12.3. Формула Остроградского–Гаусса

Связь между поверхностным интегралом II рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью устанавливает следующая теорема.

Теорема 12.1. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место формула

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy, \qquad (12.9)$$

где S — граница области V и интегрирование по S производится по ее внешней стороне.

Формула (12.9) называется *формулой Остроградского–Гаусса* (является аналогом формулы Остроградского–Грина (см. п. 10.3).

❑ Пусть область V ограничена снизу поверхностью S_1, уравнение которой $z = z_1(x;y)$; сверху — поверхностью S_2, уравнение которой $z = z_2(x;y)$ (функции $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D — проекции V на плоскость Oxy, $z_1(x;y) \leqslant z_2(x;y)$); сбоку — цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz (см. рис. 43).

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x;y;z_2(x;y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x;y;z_1(x;y))\,dx\,dy.$$

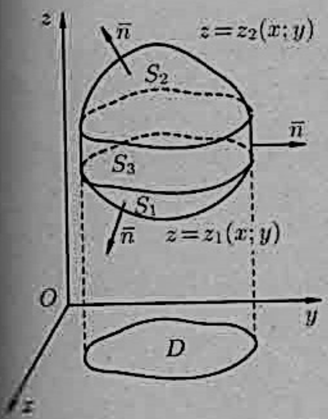

Рис. 43.

Двойные интегралы в правой части равенства заменим поверхностными интегралами II рода по внешней стороне поверхностей S_1 и S_2 соответственно (см. (12.3)). Получаем:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy.$$

Добавляя равный нулю интеграл $\iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy$ по внешней стороне S_3 (см. свойство 5 п. 12.1), получим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy,$$

или
$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S R(x;y;z)\,dx\,dy, \qquad (12.10)$$

где S — поверхность, ограничивающая область V.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S Q(x;y;z)\,dx\,dz, \qquad (12.11)$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz. \qquad (12.12)$$

Складывая почленно равенства (12.10), (12.11) и (12.12), получаем формулу (12.9) Остроградского–Гаусса. ■

Замечания.

1. Формула (12.9) остается справедливой для любой области V, которую можно разбить на конечное число областей рассмотренного вида.

2. Формулу Остроградского–Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов II рода по замкнутым поверхностям.

Пример 12.2. Вычислить $I = \oiint\limits_{+S} -x\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 5\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x - 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение: По формуле (12.9) находим:

$$I = \iiint\limits_V (-1+0+0)\,dx\,dy\,dz = -\iiint\limits_V dv = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = -6. \qquad ●$$

Заметим, что интеграл I_1 (см. пример 12.1) можно вычислить иначе:

$$I_1 = I - \iint\limits_{S_2} - \iint\limits_{S_3} - \iint\limits_{S_4},$$

где поверхности S_2, S_3, S_4 есть соответственно треугольники OAC, AOB, COB (см. рис. 44).

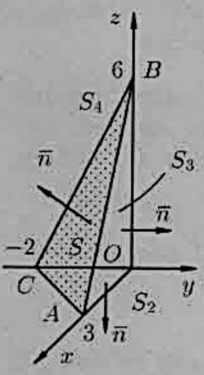

Рис. 44.

Имеем:

$$I_1 = -6 + \iint\limits_{(OAC)} 5\,dx\,dy - \iint\limits_{(AOB)} z\,dz\,dx + \iint\limits_{(COB)} (-0)\,dy\,dz =$$

$$= -6 + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 - \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{6-2x} z\,dz =$$

$$= +9 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 (6-2x)^2\,dx = 9 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(6-2x)^3}{3}\Big|_0^3 = -9.$$

12.4. Формула Стокса

Связь между поверхностными и криволинейными интегралами II рода устанавливает следующая теорема.

Теорема 12.2. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности S, то имеет место формула

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz =$$

$$= \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (12.13)$$

где L — граница поверхности S и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т. е. при обходе границы L поверхность S должна оставаться все время слева).

Формула (12.13) называется ***формулой Стокса*** (Д. Г. Стокс — английский математик, физик).

☐ Пусть $z=f(x;y)$ — уравнение поверхности S, функции $f(x;y)$, $f_x'(x;y)$, $f_y'(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D (проекции поверхности S на плоскость Oxy), L_1 — граница области D (см. рис. 45). Будем считать, что поверхность S пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной точке. Выберем верхнюю сторону поверхности S. Рассмотрим сначала интеграл вида $\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx$.

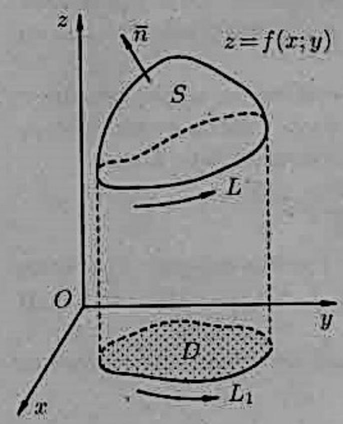

Рис. 45.

