Примеры

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)dxdy,$$

где σ - верхняя сторона поверхности

$$z = \sqrt{a^2-x^2},$$

отсеченная плоскостями

$$y=0,\ y=b \text{ (рис. 4.14).}$$

Решение:

Нормаль $\bar{n}$ в точке M*,* соответствующая указанной стороне поверхности, составляет с осью Oz острый угол, поэтому в формуле (4.3), которой следует воспользоваться, нужно взять знак плюс.

Проекцией S_1 данной поверхности на плоскость *Oxy* является прямоугольник *ABCD* (рис.4.15).

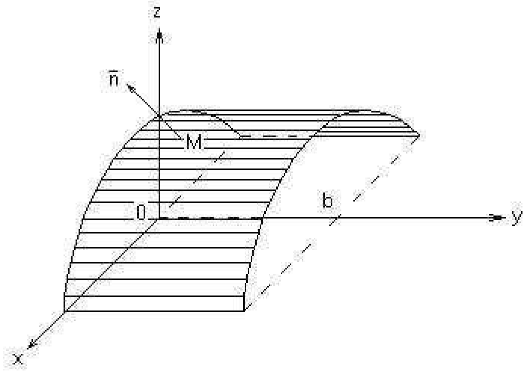


рис. 4.14

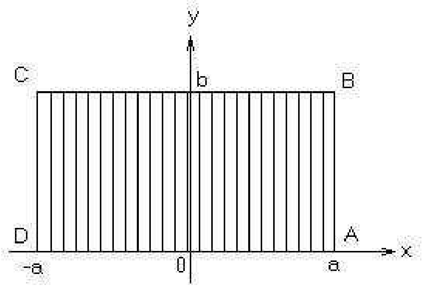


рис. 4.15

По формуле (4.3) находим

$$\iint_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)dxdy = \iint_{(S_1)}\left[y^2+\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= \int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{b}\left(y^2+a^2-x^2\right)dy = \int_{-a}^{a}\left(\frac{y^3}{3}+a^2y-x^2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b}dx =$$

$$= \int_{-a}^{a}\left(\frac{b^3}{3}+a^2b-x^2b\right)dx = \left(\frac{b^3}{3}+a^2b-b\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2}{3}ab\left(b^2+2a^2\right).$$

Замечание. Если бы рассматривалась нижняя (внутренняя) сторона поверхности, то нормаль, соответствующая ей, образовывала бы с осью Oz тупой угол в формуле (4.3) нужно было бы взять знак “**-**”.

Пример 2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\sigma}\left(ax^2+by+cz^2\right)dxdz,$$

где - σ внутренняя сторона поверхности

$$x^2=2py\left(p>0\right),$$

отсеченная плоскостями y=2p, z=0, z=q (рис. 4.16).

Решение:

Нормаль $\bar{n}$ в точке M*,* соответствующая указанной стороне поверхности,

составляет с осью Oy острый угол, поэтому в формуле (4.4), которой следует

воспользоваться, нужно взять знак плюс. Проекцией S_2 данной поверхности

на плоскость *Oxz* является прямоугольник *ABCD* (рис.4.17).

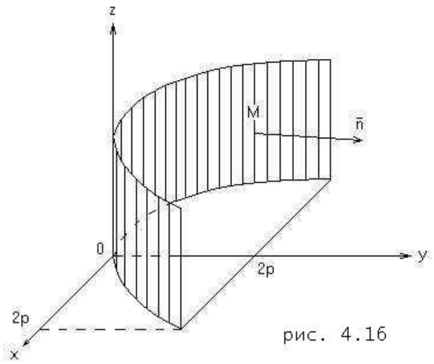


рис. 4.16

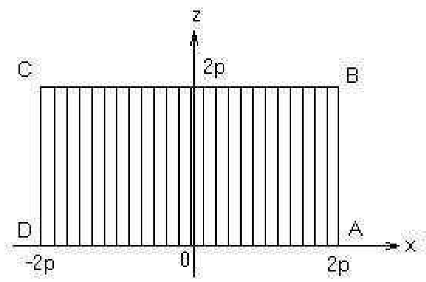


рис.4.17

решение примера 2 (самостоятельно, аналогично примеру 1)

Пример 3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\sigma}\left(x^2+z^2ay^2\right)dxdz,$$

где σ внешняя сторона поверхности

$$y=\sqrt{x^2+z^2},$$

отсеченная плоскостями y = 0, y = b (рис. 4.18).

