Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

В. Г. ПАК

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Санкт-Петербург
2010

УДК 519.1(076)
П13

Пак, В.Г.

П13 Сборник задач по дискретной математике. Комбинаторный анализ / В. Г. Пак; Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2010. — 201 с.

ISBN 978-5-85546-545-7

Сборник содержит задачи по всем основным разделам разделам комбинаторного анализа, изучаемым в курсе дискретной математики. Задачам каждого раздела предшествуют теоретические сведения, необходимые для их решения. Большинство задач снабжены подробными решениями или указаниями. В конце сборника приведены более 300 задач по комбинаторике для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов младших курсов всех специальностей.

УДК 519.1(076)

Р е ц е н з е н т доц. каф. математики СПбГАСУ, канд. физ.-мат. наук *А. Е. Михайлов*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

ISBN 978-5-85546—545-7

О Г Л А В Л Е Н И Е

П Р Е Д И С Л О В И Е

Комбинаторный анализ — раздел дискретной математики, в котором разрабатываются методы решения перечислительных комбинаторных задач, основанные на фундаментальных понятиях алгебры и математического анализа. Это чрезвычайно важный раздел, поскольку его методы предоставляют математикам самые эффективные средства для решения разнообразных комбинаторных задач, некоторые из которых не поддаются решению другими методами. По мере их освоения читателем будет глубже осознаваться взаимосвязь между разными разделами математики, взаимное прникновение идей, методов, а значит и необходимость всестороннего изучения математики для умелого применения её на практике.

Настоящее пособие посвящено направлению построения методов комбинаторного анализа, связанному с теорией производящих функций и основанной на ней техникой символических вычислений. Целью задач каждого раздела является развитие навыков обращения с введёнными в них конструкциями, а затем умения применять освоенные методы для решения комбинаторных задач. В первом разделе вводятся понятия производящей и экспоненциальной производящей функции, операции над ними. Приведены задачи на освоение техники символических вычислений с применением степенных рядов, нахождение производящих функций некоторых наиболее употребительных последовательностей комбинаторных чисел. Также показана очень красивая и поучительная методика доказательства комбинаторных тождеств с помощью производящих функций. Второй раздел посвящён методу рекуррентных соотношений. На ряде разобранных примеров показано, как с его помощью можно легко и эффективно решать сложные перечислительные задачи, используя аппарат производящих функций. В отдельном подразделе рассмотрена теория решений линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами, часто встречающихся в комбинаторных задачах.

В конце книги приведены более 300 задач для самостоятельного решения, на которых можно проверить, насколько хорошо усвоены методы комбинаторики, применяемые в дискретной математике. Тематика задач включает весь спектр комбинаторных методов от простейших формул до производящих функций, т.е. выходит за рамки настоящего пособия. Уровень трудности также разнообразный: некоторые решаются применением одной формулы, другие требуют нестандартного подхода, сообразительности, знания сложных, нетривиальных методов комбинаторного анализа. Для решения каждой задачи нужно её классифицировать, найти подходящий метод, а при наличии нескольких таковых выбрать оптимальный, а для этого необходимо владеть всеми основными формулами, приёмами, правилами комбинаторики. Поэтому их решение будет хорошим упражнением при самостоятельной подготовке к контрольным работам и к экзамену.

Для самоконтороля все задачи снабжены ответами.

1. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Алгебра производящих функций

Математический аппарат теории производящих функций основывается на степенных рядах. Поэтому для умелого применения методов этой теории к решению комбинаторных задач надо овладеть техникой обращения со степенными рядами.

Введём понятие производящей функции. Пусть $a_0, a_1, \ldots$ — некоторая (конечная или бесконечная) последовательность чисел (сокращённое обозначение $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ или $\{a_n\}_{n=0}^{N}$ в случае конечной последовательности). ***Производящей функцией*** последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ [1] называется степенной ряд

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots .^{2)}$$

[1] В дальнейшем бесконечную последовательность будем обозначать $\{a_n\}$.

[2] В случае конечной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{N}$ ряд вырождается в многочлен степени N.

Если ряд $F_a(z)$ сходится к некоторой функции $f_a(z)$, последняя также называется производящей для $\{a_n\}$.

В задачах на нахождение производящих функций последовательностей чисел будем впредь иметь в виду вычисление именно $f_a(z)$, т.е. суммы степенного ряда $F_a(z)$ в области его сходимости.

Последовательность чисел однозначно определяет производящую функцию; обратное же верно не всегда, а лишь в случае сходимости степенного ряда в некотором круге радиуса $R > 0$ (это следует из теории аналитических функций).

При решении комбинаторных задач очень полезными оказались экспоненциальные производящие функции[3)].

Экспоненциальной производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется ряд

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = a_0 + a_1 z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots$$

(в случае сходимости его сумма $e_a(z)$ также называется экспоненциальной производящей функцией $\{a_n\}$).

Рассматривая производящие функции как формальные ряды, можно определить операции их сложения, умножения на константу, перемножения и деления. Пусть $F_a(z)$, $F_b(z)$ — производящие функции последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ соответственно. *Суммой* $F_a(z)$, $F_b(z)$ называется производящая функция последовательности $\{a_n + b_n\}$:

$$F_{a+b}(z) = F_a(z) + F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

В комбинаторном смысле такая сумма представляет собой производящую функцию чисел выборок, формирующихся как объединения непересекающихся выборок, которым соответствуют слагаемые.

[3)] В задачах подразд. *1.2* будет показано, что обычные производящие функции порождают числа сочетаний, а экспоненциальные — числа размещений.

Произведением $F_a(z)$ *на константу* c называется производящая функция последовательности $\{ca_n\}$:

$$F_{ca}(z) = cF_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n z^n.$$

Нулём относительно сложения в исчислении производящих функций является нулевой ряд $\mathsf{o}(z)$ — производящая функция нулевой последовательности. Очевидно, что $F_a(z) + \mathsf{o}(z) = \mathsf{o}(z) + F_a(z) = F_a(z)$ для любого ряда $F_a(z)$. Обратным относительно сложения для ряда $F_a(z)$ будет ряд $-F_a(z) = (-1)F_a(z)$: $F_a(z) + (-F_a(z)) = (-F_a(z)) + F_a(z) = \mathsf{o}(z)$.

Аналогично определяются эти операции для экспоненциальных производящих функций: если $E_a(z)$, $E_b(z)$ таковые для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, то

$$E_{a+b}(z) = E_a(z) + E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} z^n$$

будет их суммой, а

$$E_{ca}(z) = cE_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ca_n}{n!} z^n$$

является произведением $E_a(z)$ на константу c. Очевидно, что $\mathsf{o}(z)$ и $-E_a(z) = (-1)E_a(z)$ — соответственно нулевой и обратный относительно сложения элементы исчисления экспоненциальных производящих функций.

Правило перемножения производящих функций — обобщение правила свёртки для многочленов на случай бесконечных сумм. Именно, *произведением* $F_a(z)$ *и* $F_b(z)$ называется ряд

$$F_{ab}(z) = F_a(z) \cdot F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, $\ldots$, $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 = \sum_{s=0}^{n} a_sb_{n-s}$. *Произведением экспо-*

ненциальных производящих функций $E_a(z)$ *и* $E_b(z)$ называется ряд

$$E_{ab}(z) = E_a(z) \cdot E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

где $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + 2a_1 b_1 + a_2 b_0$, $\ldots$, $c_n = a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + C_n^2 a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 = \sum\limits_{s=0}^{n} C_n^s a_s b_{n-s}$ [4]. Комбинаторный смысл произведения — производящая функция чисел выборок (сочетаний или размещений), формирующихся по правилу произведения из элементов выборок, которым соответствуют сомножители. Единицей относительно умножения является ряд $\mathbf{1}(z)$ — производящая (экспоненциальная производящая) функция последовательности $\{1,\ 0,\ 0,\ \ldots\}$. Нетрудно проверить, что

$$F_a(z) \cdot \mathbf{1}(z) = \mathbf{1}(z) \cdot F_a(z) = F_a(z)$$

для любого ряда $F_a(z)$ (для экспоненциальных — $E_a(z) \cdot \mathbf{1}(z) = \mathbf{1}(z) \cdot E_a(z) = E_a(z)$). Обратным к ряду $F_a(z)$ ($E_a(z)$) относительно умножения является такой ряд $F_a^{-1}(z)$ ($E_a^{-1}(z)$), что

$$F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = F_a^{-1}(z) \cdot F_a(z) = \mathbf{1}(z)$$
$$(E_a(z) \cdot E_a^{-1}(z) = E_a^{-1}(z) \cdot E_a(z) = \mathbf{1}(z)).$$

Для вычисления обратного ряда надо ввести операцию деления.

Частным производящих функций $F_a(z)$ *и* $F_b(z)$ (у ряда $F_b(z)$ $b_0 \neq 0$) называется ряд

$$F_{a/b}(z) = \frac{F_a(z)}{F_b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

[4] C_n^s — биномиальный коэффициент, или число сочетаний из n по s.

коэффициенты которого находятся по правилу:

$$c_0 b_0 = a_0,$$
$$c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1,$$
$$c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2,$$
$$c_0 b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3 b_0 = a_3,$$
$$\ldots$$

т.е. для их вычисления надо решить бесконечную систему уравнений. Коэффициент c_0 находится из первого уравнения, c_1 — из второго после подстановки c_0, и т.д.

Частное экспоненциальных производящих функций $E_a(z)$ *и* $E_b(z)$ $(b_0 \neq 0)$ определяется аналогично, т.е. для нахождения коэффициентов ряда

$$E_{a/b}(z) = \frac{E_a(z)}{E_b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

надо решить систему уравнений $c_0 b_0 = a_0$, $c_0 b_1 + {} + c_1 b_0 = a_1$, $c_0 b_2 + 2c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2$, $c_0 b_3 + C_3^1 c_1 b_2 + C_3^2 c_2 b_1 + c_3 b_0 = a_3$, $\ldots$. Теперь понятно, что $F_a^{-1}(z) = \frac{\mathbb{1}(z)}{F_a(z)}$ $\left(E_a^{-1}(z) = \frac{\mathbb{1}(z)}{E_a(z)}\right.$ для экспоненциальных производящих функций).

Следует иметь в виду, что все операции над производящими функциями понимаются чисто формально (большего и не требуется для нужд комбинаторного анализа), поэтому вопросы сходимости соответствующих степенных рядов не берутся во внимание. Прежде чем приступать к решению задач, рекомендуется повторить тему «Разложение функций в степенные ряды» из курса математического анализа, особенно разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Производящие функции с введёнными операциями над ними образуют алгебру, которая носит название *алгебра Коши*. Аналогичная алгебра экспоненциальных производящих функций известна под названием *символическое исчисление Блиссара*. (Эта терминология (символические алгебры Коши и Блиссара) используется только специалистами по дискретной математике. Широко употребительной она не является.)

Задачи

1. Вычислить производящие функции следующих последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{N}$: а) $a_n = \alpha^n$, $n = 0, \ldots, N$, $\alpha \neq 0$ — заданное число; б) $a_n = \alpha^n$, $n = 1, \ldots, N$, $a_0 = 0$; в) $a_n = n\alpha^n$, $n = 0, \ldots, N$, $\alpha \neq 0$.

2. Вычислить производящие функции следующих последовательностей $\{a_n\}$: а) $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$[5]; б) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$; в) $a_n = \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$, $\alpha \neq 0$ — заданное число; г) $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$, $\alpha \neq 0$; д) $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$; е) $a_n = n\,(n-1)$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$; ж) $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$; з) $a_n = \sin n\alpha$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$; и) $a_n = \cos n\alpha$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$; к) $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$; л) $a_n = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & n = 0, \\ \frac{1}{(n-1)!}, & n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$; м) $a_n = \frac{1}{(n+k)!}$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$, где k —заданное натуральное число; н) $a_n = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & n = 0, \\ \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$; о) $a_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_{\text{o}}$.

3. По функции $f_a(z)$ найти общий член последовательности $\{a_n\}$, для которой $f_a(z)$ является производящей: а) $(1-z)^{-1}$; б) $(1+z)^{-1}$; в) $(1-z)^{-m}$, где m — заданное натуральное число; г) $(1+z)^{-m}$; д) $\left(1+z^2\right)^{-m}$; е) $e^{-\frac{z^2}{2}}$; ж) $\ln\left(1-\frac{z}{3}\right)$; з) $\ln\left(1+2z^2\right)$; и) $\operatorname{arctg}\frac{z}{2}$; к) $\arcsin 2z$.

4. Найти общие члены последовательностей, для которых следующие функции являются производящими: а) $(p+qz)^{-1}$, p, q — заданные числа, $q \neq 0$; б) $(p+qz)^{-m}$, p, q — заданные числа, $q \neq 0$, m — натуральное число; в) $\left(p+qz+z^2\right)^{-1}$, p, q — заданные действительные числа; г) $\left(p+qz+z^2\right)^{-m}$, p, q — заданные действительные числа, m — натуральное число.

Решение

а) Если $p = 0$, функция не разлагается в ряд с неотрица-

[5] Напомним обозначения множеств: $\mathbb{N}_{\text{o}}$ — множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N}$ — натуральных чисел.

тельными степенями z. Поэтому предполагаем $p \neq 0$.

$$(p+qz)^{-1} = p^{-1}\left(1+\frac{q}{p}z\right)^{-1} =$$
$$= p^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{q}{p}z\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{p^{n+1}}z^n.$$

(Здесь применена формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.) Отсюда получаем, что

$$a_n = \frac{(-1)^n q^n}{p^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}_0;$$

б) снова предполагаем, что $p \neq 0$.

$$(p+qz)^{-m} = p^{-m}\left(1+\frac{q}{p}z\right)^{-m} = p^{-m}\left(1+(-m)\frac{q}{p}z+\right.$$
$$+\frac{(-m)(-m-1)}{2!}\left(\frac{q}{p}z\right)^{2} + \frac{(-m)(-m-1)(-m-2)}{3!}\left(\frac{q}{p}z\right)^{3}+$$
$$\left.+\ldots+\frac{(-m)(-m-1)\ldots(-m-n+1)}{n!}\left(\frac{q}{p}z\right)^{n}+\ldots\right) =$$
$$= p^{-m}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}\left(\frac{q}{p}\right)^{n}z^n\right) =$$
$$= p^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{m+n-1}^{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{m+n-1}^{n}\frac{q^n}{p^{m+n}}z^n.$$

(Здесь применено разложение в ряд Ньютона.) Отсюда

$$a_n = (-1)^n C_{m+n-1}^{n}\frac{q^n}{p^{m+n}},\ n \in \mathbb{N}_0;$$

Заметим, что ответ задачи *а* является частным случаем полученной последовательности при $m = 1$;

в) чтобы функция разлагалась в ряд по неотрицательным степеням z, предполагаем, что $p \neq 0$. Рассмотрим по отдельности три случая.

1-й случай

Дискриминант квадратного трёхчлена $p + qz + z^2$ положителен, т.е. $q^2 - 4p > 0$. Обозначим его действительные корни α_1, α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$ и среди них нет нулевых, так как $p \neq 0$). Тогда, учитывая, что $p + qz + z^2 = (\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)$, имеем

$$
\begin{gathered}
\left(p + qz + z^2\right)^{-1} = \\
= (\alpha_1 - z)^{-1} (\alpha_2 - z)^{-1} = \\
= (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \left((\alpha_1 - z)^{-1} - (\alpha_2 - z)^{-1}\right) = \\
= (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_2^{n+1}} z^n\right) = \\
= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1^{n+1}} - \frac{1}{\alpha_2^{n+1}}\right) z^n
\end{gathered}
$$

(здесь осуществлено разложение дробно-рациональной функции на сумму элементарных дробей методом неопределённых коэффициентов и использован результат задачи *а*). Отсюда получаем

$$
a_n = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{1}{\alpha_1^{n+1}} - \frac{1}{\alpha_2^{n+1}}\right), \; n \in \mathbb{N}_0.
$$

2-й случай

Дискриминант нулевой, т.е. $q^2 - 4p = 0$. Квадратный трёхчлен $p + qz + z^2$ имеет действительный корень (обозначим его α) кратности 2. Тогда

$$
\left(p + qz + z^2\right)^{-1} = (\alpha - z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\alpha^{n+2}} z^n
$$

(здесь использован результат задачи *б* при $m = 2$). Отсюда получаем ответ:

$$
a_n = \frac{n+1}{\alpha^{n+2}}, \; n \in \mathbb{N}_0.
$$

3-й случай

Дискриминант отрицателен, т.е. $q^2-4p<0$. Трёхчлен имеет пару комплексно-сопряжённых корней (обозначим их $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$). Имеем

$$\left(p+qz+z^2\right)^{-1}=(\alpha+i\beta-z)^{-1}(\alpha-i\beta-z)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2i\beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-i\beta)^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+i\beta)^{n+1}}z^n\right)$$

(здесь применена та же методика, что и в первом случае). Запишем комплексные корни в тригонометрической форме: $\alpha\pm i\beta=$ $=\rho(\cos\phi\pm i\sin\phi)$, где $\rho=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}$, $\phi=\arg(\alpha+i\beta)$ — модуль и аргумент (главное значение) комплексного числа $\alpha+i\beta$. Тогда, согласно формуле Муавра, $(\alpha\pm i\beta)^m=\rho^m(\cos m\phi\pm$ $\pm i\sin m\phi)$. Поэтому

$$\left(p+qz+z^2\right)^{-1}=\frac{1}{2i\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{n+1}}\left(\frac{1}{\cos(n+1)\phi-i\sin(n+1)\phi}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\cos(n+1)\phi+i\sin(n+1)\phi}\right)z^n=\frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\phi}{\rho^{n+1}}z^n.$$

Отсюда

$$a_n=\frac{\sin(n+1)\phi}{\beta\rho^{n+1}},\ n\in\mathbb{N}_o;$$

г) снова предполагаем, что $p\neq 0$. Рассмотрим два случая.

1-й случай

Дискриминант квадратного трёхчлена $p+qz+z^2$ неотрицателен, т.е. $q^2-4p\geq 0$, α_1, α_2 — его действительные корни (если дискриминант нулевой, то $\alpha_1=\alpha_2$). Тогда, используя ответ задачи *б*, имеем

$$\left(p+qz+z^2\right)^{-m}=$$
$$=(\alpha_1-z)^{-m}(\alpha_2-z)^{-m}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+n-1}^{n}}{\alpha_1^{m+n}}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+n-1}^{n}}{\alpha_2^{m+n}}z^n.$$

Перемножив степенные ряды по правилу свёртки, получаем, что $\left(p+qz+z^2\right)^{-m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^z$, где

$$a_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{\alpha_1^{m+s} \alpha_2^{m+n-s}},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

2-й случай

Дискриминант отрицателен ($q^2-4p<0$), $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ — комплексные корни трёхчлена, ρ, ϕ — соответственно модуль и аргумент $\alpha+i\beta$. Тогда

$$\begin{gathered}\left(p+qz+z^2\right)^{-m} = \\ = (\alpha+i\beta-z)^{-m}(\alpha-i\beta-z)^{-m} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{m+n-1}^{n}}{(\alpha+i\beta)^{m+n}} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{m+n-1}^{n}}{(\alpha-i\beta)^{m+n}} z^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{(\alpha+i\beta)^{m+s}(\alpha-i\beta)^{m+n-s}} \right) z^n.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}a_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{(\alpha+i\beta)^{m+s}(\alpha-i\beta)^{m+n-s}} = \\ = \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{\rho^{2m+n}(\cos s\phi + i\sin s\phi)(\cos(n-s)\phi - i\sin(n-s)\phi)} = \\ = \frac{1}{\rho^{2m+n}} \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{\cos(n-2s)\phi - i\sin(n-2s)\phi} = \\ = \frac{1}{\rho^{2m+n}} \sum_{s=0}^{n} C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s} \left(\cos(n-2s)\phi + i\sin(n-2s)\phi\right).\end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что симметричные относительно середины суммы слагаемые в полученном выражении комплексно-сопряжены (убедитесь в этом самостоятельно, подставив в слагаемое вместо s индекс $n-s$). Поэтому, если $n=2k+1$ нечётное, то

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\rho^{2(m+k)+1}} \sum_{s=0}^{2k+1} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s}^{2k-s+1} \times$$
$$\times \left(\cos\left(2\left(k-s\right)+1\right)\phi + i\sin\left(2\left(k-s\right)+1\right)\phi\right) =$$
$$= \frac{2}{\rho^{2(m+k)+1}} \sum_{s=0}^{k} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s}^{2k-s+1} \cos\left(2\left(k-s\right)+1\right)\phi.$$

Если $n = 2k$ чётное ($k > 0$), то

$$a_{2k} = \frac{1}{\rho^{2(m+k)}} \sum_{s=0}^{2k} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s-1}^{2k-s} \times$$
$$\times \left(\cos 2\left(k-s\right)\phi + i\sin 2\left(k-s\right)\phi\right) =$$
$$= \frac{2}{\rho^{2(m+k)}} \sum_{s=0}^{k-1} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s-1}^{2k-s} \cos 2\left(k-s\right)\phi + \frac{\left(C_{m+k-1}^{k}\right)^2}{\rho^{2(m+k)}}.$$

Наконец, при $n = 0$ $a_0 = \frac{1}{\rho^{2m}}$.

Итак, окончательный ответ:

$$a_n =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\rho^{2m}}, & n = 0, \\ \frac{2}{\rho^{2(m+k)+1}} \sum\limits_{s=0}^{k} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s}^{2k-s+1} \times & \\ \times \cos\left(2\left(k-s\right)+1\right)\phi, & n = 2k+1, \\ \frac{2}{\rho^{2(m+k)}} \sum\limits_{s=0}^{k-1} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s-1}^{2k-s} \cos 2\left(k-s\right)\phi + & \\ + \frac{\left(C_{m+k-1}^{k}\right)^2}{\rho^{2(m+k)}}, & n = 2k,\ k > 0, \end{cases}$$
$$k \in \mathbb{N}_{\text{o}}.$$

5. Найти $\{a_n\}$, для которых следующие функции являются производящими: а) $\frac{1}{3z+1}$; б) $\frac{1}{2-5z}$; в) $\frac{1}{z^2-z-2}$; г) $\frac{1}{(z-3)^2}$; д) $\frac{1}{4+3z^2}$; е) $\frac{2z+1}{z^2-3z+2}$; ж) $\frac{z-1}{z^2-z+1}$; з) $\frac{1}{(z^2+z+1)^3}$; и) $\frac{1}{\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)^2}$; к) $\frac{z}{1-z^3}$.

6. Найти общие члены последовательностей, для которых следующие функции являются экспоненциальными производящими: а) $e^{\alpha z}$; б) $\cos \alpha z$; в) $\sin \alpha z$; г) $(p+qz)^{-m}$, p, q — заданные числа, $q \neq 0$, m — натуральное число; д) $\ln(1+\alpha z)$, α — заданное число.

7. Найти $e_a(z)$ для следующих $\{a_n\}$: а) $a_n = \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}_o$, $\alpha \neq 0$ — заданное число; б) $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}_o$; в) $a_n = n(n-1)$, $n \in \mathbb{N}_o$; г) $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}_o$; д) $a_n = n!$, $n \in \mathbb{N}_o$; е) $a_n = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & n = 0, \\ (n-1)!, & n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$; ж) $a_n = (n+1)!$, $n \in \mathbb{N}_o$.

8. Доказать правило перемножения экспоненциальных производящих функций.

Решение

Пусть

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \; E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n, \; E_{ab}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n.$$

По правилу свёртки

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s b_{n-s}}{s!\,(n-s)!}.$$

Отсюда

$$c_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} a_s b_{n-s} = \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s b_{n-s}.$$

9. Доказать:

а) сложение и умножение производящих функций коммутативны и ассоциативны;

б) умножение производящих функций дистрибутивно относительно сложения.

10. Доказать, что умножение экспоненциальных производящих функций коммутативно и ассоциативно.

11. С помощью правила деления рядов найти частное: а) $\frac{1}{1-z}$; б) $\frac{1}{1+z}$; в) $\frac{2+3z+5z^2+4z^3}{1+z+z^2}$; г) $\frac{1-z}{1+z^2}$; д) $\frac{z}{1-3z+z^2-z^3}$; е) $\frac{1+z+z^3}{1-z^6}$; ж) $\frac{2z-1}{2+3z-z^3}$; з) $\frac{1+z+z^2+z^3+\ldots}{1-z+z^2-z^3+\ldots}$.

Решение

а) Частное будем искать в виде степенного ряда:

$$\frac{1}{1-z} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\right)(1-z) = 1.$$

Применяя правило деления рядов, получаем:

$$c_0 \cdot 1 = 1 \Rightarrow c_0 = 1;$$
$$c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 1;$$
$$c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1;$$
$$c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot (-1) + c_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_3 = 1;$$
$$\vdots$$

Поэтому

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots;$$

б) действуем аналогично *а*:

$$\frac{1}{1+z} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\right)(1+z) = 1.$$

Отсюда:

$$c_0 \cdot 1 = 1 \Rightarrow c_0 = 1;$$
$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1;$$
$$c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1;$$
$$c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_3 = -1;$$
$$\vdots$$

Ответ:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots .$$

Таким образом, в разобранных задачах *а* и *б* с помощью деления многочленов получены формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

в) вновь применим правило деления рядов:

$$\begin{gathered}
\frac{2+3z+5z^2+4z^3}{1+z+z^2} = \\
= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \ \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \ \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\right)\left(1 + z + z^2\right) = \\
= 2 + 3z + 5z^2 + 4z^3 \ \Rightarrow \\
\Rightarrow \ c_0 \cdot 1 = 2 \ \Rightarrow \ c_0 = 2; \\
c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 = 3 \ \Rightarrow \ c_1 = 1; \\
c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 5 \ \Rightarrow \ c_2 = 2; \\
c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 = 4 \ \Rightarrow \ c_3 = 1; \\
c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow \ c_4 = -3; \\
c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 1 + c_5 \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow \ c_5 = 2; \\
\vdots
\end{gathered}$$

Поэтому

$$\frac{2+3z+5z^2+4z^3}{1+z+z^2} = 2 + z + 2z^2 + z^3 - 3z^4 + 2z^5 + \ldots .$$

Этот же ответ можно получить, разделив «уголком» числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,2+3z+5z^2+4z^3 & 1+z+z^2 \\ \cline{2-2}
\quad\underline{2+2z+2z^2} & 2+z+2z^2+z^3-3z^4+2z^5+\ldots \\
\qquad -\,z+3z^2+4z^3 & \\
\qquad\quad \underline{z+z^2+z^3} & \\
\qquad\qquad -\,2z^2+3z^3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{2z^2+2z^3+2z^4} & \\
\qquad\qquad\qquad -\,z^3-2z^4 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{z^3+z^4+z^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\,-3z^4-z^5 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-3z^4-3z^5-3z^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2z^5+3z^6 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots &
\end{array}
$$

Как видно, правило деления рядов позволяет в общем случае найти только несколько первых коэффициентов частного. Для нахождения формулы общего члена надо использовать методику, описанную в решении задачи *4*, которая, однако, позволяет сравнительно просто получить такую формулу лишь в небольшом числе частных случаев.

12. Пусть $F_a(z)$ — произвольный ненулевой ряд. Доказать, что для любого ряда $F_b(z)$:

$$F_a(z) \cdot F_b(z) = \mathsf{o}(z) \Leftrightarrow F_b(z) = \mathsf{o}(z)\,.$$

13. Пусть $F_a(z)$ — произвольный ненулевой ряд ($a_0 \neq 0$). Доказать, что для него существует единственный обратный ряд $F_a^{-1}(z)$.

14. Найти $\frac{E_a(z)}{E_b(z)}$, $\frac{E_b(z)}{E_a(z)}$, $E_a^{-1}(z)$, $E_b^{-1}(z)$ для следующих $E_a(z)$ и $E_b(z)$: а) $E_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}$, $E_b(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-2)!}$;

б) $E_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$, $E_b(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$; в) $E_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$, $E_b(z) == \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}$.

15. Найти обратную производящую функцию $f_a^{-1}(z)$ для следующих $F_a(z)$: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(-3)^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$.

1.2. Производящие функции некоторых комбинаторных последовательностей

В этом подразделе приведены задачи на нахождение производящих функций последовательностей комбинаторных чисел: перестановок, размещений, сочетаний. На примерах показано применение метода производящих функций к решению задач на нахождение качественного и количественного состава выборок (размещений и сочетаний) при различных схемах отбора, т.е. при наличии всевозможных ограничений на состав выборок.

Задачи

1. Вычислить производящие функции следующих последовательностей: а) сочетаний без повторений $\{C_m^n\}_{n=0}^m$; б) сочетаний с повторениями $\left\{\overline{C}_m^n\right\}_{n=0}^{\infty}$.

2. Найти экспоненциальные производящие функции следующих последовательностей: а) $\{A_m^n\}_{n=0}^m$ размещений без повторений; б) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ перестановок без повторений; в) $\left\{\overline{A}_m^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ размещений с повторениями.

3. Найти производящую функцию последовательности чисел сочетаний из m по n, если в них должен присутствовать по крайней мере один элемент каждого вида. С её помощью найти число таких сочетаний.

Решение

Составим производящую функцию чисел сочетаний при выборе элементов одного вида. Очевидно, что если в сочетание взято k предметов одного вида, то соответствующая производящая функция равна z^k. Если же нужно взять хотя бы один элемент этого вида, т.е. 1, 2 и т.д., то по правилу суммы производящая функция равна $z + z^2 + \ldots$. Теперь, поскольку отбираются элементы всех m видов, по правилу произведения получаем итоговую производящую функцию:

$$F_a(z) = \left(z + z^2 + \ldots\right)^m.$$

Для нахождения нужной формулы числа сочетаний преобразуем $F_a(z)$:

$$F_a(z) = z^m (1 + z + \ldots)^m = z^m (1 - z)^{-m} =$$
$$= z^m \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n-1}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n-1}^{n} z^{m+n} = \sum_{n=m}^{\infty} C_{n-1}^{n-m} z^n =$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty} C_{n-1}^{m-1} z^n.$$

Получаем ответ:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < m, \\ C_{n-1}^{m-1}, & n \geq m, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

4. Решить задачу *3* при условии, что элементы каждого вида должны присутствовать в сочетании чётное (большее нуля) число раз.

5. Даны предметы трёх разных видов. Предметы одного вида неразличимы и имеется их неограниченное число каждого вида. Найти производящую функцию их сочетаний, если:

а) предметы каждого вида могут присутствовать в сочетании в любых количествах; б) в сочетании должно быть чётное число предметов первого вида, нечётное — второго вида и любое (не меньшее 2) — третьего; в) должно быть не менее одного предмета первого вида, не более p — второго и не более q — третьего; г) каждое сочетание содержит не менее p_k и не более q_k предметов k-го вида ($p_k \leq q_k$, $k = 1, 2, 3$). С помощью производящей функции найти качественный состав и количество сочетаний объёма n в каждом случае.

Решение

а) Для построения производящей функции сочетаний $F_C(z)$ надо ввести символические обозначения видов предметов: x_1, x_2, x_3. Тогда производящая функция сочетаний предметов k-го вида равна:

$$F_C^k(z) = 1 + x_k z + x_k^2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n z^n.$$

По правилу произведения производящая функция сочетаний предметов всех трёх видов:

$$\begin{gathered} F_C(z) = F_C^1(z)\, F_C^2(z)\, F_C^3(z) = \\ = \left(1 + x_1 z + x_1^2 z^2 + \ldots\right)\left(1 + x_2 z + x_2^2 z^2 + \ldots\right) \times \\ \times \left(1 + x_3 z + x_3^2 z^2 + \ldots\right). \end{gathered}$$

Качественный состав сочетаний объёма n определяется коэффициентом при z^n, который можно найти, перемножив ряды:

$$\begin{gathered} F_C(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} x_1^s x_2^{n-s}\right) z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_3^n z^n\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{s} x_1^l x_2^{s-l}\right) x_3^{n-s}\right) z^n. \end{gathered}$$

Следовательно, качественный состав сочетаний объёма n определяется символическим выражением

$$C^{(n)}=\sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{s}x_1^l x_2^{s-l}\right)x_3^{n-s}.$$

Например,

$$C^{(3)}=x_3^3+(x_2+x_1)\,x_3^2+\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2\right)x_3+x_2^3+x_1x_2^2+$$
$$+x_1^2x_2+x_1^3=x_3^3+x_2x_3^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1^2x_3+x_2^3+$$
$$+x_1x_2^2+x_1^2x_2+x_1^3$$

(нулевые степени букв равны единице). Слагаемые соответствуют сочетаниям, например, x_2^3 соответствует сочетанию $\{x_2, x_2, x_2\}$, $x_1^2x_3$ — $\{x_1, x_1, x_3\}$ и т.д.

Для нахождения числа сочетаний объёма n надо подставить в $F_C(z)$ $x_1=x_2=x_3=1$ (т.е. найти производящую функцию чисел сочетаний) и вычислить коэффициент при z^n:

$$F_a(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)^3=\left(\frac{1}{1-z}\right)^3=$$
$$=(1-z)^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^{n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}z^n$$

(см. задачу *4,б* подразд. *1.1*). Отсюда

$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Таким образом, с помощью производящих функций получена формула числа сочетаний с повторениями из 3 по n;

б) производящая функция сочетаний:

$$F_C(z) = \left(1 + x_1^2 z^2 + x_1^4 z^4 + \ldots\right)\left(x_2 z + x_2^3 z^3 + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(x_3^2 z^2 + x_3^3 z^3 + \ldots\right) =$$
$$= x_2 x_3^2 z^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_1^{2n} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_2^{2n} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_3^{n} z^{n}\right) =$$
$$= x_2 x_3^2 z^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} x_1^{2s} x_2^{2(n-s)}\right) z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_3^{n} z^{n}\right).$$

Обозначим $a_{2n} = \sum\limits_{s=0}^{n} x_1^{2s} x_2^{2(n-s)}$ и перемножим ряды в последнем выражении, при этом второй ряд необходимо разложить на составляющие с чётными и нечётными степенями z:

$$F_C(z) = x_2 x_3^2 z^3 \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_3^{2n} z^{2n}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_3^{2n+1} z^{2n+1}\right)\right) =$$
$$= x_2 x_3^2 z^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} a_{2s} x_3^{2(n-s)}\right) z^{2n} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} a_{2s} x_3^{2(n-s)+1}\right) z^{2n+1}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(x_2 x_3^2 \left(\left(\sum_{s=0}^{n} a_{2s} x_3^{2(n-s)}\right) z^{2n+3} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\sum_{s=0}^{n} a_{2s} x_3^{2(n-s)+1}\right) z^{2n+4}\right)\right) =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(x_2 x_3^2 \left(\left(\sum_{s=0}^{n-2} a_{2s} x_3^{2(n-s)-4}\right) z^{2n-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\sum_{s=0}^{n-2} a_{2s} x_3^{2(n-s)-3}\right) z^{2n}\right)\right).$$

В итоге получаем символические выражения для качественного состава сочетаний объёма n:

$$C^{(n)} = \begin{cases} 0, & n < 3, \\ x_2 x_3^2 \sum\limits_{s=0}^{k-2} a_{2s} x_3^{2(k-s)-3}, & n = 2k, \\ x_2 x_3^2 \sum\limits_{s=0}^{k-2} a_{2s} x_3^{2(k-s)-4}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}_0,$$

где $a_{2s} = \sum\limits_{l=0}^{s} x_1^{2l} x_2^{2(s-l)}$. Например, при $k = 2$ получаем символические выражения $x_2 x_3^2$ для сочетания объёма 3 (т.е. оно имеет состав $\{x_2,\ x_3,\ x_3\}$) и $x_2 x_3^2 x_3 = x_2 x_3^3$ для сочетания объёма 4 ($\{x_2,\ x_3,\ x_3,\ x_3\}$). При $k = 3$ получаем выражение

$$\begin{aligned} x_2 x_3^2 \left(a_0 x_3^2 + a_2 x_3^0\right) = x_2 x_3^2 \left(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2\right) = \\ = x_2 x_3^4 + x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

для сочетаний объёма 5 и

$$\begin{aligned} x_2 x_3^2 \left(a_0 x_3^3 + a_2 x_3^1\right) = x_2 x_3^2 \left(x_3^3 + \left(x_2^2 + x_1^2\right) x_3\right) = \\ = x_2 x_3^5 + x_2^3 x_3^3 + x_1^2 x_2 x_3^3 \end{aligned}$$

для сочетаний объёма 6. Из этих выражений сразу получаем качественный состав сочетаний.

Как видно, символические выражения в общем виде даже при простых схемах отбора оказываются довольно громоздкими. Поэтому, если этого прямо не требуется в задаче, его выводить не нужно. Построение производящей функции даёт конструктивный алгоритм получения ответа.

Чтобы вычислить производящую функцию чисел сочетаний, подставим в $F_C(z)$ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Тогда $a_{2n} = n + 1$, $\sum\limits_{s=0}^{n-2} a_{2s} = \sum\limits_{s=0}^{n-2} (s+1) = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$. Поэтому

$$F_a(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(C_n^2 z^{2n-1} + C_n^2 z^{2n}\right).$$

Отсюда следует, что число нужных сочетаний объёма n равно:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < 3, \\ C^2_{\frac{n}{2}}, & n \geq 4 \text{ чётное}, \\ C^2_{\frac{n+1}{2}}, & n \geq 3 \text{ нечётное}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n < 3, \\ C^2_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, & n \geq 3, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

($[x]$ — целая часть числа x).

6. Построить производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, где: а) a_n — число решений уравнения $x + 2y + 5z = n$ в целых неотрицательных числах; б) a_n — число решений уравнения $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах, $c_1, \ldots, c_k$ — заданные натуральные числа; в) a_n — число решений уравнения $3x + 5y + 2z = n$, если x, y, z принимают значения 0 или 1; г) a_n — число решений уравнения $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах, если $p_i \leq x_i \leq q_i$, p_i, q_i — заданные целые неотрицательные числа, $i = 1, \ldots, k$; $c_1, \ldots, c_k$ — заданные натуральные числа; д) a_n — число решений уравнения $5x + 2y + 4z = n$ в целых неотрицательных числах, если $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 5$, $2 \leq z \leq 6$.

7. Построить производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, где a_n — число способов уплатить сумму в n копеек монетами достоинством $n_1, \ldots, n_k$ копеек (все n_i различны), если их порядок не имеет значения, и должно быть не более p_i монет достоинством n_i. Монеты одного достоинства неразличимы.

8. Сколькими способами можно оплатить пересылку письма стоимостью 12 рублей марками по 1, 2, 3, 5 рублей, если порядок наклейки марок не имеет значения и марки можно брать в любых количествах?

9. Решить задачу *8* при следующих условиях: а) имеется по 2 марки каждого вида; б) 5 марок стоимостью 1 рубль, 4 —

стоимостью 2 рубля, 2 — стоимостью 3 рубля и 1 — стоимостью 5 рублей.

10. Сколькими способами можно уплатить 33 рубля монетами по 1, 2, 5 рублей, если порядок монет не имеет значения и любые монеты можно брать неограниченное число раз? Монеты одного достоинства неразличимы.

11. Найти производящую функцию $\{a_n\}$, где a_n — число способов разбить n на сумму слагаемых, равных заданным натуральным числам $c_1, \ldots, c_k$ (все c_i различны), если порядок следования слагаемых не имеет значения.

12. Сколькими способами можно разменять 25 рублей монетами по 1, 2, 5 рублей, если должна быть использована хотя бы одна монета каждого достоинства? Монеты одного достоинства неразличимы и их порядок не имеет значения.

13. Обозначим через $C_n^m(n_1, \ldots, n_k)$ количество способов разбить неотрицательное целое число n на сумму m слагаемых, каждое из которых равно одному из натуральных чисел $n_1, \ldots, n_k$ (все n_i различны), если разбиения, различающиеся порядком слагаемых, считаются разными. Найти производящую функцию чисел $a_n = C_n^m(n_1, \ldots, n_k)$.

14. *Проблема абитуриента.* Сколькими способами можно сдать 4 экзамена и поступить в университет, если порядок их сдачи не имеет значения и проходной балл равен: а) 16; б) 17; в) 18?[6)]

15. Имеется по одной марке стоимостью 1, 2, 3, 5, 6, 8 рублей. Сколькими способами можно оплатить пересылку письма стоимостью 17 рублей, если порядок наклейки марок не имеет значения?

16. Сколькими способами можно получить 20 очков, бросая 8 игральных костей (кости считаются различимыми, а порядок их бросания не имеет значения)?

[6)] Напоминаем, что успешная сдача экзамена подразумевает получение 3, 4 или 5 баллов.

17. Обозначим через $a_n(m, p)$ количество способов представить неотрицательное целое число n в виде суммы m целых неотрицательных слагаемых, каждое из которых не превосходит p. С помощью производящей функции найти $a_n(m, p)$.

18. Сколько существует «счастливых» автобусных билетов с номерами от 000 000 до 999 999 (т.е. таких, у которых суммы первых и последних трёх цифр совпадают).

19. Имеется 6 красных, 5 белых и 7 синих шаров (шары одного цвета неразличимы). Сколькими способами можно их разделить между двумя детьми, если: а) каждый должен получить по 9 шаров; б) первый ребёнок должен получить 11 шаров, а второй все остальные?

20. а) Доказать, что с помощью набора гирь по 1, 2, 4, 8 кг (имеется по одной гире каждого веса) можно единственным образом отвесить любое целое число килограммов от 1 до 15, кладя гири на одну чашу весов.

б) Доказать, что, имея по одной гире весом 1, 2, 4, …, 2^n кг, можно единственным образом отвесить любое целое число килограммов от 1 до $2^{n+1} - 1$, кладя гири на одну чашу весов.

21. Даны k видов предметов $x_1, \ldots, x_k$ (предметы одного вида неразличимы). Найти производящую функцию сочетаний, содержащих чётное количество предметов каждого вида. С помощью производящей функции последовательности чисел сочетаний найти число таких сочетаний объёма n.

22. Даны k видов предметов (предметы одного вида неразличимы). Найти экспоненциальную производящую функцию последовательности a_n чисел перестановок, если в перестановке должны присутствовать: а) хотя бы по одному предмету каждого вида; б) от p_i до q_i предметов i-го вида $(i = 1, \ldots, k)$; в) не менее p_i предметов i-го вида $(i = 1, \ldots, k)$.

Решение

а) Экспоненциальная производящая функция, соответствующая единственной перестановке n неразличимых предметов, равна $\frac{1}{n!}z^n$. По правилу суммы получаем экспоненциальную производящую функцию для всех возможных непустых перестановок предметов одного вида:

$$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = e^z - 1.$$

Теперь по правилу произведения строим производящую функцию чисел перестановок предметов всех k видов:

$$E_a(z) = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)^k = (e^z - 1)^k.$$

В этой задаче можно с помощью $E_a(z)$ найти общую формулу числа перестановок a_n:

$$E_a(z) = (e^z - 1)^k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s e^{(k-s)z} =$$
$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-s)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s (k-s)^n\right) \frac{z^n}{n!}.$$

Отсюда

$$a_n = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s (k-s)^n.$$

Например,

$$a_1 = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s (k-s) = k \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s - \sum_{s=1}^{k} (-1)^s C_k^s s =$$
$$= \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k > 1, \end{cases}$$

(о том, как вычислены эти суммы, см. [1-2], [5]). Этот пример совершенно очевиден, так как при $k = 1$ существует одна нужная перестановка, а при $k > 1$ объёма не хватает для того, чтобы вместить по одному предмету каждого вида;

б) экспоненциальная производящая функция:

$$E_a(z) = \left(\frac{z^{p_1}}{p_1!} + \ldots + \frac{z^{q_1}}{q_1!}\right) \ldots \left(\frac{z^{p_k}}{p_k!} + \ldots + \frac{z^{q_k}}{q_k!}\right).$$

Для нахождения числа перестановок объёма n надо раскрыть скобки и найти коэффициент при $\frac{z^n}{n!}$;

в) экспоненциальная производящая функция:

$$E_a(z) = \left(\frac{z^{p_1}}{p_1!} + \frac{z^{p_1+1}}{(p_1+1)!} + \ldots\right) \ldots \left(\frac{z^{p_k}}{p_k!} + \frac{z^{p_k+1}}{(p_k+1)!} + \ldots +\right).$$

При нахождении a_n с помощью этой функции необходимо воспользоваться правилом перемножения экспоненциальных производящих функций.

23. Буквы слова «колокол» написаны на отдельных карточках. Сколько различных анаграмм[7] можно составить из этих карточек, если использовать: а) любые 5 карточек; б) любое число карточек (не обязательно все)?

24. Решить задачу *23* для слов: а) «мухомор»; б) «гагара»; в) «барабан».

25. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из 2 единиц, 3 двоек, 4 пятёрок?

26. Решить задачу *25* при условии, что числа должны содержать: а) хотя бы по одной каждой цифре; б) не менее одной единицы и двух пятёрок.

27. С помощью комбинаторных рассуждений доказать, что коэффициент при z^s в разложении $\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right)^k$ равен $\frac{k^s}{s!}$ при $s \leq n$.

---

[7] Анаграмма — перестановка букв слова.

1.3. Применение производящих функций к доказательству тождеств

В задачах этого раздела производящие функции применяются для получения различных комбинаторных тождеств.

