§2. Скалярное произведение двух векторов

Определение 2.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

(Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определён (т.е. может принимать любое значение между 0 и π). Однако косинус этого угла ограничен, и в соответствии с определением 2.1 скалярное произведение таких векторов существует и равно 0.)

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначать так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$ иногда $(\vec{a},\vec{b})$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

где $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение применяется в физике при вычислении работы A, *затрачиваемой при прямолинейном движении материальной точки из положения* P_1 *в положение* P_2 *в поле действия силы* $\vec{F}$,

$$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}. \qquad (2.1)$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4. $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

5. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Замечание 2.1. Свойства 3 – 4 называются *линейными свойствами* скалярного произведения.

►**1.** Данное равенство является следствием определения 2.1 и свойства угла между векторами: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$.

2. Данное утверждение следует из определения 2.1 и свойства 5 проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ (§1). Действительно,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

3. Доказываемое равенство очевидно, если хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нулевой. Пусть теперь $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$. Тогда по доказанному свойству 2 и свойству 3 проекции суммы векторов имеем:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot\mathbf{пр}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot(\mathbf{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+\mathbf{пр}_{\vec{a}}\vec{c})=$$
$$=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4. Данное соотношение очевидно в случае, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, или $\lambda=0$. Предполагая теперь, что $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ и

$\lambda \neq 0$, в силу выше доказанного свойства 2 и свойства 4 проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ имеем

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. В случае $\vec{a} \neq \vec{0}$ доказываемое равенство следует из определения 2.1, так как тогда $(\widehat{\vec{a},\vec{a}}) = 0$ и $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{a}}) = 1$. Если же $\vec{a} = \vec{0}$, то $|\vec{a}|^2 = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$. Таким образом, и в этом случае $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

6. Предположим сначала, что $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Утверждение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ согласно
определению 2.1 эквивалентно утверждению: $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$ или утверждению: $\vec{a} \perp \vec{b}$, так как в этом случае угол $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$. Если же хотя бы один из этих векторов нулевой, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, а нуль-вектор можно считать перпендикулярным любому вектору, в том числе и нулевому. ◄

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в прямоугольном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Раскрывая скобки в правой части этого равенства, учитывая линейные свойства 3 и 4 скалярного произведения и принимая во внимание, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, а $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (2.3)$$

В частном случае, при $\vec{a} = \vec{b}$, имеем $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.4)$$

Равенство (2.4) даёт выражение для длины вектора $\vec{a}$ через его координаты. В частности, если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ и, следовательно, $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ (см. (6.6), глава 1), то

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.5)$$

С помощью соотношения (2.5) вычисляется расстояние между точками A и B по известным прямоугольным координатам этих точек.

Из определения 2.1 с учетом (2.3) и (2.4) следует формула для косинуса угла между данными векторами:

$$\cos(\vec{a} \,\widehat{,}\, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.6)$$

Полагая в (2.6) поочередно $\vec{b} = \vec{i}, \vec{b} = \vec{j}, \vec{b} = \vec{k}$, приходим к формулам для так называемых *направляющих* косинусов вектора $\vec{a}$, под которыми понимают косинусы углов, образованных $\vec{a}$ с векторами прямоугольного базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ или, что то же самое, с осями прямоугольной системы координат:

$$\cos(\vec{a},\widehat{\ \vec{i}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}\,|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos(\vec{a},\widehat{\ \vec{j}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}\,|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos(\vec{a},\widehat{\ \vec{k}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}\,|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (2.7)$$

$$\cos^2(\vec{a},\widehat{\vec{i}}) + \cos^2(\vec{a},\widehat{\vec{j}}) + \cos^2(\vec{a},\widehat{\vec{k}}) = 1.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ – это координаты его орта $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Из равенств (2.7) следует, что по знаку координаты вектора $\vec{a}$ можно судить о том, какой угол – острый или тупой – образует этот вектор с данной осью координат. Действительно, в силу этих равенств знак координаты вектора $\vec{a}$ по данной оси координат совпадает со знаком косинуса рассматриваемого угла. Таким образом, если координата по данной оси отрицательна, то этот угол тупой, а если положительна, то острый.

Наконец, для проекции вектора $\vec{a}$, заданного первым из разложений (2.2), на ось $\vec{l}$ с ортом $\vec{e}$ справедливо равенство

$$\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{e} = a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{e}$.

Пример 2.1. Точки $A(1,-1,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(2,1,2)$ – вершины треугольника. Найти его внутренний угол при вершине B.

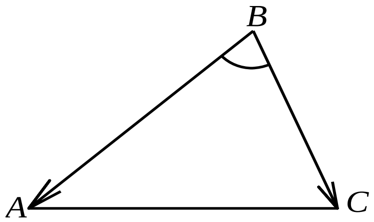

Рис. 2.1. К примеру 2.1

►Угол треугольника ABC при вершине B образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 2.1). Найдём их координаты, вычитая из координат их концов координаты начала (формула (6.4), глава 1): $\overrightarrow{BA} = (-2, 2, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 4, 1)$, а их длины по формуле (2.4):

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3,\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}.$$

Для $\cos\hat{B}$ в силу (2.6) имеем равенство

$$\cos\hat{B} = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{(-2)(-1) + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 1}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда заключаем, что $\hat{B} = \pi/4$.◄

Пример 2.2. ***Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$,***
$|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\vec{q}) = 2\pi/3$.

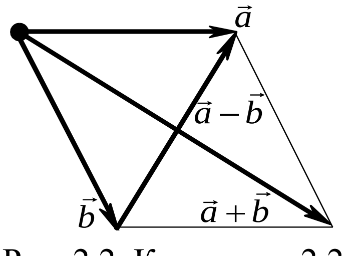

Рис. 2.2. К примеру 2.2

►Длины диагоналей параллелограмма равны $|\vec{a} + \vec{b}\,|$, $|\vec{a} - \vec{b}\,|$ (рис. 2.2), $\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$. В силу свойству 5 имеем:

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$ или $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{(5\vec{p}+\vec{q})^2} = \sqrt{25\vec{p}^2+10\vec{p}\vec{q}+\vec{q}^2}$. Поскольку $\vec{p}\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos(\vec{p},\vec{q}) = 4\cdot 3\cdot\cos(2\pi/3) = -6$, $\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 = 16$, $\vec{q}^2 = |\vec{q}|^2 = 9$, то $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{25\cdot 16 - 60 + 9} = \sqrt{349}$. Аналогично, $\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{p}+3\vec{q})^2} = \sqrt{\vec{p}^2+6\vec{p}\vec{q}+9\vec{q}^2} = \sqrt{16-36+9\cdot 9} = \sqrt{61}$. ◄

Пример 2.3. Найти работу, совершаемую при прямолинейном движении материальной точки из положения $P_1(1,-1,3)$ в положение $P_2(2,-1,1)$ в поле действия силы $\vec{F} = (-2,\ 3,\ -5)$.

►Согласно (2.1) для работы A имеем равенство: $A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$. Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-2)$, то $A = (-2)\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-5)(-2) = 8$ (ед. энергии).◄