Решение:

Нормаль к поверхности в точке *M* образует осью *Oy* тупой угол , поэтому в формуле (4.4) следует взять знак «**-** «.

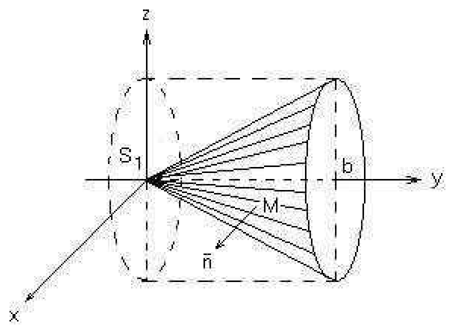


рис. 4.18

Проекцией S_1 данной поверхности на плоскость Oxz является круг

$$x^2+z^2\le b^2.$$

По формуле (4.4)

$$\iint_{\sigma}(x^2+z^2ay^2)dxdz=-\iint_{S_1}\left(x^2+z^2a\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2\right)dxdz=$$

$$=-\iint_{S_1}(x^2+z^2)(a+1)dxdz=-(a+1)\iint_{S_1}(x^2+z^2)dxdz$$

Переходя к полярным координатам**,**

$$x = \rho\cos\varphi, z = \sin\varphi,$$

находим

$$\iint\limits_{S_1}(x^2+z^2)dxdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{b}\rho^2\rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^b d\varphi = \frac{2\pi b^4}{4} = \frac{\pi b^4}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+z^2ay^2)dxdz = -(a+1)\iint\limits_{S_1}(x^2+z^2)dxdz = -\frac{\pi(a+1)b^4}{2}.$$

Пример 4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\sigma}\left(ax^2+by^2+bz^2\right)dydz,$$

где σ - внутренняя сторона части полусферы

$$x = \sqrt{R^2-y^2-z^2},$$

вырезанная конусом

$$x = \sqrt{y^2+z^2}.$$

Решение:

В формуле (4.5), следует, что надо взять знак " **-** ", так как нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, составляет с положительным направлением оси Ох тупой угол.

Из уравнений

$$x=\sqrt{R^2-y^2-z^2},\quad x=\sqrt{y^2+z^2}$$

получим проекцию S_2 на плоскость Oyz, которая есть круг

$$y^2+z^2\le\frac{R^2}{2}$$

Вводя полярные координаты

$$y=\rho cos\varphi,\quad z=\rho sin\varphi,$$

находим

$$\iint\limits_{(S_3)}\left[aR^2+(b-a)\left(y^2+z^2\right)\right]dydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R/\sqrt{2}}\left[aR^2+(b-a)\ \rho^2\right]\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R/\sqrt{2}}\left[aR^2\rho+(b-a)\ \rho^3\right]d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left[aR^2\frac{\rho^2}{2}+(b-a)\ \frac{\rho^4}{4}\right]\Bigg|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}d\varphi=$$

$$=2\pi\left[a\frac{R^4}{4}+(b-a)\ \frac{R^4}{4}\right]=\frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$$

Итак

$$\iint\limits_{\sigma}\left(ax^2+by^2+bz^2\right)dydz=-\frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$$

Приме 5.
Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy,$$

где σ -внешняя сторона нижней половины эллипсоида (рис. 4.19)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

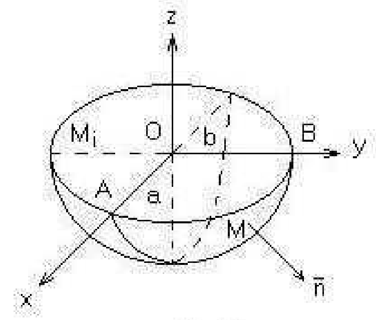


рис. 4.19

Решение:

Нижняя половина эллипсоида

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Проекцией S_1 этой половины эллипсоида на плоскость Оxy является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Так как нормаль $\bar{n}$, отвечающая внешней стороне поверхности, составляет с осью Oz тупой угол, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz \right) dx dy = -\iint\limits_{(S_1)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} \left(kc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy.$$

Вводя новые координаты по формулам

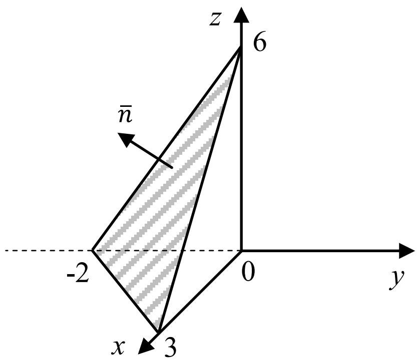
$$x = a\rho\cos\ \varphi, y = b\rho\sin\ \varphi,$$

находим

$$\iint\limits_{(S_1)}\left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(kc\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)ab\rho d\rho =$$
$$= ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(kc\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^3\right)d\rho = 2\pi ab\left(\frac{kc}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

Пример 6.

