§6. Асимптоты графика функции

Определение 6.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 бесконечен, то прямая L: $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$.

Прямая L: $x=1$ – вертикальная асимптота графиков функций $f(x)=1/(x-1)$ и $g(x)=1/(x-1)^2$, ибо односторонние пределы этих функций в точке $x=1$ бесконечны: $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} g(x)=+\infty$ (рис. 6.1, 6.2).

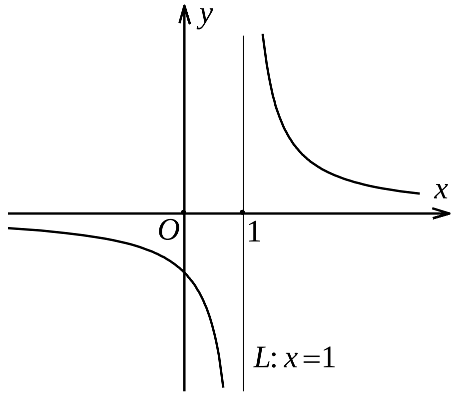

Рис. 6.1. График функции $f(x)=1/(x-1)$

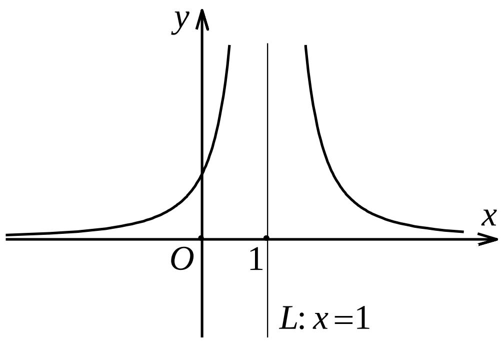

Рис. 6.2. График функции $f(x)=1/(x-1)^2$

Замечание 6.1. Вертикальные асимптоты графика данной функции проходят через её точки разрыва 2-го рода, так как точка x_0 из определения 6.1 есть точка разрыва 2-го рода функции $f(x)$ (§2, глава 4, раздел 4).

Пример 6.1. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$f(x)=(x-2)e^{-1/(x-2)}.$$

► $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, $x=2$ – точка разрыва непрерывности, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=[0\cdot\infty]$. Преобразуем $f(x)$ в дробь, получим неопределённость ∞/∞, раскрывая которую, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2-0}(x-2)e^{-\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2-0}\frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{1/(x-2)}=\lim_{x\to 2-0}\frac{e^{-\frac{1}{x-2}}\cdot 1/(x-2)^2}{-1/(x-2)^2}=-\lim_{x\to 2-0}e^{-\frac{1}{x-2}}=-\infty.$$

В силу определения 6.1 прямая $x=2$ – вертикальная асимптота графика данной функции при $x\to 2-0$ (рис 7.3).◄

Определение 6.2. Пусть функция $f(x)$ определена для сколь угодно больших по модулю значений x. Прямая L: $y=kx+b$ называется *асимптотой графика* функции $f(x)$ при $x\to+\infty\,(x\to-\infty)$, если $f(x)$ представима в виде:

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{6.1}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty\,(x\to-\infty)$.

Замечание 6.2. Если угловой коэффициент k асимптоты L: $y = kx + b$ равен нулю, то она называется *горизонтальной*, если же $k \neq 0$, то асимптота называется *наклонной*.

Замечание 6.3. Если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ (теорема 4.3 главы 3 раздела 4). Тогда из определения 6.2 следует, что прямая L: $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика $f(x)$.

Так, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = 1/(x-1)$ (рис. 6.1), ибо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1/(x-1) = 0$, а прямая $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ (рис. 5.3), ибо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+3} = 1$.

График функции $f(x)$ может иметь различные горизонтальные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так, прямая L: $y = 2$ – горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = (2-x)e^x + 2$ при $x \to -\infty$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$)), однако она не является асимптотой этого графика при $x \to +\infty$ (рис. 5.6).

Пример 6.2. Используя определение 6.2, найти наклонные асимптоты графика функции $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

► $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, поэтому $\operatorname{arctg} x = \pi/2 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (теорема 4.3 глава 3 раздел 4). Отсюда имеем: $f(x) = x + \pi/2 + \alpha(x)$. В силу определения 6.2 заключаем, что прямая L: $y = x + \pi/2$ – наклонная асимптота графика $f(x)$ при $x \to +\infty$. Аналогично можно показать, что прямая L: $y = x - \pi/2$ – наклонная асимптота графика $f(x)$ при $x \to -\infty$.◄

Теорема 6.1. Для того чтобы прямая L: $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо, чтобы существовали два предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{6.2}$$

и достаточно, чтобы существовал второй из них.

►Пусть прямая L: $y = kx + b$ – асимптота графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда в силу определения 6.2 функция $f(x)$ представима в виде (6.1). Поделим обе части этого равенства на x: $\dfrac{f(x)}{x} = k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x}$ и в полученном равенстве перейдём к пределу при $x \to +\infty$. Имеем $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x}\right) = k$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x}\right) = 0$. Но тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$. Перепишем равенство (6.1) в виде: $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ и перейдём в полученном равенстве к пределу при $x \to +\infty$. Имеем

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(b+\alpha(x)\right)=b$, так как $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Но тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$.