Задачи

1. С помощью тождества

$$(1+z)^n = (1+z)^{n-m}(1+z)^m, \; m \le n,$$

доказать:

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n-m}^{k} C_{m}^{r-k} = C_n^r.$$

Решение

Подставим в тождество вместо степеней $1+z$ их разложения по биному Ньютона:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^{k} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k} z^k\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k.$$

Теперь перемножим многочлены слева по правилу свёртки:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{s=0}^{k} C_{n-m}^{s} C_{m}^{k-s}\right) z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k.$$

Получаем тождественное равенство двух многочленов степени n. Как известно, многочлены тождественно равны в том и только том случае, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях z. Приравнивая коэффициенты при z^r слева и справа, получаем требуемое тождество.

2. С помощью тождества $((1+z)^n)^2 = (1+z)^{2n}$ доказать:

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k} = C_{2n}^m,\ m \le n.$$

3. *Теорема Вандермонда.* С помощью тождества

$$(1+z)^{m+n} = (1+z)^m (1+z)^n$$

доказать:

$$A_{m+n}^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k A_m^{r-k} A_n^k.$$

4. Используя тождество $(1-z)^{-m-n} = (1-z)^{-m}(1-z)^{-n}$, доказать:

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m+s-1}^{m-1} C_{n+k-s}^{n} = C_{m+n+k}^{m+n}.$$

Решение

Воспользуемся результатом задачи *4,б* подраздела *1.1*:

$$(1-z)^{-m-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m+n+k-1}^k z^k;$$

$$(1-z)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m+k-1}^k z^k;$$

$$(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k z^k.$$

Подставив эти разложения в данное в условии тождество, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{m+n+k-1}^{k} z^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{m+k-1}^{k} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} z^k\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{k} C_{m+s-1}^{s} C_{n+k-s-1}^{k-s}\right) z^k.$$

Как известно, два степенных ряда тождественно равны в том и только том случае, когда равны все их коэффициенты при соответствующих степенях z:

$$C_{m+n+k-1}^{k} = \sum_{s=0}^{k} C_{m+s-1}^{s} C_{n+k-s-1}^{k-s}.$$

Заменив в полученном тождестве n на $n-1$ и воспользовавшись свойством симметрии биномиальных коэффициентов, получаем то, что требовалось доказать.

5. Доказать: а) $\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{n+k}^{n} = C_{n+m}^{n+1}$; б) $\sum\limits_{s=0}^{m-n} C_{p+s}^{p} C_{m-p-s}^{n-p} = C_{m+1}^{n+1}$.

6. Используя тождество

$$(1-z)^n (1-z)^{-m} = (1-z)^{n-m}, \ n \geq m,$$

доказать:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_n^s C_{m+k-s-1}^{k-s} = C_{n-m}^{k}, \ k \leq n-m.$$

7. Доказать: $\sum\limits_{s=0}^{min\{m,\,n\}} (-1)^s C_n^s C_{n+m-s-1}^{m-s} = 0, \ m > 0, \ n > 0.$

8. С помощью тождества $\left(1-z^2\right)^{-n} = (1-z)^{-n}(1+z)^{-n}$ доказать:

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_{n+r-k-1}^{r-k} C_{n+k-1}^{k} = \begin{cases} 0, & r \text{ нечётно}, \\ C_{n+\frac{r}{2}-1}^{\frac{r}{2}}, & r \text{ чётно}. \end{cases}$$

9. С помощью тождества $(1+z)^n\left(1-z^2\right)^{-n}=(1-z)^{-n}$ доказать:

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_n^{k-2s} C_{n+s-1}^s = C_{n+k-1}^k.$$

10. С помощью тождества $(1+z)^n(1-z)^n=\left(1-z^2\right)^n$ доказать:

$$\sum_{s=0}^{2k} (-1)^s C_n^s C_n^{2k-s} = (-1)^k C_n^k.$$

11. Используя тождество $(1+z)^n(1+z)^{-m}=(1+z)^{n-m}$, $n<m$, доказать:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_n^{k-s} C_{m+s-1}^{m-1} = C_{n-m+k-1}^k.$$

12. С помощью тождеств

$$\left((1+z)^{\pm\frac{1}{2}}\right)^2=(1+z)^{\pm 1},\ (1+z)^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}=1,$$
$$(1+z)^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}=(1+z)^{-\frac{1}{2}}$$

доказать:

а) $1\cdot C_{2n}^n + C_2^1 C_{2n-2}^{n-1} + C_4^2 C_{2n-4}^{n-2} + \ldots + C_{2n}^n \cdot 1 = 2^{2n}$;

б) $\frac{1\cdot C_{2n-4}^{n-2}}{1\cdot(n-1)} + \frac{C_2^1 C_{2n-6}^{n-2}}{2\cdot(n-2)} + \frac{C_4^2 C_{2n-8}^{n-2}}{3\cdot(n-3)} + \ldots + \frac{C_{2n-4}^{n-2}\cdot 1}{(n-1)\cdot 1} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}$, $n\geq 2$;

в) $C_{2n-2}^{n-1} + \frac{1}{2}\, C_2^1 C_{2n-4}^{n-2} + \frac{1}{3}\, C_4^2 C_{2n-6}^{n-3} + \ldots + \frac{1}{n}\, C_{2n-2}^{n-1} = \frac{1}{2}\, C_{2n}^n$, $n\geq 1$;

г) $1 - \frac{1}{2\cdot 2^2}\, C_2^1 - \frac{1}{3\cdot 2^4}\, C_4^2 - \ldots - \frac{1}{n\cdot 2^{2n-2}}\, C_{2n-2}^{n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}\, C_{2n}^n$, $n\geq 2$.

13. С помощью тождества

$$(1-z)^{-n-1}(1-z)^{-m-1}=(1-z)^{-n-m-2}$$

доказать:

$$\sum_{s=0}^{k} C_{n+s}^{n} C_{m+k-s}^{m} = C_{n+m+k+1}^{k}.$$

14. С помощью тождества

$$(1-z)^{-n-1}(1+z)^{-n-1} = \left(1-z^{2}\right)^{-n-1}$$

доказать:

$$\sum_{s=0}^{2k} (-1)^{s} C_{n+s}^{n} C_{n+2k-s}^{n} = C_{n+k}^{k}.$$

15. Используя тождество

$$\left(1-z^{-1}\right)^{m}(1-z)^{-n-1} = (-1)^{m} z^{-m} (1-z)^{m-n-1},$$

доказать:

$$\sum_{s=0}^{k-m} (-1)^{s} C_{m}^{m-k+s} C_{n+s}^{n} = C_{m-n-1}^{k}.$$

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Метод рекуррентных соотношений

Метод основан на составлении и использовании рекуррентного соотношения для последовательности комбинаторных чисел. Оно связывает n-й член этой последовательности с одним или несколькими предыдущими (отсюда и название метода от латинского слова recurrere — возвращаться). Пользуясь этим соотношением, можно последовательным уменьшением n свести исходную задачу к задаче с меньшим значением n, которую легко решить. А затем, увеличивая n, можно получить ответ исходной задачи. В некоторых случаях оказывается возможным вывести явную формулу n-го члена последовательности.

Задачи

1. *Кролики Фибоначчи.*[1)] Пара кроликов раз в месяц приносит приплод из двух крольчат (самки и самца), причём новорожденные крольчата через 2 месяца после рождения приносят

[1)]Эта задача в числе прочих была опубликована итальянским математиком Леонардо Фибоначчи в книге «Liber Abaci» в 1202 г.

такой же приплод. Сколько пар будет через год, если в начале года была пара новорожденных кроликов (ни один кролик не умер в течение года)?

Решение

Пусть u_n — число пар кроликов в начале n-го месяца. Составим рекуррентное соотношение для u_n. По условию задачи $u_1 = 1$. Очевидно, что $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ (через 2 месяца исходная новорожденная пара приносит приплод). Далее, $u_4 = 2 + 1 = 3 = u_3 + u_2$ (к парам третьего месяца прибавляется приплод исходной пары), $u_5 = 3+1+1 = 5 = 3+2 = u_4 + u_3$ (пары четвёртого месяца, приплоды исходной и родившейся на третьем месяце пар). Теперь уже можно написать общее рекуррентное соотношение:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},$$

$n = 3, 4, 5, \ldots$[2)] С его помощью находим: $u_6 = u_5+u_4 = 5+3 = 8$, $u_7 = u_6+u_5 = 8+5 = 13$ и т.д. Последовательным вычислением получаем ответ: $u_{13} = 233$.

2. Решить задачу о кроликах Фибоначчи при условии, что в начале года имелась пара взрослых кроликов.

3. Пусть f_n — количество способов разбить неотрицательное целое число n на сумму слагаемых, каждое из которых может быть равно одному из заданных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots,$ n_k, $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$ при условии, что разбиения, различающиеся порядком следования разных слагаемых, считаются различными. Составить рекуррентное соотношение для f_n.

Решение

Пусть последним по порядку слагаемым является n_1. Тогда остальные составляют в сумме число $n - n_1$, которое можно

[2)] Числа, удовлетворяющие этому соотношению, называются числами Фибоначчи. Задача о кроликах была первой в истории математики, приведшей к рекуррентному соотношению, связывающему n-й член последовательности с двумя предыдущими. Впоследствии числа Фибоначчи нашли широкое применение в различных отраслях математики, экономике, технике, биологии, архитектуре.

разбить f_{n-n_1} способами. Аналогично имеется f_{n-n_2} разбиений при последнем слагаемом n_2, и т.д. Поскольку последним может быть любое из чисел $n_1, \ldots, n_k$, по правилу суммы $f_{n-n_1} + f_{n-n_2} + \ldots + f_{n-n_k}$ в точности равно числу разбиений n на слагаемые. Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$f_n = f_{n-n_1} + f_{n-n_2} + \ldots + f_{n-n_k}.$$

Для его применения надо знать начальные значения $f_0, f_1, \ldots$ (подразумевается, что $f_n = 0$ при $n < 0$). Понятно, что $f_0 = 1$ (единственный способ разбить ноль — никак не разбивать); далее, $f_1 = f_2 = \ldots = f_{n_1-1} = 0$, так как никакие разбиения не могут дать сумму меньше n_1; $f_{n_1} = 1$. Дальнейшим последовательным вычислением с применением рекуррентного соотношения можно получить ответ для нужного значения n.

4. Решить проблему абитуриента (задача *14* подразд. *1.2*) методом рекуррентных соотношений.

Решение

а) Обозначим через $f_{k,\,n}$ число способов набрать n баллов после успешной сдачи k экзаменов. Разобьём их на непересекающиеся группы в зависимости от полученной на последнем[3)] экзамене оценки. Будет три группы: в первой — способы сдачи, при которых абитуриент на последнем экзамене получил 3, во второй — 4, в третьей — 5. Согласно принятому обозначению количество способов первой групы равно $f_{k-1,\,n-3}$, второй — $f_{k-1,\,n-4}$, третьей —$f_{k-1,\,n-5}$. По правилу суммы получаем рекуррентное соотношение

$$f_{k,\,n} = f_{k-1,\,n-3} + f_{k-1,\,n-4} + f_{k-1,\,n-5}.$$

Для поступления надо набрать от 16 до 20 баллов. Последова-

[3)] Имеется в виду не последний по порядку сдачи экзамен (по условию задачи очерёдность сдачи не имеет значения), а последний в перечне экзаменов, например, в алфавитном порядке.

тельно применяя рекуррентное соотношение, находим

$$f_{4,\,16} = f_{3,\,13} + f_{3,\,12} + f_{3,\,11} = f_{2,\,10} + f_{2,\,9} + f_{2,\,8} + \\ + f_{2,\,9} + f_{2,\,8} + f_{2,\,7} + f_{2,\,8} + f_{2,\,7} + f_{2,\,6} = \\ = f_{2,\,10} + 2f_{2,\,9} + 3f_{2,\,8} + 2f_{2,\,7} + f_{2,\,6}.$$

Поскольку $f_{2,\,10} = f_{2,\,6} = 1$ $(10 = 5+5,\ 6 = 3+3)$, $f_{2,\,9} = f_{2,\,7} = 2$ $(9 = 4+5 = 5+4,\ 7 = 3+4 = 4+3)$, $f_{2,\,8} = 3$ $(8 = 4+4 = 3+5 = 5+3)$, получаем ответ: 19 способов.

Аналогично подсчитываем $f_{4,\,17}$:

$$f_{4,\,17} = f_{3,\,14} + f_{3,\,13} + f_{3,\,12} = \\ = f_{2,\,11} + 2f_{2,\,10} + 3f_{2,\,9} + 2f_{2,\,8} + f_{2,\,7} = 16,$$

($f_{2,\,11} = 0$, так как за два экзамена набрать 11 баллов невозможно). Точно так же находим, что $f_{4,\,18} = 10$, $f_{4,\,19} = 4$. Очевидно, что $f_{4,\,20} = 1$. Поэтому число способов успешной сдачи экзаменов для поступления равно $19 + 16 + 10 + 4 + 1 = 50$[4].

---

[4] Этот же ответ можно получить иначе. Число 16 раскладывается на сумму четырёх слагаемых, каждое из которых равно либо 3, либо 4, либо 5, следующими способами: $16 = 3+3+5+5 = 3+4+4+5 = 4+4+4+4$. Слагаемые в этих представлениях можно произвольно переставлять. Получаем

$$P(2,\ 2,\ 0) + P(2,\ 1,\ 1) + P(4,\ 0,\ 0) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} + \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} + \frac{4!}{4!} = \\ = 6 + 12 + 1 = 19 \text{ способов}$$

($P\,(k_1,\ \ldots,\ k_s)$ — число перестановок с повторениями k_1 одинаковах элементов первого вида, ... , k_s одинаковых предметов s-го вида (см. [1-2], [5]). Аналогично получаем, что 17 баллов можно набрать

$$P(2,\ 1,\ 1) + P(3,\ 1,\ 0) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} + \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4 + 12 = 16 \text{ способами}$$

$(17 = 5+5+4+3 = 4+4+4+5)$, 18 баллов

$$P(2,\ 2,\ 0) + P(3,\ 1,\ 0) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} + \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 6 + 4 = 10 \text{ способами}$$

$(18 = 5+5+4+4 = 5+5+5+3)$, 19 баллов

$$P(3,\ 1,\ 0) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4 \text{ способами}$$

5. За пересылку бандероли надо уплатить 22 рубля. На почте есть марки стоимостью 2, 5, 10, 12 рублей, причём количество марок каждого номинала не ограничено. Сколькими способами можно оплатить пересылку, если способы, различающиеся порядком наклейки марок разной стоимости, считаются различными?

6. Сколькими способами можно уплатить 36 рублей монетами по 1, 2, 5, 10 рублей, если монеты каждого достоинства имеются в неограниченном количестве (порядок, в котором следуют монеты, на имеет значения)? Монеты одного достоинства неразличимы.

7. Пусть $F_{n_1,\,\ldots\,,\,n_k}(n)$ — число способов разменять n копеек монетами по $n_1, \ldots, n_k$ копеек ($n_1 < \ldots < n_k$). Составить рекуррентное соотношение для $F_{n_1,\,\ldots\,,\,n_k}(n)$, если: а) монеты можно брать в любых количествах; б) имеется по одной монете каждого достоинства. (Монеты одного достоинства неразличимы, порядок их следования при размене несущественен.)

8. Сколькими способами можно разменять 50 копеек монетами по 1, 5, 10 копеек, если их можно брать в любых количествах и их порядок не имеет значения? Монеты одного достоинства неразличимы.

9. Имеется по одной гире весом 1, 2, 3, 4, 5, 7 кг. Сколькими способами можно отвесить 15 кг, кладя гири на одну чашу весов? [5)]

10. Доказать методом рекуррентных соотношений формулу числа сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$.

11. Сколькими способами можно оплатить пересылку письма стоимостью 12 рублей марками по 1 и 2 рубля, если способы,

---

($19 = 5+5+5+4$) и 20 баллов $P(4,\,0,\,0) = 1$ способом ($20 = 5+5+5+5$). Всего $19+16+10+4+1 = 50$ способов.

[5)] К некоторым задачам этого раздела применим и метод производящих функций. Здесь, конечно, их надо решать с помощью рекуррентных соотношений.

различающиеся порядком наклейки марок разной стоимости, считаются различными? Марки одинаковой стоимости неразличимы.

12. Сколькими способами можно представить число 55 в виде суммы слагаемых, каждое из которых равно 5, или 10, или 15, или 20, если: а) порядок следования слагаемых не имеет значения; б) представления, различающиеся порядком разных слагаемых, считаются различными?

13. На плоскости проведены n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке; а) на сколько частей разбивают плоскость эти прямые? б) Сколько из этих частей не ограничены?

14. На какое максимальное число частей могут разделить шар n плоскостей ($n > 0$), проходящих через его центр?

15. На плоскости проведены n попарно пересекающихся окружностей ($n > 0$), из которых никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей они разбивают плоскость?

16. На плоскости проведены m параллельных прямых. Затем проведены n других прямых, не параллельных ни между собой, ни проведённым ранее ($m > 0$, $n > 0$). Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. На сколько частей все эти прямые разбивают плоскость?

17. Пусть элементы последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0,\ n \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $a_0 = 1$. Доказать, что

$$a_n = \frac{1}{n+1}\, C_{2n}^{n}.$$

18. Сколькими способами можно разбить выпуклый $(n+2)$-угольник ($n > 0$) на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него?

19. На окружности отмечены $2n$ различных точек. Сколькими способами можно их соединить n непересекающимися отрезками?

2.2. Линейные рекуррентные соотношения

Решением рекуррентного соотношения называется последовательность, члены которой удовлетворяют ему. Общей методики нахождения решений, т.е. определения формулы n-го члена последовательности, не существует. В настоящем разделе рассматривается класс соотношений, которые можно довольно просто решать эффективным единообразным методом.

Линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами называется соотношение вида

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = \phi_n,\ n = k,\ k+1,\ \ldots .$$

Числа $b_1, \ldots, b_k$ называются его коэффициентами ($b_k \neq 0$), ϕ_n — правая часть, являющаяся функцией от n. Для нахождения по этому соотношению произвольного a_n необходимо задать начальные значения $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Если $\phi_n \equiv 0$, соотношение называется *однородным*.

Общим решением линейного рекуррентного соотношения называется решение, содержащее постоянные, определяемые по начальным значениям. Решение, получающееся из общего при конкретных начальных значениях, называется ***частным.***

Характеристическим многочленом линейного рекуррентного соотношения называется многочлен

$$G(z) = z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k.$$

Его корни называются *характеристическими*. Общее решение однородного соотношения выражается через характеристические корни (см. задачу *1*). При правых частях ϕ_n специальных видов существуют простые приёмы нахождения общего решения неоднородного соотношения (см. задачи *5, 6, 7, 10*). Теория решений таких соотношений сходна с соответствующей теорией для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Задачи

1. Найти общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения.

Решение

Дано линейное рекуррентное соотношение

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0,\ n = k,\ k+1,\ \ldots$$

с начальными значениями $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_{k-1}$; $b_k \neq 0$. Его решение будем строить с помощью производящей функции последовательности $\{a_n\}$. Домножим данное соотношение на z^n и запишем формальную сумму получившихся выражений при $n = k,\ k+1,\ \ldots$: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} (a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k})\, z^n = 0$. Преобразуем ряд в левой части этого равенства:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n + b_1 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} z^n + b_2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} z^n + \ldots + b_k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^n =$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n + b_1 z \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n z^n + b_2 z^2 \sum_{n=k-2}^{\infty} a_n z^n + \ldots +$$
$$+ b_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} +$$

$$+b_1 z\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-2} z^{k-2}\right) +$$
$$+b_2 z^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-3} z^{k-3}\right) + \ldots +$$
$$+b_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Теперь подставим производящую функцию $F_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и перенесём члены, содержащие начальные значения $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, в правую часть. После приведения подобных слагаемых там получится многочлен степени не выше $k-1$, который обозначим $C(z)$. В итоге получим

$$F_a(z)\left(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_k z^k\right) = C(z) \;\Leftrightarrow\; F_a(z) = \frac{C(z)}{K(z)},$$

где $K(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_k z^k$. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — характеристические корни кратностей $\mu_1, \ldots, \mu_s$ соответственно ($\mu_1 + \ldots + \mu_s = k$), то $G(z) = (z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(z-\alpha_s)^{\mu_s}$. Многочлены $K(z)$ и $G(z)$ связаны легко проверяемым соотношением $K(z) = z^k G\left(\frac{1}{z}\right)$. Поэтому

$$K(z) = z^k\left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right)^{\mu_1}\left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right)^{\mu_2}\ldots\left(\frac{1}{z} - \alpha_s\right)^{\mu_s} =$$
$$= z^{\mu_1}\left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right)^{\mu_1} z^{\mu_2}\left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right)^{\mu_2}\ldots\; z^{\mu_s}\left(\frac{1}{z} - \alpha_s\right)^{\mu_s} =$$
$$= (1-\alpha_1 z)^{\mu_1}(1-\alpha_2 z)^{\mu_2}\ldots(1-\alpha_s z)^{\mu_s}.$$

Следовательно, подставляя $K(z)$ в формулу для $F_a(z)$, получаем
$$F_a(z) = \frac{C(z)}{(1-\alpha_1 z)^{\mu_1}\ldots(1-\alpha_s z)^{\mu_s}}.$$

Степень многочлена $C(z)$ не выше $k-1$, поэтому $F_a(z)$ является правильной дробно-рациональной функцией z. Следовательно, её можно представить в виде суммы частичных дробей:

$$F_a(z) = \left(\frac{\beta_{11}}{1-\alpha_1 z} + \frac{\beta_{12}}{(1-\alpha_1 z)^2} + \ldots + \frac{\beta_{1\mu_1}}{(1-\alpha_1 z)^{\mu_1}}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\beta_{21}}{1-\alpha_2 z} + \frac{\beta_{22}}{(1-\alpha_2 z)^2} + \ldots + \frac{\beta_{2\mu_2}}{(1-\alpha_2 z)^{\mu_2}}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{\beta_{s1}}{1-\alpha_s z} + \frac{\beta_{s2}}{(1-\alpha_s z)^2} + \ldots + \frac{\beta_{s\mu_s}}{(1-\alpha_s z)^{\mu_s}}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_i z)^j},$$

числа β_{ij} находятся методом неопределённых коэффициентов. В этой сумме каждую дробь вида $\frac{\beta}{(1-\alpha z)^j}$ можно разложить в степенной ряд (см. задачи *4а, б* подразд. *1.1*):

$$\frac{\beta}{(1-\alpha z)^j} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} C_{j+n-1}^n \alpha^n z^n.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_i z)^j} = \sum_{j=1}^{\mu_i}\left(\beta_{ij}\sum_{n=0}^{\infty} C_{j+n-1}^n \alpha_i^n z^n\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \beta_{ij} C_{j+n-1}^n\right)\alpha_i^n z^n.$$

Биномиальный коэффициент $C_{j+n-1}^n = \frac{(n+j-1)(n+j-2)\ldots(n+1)}{(j-1)!}$ является многочленом от n степени $j-1$, значит, $\sum\limits_{j=1}^{\mu_i} \beta_{ij} C_{j+n-1}^n$ — многочлен степени не выше $\mu_i - 1$, который обозначим $P_i(n)$. Подставляя его, получаем разложение $F_a(z)$ по степеням z:

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{s} P_i(n)\,\alpha_i^n\right) z^n.$$

Отсюда следует формула общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения:

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\,\alpha_i^n,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — различные характеристические корни кратностей $\mu_1, \ldots, \mu_s$, $P_i(n) = C_{i0} + C_{i1}n + \ldots + C_{i,\,\mu_i-1}n^{\mu_i-1}$ — многочлен степени не выше $\mu_i - 1$, коэффициенты C_{ij} которого определяются по начальным значениям $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Например, если все характеристические корни простые ($\mu_1 = \ldots = \mu_s = 1$, $s = k$), то $P_i(n) = C_i$ и $a_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \ldots + C_k\alpha_k^n$.

В случае комплексных корней нужно с помощью тригонометрической формы комплексного числа привести ответ к вещественному виду.

2. Используя результат задачи *1*, найти общую формулу n-го члена последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … (см. задачу *1* подразд. *2.1*).

Решение

Надо решить рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n = 2,\ 3,\ \ldots$$

при начальных значениях $a_0 = a_1 = 1$.

Если перенести все члены в левую часть, то получится однородное линейное рекуррентное соотношение второго порядка:

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0.$$

Характеристическим многочленом является квадратный трёхчлен $\alpha^2 - \alpha - 1$, его корни $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ действительные и простые. Следовательно,

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Для нахождения постоянных C_1, C_2 подставим в a_n $n = 0$, $n = 1$ и приравняем к начальным значениям: $a_0 = C_1 + C_2 = 1$, $a_1 = C_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Решив её, находим, что $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Подстановка C_1 и C_2 в a_n даёт частное решение, которое и является ответом задачи:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \; n \in \mathbb{N}_0.$$

3. Найти общие решения следующих линейных однородных рекуррентных соотношений:

а) $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$;

б) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$;

в) $a_n - 7a_{n-2} + 6a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$;

г) $a_n - 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 20a_{n-3} + 4a_{n-4} - 16a_{n-5} = 0$, $n = 5, 6, \ldots$;

д) $a_n + a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$;

е) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$;

ж) $a_n - a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$;

з) $a_n + 4a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$;

и) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$;

к) $a_n - a_{n-1} - 5a_{n-2} - 3a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$;

л) $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$;

м) $a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$.

4. Найти частные решения следующих линейных однородных рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $a_n - a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

б) $a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = a_1 = -1$, $a_2 = 1$;

в) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$;

г) $a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} + 6a_{n-3} - 9a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$, $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = a_3 = 1$;

д) $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

е) $a_n + 4a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$;

ж) $a_n + 8a_{n-2} + 16a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 2$.

5. Доказать, что если $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ — некоторое найденное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения (назовём его частным[6)]), а $\left\{a_n^{(o)}\right\}$ — общее решение соответствующего однородного, то $\{a_n\}$, где $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ч)}$ — общее решение неоднородного соотношения.

6. Найти общее решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = \lambda\alpha^n,\ n = k,\ k+1,\ \ldots,$$

где λ — постоянный коэффициент, α — ненулевое число, не являющееся характеристическим корнем.

Решение

Будем искать частное решение в виде $a_n^{(ч)} = C\alpha^n$, где C — константа. Для её нахождения подставим $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение:

$$C\left(\alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \ldots + b_k\alpha^{n-k}\right) = \lambda\alpha^n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C\alpha^n\left(1 + b_1\frac{1}{\alpha} + \ldots + b_k\frac{1}{\alpha^k}\right) = \lambda\alpha^n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow CK\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \lambda \Leftrightarrow C \cdot \frac{1}{\alpha^k} \cdot G(\alpha) = \lambda$$

[6)]Это решение предполагается найденным при некоторых начальных значениях, которые в данном случае не конкретизируются.

(здесь применены обозначения и формула, связывающая $K(z)$ и $G(z)$, из решения задачи *1*). Поскольку α не является характеристическим корнем, $G(\alpha) \neq 0$, то из последнего равенства можно найти C: $C = \frac{\lambda\alpha^k}{G(\alpha)}$. Подставляя C в $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$, находим частное решение: $a_n^{(ч)} = \frac{\lambda\alpha^{n+k}}{G(\alpha)}$. Теперь, принимая во внимание утверждение задачи *5*, получаем общее решение неднородного соотношения:

$$a_n = a_n^{(o)} + \frac{\lambda\alpha^{n+k}}{G(\alpha)},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

где $\left\{a_n^{(o)}\right\}$ — общее решение соответствующего однородного соотношения.

7. Найти общее решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = P_r\,(n)\,\alpha^n,\ n = k,\ k+1,\ \ldots\ ,$$

где $P_r\,(n) = p_0 + p_1 n + \ldots + p_r n^r$ — многочлен степени r с постоянными коэффициентами, α — ненулевое число, не являющееся характеристическим корнем[7)].

Решение

Частное решение будем искать в виде $a_n^{(ч)} = Q_r\,(n)\,\alpha^n$, где $Q_r\,(n) = q_0 + q_1 n + \ldots + q_r n^r$ — многочлен от n степени r. Для нахождения его коэффициентов q_i подставим $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение:

$$Q_r\,(n)\,\alpha^n + b_1 Q_r\,(n-1)\,\alpha^{n-1} + b_2 Q_r\,(n-2)\,\alpha^{n-2} + \ldots +$$
$$+ b_k Q_r\,(n-k)\,\alpha^{n-k} = P_r\,(n)\,\alpha^n \;\Leftrightarrow$$

[7)] Заметим, что неоднородное соотношение задачи *6* является частным случаем данного при $r = 0$.

$$\Leftrightarrow \alpha^n \left(Q_r(n) + b_1 Q_r(n-1) \cdot \frac{1}{\alpha} + b_2 Q_r(n-2) \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + b_k Q_r(n-k) \cdot \frac{1}{\alpha^k} \right) = P_r(n)\, \alpha^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_r(n) + b_1 Q_r(n-1) \cdot \frac{1}{\alpha} + b_2 Q_r(n-2) \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \ldots +$$

$$+ b_k Q_r(n-k) \cdot \frac{1}{\alpha^k} = P_r(n).$$

Далее, выпишем коэффициент при высшей (r-й) степени n в левой части получившегося равенства и приравняем к соответствующему коэффициенту в правой части:

$$q_r \left(1 + b_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + \ldots + b_k \cdot \frac{1}{\alpha^k} \right) = p_r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q_r K\left(\frac{1}{\alpha}\right) = p_r \Leftrightarrow q_r \cdot \frac{1}{\alpha^k} \cdot G(\alpha) = p_r.$$

Поскольку $G(\alpha) \neq 0$ (α не является характеристическим корнем), q_r находим из последнего равенства: $q_r = \frac{p_r \alpha^k}{G(\alpha)}$. Остальные значения $q_{r-1}, q_{r-2}, \ldots, q_0$ можно найти, последовательно приравнивая коэффициенты при n^{r-1}, n^{r-2}, , n^0 в левой и правой частях равенства

$$Q_r(n) + b_1 Q_r(n-1) \cdot \frac{1}{\alpha} + \ldots + b_k Q_r(n-k) \cdot \frac{1}{\alpha^k} = P_r(n),$$

получившегося после подстановки $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение.

Таким образом, изложенным методом полностью определяется многочлен $Q_r(n)$ и, следовательно, $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$. Тогда общее решение неоднородного соотношения будет иметь вид

$$a_n = a_n^{(o)} + Q_r(n)\, \alpha^n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

где $\left\{a_n^{(o)}\right\}$ — общее решение соответствующего однородного соотношения.

8. Найти общие решения следующих линейных неоднородных рекуррентных соотношений:

а) $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2 \cdot 3^n$, $n = 2,\ 3,\ \dots$;

б) $a_n - 9a_{n-1} + 27a_{n-2} - 27a_{n-3} = 3$, $n = 3,\ 4,\ \dots$;

в) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 3 \cdot (-2)^n$, $n = 3,\ 4,\ \dots$;

г) $a_n - 9a_{n-2} = 1 + 4 \cdot (-1)^n$, $n = 2,\ 3,\ \dots$;

д) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = (1+n)^2$, $n = 2,\ 3,\ \dots$;

е) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 13n \cdot 4^n$, $n = 2,\ 3,\ \dots$;

ж) $a_n - a_{n-1} - 20a_{n-2} = 54n^2 \cdot (-1)^{n-1}$, $n = 2,\ 3,\ \dots$;

з) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^{n+2} + n \cdot 3^{n-1}$, $n = 2,\ 3,\ \dots$;

и) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} = (-1-20n) \cdot 3^n + (-1)^{n+1}$, $n = 3,\ 4,\ \dots$.

Решение

а) Общим решением соответствующего однородного соотношения является $a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n$. Частное решение неоднородного ищем в виде $a_n^{(ч)} = C \cdot 3^n$. Для нахождения C можно воспользоваться формулой, полученной в решении задачи *6*, но чтобы не запоминать её, вычислим эту константу непосредственно, подставив $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение: $C\left(3^n - 3^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-2}\right) = 2 \cdot 3^n$. Сократив на 3^n, находим $C = \frac{9}{2}$. Отсюда $a_n^{(ч)} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n+2}$. Получаем ответ: $a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) общее решение соответствующего однородного соотношения равно: $C_1 \cos \frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin \frac{2\pi n}{3}$. Так как единица не является характеристическим корнем, можно применить результат задачи *7*. Частное решение неоднородного соотношения ищем в виде $a_n^{(ч)} = q_0 + q_1 n + q_2 n^2$. Для нахождения q_0, q_1, q_2 подставим $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение:

$$q_0 + q_1 n + q_2 n^2 + q_0 + q_1(n-1) + q_2(n-1)^2 +$$
$$+ q_0 + q_1(n-2) + q_2(n-2)^2 = (1+n)^2.$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$3q_2 n^2 + (3q_1 - 6q_2)n + 3q_0 - 3q_1 + 5q_2 = n^2 + 2n + 1.$$

Приравняв коэффициенты при n^2, n^1, n^0 в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3q_2 = 1, \\ 3q_1 - 6q_2 = 2, \\ 3q_0 - 3q_1 + 5q_2 = 1. \end{cases}$$

Решив её, найдём нужные коэффициенты: $q_0 = \frac{10}{9}$, $q_1 = \frac{4}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно, $a_n^{(ч)} = \frac{1}{9}\left(10 + 12n + 3n^2\right)$. Ответ:

$$a_n = C_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{9}\left(10 + 12n + 3n^2\right), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

9. Найти частные решения линейных неоднородных рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-3} = 3$, $n = 3,\ 4,\ \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 3$;

б) $a_n - \sqrt{3}a_{n-1} + a_{n-2} = n^2(-1)^n$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, $a_0 = -24$, $a_1 = 0$;

в) $a_n + \sqrt{3}a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + 7n \cdot 3^{\frac{n}{2}}$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, $a_0 = -\sqrt{3}$, $a_1 = 2$;

г) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} = (n-1)(-1)^n$, $n = 3,\ 4,\ \ldots$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$;

д) $a_n + 10a_{n-1} + 25a_{n-2} = 3n(n+1)$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$;

е) $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = (n^2 - 4) \cdot 2^n$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, $a_0 = -1$, $a_1 = -3$;

ж) $a_n - 4a_{n-1} + 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + a_{n-4} = (-1)^{n-1}$, $n = 4, 5, \ldots$, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -1$.

10. Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = \lambda\alpha^n, \ n = k,\ k+1,\ \ldots ,$$

где λ — константа, α — характеристический корень кратности μ ($\alpha \neq 0$, $\mu > 0$).

Решение

Подстановка по аналогии с решением задачи *6* в исходное соотношение $a_n^{(ч)} = C\alpha^n$ не позволяет найти C в силу того, что $G(\alpha) = 0$. Будем искать частное решение в виде $a_n^{(ч)} = C(n)_\mu \alpha^n$, где $(n)_\mu = n(n-1)\dots(n-\mu+1)$ (полагаем, что $(n)_0 = 1$ при $n \geq 0$, в частности, $(0)_0 = 1$)[8)]. Для нахождения C подставим $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение:

$$C\Big((n)_\mu \alpha^n + (n-1)_\mu b_1 \alpha^{n-1} + \ldots + (n-k)_\mu b_k \alpha^{n-k}\Big) = \lambda\alpha^n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C\Big((n)_\mu \alpha^k + (n-1)_\mu b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (n-k)_\mu b_k\Big) = \lambda\alpha^k.$$

Если выражение в скобках в левой части последнего равенства является ненулевой константой (т.е. не зависит от n), то из него можно найти C. Для доказательства этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение:

$$(k)_l \alpha^k + (k-1)_l b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (0)_l b_k \begin{cases} = 0, & l = 0, \ \ldots\ , \mu - 1, \\ \neq 0, & l = \mu. \end{cases}$$

Докажем его. Вычислим производные $G(\alpha)$:

$$G'(\alpha) = k\alpha^{k-1} + (k-1)b_1\alpha^{k-2} + (k-2)b_2\alpha^{k-3} + \ldots +$$
$$+ 2b_{k-2}\alpha + b_{k-1};$$
$$G''(\alpha) = k(k-1)\alpha^{k-2} + (k-1)(k-2)b_1\alpha^{k-3} +$$
$$+ (k-2)(k-3)b_2\alpha^{k-4} + \ldots + 6b_{k-3}\alpha + 2b_{k-2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что в общем случае l-я производная

[8)] При натуральных n и μ $(n)_\mu$ равно числу A_n^μ размещений без повторений из n предметов по μ. В дальнейшем будут использованы следующие очевидные свойства $(n)_\mu$: $(0)_\mu = 0$ при $\mu > 0$, $(n)_\mu = 0$ при $0 \leq n < \mu$.

вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}G^{(l)}(\alpha)=k(k-1)\ldots(k-l+1)\alpha^{k-l}+\\+(k-1)(k-2)\ldots(k-l)b_1\alpha^{k-l-1}+\\+(k-2)(k-3)\ldots(k-l-1)b_2\alpha^{k-l-2}+\ldots+\\+l(l-1)\ldots\cdot1\cdot b_{k-l}=(k)_l\alpha^{k-l}+(k-1)_lb_1\alpha^{k-l-1}+\\+(k-2)_lb_2\alpha^{k-l-2}+\ldots+(l)_lb_{k-l}.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\alpha^lG^{(l)}(\alpha)=(k)_l\alpha^k+(k-1)_lb_1\alpha^{k-1}+\ldots+(l)_lb_{k-l}\alpha^l.$$

Поскольку $(l-1)_l=\ldots=(0)_l=0$ по определению $(n)_j$, последнее равенство можно записать в виде

$$\begin{gathered}\alpha^lG^{(l)}(\alpha)=(k)_l\alpha^k+(k-1)_lb_1\alpha^{k-1}+\ldots+(l)_lb_{k-l}\alpha^l+\\+(l-1)_lb_{k-l-1}\alpha^{l-1}+\ldots+(0)_lb_k.\end{gathered}$$

Так как $\alpha\neq0$ является характеристическим корнем кратности μ, то $G(\alpha)=G'(\alpha)=\ldots=G^{(\mu-1)}(\alpha)=0$ $G^{(\mu)}(\alpha)\neq0$. Поэтому из последнего равенства следует доказываемое утверждение.

Вернёмся теперь к вычислению C. Докажем, что

$$\begin{gathered}(n)_\mu\alpha^k+(n-1)_\mu b_1\alpha^{k-1}+\ldots+(n-k)_\mu b_k=\\=(k)_\mu\alpha^k+(k-1)_\mu b_1\alpha^{k-1}+\ldots+(0)_\mu b_k\neq0,\ n=k,\ k+1,\ \ldots.\end{gathered}$$

Прежде всего заметим, что неравенство нулю следует из доказанного вспомогательного утверждения. Поэтому нужно доказать только равенство. Применим индукцию по n. При $n=k$ оно очевидно. Пусть оно верно при $n=l$, т.е. справедливо равенство (индукционное предположение)

$$\begin{gathered}(l)_\mu\alpha^k+(l-1)_\mu b_1\alpha^{k-1}+\ldots+(l-k)_\mu b_k=\\=(k)_\mu\alpha^k+(k-1)_\mu b_1\alpha^{k-1}+\ldots+(0)_\mu b_k.\end{gathered}$$

Докажем, что при $n = l + 1$ верно равенство индукционного шага:

$$(l+1)_\mu \alpha^k + (l)_\mu b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (l-k+1)_\mu b_k =$$
$$= (k)_\mu \alpha^k + (k-1)_\mu b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (0)_\mu b_k.$$

Найдём приращение $(n)_\mu$ при увеличении n на 1:

$$(n+1)_\mu - (n)_\mu =$$
$$= (n+1)n(n-1)\ldots(n-\mu+2) - n(n-1)\ldots(n-\mu+1) =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-\mu+2)((n+1)-(n-\mu+1)) =$$
$$= \mu n(n-1)\ldots(n-\mu+2) =$$
$$= \mu n(n-1)\ldots(n-(\mu-1)+1) = \mu(n)_{\mu-1}.$$

Отсюда следует рекуррентная формула для $(n+1)_\mu$: $(n+1)_\mu = (n)_\mu + \mu(n)_{\mu-1}$. Заменив с её помощью в доказываемом равенстве $(l+1)_\mu$, $(l)_\mu$, $(l-1)_\mu$, …, $(l-k+1)_\mu$, получим

$$(l)_\mu \alpha^k + (l-1)_\mu b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (l-k)_\mu b_k +$$
$$+\mu \left((l)_{\mu-1}\alpha^k + (l-1)_{\mu-1} b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (l-k)_{\mu-1} b_k\right) =$$
$$= (k)_\mu \alpha^k + (k-1)_\mu b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (0)_\mu b_k.$$

Применяя ещё раз рекуррентную формулу, приводим выражение в скобках в левой части последнего равенства к виду

$$(l-1)_{\mu-1}\alpha^k + (l-2)_{\mu-1} b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (l-k-1)_{\mu-1} b_k +$$
$$+\mu \left((l-1)_{\mu-2}\alpha^k + (l-2)_{\mu-2} b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (l-k-1)_{\mu-2} b_k\right).$$

Последовательно уменьшая l до значения k (k — степень характеристического многочлена) с помощью рекуррентной формулы, можно таким образом привести указанную сумму в скобках к линейной комбинации выражений вида

$$(k)_s \alpha^k + (k-1)_s b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + (0)_s b_k,\ s < \mu,$$

которые равны нулю в силу вспомогательного утверждения. Равенство индукционного шага превращается в предположение индукции.

Итак, искомую константу C вычисляем по формуле

$$C = \frac{\lambda\alpha^k}{(k)_\mu\alpha^k + (k-1)_\mu b_1\alpha^{k-1} + \ldots + (0)_\mu b_k}.$$

Тогда общее решение имеет вид $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ч)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, где $\left\{a_n^{(o)}\right\}$ — общее решение соответствующего однородного соотношения, $a_n^{(ч)} = C(n)_\mu\alpha^n$ — частное решение неоднородного, C вычисляется по найденной выше формуле.

11. Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения

$$a_n + b_1a_{n-1} + \ldots + b_ka_{n-k} = (p_0 + p_1n)\,\alpha^n,\ n = k,\ k+1,\ \ldots\ ,$$

где $p_1 \neq 0$, α — характеристический корень кратности μ, если: а) $\mu = 1$; б) $\mu = 2$.

Решение

а) Если подставить по аналогии с решением задачи *7* в исходное соотношение $a_n^{(ч)} = (q_0 + q_1n)\,\alpha^n$, то невозможно будет найти q_1, так как коэффициент при n в левой части будет равен нулю в силу того, что $G(\alpha) = 0$ (убедитесь в этом самостоятельно). Частное решение ищем в виде $a_n^{(ч)} = n\,(q_0 + q_1n)\,\alpha^n$. Для нахождения q_0, q_1 подставим $\left\{a_n^{(ч)}\right\}$ в исходное соотношение:

$$\begin{gathered}
n(q_0 + q_1n)\alpha^n + (n-1)(q_0 + q_1(n-1))b_1\alpha^{n-1} + \ldots + \\
+(n-k)(q_0 + q_1(n-k))b_k\alpha^{n-k} = (p_0 + p_1n)\alpha^n \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; n(q_0 + q_1n)\alpha^k + (n-1)(q_0 + q_1(n-1))b_1\alpha^{k-1} + \ldots + \\
+(n-k)(q_0 + q_1(n-k))b_k = (p_0 + p_1n)\alpha^k \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; \sum_{j=0}^{k}(n-j)(q_0 + q_1(n-j))b_j\alpha^{k-j} = (p_0 + p_1n)\alpha^k
\end{gathered}$$

(здесь принято, что $b_0 = 1$). Для нахождения коэффициента при степенях n преобразуем выражение при α^{k-j}:

$$(n-j)(q_0 + q_1(n-j))b_j = (n-j)(q_0 - q_1 j + q_1 n)b_j =$$
$$= ((q_1 j - q_0)j + (q_0 - 2q_1 j)n + q_1 n^2)b_j.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{j=0}^{k}(n-j)(q_0 + q_1(n-j))b_j\alpha^{k-j} = \left(\sum_{j=1}^{k}(q_1 j - q_0)jb_j\alpha^{k-j}\right) +$$
$$+\left(\sum_{j=0}^{k}(q_0 - 2q_1 j)b_j\alpha^{k-j}\right)n + \left(q_1\left(\sum_{j=0}^{k}b_j\alpha^{k-j}\right)\right)n^2.$$

Теперь видно, что коэффициент при n^2 равен $q_1 G(\alpha) = 0$. Далее, коэффициент при n приравниваем к $p_1\alpha^k$ (соответствующий ему в правой части):

$$\sum_{j=0}^{k}(q_0 - 2q_1 j)b_j\alpha^{k-j} = p_1\alpha^k \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q_0\left(\sum_{j=0}^{k}b_j\alpha^{k-j}\right) - 2q_1\left(\sum_{j=1}^{k}jb_j\alpha^{k-j}\right) = p_1\alpha^k \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; q_0 G(\alpha) - 2q_1\left(b_1\alpha^{k-1} + 2b_2\alpha^{k-2} + \ldots + kb_k\right) = p_1\alpha^k \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -2q_1\left(b_1\alpha^{k-1} + 2b_2\alpha^{k-2} + \ldots + kb_k\right) = p_1\alpha^k.$$

Если выражение в скобках в левой части последнего равенства отлично от нуля, то тогда можно будет найти q_1. Чтобы показать это, выпишем k равенств, следующих из того, что $G(\alpha) = \alpha^k + b_1\alpha^{k-1} + \ldots + b_k = 0$:

$$b_1\alpha^{k-1} + b_2\alpha^{k-2} + \ldots + b_k = -\alpha^k;$$
$$b_2\alpha^{k-2} + \ldots + b_k = -\alpha^k - b_1\alpha^{k-1};$$
$$\vdots$$
$$b_k = -\alpha^k - b_1\alpha^{k-1} - \ldots - b_{k-1}\alpha.$$

Сложив их, получим

$$b_1\alpha^{k-1} + 2b_2\alpha^{k-2} + \ldots + kb_k =$$
$$= -k\alpha^k - (k-1)b_1\alpha^{k-1} - \ldots - b_{k-1}\alpha =$$
$$= -\alpha\left(k\alpha^{k-1} + (k-1)b_1\alpha^{k-2} + \ldots + b_{k-1}\right) = -\alpha G'(\alpha).$$

Так как $\alpha \neq 0$ ($b_k \neq 0$ по определению рекуррентного соотношения k-го порядка), а $G'(\alpha) \neq 0$ в силу того, что α — простой корень, то интересующее нас выражение в скобках отлично от нуля[9]. Следовательно, можно найти q_1 по формуле

$$q_1 = \frac{p_1\alpha^{k-1}}{2G'(\alpha)}\,.$$

Приравнивание коэффициентов при n^0 в тождестве, полученном при подстановке $a_n^{(ч)}$, даёт уравнение, из которого легко выводится формула для вычисления q_0:

$$q_0 = \frac{p_0\alpha^{k-1} - q_1 \sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j-1}}{G'(\alpha)}\,.$$[10]

Итак, общее решение исходного неоднородного соотношения имеет вид $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ч)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, где $\left\{a_n^{(o)}\right\}$ — общее решение соответствующего однородного, $a_n^{(ч)} = n\left(q_0 + q_1 n\right)\alpha^n$ —

[9]Неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} jb_j\alpha^{k-j} = b_1\alpha^{k-1} + 2b_2\alpha^{k-2} + \ldots + kb_k \neq 0$$

можно доказать с помощью вспомогательного утверждения из решения задачи *10* (с. 53) при $l = 1$. Рекомендуем сделать это самостоятельно в качестве упражнения.