Вычислить $\iint_{\sigma_{верх}} -x\,dy\,dz + z\,dx\,dz + 5\,dx\,dy$



$$P(x,y,z) = -x$$

$$Q(x,y,z) = z$$

$$R(x,y,z) = 5$$

$$\sigma:\ -2x+3y-z+6=0\ (\text{IV } окт.)$$

Решение:

Плоскость имеет уравнение: $z = 6 + 3y - 2x$.

Нормаль к этой плоскости имеет координаты:

$$\bar{n} = \left\{2; -3; \underbrace{+1}_{должен\ быть\ >0}\right\}.$$

Тогда получим:

$$\cos\alpha = \frac{-z_x'}{|\bar{n}|} = \frac{2}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0, x = \frac{1}{2}(6+3y-z);$$

$$\cos\beta = \frac{-z_y'}{|\bar{n}|} = \frac{-3}{\sqrt{1+4+9}} < 0, y = \frac{1}{3}(2x+z-6);$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{|\bar{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}} > 0, z = 6 + 3y - 2x.$$

Окончательно имеем:

$$\iint\limits_{\sigma_{верх}} -x\,dy\,dz + z\,dx\,dz + 5\,dx\,dy = = \iint\limits_{\sigma} -x\cos\alpha\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma} z\cos\beta\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma} 5\cos\gamma\,d\sigma =$$

$$= \left(\oplus \iint\limits_{\mathbb{D}_{yz}} -\left(3 + \frac{3}{2}y - \frac{z}{2}\right) dy\,dz\right) + \left(\ominus \iint\limits_{\mathbb{D}_{xz}} z\,dx\,dz\right) + \left(\oplus \iint\limits_{\mathbb{D}_{xy}} 5\,dx\,dy\right)$$
$$= \cdots = -9$$

Пример 7

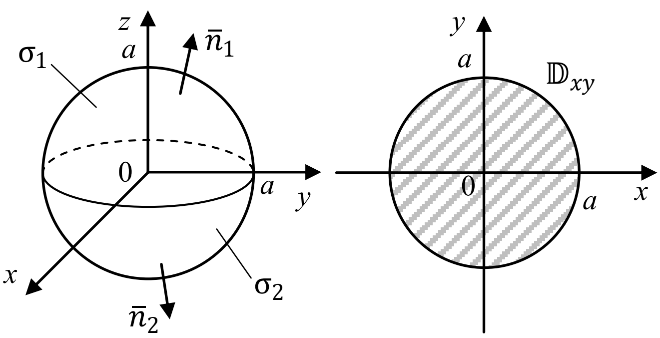
Вычислить: $1) R^2 \oiint_{\sigma_{внеш}} z^2\,dx\,dy$;

$2) \oiint_{\sigma_{внеш}} z\,dx\,dy,$

где σ: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Решение:

Поверхность σ проектируется не однозначно на полскость Oxy, поэтому мы разобьем ее на две поверхности:



$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

$$\sigma_1: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\sigma_2: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Заметим, что

$$Пр_{xy}\sigma_1 = Пр_{xy}\sigma_2 = \mathbb{D}_{xy}$$

Тогда получим

$$1) \oiint\limits_{\sigma_{внеш}} z^2\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_1} z^2\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} z^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{D}_{xy}} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^2 dx\,dy \underbrace{=}_{т.к. \cos\gamma_2 < 0} \iint\limits_{\mathbb{D}_{xy}} \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^2 dx\,dy = 0.$$

Для второго случая имеем

$$2) \quad \oiint\limits_{\sigma_{внеш}} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_1} z\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} z\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{D}_{xy}} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy \underbrace{=}_{т.к. \cos\gamma_2 < 0} \iint\limits_{\mathbb{D}_{xy}} \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy =$$

$$= 2 \iint\limits_{\mathbb{D}_{xy}} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy = \dots = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Пример 8. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{(\sigma)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

, где σ - внешняя сторона сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Решение:

Этот интеграл представляет собой сумму трех интегралов.

