§7. Плоскость как поверхность первого порядка.
Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору

Введём в пространстве прямоугольную декартову систему координат *Oxyz* и рассмотрим уравнение первой степени (или линейное уравнение) относительно *x*, *y*, *z*:

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \qquad (7.1)$$

Теорема 7.1. Любая плоскость может быть задана в произвольной прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (7.1).

Точно так же, как и в случае прямой на плоскости, справедлива теорема, обратная теореме 7.1.

Теорема 7.2. Любое уравнение вида (7.1) задаёт в пространстве плоскость.

Доказательство теорем 7.1 и 7.2 можно провести аналогично доказательству теорем 2.1, 2.2. Из теорем 7.1 и 7.2 следует, что плоскость и только она является поверхностью первого порядка.

Уравнение (7.1) называется *общим уравнением пло-скости*. Его коэффициенты *A*, *B*, *C* трактуются геометрически как координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, определяемой этим уравнением. Этот вектор $\vec{n}(A, B, C)$ называется вектором нормали к данной плоскости. Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (7.2)$$

при всевозможных значениях коэффициентов *A*, *B*, *C* задаёт все плоскости, про-ходящие через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Оно называется *уравнением связки плоскостей*. Выбор конкретных значений *A*, *B*, *C* в (7.2) означает выбор плоскости *P* из связки, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}(A, B, C)$ (рис.7.1).

Пример 7.1. Написать уравнение плоскости *P*, проходящей через точку *A*(1, 2, 0) параллельно векторам $\vec{a} = (1, 2, -1),\ \vec{b} = (2, 0, 1)$.

►Вектор нормали $\vec{n}$ к *P* ортогонален данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 7.2), поэтому за $\vec{n}$ можно взять их векторное произведение:

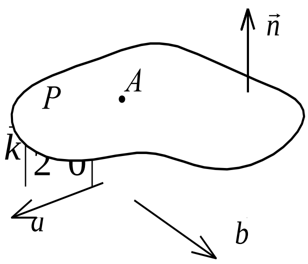

Рис. 7.2. К примеру 7.1

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}.$$

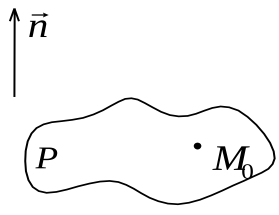

Рис. 7.1. К уравнению связки плоскостей

Подставим координаты точки M_0 и вектора $\vec{n}$ в уравнение (7.2), получим уравнение плоскости

$$P: 2(x - 1) - 3(y - 2) - 4z = 0 \text{ или}$$

$$P: 2x - 3y - 4z + 4 = 0.$$◄

Если два из коэффициентов *A*, *B*, *C* уравнения (7.1) равны нулю, оно задаёт плоскость, параллельную одной из координатных плоскостей. Например, при $A = B = 0$, $C \neq 0$ – плоскость $P_1 : Cz + D = 0$ или $P_1 : z = -D/C$ (рис. 7.3). Она па-раллельна плоскости *Oxy*, ибо её вектор нормали $\vec{n}_1(0, 0, C)$ перпендикулярен этой плоскости. При $A = C = 0$, $B \neq 0$ или $B = C = 0$, $A \neq 0$ уравнение (7.1) определяет плоскости $P_2 : By + D = 0$ и $P_3 : Ax + D = 0$, параллельные координатным плоскостям *Oxz* и *Oyz*, так как их векторы нормали $\vec{n}_2(0, B, 0)$ и $\vec{n}_3(A, 0, 0)$ им перпендикулярны (рис. 7.3).