[10]Важное практическое замечание: формулы для вычисления постоянных, определяющих частные решения, полученные в задачах *6*, *7*, *10*, *11*, выведены исключительно для доказательства существования частного решения искомого вида. Заучивать их не нужно! Соотношения с числовыми данными следует решать методом неопределённых коэффициентов, который и применялся в перечисленных задачах.

частное решение неоднородного, q_0, q_1 вычисляются по найденным выше формулам[11)].

12. Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения

$$a_n+b_1a_{n-1}+\ldots+b_ka_{n-k} = \left(p_0+p_1n+p_2n^2\right)\alpha^n, n=k,k+1,\ldots,$$

где $p_2 \neq 0$, α — характеристический корень кратности μ, если: а) $\mu = 1$; б) $\mu = 2$.

13. Найти общие решения следующих линейных неоднородных рекуррентных соотношений:

а) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$;

б) $a_n - 16a_{n-2} = 3 \cdot (-4)^n$, $n = 2, 3, \ldots$;

в) $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 48n^2 + 1$, $n = 2, 3, \ldots$;

г) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} = 3n \cdot (-2)^{n+1}$, $n = 3, 4, \ldots$;

д) $a_n - 2a_{n-1} - 9a_{n-2} + 18a_{n-3} = 2n \cdot 3^n$, $n = 3, 4, \ldots$;

е) $a_n - a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4a_{n-3} = n + 2^n$, $n = 3, 4, \ldots$;

ж) $a_n - 2a_{n-1} - 15a_{n-2} = 8 + (-3)^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$;

з) $a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2} - 4a_{n-3} = 3^n + 2\left(n - \frac{2}{17}\right) \cdot 4^n$, $n = 3, 4, \ldots$;

и) $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^{n+1}$, $n = 2, 3, \ldots$;

к) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 24 \cdot (-1)^n$, $n = 3, 4, \ldots$;

л) $a_n - 18a_{n-2} + 81a_{n-4} = 8\left(3^{n-1} + (-3)^{n-1}\right)$, $n = 4, 5, \ldots$.

14. Найти частные решения линейных неоднородных рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $a_n + 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = n^2 + 2n + 5$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 1$, $a_1 = -4$;

б) $a_n - 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} = (n-1) \cdot (-2)^{n-1}$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = a_1 = 2$, $a_2 = -2$;

[11)] Верно и более общее утверждение: частным решением линейного неоднородного соотношения с правой частью $\phi_n = P_r(n)\,\alpha^n$, где $P_r(n)$ — многочлен степени r, а α — характеристический корень кратности μ, является последовательность $a_n^{(ч)} = n^{\mu} Q_r(n)\,\alpha^n$, где $Q_r(n)$ — многочлен степени r с неопределёнными коэффициентами. Доказательство его довольно сложно, поэтому здесь не приводится. Интересующиеся могут его найти в [12].

в) $a_n + a_{n-1} + 25a_{n-2} + 25a_{n-3} = 676n \cdot (-1)^n$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$;

г) $a_n + 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = (-4)^n + (-3)^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = a_1 = 0$;

д) $a_n + 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = (-4)^n + (-3)^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$;

е) $a_n + \frac{1}{2}\,a_{n-1} - \frac{1}{2}\,a_{n-2} = 2^{-n-3}$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_1 = 0$;

ж) $a_n - a_{n-2} = n^2 + n$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -2$;

з) $a_n - \frac{3}{4}a_{n-1} + \frac{1}{8}a_{n-2} = 2n \cdot 4^{-n}$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{3}{2}$;

и) $a_n - 8a_{n-1} + 17a_{n-2} - 10a_{n-3} = 6n(2n-3)$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = -2$, $a_1 = 40$, $a_2 = 106$;

к) $a_n + 5a_{n-1} + 10a_{n-2} + 12a_{n-3} = 7\,(2 + (-3)^n)$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$;

л) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$;

м) $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 6$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = a_1 = -1$, $a_2 = 1$;

н) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4\,(3^n + 4 \cdot (-1)^n)$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = -1$, $a_1 = 2$.

15. Вычислить:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, $n \in \mathbb{N}$;

г) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$, $n \in \mathbb{N}$.

16. На сколько частей делят пространство n плоскостей, из которых никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую, никакие четыре — через одну точку?

17. На какое максимальное число частей могут разбить пространство n сфер?

18. Найти общее решение системы линейных рекуррентных соотоношений:

$$\begin{cases} a_n = p_1 a_{n-1} + q_1 b_{n-1}, \\ b_n = p_2 a_{n-1} + q_2 b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 — заданные числа.

19. Найти общие решения систем рекуррентных соотношений:

а) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + 3b_{n-1}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2b_{n-1}, \\ b_n = -8a_{n-1} - 3b_{n-1}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 3b_{n-1}, \\ b_n = 13a_{n-1} - 6b_{n-1}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = -2a_{n-1} + b_{n-1}; \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$.

20. Найти частные решения следующих систем рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 3b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} + 2b_{n-1}, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = b_0 = \sqrt{3}\,;$

б) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3}\,b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} - \frac{1}{6}\,b_{n-1}, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = 3,\ b_0 = -5;$

в) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - 2b_{n-1}, \\ b_n = 2a_{n-1} + 5b_{n-1}, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = b_0 = 1;$

г) $\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 3b_{n-1}, \\ b_n = 4a_{n-1} - b_{n-1}, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = 2,\ b_0 = 5;$

д) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} - b_{n-1}, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = 0,\ b_0 = 1.$

21. Найти общие решения систем неоднородных рекуррентных соотношений:

а) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - 5b_{n-1} + 4, \\ b_n = a_{n-1} - 3b_{n-1} + n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N};$

б) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + 1, \\ b_n = 4a_{n-1} + b_{n-1} - n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N};$

в) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 13b_{n-1} + 2, \\ b_n = -a_{n-1} - 2b_{n-1} + 2 \cdot 4^n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N};$

г) $\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 4b_{n-1} + 7^n, \\ b_n = 4a_{n-1} - 3b_{n-1} + 4n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}.$

22. Найти частные решения систем рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \\ b_n = 6a_{n-1} - 2b_{n-1} + n \cdot (-1)^n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = b_0 = 0;$

б) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 1, \\ b_n = 9a_{n-1} - b_{n-1} - 1, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = 3,\ b_0 = -5;$

в) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_{n-1} + n, \\ b_n = a_{n-1} - 3b_{n-1} + n \cdot (-1)^n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = 3,\ b_0 = 1;$

г) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 4b_{n-1}, \\ b_n = 7a_{n-1} - b_{n-1} + (-2)^n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N},\ a_0 = \frac{4}{3}\,,\ b_0 = -\frac{31}{3}\,.$

23. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — последовательности, $f_a(z)$, $f_b(z)$ — соответствующие производящие функции. Доказать:

а) если $a_{n+1} = b_{n+1} - b_n$, $n \in \mathbb{N}_o$, то

$$f_a(z) = f_b(z)(1 - z) + a_0 - b_0;$$

б) если $a_n = b_{n+1} - b_n$, $n \in \mathbb{N}_o$, то

$$f_a(z) = f_b(z)\,\frac{1 - z}{z} - \frac{1}{z}\,b_0;$$

в) если $a_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots$, $n \in \mathbb{N}_o$, то

$$f_a(z) = \frac{a_0 + b_0 - f_b(z)}{1 - z};$$

г) если $a_n = nb_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$f_a(z) = z^2 f_b'(z) + z f_b(z) + a_0;$$

д) если $a_n = nb_{n-2}$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, то

$$f_a(z) = z^3 f_b'(z) + 2z^2 f_b(z) + a_1 z + a_0.$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Алгебра производящих функций

1. а) $f_a(z) = 1+\alpha z+\ldots+\alpha^N z^N$. При $z \neq \frac{1}{\alpha}$, применяя формулу суммы геометрической прогрессии, $f_a(z)$ можно представить в виде: $f_a(z) = \frac{1-\alpha^{N+1}z^{N+1}}{1-\alpha z}$.

Итак, окончательный ответ: $f_a(z) = \begin{cases} N+1, & z = \frac{1}{\alpha}, \\ \frac{1-\alpha^{N+1}z^{N+1}}{1-\alpha z}, & z \neq \frac{1}{\alpha}; \end{cases}$

б) $f_a(z) = \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots + \alpha^N z^N$. При $z \neq \frac{1}{\alpha}$: $f_a(z) = \alpha z \times$ $\times \frac{1-\alpha^N z^N}{1-\alpha z}$.

Ответ: $f_a(z) = \begin{cases} N, & z = \frac{1}{\alpha}, \\ \alpha z \frac{1-\alpha^N z^N}{1-\alpha z}, & z \neq \frac{1}{\alpha} \end{cases}$ при $\alpha \neq 0$, $f_a(z) \equiv 0$ при $\alpha = 0$;

в) $f_a(z) = \alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \ldots + N\alpha^N z^N = \alpha z\left(1 + 2\alpha z + \ldots + N\alpha^{N-1} z^{N-1}\right)$. Для вычисления последней суммы сделаем замену $\alpha z = t$ (предполагается, что $z \neq \frac{1}{\alpha}$). Тогда

$$t\left(1 + 2t + \ldots + Nt^{N-1}\right) =$$

$$= t\frac{d}{dt}\left(t + t^2 + \ldots + t^N\right) = t\frac{d}{dt}\left(t\left(1 + t + \ldots + t^{N-1}\right)\right) =$$

$$= t\frac{d}{dt}\left(t\frac{1 - t^N}{1 - t}\right) = t\frac{1 - (N+1)t^N + Nt^{N+1}}{(1-t)^2}.$$

Ответ: $f_a(z) = \begin{cases} \frac{N+1}{2}N, & z = \frac{1}{\alpha}, \\ \alpha z\frac{1-(N+1)\alpha^N z^N + N\alpha^{N+1}z^{N+1}}{(1-\alpha z)^2}, & z \neq \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$

2. а) $f_a(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$ (использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии);

б) $f_a(z) = 1 - z + z^2 - \ldots = \frac{1}{1+z}$, $|z| < 1$;

в) $f_a(z) = 1 + \alpha z + (\alpha z)^2 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha z}$, $|z| < \frac{1}{|\alpha|}$;

г) $f_a(z) = 1 + \frac{\alpha z}{1!} + \frac{(\alpha z)^2}{2!} + \ldots = e^{\alpha z}$;

д) $f_a(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\frac{d}{dz}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{z}{(1-z)^2}$;

е) $f_a(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n = z^2\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$. Нетрудно заметить, что $n(n-1)z^{n-2} = (z^n)''$. Поэтому можно применить правило почленного дифференцирования рядов:

$$f_a(z) = z^2\frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z^2\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{2z^2}{(1-z)^3};$$

ж) $f_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n(n-1)+n)z^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = z\frac{1+z}{(1-z)^3}$ (здесь использованы ответы задач *е* и *д*);

з), и) введём обозначения:

$$F_a^{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\alpha)\, z^n,\ F_a^{(2)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\alpha)\, z^n.$$

Тогда

$$F_a^{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\alpha)\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin((n-1)\alpha + \alpha)\, z^n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n-1)\alpha\cos\alpha)\, z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(n-1)\alpha\sin\alpha)\, z^n =$$
$$= \cos\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\alpha)\, z^{n+1} + \sin\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\alpha)\, z^{n+1} =$$
$$= z\cos\alpha\, F_a^{(1)}(z) + z\sin\alpha\, F_a^{(2)}(z) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ z\cos\alpha\, F_a^{(1)}(z) + z\sin\alpha\, F_a^{(2)}(z) = F_a^{(1)}(z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z\cos\alpha - 1)F_a^{(1)}(z) + z\sin\alpha\, F_a^{(2)}(z) = 0.$$

$$F_a^{(2)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\alpha)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos((n+1)\alpha - \alpha)\, z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\cos(n+1)\alpha\cos\alpha)\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\sin(n+1)\alpha\sin\alpha)\, z^n =$$
$$= \cos\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\alpha)\, z^{n-1} + \sin\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\alpha)\, z^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{z}\cos\alpha\left(F_a^{(2)}(z) - 1\right) + \frac{1}{z}\sin\alpha\, F_a^{(1)}(z) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{z}\cos\alpha\left(F_a^{(2)}(z) - 1\right) + \frac{1}{z}\sin\alpha\, F_a^{(1)}(z) = F_a^{(2)}(z) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \sin\alpha\, F_a^{(1)}(z) + (\cos\alpha - z)F_a^{(2)}(z) = \cos\alpha.$$

Получаем систему уравнений для нахождения $F_a^{(1)}(z)$, $F_a^{(2)}(z)$:

$$\begin{cases} (z\cos\alpha - 1)F_a^{(1)}(z) + z\sin\alpha\, F_a^{(2)}(z) = 0, \\ \sin\alpha\, F_a^{(1)}(z) + (\cos\alpha - z)F_a^{(2)}(z) = \cos\alpha. \end{cases}$$

Решая её, находим, что

$$F_a^{(1)}(z) = \frac{z\sin\alpha}{1-2z\cos\alpha+z^2} = f_a^{(1)}(z),$$
$$F_a^{(2)}(z) = \frac{1-z\cos\alpha}{1-2z\cos\alpha+z^2} = f_a^{(2)}(z);$$

к) $f_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1;$

л) $f_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} = z\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ze^z;$

м) $f_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+k)!} = z^{-k}\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z^{-k}\left(e^z - \sum\limits_{n=0}^{k-1} \frac{z^n}{n!}\right);$

н) $f_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^z t^n dt = \int\limits_0^z \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt =$ $= \int\limits_0^z \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-z);$

о) $f_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\frac{\ln(1-z)}{z}$ (см. решение задачи *н*).

3. а) $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) для решения задачи применим известное из математического анализа разложение функции $(a+x)^r$ в ряд Ньютона:

$$(a+x)^r = a^r + ra^{r-1}x + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}a^{r-2}x^2 + \ldots +$$
$$+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}a^{r-n}x^n + \ldots .$$

Оно справедливо при любом действительном числе r. Подставим в него $r = -m$:

$$(a+x)^{-m} = a^{-m} - ma^{-m-1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}a^{-m-2}x^2 - \ldots +$$
$$+(-1)^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}a^{-m-n}x^n + \ldots =$$
$$= a^{-m} - C_m^1 a^{-m-1}x + C_{m+1}^2 a^{-m-2}x^2 - \ldots +$$
$$+(-1)^n C_{m+n-1}^n a^{-m-n}x^n + \ldots .$$

Разделив это равенство на a^{-m} и заменив $\frac{x}{a}$ на $-z$, получим

$$(1-z)^{-m} = 1 + C_m^1 z + C_{m+1}^2 z^2 + \ldots + C_{m+n-1}^n z^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n-1}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C}_m^n z^n,$$

где $\overline{C}_m^n$ — число сочетаний с повторениями из m по n. Ответ: $a_n = \overline{C}_m^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = (-1)^n \, \overline{C}_m^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) заменив в полученном при решении задачи *в* разложении $(1-z)^{-m}$ переменную z на $-z^2$, получим

$$\left(1+z^2\right)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \overline{C}_m^n z^{2n}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \, \overline{C}_m^{\frac{n}{2}}, & n \text{ чётное}, \\ 0, & n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

е) применим разложение функции e^x в ряд Маклорена $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$:

$$e^{-\frac{z^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{z^{2n}}{2^n n!}.$$

Ответ:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)!}, & n \text{ чётное}, \\ 0, & n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

ж) применяя разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, \frac{x^n}{n}$, получаем

$$\ln\left(1 - \frac{z}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, \frac{\left(-\frac{z}{3}\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n n}.$$

Ответ: $a_n = -\frac{1}{3^n n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$;

з) $\ln\left(1+2z^2\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(2z^2\right)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n z^{2n}}{n}$. Ответ:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}+1}}{n}, & n \text{ чётное}, \\ 0, & n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$$

и) применим разложение $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$:

$$\operatorname{arctg} \frac{z}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)}.$$

Ответ:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n n}, & n \text{ нечётное}, \\ 0, & n \text{ чётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$$

к) $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \ldots = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \arcsin 2z = 2z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} \times \frac{(2z)^{2n+1}}{2n+1} = 2z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} \cdot \frac{2^{2n+1} z^{2n+1}}{2n+1}$.

Ответ:

$$a_n = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)} \cdot \frac{2^n}{n}, & n > 1 \text{ нечётное}, \\ 0, & n \text{ чётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. а) $\frac{1}{3z+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-3z)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-3)^n z^n$. Отсюда следует ответ: $a_n = (-1)^n \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $\frac{1}{2-5z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{2}z} = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2}z\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+1}} \cdot z^n$. Ответ: $a_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $\frac{1}{z^2-z-2} = -\frac{1}{(2-z)(1+z)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1+z}\right) = -\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \right.$ $\left. + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right) = -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right) z^n$.

Ответ: $a_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{9\left(1-\frac{1}{3}z\right)^2} = \frac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)\cdot(-2-1)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{3}z\right)^n =$ $= \frac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n+1)}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{3}z\right)^n = \frac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{3^n}$. Ответ: $a_n =$ $= \frac{n+1}{3^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Подстановка в полученный в решении задачи *4,б* ответ (см. с. 12) $m = 2$, $p = -3$, $q = 1$ даёт этот же результат: $a_n = (-1)^n C_{n+1}^n \frac{1}{(-3)^{n+2}} = \frac{n+1}{3^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) $\frac{1}{4+3z^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4}z^2} = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}z^2\right)^n = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n z^{2n} =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^{n+1}}z^{2n}$. Ответ:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-3)^{\frac{n}{2}}}{4^{\frac{n}{2}+1}}, & n \text{ чётное}, \\ 0, & n \text{ нечётное}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Применим также для решения этой задачи полученный в *4,в* ответ (см. с. 14). Представим функцию в виде

$$\frac{1}{4+3z^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}+z^2}.$$

Квадратный трёхчлен $\frac{4}{3} + z^2$ имеет комплексно-сопряжённые корни $\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}i$, $\alpha_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}i$, поэтому $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ — модуль и аргумент комплексного числа $\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}i$. Тогда, согласно формуле на с. 14:

$$a_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+2}} = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n+2}}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

При n нечётном $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$, поэтому $a_n = 0$, при n чётном $\cos\frac{\pi n}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}}$, следовательно, $a_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n+2}}(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{(-3)^{\frac{n}{2}}}{4^{\frac{n}{2}+1}}$. Получили тот же самый ответ;

е) $\frac{2z+1}{z^2-3z+2} = \frac{2z+1}{(1-z)(2-z)} = \frac{3}{1-z} - \frac{5}{2-z} = 3 \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = 3\times$ $\times \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{5}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(3 - \frac{5}{2^{n+1}}\right) z^n \;\Rightarrow\; a_n = 3 - \frac{5}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

ж) пусть α_1, α_2 — корни трёхчлена $z^2 - z + 1$. Тогда $\frac{z-1}{z^2-z+1}$ можно разложить в сумму элементарных дробей:

$$\frac{z-1}{z^2-z+1} = \frac{z-1}{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)} =$$
$$= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1 - z} - \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2 - z}\right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_1}z} - \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_2}z}\right).$$

Преобразованную таким образом функцию можно теперь разложить в степенной ряд:

$$\frac{z-1}{z^2-z+1} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left((1-\alpha_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_1^{n+1}} - \right.$$
$$\left. - (1-\alpha_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_2^{n+1}}\right) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1^{n+1}} - \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2^{n+1}}\right) z^n.$$

Отсюда $a_n = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1^{n+1}} - \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2^{n+1}}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Поскольку $\alpha_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha_1 - \alpha_2 = i\sqrt{3}$, $1 - \alpha_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $1 - \alpha_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Следовательно:

$$a_n =$$
$$= \frac{1}{i\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}\right).$$

Для приведения ответа к действительному виду применим тригонометрическую форму комплексного числа: $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\pm$

$\pm i\sin\frac{\pi}{3}$. Тогда по формуле Муавра

$$\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^k = \left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k = \cos\frac{\pi k}{3}\pm i\sin\frac{\pi k}{3}.$$

Следовательно:

$$a_n = \frac{1}{i\sqrt{3}}\cdot\Bigg(\cos\frac{\pi}{3}(n+2) - i\sin\frac{\pi}{3}(n+2) -$$

$$-\left(\cos\frac{\pi}{3}(n+2)+i\sin\frac{\pi}{3}(n+2)\right)\Bigg) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(n+2).$$

Ответ: $a_n = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(n+2)$, $n\in\mathbb{N}_0$;

з) пусть α_1, α_2 — корни трёхчлена z^2+z+1. Тогда

$$\frac{1}{(z^2+z+1)^3} = \frac{1}{(\alpha_1-z)^3}\cdot\frac{1}{(\alpha_2-z)^3} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha_1}z\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha_2}z\right)^3} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha_1}z\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha_2}z\right)^3}$$

($\alpha_1\alpha_2=1$ по теореме Виета). Теперь разложим каждую дробь в степенной ряд и применим правило перемножения производящих функций:

$$\frac{1}{(z^2+z+1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{n+2}^n}{\alpha_1^n}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{n+2}^n}{\alpha_2^n}z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2\alpha_1^n}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2\alpha_2^n}z^n =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{\alpha_1^n}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{\alpha_2^n}z^n =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)}{\alpha_1^s\alpha_2^{n-s}}\right)z^n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_n = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}\frac{(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)}{\alpha_1^s\alpha_2^{n-s}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\alpha_1^{n-s}\alpha_2^s$$

(здесь сделаны подстановки $\alpha_1^{-1} = \alpha_2$, $\alpha_2^{-1} = \alpha_1$). Так как $\alpha_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$, то далее

$$a_n = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(n-s) + i\sin\frac{2\pi}{3}(n-s)\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}s - i\sin\frac{2\pi}{3}s\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(n-s)\cos\frac{2\pi}{3}s + \sin\frac{2\pi}{3}(n-s)\sin\frac{2\pi}{3}s+\right.$$
$$\left.+i\left(\sin\frac{2\pi}{3}(n-s)\cos\frac{2\pi}{3}s - \cos\frac{2\pi}{3}(n-s)\sin\frac{2\pi}{3}s\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(n-2s) + i\sin\frac{2\pi}{3}(n-2s)\right).$$

Слагаемые в сумме, симметричные относительно её середины, комплексно сопряжены (см. решение задачи *4,г*), поэтому для приведения ответа к действительному виду надо рассмотреть отдельно случаи чётного и нечётного n.

При $n = 2k+1$ (n нечётно, число слагаемых $n+1 = 2k+2$ чётно)

$$a_{2k+1} = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3)\times\right.$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1) + i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1)\right) +$$
$$+\sum_{s=k+1}^{2k+1}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3)\times$$
$$\left.\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1) + i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1)\right)\right).$$

Если во второй сумме заменить индекс s на $s' = n - s = 2k + 1 - s$, то

$$a_{2k+1} = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3)\times\right.$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1) + i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1)\right) +$$
$$+\sum_{s'=0}^{k}(2k-s'+2)(2k-s'+3)(s'+1)(s'+2)\times$$
$$\left.\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s')+1) - i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s')+1)\right)\right).$$

Теперь можно обе суммы объединить в одну:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3)\times$$
$$\times\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1).$$

Аналогично получаем ответ при $n = 2k$, $k > 0$ (n чётно, число слагаемых $n + 1 = 2k + 1$ нечётно):

$$a_{2k} = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{k-1}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2)\times\right.$$
$$\times\left(\cos\frac{4\pi}{3}(k-s) + i\sin\frac{4\pi}{3}(k-s)\right) +$$
$$+\sum_{s=k+1}^{2k}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2)\times$$
$$\left.\times\left(\cos\frac{4\pi}{3}(k-s) + i\sin\frac{4\pi}{3}(k-s)\right) + (k+1)^2(k+2)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2)\cos\frac{4\pi}{3}(k-s)+$$
$$+\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.$$

Наконец, при $n = 0$ по формуле для a_n находим, что $a_0 = 1$. Ответ:

$$a_n =$$

$$= \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)\times \\ \times(2k-s+3)\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1), & n = 2k+1, \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{k-1}(s+1)(s+2)(2k-s+1)\times \\ \times(2k-s+2)\cos\frac{4\pi}{3}(k-s)+ \\ +\frac{1}{4}\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2, & n = 2k,\ k > 0, \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{N}_0;$$

и) $\frac{1}{\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)^2} = \frac{1}{(\alpha_1-z)^2}\cdot\frac{1}{(\alpha_2-z)^2}$, где $\alpha_1 = \frac{1+i}{2}\sqrt{2}$, $\alpha_2 = = \frac{1-i}{2}\sqrt{2}$ — корни квадратного трёхчлена $z^2-\sqrt{2}z+1$. Теперь разложим каждый сомножитель в степенной ряд подобно тому, как это делалось в задачах *з*, *4,б*, и запишем их произведение. С учётом того, что $\alpha_1\alpha_2 = 1$ по теореме Виета, а $C_{n+1}^n = n+1$, получаем

$$\frac{1}{\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{n+1}^n}{\alpha_1^{n+2}}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{n+1}^n}{\alpha_2^{n+2}}z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\alpha_1^n}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\alpha_2^n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{(s+1)(n-s+1)}{\alpha_1^s\alpha_2^{n-s}}\right)z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}(s+1)(n-s+1)\alpha_1^{n-s}\alpha_2^s\right)z^n$$

(здесь сделаны подстановки $\alpha_1^{-1} = \alpha_2$, $\alpha_2^{-1} = \alpha_1$). Отсюда

$$a_n = \sum_{s=0}^{n}(s+1)(n-s+1)\alpha_1^{n-s}\alpha_2^s.$$

Для приведения к действительному виду представим корни в тригонометрической форме: $\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$. Тогда

$$a_n = \sum_{s=0}^{n}(s+1)(n-s+1)\left(\cos\frac{\pi}{4}(n-s) + i\sin\frac{\pi}{4}(n-s)\right)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\pi}{4}s - i\sin\frac{\pi}{4}s\right) =$$
$$= \sum_{s=0}^{n}(s+1)(n-s+1)\left(\cos\frac{\pi}{4}(n-2s) + i\sin\frac{\pi}{4}(n-2s)\right).$$

Рассмотрение случаев чётного и нечётного n аналогично решению задачи *з* даёт окончательный ответ:

$$a_n =$$
$$= \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2\sum\limits_{s=0}^{k}(s+1)(2k-s+2)\cos\frac{\pi}{4}(2(k-s)+1), & n = 2k+1, \\ 2\sum\limits_{s=0}^{k-1}(s+1)(2k-s+1)\cos\frac{\pi}{2}(k-s)+ & \\ +(k+1)^2, & n = 2k,\ k > 0, \end{cases}$$
$$k \in \mathbb{N}_0;$$

к) $\frac{z}{1-z^3} = z\cdot\frac{1}{1-z^3} = z\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{3n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{3n+1}$. Ответ:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k+1, \\ 0, & \text{при остальных } n, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

6. а) $e^{\alpha z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n$. Ответ: $a_n = \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) применим разложение $\cos x$ в степенной ряд $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Получаем

$$\cos\alpha z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}z^{2n}.$$

Ответ:
$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \alpha^n, & n \text{ чётное}, \\ 0, & n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

в) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Поэтому
$$\sin \alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Ответ:
$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \alpha^n, & n \text{ нечётное}, \\ 0, & n \text{ чётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

г) $(p + qz)^{-m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n C^n_{m+n-1} \frac{q^n}{p^{m+n}} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \times C^n_{m+n-1} n! \frac{q^n}{p^{m+n}} \cdot \frac{z^n}{n!}$ (см. задачу *4,б*), $p \neq 0$. Очевидно, что $C^n_{m+n-1} n! = A^n_{m+n-1}$. Отсюда следует ответ:
$$a_n = (-1)^n A^n_{m+n-1} \frac{q^n}{p^{m+n}},\ n \in \mathbb{N}_0;$$

д) $\ln(1 + \alpha z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\alpha z)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \alpha^n}{n!} z^n$.
Ответ: $a_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$.

7. а) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha z)^n}{n!} = e^{\alpha z}$;

б) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n = z \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = z \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z e^z$;

в) $e_a(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} z^n = z^2 \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} = z^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z^2 e^z$;

г) $e_a(z) = z(1+z)e^z$. *Указание.* Воспользуйтесь равенством $n^2 = n(n-1) + n$;

д) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$;

е) $e_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-z)^n}{n} = = -\ln(1-z)$;

ж) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$ (см. задачи *2,д* и *д*).

9. а) Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны. Докажем коммутативность умножения. Пусть

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда

$$F_a(z) \cdot F_b(z) = F_{ab}(z) = F_c(z),\ \text{где } c_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s};$$

$$F_b(z) \cdot F_a(z) = F_{ba}(z) = F_{c'}(z),\ \text{где } c'_n = \sum_{s=0}^{n} b_s a_{n-s}.$$

Сделаем в c'_n замену индекса $s' = n - s$. Получаем

$$c'_n = \sum_{s'=0}^{n} b_{n-s'} a_{s'} = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s} = c_n,$$

что и доказывает коммутативность умножения.

Теперь докажем ассоциативность. Пусть

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,\ F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Нужно доказать, что $F_a(z) \cdot (F_b(z) \cdot F_c(z)) = (F_a(z) \cdot F_b(z)) \times \times F_c(z)$. Выпишем выражение общего члена ряда в левой части равенства:

$$F_b(z) \cdot F_c(z) = F_{bc}(z) = F_d(z),\ \text{ где } d_n = \sum_{s=0}^{n} b_s c_{n-s};$$

$$F_a(z) \cdot (F_b(z) \cdot F_c(z)) = F_a(z) \cdot F_d(z) = F_{ad}(z) = F_{d'}(z),$$

где $d'_n = \sum\limits_{s=0}^{n} a_s d_{n-s} = \sum\limits_{s=0}^{n} a_s \left(\sum\limits_{s'=0}^{n-s} b_{s'} c_{n-s-s'} \right)$. Общий член ряда справа:

$$F_a(z) \cdot F_b(z) = F_{ab}(z) = F_g(z), \quad \text{где } g_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s};$$
$$(F_a(z) \cdot F_b(z)) \cdot F_c(z) = F_g(z) \cdot F_c(z) = F_{gc}(z) = F_{g'}(z),$$

где $g'_n = \sum\limits_{s=0}^{n} g_s c_{n-s} = \sum\limits_{s=0}^{n} \left(\sum\limits_{s'=0}^{s} a_{s'} b_{s-s'} \right) c_{n-s}$. Напишем g'_n в развёрнутом виде и преобразуем сумму:

$$\begin{gathered}
g'_n = \underbrace{a_0 b_0}_{g_0} c_n + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{g_1} c_{n-1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{g_2} c_{n-2} + \\
+ \ldots + \underbrace{(a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \ldots + a_s b_0)}_{g_s} c_{n-s} + \ldots + \\
+ \underbrace{(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)}_{g_n} c_0 = \\
= a_0 \underbrace{(b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \ldots + b_n c_0)}_{d_n} + \\
+ a_1 \underbrace{(b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} + \ldots + b_{n-1} c_0)}_{d_{n-1}} + \\
+ a_2 \underbrace{(b_0 c_{n-2} + \ldots + b_{n-2} c_0)}_{d_{n-2}} + \ldots + \\
+ a_s \underbrace{(b_0 c_{n-s} + \ldots + b_{n-s} c_0)}_{d_{n-s}} + \ldots + a_n \underbrace{b_0 c_0}_{d_0} = \\
= \sum_{s=0}^{n} a_s \left(\sum_{s'=0}^{n-s} b_{s'} c_{n-s-s'} \right) = d'_n,
\end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

10. Докажем коммутативность. Пусть

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \; E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Тогда

$$E_a(z)\cdot E_b(z)=E_{ab}(z)=E_c(z)\,,\quad \text{где } c_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s a_s b_{n-s};$$
$$E_b(z)\cdot E_a(z)=E_{ba}(z)=E_{c'}(z)\,,\quad \text{где } c'_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s b_s a_{n-s}.$$

Замена индекса $s'=n-s$ в c'_n с учётом свойства симметрии биномиального коэффициента $C_n^s=C_n^{n-s}$ приводит к равенству $c'_n=c_n$, что и доказывает коммутативность.

Докажем ассоциативность. Пусть

$$E_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,\ E_b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n,\ E_c(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n.$$

Тогда

$$E_b(z)\cdot E_c(z)=E_{bc}(z)=E_d(z)\,,\quad \text{где } d_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s b_s c_{n-s};$$
$$E_a(z)\cdot\left(E_b(z)\cdot E_c(z)\right)=E_a(z)\cdot E_d(z)=E_{ad}(z)=E_{d'}(z)\,,$$
$$\text{где } d'_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s a_s d_{n-s}=\sum_{s=0}^{n}C_n^s a_s\left(\sum_{s'=0}^{n-s}C_{n-s}^{s'}b_{s'}c_{n-s-s'}\right);$$
$$E_a(z)\cdot E_b(z)=E_{ab}(z)=E_g(z)\,,\quad \text{где } g_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s a_s b_{n-s};$$
$$\left(E_a(z)\cdot E_b(z)\right)\cdot E_c(z)=E_g(z)\cdot E_c(z)=E_{gc}(z)=E_{g'}(z)\,,$$
$$\text{где } g'_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^s g_s c_{n-s}=\sum_{s=0}^{n}C_n^s\left(\sum_{s'=0}^{s}C_s^{s'}a_{s'}b_{s-s'}\right)c_{n-s}.$$

Напишем в развёрнутом виде и преобразуем g'_n, используя равенство $C_n^s C_s^k = C_{n-k}^{s-k} C_n^k$ [1]:

$$g'_n = \underbrace{a_0 b_0}_{g_0} c_n + C_n^1 \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{g_1} c_{n-1} +$$

$$+ C_n^2 \underbrace{\left(a_0 b_2 + C_2^1 a_1 b_1 + a_2 b_0\right)}_{g_2} c_{n-2} + \ldots +$$

$$+ C_n^s \underbrace{\left(a_0 b_s + C_s^1 a_1 b_{s-1} + \ldots + a_s b_0\right)}_{g_s} c_{n-s} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{\left(a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0\right)}_{g_n} c_0 = a_0 b_0 c_n + C_n^1 a_0 b_1 c_{n-1} +$$

$$+ C_n^2 a_0 b_2 c_{n-2} + \ldots + C_n^s a_0 b_s c_{n-s} + \ldots + a_0 b_n c_0 +$$

$$+ C_n^1 a_1 b_0 c_{n-1} + C_n^2 C_2^1 a_1 b_1 c_{n-2} + \ldots + C_n^s C_s^1 a_1 b_{s-1} c_{n-s} + \ldots +$$

$$+ C_n^1 a_1 b_{n-1} c_0 + C_n^2 a_2 b_0 c_{n-2} + \ldots + C_n^s C_s^2 a_2 b_{s-2} c_{n-s} + \ldots +$$

$$+ C_n^2 a_2 b_{n-2} c_0 + \ldots + C_n^s a_s b_0 c_{n-s} + C_n^{s+1} C_{s+1}^s a_s b_1 c_{n-s-1} + \ldots +$$

$$+ C_n^s a_s b_{n-s} c_0 + \ldots + a_n b_0 c_0 = a_0 \times$$

$$\times \underbrace{\left(b_0 c_n + C_n^1 b_1 c_{n-1} + C_n^2 b_2 c_{n-2} + \ldots + C_n^s b_s c_{n-s} + \ldots + b_n c_0\right)}_{d_n} +$$

$$+ C_n^1 a_1 \times$$

$$\times \underbrace{\left(b_0 c_{n-1} + C_{n-1}^1 b_1 c_{n-2} + \ldots + C_{n-1}^{s'} b_{s'} c_{n-s'-1} + \ldots + b_{n-1} c_0\right)}_{d_{n-1}} +$$

$$+ C_n^2 a_2 \underbrace{\left(b_0 c_{n-2} + \ldots + C_{n-2}^{s'} b_{s'} c_{n-s'-2} + \ldots + b_{n-2} c_0\right)}_{d_{n-2}} + \ldots +$$

$$+ C_n^s a_s \times$$

$$\times \underbrace{\Big(b_0 c_{n-s} + C_{n-s}^1 b_1 c_{n-s-1} + \ldots + C_{n-s}^{s'} b_{s'} c_{n-s-s'} + \ldots +}_{d_{n-s}}$$

$$\underbrace{+ b_{n-s} c_0\Big)}_{d_{n-s}} + \ldots + a_n \underbrace{b_0 c_0}_{d_0} =$$

---

[1] Это равенство легко доказывается алгебраически с помощью формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Комбинаторное доказательство можно найти в [1, 2].

$$= \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s \left(\sum_{s'=0}^{n-s} C_{n-s}^{s'} b_{s'} c_{n-s-s'} \right) = d'_n.$$

11. г) Применим правило деления рядов:

$$\frac{1-z}{1+z^2} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+z^2\right)\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\right) = 1 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1;$$

$$1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 = -1 \Rightarrow c_1 = -1;$$

$$1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_0 = -1;$$

$$1 \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_1 = 1;$$

$$1 \cdot c_4 + 0 \cdot c_3 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 = 0 \Rightarrow c_4 = -c_2 = 1;$$

$$\vdots$$

Ответ: $\frac{1-z}{1+z^2} = 1 - z - z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$.

Деление «уголком» даёт такой же ответ:

$$\begin{array}{l|l}
\underline{\ \ }\ 1 - z & 1 + z^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1 + z^2} & 1 - z - z^2 + z^3 + z^4 - z^5 + \ldots \\
\quad \underline{\ \ }\ -z - z^2 & \\
\qquad \underline{-z - z^3} & \\
\qquad\quad \underline{\ \ }\ -z^2 + z^3 & \\
\qquad\qquad \underline{-z^2 - z^4} & \\
\qquad\qquad\quad \underline{\ \ }\ z^3 + z^4 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{z^3 + z^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\ \ }\ z^4 - z^5 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{z^4 + z^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -z^5 - z^6 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots &
\end{array}$$

д) Преобразуем исходную дробь: $\frac{z}{1-3z+z^2-z^3} = z \cdot \frac{1}{1-3z+z^2-z^3}$. Частное $\frac{1}{1-3z+z^2-z^3}$ найдём делением в столбик:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
-\,1 & & & & & & & & \Big|\ 1-3z+z^2-z^3 \\
\cline{9-9}
\underline{1} & \underline{-3z} & \underline{+z^2} & \underline{-z^3} & & & & & \ \ 1+3z+8z^2+22z^3+61z^4+\ldots \\
 & -\,3z & -z^2 & +z^3 & & & & & \\
 & \underline{3z} & \underline{-9z^2} & \underline{+3z^3} & \underline{-3z^4} & & & & \\
 & & -\,8z^2 & -2z^3 & +3z^4 & & & & \\
 & & \underline{8z^2} & \underline{-24z^3} & \underline{+8z^4} & \underline{-8z^5} & & & \\
 & & & -\,22z^3 & -5z^4 & +8z^5 & & & \\
 & & & \underline{22z^3} & \underline{-66z^4} & \underline{+22z^5} & \underline{-22z^6} & & \\
 & & & & -\,61z^4 & -14z^5 & +22z^6 & & \\
 & & & & \underline{61z^4} & \underline{-183z^5} & \underline{+61z^6} & \underline{-61z^7} & \\
 & & & & & 169z^5 & -39z^6 & +61z^7 & \\
 & & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Ответ: $\frac{z}{1-3z+z^2-z^3} = z + 3z^2 + 8z^3 + 22z^4 + 61z^5 + 169z^6 + \ldots$. Самостоятельно получите такой же ответ с помощью правила деления рядов;

е) $\frac{1+z+z^3}{1-z^6} = 1 + z + z^3 + z^6 + z^7 + z^9 + \ldots$;

ж) $\frac{2z-1}{2+3z-z^3} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{4}z - \frac{21}{8}z^2 + \frac{59}{16}z^3 - \frac{149}{32}z^4 + \ldots$;

з) *1-й способ.*

Найдём коэффициенты частного по правилу деления рядов:

$$\frac{1+z+z^2+z^3+\ldots}{1-z+z^2-z^3+\ldots} = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \ldots \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \Big(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots\Big)\Big(c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \ldots\Big) =$$

$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot c_0 = 1 \ \Rightarrow \ c_0 = 1;$$

$$1 \cdot c_1 - 1 \cdot c_0 = 1 \ \Rightarrow \ c_1 = 2;$$

$$1 \cdot c_2 - 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_0 = 1 \ \Rightarrow \ c_2 = 2;$$

$$1\cdot c_3 - 1\cdot c_2 + 1\cdot c_1 - 1\cdot c_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_3 = 2;$$
$$1\cdot c_4 - 1\cdot c_3 + 1\cdot c_2 - 1\cdot c_1 + 1\cdot c_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_4 = 2;$$
$$\vdots$$
$$1\cdot c_n - 1\cdot c_{n-1} + 1\cdot c_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} c_1 + (-1)^n c_0 = 1.$$

Подставим в последнее уравнение для нахождения c_n найденные ранее $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 2$ и рассмотрим по отдельности случаи чётного и нечётного n. При n чётном получаем

$$c_n - 2 + \underbrace{2 - 2 + 2 - \ldots + 2 - 2}_{n-2} + 1 = 1 \;\Rightarrow\; c_n = 2,$$

при n нечётном

$$c_n \underbrace{-2 + 2 - 2 + 2 - \ldots - 2 + 2}_{n-1} - 1 = 1 \;\Rightarrow\; c_n = 2.$$

Ответ: $\frac{1+z+z^2+z^3+\ldots}{1-z+z^2-z^3+\ldots} = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \ldots = 1 + 2\times \times \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$.

2-й способ.

Поскольку $1+z+z^2+z^3+\ldots = \frac{1}{1-z}$, $1-z+z^2-z^3+\ldots = \frac{1}{1+z}$, исходную дробь можно переписать в виде:

$$\frac{1+z+z^2+z^3+\ldots}{1-z+z^2-z^3+\ldots} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Далее применением правила деления рядов или «уголком» получаем приведённый выше ответ.

12. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Из условия $F_a(z)\cdot F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$ следует бесконечная серия равенств:

$$a_0 b_0 = 0;$$
$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0;$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0;$$

$$\vdots$$

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0;$$

$$\vdots$$

Нужно доказать, что $F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$.

Пусть $a_0 \neq 0$. Тогда из $a_0 b_0 = 0$ следует $b_0 = 0$. Предположим, что $F_b(z)$ представляет собой ненулевой ряд, т.е. при некотором $n > 0$ $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$, а $b_n \neq 0$. Тогда из равенства $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0$ следует $a_0 b_n = 0$, а так как $a_0 \neq 0$, то $b_n = 0$.

Пусть теперь $a_0 = 0$. Поскольку $F_a(z)$ — ненулевой ряд, то при некотором $n > 0$ $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n \neq 0$. Тогда из равенства $a_0 b_n + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 0$ следует $a_n b_0 = 0$, а значит, $b_0 = 0$. Далее запишем условие равенства нулю коэффициента при z^{n+1} в $F_a(z) \cdot F_b(z)$:

$$a_0 b_{n+1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 + a_{n+1} b_0 = 0.$$

Из него следует $a_n b_1 = 0$, значит, $b_1 = 0$. Рассмотрение коэффициента при z^{n+2} с учётом того, что $b_0 = b_1 = 0$, приводит к $b_2 = 0$. Последовательно увеличивая степень z и приравнивая к нулю соответствующие коэффициенты, получаем $b_n = 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. $F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$.