Значения функции $P(x;y;z)$ на L равны значениям функции $P(x;y;z(x;y))$ на L_1. Интегральные суммы для криволинейных интегралов II рода по контурам L и L_1 совпадают. Поэтому

$$\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx = \oint\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))\,dx.$$

Применим к этому интегралу формулу Остроградского–Грина (см. п. 10.3). Тогда получим:

$$\int\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))dx = \iint\limits_D \left(0 - \frac{\partial}{\partial y}\big(P(x;y;z(x;y))\big)\right)dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Преобразуем полученный двойной интеграл в равный ему поверхностный интеграл II рода (см. п. 12.2). Для этого последнее равенство перепишем в виде

$$\int\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))\,dx = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma ds$$

(см. 12.7) и используем уравнение нормали к поверхности S (см. Часть 1, (45.3)). Так как выбрана верхняя сторона поверхности S, т. е. $\cos\gamma > 0$ (γ — острый угол между нормалью $\bar{n}$ к поверхности S и осью Oz), то нормаль $\bar{n}$ имеет проекции $-\frac{\partial z}{\partial x}$, $-\frac{\partial z}{\partial y}$, 1. Направляющие косинусы пропорциональны соответствующим проекциям:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1.$$

Отсюда $-\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Тогда

$$-\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\, ds = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma\, ds =$$

$$= -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\, ds - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, ds = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

Аналогично получаются при соответствующих условиях еще два равенства:

$$\oint\limits_L Q(x;y;z)\,dy = \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz,$$

$$\oint\limits_L R(x;y;z)\,dz = \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y}dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}dx\,dz.$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса (12.13). ■

Отметим, что формулу Стокса (12.13) можно применить и для поверхностей более сложного вида (разбив ее на части рассмотренного выше типа).

Формулу Стокса можно применять для вычисления криволинейного интеграла по замкнутому контуру с помощью поверхностного интеграла.

Из формулы Стокса вытекает, что если выполняются условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

(см. п. 10.4), то криволинейный интеграл по произвольному пространственному замкнутому контуру L равен нулю: $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + P\,dz = 0$. Следовательно, в данном случае криволинейный интеграл не зависит от вида пути интегрирования.

Пример 12.3. Вычислить $I = \oint\limits_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, где контур L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$: а) непосредственно, б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Решение: Поверхность интегрирования изображена на рисунке 46.

а) Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z \equiv 0, \quad t \in [0; 2\pi].$$

По формуле (10.7) имеем:

$$I = \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t \cdot R^3\sin^3 t(-R\sin t)\cdot dt + \int_0^{2\pi} R\cos t\, dt =$$

$$= -R^6 \int_0^{2\pi} \sin^4 t\cos^2 t\, dt + 0 = -R^6 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2t)dt =$$

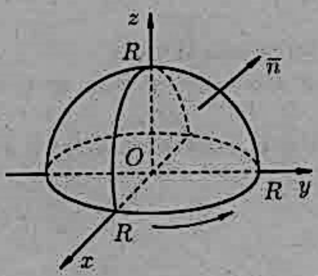

Рис. 46.

$$= -\frac{R^6}{8}\cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt + \frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\cos 2t\, dt =$$

$$= -\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\, dt + 0 = -\frac{R^6}{16}2\pi = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

б) По формуле Стокса (12.13) находим:

$$I = \iint_S (0-0)\, dy\, dz + (0-0)\, dx\, dz + (0 - 3x^2y^2)\, dx\, dy =$$

$$= -3\iint_S x^2y^2\, dx\, dy = -3\iint_D x^2y^2\, dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$I = -3\iint_D r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi = -3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^R r^5\, dr =$$

$$= -\frac{3}{6}R^6\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{8}R^6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{16}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} + 0 = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

12.5. Некоторые приложения поверхностного интеграла II рода

С помощью поверхностного интеграла II рода можно найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью S_2 ($z = z_2(x;y)$), снизу — поверхностью S_1 ($z = z_1(x;y)$), сбоку — цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy, \qquad (12.14)$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Действительно, положив в формуле Остроградского–Гаусса (12.9) $P(x;y;z) = x$, $Q(x;y;z) = 0$, $R(x;y;z) = 0$, находим:

$$\oiint_S x\,dy\,dz = \iiint_V dx\,dy\,dz, \quad \text{т. е.} \quad V = \oiint_S x\,dy\,dz. \tag{12.15}$$

Аналогично, полагая $P = 0$, $Q = y$, $R = 0$, находим еще одну формулу для нахождения объема тела с помощью поверхностного интеграла II рода:

$$V = \oiint_S y\,dx\,dz. \tag{12.16}$$

Наконец, положив $P = 0$, $Q = 0$, $R = z$, по формуле (12.9) находим третью формулу

$$V = \oiint_S z\,dx\,dy, \tag{12.17}$$

выражающую объем тела через поверхностный интеграл II рода.

Сложив почленно равенства (12.15)–(12.17) и разделив на три, получим формулу (12.14).

Другие применения поверхностного интеграла II рода рассмотрим в главе VII «Элементы теории поля».