Вычислим первый из них:

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} x^2 dydz$$

Из уравнения находим

$$x - a = \pm\sqrt{R^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2}\,,$$

где знак « **+»** отвечает одной полусфере (ближней), знак « **-** « - другой (дальней).

Подынтегральную функцию представим в виде

$$x^2 = (x-a)^2 + a^2 + 2a(x-a).$$

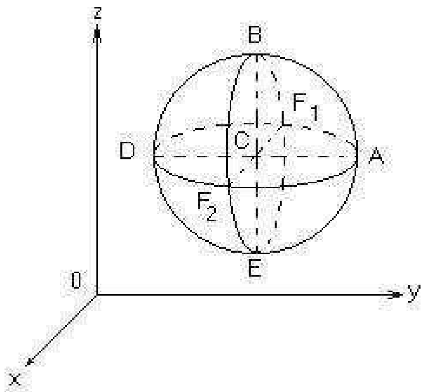


рис. 4.20

Обозначим через σ_1 внешнюю сторону ближней полусферы $ABCDEF_2$,

через σ_2 - внешнюю сторону дальней полусферы $ABCDEF_1$,

через S_3- проекцию каждой полусферы на плоскость Oyz - это круг, ограниченный

окружностью

$$(y-b)^2 - (z-c)^2 = R^2\,.$$

Принимая во внимание, что выражение $(x-a)$ меняет знак при переходе

от одной полусферы к другой, по формуле (4.5) находим

$$I_1 = \iint\limits_{\sigma_1} x^2 dydz + \iint\limits_{\sigma_2} x^2 dydz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1} ((x-a)^2 + a^2 + 2a(x-a))dydz + \iint\limits_{\sigma_2} \big((x-a)^2 + a^2 + 2a(x-a)\big)dydz =$$

$$= \iint\limits_{S_3} ((x-a)^2 + a^2 + 2a(x-a))dydz - \iint\limits_{S_3} \big((x-a)^2 + a^2 - 2a(x-a)\big)dydz =$$

$$= 4a \iint\limits_{S_3} (x-a)dydz = 4a \iint\limits_{S_3} \left(\sqrt{R^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2}\right) dydz =$$

$$= 4a \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2}\, \rho d\rho = \frac{8}{3}\pi a\, R^3 .$$

При вычислении двойного интеграла осуществлен переход к полярным координатам по формулам

$$y - b = \rho \cos\ \varphi,\ \ z - c = \rho \sin\ \varphi.$$

Аналогично вычисляются и другие два интеграла (самостоятельно):

$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma)} y^2 dzdx = \frac{8}{3}\pi b R^3, \quad I_3 = \iint\limits_{(\sigma)} z^2 dydx = \frac{8}{3}\pi c R^3.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dydx = \frac{8}{3}\pi R^3 (a + b + c).$$

Пример 9. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} (y-z)dydz + (z-x)\,dxdz + (x-y)\,dxdy$$

гдеσ - верхняя сторона поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx\ (R > a, z > 0),$$

вырезанная цилиндром

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Решение:

Воспользуемся формулой (4.6), связывающей поверхностные интегралы

обоих типов.

По этой формуле

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \left[(y-z)\cos\ \alpha + (z-x)\cos\ \beta + (x-y)\cos\ \gamma\right] d\sigma.$$

Далее, поскольку нормаль $\overline{n}$, отвечающая верхней стороне поверхности,

составляет с осью Oz острый угол, то быбираем знак «+» и направляющие

косинусы для функции заданной **неявно можно найти по формулам**:

$$\cos\ \alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = 2\frac{2x - 2R}{\sqrt{(x-R)^2\ y^2 + z^2}} = \frac{x-R}{R};$$

$$\cos\ \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{y}{R};$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{z}{R};$$

Получаем

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} (z - y) d\boldsymbol{\sigma}$$

Так как поверхность симметрична относительно плоскости Oxz, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} y d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

Тогда

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} z d\boldsymbol{\sigma}$$

.

Переходя снова к поверхностному интегралу второго рода , получаем

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} z d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} z \frac{dxdy}{cos\gamma} = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{z}{z/R} dxdy = R \iint\limits_{(\sigma)} Rdxdy = R \iint\limits_{S_1} dxdy = \pi a^2 R$$