13. Построим $F_a^{-1}(z)$ с помощью правила деления рядов. Пусть $F_a^{-1}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. По определению $F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = \mathfrak{1}(z)$. Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z слева и справа:

$$a_0 b_0 = 1 \ \Rightarrow\ b_0 = a_0^{-1};$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \ \Rightarrow\ b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0;$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \ \Rightarrow\ b_2 = -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0);$$

$$\vdots$$

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0 \ \Rightarrow \ b_n =$$
$$= -a_0^{-1} \left(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 \right);$$
$$\vdots$$

Таким образом, доказано существование $F_a^{-1}(z)$. Теперь предположим , что существует другой, отличный от $F_a^{-1}(z)$, обратный $F_a(z)$ ряд $\widetilde{F}_a^{-1}(z)$. Тогда одновременно выполняются равенства $F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = \mathfrak{1}(z)$, $F_a(z) \cdot \widetilde{F}_a^{-1}(z) = \mathfrak{1}(z)$. Вычитая одно из другого, получаем $F_a(z) \cdot \left(F_a^{-1}(z) - \widetilde{F}_a^{-1}(z) \right) = \mathfrak{o}(z)$. Тогда из задачи *12* следует, что $F_a^{-1}(z) - \widetilde{F}_a^{-1}(z) = \mathfrak{o}(z)$, т.е. $F_a^{-1}(z) = \widetilde{F}_a^{-1}(z) + \mathfrak{o}(z) = \widetilde{F}_a^{-1}(z)$.

14. а) $E_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} = z \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ze^z = e_a(z)$, $E_b(z) = = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-2)!} = z^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z^2 e^z = e_b(z)$. Отсюда следует: $\frac{e_a(z)}{e_b(z)} = = \frac{1}{z}$, функция не разлагается в ряд по неотрицательным степеням z, поэтому экспоненциальная производящая функция $\frac{E_a(z)}{E_b(z)}$ не существует. Для обратного отношения: $\frac{e_b(z)}{e_a(z)} = z = \frac{E_b(z)}{E_a(z)}$.

По определению $E_a^{-1}(z) = \frac{\mathfrak{1}(z)}{E_a(z)}$, но $e_a^{-1}(z) = \frac{1}{ze^z}$, функция не разлагается в степенной ряд, поэтому экспоненциальная производящая функция, обратная $E_a(z)$, не существует. То же справедливо и для $E_b(z)$;

б) находим экспоненциальные производящие функции числителя и знаменателя:

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z} \left(e^z - 1 \right) = e_a(z),$$
$$E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^2} \left(e^z - z - 1 \right) = e_b(z);$$
$$\frac{e_a(z)}{e_b(z)} = \frac{z \left(e^z - 1 \right)}{e^z - z - 1}.$$

Для нахождения коэффициентов разложения в степенной ряд $\frac{e_a(z)}{e_b(z)}$ воспользуемся правилом деления экспоненциальных производящих функций. Сначала запишем $E_a(z)$ и $E_b(z)$ в виде (выделим коэффициенты при $\frac{z^n}{n!}$):

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{1}{2}\, z + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots\ ;$$

$$E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\, z + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots\ .$$

Пусть $\frac{E_a(z)}{E_b(z)} = c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2!} + \ldots$. Тогда

$$E_a(z) = E_b(z) \cdot \left(c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2!} + \frac{c_3 z^3}{3!} + \ldots \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1 + \frac{1}{2}\, z + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots\ =$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\, z + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots \right) \times$$

$$\times \left(c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2!} + \frac{c_3 z^3}{3!} + \ldots \right).$$

Теперь применим правило деления экспоненциальных производящих функций:

$$\frac{1}{2} \cdot c_0 = 1\ \Rightarrow\ c_0 = 2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot c_1 + \frac{1}{6} \cdot c_0 = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ c_1 = \frac{1}{3}\ ;$$

$$\frac{1}{2} \cdot c_2 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot c_1 + \frac{1}{12} \cdot c_0 = \frac{1}{3}\ \Rightarrow\ c_2 = \frac{1}{9}\ ;$$

$$\frac{1}{2} \cdot c_3 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot c_2 + 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot c_1 + \frac{1}{20} \cdot c_0 = \frac{1}{4}\ \Rightarrow\ c_3 = \frac{1}{45}\ ;$$

$$\frac{1}{2}\cdot c_4+4\cdot\frac{1}{6}\cdot c_3+6\cdot\frac{1}{12}\cdot c_2+4\cdot\frac{1}{20}\cdot c_1+\frac{1}{30}\cdot c_0=\frac{1}{5}\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; c_4=-\frac{1}{135}\,;$$
$$\vdots$$

Получаем ответ:

$$\frac{E_a(z)}{E_b(z)}=\frac{z\left(e^z-1\right)}{e^z-z-1}=2+\frac{1}{3}\cdot z+\frac{1}{9}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{45}\cdot\frac{z^3}{3!}-\frac{1}{135}\cdot\frac{z^4}{4!}+\dots.$$

Далее находим обратное отношение: $\frac{e_b(z)}{e_a(z)}=\frac{e^z-z-1}{z(e^z-1)}$. Аналогично вычисляем несколько первых членов разложения этой функции в степенной ряд (убедитесь самостоятельно в том, что нуль является устранимой особой точкой данной функции):

$$\frac{E_b(z)}{E_a(z)}=\frac{e^z-z-1}{z\left(e^z-1\right)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\,z+\frac{1}{120}\cdot\frac{z^3}{3!}-\frac{1}{252}\cdot\frac{z^5}{5!}+\dots.$$

Поскольку $e_a^{-1}(z)=\frac{z}{e^z-1}$, $e_b^{-1}(z)=\frac{z^2}{e^z-z-1}$ имеют устранимые особенности в нуле (убедитесь в этом самостоятельно), $E_a^{-1}(z)$ и $E_b^{-1}(z)$ как экспоненциальные производящие функции существуют. Найдём $E_a^{-1}(z)$. Пусть $E_a^{-1}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n z^n}{n!}$. Тогда

$$E_a(z)\cdot E_a^{-1}(z)=\mathbf{1}(z)\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\left(1+\frac{1}{2}\,z+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\times$$
$$\times\left(c_0+c_1z+\frac{c_2z^2}{2!}+\frac{c_3z^3}{3!}+\dots\right)=\mathbf{1}(z)\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;1\cdot c_0=1\;\Rightarrow\;c_0=1;$$
$$1\cdot c_1+\frac{1}{2}\cdot c_0=0\;\Rightarrow\;c_1=-\frac{1}{2};$$

$$1\cdot c_2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot c_1+\frac{1}{3}\cdot c_0=0\ \Rightarrow\ c_2=\frac{1}{6};$$
$$1\cdot c_3+3\cdot\frac{1}{2}\cdot c_2+3\cdot\frac{1}{3}\cdot c_1+\frac{1}{4}\cdot c_0=0\ \Rightarrow\ c_3=0;$$
$$1\cdot c_4+4\cdot\frac{1}{2}\cdot c_3+6\cdot\frac{1}{3}\cdot c_2+4\cdot\frac{1}{4}\cdot c_1+\frac{1}{5}c_0=0\ \Rightarrow\ c_4=-\frac{1}{30};$$
$$\vdots$$

Получаем ответ:

$$E_a^{-1}(z)=\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{1}{2}\,z+\frac{1}{6}\cdot\frac{z^2}{2!}-\frac{1}{30}\cdot\frac{z^4}{4!}+\dots.$$

Аналогично находим обратную $E_b(z)$ экспоненциальную производящую функцию:

$$E_b^{-1}(z)=\frac{z^2}{e^z-z-1}=2-\frac{2}{3}\,z+\frac{1}{9}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{45}\cdot\frac{z^3}{3!}-\frac{1}{135}\cdot\frac{z^4}{4!}+\dots;$$

в) $e_a(z)=\frac{1}{z^2}\left(e^z-z-1\right)$, $e_b(z)=ze^z$ (см. решения задач *б*, *а*). Поэтому $\frac{e_a(z)}{e_b(z)}=\frac{e^z-z-1}{z^3e^z}$, функция не разлагается в ряд по неотрицательным степеням z (самостоятельно проверьте, что в нуле она имеет неустранимую особенность); обратное отношение $\frac{e_b(z)}{e_a(z)}=\frac{z^3e^z}{e^z-z-1}$ допускает разложение в ряд Маклорена. Применение правила деления экспоненциальных производящих функций даёт ответ:

$$\frac{E_b(z)}{E_a(z)}=\frac{z^3e^z}{e^z-z-1}=2z+\frac{8}{3}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{7}{3}\cdot\frac{z^3}{3!}+\frac{64}{45}\cdot\frac{z^4}{4!}+\dots.$$

15. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=f_a(z)\ \Rightarrow\ F_a^{-1}(z)=f_a^{-1}(z)=1-z;$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-3)^n}=\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=f_a(z)\ \Rightarrow\ F_a^{-1}(z)=f_a^{-1}(z)=1+\frac{1}{3}\,z;$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z=f_a(z)\ \Rightarrow\ f_a^{-1}(z)=e^{-z}\ \Rightarrow\ F_a^{-1}(z)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^n}{n!};$

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} = f_a(z)$ (см. задачу *2,д*). Следовательно, $f_a^{-1}(z) = = \frac{(1-z)^2}{z}$, функция не разлагается в ряд Маклорена, а значит, производящая функция $F_a^{-1}(z)$ не существует;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{e^z-z-1}{z^2}$ (см. задачу *14,б*). Значит, $f_a^{-1}(z) = = \frac{z^2}{e^z-z-1}$. По определению $F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = \mathbb{1}(z)$. Если обозначить $F_a^{-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, то последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\,z + \frac{1}{4!}\,z^2 + \ldots\right)\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\right) = \mathbb{1}(z)\,.$$

Применяя правило деления рядов, находим $c_0 = 2$, $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{1}{18}$, $c_3 = \frac{1}{270}, \ldots$. Ответ: $F_a^{-1}(z) = 2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{18}z^2 + \frac{1}{270}z^3 + \ldots$ (сравните с ответом задачи *14,б*).

1.2. Производящие функции некоторых комбинаторных последовательностей

1. а) $f_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} C_m^n z^n = 1 + mz + C_m^2 z + \ldots + z^m = (1+z)^m$;

б) $f_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{C}_m^n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{m+n-1}^n z^n = (1-z)^{-m}$ (см. задачу *4,б* подразд. *1.1*);

2. а) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} A_m^n \frac{z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{m} C_m^n z^n = (1+z)^m$;

б) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n \frac{z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$;

в) $e_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{A}_m^n \frac{z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} m^n \frac{z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(mz)^n}{n!} = e^{mz}$.

4. Производящая функция чисел сочетаний при выборе элементов одного вида равна:

$$z^2 + z^4 + z^6 + \ldots = z^2 \left(1 + z^2 + z^4 + \ldots\right) = \frac{z^2}{1 - z^2}.$$

По правилу произведения аналогичная функция при отборе m видов будет следующей:

$$f_a\left(z\right) = \left(\frac{z^2}{1 - z^2}\right)^m = \frac{z^{2m}}{\left(1 - z^2\right)^m} = z^{2m}\left(1 - z^2\right)^{-m}.$$

Для нахождения числа указанных в условии задачи сочетаний объёма n разложим $f_a\left(z\right)$ в степенной ряд и найдём a_n:

$$f_a\left(z\right) = z^{2m}\left(1 - z^2\right)^{-m} = z^{2m}\sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n-1}^{n} z^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n-1}^{n} z^{2(m+n)} = \sum_{n=m}^{\infty} C_{n-1}^{n-m} z^{2n} = F_a\left(z\right).$$

Ответ:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < 2m \text{ или } n \geq 2m \text{ нечётное}, \\ C_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{2}-m}, & n \geq 2m \text{ чётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

5. в) Производящая функция сочетаний равна

$$F_C\left(z\right) = \left(x_1 z + x_1^2 z^2 + \ldots\right)\left(1 + x_2 z + \ldots + x_2^p z^p\right) \times$$
$$\times \left(1 + x_3 z + \ldots + x_3^q z^q\right) =$$
$$= x_1 z\left(1 + x_1 z + x_1^2 z^2 + \ldots\right)\left(1 + x_2 z + \ldots + x_2^p z^p\right) \times$$
$$\times \left(1 + x_3 z + \ldots + x_3^q z^q\right).$$

Для нахождения производящей функции чисел сочетаний подставим в $F_C\left(z\right)$ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Получаем

$$F_a\left(z\right) =$$
$$= z\left(1 + z + z^2 + \ldots\right)\left(1 + z + \ldots + z^p\right)\left(1 + z + \ldots + z^q\right) =$$
$$= \frac{z\left(1 + z + \ldots + z^p\right)\left(1 + z + \ldots + z^q\right)}{1 - z} = f_a\left(z\right).$$

Для того чтобы найти число сочетаний объёма n, нужно разложить $f_a(z)$ в степенной ряд и определить коэффициент при z^n, например, делить числитель на знаменатель в $f_a(z)$ до тех пор, пока не будет достигнут нужный коэффициент;

г) производящая функция сочетаний:

$$F_C(z) = \left(x_1^{p_1} z^{p_1} + x_1^{p_1+1} z^{p_1+1} + \ldots + x_1^{q_1} z^{q_1}\right) \times \\ \times \left(x_2^{p_2} z^{p_2} + x_2^{p_2+1} z^{p_2+1} + \ldots + x_2^{q_2} z^{q_2}\right) \times \\ \times \left(x_3^{p_3} z^{p_3} + x_3^{p_3+1} z^{p_3+1} + \ldots + x_3^{q_3} z^{q_3}\right) = \prod_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=p_k}^{q_k} x_k^i z^i\right).$$

Аналогичная функция для чисел сочетаний:

$$F_a(z) = \left(z^{p_1} + z^{p_1+1} + \ldots + z^{q_1}\right)\left(z^{p_2} + z^{p_2+1} + \ldots + z^{q_2}\right) \times \\ \times \left(z^{p_3} + z^{p_3+1} + \ldots + z^{q_3}\right) = \prod_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=p_k}^{q_k} z^i\right).$$

6. а) Пусть решениям уравнения $x + 2y + 5z = n$ в целых неотрицательных числах соответствуют сочетания объёма n букв «x», «y» и «z», в которых буква «x» может присутствовать любое число раз, «y» — чётное, «z» — кратное пяти число раз. Например, решению $x = n$, $y = z = 0$ соответствует сочетание, состоящее только из букв «x», решению $x = n - 7$, $y = z = 1$ — сочетание, содержащее две буквы «y», пять букв «z», все остальные — «x». Вообще, решению $\langle x,\ y,\ z\rangle$[2)] соответствует сочетание x букв «x», $2y$ букв «y» и $5z$ букв «z» — всего n букв. Очевидно, что такое соответствие взаимно однозначно: по решению уравнения можно составить единственное сочетание и наоборот. Следовательно, число сочетаний букв «x», «y», «z» указанного состава и объёма n равно числу решений уравнения $x + 2y + 5z = n$ в целых неотрицательных числах,

[2)] Угловыми скобками, как принято в теории множеств, обозначена упорядоченная последовательность.

а значит, их производящие функции совпадают. Поэтому, рассуждая так же, как в решении задачи *5*, получаем, что производящая функция чисел решений равна:

$$F_a(z) = \left(1 + z + z^2 + \ldots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(1 + z^5 + z^{10} + \ldots\right) = \frac{1}{(1-z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^5\right)} = f_a(z)\,.$$

Для получения ответа при конкретных числовых значениях n нужно разложить $f_a(z)$ в степенной ряд (см. решение задачи *11* подразд. *1.1*):

$$F_a(z) = \frac{1}{(1-z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^5\right)} =$$
$$= \frac{1}{1 - z - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 + z^7 - z^8} =$$
$$= 1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 5z^6 + 6z^7 + 7z^8 + 8z^9 + \ldots\,.$$

Результаты вычислений для нескольких первых значений n можно свести в таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
число решений	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8

б) рассуждая аналогично решению задачи *а*, получаем ответ:

$$F_a(z) = \left(1 + z^{c_1} + z^{2c_1} + \ldots\right)\ldots\left(1 + z^{c_k} + z^{2c_k} + \ldots\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^{jc_i}\right) = \frac{1}{\left(1-z^{c_1}\right)\ldots\left(1-z^{c_k}\right)} = f_a(z)\,;$$

в) $F_a(z) = \left(1+z^3\right)\left(1+z^5\right)\left(1+z^2\right) = 1 + z^2 + z^3 + 2z^5 + z^7 + z^8 + z^{10} = f_a(z)$.

Ответ для всех n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	больше 10
число решений	1	0	1	1	0	2	0	1	1	0	1	0

г) производящая функция последовательности:

$$F_a(z) = \left(z^{p_1c_1} + z^{(p_1+1)c_1} + \ldots + z^{q_1c_1}\right)\ldots \times$$
$$\times \left(z^{p_kc_k} + z^{(p_k+1)c_k} + \ldots + z^{q_kc_k}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=p_i}^{q_i} z^{jc_i}\right) = f_a(z);$$

д) $F_a(z) = \left(1 + z^5 + z^{10} + z^{15}\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{10}\right) \times \times \left(z^8 + z^{12} + z^{16} + z^{20} + z^{24}\right) = f_a(z)$.

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, можно определить коэффициент при z^n, т.е. число решений уравнения для всех n.

7. По сути эта задача эквивалентна задаче о нахождении числа решений уравнения $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах при $0 \le x_1 \le p_1$, $0 \le x_2 \le p_2$, ..., $0 \le x_k \le p_k$. Применяя методику, описанную в решении задачи *6*, строим производящую функцию чисел способов уплаты:

$$F_a(z) = \left(1 + z^{n_1} + z^{2n_1} + \ldots + z^{p_1n_1}\right)\ldots \times$$
$$\times \left(1 + z^{n_k} + z^{2n_k} + \ldots + z^{p_kn_k}\right).$$

8. Производящая функция чисел способов уплаты:

$$F_a(z) = \left(1 + z + z^2 + \ldots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(1 + z^3 + z^6 + \ldots\right)\left(1 + z^5 + z^{10} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{(1-z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^3\right)\left(1-z^5\right)} =$$
$$= \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^7 - z^9 - z^{10} + z^{11}} = f_a(z).$$

Теперь разложим $f_a(z)$ в степенной ряд и найдём коэффициент при z^{12} (см. решение задачи *11* подразд. *1.1*):

$$F_a(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^7 - z^9 - z^{10} + z^{11}} =$$
$$= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 6z^5 + 8z^6 + 10z^7 + 13z^8 + 16z^9 +$$
$$+ 20z^{10} + 24z^{11} + 29z^{12} + \ldots .$$

Ответ: 29 способов.

9. а) Производящая функция чисел способов наклейки марок:

$$F_a(z) = \left(1 + z + z^2\right)\left(1 + z^2 + z^4\right)\left(1 + z^3 + z^6\right) \times$$
$$\times \left(1 + z^5 + z^{10}\right) = 1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 +$$
$$+ 5z^8 + 5z^9 + 6z^{10} + 5z^{11} + 6z^{12} + 5z^{13} + 5z^{14} + 5z^{15} + 4z^{16} +$$
$$+ 4z^{17} + 3z^{18} + 2z^{19} + 2z^{20} + z^{21} + z^{22}.$$

Ответ: 6 способов (заметим, что вычислять весь многочлен, как это сделано здесь, вовсе не обязательно, достаточно найти коэффициент при нужной степени z);

б) $F_a(z) = \left(1 + z + \ldots + z^5\right)\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8\right)\left(1 + z^3 + z^6\right)\left(1 + z^5\right) = 1 + z + \ldots + 14z^{12} + \ldots + z^{24}$.

Ответ: 14 способов.

10. 68 способов (см. задачу *6,а*)[3].

11. См. задачу *6,б*.

12. Строим производящую функцию способов размена и на-

[3] Чтобы избежать громоздких и утомительных вычислений коэффициентов степенного ряда по правилу деления рядов или «уголком», равно как и полиномиальных коэффициентов, рекомендуется использовать для этой цели средства символических вычислений прикладных математических пакетов (например, Mathcad или MATLAB).

ходим коэффициент при z^{25}:

$$F_a(z) = \left(z + z^2 + z^3 + \ldots\right)\left(z^2 + z^4 + \ldots\right)\left(z^5 + z^{10} + \ldots\right) =$$
$$= z^8\left(1 + z + z^2 + \ldots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \ldots\right)\left(1 + z^5 + z^{10} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{z^8}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} =$$
$$= z^8\left(1 + z + 2z^2 + \ldots + 22z^{17} + \ldots\right).$$

Ответ: 22 способа.

13. Покажем, что $F_a(z) = (z^{n_1} + z^{n_2} + \ldots + z^{n_k})^m$ является производящей функцией чисел $C_n^m(n_1, \ldots, n_k)$. Действительно, при возведении в m-ю степень каждый член будет иметь вид $z^{n_{i_1}} \ldots z^{n_{i_m}} = z^{n_{i_1} + \ldots + n_{i_m}}$ ($n_{i_1}, \ldots, n_{i_m}$ — допустимые значения слагаемых), т.к. при перемножении m многочленов ровно одно слагаемое из каждого участвует в этом произведении. Значит, показатель степени каждого члена будет равен сумме m допустимых чисел. После приведения подобных членов коэффициент при z^n будет равен количеству разбиений вида $n_{i_1} + \ldots + n_{i_m} = n$, т.е. $C_n^m(n_1, \ldots, n_k)$. Итак, чтобы найти $C_n^m(n_1, \ldots, n_k)$, нужно определить коэффициент при z^n в производящей функции $F_a(z) = (z^{n_1} + z^{n_2} + \ldots + z^{n_k})^m$.

14. а) Упорядочим каким-либо образом экзамены, например, составим их список в алфавитном порядке. Тогда каждый способ (без учёта последовательности сдачи) будет представлен упорядоченной четвёркой чисел 3, 4 или 5, сумма которых больше или равна 16. Таким образом, искомое число способов есть $C_{16}^4(3, 4, 5) + \ldots + C_{20}^4(3, 4, 5)$ (см. задачу *13*). Составим производящую функцию и представим её многочленом стандартного вида:

$$F_a(z) = \left(z^3 + z^4 + z^5\right)^4 = z^{12} + 4z^{13} + 10z^{14} + 16z^{15} + 19z^{16} +$$
$$+ 16z^{17} + 10z^{18} + 4z^{19} + z^{20}.$$

Отсюда получаем результаты:

$$C_{16}^4(3, 4, 5) = 19,\ C_{17}^4(3, 4, 5) = 16,\ C_{18}^4(3, 4, 5) = 10,$$

$$C_{19}^{4}(3,\ 4,\ 5)=4,\ C_{20}^{4}(3,\ 4,\ 5)=1.$$

Ответ: $19+16+10+4+1=50$ способов;

б) $16+10+4+1=31$ способ;

в) $10+4+1=15$ способов.

15. $F_a\left(z\right)=\left(1+z\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^3\right)\left(1+z^5\right)\left(1+z^6\right)\left(1+z^8\right)$.

Ответ: 4 способа.

16. $F_a\left(z\right)=\left(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)^8=z^8\left(1+z+z^2+\right.$ $\left.+z^3+z^4+z^5\right)^8$. Надо найти в этой функции коэффициент при z^{20}. Можно воспользоваться для этого полиномиальной формулой, но рациональнее поступить по-другому. Поскольку выражение в скобках является суммой геометрической прогресии, можно применить её формулу:

$$F_a\left(z\right)=\frac{z^8\left(1-z^6\right)^8}{\left(1-z\right)^8}=z^8\left(1-z^6\right)^8\left(1-z\right)^{-8}.$$

Теперь разложим $\left(1-z^6\right)^8$ по формуле бинома Ньютона, а $\left(1-z\right)^{-8}$ — в ряд Ньютона (см. задачу *4,б* подразд. *1.1*). Получим

$$F_a\left(z\right)=z^8\left(1-8z^6+28z^{12}-56z^{18}+70z^{24}-56z^{30}+28z^{36}-\right.$$
$$\left.-8z^{42}+z^{48}\right)\left(1+8z+C_9^2z^2+C_{10}^3z^3+C_{11}^4z^4+\ldots\right).$$

Наконец, с помощью правила свёртки найдём коэффициент при z^{20}:

$$a_{20}=1\cdot C_{19}^{12}-8\cdot C_{13}^{6}+28\cdot 1=36688.$$

Ответ: 36688 способов.

17. Составим производящую функцию и преобразуем её так

же, как в задаче *16*:

$$F_a(z) = (1 + z + \ldots + z^p)^m = \left(\frac{1 - z^{p+1}}{1 - z}\right)^m =$$

$$= \left(1 - z^{p+1}\right)^m (1 - z)^{-m} = \left(\sum_{n=0}^{m} (-1)^n C_m^n z^{(p+1)n}\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m-1}^n z^n\right).$$

Коэффициент при z^n в этом произведении найдём по правилу умножения рядов:

$$a_n = \sum_{s=0} (-1)^s C_m^s C_{n-(p+1)s+m-1}^{n-(p+1)s}$$

(суммирование ведётся по всем целым неотрицательным индексам s, для которых биномиальные коэффициенты в сумме имеют смысл).

Ответ: $a_n(m, p) = \sum\limits_{s=0} (-1)^s C_m^s C_{n-(p+1)s+m-1}^{m-1}$, $n = 0, \ldots, pm$.

18. Заменим в каждом «счастливом» билете последние три цифры их дополнениями до 9[4]. Например, номер 353 128 после такой замены превратится в 353 871, а 693 990 — в 693 009. Очевидно, что сумма цифр номера после такой «переделки» будет равна 27 (докажите самостоятельно). Таким образом, каждый 6-значный «счастливый» номер поставлен в соответствие с единственным 6-значным упорядоченным набором цифр, сумма которых равна 27. Нетрудно убедиться в том, что такое соответствие взаимно однозначно, т.е. каждому 6-значному номеру с суммой цифр 27 соответствует единственный «счастливый» автобусный билет. Действительно, если заменить последние три цифры этого номера их дополнениями до 9, то как раз получится «счастливый» билет (докажите самостоятельно,

[4] Дополнением данного числа до p называется число, дающее в сумме с ним p.

что после такого преобразования в самом деле сумма первых трёх цифр будет равна сумме последних трёх). Например, из 329 670 получится «счастливый» номер 329 329, из 011 997 — 011 002. Итак, «счастливых» автобусных билетов столько же, сколько 6-значных наборов цифр, сумма которых равна 27, т.е. их число есть количество способов разбить 27 на сумму шести целых неотрицательных слагаемых, не превосходящих 9. Формула для вычисления этой величины найдена в задаче *17*. Подставляя в неё числовые данные $n = 27$, $m = 6$, $p = 9$, находим количество «счастливых» билетов:

$$
\begin{gathered}
a_{27}\left(6,\ 9\right) = \sum_{s=0}^{2} \left(-1\right)^s C_6^s C_{32-10s}^5 = \\
= C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5 = 55252.
\end{gathered}
$$

Ответ: 55252 билета.

19. а) Пусть a — число красных шаров, полученных первым ребёнком ($0 \leq a \leq 6$), b — белых ($0 \leq b \leq 5$), c — синих ($0 \leq c \leq 7$). По условию задачи $a + b + c = 9$. Поскольку всего $6+5+7 = 18$ шаров, оставшиеся 9 достанутся второму ребёнку. Таким образом, число способов раздачи шаров равно количеству решений уравнения $a+b+c = 9$ в неотрицательных целых числах при указанных выше ограничениях на a, b, c. Применяя результат задачи *6,г*, строим производящую функцию чисел способов раздачи шаров:

$$
\begin{gathered}
F_a\left(z\right) = \left(1 + z + \ldots + z^6\right)\left(1 + z + \ldots + z^5\right) \times \\
\times \left(1 + z + \ldots + z^7\right) = \frac{\left(1 - z^7\right)\left(1 - z^6\right)\left(1 - z^8\right)}{\left(1 - z\right)^3} = \\
= \left(1 - z^6 - z^7 - z^8 + z^{13} + z^{14} + z^{15} - z^{21}\right)\left(1 - z\right)^{-3} = \\
= \left(1 - z^6 - z^7 - z^8 + z^{13} + z^{14} + z^{15} - z^{21}\right) \times \\
\times \left(1 + 3z + C_4^2 z^2 + C_5^3 z^3 + C_6^4 z^4 + \ldots\right).
\end{gathered}
$$

По правилу свёртки находим коэффициент при z^9:

$$a_9 = 1 \cdot C_{11}^9 - 1 \cdot C_5^3 - 1 \cdot C_4^2 - 1 \cdot 3 = 36.$$

Ответ: 36 способов;

б) $a_{11} = 1 \cdot C_{13}^{11} - 1 \cdot C_7^5 - 1 \cdot C_6^4 - 1 \cdot C_5^3 = 32.$

Ответ: 32 способа.

20. а) Составим производящую функцию чисел способов отвесить n кг с помощью данного набора гирь:

$$F_a(z) = (1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\left(1+z^8\right).$$

Домножим это равенство на $1-z$ и свернём последовательно все скобки в правой части:

$$(1-z)F_a(z) = \left(1-z^2\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\left(1+z^8\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-z)F_a(z) = \left(1-z^4\right)\left(1+z^4\right)\left(1+z^8\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-z)F_a(z) = \left(1-z^8\right)\left(1+z^8\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-z)F_a(z) = 1-z^{16}.$$

Разделив последнее равенство на $1-z$, получим производящую функцию $F_a(z)$: $F_a(z) = \frac{1-z^{16}}{1-z}$. Таким образом, $F_a(z)$ есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем z, состоящей из 16 членов (от 1 до z^{15}), т.е. $F_a(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{15}$. Отсюда следует, что для всех n от 1 до 15 существует по одному способу (все коэффициенты при z^n — единицы) отвесить n кг.

21. Производящая функция сочетаний:

$$F_C(z) = \left(1 + x_1^2 z^2 + x_1^4 z^4 + \ldots\right) \ldots \left(1 + x_k^2 z^2 + x_k^4 z^4 + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{(1-x_1^2 z^2)\ldots(1-x_k^2 z^2)};$$

Подстановка в $F_C(z)$ $x_1 = \ldots = x_k = 1$ даёт производящую функцию чисел сочетаний:

$$F_a(z) = \frac{1}{(1-z^2)^k} = \left(1-z^2\right)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^n z^{2n}.$$

Ответ: $a_n = \begin{cases} C_{\frac{n}{2}+k-1}^{\frac{n}{2}}, & n \text{ чётное}, \\ 0, & n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0.$

23. а) Составим экспоненциальную производящую функцию чисел перестановок 2 букв «к», 2 букв «л» и 3 букв «о», применяя описанный в решении задачи *22* метод:

$$E_a(z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2!}\right)^2.$$

Раскроем в этом произведении скобки и найдём коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$:

$$E_a(z) = 1 + 3z + \frac{9}{2}\,z^2 + \frac{25}{6}\,z^3 + \frac{31}{12}\,z^4 + \frac{13}{12}\,z^5 + \frac{7}{24}\,z^6 + \\ + \frac{1}{24}\,z^7 = 1 + 3z + \frac{9}{2!}\,z^2 + \frac{25}{3!}\,z^3 + \frac{62}{4!}\,z^4 + \frac{130}{5!}\,z^5 + \\ + \frac{210}{6!}\,z^6 + \frac{210}{7!}\,z^7.$$

Ответ: 130 анаграмм;

б) число различных анаграмм при использовании любого количества карточек от 0 до 7 равно сумме коэффициентов при $\frac{z^n}{n!}$ в $E_a(z)$.

Ответ: $1 + 3 + 9 + 25 + 62 + 130 + 210 + 210 = 650$ анаграмм.

24. а) 690 анаграмм из 5 карточек, $1+5+22+84+270+690+ +1260 + 1260 = 3592$ из любого числа карточек;

б) 60 из 5 карточек, $1 + 3 + 8 + 19 + 38 + 60 + 60 = 189$ из любого числа;

в) 250 и $1 + 4 + 14 + 43 + 114 + 250 + 420 + 420 = 1266$.

25. 410 чисел.

26. а) 360 чисел;

б) 315 чисел.

27. Пусть имеются k различных видов предметов по n каждого вида (предметы одного вида неразличимы). Производящая функция чисел их перестановок: $\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right)^k$. С другой стороны, число перестановок объёма $s \leq n$ равно k^s.

1.3. Применение производящих функций к доказательству тождеств

5. а) *Указание:* воспользуйтесь тождеством

$$(1-z)^{-n}(1-z)^{-1}=(1-z)^{-n-1},$$

приравняв коэффициенты при z^{m-1} в левой и правой его частях (см. решение задачи *4*);

б) воспользуемся тождеством

$$(1-z)^{-p}(1-z)^{p-n}=(1-z)^{-n},\ p<n.$$

Заменим разложениями в степенные ряды участвующие в нём функции:

$$(1-z)^{-p}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k-1}^{k}z^{k};\ (1-z)^{-(n-p)}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n-p+k-1}^{k}z^{k};$$

$$(1-z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}z^{k}.$$

Их подстановка приводит к следующему тождеству:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k-1}^{k}z^{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{n-p+k-1}^{k}z^{k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}z^{k}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{k}C_{p+s-1}^{s}C_{n-p+k-s-1}^{k-s}\right)z^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}z^{k}.$$

Приравняв коэффициенты при z^{m-n} рядов в левой и правой частях, получаем

$$\sum_{s=0}^{m-n} C_{p+s-1}^{s} C_{m-p-s-1}^{m-n-s} = C_{m-1}^{m-n} \Leftrightarrow \sum_{s=0}^{m-n} C_{p+s-1}^{p-1} C_{m-p-s-1}^{n-p-1} = C_{m-1}^{n-1}$$

(при этом переходе применено свойство симметрии биномиальных коэффициентов). Заменив $p-1$ на p, приходим к тождеству

$$\sum_{s=0}^{m-n} C_{p+s}^{s} C_{m-p-s-2}^{n-p-2} = C_{m-1}^{n-1}.$$

Теперь замена $m-2$ на m, $n-2$ на n приводит к доказываемому тождеству.

7. Воспользуемся тождеством $(1-z)^n (1-z)^{-n} = 1$. Подставим в него разложения $(1-z)^n$ в бином Ньютона и $(1-z)^{-n}$ в ряд Ньютона и запишем их произведение:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k z^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} z^k\right) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_n^s C_{n+k-s-1}^{k-s}\right) z^k = 1.$$

Теперь приравняем к нулю коэффициент при z^m в левой части равенства (в правой части все коэффициенты при $m > 0$ нулевые). Получаем тождество

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s C_n^s C_{n+m-s-1}^{m-s} = 0.$$

Если учесть, что при $m > n$ суммирование в нём будет вестись только до n (все коэффициенты бинома Ньютона при $s > n$ равны нулю), получится тождество, которое требуется доказать.

12. а) Используем тождество $\left((1+z)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = (1+z)^{-1}$. Для этого разложим $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд Ньютона:

$$(1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\, z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}}{n!}\, z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n\cdot n!}\, z^n.$$

Для того чтобы преобразовать это выражение, заметим, что

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2n = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n =$$
$$= 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n =$$
$$= 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2^n\cdot n! \;\Rightarrow\; 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\,.$$

В итоге получаем следующее разложение:

$$(1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot (n!)^2}\, z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\, C_{2n}^n z^n = 1 - \frac{1}{2^2}\, C_2^1 z + \frac{1}{2^4}\, C_4^2 z^2 - \ldots +$$
$$+ (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\, C_{2n}^n z^n + \ldots\,.$$

Подставим его в наше тождество:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\, C_2^1 z + \frac{1}{2^4}\, C_4^2 z^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\, C_{2n}^n z^n + \ldots\right)^2 =$$
$$= 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$$

(напомним, что $(1+z)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$). Приравнивая коэффициенты при z^n в левой и правой частях, приходим к тождеству

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{1}{2^{2s}} C_{2s}^{s} \cdot (-1)^{n-s} \frac{1}{2^{2(n-s)}} C_{2(n-s)}^{n-s} = (-1)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{s=0}^{n} C_{2s}^{s} C_{2(n-s)}^{n-s} = 2^{2n},$$

которое и требовалось доказать;

б) воспользуемся тождеством $\left((1+z)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1+z$. Разложим $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Ньютона:

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{n \cdot 2^{2n-1} \left((n-1)!\right)^2} z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} z^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 z^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^5} C_4^2 z^3 - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} z^n + \ldots .$$

Подставим это разложение в тождество и приравняем к нулю коэффициент при z^n $(n \geq 2)$:

$$1 \cdot (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s-1} \frac{1}{s \cdot 2^{2s-1}} C_{2s-2}^{s-1} \times$$

$$\times (-1)^{n-s-1} \frac{1}{(n-s) \cdot 2^{2(n-s)-1}} C_{2(n-s)-2}^{n-s-1} +$$

$$+(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n\cdot 2^{2n-1}}\,C_{2n-2}^{n-1}\cdot 1=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sum_{s=1}^{n-1}\frac{C_{2s-2}^{s-1}C_{2(n-s)-2}^{n-s-1}}{s(n-s)}=\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n},$$

что и требовалось доказать;

в) подставим в тождество $(1+z)^{\frac{1}{2}}\,(1+z)^{-\frac{1}{2}}=1$ полученные в *а* и *б* разложения $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ и $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Ньютона, перемножим их по правилу свёртки и приравняем к нулю коэффициент при z^n $(n\geq 1)$ в левой части:

$$1\cdot(-1)^n\,\frac{1}{2^{2n}}\,C_{2n}^{n}+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\,\frac{1}{s\cdot 2^{2s-1}}\,C_{2s-2}^{s-1}\cdot(-1)^{n-s}\,\frac{1}{2^{2(n-s)}}\,C_{2(n-s)}^{n-s}=0\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\,C_{2s-2}^{s-1}C_{2(n-s)}^{n-s}=\frac{1}{2}\,C_{2n}^{n};$$

г) *указание:* используйте тождество

$$(1+z)^{\frac{1}{2}}\,(1+z)^{-1}=(1+z)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

15) Представим $\left(1-z^{-1}\right)^m$ по формуле бинома Ньютона:

$$\left(1-z^{-1}\right)^m=\sum_{s=0}^{m}(-1)^{m-s}\,C_m^s z^{-(m-s)}=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\,C_m^s z^{-s}.$$

Далее выписываем разложения:

$$(1-z)^{-n-1}=\sum_{s=0}^{\infty}C_{n+s}^{s}z^s;$$
$$(1-z)^{m-n-1}=\sum_{s=0}^{m-n-1}(-1)^s\,C_{m-n-1}^{s}z^s.$$

Подставляя их в данное в условии задачи тождество и приравнивая коэффициенты при z^{k-m}, получаем

$$\sum_{s=0}^{k-m} C_{n+s}^{s} \cdot (-1)^{m+s-k}\, C_m^{m+s-k} = (-1)^{m+k}\, C_{m-n-1}^{k} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{s=0}^{k-m} (-1)^s\, C_m^{m+s-k} C_{n+s}^{n} = C_{m-n-1}^{k}.$$

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Метод рекуррентных соотношений

2. Пусть так же, как в задаче *1*, u_n — число пар кроликов в начале n-го месяца. Тогда $u_1 = 2$ (исходная пара сразу принесла приплод), $u_2 = 3$, $u_3 = 2 + 3 = 5$ (к трём парам прибавились приплоды исходной и родившейся на первом месяце пар) и т.д. Очевидно, что последовательность чисел u_n удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, но с начальными условиями $u_1 = 2$, $u_2 = 3$. Последовательно вычисляя u_n, находим $u_{13} = 610$.

Ответ: 610 пар.

5. Эта задача эквивалентна задаче *3*. Рекуррентное соотношение для f_n — числа способов оплатить n рублей — имеет вид

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-5} + f_{n-10} + f_{n-12}.$$

Последовательно вычисляем f_n: $f_0 = 1$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1$ (уплатить 2 рубля можно единственным способом: наклеить 2-рублёвую марку), $f_3 = 0$, $f_4 = 1$ $(4 = 2 + 2)$. Далее можно использовать рекуррентное соотношение, если считать все f_n с отрицательными n равными 0. Получаем

$$
\begin{gathered}
f_5 = f_3 + f_0 + f_{-5} + f_{-7} = 1;\ f_6 = f_4 + f_1 + f_{-4} + f_{-6} = 1;\\
f_7 = f_5 + f_2 + f_{-3} + f_{-5} = 2;\ f_8 = f_6 + f_3 + f_{-2} + f_{-4} = 1;\\
f_9 = f_7 + f_4 + f_{-1} + f_{-3} = 3;\ f_{10} = f_8 + f_5 + f_0 + f_{-2} = 3;\\
f_{11} = f_9 + f_6 + f_1 + f_{-1} = 4;\ f_{12} = f_{10} + f_7 + f_2 + f_0 = 7;\\
\vdots\\
f_{22} = f_{20} + f_{17} + f_{12} + f_{10} = 67.
\end{gathered}
$$

Ответ: 67 способов.

6. Пусть $F_{n_1, \ldots, n_k}(n)$ — число способов уплатить n рублей монетами по $n_1, \ldots, n_k$ рублей, беря их в любых количествах. Требуется найти $F_{1,2,5,10}(36)$. Разобьём способы уплаты 36 рублей на классы в зависимости от количества используемых 10-рублёвых монет. Их будет четыре: способы, при которых не используются 10-рублёвые монеты (количество в классе — $F_{1,2,5}(36)$), при которых берётся одна монета ($F_{1,2,5}(26)$ способов), две монеты ($F_{1,2,5}(16)$ способов), три монеты ($F_{1,2,5}(6)$ способов). Поскольку классы не пересекаются и исчерпывают все возможные способы, по правилу суммы получаем рекуррентное соотношение

$$
\begin{gathered}
F_{1,2,5,10}(36) = \\
= F_{1,2,5}(36) + F_{1,2,5}(26) + F_{1,2,5}(16) + F_{1,2,5}(6).
\end{gathered}
$$

Теперь произведём разбиение на классы в зависимости от количества используемых 5-рублёвых монет. Действуя аналогично, получаем рекуррентные соотношения:

$$F_{1,\,2,\,5}\,(36) = F_{1,\,2}\,(36) + F_{1,\,2}\,(31) + F_{1,\,2}\,(26) + F_{1,\,2}\,(21) +$$
$$+F_{1,\,2}\,(16) + F_{1,\,2}\,(11) + F_{1,\,2}\,(6) + F_{1,\,2}\,(1)\,;$$
$$F_{1,\,2,\,5}\,(26) = F_{1,\,2}\,(26) + F_{1,\,2}\,(21) + F_{1,\,2}\,(16) + F_{1,\,2}\,(11) +$$
$$+F_{1,\,2}\,(6) + F_{1,\,2}\,(1)\,;$$
$$F_{1,\,2,\,5}\,(16) = F_{1,\,2}\,(16) + F_{1,\,2}\,(11) + F_{1,\,2}\,(16) +$$
$$+F_{1,\,2}\,(6) + F_{1,\,2}\,(1)\,;$$
$$F_{1,\,2,\,5}\,(6) = F_{1,\,2}\,(6) + F_{1,\,2}\,(1)\,.$$

Их подстановка даёт следующее рекуррентное соотношение:

$$F_{1,\,2,\,5,\,10}\,(36) = F_{1,\,2}\,(36) + F_{1,\,2}\,(31) + 2\,(F_{1,\,2}\,(26) +$$
$$+F_{1,\,,2}\,(21)) + 3\,(F_{1,\,2}\,(16) + F_{1,\,2}\,(11)) + 4\,(F_{1,\,2}\,(6) + F_{1,\,2}\,(1))\,.$$

Далее последовательно вычисляем $F_{1,\,2}\,(n)$:

$$F_{1,\,2}\,(1) = 1,\ F_{1,\,2}\,(6) =$$
$$= F_1\,(6) + F_1\,(4) + F_1\,(2) + F_1\,(0) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

($F_1\,(0) = 1$, так как уплатить 0 рублей можно единственным способом: ничего не платить);

$$F_{1,\,2}\,(11) = F_1\,(11) + F_1\,(9) + \ldots + F_1\,(1) = 6;$$
$$F_{1,\,2}\,(16) = F_1\,(16) + F_1\,(14) + \ldots + F_1\,(0) = 9;$$
$$F_{1,\,2}\,(21) = F_1\,(21) + F_1\,(19) + \ldots + F_1\,(1) = 11;$$
$$F_{1,\,2}\,(26) = F_1\,(26) + F_1\,(24) + \ldots + F_1\,(0) = 14;$$
$$F_{1,\,2}\,(31) = F_1\,(31) + F_1\,(29) + \ldots + F_1\,(1) = 16;$$
$$F_{1,\,2}\,(36) = F_1\,(36) + F_1\,(34) + \ldots + F_1\,(0) = 19$$

(можно было бы обойтись без рекуррентных соотношений, так как понятно, что $F_{1,\,2}\,(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$). Теперь подставим вычисленные значения в соотношение для $F_{1,\,2,\,5,\,10}\,(36)$:

$$F_{1,\,2,\,5,\,10}\,(36) = 19 + 16 + 2(14 + 11) + 3(9 + 6) + 4(4 + 1) = 150.$$

Ответ: 150 способов.