Если только один из коэффициентов *A*, *B*, *C* уравнения (7.1) равен нулю, то оно задаёт плоскость, параллельную одной из координатных осей (или её со-держащую, если $D = 0$). Так, плоскость $P\colon Ax + By + D = 0$ параллельна оси *Oz*,

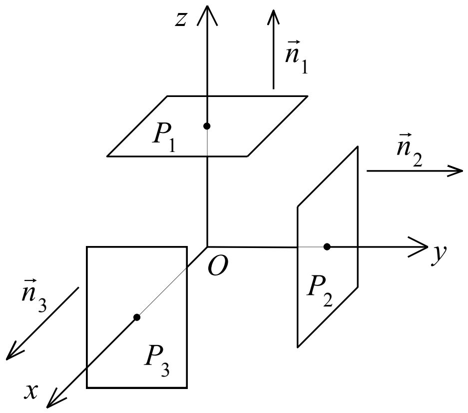

Рис. 7.3. Плоскости параллельные плоскостям координат

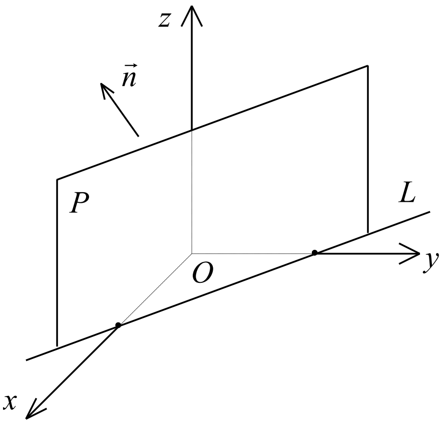

Рис. 7.4. Плоскость P: $Ax + By + D = 0$, параллельная оси *Oz*

поскольку её вектор нормали $\vec{n}(A, B, 0)$ перпендикулярен оси *Oz*. Заметим, что она проходит через прямую $L : Ax + By + D = 0$, лежащую в плоскости *Oxy* (рис. 7.4).

При $D = 0$ уравнение (7.1) задаёт плоскость, проходящую через начало координат.

Пример 7.2. Найти значения параметра λ, при которых уравнение

$$\lambda x + (\lambda^2 + 2\lambda)y + (\lambda^2 + \lambda - 2)z + \lambda - 3 = 0$$

определяет плоскость P: а) параллельную одной из координатных плоскостей;
б) параллельную одной из координатных осей; в) проходящую через начало координат.

►Запишем данное уравнение в виде

$$\lambda x + \lambda(\lambda + 2)y + (\lambda + 2)(\lambda - 1)z + \lambda - 3 = 0. \qquad (7.3)$$

При любом значении λ уравнение (7.3) определяет некоторую плоскость, так как коэффициенты при x, y, z в (7.3) не обращаются в нуль одновременно.

а) При $\lambda = 0$ уравнение (7.3) определяет плоскость P, параллельную плоскости Oxy, $P : z = -3/2$, а при $\lambda = -2$ оно определяет плоскость P, параллельную плоскости Oyz, $P: x = -5/2$. Ни при каких значениях λ плоскость P, определяемая уравнением (7.3), не параллельна плоскости Oxz, поскольку коэффициенты при x, z в (7.3) не обращаются в нуль одновременно.

б) При $\lambda = 1$ уравнение (7.3) определяет плоскость P, параллельную оси Oz, $P: x + 3y - 2 = 0$. При остальных значениях параметра λ оно не определяет плоскости, параллельной только одной из координатных осей.

в) При $\lambda = 3$ уравнение (7.3) определяет плоскость P, проходящую через начало координат, $P: 3x + 15y + 10z = 0$. ◄

Пример 7.3. Написать уравнение плоскости *P*, проходящей через: а) точку $M(1, -3, 2)$ параллельно плоскости ось *Oxy*; б) ось *Ox* и точку $M(2, -1, 3)$.

►а) За вектор нормали $\vec{n}$ к *P* здесь можно взять вектор $\vec{k}(0, 0, 1)$ – орт оси *Oz*, так как он перпендикулярен плоскости *Oxy*. Подставим координаты точки $M(1, -3, 2)$ и вектора $\vec{n}$ в уравнение (7.2), получим уравнение плоскости $P: z - 3 = 0$.

б) Вектор нормали $\vec{n}$ к *P* ортогонален векторам $\vec{i}(1, 0, 0)$ и $\overrightarrow{OM}(2, -1, 3)$, поэтому за $\vec{n}$ можно взять их векторное произведение:

$$\vec{n} = \vec{i} \times \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - \vec{k}.$$

Подставим координаты точки O и вектора $\vec{n}$ в уравнение (7.2), получим уравнение плоскости $P: -3(y - 0) - (z - 0) = 0$ или $P: 3y + z = 0$.◄