+\infty$ (теорема 4.5).◄

Замечание 4.4. Арифметические действия с бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями могут привести к случаям, когда неприменимы теоремы 3.5, 4.5 и 4.6. Так, при вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ неприменима теорема 4.5, если $x_n, y_n\to+\infty,-\infty$. В этом случае говорят, что выражение x_n-y_n приводит к *неопределённости* вида $\infty-\infty$, а отыскание его предела называют *раскрытием неопределённости*. Частное $\dfrac{x_n}{y_n}$ приводит к неопределённости $\dfrac{0}{0}$, если $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ и неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$, если $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$ при $n\to\infty$. В главе 3 будут рассмотрены другие типы неопределённостей.

В случае неопределённости одно знание пределов последовательностей при $n \to \infty$ не позволяет судить о поведении выражения, составленного из общих членов этих последовательностей, необходимо исследовать само это выражение при $n \to \infty$. Например, $x_n = n \to +\infty$, $y_n = n^2 \to +\infty$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, а в случае, если $x_n = n^2 \to +\infty$, $y_n = n \to +\infty$, $\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пример 4.5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n + 3}{2^n - 1}$.

►Выражение под знаком предела при $n \to \infty$ – неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Оба члена дроби под знаком предела поделим на 2^n, получим: $\frac{4^n + 3}{2^n - 1} = \frac{2^n + 3/2^n}{1 - 1/2^n} = (2^n + 3(1/2)^n)\frac{1}{1-(1/2)^n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n + 3(1/2^n)) = +\infty$ (теорема 4.5), а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-(1/2)^n} = 1$ (теорема 3.5), то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n + 3}{2^n - 1} = +\infty$ (теорема 4.6).◄

Пример 4.6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - \sqrt{n})$.

►Выражение под знаком предела при $n \to \infty$ – неопределённость $\infty - \infty$. Имеем: $n^2 - \sqrt{n} = n^2(1 - n^{-3/2})$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - n^{-3/2}) = 1$ (пример 4.2, пример 4.3 и теорема 3.5), то $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - \sqrt{n}) = +\infty$ (теорема 4.6). ◄