7. а) $F_{n_1,\dots,n_k}(n) = F_{n_1,\dots,n_{k-1}}(n) + F_{n_1,\dots,n_k}(n - n_k)$ (способы распадаются на два класса: в первом не используется ни одна монета достоинством n_k копеек, во втором — хотя бы одна);

б) $F_{n_1,\dots,n_k}(n) = F_{n_1,\dots,n_{k-1}}(n) + F_{n_1,\dots,n_{k-1}}(n - n_k)$.

8. Используем рекуррентное соотношение задачи *7,а*:

$$F_{1,5,10}(50) = F_{1,5}(50) + F_{1,5,10}(40) = F_1(50) + F_{1,5}(45) + \\ + F_{1,5}(40) + F_{1,5,10}(30) = 1 + F_1(45) + 2F_{1,5}(40) + F_{1,5}(30) + \\ + F_{1,5,10}(20) = 2 + 2(F_1(40) + F_{1,5}(35)) + F_1(30) + F_{1,5}(25) + \\ + F_{1,5}(20) + F_{1,5,10}(10) = 5 + 2(F_1(35) + F_{1,5}(30)) + F_1(25) + \\ + 2F_{1,5}(20) + F_{1,5}(10) + F_{1,5,10}(0) = 9 + \\ + 2(F_1(30) + F_{1,5}(25)) + 2(F_1(20) + F_{1,5}(15)) + F_1(10) + \\ + F_{1,5}(5) = 16 + 2(F_1(25) + F_{1,5}(20)) + \\ + 2(F_1(15) + F_{1,5}(10)) = 20 + 2(F_1(20) + F_{1,5}(15)) + \\ + 2(F_1(10) + F_{1,5}(5)) = 28 + 2(F_1(15) + F_{1,5}(10)) = 36.$$

Ответ: 36 способов.

9. Используем рекуррентное соотношение задачи *7,б*:

$$F_{1,2,3,4,5,7}(15) = F_{1,2,3,4,5}(15) + F_{1,2,3,4,5}(8) = \\ = 1 + F_{1,2,3,4}(8) + F_{1,2,3,4}(3) = 1 + F_{1,2,3}(8) + F_{1,2,3}(4) + \\ + F_{1,2,3}(3) = 1 + F_{1,2}(4) + F_{1,2}(1) + F_{1,2}(3) + F_{1,2}(0) = \\ = 3 + F_1(4) + F_1(2) + F_1(3) + F_1(1) = 4.$$

Ответ: 4 способа.

10. Составим рекуррентное соотношение для $\overline{C}_n^r$. Зафиксируем произвольный предмет из n и разобьём все сочетания на два класса: в первый включаются содержащие зафиксированный предмет сочетания, во второй — не содержащие. В каждое сочетание из первого класса отбираются $r-1$ предметов (всего нужно r, но один уже отобран) из n, следовательно, их количество равно $\overline{C}_n^{r-1}$, из второго класса — r предметов из $n-1$

(зафиксированный предмет не должен попасть в сочетание), их число равно $\overline{C}_{n-1}^{r}$. Поскольку классы не пересекаются и охватывают все сочетания, по правилу суммы получаем рекуррентное соотношение $\overline{C}_{n}^{r} = \overline{C}_{n}^{r-1} + \overline{C}_{n-1}^{r}$. Очевидно, что $\overline{C}_{n}^{0} = 1$, $\overline{C}_{n}^{1} = 1$, $\overline{C}_{1}^{r} = 1$. Далее будем использовать вспомогательную формулу

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+m-2}^p + C_{p+m-1}^p = \sum_{k=0}^{m-1} C_{p+k}^p = C_{p+m}^{p+1},$$

которую можно легко доказать с помощью формулы Паскаля (сделайте это самостоятельно). Используем рекуррентное соотношение

$$\overline{C}_n^2 = \overline{C}_{n-1}^2 + \overline{C}_n^1 = \overline{C}_{n-2}^2 + \overline{C}_{n-1}^1 + \overline{C}_n^1 = \overline{C}_{n-3}^2 + \overline{C}_{n-2}^1 + \\ + \overline{C}_{n-1}^1 + \overline{C}_n^1 = \ \ldots \ = \overline{C}_1^2 + \overline{C}_2^1 + \ldots + \overline{C}_{n-1}^1 + \overline{C}_n^1 = \\ = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2} = C_{n+1}^2$$

(применена вспомогательная формула при $p = 1$, $m = n$). Зная $\overline{C}_n^2$, можно вычислить $\overline{C}_n^3$:

$$\overline{C}_n^3 = \overline{C}_{n-1}^3 + \overline{C}_n^2 = \overline{C}_{n-2}^3 + \overline{C}_{n-1}^2 + \overline{C}_n^2 = \ \ldots \ = \overline{C}_1^3 + \overline{C}_2^2 + \ldots + \\ + \overline{C}_{n-1}^2 + \overline{C}_n^2 = 1 + C_3^2 + \ldots + C_n^2 + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3$$

(вспомогательная формула при $p = 2$, $m = n$). Теперь можно написать общую формулу: $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. Докажем её индукцией по r с помощью рекуррентного соотношения. База индукции ($r = 1$) очевидна: $\overline{C}_n^1 = C_n^1 = 1$. Пусть для сочетаний объёма $r-1$ при всех n справедлива формула $\overline{C}_n^{r-1} = C_{n+r-2}^{r-1}$ (предположение индукции). Тогда

$$\overline{C}_n^r = \overline{C}_n^{r-1} + \overline{C}_{n-1}^r = \overline{C}_{n-2}^r + \overline{C}_{n-1}^{r-1} + \overline{C}_n^{r-1} = \\ = \overline{C}_{n-3}^r + \overline{C}_{n-2}^{r-1} + + \overline{C}_{n-1}^{r-1} + \overline{C}_n^{r-1} = \ \ldots \ = \overline{C}_1^r + \overline{C}_2^{r-1} + \ \ldots \ + \\ + \overline{C}_n^{r-1} = 1 + C_r^{r-1} + \ \ldots \ + C_{n+r-2}^{r-1} = C_{n+r-1}^r$$

(вспомогательная формула при $p = r - 1$, $m = n$). Индукционный шаг доказан.

11. Рекуррентное соотношение: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (см. задачу *3*).

Ответ: 233 способа (см. задачу *1* о кроликах Фибоначчи).

12. а) Рекуррентные соотношения (см. задачу *7,а*):

$$F_{5,\,10,\,15,\,20}\,(n) = F_{5,\,10,\,15}\,(n) + F_{5,\,10,\,15,\,20}\,(n-20)\,,$$
$$F_{5,\,10,\,15}\,(n) = F_{5,\,10}\,(n) + F_{5,\,10,\,15}\,(n-15) \quad \text{и т.д.}$$

Ответ: 27 способов;

б) рекуррентное соотношение: $f_n = f_{n-5} + f_{n-10} + f_{n-15} + f_{n-20}$.

Ответ: 773 способа.

13. а) Пусть n прямых разбивают плоскость на a_n частей, $a_0 = 1$. Если проведены $n-1$ прямых, то n-я пересекается с ними в $n-1$ точках, которые разбивают её на n частей. Каждой из них соответствует новый кусок плоскости. Таким образом, добавление n-й прямой даёт n новых частей плоскости. Поэтому

$$a_n = a_0 + (1 + 2 + \ \ldots\ + n) = 1 + (1 + 2 + \ \ldots\ + n) =$$
$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Ответ: $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей;

б) при добавлении n-й прямой к $n-1$ ранее проведённым ($n > 0$) появляются две новых неограниченных части. Поэтому их число равно $\underbrace{2 + 2 + \ \ldots\ + 2}_{n} = 2n$ при $n > 0$, при $n = 0$ имеется одна неограниченная часть (вся плоскость).

Ответ: $2n$ частей при $n > 0$, 1 часть при $n = 0$.

14. Пусть проведены $n-1$ плоскостей ($n > 0$), которые разбивают шар на максимальное число частей. Для того чтобы n-я плоскость добавляла наибольшее количество новых кусков, она должна пересекаться со всеми $n-1$ плоскостями. Пересечение с

каждой даёт две новые части, поэтому всего добавятся $2(n-1)$ частей. Поскольку вначале было две половины шара, полученные при рассечении одной плоскостью, будет $2+(2+4+\ \ldots\ + +2(n-1)) = n^2-n+2$ частей при n проведённых плоскостях.

Ответ: n^2-n+2 частей.

15. n^2-n+2 частей.

16. Параллельные прямые делят плоскость на $m+1$ частей. Каждая следующая прямая добавляет столько новых кусков, на сколько частей она делится уже проведёнными. Поскольку дополнительно к параллельным проводятся n прямых, получаем

$$(m+1)+(m+2)+\ \ldots\ +(m+n) = \frac{n(2m+n+1)}{2}$$

частей.

Ответ: $\frac{n(2m+n+1)}{2}$ частей.

17. Найдём производящую функцию $F_a(z)$ последовательности a_n. Для этого домножим рекуррентное соотношение на z^n и напишем формальную сумму получившихся равенств при $n=1,\ 2,\ \ldots:$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} +\ \ldots\ + a_{n-1} a_0)\, z^n \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0 = z \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} +\ \ldots\ + a_n a_0)\, z^n.$$

Ряд в левой части есть $F_a(z)$, а коэффициент при z^n в правой части — не что иное, как свёртка ряда $F_a(z)$ с самим собой, т.е. ряд в правой части есть $(F_a(z))^2$. Отсюда получаем, с учётом начального условия $a_0 = 1$, уравнение для нахождения $F_a(z)$: $F_a(z) - 1 = z\,(F_a(z))^2$. Решая его, находим $F_a(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$ (второй корень квадратного уравнения $z\,(F_a(z))^2 - F_a(z) + 1 = = 0$ $F_a(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z}$ не удовлетворяет начальному условию $a_0 = 1$, или $F_a(0) = 1$).

Для нахождения a_n разложим $F_a(z)$ в степенной ряд:

$$F_a(z) = \frac{1}{2z}\left(1 - (1-4z)^{\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2z}\left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} (4z)^n\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{2n}} C_{2n-2}^{n-1} \cdot 4^n \cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} z^n$$

(здесь использовано разложение $(1-4z)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Ньютона (см. решение задачи *12,б* подразд. *1.3*). Отсюда и следует, что

$$a_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

18. Пусть a_n — искомое число разбиений. Выделим в исходном многоугольнике $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$ сторону $A_{n+1}A_{n+2}$.

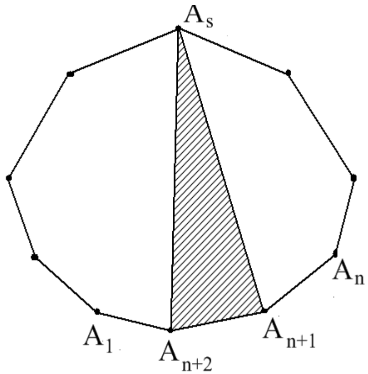

Рис. 1

В каждом разбиении многоугольника найдётся один и только один треугольник со стороной $A_{n+1}A_{n+2}$. Пусть его третьей вершиной является A_s $(1 \le s \le n)$. При $2 \le s \le n-1$ многоугольник $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$ распадается на $(s+1)$-угольник и $(n-s+2)$-угольник (рис. *1*). Но $(s+1)$-угольник $A_{n+2}A_1 \ldots A_s$ можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями a_{s-1} способами, а $(n-s+2)$-угольник $A_{n+1}A_s \ldots A_n$ — a_{n-s} способами. Эти разбиения независимы, поэтому по правилу произведения $A_1 \ldots A_{n+1}A_{n+2}$ можно разбить $a_{s-1}a_{n-s}$ способами. При $s=1$ или $s=n$ многоугольник распадается на треугольник, который дальнейшему разбиению не подлежит, и $(n+1)$-угольник, который можно разделить на треугольники a_{n-1} способами (рис. *2*). Поэтому

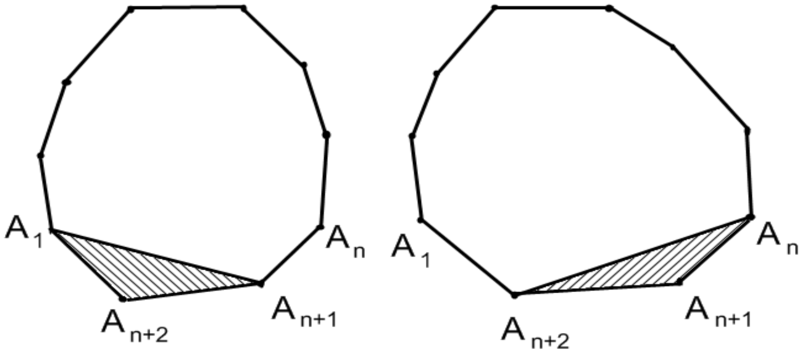

Рис. 2

полагаем $a_0 = 1$.

Итак, при каждом значении s от 1 до n многоугольник разбивается $a_{s-1}a_{n-s}$ способами. Поскольку, когда s пробегает свои возможные значения, получаются все разбиения и каждое из них возникает при одном и только одном значении s, то по правилу суммы составляем рекуррентное соотношение для чисел разбиений многоугольника $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$:

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0 = \sum_{s=1}^{n} a_{s-1}a_{n-s}\ ,\ a_0 = 1.$$

Получили рекуррентное соотношение задачи *17*.

Ответ: $\frac{1}{n+1}\, C_{2n}^{n}$ способами.

19. Пусть a_n — число способов соединить $2n$ точек непересекающимися отрезками. Обозначим точки A_1, A_2, …, A_{2n} (рис. *3*). Точку A_1 можно соединить с A_2, A_4, …, A_{2n}, так как с каждой стороны отрезка должно остаться чётное число точек (иначе их нельзя будет соединить непересекающимися хордами). Пусть точка A_1 соединена с A_{2s+2}, $0 \le s \le n-1$. Если по одну сторону A_1A_{2s+2} осталось $2s$ точек, то по другую — $2(n-s-1)$. Но $2s$ точек можно соединить непересекающимися отрезками a_s, а $2(n-s-1)$ — a_{n-s-1} способами. По правилу произведения получаем a_sa_{n-s-1} способов соединения. В слу-

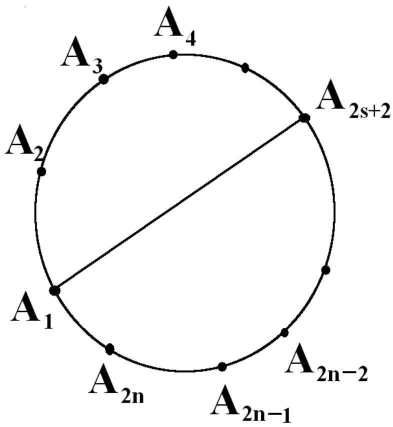

Рис. 3

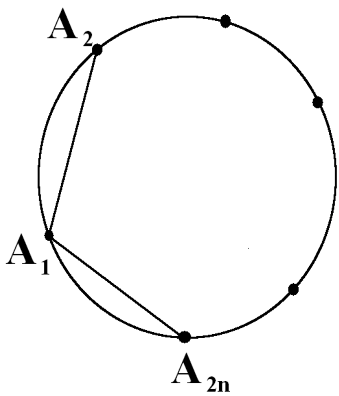

Рис. 4

чае $s = 0$ или $s = n - 1$ проводится хорда A_1A_2 (A_1A_{2n} соответственно)(рис. *4*), остальные $2n - 2$ точек соединяются a_{n-1} способами. Поэтому считаем, что $a_0 = 1$. Теперь по правилу суммы составляем рекуррентное соотношение:

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ \ldots \ + a_{n-1}a_0 = \sum_{s=0}^{n-1} a_s a_{n-s-1}\ ,\ a_0 = 1.$$

Формула a_n была найдена в задаче *17*.

Ответ: $\frac{1}{n+1}\, C_{2n}^{n}$ способами.

2.2. Линейные рекуррентные соотношения

3. а) Применяем результат задачи *1*. Характеристический многочлен: $\alpha^2 - \alpha - 6$, его корни: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$.

Ответ: $a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot (-3)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = C_1 + C_2 \cdot (-1)^n + C_3 \cdot 2^n + C_4 \cdot (-2)^n + C_5 \cdot 4^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) характеристический многочлен: $\alpha^2 + 1$, корни: $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$. Общее решение в комплексной форме: $a_n = C_1' \cdot i^n + C_2' \cdot (-i)^n$. Для приведения его к действительному виду воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа: $\alpha_1 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$. Возведя α_1, α_2 в n-ю степень по формуле Муавра, получим

$$\alpha_1^n = i^n = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{2} + i\sin\frac{\pi n}{2}\,,$$
$$\alpha_2^n = (-i)^n = \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{2} - i\sin\frac{\pi n}{2}\,.$$

Подставив i^n, $(-i)^n$ в общее решение, придём к его действительному виду:

$$\begin{aligned} a_n = C_1'\left(\cos\frac{\pi n}{2} + i\sin\frac{\pi n}{2}\right) + C_2'\left(\cos\frac{\pi n}{2} - i\sin\frac{\pi n}{2}\right) = \\ = (C_1' + C_2')\cos\frac{\pi n}{2} + i\,(C_1' - C_2')\sin\frac{\pi n}{2} = \\ = C_1\cos\frac{\pi n}{2} + C_2\sin\frac{\pi n}{2}, \end{aligned}$$

где $C_1 = C_1' + C_2'$, $C_2 = i\,(C_1' - C_2')$.

Ответ: $a_n = C_1\cos\frac{\pi n}{2} + C_2\sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

е) $a_n = C_1\cos\frac{\pi n}{3} + C_2\sin\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

ж) $a_n = C_1 + C_2 \cdot (-1)^n + C_3\cos\frac{\pi n}{2} + C_4\sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

з) характеристический многочлен: $\alpha^4 + 4$. Для нахождения характеристических корней воспользуемся формулой

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{\rho}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi s}{k} + i\sin\frac{\phi + 2\pi s}{k}\right),$$

где $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, $s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$. Имеем

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi s}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi s}{4}\right),\ s = 0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

$$s=0 \ \Rightarrow\ \alpha_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i;$$

$$s=1 \ \Rightarrow\ \alpha_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1+i;$$

$$s=2 \ \Rightarrow\ \alpha_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= -1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$s=3 \ \Rightarrow\ \alpha_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Общее решение в комплексной форме:

$$a_n = C_1'\,(1+i)^n + C_2'\,(1-i)^n + C_3'\,(-1+i)^n + C_4'\,(-1-i)^n\,.$$

Приведём его к действительной форме:

$$a_n = C_1'\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right) +$$

$$+C_2'\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} - i\sin\frac{\pi n}{4}\right) +$$

$$+C_3'\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3\pi n}{4} + i\sin\frac{3\pi n}{4}\right) +$$

$$+C_4'\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3\pi n}{4} - i\sin\frac{3\pi n}{4}\right) =$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\cos\frac{\pi n}{4} + C_2\sin\frac{\pi n}{4} + C_3\cos\frac{3\pi n}{4} + C_4\sin\frac{3\pi n}{4}\right).$$

Ответ:

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\cos\frac{\pi n}{4} + C_2\sin\frac{\pi n}{4} + C_3\cos\frac{3\pi n}{4} + C_4\sin\frac{3\pi n}{4}\right),$$

$n \in \mathbb{N}_0$;

и) характеристический корень $\alpha_1 = 1$ кратности 2, поэтому общее решение имеет вид $a_n = P_1(n) \cdot 1^n$, где $P_1(n)$ — многочлен первой степени от n.

Ответ: $a_n = C_1 + C_2 n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

к) $a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot (-1)^n + C_3 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

л) $a_n = \left(C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right) \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

м) характеристические корни: $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Общее решение в комплексной форме:

$$a_n = \left(C_1' + C_2' n\right) \cdot i^n + \left(C_3' + C_4' n\right) \cdot (-i)^n .$$

Приводим его к действительной форме:

$$\begin{gathered}
a_n = \left(C_1' + C_2' n\right)\left(\cos\frac{\pi n}{2} + i\sin\frac{\pi n}{2}\right) + \left(C_3' + C_4' n\right)\left(\cos\frac{\pi n}{2} - \right. \\
\left. -i\sin\frac{\pi n}{2}\right) = \left(C_1' + C_3' + \left(C_2' + C_4'\right) n\right)\cos\frac{\pi n}{2} + \\
+ \left(i\left(C_1' - C_3'\right) + i\left(C_2' - C_4'\right) n\right)\sin\frac{\pi n}{2} = \\
= (C_1 + C_2 n)\cos\frac{\pi n}{2} + (C_3 + C_4 n)\sin\frac{\pi n}{2}.
\end{gathered}$$

Ответ: $a_n = (C_1 + C_2 n)\cos\frac{\pi n}{2} + (C_3 + C_4 n)\sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

4. а) $a_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$ (см. решение задачи *2*);

б) $a_n = 3^n - 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = \frac{1}{2}\, n(1+n) \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) $a_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{3\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

е) $a_n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - 2\cos\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

ж) $a_n = 2^{n-3}(1-n)\sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

5. Следует из линейности левой части рекуррентного соотношения.

8. б) $a_n = \left(C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right) \cdot 3^n - \frac{3}{8}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = C_1 + C_2 n + C_3 \cdot (-1)^n - \frac{1}{3} \cdot (-2)^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) правая часть является суммой двух функций: $\phi_n^{(1)} = 1$, $\phi_n^{(2)} = 4 \cdot (-1)^n$. Пусть $a_n^{(ч)'}$ — частное решение неоднородного соотношения $a_n - 9a_{n-2} = 1$, $a_n^{(ч)''}$ — соотношения $a_n - 9a_{n-2} = 4 \cdot (-1)^n$. Тогда очевидно, что $a_n^{(ч)} = a_n^{(ч)'} + a_n^{(ч)''}$ —частное решение исходного соотношения. Находим $a_n^{(ч)'}$, $a_n^{(ч)''}$ так же, как в предыдущих задачах:

$$a_n^{(ч)'} = \lambda \Rightarrow \lambda - 9\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}\,;$$

$$a_n^{(ч)''} = \lambda \cdot (-1)^n \Rightarrow \lambda \cdot (-1)^n - 9\lambda \cdot (-1)^{n-2} = 4 \cdot (-1)^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\,.$$

Отсюда получаем $a_n^{(ч)'} = -\frac{1}{8}$, $a_n^{(ч)''} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}$, $a_n^{(ч)} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}$.

Ответ: $a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-3)^n - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

е) $a_n = C_1 \cos \frac{\pi n}{3} + C_2 \sin \frac{\pi n}{3} + \left(n - \frac{2}{13}\right) \cdot 4^{n+2}$;

ж) $a_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot (-4)^n + (3n^2 + 13n + 15) \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

з) $a_n = C_1 + C_2 n + 2^{n+4} + \frac{1}{4}\,(n-1) \cdot 3^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

и) $a_n = C_1 + C_2 \cos \frac{\pi n}{2} + C_3 \sin \frac{\pi n}{2} + \left(\frac{1}{4} - n\right) \cdot 3^{n+3} + \frac{1}{4} \cdot (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

9. а) $a_n = \frac{7}{6}\,(-1)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{3}\right) \cdot 2^n + \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $a_n = -\left(12 + 7\sqrt{3}\right) \cos \frac{\pi n}{6} + \left(9 + 20\sqrt{3}\right) \sin \frac{\pi n}{6} + (2 - \sqrt{3}) \times \left(n(n+2) + 2\sqrt{3} - 3\right) \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = -\frac{1}{7}\left(29 \cos \frac{5\pi n}{6} + 87\sqrt{3} \sin \frac{5\pi n}{6}\right) + 2 - \sqrt{3} + \left(n + \frac{5}{7}\right) \times 3^{\frac{n}{2}+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = \frac{1}{8}\left(1 + 6\left(\cos \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{\pi n}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) $a_n = \frac{1}{72}\left((125 - 254n) \cdot (-5)^{n-1} + 6n^2 + 26n + 25\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

е) $a_n = \frac{1}{250}\left(125 + 41 \cdot (-3)^n + (25n^2 - 20n - 52) \cdot 2^{n+3}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

ж) $a_n = \frac{1}{16}\left(1 - 12n + 14n^2 - 4n^3 + (-1)^{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

11. б) Ищем частное решение в виде $a_n^{(ч)} = n^2\,(q_0 + q_1 n)\,\alpha^n$. Чтобы найти q_0, q_1, подставим $a_n^{(ч)}$ в исходное соотношение:

$$n^2\,(q_0 + q_1 n)\,\alpha^n + (n-1)^2\,(q_0 + q_1(n-1))\,b_1\alpha^{n-1} + \ldots +$$
$$+(n-k)^2\,(q_0 + q_1(n-k))\,b_k\alpha^{n-k} = (p_0 + p_1 n)\,\alpha^n \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; n^2\,(q_0 + q_1 n)\,\alpha^k + (n-1)^2\,(q_0 + q_1(n-1))\,b_1\alpha^{k-1} + \ldots +$$
$$+(n-k)^2\,(q_0 + q_1(n-k))\,b_k = (p_0 + p_1 n)\,\alpha^k \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sum_{j=0}^{k} (n-j)^2\,(q_0 + q_1(n-j))\,b_j\alpha^{k-j} = (p_0 + p_1 n)\,\alpha^k \;\; (b_0 = 1).$$

Преобразуем выражение в левой части:

$$n^2\,(q_0 + q_1 n)\sum_{j=0}^{k} b_j\alpha^{k-j} - n\,(3q_1 n + 2q_0)\sum_{j=1}^{k} j b_j\alpha^{k-j} +$$
$$+\,(3q_1 n + q_0)\sum_{j=1}^{k} j^2 b_j\alpha^{k-j} - q_1\sum_{j=1}^{k} j^3 b_j\alpha^{k-j} = (p_0 + p_1 n)\,\alpha^k.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{j=0}^{k} b_j\alpha^{k-j} = G(\alpha) = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} j b_j\alpha^{k-j} = -\alpha G'(\alpha) = 0$ (см. решение задачи *а*, с. 58), так как α — характеристический корень кратности 2, приходим к равенству

$$(3q_1 n + q_0)\sum_{j=1}^{k} j^2 b_j\alpha^{k-j} - q_1\sum_{j=1}^{k} j^3 b_j\alpha^{k-j} = (p_0 + p_1 n)\,\alpha^k.$$

Приравняем коэффициент при n в левой и правой его частях. Получаем уравнение

$$3q_1\sum_{j=1}^{k} j^2 b_j\alpha^{k-j} = p_1\alpha^k.$$

Если сумма в левой части не равна нулю, то из него можно найти q_1 по формуле

$$q_1 = \frac{p_1\alpha^k}{3\sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j\alpha^{k-j}}.$$

Для доказательства $\sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} \neq 0$ воспользуемся вспомогательным утверждением из решения задачи *10* (с. 53) при $l = 2$: $\sum\limits_{j=0}^{k} (k-j)_2\, b_j \alpha^{k-j} \neq 0$. Преобразуем левую часть этого неравенства:

$$\sum_{j=0}^{k} (k-j)_2\, b_j \alpha^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (k-j)(k-j-1) b_j \alpha^{k-j} =$$

$$= \left(k^2 - k\right) \sum_{j=0}^{k} b_j \alpha^{k-j} + (1-2k) \sum_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j} + \sum_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} =$$

$$= \left(k^2 - k\right) G(\alpha) - \alpha(1-2k) G'(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} \neq 0.$$

Поскольку $G(\alpha) = 0$, $G'(\alpha) = 0$ (α — корень $G(\alpha)$ кратности 2), получаем неравенство, которое требовалось доказать.

Наконец, приравнивание коэффициентов при n^0 даёт уравнение для нахождения q_0:

$$q_0 \sum_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} - q_1 \sum_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j} = p_0 \alpha^k \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; q_0 = \frac{p_0 \alpha^k + q_1 \sum\limits_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j}}.$$

Найдя частное решение $a_n^{(ч)} = n^2 (q_0 + q_1 n) \alpha^n$, общее решение строим по формуле $a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(ч)}$, где $a_n^{(o)}$ — общее решение соответствующего однородного соотношения.

Объединяя результаты задач *а* и *б*, можно вывести следующее утверждение. Если α — характеристический корень кратности μ ($\mu \in \{1;\ 2\}$), то частное решение неоднородного соотношения имеет вид $a_n^{(ч)} = n^{\mu} (q_0 + q_1 n) \alpha^n$ (см. также примечание *11* на с. 59).

12. а) Частное решение неоднородного соотношения строим по формуле $a_n^{(ч)} = n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right)\alpha^n$. Нужно показать, что коэффициенты q_0, q_1, q_2 существуют. Для этого подставим $a_n^{(ч)}$ в исходное соотношение:

$$\begin{gathered}
n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right)\alpha^n + \\
+(n-1)\left(q_0 + q_1(n-1) + q_2(n-1)^2\right) b_1 \alpha^{n-1} + \ldots + \\
+(n-k)\left(q_0 + q_1(n-k) + q_2(n-k)^2\right) b_k \alpha^{n-k} = \\
= \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2\right)\alpha^n \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right)\alpha^k + \\
+(n-1)\left(q_0 + q_1(n-1) + q_2(n-1)^2\right) b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + \\
+(n-k)\left(q_0 + q_1(n-k) + q_2(n-k)^2\right) b_k = \\
= \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2\right)\alpha^k \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; \sum_{j=0}^{k}(n-j)\left(q_0 + q_1(n-j) + q_2(n-j)^2\right) b_j \alpha^{k-j} = \\
= \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2\right)\alpha^k \; (b_0 = 1).
\end{gathered}$$

Приведём это соотношение к следующему виду:

$$\begin{gathered}
n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right)\sum_{j=0}^{k} b_j \alpha^{k-j} - \left(q_0 + 2q_1 n + 3q_2 n^2\right)\times \\
\times \sum_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j} + (q_1 + 3q_2 n)\sum_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} - q_2 \sum_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j} = \\
= \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2\right)\alpha^k \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; -\left(q_0 + 2q_1 n + 3q_2 n^2\right)\sum_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j} +
\end{gathered}$$

$$+ (q_1 + 3q_2 n) \sum_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} - q_2 \sum_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j} =$$
$$= \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2\right) \alpha^k$$

($\sum\limits_{j=0}^{k} b_j \alpha^{k-j} = G(\alpha) = 0$, т.к. α — характеристический корень). Приравняв коэффициенты при n^2, получим уравнение для нахождения q_2:

$$-3q_2 \sum_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j} = p_2 \alpha^k.$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j} = -\alpha G'(\alpha) \neq 0$ (см. решение задачи *11,а*), из него можно найти q_2:

$$q_2 = -\frac{p_2 \alpha^k}{3 \sum\limits_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j}}\,.$$

Приравнивая коэффициенты при n^1, n^0, находим q_1, q_0:

$$q_1 = \frac{3q_2 \sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} - p_1 \alpha^k}{2 \sum\limits_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j}}\,;$$

$$q_0 = \frac{q_1 \sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j} - q_2 \sum\limits_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j} - p_0 \alpha^k}{\sum\limits_{j=1}^{k} j b_j \alpha^{k-j}}\,;$$

б) частное решение: $a_n^{(ч)} = n^2 \left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right) \alpha^n$. Подставляем $a_n^{(ч)}$ в исходное соотношение и приводим полученное выражение к виду

$$n^2 \left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right) \sum_{j=0}^{k} b_j \alpha^{k-j} -$$

$$-n\left(2q_0+3nq_1+4n^2q_2\right)\sum_{j=1}^{k} jb_j\alpha^{k-j}+$$

$$+\left(q_0+3nq_1+6n^2q_2\right)\sum_{j=1}^{k} j^2b_j\alpha^{k-j}-(q_1+4nq_2)\sum_{j=1}^{k} j^3b_j\alpha^{k-j}+$$

$$+q_2\sum_{j=1}^{k} j^4b_j\alpha^{k-j}=\left(p_0+p_1n+p_2n^2\right)\alpha^k.$$

Учитывая,что

$$\sum_{j=0}^{k} b_j\alpha^{k-j}=G(\alpha)=0,\ \sum_{j=1}^{k} jb_j\alpha^{k-j}=-\alpha G'(\alpha)=0$$

(α — характеристический корень кратности 2, см. решение задачи *11,а*), приходим к соотношению

$$\left(q_0+3nq_1+6n^2q_2\right)\sum_{j=1}^{k} j^2b_j\alpha^{k-j}-(q_1+4nq_2)\sum_{j=1}^{k} j^3b_j\alpha^{k-j}+$$

$$+q_2\sum_{j=1}^{k} j^4b_j\alpha^{k-j}=\left(p_0+p_1n+p_2n^2\right)\alpha^k,$$

из которого получаем уравнение для нахождения q_2:

$$6q_2\sum_{j=1}^{k} j^2b_j\alpha^{k-j}=p_2\alpha^k.$$

Поскольку сумма в левой части не равна 0 (см. решение задачи *11,б*), q_2 вычисляется по формуле

$$q_2=\frac{p_2\alpha^k}{6\sum\limits_{j=1}^{k} j^2b_j\alpha^{k-j}}.$$

Далее нетрудно вывести формулы для q_1, q_0:

$$q_1 = \frac{p_1\alpha^k + 4q_2 \sum\limits_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j}}{3 \sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j}}\,;$$

$$q_0 = \frac{p_0\alpha^k + q_1 \sum\limits_{j=1}^{k} j^3 b_j \alpha^{k-j} - q_2 \sum\limits_{j=1}^{k} j^4 b_j \alpha^{k-j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} j^2 b_j \alpha^{k-j}}\,.$$

13. а) Общее решение однородного соотношения: $a_n^{(o)} = C_1 + C_2 n$; правая часть: $\phi_n = (n-1)\cdot 1^n$; $\alpha = 1$ является характеристическим корнем кратности 2, поэтому частное решение неоднородного соотношения ищем в виде $a_n^{(ч)} = n^2\,(q_0 + q_1 n)$. Подставим его в исходное соотношение и найдём q_0, q_1:

$$n^2\,(q_0 + q_1 n) - 2\,(n-1)^2\,(q_0 + q_1(n-1)) +$$
$$+\,(n-2)^2\,(q_0 + q_1(n-2)) = n - 1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 6q_1 n - 2\,(q_0 + 3q_1) = n - 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 6q_1 = 1 \\ -2\,(q_0 + 3q_1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Отсюда $a_n^{(ч)} = \frac{1}{6}\,n^3$.

Ответ: $a_n = C_1 + C_2 n + \frac{1}{6}\,n^3$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) общее решение однородного соотношения: $a_n^{(o)} = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot (-4)^n$. Согласно результату задачи *10*, так как $\alpha = -4$ — простой характеристический корень, то частное решение неоднородного имеет вид $a_n^{(ч)} = Cn\cdot(-4)^n$. Подставив его в исходное соотношение, найдём C:

$$Cn \cdot (-4)^n - 16C(n-2)\cdot(-4)^{n-2} = 3 \cdot (-4)^n \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2C = 3 \;\Leftrightarrow\; C = \frac{3}{2}\,.$$

Ответ: $a_n = C_1 \cdot 4^n + \left(C_2 + \frac{3}{2}\, n\right) \cdot (-4)^n$, $n \in \mathbb{N}_o$;

в) общее решение однородного: $a_n^{(o)} = C_1 + C_2 \cdot (-3)^n$. Частное решение неоднородного: $a_n^{(ч)} = n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right)$ ($\alpha = 1$ — простой характеристический корень, см. задачу *12,а*). Подставив его в исходное соотношение, находим q_0, q_1, q_2:

$$n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right) + 2(n-1)\left(q_0 + q_1(n-1) + q_2\,(n-1)^2\right) -$$
$$-3(n-2)\left(q_0 + q_1(n-2) + q_2\,(n-2)^2\right) = 48n^2 + 1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 4q_0 - 10q_1 + 22q_2 + (8q_1 - 30q_2)\,n + 12q_2 n^2 = 48n^2 + 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 12q_2 = 48 \\ 8q_1 - 30q_2 = 0 \\ 4q_0 - 10q_1 + 22q_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_2 = 4 \\ q_1 = 15 \\ q_0 = \frac{63}{4} \end{cases}.$$

Ответ: $a_n = C_1 + C_2 \cdot (-3)^n + n\left(\frac{63}{4} + 15n + 4n^2\right)$, $n \in \mathbb{N}_o$;

г) $a_n^{(o)} = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cos\frac{\pi n}{2} + C_3 \sin\frac{\pi n}{2}$, $a_n^{(ч)} = n\,(q_0 + q_1 n) \times \times (-2)^n$ (см. задачу *11,а*). Подстановкой в исходное соотношение находим q_0, q_1.

Ответ:

$$a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cos\frac{\pi n}{2} + C_3 \sin\frac{\pi n}{2} - \frac{12}{25}\, n\,(5n+9) \times$$
$$\times (-2)^n,\; n \in \mathbb{N}_o;$$

д) $a_n^{(o)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot (-3)^n$, $a_n^{(ч)} = n\,(q_0 + q_1 n) \cdot 3^n$.

Ответ: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot (-3)^n + \frac{1}{2}\, n\,(n-2) \cdot 3^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_o$;

е) $a_n^{(o)} = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot (-2)^n$. Правая часть представляет собой сумму функций $\phi_n^{(1)} = n$, $\phi_n^{(2)} = 2^n$. Найдём частные решения $a_n^{(ч)'}$, $a_n^{(ч)''}$ неоднородных соотношений с правыми частями $\phi_n^{(1)} = n$, $\phi_n^{(2)} = 2^n$ соответственно (см. решение задачи *8,г*): $a_n^{(ч)'} = n\,(q_0 + q_1 n) = -\frac{1}{18} n(3n+19)$, $a_n^{(ч)''} = C\, n \cdot 2^n = n \cdot 2^n$ (см. решение задачи *10*). Тогда $a_n^{(ч)} = a_n^{(ч)'} + a_n^{(ч)''} = -\frac{1}{18} n(3n+19)+$

$+n{\cdot}2^n$ — частное решение неоднородного соотношения с правой частью $\phi_n = \phi_n^{(1)} + \phi_n^{(2)} = = n + 2^n$.

Ответ: $a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot (-2)^n - \frac{1}{18}n(3n+19) + n \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

ж) $a_n^{(o)} = C_1{\cdot}5^n + C_2{\cdot}(-3)^n$, $a_n^{(ч)} = a_n^{(ч)'} + a_n^{(ч)''}$, где $a_n^{(ч)'} = C'$, $a_n^{(ч)''} = C''n \cdot (-3)^n$ (см. решение задачи *8,г*). Находим C', C'' подстановкой в соответствующие неоднородные соотношения: $a_n^{(ч)'} = -\frac{1}{2}$, $a_n^{(ч)''} = -\frac{1}{8}\, n \cdot (-3)^n$.

Ответ: $a_n = C_1 \cdot 5^n + \Big(C_2 - \frac{1}{8}\, n\Big) \cdot (-3)^n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

з) $a_n^{(o)} = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cos\frac{\pi n}{2} + C_3 \sin\frac{\pi n}{2}$, $a_n^{(ч)'} = C \cdot 3^n = -\frac{1}{10} \times$ $\times 3^{n+3}$, $a_n^{(ч)''} = n\,(q_0 + q_1 n) \cdot 4^n = \frac{16}{17}\, n(n+1) \cdot 4^n$.

Ответ:

$$a_n = \left(C_1 + \frac{16}{17}\, n(n+1)\right) \cdot 4^n + C_2 \cos\frac{\pi n}{2} + \\ + C_3 \sin\frac{\pi n}{2} - \frac{1}{10}\, 3^{n+3},\; n \in \mathbb{N}_0;$$

и) поскольку $\alpha = -2$ является характеристическим корнем кратности 2, частное решение данного соотношения следует искать в виде $a_n^{(ч)} = Cn(n-1)\,(-2)^n$ (см. решение задачи *10*). Число C находим подстановкой $a_n^{(ч)}$ в соотношение.

Ответ: $a_n = (C_1 + C_2 n - n(n-1))\,(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

к) $a_n = \big(C_1 + C_2 n + C_3 n^3 + 4n(n-1)(n-2)\big)\,(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

л) $a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 3^n + (C_3 + C_4 n)\,(-3)^n + n(n-1)\,\big(3^{n-1} + + (-3)^{n-1}\big)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

14. а) Общее решение соотношения:

$$a_n^{(общ)} = C_1 + C_2 \cdot (-4)^n + \frac{1}{750}\, n \left(50n^2 + 345n + 1357\right).$$

Для нахождения C_1, C_2 подставим в него начальные условия:

$$a_0 = C_1 + C_2 = 1,$$

$$a_1 = C_1 + C_2 \cdot (-4) + \frac{1}{750} \cdot \left(50 \cdot 1^2 + 345 \cdot 1 + 1357\right) =$$
$$= C_1 - 4C_2 + \frac{292}{125} = -4.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 4C_2 = -\frac{792}{125} \end{cases}.$$

Решив её, находим: $C_1 = -\frac{292}{625}$, $C_2 = \frac{917}{625}$.

Ответ: $a_n = \frac{1}{625} (917 \cdot (-4)^n - 292) + \frac{1}{750} n \left(50n^2 + 345n + 1357\right)$, $n \in \mathbb{N}_o$;

б) $a_n^{(общ)} = C_1 \cdot (-2)^n + (C_2 n + C_3) \cdot 2^n - n(n+1) \cdot (-2)^{n-4}$.

Ответ: $a_n = (63-34n) \cdot 2^{n-5} + \left(2n^2 + 2n - 1\right) \cdot (-2)^{n-5}$, $n \in \mathbb{N}_o$;

в) $a_n = \frac{1}{26} \left(\left(181 \cos \frac{\pi n}{2} + 359 \sin \frac{\pi n}{2}\right) \cdot 5^n - 155 \cdot (-1)^n\right) + (63 + 13n) n \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_o$;

г) $a_n^{(общ)} = \left(C_1 + \frac{4}{5} n\right) \cdot (-4)^n + C_2 - \frac{9}{4} \cdot (-3)^n$.

Ответ:

$$a_n = \frac{1}{100} \left(5n \cdot (-4)^{n+2} - 29 \cdot (-4)^{n+1} + 109 - 25 \cdot (-3)^{n+2}\right),$$

$n \in \mathbb{N}_o$;

д) $a_n = \left(\frac{3}{2} - n\right) \cdot (-4)^{n+1} + (n-2) \cdot (-3)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_o$;

е) $a_n = \frac{1}{8} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} (n+5) \cdot 2^{-n-3}$, $n \in \mathbb{N}_o$;

ж) $a_n = \frac{15}{8} ((-1)^n - 1) + \frac{1}{12} n \left(2n^2 + 9n + 10\right)$, $n \in \mathbb{N}_o$;

з) $a_n = -n(n+5) \cdot 4^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_o$;

и) $a_n = \left(n^2 + 9n + 32\right) n - 2$, $n \in \mathbb{N}_o$;

к) общее решение:

$$a_n^{(общ)} = C_1 \cdot (-3)^n + 2^n \left(C_2 \cos \frac{2\pi n}{3} + C_3 \sin \frac{2\pi n}{3}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} + n\,(-3)^{n+2}.$$

Ответ:

$$a_n = \frac{9}{7}\left(4\cdot(-3)^{n+1} + 2^n\left(12\cos\frac{2\pi n}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + \\ + \frac{1}{2} + n\,(-3)^{n+2},\ n \in \mathbb{N}_0;$$

л) $a_n^{(общ)} = \left(C_1 + C_2 n + \frac{n(n-1)}{2}\right)\cdot(-1)^n$ (см. решение задачи *10*).

Ответ: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

м) $a_n = n^3 - 2n^2 + n - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$;

н) $a_n = 3^n\left(2n^2 + n - 2\right) + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

15. а) Обозначим искомую сумму через a_n (полагаем $a_0 = 0$). Тогда для a_n имеет место линейное рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + n^2$, или $a_n - a_{n-1} = n^2$. Очевидно, что соответствующее однородное соотношение имеет общее решение $a_n^{(o)} = C$. Поскольку $\alpha = 1$ — простой характеристический корень, частное решение неоднородного будем искать в виде $a_n^{(ч)} = n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2\right)$. Коэффициенты q_0, q_1, q_2 находим подстановкой в соотношение. Получаем общее решение:

$$a_n^{(общ)} = C + \frac{n\left(2n^2 + 3n + 1\right)}{6} = C + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Из начального условия $a_0 = 0$ следует: $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ответ: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) обозначим $a_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ \ldots\ + (2n-1)^2$ $(a_1 = 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Рекуррентное соотношение для a_n: $a_n = a_{n-1} + (2n-1)^2$, или $a_n - a_{n-1} = (2n-1)^2$. Решив его при начальном условии $a_1 = 1$, находим: $a_n = \frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$.

Ответ: $\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$;

в) пусть $a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \ldots\ + n^3$ $(a_0 = 0)$. Рекуррентное соотношение для $\{a_n\}$: $a_n - a_{n-1} = n^3$. Его частное решение будем по аналогии со случаями, рассмотренными в задачах *11*, *12*, искать в виде $a_n^{(ч)} = n\left(q_0 + q_1 n + q_2 n^2 + q_3 n^3\right)$ (см. примечание *11* на с. 59). Подстановкой $a_n^{(ч)}$ в соотношение находим коэффициенты многочлена и получаем общее решение:

$$a_n^{(общ)} = C + \frac{n\left(n + 2n^2 + n^3\right)}{4} = C + \frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}\,.$$

Из начального условия $a_0 = 0$ следует, что $C = 0$.