Обратно, предположим, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$. Имеем $f(x)-kx=b+\alpha(x)$ или $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ (теорема 4.3 глава 3 раздел 4). Таким образом, показано, что функция $f(x)$ представима в виде (6.1), а это и означает, в соответствии с определением 6.2, что прямая L: $y=kx+b$ – асимптота графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$.◄

Замечание 6.4. Теорема 6.1 остаётся справедливой и для случая $x\to-\infty$. График функции $f(x)$ может иметь различные асимптоты при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, поэтому пределы из равенств (6.2) отдельно рассматриваются для каждого из этих случаев.

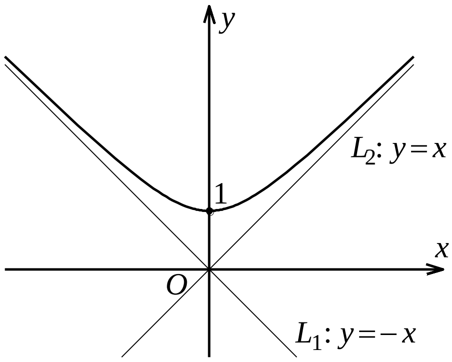

Рис. 6.3. График функции $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

Пример 6.3. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

►График $f(x)$ не имеет вертикальных асимптот, ибо функция не имеет точек разрыва 2-го рода. Вычислим для $f(x)$ пределы из равенства (6.2). Имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1/x^2+1}}{x}=\begin{cases}-1, & x\to-\infty,\\ +1, & x\to+\infty.\end{cases}$$

Получили два значения k: $k_1=-1$ (при $x\to-\infty$) и $k_2=+1$ (при $x\to+\infty$). С каждым из них вычислим второй из пределов (6.2):

а). $k_1=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}+x)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=0\Rightarrow b_1=0$;

б). $k_2=+1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=0\Rightarrow b_2=0$.

Заключаем, что график данной функции имеет две наклонных асимптоты $L_1: y=-x$ при $x\to-\infty$ и $L_2: y=x$ при $x\to+\infty$ (рис. 6.3).◄

Геометрическая интерпретация понятия асимптоты

Каждое из определений 6.1 и 6.2 допускает одну и ту же геометрическую трактовку: расстояние d точки $M(x,f(x))$ графика Γ функции $f(x)$ до прямой L, являющейся асимптотой графика Γ, стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

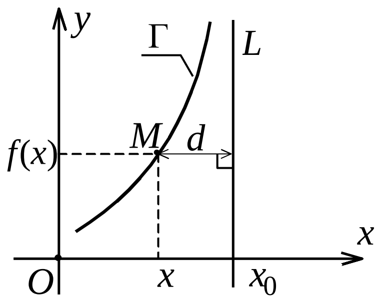

Рис. 6.4. К геометрической интерпретации понятия вертикальной асимптоты

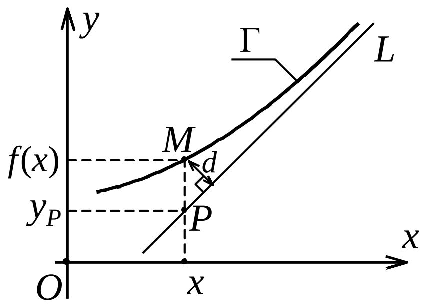

Рис. 6.5. К геометрической интерпретации понятия наклонной асимптоты

В самом деле, пусть прямая L: $x = x_0$ – вертикальная асимптота графика функции $f(x)$, тогда $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0 - 0$ или при $x \to x_0 + 0$, поэтому точка $M(x, f(x))$ неограниченно удаляется от начала координат, и в то же время $d = |x - x_0| \to 0$ (рис. 6.4). Пусть прямая L: $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика данной функции Γ при $x \to +\infty$. Опустим из точки $M(x, f(x)) \in \Gamma$ перпендикуляр на ось Ox и через P обозначим точку его пересечения с асимптотой L (рис. 6.5), $P(x, y_P)$, при этом $y_P = kx + b$. При $x \to +\infty$ точка $M(x, f(x))$ неограниченно удаляется от начала координат, а

$$MP = |f(x) - y_P| = |f(x) - kx - b| \to 0$$

(определение 6.2). Так как $0 \le d < MP$ (рис. 6.5), то заключаем, что $d \to 0$ при $x \to +\infty$.

Замечание 6.5. Геометрическая интерпретация понятия асимптоты используется при построении математических эскизов графиков функций.

Замечание 6.6. Формула (6.1) является асимптотическим разложением функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ (§9, глава 3, раздел 4). Линейная функция $g(x) = kx + b$ из этой формулы может служить аппроксимацией $f(x)$ при достаточно больших по модулю значениях аргумента x.