§1. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку (первого рода)

Эти интегралы называются также *интегралами с бесконечными пределами*.

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на всяком конечном промежутке $[a,b]\subset[a,+\infty)$. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ и обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1.1}$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,, \tag{1.2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1.3}$$

(В формуле (1.3) переменные a и b стремятся к своим пределам независимо).

Предполагается, что функция $f(x)$ интегрируема на всяком конечном промежутке, входящем в соответствующих бесконечный промежуток, и существуют конечные или бесконечные пределы (1.1) – (1.3). Эти пределы и называются *несобственными интегралами первого рода*. Говорят также в случае конечных пределов (1.1) – (1.3), что соответствующий интеграл *сходится*. Если предел не существует или бесконечен, то рассматриваемый интеграл называется *расходящимся*. В случае, когда пределы (1.1) – (1.3) не существуют (ни как конечные, ни как бесконечные). соответствующий несобственный интеграл понимается лишь как символ.

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что подынтегральная функция является непрерывной в соответствующем бесконечном промежутке. Этого достаточно для большинства приложений.

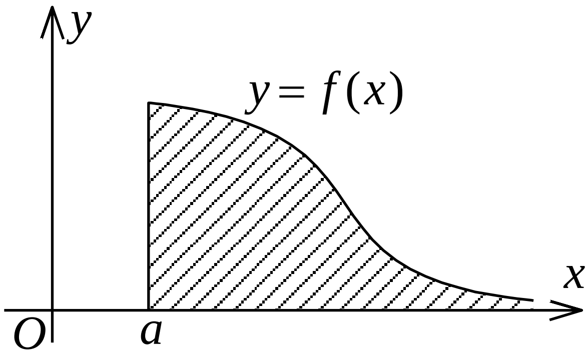

Рис. 1.1. Бесконечная криволинейная трапеция с основанием $[a,+\infty)$

Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода.

Если $f(x)\ge 0$, то несобственный интеграл первого рода численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции, опирающейся на промежуток интегрирования. Для интеграла по промежутку $[a,+\infty)$ такая криволинейная трапеция изображена на рис. 1.1.

Примеры.

1.1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$. Интеграл сходится.

1.2. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right)=+\infty$. Интеграл расходится.

1.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_a^b\right)=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Интеграл сходится.

Замечание 1.1. Несобственный интеграл (1.3) может рассматриваться как сумма двух интегралов по промежуткам $(-\infty,a]$ и $[a,+\infty)$, где a – любое число. Интеграл (1.3) сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба слагаемых интеграла.