Ответ: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $n^2\left(2n^2 - 1\right)$.

16. Пусть n плоскостей разбивают пространство на a_n частей. Если проведены $n-1$ плоскостей, то n-я пересекается с ними по $n-1$ прямым, которые делят её на $\frac{1}{2}\Big((n-1)^2 + (n-1) + 2\Big) = \frac{1}{2}\left(n^2 - n + 2\right)$ частей (здесь использован результат задачи *13,а* подразд. *2.1*). Каждая из них соответствует новой части пространства. Поэтому для a_n имеет место рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}\left(n^2 - n + 2\right)$, или $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(n^2 - n + 2\right)$. Решив его при начальном условии $a_0 = 1$ (когда нет ни одной плоскости, имеется 1 часть, совпадающая со всем пространством), получаем

$$a_n = 1 + \frac{n\left(n^2+5\right)}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} = \frac{(n+1)\left(n^2 - n + 6\right)}{6}\,.$$

Ответ: $\frac{(n+1)\left(n^2-n+6\right)}{6}$ частей.

17. $\frac{n\left(n^2-3n+8\right)}{3}$ частей. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи *15* подразд. *2.1*.

18. Если $q_1 = p_2 = 0$, то очевидно, что $a_n = C_1 p_1^n$, $b_n = C_2 q_2^n$. Пусть $q_1^2 + p_2^2 \neq 0$. Если $q_1 \neq 0$, то из первого соотношения системы можно выразить b_{n-1}: $b_{n-1} = \frac{1}{q_1}\left(a_n - p_1 a_{n-1}\right)$. Тогда $b_n = \frac{1}{q_1}\left(a_{n+1} - p_1 a_n\right)$. Подставив b_n, b_{n-1} во второе соотношение, получаем:

$$\frac{1}{q_1}\left(a_{n+1} - p_1 a_n\right) = p_2 a_{n-1} + q_2 \cdot \frac{1}{q_1}\left(a_n - p_1 a_{n-1}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a_{n+1} - p_1 a_n = p_2 q_1 a_{n-1} + q_2\left(a_n - p_1 a_{n-1}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a_{n+1} - \left(p_1 + q_2\right) a_n + \left(p_1 q_2 - p_2 q_1\right) a_{n-1} = 0.$$

Исходная система сведена к линейному рекуррентному соотношению второго порядка[5)]. По его решению a_n вторая последовательность b_n определяется формулой $b_n = \frac{1}{q_1}(a_{n+1} - p_1 a_n)$.

Если $q_1 = 0$, то $a_n = C_1 p_1^n$. Подстановка $a_{n-1} = C_1 p_1^{n-1}$ превращает второе соотношение в линейное неоднородное первого порядка (так как в этом случае $p_2 \neq 0$): $b_n - q_2 b_{n-1} = C_1 p_2 p_1^{n-1}$.

19. а) Из первого соотношения получаем $b_{n-1} = a_{n-1} - a_n$, $b_n = a_n - a_{n+1}$. Подставляем во второе:

$$a_n - a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-1} - a_n \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} - 2a_n + 2a_{n-1} = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

Теперь вычисляем b_n:

$$b_n = a_n - a_{n+1} = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4}\right) -$$
$$-2^{\frac{n+1}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\pi(n+1)}{4} + C_2 \sin\frac{\pi(n+1)}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \times$$
$$\times\left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4} - \sqrt{2}C_1\left(\cos\frac{\pi n}{4}\cos\frac{\pi}{4} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sin\frac{\pi n}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}C_2\left(\sin\frac{\pi n}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi n}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \sin\frac{\pi n}{4} - C_2 \cos\frac{\pi n}{4}\right).$$

Ответ: $a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4}\right)$, $b_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \sin\frac{\pi n}{4} - C_2 \cos\frac{\pi n}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) из второго соотношения следует: $a_{n-1} = b_n - 3b_{n-1}$, $a_n = b_{n+1} - 3b_n$. Подстановка в первое приводит к соотношению второго порядка: $b_{n+1} - 7b_n + 10b_{n-1} = 0$. Из него получаем $b_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot 2^n$. Отсюда следует:

$$a_n = b_{n+1} - 3b_n = C_1 \cdot 5^{n+1} + C_2 \cdot 2^{n+1} - 3\left(C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot 2^n\right) =$$
$$= 2C_1 \cdot 5^n - C_2 \cdot 2^n.$$

[5)] То, что в этом соотношении нумерация последовательности начинается с 1, а не с 2, как было ранее, не имеет принципиального значения. Вид общего решения от этого не зависит.

Ответ: $a_n = 2C_1 \cdot 5^n - C_2 \cdot 2^n$, $b_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot (-5)^n$, $b_n = -C_1 \cdot 5^n + 4C_2 \cdot (-5)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = 3^{\frac{n}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\pi n}{2} + C_2 \sin \frac{\pi n}{2}\right)$, $b_n = 3^{\frac{n-1}{2}} \Big(\Big(2\sqrt{3}C_1 - C_2\Big) \cos \frac{\pi n}{2} + \Big(2\sqrt{3}C_2 + C_1\Big) \sin \frac{\pi n}{2}\Big)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) $a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot (-1)^n$, $b_n = \Big(C_1 + \frac{1}{2}\, C_2 + C_2 n\Big) \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

20. а) Общее решение системы: $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \Big(\Big(\sqrt{3}C_1 - C_2\Big) \times \cos \frac{\pi n}{3} + \Big(\sqrt{3}C_2 + C_1\Big) \sin \frac{\pi n}{3}\Big)$, $b_n = C_1 \cos \frac{\pi n}{3} + C_2 \sin \frac{\pi n}{3}$. Из начального условия $b_0 = \sqrt{3}$ следует $C_1 = \sqrt{3}$, а из $a_0 = \sqrt{3}$ получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \Big(\sqrt{3}C_1 - C_2\Big) = \sqrt{3} \Leftrightarrow C_2 = \sqrt{3}C_1 - 2 = 1.$$

Подставляем C_1, C_2 в общее решение:

$$a_n = \sqrt{3} \cos \frac{\pi n}{3} + 3 \sin \frac{\pi n}{3} =$$
$$= 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi n}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi n}{3} \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi(n-1)}{3}\ ;$$

$$b_n = \sqrt{3} \cos \frac{\pi n}{3} + \sin \frac{\pi n}{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi n}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi n}{3} \cos \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 2 \sin \frac{\pi(n+1)}{3}\ .$$

Ответ: $a_n = 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi(n-1)}{3}$, $b_n = 2 \sin \frac{\pi(n+1)}{3}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $a_n = 2^{-n+1} + 3^{-n}$, $b_n = -3 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = (3 - 4n) \cdot 3^{n-1}$, $b_n = (3 + 4n) \cdot 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = 3 \cdot 2^n - (-5)^n$, $b_n = 2^{n+2} + (-5)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

д) $a_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{3\pi n}{4}$, $b_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{3\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

21. а) Из второго соотношения получаем $a_{n-1} = b_n + 3b_{n-1} - n$, $a_n = b_{n+1} + 3b_n - n - 1$. Подстановка в первое приводит к неоднородному соотношению второго порядка: $b_{n+1} + 2b_n +$

$+2b_{n-1} = 5$. Его решение: $b_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi n}{4}\right) + 1$. Теперь находим a_n:

$$a_n = b_{n+1} + 3b_n - n - 1 =$$
$$= 2^{\frac{n+1}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3\pi(n+1)}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi(n+1)}{4}\right) + 1 +$$
$$+3 \cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi n}{4}\right) + 3 - n - 1 =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}\left((2C_1 + C_2)\cos\frac{3\pi n}{4} + (2C_2 - C_1)\sin\frac{3\pi n}{4}\right) + 3 - n.$$

Ответ:

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left((2C_1 + C_2)\cos\frac{3\pi n}{4} + (2C_2 - C_1)\sin\frac{3\pi n}{4}\right) + 3 - n,$$
$$b_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi n}{4}\right) + 1,\ n \in \mathbb{N}_0;$$

б) $a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-1)^n + \frac{n+1}{4}$, $b_n = 2\left(C_1 \cdot 3^n - C_2 \cdot (-1)^n\right) - -\frac{3}{4}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = 3^n \cdot \left((3C_1 - 2C_2)\sin\frac{\pi n}{2} - (2C_1 + 3C_2)\cos\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{6}{25} \times \times 4^{n+2} + \frac{3}{5}$, $b_n = 3^n \cdot \left(C_1 \cos\frac{\pi n}{2} + C_2 \sin\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{25}\left(4^{n+2} - 5\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = C_1 + C_2 \cdot (-7)^n + n\left(n + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{6} \cdot 7^n$, $b_n = C_1 - C_2 \cdot (-7)^n + +n^2 + \frac{5}{4}\,n + \frac{7}{16}\ + \frac{11}{6}\ \cdot 7^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

22. а) Здесь имеет место вырожденный случай ($p_1q_2 - p_2q_1 = = 0$). Последовательности a_n, b_n связаны зависимостью $b_n = = 2a_n + n \cdot (-1)^n$. Для того чтобы частное решение существовало, необходимо, чтобы начальные значения ей удовлетворяли, что имеет место для $a_0 = 0$, $b_0 = 0$.

Подстановка $b_{n-1} = 3a_{n-1} - a_n$, $b_n = 3a_n - a_{n+1}$ во второе соотношение приводит к следующему: $a_{n+1} - a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$ (можно также воспользоваться формулой, связывающей a_n и b_n). Решение этого соотношения первого порядка: $a_n^{(общ)} = C + +\frac{1}{4}(2n - 1) \cdot (-1)^n$. Отсюда: $b_n^{(общ)} = 2C + \frac{1}{2}(4n - 1) \cdot (-1)^n$. Постоянную C находим из начального условия для a_0 (или b_0).

Ответ:

$$a_n = \frac{1}{4}\left(1 + (2n-1)\cdot(-1)^n\right),$$
$$b_n = \frac{1}{2}\left(1 + (4n-1)(-1)^n\right),\ n \in \mathbb{N}_0;$$

б) $a_n = 2\cdot(-4)^n + 5^n$, $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\ \cdot 5^n - 2\cdot(-4)^n\right) - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = \frac{1}{27}\left((3n-7)\cdot(-2)^n + 12n + 7\right) + (n+3)\cdot(-1)^n$, $b_n = \frac{1}{27}\left((3n-1)\cdot(-2)^n + 3n + 1\right) + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

г) $a_n = 4\cdot(-5)^n - 3\cdot 6^n + \frac{1}{3}\cdot(-2)^n$, $b_n = -7\cdot(-5)^n - 3\cdot 6^n - \frac{1}{3}\times (-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

23. а) Умножим уравнение $a_{n+1} = b_{n+1} - b_n$ на z^{n+1} и запишем формальную сумму всех получившихся равенств по n от 0 до ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n - z\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

По определению производящей функции $\{a_n\}$

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = f_a(z) - a_0.$$

Аналогично для $\{b_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = f_b(z) - b_0.$$

Подставляя полученные выражения для сумм и учитывая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n = f_b(z)$, приходим к равенству, которое требовалось доказать;

б) действуем так же, как в задаче *а*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ f_a(z) = \frac{1}{z}\left(f_b(z) - b_0\right) - f_b(z),$$

откуда приходим к доказываемому равенству;

в) *указание:* из соотношения $a_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots$ следует $a_n = b_{n+1} + a_{n+1}$. Далее применить те же преобразования, что в задачах *а*, *б*;

г) $a_n = nb_{n-1} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_{n-1} z^n \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z\times$ $\times \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_{n-1} z^{n-1} \ \Leftrightarrow \ f_a(z) - a_0 = z \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n z^n \ \Leftrightarrow \ f_a(z) =$ $= z\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) + a_0 \ = \ z\left(z \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n z^{n-1} + f_b(z)\right) +$ $+a_0 = z\left(z \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(b_n z^n\right) + f_b(z)\right) + a_0.$

Теперь применяем правило почленного дифференцирования ряда и приходим к доказываемому равенству:

$$f_a(z) = z\left(z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) + f_b(z)\right) + a_0 =$$
$$= z^2 f_b'(z) + z f_b(z) + a_0.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколькими способами можно окрасить n одинаковых шаров в r разных цветов?

2. Множества M и N содержат m и n элементов соответственно. Сколько существует: а) функций из M в N; б) функций из M на N?

3. Сколькими способами можно разместить 12 туристов в четырёх лодках, если в каждой лодке: а) должно быть по три туриста; б) должен быть хотя бы один турист; в) должно быть хотя бы два туриста. (Порядок расположения лодок не имеет значения.)

4. Доказать:

$$n! = n^n - C_n^1\,(n-1)^n + C_n^2\,(n-2)^n - C_n^3\,(n-3)^n + \ \ldots\ .$$

5. Четыре студента, живущие в комнате, решили составить график дежурств по комнате на февраль (28 дней). Сколькими способами они могут это сделать, если каждый должен дежурить ровно семь дней?

6. Доказать: а) $A_n^r = nA_{n-1}^{r-1}$; б) $A_n^r = A_{n-1}^r + rA_{n-1}^{r-1}$.

7. Имеются p экземпляров одной книги, q — другой, r — третьей (экземпляры книг одного вида вида неразличимы), $p+q+r$ чётно. Сколькими способами их можно разделить поровну между двумя студентами?

8. Найти число различных диагоналей выпуклого n-угольника.

9. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. Доказать, что они его разбивают на

$$1 + \frac{n(n-3)\left(n^2 - 3n + 14\right)}{24}$$

различных частей.

10. Пусть $\Pi_n = 1 + n + n(n-1) + \ldots + n! = \sum\limits_{k=0}^{n} A_n^k$ — число всех возможных перестановок без повторений, взятых из n различных элементов. Доказать: а) $\Pi_n = n\Pi_{n-1} + 1$; б) найти экспоненциальную производящую функцию $\{\Pi_n\}$.

11. Сколько существует семизначных телефонных номеров, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, имеющих чётное число вхождений цифр 1, 3, 5?

12. Сколько существует семизначных телефонных номеров, содержащих: а) не менее двух вхождений каждой цифры 0, 1, 2; б) не менее одного вхождения 9, не менее двух — 3, от двух до трёх — 5; в) не более двух вхождений каждой цифры от 0 до 9[1)]?

13. На рис. *5* изображён план города, улицы которого образуют квадратную сетку со стороной 1 км («шахматный город»). Расстояние AD равно m, AB — n км. Сколькими способами можно добраться из пункта A в пункт C по кратчайшим

[1)] Напоминаем, что телефонный номер не может начинаться с 0.

маршрутам, если можно идти только по улицам города (стрелками на рисунке показан один из возможных маршрутов)?

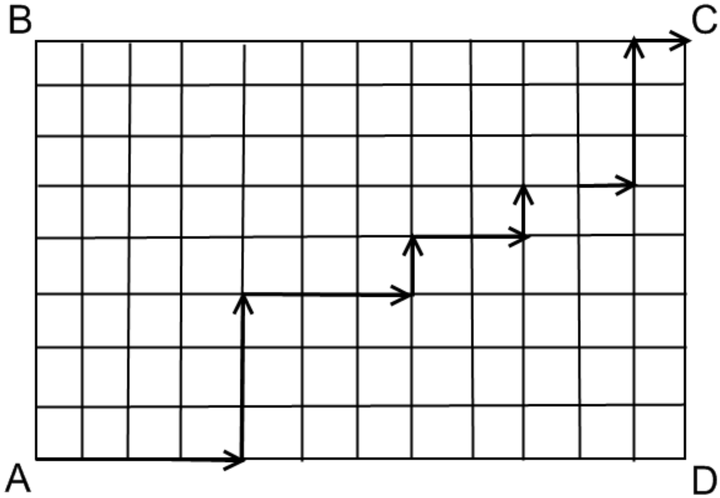

Рис. 5

14. Имеются 8 яблок, 6 бананов, 10 апельсинов (фрукты одного вида неразличимы). Сколькими способами их можно разделить между тремя детьми, если: а) каждый ребёнок должен получить хотя бы по одному фрукту каждого вида; б) каждый должен получить хотя бы 1 яблоко, 1 банан и 2 апельсина?

15. Доказать, что имея неограниченное количество гирь весом 3 и 5 кг, можно отвесить любое, большее 7, целое число килограммов, кладя гири на одну чашу весов.

16. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеют следующие уравнения: а) $5x+3y+7z=28$; б) $x+2y+3z = 31$; в) $x+y+3z=27$, если $0 \le x \le 4$, $0 \le x \le 7$, $2 \le z \le 8$; г) $2x+y+4z=15$, если $0 \le x,\ y,\ z \le 3$?

17. Сколько существует четырёхзначных номеров от 0000 до 9999, у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних?

18. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга? Расстановки, совмещающиеся поворотами доски, считаются различными.

19. На листе клетчатой бумаги со стороной клетки 1 отмечен узел A. Проводятся различные замкнутые ломаные, звенья которых идут по линиям клетчатой бумаги, длины $2n$, начинающиеся и заканчивающиеся в A. Доказать, что их число равно $(C_{2n}^{n})^2$.

К В А Д
В А Д Р
А Д Р А
Д Р А Т

Рис. 6

П Р Я М О У Г О
Р Я М О У Г О Л
Я М О У Г О Л Ь
М О У Г О Л Ь Н
О У Г О Л Ь Н И
У Г О Л Ь Н И К

Рис. 7

20. Сколькими различными способами можно прочесть слово: а) «квадрат» на рис. *6*; б) «прямоугольник» на рис. *7*?

ТРЕУГОЛЬНИК
РЕУГОЛЬНИК
ЕУГОЛЬНИК
УГОЛЬНИК
ГОЛЬНИК
ОЛЬНИК
ЛЬНИК
ЬНИК
НИК
ИК
К

Рис. 8

21. Сколькими способами можно прочитать слово «треугольник» на рис. *8*?

22. Найти сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

23. Сколько различных по величине и расположению ква-

дратов, состоящих из целого числа клето

24. Погремушка представляет из себя кольцо с надетыми на него тремя красными и пятью синими шарами. Сколько различных таких погремушек можно сделать, если те их них, которые совмещаются перемещением шаров по кольцу или переворачиванием, считаются одинаковыми?

25. План города представляет собой квадратную сетку, состоящую из n «горизонтальных» и n «вертикальных» улиц. Сколько существует различных маршрутов в виде замкнутых $2n$-звенных ломаных, проходящих по всем «горизонтальным» и всем «вертикальным» улицам?

26. Вычислить:
а) $z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
б) $1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

27. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 6 мужчинам, по другой — 4 женщинам, по третьей — 4 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить эти вакансии, если имеются 16 кандидатов: 9 мужчин и 7 женщин?

28. Весом двоичного слова[2)] называется число содержащихся в нём единиц. Сколько существует двоичных слов длины n и веса k?

29. Сколько двоичных слов длины n имеет нечётный вес (см. задачу *28*)?

30. Слово в алфавите из d различных символов называется d-ичным. Сколько существует d-ичных слов длины n, имеющих ровно k вхождений некоторого определённого символа алфавита?

[2)] Слово — конечная упорядоченная последовательность символов некоторого алфавита. Двоичное слово — слово в алфавите $\{0, 1\}$.

31. Пусть u_n — число всех двоичных слов длины n, не содержащих нескольких нулей подряд (положим $u_0 = 1$, т.к. существует единственное слово нулевой длины — пустое слово). Очевидно, что $u_1 = 2$. Доказать, что числа u_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n = 2,\ 3,\ \ldots\ ,$$

т.е. образуют последовательность Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

32. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность чисел Фибоначчи: $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$ и т.д. Доказать:

а) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$;

б) $u_2 + u_4 + \ \ldots\ + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $u_1 + u_3 + \ \ldots\ + u_{2n-1} = u_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$;

г) $u_1 + u_2 + u_3 + \ \ldots\ + u_n = u_{n+2} - 1$, $n \in \mathbb{N}$;

д) $u_1^2 + u_2^2 + \ \ldots\ + u_n^2 = u_n u_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

е) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

ж) $u_1u_2 + u_2u_3 + \ \ldots\ + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$, $n \in \mathbb{N}$;

з) $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \ldots + 2u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_{n+4} - n - 3$, $n \in \mathbb{N}$;

и) $u_3 + u_6 + \ \ldots\ + u_{3n} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

33. Доказать, что: а) при любом натуральном k число u_{km} делится на u_m; б) при любом натуральном k число u_{5k} делится на 5 ($\{u_n\}$ —последовательность Фибоначчи из задачи *31*); в) любые два соседних члена последовательности Фибоначчи взаимно просты[3)].

34. Доказать, что члены последовательности Фибоначчи получаются сложением чисел в треугольнике Паскаля вдоль наклонных линий, как показано на рис. *9*.

[3)] Два целых числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен единице.

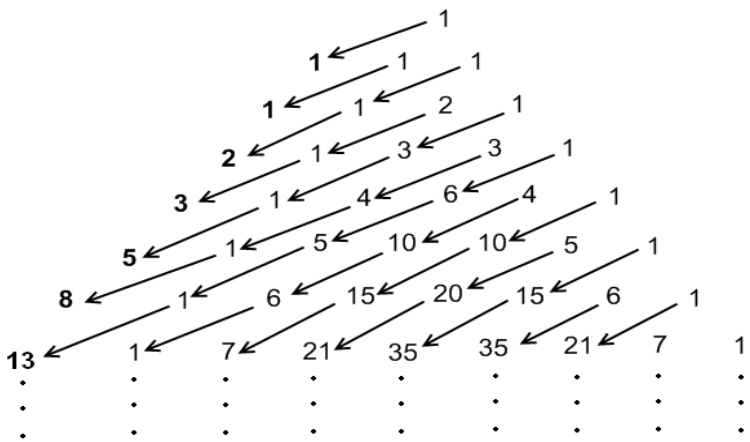

Рис. 9

35. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, не делится ни на одно из чисел: а) 5, 7; б) 6, 9; в) 5, 7, 9; г) 5, 8, 12?

36. Сколько натуральных чисел от 1 до 500 делятся: а) либо на 5, либо на 9; б) либо на 8, либо на 12; в) либо на 3, либо на 5, либо на 7?

37. Сколько различных, т.е. не совмещающихся движением на плоскости, прямоугольников можно построить из отрезков длиной 1, 2 $\ldots$, n?

38. Сколько различных, т.е. не совмещающихся движением в пространстве, прямоугольных параллелепипедов можно построить из отрезков длиной 1, 2 $\ldots$, n?

39. Доказать:

а) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ \ldots\ +n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n\in\mathbb{N}$;

б) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ \ldots\ +n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n\in\mathbb{N}$;

в) $2^2+6^2+10^2+\ \ldots\ +(4n-2)^2=\frac{4n\left(4n^2-1\right)}{3}$, $n\in\mathbb{N}$;

г) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\,n^2=(-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

40. На одной стороне треугольника отмечены n, на другой — m точек, которые соединены отрезками с противолежащими вершинами. а) Сколько получится точек пересечения отрезков внутри треугольника? б) На сколько частей эти отрезки разобьют треугольник?

41. На одной из пары параллельных прямых отмечены n точек, на другой — m. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

42. В некотором государстве не было двух человек с одинаковыми наборами зубов. Какова может быть максимальная численность населения этого государства? (Набор зубов определяется их количеством и расположением, максимальное число зубов — 32.)

43. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует k-звенных замкнутых ломаных с вершинами в этих точках?

44. Автомобильные номера состоят из трёх цифр и трёх букв (используются 30 букв русского алфавита). Каково максимальное число различных номеров?

45. В телеграфном *коде Бодо* каждый символ алфавита кодируется цепочкой из пяти двоичных знаков (0 и 1). Какова может быть максимальная длина алфавита, который можно закодировать?

46. В *коде Морзе* каждый символ алфавита кодируется последовательностью следующих знаков: «точка» (короткий импульс и короткая пауза), «тире» (длинный импульс и короткая пауза), «0» (длинная пауза), т.е. код Морзе является троичным. Длина последовательности (кодового слова) не превышает четырёх знаков. Какое максимальное число различных кодовых слов возможно в коде Морзе?[4)]

[4)] На самом деле, код Морзе, как известно, содержит только 32 кодовых слова (для русского алфавита). Это связано с тем, что код является неравномерным, и для него должно выполняться условие однозначного распознавания кодовых слов в потоке импульсов.

47. Сколькими способами можно составить из 10 девушек и 14 юношей пять пар для танца?

48. В классе 30 учеников, которым выданы два варианта контрольных работ (по 15 работ каждого варианта). Сколькими способами можно рассадить учеников за 15 парт по двое так, чтобы за каждой партой сидели дети с разными вариантами? Рассаживания, различающиеся порядком следования парт, считаются различными, взаимное расположение детей за одной партой не имеет значения.

49. а) Сколько существует двоичных матриц размерности m на n? б) В скольких из них строки попарно различны? в) Сколько двоичных квадратных матриц размерности n симметричны?

50. Сколькими способами можно распределить пять учебников между 18 школьниками, если: а) учебники разные и каждый может получить не более одного; б) учебники разные и каждый может получить любое их количество; в) учебники одинаковые и каждый может получить не более одного?

51. Сколькими способами можно выбрать две из 28 костей домино так, чтобы их можно было приложить друг к другу, т.е. чтобы некоторое число очков имелось и на одной, и на другой кости?

52. Сколько существует целых неотрицательных n-значных чисел, цифры которых идут: а) в неубывающем порядке; б) в невозрастающем порядке?

53. Студент изучает английский, немецкий, французский, испанский и португальский языки. Сколько словарей ему нужно для того, чтобы переводить непосредственно с одного из этих языков на любой другой?

54. Сколько существует последовательностей n нулей и m единиц, в которых между любыми двумя единицами находится не менее k нулей?

55. Сколькими способами можно извлечь из колоды 36 карт шесть последовательных карт одной масти?

56. Из колоды 36 карт вынуты пять карт. а) Сколько различных выборок карт может получиться? б) В скольких из них четыре карты одинакового достоинства? в) В скольких все карты одной масти? г) В скольких нет тузов? д) В скольких имеется не менее трёх королей? е) В скольких присутствуют карты всех мастей?

57. Сколько целочисленных членов имеется в разложении (до приведения подобных слагаемых): а) $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\right)^{14}$; б) $(1+\sqrt[3]{3})^{18}$; в) $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{50}$; г) $\left(1+\sqrt{5}\right)^{19}$?

58. Используя полиномиальную формулу, написать разложение: а) $(x+y+z)^4$; б) $(x-y+2z)^5$; в) $(x+3y-2z)^5$; г) $(1+x-y)^6$.

59. Найти коэффициент при z^k, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных членов, в разложении: а) $\left(1-3z+2z^3\right)^9$, $k=21$, $k=7$; б) $\left(1+z+z^3\right)^{13}$, $k=7$, $k=13$; в) $\left(2+3z-z^4\right)^8$, $k=27$, $k=5$; г) $\left(1+z-z^2\right)^{19}$, $k=12$, $k=19$; д) $\left(1-z+2z^5\right)^{11}$, $k=21$, $k=44$.

60. Вычислить член, не содержащий x, в разложении:

а) $\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)^6$; б) $\left(1+x-\frac{1}{x^3}\right)^6$; в) $\left(1+2x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$; г) $\left(2-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$; д) $\left(1+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{11}$; е) $\left(1-x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$; ж) $\left(-1+\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}\right)^7$; з) $\left(2+x^3-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{13}$; и) $\left(1-x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

61. Сколько членов не содержат радикалов в разложении:

а) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$; б) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$; в) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{12}$; г) $(1+\sqrt[k]{x})^n$, k, $n\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$?

62. Вычислить члены, не содержащие радикалов в разложении:

а) $\left(x-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{16}$; б) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12}$; в) $(\sqrt[5]{x}-2\sqrt[7]{x})^{35}$; г) $(1+ +\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{8}$; д) $\left(2-x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{5}$; е) $\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{6}$.

63. В группе 18 студентов, из них 8 девушек. Успешно сдали сессию 13 человек, а двое студентов-юношей не смогли этого сделать. Сколько девушек успешно сдали сессию?

64. Из всех студентов N-й группы 10 сдали экзамен по высшей математике, 8 — по дискретной, 12 — по вычислительной, 5 — по высшей и дискретной математике, 4 — по дискретной и вычислительной, 7 — по высшей и вычислительной, 3 студента сдали все эти экзамены. Не сдавших ни одного экзамена в группе нет. а) Сколько студентов в группе? б) Сколько сдали ровно два из этих экзаменов? в) Сколько сдали ровно один экзамен? г) Сколько сдали только дискретную математику?

65. На кафедре N университета работают 32 человека, из них 22 кандидата наук, 14 совместителей, 16 владеющих английским языком. Известно, что 10 кандидатов наук являются совместителями, из них 5 владеют английским, 8 совместителей и 12 кандидатов наук знают английский язык. а) Сколько штатных сотрудников (т.е. не совместителей) не имеют степени кандидата и не владеют английским? б) Сколько совместителей, имеющих степень кандидата, не владеют английским? в) Сколько штатных сотрудников не имеет степени кандидата? г) Сколько штатных кандидатов наук не владеют английским языком?

66. Какая сумма очков является наиболее вероятной при бросании двух костей: 6, 7 или 8?

67. В пространстве расположены n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Сколько существует треугольных пирамид с вершинами в этих точках?

68. Каждая сторона правильного треугольника ABC разделена на n равных частей. Точки деления соединены отрезками, параллельными сторонам. На сколько треугольников они разобьют ABC?

69. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$, $r \in \mathbb{N}_0$?

70. С помощью производящей функции найти число сочетаний с повторениями объёма n букв слова «круг», в которых буква «р» встречается чётное число раз.

71. С помощью экспоненциальной производящей функции найти число размещений с повторениями объёма n букв слова «брак», в которых буква «к» встречается чётное число раз.

72. Найти число перестановок букв слова «разбег», в которых не встречаются комбинации букв «бег» и «аз».

73. Сколько размещений с повторениями букв слова «привал» по r позициям содержат каждую из букв «а», «р», «л» хотя бы по одному разу, если: а) $r = 4$; б) $r = 5$?

74. На окружности проведены n попарно пересекающихся хорд, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей они разделят круг, ограниченный окружностью?

75. Найти общие решения следующих однородных линейных рекуррентных соотношений:

а) $a_n - 5a_{n-2} + 4a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$;
б) $a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$;
в) $a_n - a_{n-1} + 2a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$;
г) $a_n + 8a_{n-1} + 22a_{n-2} + 24a_{n-3} + 9a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$;
д) $a_n - 4a_{n-1} + 5a_{n-2} - 4a_{n-3} + 4a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$;
е) $a_n - 8a_{n-1} + 18a_{n-2} - 27a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$.

76. Найти общие решения следующих неоднородных линейных рекуррентных соотношений:

а) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 2$, $n = 3, 4, \ldots$;
б) $a_n + 4a_{n-1} - 5a_{n-2} = n \cdot 2^n$, $n = 2, 3, \ldots$;
в) $a_n + 16a_{n-2} = n(n-1) \cdot 4^n$, $n = 2, 3, \ldots$;
г) $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 2n \cdot (-3)^n$, $n = 2, 3, \ldots$;
д) $a_n - 5a_{n-1} + 5a_{n-2} + 5a_{n-3} - 6a_{n-4} = (-2)^{n+1}$, $n = 4, 5, \ldots$;

е) $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3n \cdot (-2)^n$, $n = 2, 3, \ldots$.

77. Найти частные решения следующих однородных линейных рекуррентных соотношений при данных начальных условиях:

а) $a_n + 6a_{n-1} + 11a_{n-2} + 6a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$;

б) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = \frac{2}{3}$, $a_1 = 4$;

в) $a_n - a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = -1$, $a_1 = a_2 = 4$;

г) $a_n - 2a_{n-1} - 8a_{n-3} + 16a_{n-4} = 0$, $n = 4, 5, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = -10$, $a_3 = -48$;

д) $a_n + 2\sqrt{3}a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = \sqrt{3}$, $a_1 = 0$;

е) $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 0$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 12$.

78. Найти частные решения следующих неоднородных линейных рекуррентных соотношений при данных начальных условиях:

а) $a_n - a_{n-1} - 10a_{n-2} - 8a_{n-3} = \left(2n + \frac{17}{5}\right)(-1)^n$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 3$, $a_1 = -2$, $a_2 = 5$;

б) $a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 6a_{n-3} = (2n^2 - 1) \cdot 2^n$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = -244$, $a_1 = a_2 = 0$;

в) $a_n + 4a_{n-1} + 8a_{n-2} = -25n^2 \cdot 2^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = -1$, $a_1 = -8$;

г) $a_n - 10a_{n-1} + 25a_{n-2} = 2 \cdot 5^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = -5$;

д) $a_n + 2a_{n-1} + 9a_{n-2} + 18a_{n-3} = 3n + 1$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$;

е) $a_n - 2a_{n-1} - 7a_{n-2} - 4a_{n-3} = -3 \cdot 4^{n-1}$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$;

ж) $a_n + a_{n-1} - 4a_{n-2} - 4a_{n-3} = 4 \cdot (-2)^n$, $n = 3, 4, \ldots$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$.

79. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых: а) первые и последние три цифры одни и те же, например, 245-6-452; б) первые три повторяются в конце в том же порядке, например, 713-0-713; в) цифры симметричны

относительно середины, например, 756-2-657; г) до середины идут в неубывающем порядке, после — в невозрастающем, например, 258-9-720 или 233-5-511 (телефонный номер не может начинаться с 0)?

80. Сколько различных решений в целых числах имеет неравенство $|x| + |y| \leq 2010$?

81. Сколько существует восьмизначных чисел, в которых нет одинаковых соседних цифр?

82. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске три одинаковые ладьи так, чтобы они не били друг друга? Способы, совмещающиеся поворотами доски, считаются различными.

83. Имеются n пар монет различного достоинства (монеты одной пары неразличимы). Сколькими способами можно из них выбрать несколько монет (порядок выбора монет не имеет значения)?

84. Имеются 8 пар монет различного достоинства (монеты одной пары неразличимы). Сколькими способами можно из них выбрать две разные монеты (порядок выбора монет не имеет значения)?

85. В библиотеке имеются 4 разных учебных пособия по булевым функциям, 6 — по теории графов, 5 — по теории алгоритмов. Кроме того, есть 3 разных учебника по дискретной математике, содержащие разделы, посвящённые теории графов и булевым функциям, и 7 — по математической логике с разделами о булевых функциях и теории алгоритмов. Сколькими способами можно выбрать несколько книг так, чтобы каждая из перечисленных тем имелась ровно в одной книге?

86. Сколько чисел можно записать k знаками в n-ичной системе счисления?[5)]

[5)] В n-ичной позиционной системе счисления k-значное число представ-

87. Квадрат разделён на девять равных клеток. Сколькими способами можно их раскрасить в красный, белый и чёрный цвета так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали были клетки всех цветов? А если раскрашивания, совмещающиеся поворотами квадрата, считаются одинаковыми?

88. Сколько шестибуквенных слов можно составить из 33 букв русского алфавита, в которых: а) присутствует хотя бы одна буква «а»; б) встречается хотя бы по одной букве «а» и «о»; в) встречается хотя бы по одной букве «а», «б», «в»?

89. На рис. *10* изображена сеть дорог между городами *А* и *Б*, состоящая из m шоссе, соединённых n просёлочными дорогами. Сколькими способами можно доехать из *А* в *Б*, если по шоссе можно двигаться только по направлению к *Б* и никакой участок пути нельзя проезжать дважды?

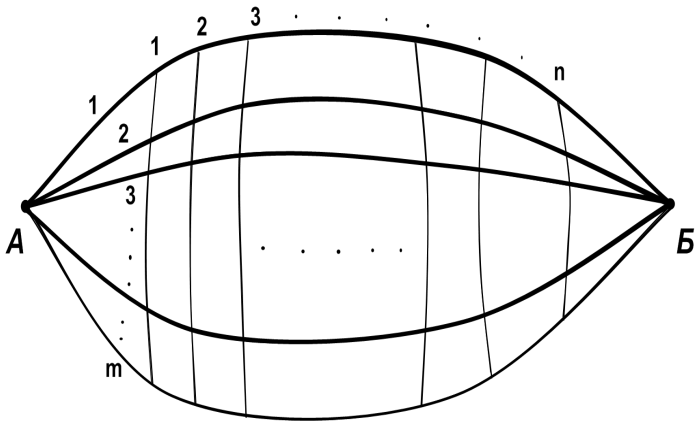

Рис. 10

ляется многочленом по степеням n:

$$\overline{a_{k-1}\ \dots\ a_1a_0} = a_{k-1}n^{k-1} + \ \dots\ + a_1n + a_0.$$

Его коэффициенты являются цифрами в записи числа. Всего имеется n различных цифр: 0, 1, ... , $n-1$. Число n называется основанием системы счисления.

90. Сколько четырёхзначных чисел содержат ровно четыре различные цифры?

91. Сколько пятизначных чисел содержат ровно пять различных цифр?

92. В скольких числах от 1 до 999999999 сумма цифр нечётна?

93. Сколькими способами можно выбрать из последовательности $1, 2, 3, \ldots, n$ три числа так, чтобы из них можно было составить арифметическую прогрессию, если: а) $n = 2k$ чётное; б) $n = 2k + 1$ нечётное?

94. Для допуска к экзамену студенту надо решить 6 задач по теории графов, 14 по комбинаторике, 6 по теории множеств. Он запланировал решать по одной задаче в день. Сколькими способами он может решить все задачи, если: а) все задачи разные и надо сначала решить задачи по теории множеств, затем — по комбинаторике и в последнюю очередь — по теории графов; б) задачи по одной теме считаются неразличимыми и решать можно в любом порядке; в) задачи по одной теме считаются неразличимыми и каждую тему надо решать подряд, например, сначала все задачи по теории множеств, затем — по теории графов, затем — по комбинаторике?

95. В группе 14 студентов. Сколькими способами из них можно сформировать две волейбольные команды по 8 человек для двух матчей в разные дни так, чтобы их составы не совпадали?

96. Сколькими способами можно вынуть из колоды 52 карт четыре карты так, чтобы среди них были все масти?

97. У первого туриста имеются 8 разных значков, у второго — 6. Сколькими способами они могут обменять 3 своих значка на 3 другого?

98. В группе 8 студентов и 6 студенток. Сколькими способами они могут собрать компанию из 5 человек для поездки на

пикник так, чтобы среди них было не менее 2 девушек и хотя бы 1 юноша?

99. Выписаны все сочетания с повторениями из n букв по m. Сколько раз в них встречается каждая буква?

100. На полке стоят n книг. Сколькими способами можно взять несколько из них, если нельзя брать соседние книги? Порядок выбора книг не имеет значения.

101. За круглым столом сидят n академиков, каждый из них враждует со своими соседями и больше ни с кем. Сколькими способами можно выбрать k академиков для участия в симпозиуме так, чтобы среди них никто не враждовал друг с другом? Порядок выбора не имеет значения.

102. Сколько существует выпуклых k-угольников с вершинами, совпадающими с вершинами данного выпуклого n-угольника, и со сторонами, не совпадающими с его сторонами?

103. На полке стоят n книг. Сколькими способами можно взять k книг так, чтобы до первой, после k-й и между любыми соседними выбранными было не менее s книг? Порядок выбора книг не имеет значения.

104. В восточной игре «нарды» 15 белых и 15 чёрных шашек расставляются по 24 ячейкам так, что каждая ячейка либо пуста, либо занята только белыми либо только чёрными шашками. Сколько существует их различных расположений по ячейкам? Шашки одного цвета неразличимы.

105. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «гарнизон» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

106. На окружности проставлены n точек. Сколько существует выпуклых многоугольников с вершинами в них?

107. Сколько существует n-значных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, в которых хотя бы один раз встречается каждая из цифр 2, 4, 5, 6 ($n \geq 4$)?

108. Доказать:

$$C_n^0 C_n^{n-m} + C_n^1 C_{n-1}^{n-m} + \ldots + C_n^m C_{n-m}^{n-m} = 2^m C_n^m.$$

109. В скольких шестизначных числах присутствуют четыре чётные и две нечётные цифры?

110. На плоскости проставлены n разных точек. Сколько существует неупорядоченных троек ненулевых векторов с началами и концами в них?

111. Телефонная сеть насчитывает n абонентов. Сколькими способами можно одновременно соединить k пар из них? Порядок соединяемых пар не имеет значения.

112. У директора в подчинении 8 руководителей подразделений. В течение шести рабочих дней он приглашает их к себе на совещания по трое в день, причём состав присутствующих не повторяется. Сколькими способами секретарь может составить расписание совещаний так, чтобы: а) никто не остался неприглашённым; б) ни один из руководителей подразделений не приходил каждый день? (Имеет значение лишь состав приглашённых, но не их порядок в списке.)

113. Доказать:

$$C_n^0 C_{n+r-1}^r - C_n^1 C_{n+r-3}^{r-2} + C_n^2 C_{n+r-5}^{r-4} - \ldots = C_n^r.$$

114. Сколькими способами можно выбрать из n различных предметов k так, чтобы данные s предметов не попали одновременно в выборку?

115. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, в которых цифра 4 встречается: а) ровно три раза; б) от трёх до пяти раз; в) не менее восьми раз?

116. У грибника имеются 5 белых грибов, 3 подберёзовика, 3 подосиновика (грибы одного вида неразличимы). Сколькими

способами он может выложить ряд из n грибов, если $n = 1$, 2, 3, 4, 5, 6?

117. Сколько можно составить шестибуквенных слов, в которых гласные и согласные буквы чередуются? (В русском языке 10 гласных и 23 согласных буквы.)

118. В колоде 52 карты. Сколькими способами можно выложить в ряд семь карт так, чтобы красные и чёрные масти чередовались? В скольких случаях такой ряд будет начинаться с карты красной масти?

119. У цветочницы имеются 6 роз, 4 гвоздики, 3 тюльпана, 7 хризантем, 5 гладиолусов, 4 астры. Цветы одного вида неразличимы. а) Сколькими способами можно выбрать из них несколько цветов? б) Сколькими способами можно составить букет из пяти цветов? в) Сколькими способами можно составить букет из трёх разных цветов?

120. Сколькими способами можно выложить в ряд 6 карт красной масти и 5 чёрной их колоды 52 карт?

121. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «абордаж» так, чтобы согласные и гласные буквы чередовались?

122. Найти количество шестибуквенных слов, составленных из 33 букв русского алфавита, содержащих все буквы «а», «о», «ы»?

123. Сколько пятибуквенных слов, составленных из 33 букв русского алфавита, содержат только буквы «у», «е», «ж»?

124. Имеются n натуральных чисел, s из которых чётны. Сколькими способами можно из них выбрать три числа, сумма которых: а) чётна; б) нечётна?

125. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа: а) 2 331 166; б) 12 355 523?

126. В 12 пронумерованных клетках сидели 12 разных канареек. Клетки открыли, канареек выпустили. Затем они вернулись, в каждой клетке оказалось по одной птице, но так, что ни одна не попала в свою прежнюю клетку. Сколькими способами возможно такое возвращение?

127. Квадрат со стороной 10 разделён на 100 одинаковых квадратных клеток, которые раскрашиваются в 10 разных цветов следующим образом. Каждая вертикаль содержит все 10 цветов, а на любой горизонтали нет двух соседних клеток одинаковых цветов. Сколькими способами можно таким образом раскрасить квадрат? Раскрашивания, совмещающиеся поворотами квадрата, считаются различными.

128. На вход двухканальной системы массового обслуживания поступили n разных заявок, причём каждая должна быть обслужена в обоих каналах (в любом порядке). Время обслуживания одной заявки фиксировано и равно t. Сколькими способами можно составить очерёдность обслуживания оптимальным образом, т.е. чтобы ни для одной заявки не подошла очередь на обслуживание одновременно в обоих каналах?

129. Сколькими существует троек натуральных чисел от единицы до $3n$, сумма которых делится на 3?

130. На плоскости расположены n прямых, никакие две из которых не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников со сторонами на этих прямых?

131. Сколькими способами можно выбрать из n различных предметов нечётное их число?

132. Сколько перестановок без повторений 33 букв русского алфавита не содержат ни одно из слов «дуб», «енот», «ямщик», «вьюга»?

133. В скольких сочетаниях с повторениями из 14 букв по 6 каждая буква встречается не более двух раз?

134. На одной стороне угла отмечены n точек, на другой — m. Сколько существует треугольников, две вершины которых совпадают с этими точками, а третья — с вершиной угла?

135. На одной стороне треугольника отмечены n точек, на другой — m, на третьей — k. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

136. На одной из параллельных плоскостей в пространстве отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, на другой — аналогичным образом m точек. Сколько существует треугольных пирамид с вершинами в этих точках, основания которых лежат в одной плоскости, а вершины — в другой?

137. На одной из пары скрещивающихся прямых в пространстве отмечены n точек, на другой — m. Сколько существует треугольных пирамид с вершинами в этих точках, противолежащие рёбра которых являются отрезками данных прямых?

138. На плоскости проведены n прямых, никакие две из которых не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке, никакие четыре не касаются одной окружности. Сколько существует окружностей, каждая из которых касается ровно трёх прямых из проведённых?

139. На прямой отмечены n различных точек $(n \geq 2)$, m других вне её расположены так, что никакие три из всех точек (кроме первых n) не лежат на одной прямой. Сколько можно провести прямых, каждая из которых проходит ровно через две из данных точек?

140. Сколькими способами можно распределить n разных предметов по m разным ящикам, если: а) в каждый ящик можно помещать любое их количество, в том числе ящик может оставаться пустым; б) в каждый ящик можно помещать любое число предметов, но не должно быть пустых; в) в первый ящик надо положить n_1 предметов, во второй — n_2, … ,

в m-й — n_m $(n_1 + n_2 + \ \dots \ + n_m = n)$; г) в условиях задачи *а* имеет значение порядок расположения предметов в ящиках; д) в условиях задачи *б* имеет значение порядок расположения предметов в ящиках; е) в каждый ящик можно положить любое число предметов, и имеет значение их количество, но не качественный состав предметов?

141. Общество, состоящее из n членов, выбирает своего главу. Сколькими способами могут распределиться голоса его членов, если: а) голосование открытое, т.е. в протоколе фиксируется, кто за кого голосовал, и каждый может отдать свой голос за любого, в том числе за себя; б) в условиях задачи *а* нельзя голосовать за себя; в) голосование тайное, т.е. в протокол записывается только число голосов, полученных каждым членом общества, и голосовать можно за любого члена общества, в том числе за себя?

142. Найти число всех четырёхугольников на рис. *11*.

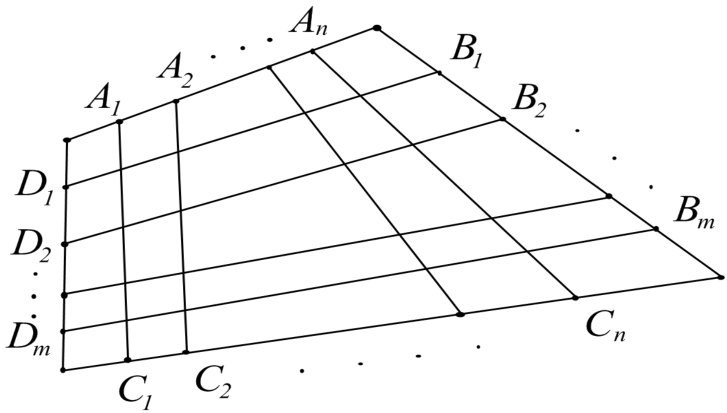

Рис. 11

143. В каждой из n пронумерованных клеток сидело по одному хомяку (все зверьки считаются одинаковыми). К каждой клетке подошёл ребёнок и взял хомяка, таким образом, у каждого из n детей стало по одному хомяку. Затем дети вернули их

обратно в клетки, при этом ни один не посадил своего хомяка в ту клетку, в которой тот сидел прежде (в любой клетке могло оказаться любое число хомяков). Найти число всевозможных распределений животных по клеткам после этого.

144. Сколькими способами можно представить 100 в виде суммы четырёх натуральных слагаемых (представления, отличающиеся их порядком, считаются различными)?

145. Сколькими способами можно разложить 10 красных, 6 синих, 8 зелёных мячей (мячи одного цвета неразличимы) по пяти разным корзинам?

146. Сколькими способами можно представить число 200 в виде произведения четырёх натуральных сомножителей (представления, отличающиеся их порядком, считаются различными)?

147. Сколькими способами можно развесить 12 разных плащей поровну по трём вешалкам, если: а) вешалки пронумерованы; б) вешалки неразличимы?

148. Сколькими способами можно разложить 14 различных книг на две стопки по пять книг и одну на четыре книги, если: а) стопки считаются разными; б) стопки неразличимы?

149. *Числом Стирлинга второго рода* S_n^m называется количество способов распределить n разных предметов по m неразличимым группам так, чтобы в каждую попал хотя бы один предмет. Доказать, что

$$S_n^m = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \, C_m^k \, (m-k)^n \, .$$

150. Доказать рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода (см. задачу *149*):

$$S_{n+1}^m = S_n^{m-1} + m S_n^m .$$

151. Конечное множество A содержит n элементов. Количество способов разбиения A на непустые классы эквивалентности[6)] называется *n-м числом Белла* B_n. Доказать, что

$$B_n = S_n^1 + S_n^2 + \ldots + S_n^n ,$$

где S_n^m — число Стирлинга второго рода (см. задачу *149*).

152. Доказать рекуррентное соотношение для чисел Белла B_n (см. задачу *151*):

$$B_{n+1} = C_n^0 B_0 + C_n^1 B_1 + \ldots + C_n^n B_n$$

$(B_0 = 1)$.

153. Дано конечное множество A, состоящее из n элементов. а) Сколько существует бинарных отношений[7)] на A? б) Сколько существует рефлексивных, иррефлексивных бинарных отношений на A? в) Сколько существует симметричных, антисимметричных бинарных отношений на A? г) Сколько существует рефлексивных и симметричных бинарных отношений на A? д) Сколько существует рефлексивных и антисимметричных бинарных отношений на A?

154. *Тернарным отношением* на множествах A, B, C называется подмножество декартова произведения[8)] $A \times B \times C$, т.е. некоторое множество упорядоченных троек $\langle a, b, c\rangle$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Сколько существует тернарных отношений на конечных множествах A, B, C, содержащих m, n, k элементов соответственно?

155. Конечное множество A содержит n элементов. Сколько существует тернарных отношений (см. задачу *154*), являющихся подмножествами A^3 (A^3 — декартов куб множества A (см. [5])), содержащих: а) все тройки вида $\langle a, a, b\rangle$, где $a, b \in A$;

[6)] О классах эквивалентности см. [5].

[7)] О бинарных отношениях и их свойствах см. [5].

[8)] Подробно о декартовых произведениях см. [5].

б) все тройки, в которых не менее двух элементов совпадают; в) все тройки, в которых все элементы различны?

156. Сколькими способами можно наклеить 18 различных почтовых марок на пять разных конвертов, если: а) на любой конверт можно наклеивать любое число марок, в том числе вовсе не наклеивать; б) на каждом конверте должно быть хотя бы по одной марке; в) на каждом конверте должно быть хотя бы по две марки? Способы, отличающиеся порядком наклейки марок, считаются разными.

157. Имеются 8 разных почтовых марок. Сколькими способами можно наклеить некоторые из них[9] на три различных конверта, если способы, различающиеся порядком наклейки марок, считаются разными. На любой конверт можно наклеивать любое, в том числе нулевое, число марок.

158. На вход n-канальной системы массового обслуживания поступили N_1 одинаковых заявок первого вида, N_2 одинаковых заявок второго вида, $\ldots$, N_k — k-го вида, $N_1 + \ldots + N_k = N$. Каждая из них может быть обслужена в любом канале. Сколькими способами можно их расставить в n очередей в каналы обслуживания? В каждом канале может быть любое, в том числе нулевое, число заявок в очереди. Способы, различающиеся порядком заявок, считаются различными.

159. Решить задачу *158* при условии, что в каждом канале должно быть не менее s заявок в очереди.

160. В студенческой конференции участвуют представители 5 вузов. Делегация вуза «А» насчитывает 5 человек, «Б» — 6, «В» — 4, «Г» — 4, «Д» — 5. Сколькими способами их можно расположить в списке докладчиков так, чтобы для каждого студента либо выступающий непосредственно перед ним, либо непосредственно после него был представителем его вуза?

161. Сколько существует размещений с повторениями объ-

[9] Это означает, что можно наклеить любое число марок от 0 до 8.

ёма n букв слова «поле», в которых две буквы «о» не стоят рядом?

162. Сколькими способами можно распределить 6 одинаковых ромашек, 1 незабудку, 1 василёк, 1 колокольчик между тремя лицами, если: а) каждый получает любое число цветов; б) каждый получает по три цветка? Порядок распределения цветов не имеет значения.

163. Найти общие решения следующих систем линейных однородных рекуррентных соотношений:

а) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - 2b_{n-1}, \\ b_n = 2a_{n-1} - 3b_{n-1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} + b_{n-1}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 8b_{n-1}, \\ b_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 5b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} + b_{n-1}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = -5a_{n-1} - b_{n-1}; \end{cases}$

$n \in \mathbb{N}$.

164. Найти частные решения следующих систем линейных однородных рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 9b_{n-1}, \\ b_n = -2a_{n-1} + 3b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 3,\ b_0 = 1;$

б) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} - 3b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 0,\ b_0 = 2;$

в) $\begin{cases} a_n = -4a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 6a_{n-1} + b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 1,\ b_0 = -1;$

г) $\begin{cases} a_n = 3\sqrt{3}\, a_{n-1} + 13b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} - \sqrt{3}\, b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 0,\ b_0 = -1;$

д) $\begin{cases} a_n = -4a_{n-1} + 3b_{n-1}, \\ b_n = 6a_{n-1} - b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 0,\ b_0 = -3.$

165. Найти общие решения следующих систем неоднородных рекуррентных соотношений:

а) $\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} + 5b_{n-1} + 1, \\ b_n = -2a_{n-1} - b_{n-1} + 2, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$

б) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 4b_{n-1}, \\ b_n = 4a_{n-1} - 3b_{n-1} - \frac{3}{4}\,, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$

в) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2b_{n-1} + n \cdot (-1)^n\,, \\ b_n = 9a_{n-1} - 3b_{n-1} + \frac{3}{2}\, \cdot (-1)^n\,, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$

г) $\begin{cases} 4a_n = -2a_{n-1} + b_{n-1}, \\ 2b_n = -4a_{n-1} + b_{n-1} + 4n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$

166. Найти частные решения следующих систем линейных неоднородных рекуррентных соотношений при данных начальных значениях:

а) $\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 3b_{n-1} - 3, \\ b_n = -4a_{n-1} + 5b_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 3,\ b_0 = 0;$

б) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - 2b_{n-1} + 2n, \\ b_n = 2a_{n-1} - 3b_{n-1} - 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = b_0 = 0;$

в) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + \frac{1}{2}\, b_{n-1}, \\ b_n = -2a_{n-1} - b_{n-1} + 3, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 2,\ b_0 = 0;$

г) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} - 3^n, \\ b_n = -2a_{n-1} + 5b_{n-1} + 2 \cdot 4^n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 = 0\,,\ b_0 = -3\,.$

167. Сколькими способами можно раздать колоду 36 карт поровну 9 игрокам так, чтобы: а) игрок А получил всех тузов; б) один из игроков получил всех тузов; в) игрок А получил не менее трёх тузов; г) один из игроков получил два туза, а другой — остальные два?

168. Сколькими способами можно распределить $2n$ разных предметов по трём разным группам так, чтобы в одну из них попало столько же предметов, сколько в две другие, вместе взятые? Порядок предметов в группах не имеет значения.

169. Сколькими способами можно распределить $3n$ разных предметов по трём разным группам так, чтобы в одну из них попало вдвое меньше предметов, чем в две другие, вместе взятые? Порядок предметов в группах не имеет значения.

170. У грибника n одинаковых белых грибов и по одному грибу k других различных видов. Сколькими способами он может выложить ряд из s грибов ($k \leq s \leq k + n$)?

171. Имеются 5 одинаковых яблок и по 1 груше, банану, апельсину, хурме и сливе. Сколькими способами можно из них сделать неупорядоченную выборку 6 фруктов?

172. За пересылку бандероли надо уплатить 22 рубля. На почте имеются марки ценой 1, 3, 6, 10 рублей в неограниченных количествах. Сколькими способами можно наклеить марки на указанную сумму, если способы, различающиеся порядком наклеивания, считаются различными?

173. На почте имеются марки ценой 1 рубль, 2 рубля, 3 рубля и т.д. в неограниченных количествах. Сколькими способами можно наклеить на конверт марки на сумму: а) 6 рублей; б) n рублей, если способы, различающиеся порядком наклеивания, считаются различными?

174. Имеются по одной марке ценой 1, 2, 3, 5, 8, 10 рублей. Сколькими способами можно наклеить на конверт марки на сумму 15 рублей, если способы, различающиеся порядком наклеивания, считаются: а) одинаковыми; б) различными?

175. Сколькими способами можно отвесить 16 кг, имея по одной гире весом 1, 2, 3, 5, 7, 9 кг? Гири кладутся на одну чашу весов. Их порядок не имеет значения.

176. Имеются две гири по 1 кг, одна гиря весом 2 кг, по две гири по 3 и 5 кг. Все гири, даже одинакового веса, считаются различными. Сколькими способами можно отвесить 17 кг, кладя гири на одну чашу весов. Порядок, в котором кладутся гири на весы, не имеет значения.

177. Сколькими способами можно представить 19 в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых равно либо 1, либо 2, либо 3, либо 5, если разбиения, различающиеся порядком слагаемых, считаются: а) одинаковыми; б) различными?

178. В урне лежат по 10 красных, чёрных, синих и белых шаров (шары одного цвета неразличимы). Сколькими способами можно вынуть из неё 10 шаров? Порядок вынимания не имеет значения.

179. На плоскости проведены n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Затем проведена окружность так, что все точки пересечения прямых оказались внутри неё. На сколько частей эти прямые разделили круг, ограниченный проведённой окружностью?

180. Будем называть предмет смещённым при перестановке, если он не стоит на том месте, где был до неё. Найти число перестановок n различных предметов, в которых данные k предметов оказались смещёнными.

181. Прямоугольник размером m на n разделён на mn квадратных клеток со стороной 1. Сколькими способами можно раскрасить k клеток в чёрный цвет так, чтобы ни в одном горизонтальном и вертикальном ряду не было двух чёрных клеток? Раскраски, совмещающиеся поворотами прямоугольника, считаются различными.

182. Найти число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, в которых никакие два последовательных числа не стоят рядом в порядке возрастания.

183. Сколькими способами можно перестроить колонну из 12 солдат так, чтобы никто из них не стоял вслед за своим прежним соседом спереди?

184. В скольких перестановках букв слова «корабль» буква «к» не стоит рядом с «а», «р», «б»?

185. В группе 18 студентов, причём студенты А, Б, В, Г болеют за одну футбольную команду. Сколькими способами можно посадить в ряд всех студентов так, чтобы никакая пара соседей не была болельщиками этой команды?

186. Двое играют в игру «Угадай-ка!». Один из игроков загадывает любые k чисел от 1 до n (все разные), другой называет k чисел, пытаясь их угадать. Найти количество ответов угадывающего, при которых: а) ни одно число не отгадано; б) ровно r чисел отгадано; в) он проигрывает, т.е. не называет правильный набор чисел.

187. В урне лежат 49 пронумерованных шаров. Наудачу вынимаются 6 шаров. Затем игроки пытаются угадать их номера. Найти число ответов, при которых ровно r шаров будет угадано ($0 \leq r \leq 6$).

188. Имеются по четыре красные, зелёные, белые, голубые, чёрные фишки (фишки одного цвета неразличимы). Мальчик зажимает в руке четыре фишки, а девочка пытается их угадать. Сколько неправильных ответов она может дать?

189. Имеются n пар шаров разных цветов. В каждой паре шары одного цвета. Шары пронумерованы от 1 до $2n$. Сколько существует их перестановок, в которых никакие два шара одного цвета не стоят рядом?

190. Сколько существует замкнутых ломаных, вершинами которых являются все вершины выпуклого n-угольника? Ломаные могут быть самопересекающимися.

191. По каналу связи с дискретным временем передаются сообщения. Для этого используются сигналы m типов: длительность сигнала первого типа равна n_1 временных тактов, второго типа — n_2, … , m-го типа — n_m. Пусть a_n — число сообщений, переданных за n временных тактов, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0 = 1$ (за время, равное нулю, можно передать только одно, пустое, сообщение), $a_n = 0$, $n < 0$. Составить рекуррентное соотношение для $\{a_n\}$.

192. С помощью тождества

$$\frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{(1-z^2)^2}$$

доказать:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (k+1)(2n-k+1) = n+1.$$

193. Имеются 8 одинаковых груш, 6 одинаковых яблок, по 3 одинаковых сливы и банана. Сколькими способами их можно разделить между двумя людьми, если каждый получает: а) любое число фруктов; б) по 10 фруктов?

194. Сколько существует геометрически различных способов раскраски вершин правильного n-угольника в n разных цветов? Раскраски называются геометрически различными, если они не совмещаются движением на плоскости.

195. Решить задачу *194* при условии, что n-угольник расположен в пространстве. Соответственно раскраски считаются геометрически различными, если они не совмещаются движением в пространстве.

196. Сколькими геометрически различными способами (см. задачу *195*) можно раскрасить грани правильного тетраэдра в четыре разных цвета?

197. Сколькими геометрически различными способами (см. задачу *195*) можно раскрасить грани куба в шесть разных цветов?

198. Из пункта А в пункт Б ведут 5 разных дорог, из Б в В — 4, из В в Г — 6. Сколькими способами можно добраться по ним из А в Г и обратно, если на участке от Г до Б нельзя возвращаться той же дорогой, что использовалась ранее?

199. За круглым столом расселись n академиков. Но оказалось, что каждый из них враждует со своим соседом справа и больше ни с кем. Они решили пересесть таким образом, чтобы никто из них не имел своего врага по правую руку от себя. Сколькими способами они могут это сделать?

200. У каждого из 3 студентов имеются по 5 разных книг. Сколькими способами 2 из них могут обменять 2 свои книги на 2 другого?

201. В течение $n+m$ дней студент хочет посмотреть n спектаклей и m концертов (по одному мероприятию в день). Сколькими способами он может составить расписание посещений?

202. В киоске продаются открытки 8 разных видов. Сколькими способами можно купить: а) 12 открыток; б) 6 разных открыток?

203. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «переводчик» так, чтобы никакие две из букв «п», «в», «р», «к» не стояли рядом?

204. Доказать что число способов разбить n разных предметов на m различимых групп так, чтобы в каждой было хотя бы по одному предмету, если их порядок в группах не имеет значения, равно коэффициенту при z^n в разложении $(e^z - 1)^m$ в степенной ряд, умноженному на $n!$.

205. Методом производящих функций доказать, что число способов разложить n разных предметов по m разным ящикам так, чтобы не было пустых, если порядок предметов не имеет значения, вычисляется по формуле

$$m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} \cdot 1^n = \\ = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n$$

(см. задачу *204*).

206. Построить производящие функции сочетаний с повторениями и чисел сочетаний букв слова «орёл», в которых присутствуют хотя бы по две буквы «о» и «р», не более трёх букв «л». Найти число таких сочетаний объёма 9.

207. Имеются предметы четырёх разных видов. Построить производящие функции сочетаний с повторениями и чисел сочетаний, в которых предметы первого вида присутствуют в

чётных, а второго — в нечётных количествах, предметов четвёртого вида имеется от 2 до 5. Найти числа таких сочетаний объёмов 4, 7, 9.

208. С помощью производящих функций вывести формулу для подсчёта числа способов разложить n разных предметов по трём разным ящикам так, чтобы в первом было любое их число, во втором — не менее одного, в третьем — не менее двух предметов.

209. Имеются красные, белые, чёрные и зелёные шары (шары одного цвета неразличимы). Сколькими способами можно взять несколько из них так, чтобы среди них было не более четырёх красных и четырёх чёрных, от двух до пяти белых, одного до четырёх зелёных шаров? Порядок выборки шаров не имеет значения.

210. Построить производящие функции сочетаний с повторениями и чисел сочетаний цифр 1, 2, 6, в которых присутствуют не более трёх цифр 1, от одной до трёх цифр 2, не более четырёх — 6. Выписать все такие сочетания объёма 6. Найти количества сочетаний объёмов 5, 7, 9.

211. Найти количество перестановок цифр числа 125, в которых присутствуют не более одной цифры 1, не более двух цифр 2, не менее двух и не более четырёх — 5.

212. Имеются n_1 различных одиночных предметов, n_2 различных пар одинаковых предметов, n_3 различных троек одинаковых предметов, … , n_k различных наборов k одинаковых предметов (такая совокупность обозначается $1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\ldots k^{n_k}$). Доказать, что производящей функцией чисел сочетаний предметов из этого набора является:

$$\frac{\left(1-z^2\right)^{n_1}\left(1-z^3\right)^{n_2}\ldots\left(1-z^{k+1}\right)^{n_k}}{(1-z)^{n_1+n_2+\ldots+n_k}}.$$

213. Построить экспоненциальную производящую функцию чисел размещений предметов из набора $1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\ldots k^{n_k}$ (см. задачу *212*).

214. Доказать, что количество способов разложить предметы совокупности $1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\ldots k^{n_k}$ (см. задачу *212*) по m разным ячейкам, если порядок предметов в них не имеет значения, вычисляется по формуле

$$C\left(n_1,\ \ldots\ n_k,\ m\right) = m^{n_1}\left(C_{m+1}^{2}\right)^{n_2}\left(C_{m+2}^{3}\right)^{n_3}\ \ldots\ \left(C_{m+k-1}^{k}\right)^{n_k}.$$

215. Доказать, что количество способов разложить предметы совокупности $1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\ldots k^{n_k}$ (см. задачу *212*) по m разным ячейкам, если порядок предметов в них не имеет значения, так, чтобы не было пустых ячеек, вычисляется по формуле

$$\sum_{s=0}^{m}\left(-1\right)^{s}C_{m}^{s}C\left(n_1,\ \ldots\ n_k,\ m-s\right),$$

где $C\left(n_1,\ \ldots\ n_k,\ m\right)$ — количество способов из задачи *214*.

216. Сколько различных семизначных чисел можно составить из цифр числа 5 550 001 122, в которых присутствуют не менее двух нулей и не менее одной пятёрки?

217. У мальчика 4 одинаковые розовые, 6 одинаковых зелёных, 3 одинаковые голубые фишки. Сколькими способами он может выложить в ряд 8 из них так, чтобы там было хотя бы по одной розовой и голубой, хотя бы две зелёных и последняя фишка не была зелёной?

218. Сколькими способами можно представить 24 в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых равно либо 1, либо 2, либо 4, если представления, различающиеся их порядком, считаются одинаковыми?

219. Сколько существует сочетаний с повторениями объёма 21 предметов трёх разных видов, в которых число предметов первого вида кратно 3, второго — 5, третьего — 7? Предметы одного вида неразличимы.

220. С помощью производящих функций вывести формулу числа размещений предметов двух разных видов (предметы

одного вида неразличимы), в которых количество предметов первого вида чётно, второго — нечётно.

221. Сколькими способами можно распределить 16 разных предметов по двум различимым группам так, чтобы в первой было не менее одного, во второй — не менее двух предметов? Их порядок в группах не имеет значения.

222. Сколькими способами можно раскрасить клетки шахматной доски в три разных цвета так, чтобы в каждый была окрашена хотя бы одна клетка? Способы, совмещающиеся поворотами доски, считаются различными.

223. Сколькими способами можно расставить буквы слова «привал» в вершинах правильного шестиугольника, если расстановки, совмещающиеся его поворотами, считаются одинаковыми?

224. Сколько различных ожерелий можно составить из 5 одинаковых красных, 7 одинаковых зелёных и 9 одинаковых белых бусинок?

225. Сколько различных делителей имеет число 2010?

226. Даны n различных наборов по k одинаковых предметов. Составить производящую функцию чисел их сочетаний. Найти общее число всевозможных сочетаний.

227. Каждый из студентов группы знает хотя бы один иностранный язык. Из них 8 знают английский, 6 немецкий, 4 французский, 2 — английский и французский, 3 — немецкий и французский, 2 — английский и немецкий, 1 знает все три языка. Сколько студентов в группе?

228. Обозначим через $|A|$ число элементов конечного множества A. Известно, что $|A| = 10$, $|B| = 15$, $|C| = 21$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 5$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|A \cup B \cup C| = 40$. Найти $|A \cap B|$.

229. Сколько существует различных ненулевых векторов, начала и концы которых совпадают с вершинами выпуклого n-угольника? Сколько из них лежат внутри него?

230. Вычислить: а) $\sum\limits_{k=1}^{n}(5k-3)C_n^k$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(4k+1)C_n^k$; в) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}C_n^k$; д) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k+2}C_n^k$.

231. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+3z-3z^2+5z^4-4z^{17})^{2010}$.

232. Найти число размещений с повторениями объёма n чисел $1, 2, \ldots, k$, в которых чётные числа стоят на чётных местах, нечётные — на нечётных.

233. Решить задачу *232* для размещений без повторений.

234. Найти производящие функции следующих последовательностей $\{a_n\}$: а) $a_n = 5^n \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $a_n = 3^{2n-1}\cdot(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}$; в) $a_n = n\cdot(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$; г) $a_n = n^2\cdot 5^n$, $n \in \mathbb{N}$; д) $a_n = 4^n\cdot(-3)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; е) $a_n = n\cdot 5^n + 3^{2n}\cdot(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; ж) $a_n = \overline{A}_m^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; m — натуральное число; з) $a_n = (-1)^{n-1}\times\times C_{n+k-1}^n$, $n \in \mathbb{N}$; k — натуральное число; и) $a_n = (n+1)(n+2)\times\times(n+3)$, $n \in \mathbb{N}_0$; к) $a_n = (-1)^{n-1}n(n+1)(n+2)(n+3)$, $n \in \mathbb{N}$; л) $a_n = A_n^m$, $n = m, m+1, \ldots$; m — натуральное число; м) $a_n = \alpha^n C_{n+k}^{n-s}$, $n = s, s+1, \ldots$; k, s — натуральные числа, α — ненулевое действительное число.

235. Найти экспоненциальные производящие функции следующих последовательностей $\{a_n\}$: а) $a_n = 3^n\cdot 7^{-2n} - \frac{1}{2}\cdot(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; б) $a_n = n\cdot 4^n + 3$, $n \in \mathbb{N}$; в) $a_n = (-1)^{n-1}(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$; г) $a_n = \frac{(-3)^n}{(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}_0$; д) $a_n = A_n^m$, $n = m, m+1, \ldots$; m — натуральное число; е) $a_n = \frac{2^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

236. Найти коэффициенты при z^n в разложении
$$\frac{1}{1+4z^2+5z^3-7z^5+11z^{12}}$$
в степенной ряд для $n = 4, 5, 6$.

237. Найти коэффициенты при z^n в разложении
$$\frac{z+3}{z^9-2z^7+z^6+7z^4-2z^2+11}$$

в степенной ряд для $n = 2, 3$.

238. Найти коэффициенты при z^n в разложении

$$\frac{1}{1 - z + z^3 + z^4 - z^5 + z^7 + z^9}$$

в степенной ряд для $n = 3, 4, 5, 6$.

239. Найти коэффициенты при z^n в разложении

$$\frac{1}{1 + 2z + 3z^2 + z^4 + z^5 + 5z^7}$$

в степенной ряд для $n = 5, 6, 7$.

240. Найти первые 7 членов разложения

$$\frac{1 + z}{1 - z + 5z^3 - 13z^5 + z^8}$$

в степенной ряд.

241. Найти первые 5 членов разложения

$$\frac{1}{1 + z - 11z^2 + 4z^3 + 12z^5}$$

в степенной ряд.

242. Найти первые 4 члена разложения

$$\frac{z^2 + z - 1}{z^5 + 2z^4 - z^3 + 7z^2 - 17}$$

в степенной ряд.

243. Найти первые 7 членов разложения

$$\frac{1}{1 + z + z^3 - 7z^5 - 9z^{11}}$$

в степенной ряд.

244. Найти общий член разложения

$$\frac{1+2z+3z^2+\ \ldots}{1-2z+3z^2-\ \ldots} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)z^n}$$

в степенной ряд.

245. Найти $F_a^{-1}(z)$ для следующих $F_a(z)$: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)^2z^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+k)z^n$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^n\,(n+1)\times$ $\times(n+2)(n+3)z^n)$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\ \ldots\ (n+k)z^n$, k — натуральное число.

246. Найти $E_a^{-1}(z)$ для следующих $E_a(z)$: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)z^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+k)z^n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!z^n}{n!}$.

247. Может ли быть так, что в компании из нечётного числа людей каждый знаком ровно с одним человеком из этой же компании?

248. Может ли в компании из 11 человек каждый быть знакомым ровно с тремя из этой же компании?

249. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр от 1 до 6 (цифры могут повторяться), делящихся на: а) 2; б) 5; в) 3?

250. Сколько различных чисел, меньших 1000000000, можно составить с помощью цифр: а) 2, 8; б) 1, 3, 5; в) 0, 1, 3, 6?

251. Сколько различных четырёхбуквенных слов можно составить из букв слова: а) «парапет»; б) «переделка»?

252. Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова: а) «кукуруза»; б) «поголовье»; в) «Каракумы»?

253. Сколькими способами можно уплатить 2 рубля монетами по 5, 10, 50 копеек и 1 рублю? Имеется достаточное количество монет, их порядок при уплате не имеет значения. Монеты одного достоинства неразличимы.

254. Имеются 8 монет по 1 рублю и 6 монет по 50 копеек. Сколькими способами можно ими уплатить 9 рублей? Монеты одного достоинства неразличимы, их порядок при уплате не имеет значения.

255. Имеются n различных видов предметов (предметы 1 вида неразличимы). Сколько существует их сочетаний с повторениями объёма k ($k \leq n$), в которых присутствуют не более 2 предметов каждого вида?

256. Забор состоит из n вертикально расположенных досок. Для его покраски имеются s разных красок. Сколькими способами можно покрасить забор так, чтобы в каждый цвет были покрашены хотя бы две доски?

257. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «хрусталь» так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

258. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «поединок» так, чтобы две буквы «о» не стояли рядом, а «е» предшествовала «к» (не обязательно непосредственно)?

259. Сколько существует перестановок букв слова «колокола», в которых нет соседних букв «о»?

260. Сколько существует перестановок букв слова «правило», в которых «а» стоит непосредственно перед «о», а «п» предшествует «в» (не обязательно непосредственно)?

261. Сколькими способами можно переставлять буквы слов: а) «помидор»; б) «корыто» так, чтобы гласные и согласные чередовались?

262. Сколькими способами можно представить 38 в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых равно 1, 2,

3, 5, 10, 15 или 20, если представления, различающиеся только их порядком, считаются одинаковыми?

263. В кошельке лежат 3 монеты по 1 рублю, 2 по 5 рублей, 3 по 10 рублей. Монеты одного достоинства неразличимы. Сколькими способами можно уплатить ими 33 рубля, если порядок монет при уплате не имеет значения?

264. Сколькими способами можно уплатить 1 рубль 50 копеек монетами по 5, 10, 50 копеек и 1 рублю? Монеты можно брать в любых количествах, их порядок не имеет значения. Монеты одного достоинства неразличимы.

265. Имеются 25 одинаковых зелёных и 3 одинаковых красных яблока. Сколькими способами их можно выложить в ряд так, чтобы: а) красные яблоки лежали рядом; б) между любыми 2 красными было хотя бы 1 зелёное; в) между 2 ближайшими красными было ровно 3 зелёных?

266. На каждой стороне квадрата проставлено по n несовпадающих точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

267. Найти число размещений с повторениями объёма n целых чисел от 1 до m, содержащих хотя бы по одному каждому числу.

268. а) Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова «метаматематика». б) Сколько из них содержат не более двух букв «м», не более двух «а», не менее одной «е» и не содержат «к»?

269. Сколькими способами можно наклеить на конверт марки на сумму 35 рублей, имея марки по 5, 10, 15 рублей? Равноценные марки неразличимы, брать их можно в любых количествах. Способы, различающиеся порядком наклейки марок, считаются разными.

270. Сколькими способами можно разделить 20 одинаковых белых шаров, 15 одинаковых красных, 16 одинаковых синих

между двумя лицами, если каждый должен получить не менее пяти белых, не менее трёх красных и не менее одного синего шара?

271. Сколькими способами можно разделить 10 груш, 14 яблок, 15 апельсинов между четырьмя лицами так, чтобы каждый из них получил не менее одной груши, одного яблока и двух апельсинов? Фрукты одного вида неразличимы.

272. Имеются 30 разных сигнальных флагов. Сколькими способами их можно вывесить на шести разных мачтах так, чтобы на каждой было не менее двух флагов. Порядок, в котором они вывешиваются, существенен.

273. Сколькими способами можно распределить n разных предметов по m разным ящикам ($n \leq m$) так, чтобы в каждом было не более одного предмета?

274. Сколькими способами можно составить из 33 букв русского алфавита 8 различных слов, если каждая буква должна быть использована ровно один раз?

275. Сколькими способами можно разложить 22 мяча по 6 корзинам, если: а) мячи неразличимы, корзины разные; б) мячи и корзины разные? В каждую корзину можно положить любое число мячей.

276. Из букв слова «перпендикулярность» составляются четыре слова, каждое из которых может содержать любое (не меньшее единицы) число букв. Сколькими способами можно таким образом составить слова, если их порядок не имеет значения?

277. Во взводе 24 солдата (все разного роста). Сколькими способами можно из них выбрать 10 и построить их в две колонны по пять, если в каждой солдаты выстраиваются по росту? Порядок колонн не имеет значения.

278. Имеются 3 карточки с буквами «а», 4 — с «г», 2 — с «е», по 1 — с «у», «о». Сколько различных шестибуквенных

слов можно из них составить, если использовать не менее одной карточки с «а», не менее одной с «е», не менее двух с «г»?

279. За круглым столом сидели n человек. Каждый из них обменялся рукопожатиями со своими k ближайшими соседями справа и k ближайшими соседями слева ($k \leq \frac{n-1}{2}$). Сколько было сделано рукопожатий?

280. Сколькими способами можно рассадить $3n$ человек за столики по 3 за каждым? Порядок, в котором сидят люди за столиками, а также и самих столиков не имеет значения.

281. С помощью комбинаторных рассуждений доказать, что при любых натуральных k, n величина $\frac{(kn)!}{(k!)^n n!}$ — целое число.

282. В группе 18 студентов. Сколькими способами можно выбрать из них 10 для хозработ, если из трёх студентов К, С, М нельзя брать ни кого-либо двух из них, ни всех троих?

283. Имеются 6 яблок, 8 груш, 6 бананов. Фрукты одного вида неразличимы. Сколькими способами их можно разделить между двумя лицами так, чтобы каждый получил по 10 фруктов?

284. Имеются 8 гвоздик, 7 тюльпанов, 5 роз. Цветы одного вида неразличимы. Сколькими способами их можно разделить между А и Б так, чтобы А получил 12, а Б — 8 цветов?

285. Доказать:

$$\sum_{k=r}^{n} (-1)^k C_k^r C_n^k = 0 .$$

286. Имеются m различных видов по s одинаковых предметов (такая совокупность обозначается s^m). Доказать, что число их сочетаний с повторениями объёма n вычисляется по формуле

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m+n-k(s+1)-1}^{n-k(s+1)}.$$

287. Имеются n_1 одинаковых предметов первого вида, n_2 одинаковых предметов второго вида, ..., n_k — k-го вида. Введём величину $C\,(n_1,\,\ldots\,,\,n_k;\,n)$ — число их сочетаний с повторениями объёма n . Доказать рекуррентное соотношение для $C\,(n_1,\,\ldots\,,\,n_k;\,n)$:

$$C\,(n_1,\,\ldots\,,\,n_k;\,n) = C\,(n_2,\,\ldots\,,\,n_k;\,n) + \\ + C\,(n_2,\,\ldots\,,\,n_k;\,n-1) + \,\ldots\, + C\,(n_2,\,\ldots\,,\,n_k;\,n-n_1)\,.$$

288. Имеются m различных пар одинаковых и k разных одиночных предметов (такая совокупность обозначается $2^m 1^k$). Пусть $C(m, k, n)$ — число их сочетаний с повторениями объёма n. Доказать рекуррентное соотношение для $C(m,\,k,\,n)$:

$$C(m,\,k,\,n) = C(m-1,\,k,\,n) + C(m-1,\,k,\,n-1) + \\ + C(m-1,\,k,\,n-2).$$

289. Вывести рекуррентное соотношение для чисел сочетаний $C(m,\,k,\,n)$ предметов совокупности $2^m 1^k$ (см. задачу *288*) при условии, что из каждой пары либо ни один не входит в сочетание, либо оба входят.

290. Доказать, что в условиях задачи *289* $C(m,\,k,\,n)$ вычисляется по формуле

$$C(m,\,k,\,n) = \sum_s C_m^s C_k^{n-2s}$$

(суммирование ведётся по всем значениям индекса s, при которых входящие в сумму биномиальные коэффициенты имеют смысл).

291. Доказать:

$$C_{n-1}^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{n+m-k-1}^{n}.$$

292. Доказать: а) $C_n^m C_m^p = C_n^{m-p} C_{n-m+p}^p$; б) $C_n^m C_{n-m}^p = C_n^p C_{n-p}^p$; в) $C_n^m C_{n-m}^p = C_n^{m+p} C_{m+p}^m$.

293. С помощью тождества $(1+z)^n\,(1+z)^p=(1+z)^{n+p}$ доказать: а) $\sum\limits_k C_n^{m-k}C_p^k=C_{n+p}^m$; б) $\sum\limits_k C_n^k C_{m-k}^p=C_{n+p}^m$. Суммирование ведётся по всем значениям k, при которых входящие в сумму биномиальные коэффициенты имеют смысл.

294. С помощью тождества $(1-z)^p\,(1-z)^{-n}=(1-z)^{p-n}$ $(p<n)$ доказать:

а) $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\,C_p^k C_{n+m-k}^n=C_{n+m-p}^m$;

б) $\sum\limits_k(-1)^k\,C_p^k C_{n-k}^m=C_{n-p}^{m-p}$ (суммирование ведётся по всем значениям k, при которых входящие в сумму биномиальные коэффициенты имеют смысл).

295. С помощью тождества

$$(1-z)^{-n}\,(1-z)^{-p}=(1-z)^{-n-p}$$

доказать:

а) $\sum\limits_k C_{p+k-1}^k C_{n+m-k}^{m-k}=C_{n+m+p}^m$;

б) $\sum\limits_k C_{p+k-1}^k C_{n-k}^m=C_{n+p}^{n-m}$.

Суммирование ведётся по всем значениям индекса k, при которых входящие в сумму биномиальные коэффициенты имеют смысл.

296. С помощью тождества $(1-z)^m\,(1-z)^{n-m}=(1-z)^n$ $(n<m)$ доказать:

а) $\sum\limits_k(-1)^{p+k}\,C_m^k C_{n+p-k}^n=C_{m-n+1}^p$;

б) $\sum\limits_k(-1)^k\,C_m^{p-k}C_{n+k}^k=C_{m-n-1}^p$.

Суммирование ведётся по всем значениям k, при которых биномиальные коэффициенты имеют смысл.

297. Имеются n разных предметов. Доказать, что их можно раздать m лицам так, чтобы первый участник раздела получил n_1 предметов, второй — n_2, … , m-й — n_m предметов $(n_1+n_2+\ \ldots\ +n_m=n\ )$, если порядок их выдачи не имеет

значения,

$$P\,(n_1,\, n_2,\, \ldots\, ,\, n_m) = \frac{n!}{n_1!\, \ldots\, n_m!}$$

способами.

298. С помощью комбинаторных рассуждений доказать:

$$\frac{n!}{n_1!\, \ldots\, n_m!} = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \, \ldots \, C_{n-n_1-n_2-\, \ldots\, -n_{m-1}}^{n_m} \, ,$$

где $n_1 + n_2 + \, \ldots\, + n_m = n$ (см. задачу *297*).

299. Дано конечное множество A, содержащее n элементов $a_1, \ldots, a_n$. *Мультимножеством мощности* m (*m-мультимножеством*) первичной спецификации $\{a_1^{m_1} a_2^{m_2}\, \ldots\, a_n^{m_n}\}$ $(0 \leq \leq m_i \leq m,\, i = 1, \ldots\, , n;\, m_1 + \ldots + m_n = m)$, порождённым множеством A, называется сочетание объёма m, в котором элемент a_i присутствует в m_i экземплярах.

а) Рассмотрим размещения объёма m, в каждом из которых присутствуют m_i экземпляров элемента a_i. Очевидно, что любому такому размещению соответствует единственное m-мультимножество первичной спецификации $\{a_1^{m_1} a_2^{m_2}\, \ldots\, a_n^{m_n}\}$. Доказать, что каждому m-мультимножеству соответствуют

$$P_m\,(m_1,\, \ldots\, ,\, m_n) = \frac{m!}{m_1!\, \ldots\, m_n!}$$

рассматриваемых размещений;

б) с помощью комбинаторных рассуждений (см. результат задачи *а*) доказать:

$$\sum_{\substack{0 \leq m_i \leq m, \\ m_1 + \, \ldots\, + m_n = m}} \frac{m!}{m_1!\, \ldots\, m_n!} = n^m\, ;$$

в) доказать, что число различных всевозможных m-мультимножеств, порождённых множеством A, равно C_{n+m-1}^m.

300. Разобьём все двоичные векторы длины n на непересекающиеся классы, включив в каждый векторы, переходящие друг в друга перестановкой своих элементов. Например,

$\langle 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ 0\rangle$, $\langle 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\rangle$, $\langle 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1\rangle$ принадлежат одному классу. Найти число таких классов разбиения.

301. *Булевой функцией* n аргументов (n-местной булевой функцией) называется функция со значениями в множестве $\{0;\ 1\}$, аргументы которой также принимают значения 0 или 1. Найти число всех n-местных булевых функций.

302. Булева функция (см. задачу *301*) называется *симметрической*, если её значение не меняется при любой перестановке аргументов. Найти число n-местных симметрических булевых функций (используйте результат задачи *300*).

303. *Элементарной конъюнкцией*, построенной по n переменным, называются конъюнкция некоторых из этих переменных или их отрицаний (все переменные должны быть различными), т.е. выражение вида $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_s}^{\sigma_s}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_s$ — попарно различные индексы из $\{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$, $s \leq n$, $\sigma_i \in \{0,\ 1\}$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ s$, $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$ ($\overline{x}$ — отрицание x).

а) Найти число всевозможных элементарных конъюнкций, построенных по n переменным.

б) *Дизъюнктивной нормальной формой* называется дизъюнкция различных элементарных конъюнкций. Найти число дизъюнктивных нормальных форм от n переменных.

304. Дизъюнктивная нормальная форма, построенная по n переменным (см. задачу *303*) называется *совершенной*, если все входящие в неё элементарные конъюнкции содержат по n переменных. Найти число совершенных дизъюнктивных нормальных форм от n переменных.

305. Рассмотрим множество U всех векторов длины m с координатами из $\{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$. *Расстоянием Хэмминга* между векторами $u,\ v \in U$ называется число несовпадающих координат u и v. Например, расстояние между двоичными векторами $\langle 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0\rangle$, $\langle 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\rangle$ равно 3. Для фиксированного $u \in U$ найти количество векторов, для которых расстояние Хемминга до u равно k.

306. С помощью комбинаторных рассуждений доказать:

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k (n-1)^{m-k} = n^m$$

(см. задачу *305*).

307. *Булевым n-мерным кубом* называется декартова степень B^n, где $B = \{0,\ 1\}$, k-мерной гранью n-мерного куба называется подмножество B^n, в котором двоичные векторы имеют $n-k$ фиксированных координат, а остальные k принимают произвольные значения из B. Грани размерности 0 называются вершинами, размерности 1 — рёбрами. Найти число: а) вершин и рёбер n-мерного булева куба; б) его k-мерных граней.

308. С помощью комбинаторных рассуждений доказать:

а) $\sum\limits_{\substack{0 \le m_i \le n_i, \\ m_1 + \ldots + m_k = m}} C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_k}^{m_k} = C_n^m$;

б) $\sum\limits_{\substack{0 \le m_i \le m, \\ m_1 + \ldots + m_k = m}} C_{n_1+m_1-1}^{m_1} C_{n_2+m_2-1}^{m_2} \ldots C_{n_k+m_k-1}^{m_k} = C_{n+m-1}^{m}$,

где $n_i \in \mathbb{N}_0$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию $n_1 + \ldots + n_k = n$.

309. Дано конечное множество A, содержащее n элементов. Назовём $(n_1, \ldots, n_k)$*-разбиением* A упорядоченный набор множеств $A_1, \ldots, A_k$ такой, что $A_i \subset A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$, причём A_i содержит n_i элементов, $0 \le n_i \le n$, $i = 1, \ldots, k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$. Найти число $(n_1, \ldots, n_k)$-разбиений множества A.

310. С помощью комбинаторных рассуждений доказать:

а) $\sum\limits_{\substack{0 < n_i < n, \\ n_1 + \ldots + n_m = n}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n = 0,\ 1 \le n < m$.

311. С помощью тождества $(1-z)^m (1-z)^{-m} = 1$ доказать:

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m+n-k-1}^{n-k} = 0,\ 1 \le m \le n.$$

312. С помощью тождества

$$(1-z)^m (1-z)^{n-m-1} = (1-z)^{n-1}\,,\ 1 \le n < m,$$

доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_m^k C_{m-k}^{n-k} = 0\,.$$

313. Сколько существует миноров в квадратной матрице размерности n?

314. Сколько существует двоичных матриц размерности m на n, в которых: а) сумма всех элементов равна k; б) сумма элементов каждой строки равна k?

315. Матрица называется *эквидиагональной*, если на её главной диагонали стоят одинаковые элементы. а) Сколько существует квадратных эквидиагональных матриц размерности n, элементами которых являются числа от 1 до k? б) Сколько из них симметрических?

316. Сколько существует двоичных квадратных эквидиагональных (см. задачу *315*) матриц размерности n, у которых: а) сумма всех элементов равна k; б) сумма элементов над главной диагональю равна k, под ней — s?

317. Сколько существует двоичных квадратных матриц размерности n, у которых сумма элементов первого столбца равна 1, второго — 2, третьего — 3 и т.д.?

318. Определим норму вектора $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ следующим образом: $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$. Найти число векторов размерности n с целочисленными координатами, нормы которых: а) не превосходят k; б) равны k.

319. Определим норму прямоугольной матрицы размерности m на n $A = \{a_{i,\,j}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, следующим образом: $\|A\| = \max\limits_{i,\,j} |a_{i,\,j}|$. Найти число матриц с целочисленными координатами, нормы которых: а) не превосходят k; б) равны k.

320. Дано конечное множество A, содержащее n элементов. Рассмотрим отображения $f: A \to A$. Неподвижной точкой f называется элемент $x \in A$ такой, что $f(x) = x$. Найти число отображений, не имеющих неподвижных точек.

321. Решить задачу *320* для биективных (т.е. взаимнооднозначных) отображений A на A.

ОТВЕТЫ

1. C_{n-1}^{r-1} способов, если в каждый цвет должен быть окрашен хотя бы 1 шар, C_{n+r-1}^{r-1} без этого условия.

2. а) n^m; б) $n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \ldots$ функций.

3. а) $12! = 479001600$ способов, если порядок, в котором туристы сидят в лодках, существенен, $\frac{12!}{(3!)^4} = 369600$ в противном случае; б) $12! C_{11}^3 = 79035264000$ и $4^{12} - C_4^1 \cdot 3^{12} + C_4^2 \cdot 2^{12} - C_4^3 \cdot 1^{12} = 14676024$ способов соответственно; в) 7271880 (коэффициент при $\frac{z^{12}}{12!}$ в разложении $\left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{12}}{12!}\right)^4$), порядок туристов в лодках не имеет значения.

5. $\frac{28!}{(7!)^4} = 472518347560000$ способов.

7. Число способов равно коэффициенту при $z^{\frac{p+q+r}{2}}$ многочлена $(1 + z + \ldots + z^p)(1 + z + \ldots + z^q)(1 + z + \ldots + z^r)$.

8. $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

10. б) $e_\Pi(z) = \frac{e^z}{1-z}$.

11. 10586 номеров (коэффициент при $\frac{z^7}{7!}$ в разложении $\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!}\right)^3 \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^7}{7!}\right)^2$).

12. а) 3570 номеров (коэффициент при $\frac{z^7}{7!}$ в разложении $\left(1 + z + \ldots + \frac{z^7}{7!}\right)^7 \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^7}{7!}\right)^3$ минус коэффициент при $\frac{z^6}{6!}$ в разложении $\left(1 + z + \ldots + \frac{z^6}{6!}\right)^7 \left(z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^6}{6!}\right)\left(\frac{z^2}{2!} +\right.$

$+\ldots + \frac{z^6}{6!}\Big)^2$); б) 6735960 (коэффициент при $\frac{z^7}{7!}$ в разложении $\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^{10}$ минус коэффициент при $\frac{z^6}{6!}$ в разложении $(1+z)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^9$).

13. C_{n+m}^n способами.

14. а) $C_7^2 C_5^2 C_9^2 = 7560$; б) $C_7^2 C_5^2 C_6^2 = 3150$ способами.

16. а) 6; б) 96; в) 12; г) 4 решения.

17. $C_{21}^3 - C_4^1 C_{11}^3 = 670$ номеров.

18. $8! = 40320$ способами.

20. а) $C_6^3 = 20$; б) $C_{12}^5 = 792$ способами.

21. $2^{10} = 1024$ способами.

22. $4\cdot 5^2\cdot(2+4)\cdot 1 + 4\cdot 5\cdot 3\cdot(1+2+3+4)\cdot 10 + 4\cdot 5\cdot 3\cdot(1+2+3+4)\times$ $\times 100 + 5^2\cdot 3\cdot(1+2+3+4)\cdot 1000 = 816600$.

23. $8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2 = 204$ квадрата.

24. 5 погремушек.

25. $(n!)^2$ маршрутов.

26. а) $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$; б) $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

27. $C_9^6 C_7^4 C_6^4 = 44100$ способами.

28. C_n^k слов.

29.2^{n-1} слов.

30. $C_n^k\,(n-k)^{d-1}$ слов.

35. а) 686; б) 778; в) 609; г) 666 чисел.

36. а) 144; б) 83; в) 271 число.

37. $\frac{n(n+1)}{2}$ прямоугольников.

38. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ параллелепипедов.

40. а) mn точек; б) на $(m+1)(n+1)$ частей.

41. $\frac{mn(m+n-2)}{2}$ треугольников.

42. $2^{32} = 4294967296$ человек.

43. $\frac{A_n^k}{2k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2k}$ ломаных.

44. $10^3\cdot 30^3 = 27000000$ номеров.

45. $2^5 = 32$ символа.

46. $1+4+4^2+4^3+4^4 = 341$ кодовое слово.

47. $C_{10}^5 A_{14}^5 = 60540480$ способами.

48. $(15!)^2 \approx 1,7100122527241994\cdot 10^{24}$ способами.

49. а) 2^{mn}; б) $A_{2^n}^m$; в) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ матриц.

50. а) $A_{18}^5 = 1028160$; б) $18^5 = 1889568$; в) $C_{18}^5 = 8568$ способами.

51. 147 способами.

52. а) $C_{n+9}^n - C_{n+8}^{n-1}$; б) $C_{n+9}^n - 1$ чисел.

53. 20 словарей.

54. $C_{n-k(m-1)+m}^m$ последовательностей.

55. 16 способами.

56. а) $C_{36}^5 = 376992$ выборок; б) в 288 выборках; в) $4C_9^5 = 504$; г) $C_{32}^5 = 201376$; д) $C_4^3C_{32}^2 + C_4^4C_{32}^1 = 2016$; е) в $C_4^1C_9^2 \times \left(C_9^1\right)^3 = 104976$ выборках.

57. а) 6; б) 7; в) 4; г) 10 членов.

58. а) $x^4+y^4+z^4+4x^3y++4xy^3+4y^3z+4yz^3+4x^3z+4xz^3+6x^2y^2+6x^2z^2+6y^2z^2+12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2$; б) $x^5-y^5+32z^5-5x^4y+5xy^4+10x^4z+80xz^4+10y^4z-80yz^4-120x^2yz^2+60x^2y^2z+120xy^2z^2+10x^3y^2-10x^2y^3+40x^3z^2+80x^2z^3-40y^3z^2+80y^2z^3-40xy^3z-40x^3yz-160xyz^3$; в) $x^5+243y^5-32z^5+15x^4y+405xy^4+80xz^4-10x^4z-810y^4z+240yz^4+90x^3y^2+270x^2y^3+40x^3z^2-80x^2z^3+1080y^3z^2-720y^2z^3-1080xy^3z-120x^3yz-480xyz^3+360x^2yz^2-540x^2y^2z+1080xy^2z^2$; г) $1+6x-6y+15x^2+15y^2-30xy+20x^3-20y^3-60x^2y+60xy^2+15x^4+15y^4-60x^3y-60xy^3+90x^2y^2+6x^5-6y^5-30x^4y+30xy^4+60x^3y^2-60x^2y^3+x^6+y^6-6x^5y-6xy^5+15x^4y^2+15x^2y^4-20x^3y^3$.

59. а) $-140544, 20304$; б) $9009, 93094$; в) $0, 98112$; г) $-124032, -309775$; д) $0, 0$.

60. а) 20; б) -59; в) 2017; г) 1222; д) 29877; е) 1; ж) -106; з) 8205; и) -4799.

61. а) $n+1$, если n чётное, 0, если n нечётное; б) 4; в) 4; г) $\left[\frac{n}{k}\right]+1$.

62. а) $x^{16}+1820x^{11}+12870x^6+1820x+\frac{1}{x^4}$; б) $x^4+\frac{59136}{x}+\frac{4096}{x^6}$; в) $x^7-34359738368x^5$; г) $1+84x+658x^2+336x^3+x^4$; д) $32-40x-80x^2+10x^3+80x^4-40x^6+10x^8-x^{10}+\frac{40}{x}$; е) $1-\frac{45}{x}-\frac{180}{x^2}+\frac{64}{x^3}$.

63. 5 девушек.

64. а) 17; б) 7; в) 7; г) 2 студента.

65. а) 5; б) 5; в) 6; г) 5.

66. 7.

67. C_n^4 пирамид.

68. На n^2 частей.

69. C_{n+r-1}^r решений.

70. $\sum\limits_{k=0}^{n/2} C_{2k+2}^{2k}$, если n чётно, $\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{2k+3}^{2k+1}$, если n нечётно.

71. $\frac{2^n+4^n}{2}$ размещений.

72. $6!-4!-5!+3!=582$ перестановки.

73. а) $6^4-3\cdot5^4+3\cdot4^4-3^4=108$; б) $6^5-3\cdot5^5+3\cdot4^5-3^5=1230$. В общем случае $6^r-3\cdot5^r+3\cdot4^r-3^r$ размещений.

74. На $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей.

75. а) $a_n = C_1 + C_2\,(-1)^n + C_3\cdot 2^n + C_4\,(-2)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; б) $a_n = C_1 + C_2\cdot 2^n + C_3\cdot 3^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; в) $a_n = C_1\,(-1)^n + 2^{\frac{n}{2}}\,(C_2\times \times\cos\frac{\pi n}{4} + C_3\sin\frac{\pi n}{4})$, $n\in\mathbb{N}_o$; г) $a_n = (C_1+C_2n)\,(-1)^n + (C_3+ +C_4n)\,(-3)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; д) $a_n = (C_1+C_2n)\cdot 2^n + C_3\cos\frac{\pi n}{2} + C_4\times \times\sin\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{N}_o$; е) $a_n = \left(C_1+C_2n+C_3n^2\right)\cdot 3^n + C_4\,(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$.

76. а) $a_n = C_1 + C_2n + C_3\,(-1)^n + \frac{n^2}{2}$, $n\in\mathbb{N}_o$; б) $a_n = C_1+ +C_2\,(-5)^n + \frac{2^{n+2}}{49}\,(7n-2)$, $n\in\mathbb{N}_o$; в) $a_n = 4^n\left(C_1\cos\frac{\pi n}{2} + +C_2\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{n^2+n-1}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}_o$; г) $a_n = C_1 + \left(C_2 + \frac{9}{8}n + \frac{3}{4}n^2\right)\times \times(-3)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; д) $a_n = C_1 + C_2\,(-1)^n + C_3\cdot 2^n + C_4\cdot 3^n + \frac{1}{15}\times \times(-2)^{n+3}$, $n\in\mathbb{N}_o$; е) $a_n = \left(C_1 + C_2n + \frac{1}{2}\,(n+3)n^2\right)(-2)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$.

77. а) $a_n = 14\,(-1)^n - 22\,(-2)^n + 9\,(-3)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; б) $a_n = 2\times \times(n+1)\cdot 3^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_o$; в) $a_n = 2^n\left(2\sin\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}_o$; г) $a_n = 2^n\left(1-2n-\cos\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in\mathbb{N}_o$; д) $a_n = 2^n\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi n}{6} + +\sqrt{3}\sin\frac{5\pi n}{6}\right)$, $n\in\mathbb{N}_o$; е) $a_n = \left(1-n+n^2\right)2^n$, $n\in\mathbb{N}_o$.

78. а) $a_n = \frac{8}{75}\cdot 4^n + \frac{26}{15}\,(-2)^n + \left(\frac{29}{25} - \frac{n}{5}\,(n+10)\right)(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; б) $a_n = 2^{\frac{n}{2}+3}\left(57\sin\frac{\pi n}{4} - 18\cos\frac{\pi n}{4}\right) - 2^{n+2}\left(2n^2+12n+ +25\right)$, $n\in\mathbb{N}_o$; в) $a_n = \frac{1}{5}\cdot 2^{\frac{3n}{2}}\left(17\cos\frac{3\pi n}{4} + 104\sin\frac{3\pi n}{4}\right) - -2^n\left(5n^2+12n+\frac{22}{5}\right)$, $n\in\mathbb{N}_o$; г) $a_n = n(n-2)\cdot 5^n$, $n\in\mathbb{N}_o$; д) $a_n = -\frac{4}{13}\,(-2)^n + 3^n\left(\frac{9}{325}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{653}{1950}\sin\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{10}\,n + \frac{7}{25}$,

$n \in \mathbb{N}_0$; е) $a_n = \frac{1}{125}\left(4^n(101-60n)+(-1)^n(265n-226)\right)$, $n \in$ $\in \mathbb{N}_0$; ж) $a_n = \frac{1}{6}\cdot 2^n + \left(4n - \frac{23}{2}\right)(-2)^n + \frac{40}{3}(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

79. а) $9\cdot 10^3 \cdot 3! = 54000$; б), в) $9\cdot 10^3 = 9000$; г) $\left(C_{12}^3 - C_{11}^2\right)\times$ $\times C_{12}^3 \cdot 10 = 363000$ номеров.

80. $2010^2 + 2011^2 = 8084221$ решение.

81. $9^8 = 43046721$ чисел.

82. $\left(C_8^3\right)^2 3! = 18816$ способами.

83. 3^n способами.

84. $C_8^2 = 28$ способами.

85. $3\cdot 5 + 7\cdot 6 + 4\cdot 5\cdot 6 = 177$ способами.

86. $(n-1)n^{k-1}$ чисел.

87. 12 и 6 способами.

88. а) $33^6 - 32^6 = 217726145$; б) $33^6 - 2\cdot 32^6 + 31^6 = 31488002$; в) $33^6 - 3\cdot 32^6 + 3\cdot 31^6 - 30^6 = 3753540$ слов.

89. m^{n+1} способами.

90. $9^2\cdot 8\cdot 7 = 4536$ чисел.

91. $9^2\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 27216$ чисел.

92. В $5\cdot 10^8$ числах.

93. а) $k(k-1)$; б) k^2 способами.

94. а) $6!\cdot 14!\cdot 6! = 4519322615808\cdot 10^4$; б) $\frac{26!}{(6!)^2\cdot 14!} = 8923714800$; в) $3! = 6$ способами.

95. $C_{14}^8\left(C_{14}^8 - 1\right) = 9015006$ способами.

96. $13^4 = 28561$ способом.

97. $C_8^3 C_6^3 = 1120$ способами.

98. $C_{14}^5 - C_6^5 - C_8^5 - C_8^4 C_6^1 = 1520$ способами.

99. C_{n+m-1}^n раз.

100. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-k+1}^k$ способами.

101. $\frac{n}{k}\, C_{n-k-1}^{k-1}$ способами.

102. $\frac{n}{k}\, C_{n-k-1}^{k-1}$ k-угольников.

103. $C_{n-s(k+1)}^k$ способами.

104. $\sum\limits_{1\le m,\, n\le 15} \frac{24!}{m!n!(24-m-n)!}\, C_{14}^{m-1} C_{14}^{n-1}$ расположений. Сум-

мирование ведётся по всем упорядоченным парам целых неотрицательных индексов m, n, для которых $m + n \le 24$.

105. $8! - 3 \cdot 7! + 3 \cdot 6! = 27360$ способами.

106. $C_n^3 + C_n^4 + \ \ldots \ + C_n^n$ многоугольников.

107. $6^n - 4 \cdot 5^n + 6 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 2^n$ чисел.

109. В $\frac{6!}{4! \cdot 2!}\, 5^4 \cdot 5^2 - \frac{5!}{3! \cdot 2!}\, 5^3 \cdot 5^2 = 203125$ числах.

110. $\frac{A_n^2 \left(A_n^2 - 1\right)\left(A_n^2 - 2\right)}{3!} = \frac{n(n-1)(n^2-n-1)(n^2-n-2)}{6}$ троек.

111. $\frac{A_n^{2k}}{2^k \cdot k!} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-2k+1)}{2^k \cdot k!}$ способами.

112. а) $A_{56}^6 - 8 \cdot A_{35}^6 + C_8^2 A_{20}^6 = 14507680320$; б) $A_{56}^6 - 8 \cdot A_{21}^6 + C_8^2 \cdot 6! = 23064733440$ способами.

114. $C_n^k - C_{n-s}^{k-s}$ способами.

115. а) $C_{10}^3 \cdot 3^7 = 262440$; б) $C_{10}^3 \cdot 3^7 + C_{10}^4 \cdot 3^6 + C_{10}^5 \cdot 3^5 = 476766$; в) $C_{10}^8 \cdot 3^2 + C_{10}^9 \cdot 3 + 1 = 436$ чисел.

116. 3, 9, 27, 79, 221, 582 способами (коэффициент при $\frac{z^n}{n!}$ в разложении $\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ \ldots \ + \frac{z^5}{5!}\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}\right)^2$).

117. $2 \cdot 10^3 \cdot 23^3 = 24334000$ слов.

118. $2A_{26}^4 A_{26}^3 = 11194560000$ способами; в $A_{26}^4 A_{26}^3 = 559728 \times 10^4$ случаях.

119. а) $7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 = 33600$; б) 244 (коэффициент при z^5 в разложении

$$\left(1 + z + \ \ldots \ + z^6\right)\left(1 + z + \ \ldots \ + z^4\right)^2\left(1 + z + z^2 + z^3\right) \times \\ \times \left(1 + z + \ \ldots \ + z^7\right)\left(1 + z + \ \ldots \ + z^5\right));$$

в) $C_6^3 = 20$ способами.

120. $C_{11}^6 A_{26}^6 A_{26}^5 = 604521151153920000$ способами.

121. $4! \cdot 3 = 72$ способами.

122. $33^6 - 3 \cdot 32^6 + 3 \cdot 31^6 - 30^6 = 3753540$ слов.

123. $3^5 = 243$ слова.

124. а) $C_s^1 C_{n-s}^2 + C_s^3$; б) $C_{n-s}^3 + C_s^2 C_{n-s}^1$ способами.

125. а) 360 (коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в разложении $(1 + z)\left(1 + z + \frac{z^2}{2!}\right)^3$); б) 440 (коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в разложении $(1 + z) \times \left(1 + z + \frac{z^2}{2!}\right)^2\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}\right)$) чисел.

126. $12!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{12!}\right)=176214841$ способом.

127. $10!\left(10!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{10!}\right)\right)^9\approx 4,8863\cdot 10^{61}$ способами.

128. $(n!)^2\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$ способами.

129. $3C_n^3+n^3$ троек.

130. C_n^3 треугольников.

131. 2^{n-1} способами.

132. $33!-31!-30!-2\cdot 29!+28!+2\cdot 27!+2\cdot 26!+25!-2\cdot 24!-22!-23!+20!\approx 8,674812171260818\cdot 10^{36}$ перестановок.

133. В 19383 сочетаниях (коэффициент при z^6 в разложении $\left(1+z+z^2\right)^{14}$).

134. mn треугольников.

135. $C_n^2(m+k)+C_m^2(n+k)+C_k^2(m+n)+mnk$ треугольников.

136. $C_n^3m+C_m^3n$ пирамид.

137. $C_n^2C_m^2$ пирамид.

138. $4C_n^3$ окружностей.

139. $C_{n+m}^2-C_n^2$ прямых.

140. а) m^n; б) $m^n-m\,(m-1)^n+C_m^2\,(m-2)^n-C_m^3\,(m-3)^n+\ldots=\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\,C_m^k\,(m-k)^n$; в) $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$; г) A_{n+m-1}^n; д) $n!\times C_{n-1}^{m-1}$; е) C_{n+m-1}^{m-1} способами.

141. а) n^n; б) $(n-1)^n$; в) C_{2n-1}^{n-1} способами.

142. $C_{m+2}^2C_{n+2}^2$ четырёхугольников.

143. $(n-1)^n$ распределений.

144. $C_{99}^3=156849$ способами.

145. $C_{14}^4C_{10}^4C_{12}^4=104053950$ способами.

146. $C_5^3C_6^3=200$ способами.

147. а) $\frac{12!}{(4!)^3}=34650$; б) $\frac{12!}{(4!)^3\cdot 3!}=5775$ способами.

148. а) $\frac{14!}{(5!)^2\cdot 4!}=252252$; б) $\frac{14!}{(5!)^2\cdot 4!\cdot 2!}=126126$ способами.

153. а) 2^{n^2}; б) $2^{n(n-1)}$ рефлексивных, $2^{n(n-1)}$ иррефлексивных; в) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ симметричных, $2^n\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ антисимметричных; г) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; д) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ бинарных отношений.

154. 2^{mnk} тернарных отношений.

155. а) $2^{n^2(n-1)}$; б) $2^{n(n-1)(n-2)}$; в) $2^{n(3n-2)}$ тернарных отношений.

156. а) $A_{22}^{18} \approx 4,68333 \cdot 10^{19}$; б) $18!\,C_{17}^{4} \approx 1,523764 \cdot 10^{19}$; в) $18!\,C_{12}^{4} \approx 3,16917498433536 \cdot 10^{18}$ способами.

157. $1 + C_8^1 A_3^1 + C_8^2 A_4^2 + C_8^3 A_5^3 + \ \ldots \ + C_8^8 A_{10}^8 = 4000441$ способом.

158. $\frac{N!}{N_1! \ldots N_k!}\, C_{N+n-1}^{n-1}$ способами.

159. $\frac{N!}{N_1! \ldots N_k!}\, C_{N-1-n(s-1)}^{n-1}$ способами.

160. $\left(\frac{4!}{2!}\right)^2 \cdot \frac{6!}{3!} \cdot \left(\frac{5!}{2!}\right)^2 \cdot 11! = 2483144294400000$ способами.

161. $3^n + 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_{n-1}^2 + \ \ldots \ = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 3^{n-k} C_{n-k+1}^k$ размещений.

162. а) $C_8^2 \cdot 3^3 = 756$; б) $3! \cdot 3 + 3! + 3 = 27$ способами.

163. а) $a_n = (C_1 + C_2 n)(-1)^n$, $b_n = \left(C_1 + \frac{1}{2}C_2 + C_2 n\right) \times (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; б) $a_n = (C_1 - C_2)\cos\frac{\pi n}{2} + (C_1 + C_2)\sin\frac{\pi n}{2}$, $b_n = C_1 \cos\frac{\pi n}{2} + C_2 \sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$; в) $a_n = C_1 \cdot 3^n - 4C_2(-2)^n$, $b_n = C_1 \cdot 3^n + C_2(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; г) $a_n = 2C_1 \cdot 5^n - \frac{4}{3}C_2(-5)^n$, $b_n = C_1 \cdot 5^n + C_2(-5)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; д) $a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left((2C_1 - C_2)\cos\frac{3\pi n}{4} + (C_1 + 2C_2)\sin\frac{3\pi n}{4}\right)$, $b_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi n}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$; е) $a_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4}\right)$, $b_n = 2^{\frac{n}{2}}\left((C_2 - 2C_1) \times \cos\frac{\pi n}{4} - (C_1 + 2C_2)\sin\frac{\pi n}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

164. а) $a_n = 3^{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$, $b_n = 3^n\left(\cos\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$; б) $a_n = -n(-2)^n$, $b_n = (n+2)(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; в) $a_n = (-5)^n$, $b_n = -(-5)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; г) $a_n = -13 \cdot 2^n \sin\frac{\pi n}{6}$, $b_n = 2^n\left(2\sqrt{3} \times \sin\frac{\pi n}{6} - \cos\frac{\pi n}{6}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$; д) $a_n = (-7)^n - 2^n$, $b_n = -2^{n+1} - (-7)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

165. а) $a_n = -C_1 - \frac{5}{2}C_2 \cdot 4^n - 4n - 1$, $b_n = C_1 + C_2 \cdot 4^n + 4n$, $n \in \mathbb{N}_0$; б) $a_n = C_1 + C_2 n + \frac{3}{2}n(n-1)$, $b_n = C_1 + C_2\left(n - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}n \times (2n-3)$, $n \in \mathbb{N}_0$; в) $a_n = C_1 \cdot 6^n + C_2(-5)^n + \frac{1}{14}(n-59)(-1)^n$, $b_n = C_1 \cdot 6^n - \frac{9}{2}C_2(-5)^n + \left(\frac{9}{28}n + 11\right)(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$; г) $a_n = 2^{-n} \times \left(C_1 \cos\frac{\pi n}{2} + C_2 \sin\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{25}(5n-3)$, $b_n = 2^{1-n}\left((C_1 + C_2) \times \cos\frac{\pi n}{2} + (C_2 - C_1)\sin\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{25}(15n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

166. а) $a_n = 3 - 12n$, $b_n = -12n$, $n \in \mathbb{N}_0$; б) $a_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \times$ $\times (-1)^n + 3n + \frac{1}{2}$, $b_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)(-1)^n + n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$; в) $a_n = 2^{\frac{n}{2}} \times$ $\times \left(\frac{17}{10}\cos\frac{3\pi n}{4} - \frac{3}{5}\sin\frac{3\pi n}{4}\right) + \frac{3}{10}$, $b_n = -\frac{1}{5}\left(2^{\frac{n}{2}}\left(6\cos\frac{3\pi n}{4} + 17\times\right.\right.$ $\left.\left.\times \sin\frac{3\pi n}{4}\right) - 6\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$; г) $a_n = 2(n-4)(4^n - 3^n)$, $b_n = 3^n \times$ $\times (5 - 2n) + 4^{n+1}(n-2)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

167. а) $\frac{32!}{(4!)^8} \approx 2,390461 \times 10^{24}$; б) $9 \cdot \frac{32!}{(4!)^8} \approx 2,151415 \times 10^{25}$; в) $\frac{33!}{1!(4!)^8} \approx 7,88852 \times 10^{25}$; г) $A_9^2 C_4^2 \frac{32!}{(2!)^2(4!)^7} \approx 6,19607 \times 10^{27}$ способами.

168. $3C_{2n}^n \cdot 2^n$ способами.

169. $3C_{3n}^n \cdot 2^{2n}$ способами.

170. $\sum\limits_{q=0}^{k} C_s^q A_k^q$, если $s \le n$, $\sum\limits_{q=s-n+1}^{k} C_s^q A_k^q$, если $s > n$, способами.

171. $2^5 - 1 = 31$ способом.

172. 7500 (рекуррентное соотношение $F_n = F_{n-1} + F_{n-3} +$ $+ F_{n-6} + F_{n-10}$).

173. а) 32; б) 2^{n-1} способами.

174. а) 3; б) 14 способами.

175. 3 способами.

176. 4 способами.

177. а) 80; б) 101111 способами (рекуррентное соотношение $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-5}$).

178. $C_{13}^3 = 286$ способами.

179. $\frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2\right)$ частей.

180. $n! - C_k^1(n-1)! + C_k^2(n-2)! - \ldots + (-1)^k (n-k)!$ перестановок.

181. $C_m^k A_n^k$ способами.

182. $(n-1)!\left(n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$ перестановок.

183. $11!\left(12 - \frac{11}{1!} + \frac{10}{2!} - \frac{9}{3!} + \ldots - \frac{1}{11!}\right) = 190899411$ способами.

184. $7! - 3 \cdot 2! \cdot 6! + 3 \cdot 2! \cdot 5! = 1440$ перестановок.

185. $18! - C_4^2 \cdot 2! \cdot 17! + C_4^3 \cdot 3! \cdot 16! - 4! \cdot 15! = 2604887341056000$ способами.

186. а) $C_n^k - C_k^1 C_{n-1}^{k-1} + C_k^2 C_{n-2}^{k-2} - \ldots$; б) $C_k^r \left(C_{n-r}^{k-r} - C_{k-r}^1 \times \times C_{n-r-1}^{k-r-1} + C_{k-r}^2 C_{n-r-2}^{k-r-2} - \ldots\right)$; в) $C_n^k - 1$ ответов.

187. $C_6^r \left(C_{49-r}^{6-r} - C_{6-r}^1 C_{48-r}^{5-r} + C_{6-r}^2 C_{47-r}^{4-r} - \ldots\right)$; 6096454 ответов при $r = 0$; 5775588 при $r = 1$; 1851150 при $r = 2$; 246820 при $r = 3$; 13545 при $r = 4$; 258 при $r = 5$; 1 при $r = 6$.

188. $C_8^4 - 1 = 69$ ответов.

189. $(2n)! - C_n^1 \cdot 2!(2n-1)! + C_n^2 \cdot (2!)^2 (2n-2)! - \ldots + (-1)^n (2!)^n \times \times n!$ перестановок.

190. $\frac{(n-1)!}{2}$ ломаных.

191. $a_n = a_{n-n_1} + a_{n-n_2} + \ldots + a_{n-n_m}$.

193. а) $9 \cdot 7 \cdot 4^2 = 1008$; б) 104 способами (коэффициент при z^{10} в разложении $(1 + z + z^2 + \ldots + z^8)(1 + z + \ldots + z^6) \times \times (1 + z + z^2 + z^3)^2$.

194. $(n-1)!$ способами.

195. $\frac{(n-1)!}{2}$ способами.

196. $\frac{4!}{12} = 2$ способами.

197. $\frac{6!}{24} = 30$ способами.

198. $5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 9000$ способами.

199. $n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - C_n^3(n-3)! + \ldots + (-1)^n \cdot 1$ способами.

200. $C_3^2 \left(C_5^2\right)^2 = 300$ способами.

201. C_{m+n}^n способами.

202. а) $C_{19}^7 = 50388$; б) $C_8^6 = 28$ способами.

203. $\frac{10!}{2!} - C_4^2 \cdot 2! \cdot \frac{9!}{2!} + C_4^3 \cdot 3! \cdot \frac{8!}{2!} - 4! \cdot \frac{7!}{2!} = 60480$ способами.

206. Производящая функция сочетаний:

$$\left(x_1^2 z^2 + x_1^3 z^3 + \ldots\right)\left(x_2^2 z^2 + x_2^3 z^3 + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(1 + x_3 z + x_3^2 z^2 + x_3^3 z^3 + \ldots\right)\left(1 + x_4 z + x_4^2 z^2 + x_4^3 z^3\right) =$$
$$= \frac{x_1^2 x_2^2 z^4 \left(1 + x_4 z + x_4^2 z^2 + x_4^3 z^3\right)}{(1 - x_1 z)(1 - x_2 z)(1 - x_3 z)}.$$

Производящая функция чисел сочетаний: $\frac{z^4\left(1+z+z^2+z^3\right)}{(1-z)^3}$; 52 сочетания объёма 9.

207. Производящая функция сочетаний:

$$\left(1+x_1^2z^2+x_1^4z^4+\ \ldots\right)\left(x_2z+x_2^3z^3+x_2^5z^5+\ \ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+x_3z+x_3^2z^2+x_3^3z^3+\ \ldots\right)\left(x_4^2z^2+x_4^3z^3+x_4^4z^4+x_4^5z^5\right)=$$
$$=\frac{x_2x_4^2z^3\left(1+x_4z+x_4^2z^2+x_4^3z^3\right)}{\left(1-x_1^2z^2\right)\left(1-x_2^2z^2\right)\left(1-x_3z\right)}\,.$$

Производящая функция чисел сочетаний: $\frac{z^3\left(1+z+z^2+z^3\right)}{\left(1-z^2\right)^2(1-z)}$; 5 сочетаний объёма 4, 18 сочетаний объёма 7, 32 сочетания объёма 9.

208. $3^n-2^{n+1}+1+n\left(1-2^{n-1}\right)$ способов.

209. $5^2\cdot 2\cdot 4=200$ способами.

210. Производящая функция сочетаний:

$$\left(1+x_1z+x_1^2z^2+x_1^3z^3\right)\left(x_2z+x_2^2z^2+x_2^3z^3\right)\times$$
$$\times\left(1+x_3z+x_3^2z^2+x_3^3z^3+x_3^4z^4\right)=$$
$$=x_2z\left(1+x_1z+x_1^2z^2+x_1^3z^3\right)\left(1+x_2z+x_2^2z^2\right)\times$$
$$\times\left(1+x_3z+x_3^2z^2+x_3^3z^3+x_3^4z^4\right).$$

Сочетания объёма 6: {1, 2, 6, 6, 6, 6}, {1, 1, 1, 2, 2, 2}, {2, 2, 2, 6, 6, 6}, {2, 2, 6, 6, 6, 6}, {1, 2, 2, 6, 6, 6}, {1, 1, 2, 6, 6, 6}, {1, 1, 2, 2, 6, 6}, {1, 1, 1, 2, 6, 6}, {1, 1, 1, 2, 2, 6}, {1, 2, 2, 2, 6, 6}, {1, 1, 2, 2, 2, 6}.

Производящая функция чисел сочетаний: $z\left(1+z+z^2+z^3\right)\left(1+z+z^2\right)\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)$; 11 сочетаний объёма 5, 9 сочетаний объёма 7, 3 сочетания объёма 9.

211. $1+7+27+70+105+105=315$ перестановок (экспоненциальная производящая функция $(1+z)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\right)$).

213. Экспоненциальная производящая функция:

$$(1+z)^{n_1}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^{n_2}\times$$
$$\times\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)^{n_3}\ldots\left(1+x+\frac{z^2}{2!}+\ \ldots\ +\frac{z^k}{k!}\right)^{n_k}.$$

216. 4636 чисел (коэффициент при $\frac{z^7}{7!}$ в разложении $\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^2$ минус коэффициент при $\frac{z^6}{6!}$ в $\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(z+\frac{z^2}{2!}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^2$).

217. 224 способами (коэффициент при $\frac{z^8}{8!}$ в разложении $\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\right)\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(\frac{z^2}{2!}+\ \ldots\ +\frac{z^6}{6!}\right)$ минус коэффициент при $\frac{z^7}{7!}$ в $\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\right)\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(z+\frac{z^2}{2!}+\ \ldots\ +\frac{z^5}{5!}\right)$).

218. 49 способами.

219. 4 сочетания.

220. $\frac{1}{4}\left(2^n-(-2)^n\right)$ размещений.

221. 65518 (экспоненциальная производящая функция чисел распределений: $(e^z-1)(e^z-z-1)$).

222. $64!C_{63}^2\approx 2,478101785590317\cdot 10^{92}$ способами.

223. $5!=120$ способами.

224. $\frac{21!}{5!\cdot 7!\cdot 9!\cdot 42}=5542680$ ожерелий.

225. 16 делителей.

226. $\left(1+z+z^2+\ \ldots\ +z^k\right)^n$; $(k+1)^n$ сочетаний.

227. 12 студентов.

228. 0.

229. A_n^2, A_n^2-2n векторов.

230. а) $2^n\left(\frac{5}{2}n-3\right)+3$; б) -4 при $n=1$, 0 при $n>1$; в) $\frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}$; г) $\frac{2^n(n-1)+1}{n+1}$; д) $\frac{2^n\left(n^2+n+2\right)-1}{(n+1)(n+2)}$.

231. 2^{2010}.

232. $\left(\frac{k}{2}\right)^n$, если k чётное; $\left(\frac{k^2-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$, если k нечётное, n чётное; $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, если k, n нечётные.

233. $\left(A_{k/2}^{n/2}\right)^2$, если k, n чётные; $A_{k/2}^{(n+1)/2}\cdot A_{k/2}^{(n-1)/2}$, если k чётное, n нечётное; $A_{(k+1)/2}^{n/2}\cdot A_{(k-1)/2}^{n/2}$, если k нечётное, n чётное; $A_{(k+1)/2}^{(n+1)/2}\cdot A_{(k-1)/2}^{(n-1)/2}$, если k, n нечётные.

234. а) $\frac{5z}{1-10z}$; б) $-\frac{6z}{1+18z}$; в) $-\frac{z}{(1+z)^2}$; г) $\frac{5z(1+5z)}{(1-5z)^3}$; д) $\frac{1}{1+12z}$; е) $\frac{5z}{(1-5z)^2}+\frac{1}{1+18z}$; ж) $\frac{1}{1-mz}$; з) $1-\frac{1}{(1+z)^k}$; и) $\frac{6}{(1-z)^4}$; к) $\frac{24}{(1+z)^5}$; л) $\frac{m!}{(1-z)^{m+1}}$; м) $\frac{\alpha^s z^s}{(1-\alpha z)^{s+k+1}}$.

235. а) $e^{\frac{3}{49}z}-\frac{1}{2}e^{-z}$; б) $e^z\left(4ze^{3z}+3\right)-3$; в) $e^{-z}(2z+1)-1$; г) $\frac{e^{-3z}+3z-1}{9z^2}$; д) $z^m e^z$; е) $\frac{e^{2z}-2z^2-2z-1}{8z^3}$.

236. 16, 47, −39.

237. $\frac{6}{121}$, $\frac{2}{121}$.

238. 0, −2, −3, −3.

239. 13, 11, −71.

240. $1+2z+2z^2-3z^3-13z^4-10z^5+31z^6$.

241. $1-z+12z^2-27z^3+163z^4$.

242. $\frac{1}{17}-\frac{1}{17}z-\frac{10}{289}z^2-\frac{8}{289}z^3$.

243. $1-z+z^2-2z^3+3z^4+3z^5-8z^6$.

244. $f_0=1$, $f_n=4n$, $n\in\mathbb{N}$.

245. а) $1-4z+7z^2+8\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n z^n$; б) $1+4z+7z^2+8\sum\limits_{n=3}^{\infty}z^n$; в) $\frac{1}{k}-\frac{k+1}{k^2}z+\frac{1}{k^3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-2}z^n$, $k\neq 1$; $1-2z+z^2$, $k=1$; г) $\frac{1}{6}\left(1+4z+6z^2+4z^3+z^4\right)$; д) $\frac{1}{k!}\sum\limits_{n=0}^{k+1}(-1)^n C_{k+1}^n z^n$.

246. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot n!\left(\sum\limits_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}\right)\frac{z^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^{n+1}}\cdot n!\left(\sum\limits_{s=0}^{n}\frac{k^s}{s!}\right)\times$ $\times\frac{z^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}n!\left(\sum\limits_{s=0}^{n}\frac{k^s}{s!}\right)\frac{z^n}{n!}$; г) $\frac{1}{k!}\sum\limits_{n=0}^{k+1}(-1)^n\frac{(k+1)!}{(k+1-n)!}\frac{z^n}{n!}$.

247. Нет.

248. Нет.

249. а) $6^5\cdot 3=23328$; б) $6^5\cdot 1=7776$; в) $6^5\cdot 2=15552$ числа.

250. а) $2+2^2+2^3+\ldots+2^9 = 1022$; б) $3+3^2+\ldots+3^9 = 29523$; в) $4+3\cdot 4+3\cdot 4^2+\ \ldots\ +3\cdot 4^8 = 262144$ числа.

251. а) 270 (коэффициент при $\frac{z^4}{4!}$ в $(1+z)^3\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^2$); б) 1044 числа (коэффициент при $\frac{z^4}{4!}$ в $(1+z)^6\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\right.$ $\left.+\frac{z^3}{3!}\right)$ или $A_6^4+C_6^3\cdot 4!+C_6^2\cdot\frac{4!}{2!}+6\cdot 4$).

252. а) 820 коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в $(1+z)^3\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)(1+$ $+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\Big)$); б) 4020 (коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в $(1+z)^6\,(1+z+$ $\left.+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)$ или $A_6^5+C_6^4\cdot 5!+C_6^3\cdot\frac{5!}{2!}+C_6^2\cdot\frac{5!}{3!}+6\cdot 5$); в) 2040 коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в $(1+z)^4\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^2$).

253. 74 способами.

254. 3 способами.

255. $\sum\limits_{s=n-k}^{\left[\frac{2n-k}{2}\right]}\frac{n!}{s!(2(n-s)-k)!(k-n+s)!}$ сочетаний.

256. $n!C_{n-s-1}^n$ способами.

257. $\frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$ способами.

258. $\frac{1}{2}\left(\frac{8!}{2!}-7!\right) = 7560$ способами.

259. $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}-\frac{7!}{2!\cdot 2!}+\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 600$ способами.

260. $\frac{7!}{2} = 2520$ перестановок.

261. а) $4!\cdot 3 = 72$; б) 36 способами.

262. 1010 способами. Производящая функция:

$$\frac{1}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)\,(1-z^5)\,(1-z^{10})\,(1-z^{15})\,(1-z^{20})}.$$

263. 2 способами.

264. 41 способом.

265. а) 26; б) $C_{26}^3 = 2600$; в) 20 способами.

266. $4\left(C_n^1\right)^3+4\cdot 3\cdot C_n^2C_n^1 = 2n^2(5n-3)$ треугольников.

267. $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\,C_m^k\,(m-k)^n$ размещений.

268. а) 4555 (коэффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в $(1+z)^2\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)\times$ $\times\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)^2\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\right)$); б) 1330 слов (ко-

эффициент при $\frac{z^5}{5!}$ в $(1+z)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)^2(z+$ $+\frac{z^2}{2!}\Big))$.

269. 44 способами (рекуррентное соотношение $F_n = F_{n-5}+$ $+F_{n-10}+F_{n-15}$).

270. $11 \cdot 10 \cdot 15 = 1650$ способами.

271. $C_9^3 C_{13}^3 C_{10}^3 = 2882880$ способами.

272. $30! C_{23}^5 \approx 8{,}925493479820416 \cdot 10^{36}$ способами.

273. C_m^n способами.

274. $33! C_{32}^7 \approx 2{,}92267967071837 \cdot 10^{43}$ способами.

275. а) $C_{27}^5 = 80730$; б) $6^{22} \approx 1{,}3162170384226715 \cdot 10^{17}$ способами.

276. $\frac{18!}{(2!)^4}\, C_{17}^3 = 272100882493440000$ способами.

277. $\frac{24!}{14!(5!)^2} = 494236512$ способами.

278. 1620 слов (коэффициент при $\frac{z^6}{6!}$ в $(1+z)^2\left(z+\frac{z^2}{2!}+\right.$ $\left.+\frac{z^3}{3!}\right)\left(z+\frac{z^2}{2!}\right)\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\right))$.

279. kn рукопожатий.

280. $\frac{(3n)!}{(3!)^n n!}$ способами.

282. $C_{18}^{10} - 3C_{16}^8 + C_{15}^7 = 11583$ способами.

283. 43 способами (коэффициент при z^{10} в $(1+z+\ldots+$ $+z^6)^2(1+z+z^2+\ldots+z^8)$).

284. 38 способами (коэффициент при z^{12} или z^8 в $(1+z+$ $+z^2+\ldots+z^8)(1+z+z^2+\ldots+z^7)(1+z+z^2+\ldots+z^5)$).

289. $C(m,\,k,\,n) = C(m-1,\,k,\,n) + C(m-1,\,k,\,n-2)$.

300. $n+1$ классов.

301. 2^{2^n} булевых функций.

302. 2^{n+1} симметрических функций.

303. а) 3^n элементарных конъюнкций; б) 2^{3^n} дизъюнктивных нормальных форм.

304. 2^{2^n} совершенных дизъюнктивных нормальных форм.

305. $C_m^k (n-1)^k$.

307. а) 2^n вершин, $n \cdot 2^{n-1}$ рёбер; б) $C_n^k 2^{n-k}$ k-мерных граней.

309. $\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$ разбиений.

313. n^2 миноров.

314. а) C_{nm}^{k}; б) $\left(C_n^k\right)^m$ матриц.

315. а) k^{n^2-n+1}; б) $k^{\frac{n^2-n+2}{2}}$ матриц.

316. а) $C_{n(n-1)}^{k}+C_{n(n-1)}^{k-n}$; б) $2C_{n(n-1)/2}^{k}C_{n(n-1)/2}^{s}$ матриц.

317. $C_n^1C_n^2\dots C_n^n$ матриц.

318. а) $(2k+1)^n$; б) $(2k+1)^n-(2k-1)^n$ векторов при $k>0$, 1 вектор (нулевой) при $k=0$.

319. а) $(2k+1)^{mn}$; б) $(2k+1)^{mn}-(2k-1)^{mn}$ матриц при $k>0$, 1 матрица (нулевая) при $k=0$.

320. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^k\,(n-k)^{n-k}$ отображений.

321. $n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ отображений.

Библиографический список

1. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. М.: Наука, 1969. 328 с.

2. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. М.: Фима, МЦНМО, 2006. 400 с.

3. *Гаврилов, Г.П.* Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. М.: Физматлит, 2004. 416 с.

4. *Матросов, В.Л.* Лекции по дискретной математике / В.Л. Матросов, В.Н. Стеценко. М.: МПГУ, 1997. 219 с.

5. *Пак, В.Г.* Сборник задач по дискретной математике. Теория множеств. Комбинаторика / В.Г. Пак. СПб.: БГТУ, 2008. 118 с.

6. *Риордан, Дж.* Введение в комбинаторный анализ / Дж. Риордан. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 288 с.

7. *Риордан, Дж.* Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. М.: Наука, 1982. 256 с.

8. *Романовский, И.В.* Комбинаторный анализ / И.В. Романовский. СПб.: Невский диалект, 2004. 320 с.

9. *Рыбников, К.А.* Введение в комбинаторный анализ / К.А. Рыбников. М.: Изд-во МГУ, 1985. 312 с.

10. *Рыбников, К.А.* Введение в комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учебное пособие / Под ред. К.А. Рыбникова. М.: Наука, 1982. 368 с.

11. *Сачков, В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. М.: МЦНМО, 2004. 424 с.

12. *Фудзисава, Т.* Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. М.: Радио и связь, 1984. 240 с.

13. *Холл, М.* Комбинаторика / М. Холл. М.: Мир, 1970. 424 с.

14. *Шапорев, С.Д.* Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапорев. СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2006. 396 с.

15. *Яблонский, С.В.* Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. М.: Высшая школа, 2003. 384 с.

Пак Вадим Геннадьевич

Сборник задач по дискретной математике. Комбинаторный анализ

Редактор *Г.М.Звягина*
Корректор *Л.А.Петрова*
Подписано в печать 04.10.2010. Формат бумаги $60 \times 84/16$. Бумага документная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 11,7. Тираж 300 экз. Заказ № ???
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1