§5. Правило Лопиталя

Правилом Лопиталя называют теоремы, сводящие вычисление предела отношения двух функций в случае неопределённости $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ к вычислению предела отношения производных этих функций.

Теорема 5.1 (*правило Лопиталя для раскрытия неопределённости* 0/0). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. определены и дифференцируемы на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a, при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
2. производная $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a,
3. существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, при этом выполняется равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.1}$$

►Рассмотрим две вспомогательные функции:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathring{U}(a), \\ 0, & x = a, \end{cases} \qquad g^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \mathring{U}(a), \\ 0, & x = a. \end{cases} \tag{5.2}$$

Эти функции удовлетворяют условиям теоремы Коши на любом из отрезков $[x, a]$ или $[a, x]$ при условии, что x принадлежит упомянутой окрестности точки a. В силу теоремы Коши имеем:

$$\frac{f^*(x) - f^*(a)}{g^*(x) - g^*(a)} = \frac{f^{*\prime}(c)}{g^{*\prime}(c)}, \tag{5.3}$$

где $c = x + \theta(x-a), \theta \in (0,1)$. В равенстве (5.3) $x \neq a$, поэтому $c \neq a$ и, следовательно, в силу (5.2) имеем: $f^*(a) = g^*(a) = 0$; $f^*(x) = f(x)$, $g^*(x) = g(x)$, $f^{*\prime}(c) = f'(c)$, $g^{*\prime}(c) = g'(c)$. Таким образом, равенство (5.3) переписывается в виде:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.4}$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $x \to a$, при этом отметим, что из утверждения $x \to a$ следует утверждение $c \to a$. Для правой части (5.4) имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Но тогда существует предел при $x \to a$ и левой части равенства (5.4) и справедливо соотношение (5.1).◄

Пример 5.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{3x^2-5x-2}$ с помощью правила Лопиталя.

►Функции $f(x) = \ln(x^2-3)$ и $g(x) = 3x^2-5x-2$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.1 в некоторой проколотой окрестности точки $x=2$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x/(x^2-3)}{6x-5}=\frac{4}{7}$, то выполнено и третье условие этой теоремы и поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{3x^2-5x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x/(x^2-3)}{6x-5}=\frac{4}{7}$.◄

Пример 5.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$ с помощью правила Лопиталя.

►Функции $f(x)=e^x-1-x$ и $g(x)=\sin^2 x$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.1 в некоторой проколотой окрестности точки $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\sin x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}=[\frac{0}{0}]$. Первое применение теоремы 5.1 не избавляет от неопределённости. Поскольку $f'(x)$ и $g'(x)$ также удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.1, можно применить её ещё один раз: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin 2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$. Итак, двукратное применение теоремы 5.1 приводит к равенству $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}$.◄

Теорема 5.2 (*правило Лопиталя для раскрытия неопределённости* $\frac{\infty}{\infty}$).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. определены и дифференцируемы на некоторой проколотой окрестности точки a, при этом $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,
2. производная $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a,
3. существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, при этом справедливо равенство (5.1).

Теорему 5.2 здесь принимаем без доказательства (см., например в [1]).

Пример 5.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}$ с помощью правила Лопиталя.

►Функции $f(x)=\ln\sin x$ и $g(x)=\operatorname{ctg}x$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.2 на промежутке (0, δ], где δ – некоторое положительное число, $\lim\limits_{x\to +0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to +0}\cos x\cdot\sin x=0$, поэтому выполняется и третье условие. Поэтому $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to +0}\cos x\cdot\sin x=0$.◄

Замечание 5.1. Теоремы 5.1, 5.2 остаются справедливыми и в случае, когда под a понимается один из символов $-\infty, +\infty, \infty$, при этом первые два условия этих теорем должны выполняться для значений x, удовлетворяющих соответственно одному из неравенств: $x<-\delta$, $x>\delta$, $|x|>\delta$, где δ –

некоторое положительное число (см., например, в [1]).

Замечание 5.2. Условие существования предела отношения производных в теоремах 5.1–5.2 важно для их заключения. Если это условие не выполняется, т.е. указанный предел не существует, эти теоремы применять нельзя. Предел отношения функций может в этом случае как существовать, так и не существовать, этот вопрос решается методами, описанными в главе 3 раздела 4.

Пример 5.4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\cos x}{3x+\sin x}$.

►Функции $f(x)=2x-\cos x$ и $g(x)=3x+\sin x$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.2 (с учётом замечания 5.1), но $\nexists\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sin x}{3+\cos x}$, (это можно доказать с помощью определения предела функции на языке последовательностей). Итак, в данном случае теорема 5.2 не применима. Однако искомый предел существует и конечен. В самом деле, разделив оба члена дроби под знаком предела на x и применив теорему об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (теорема 2.2, глава 3, раздел 4)), получим: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\cos x}{3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-1/x\cdot\cos x}{3+1/x\cdot\sin x}=\dfrac{2}{3}$, так как функции $\dfrac{1}{x}\cdot\cos x,\ \dfrac{1}{x}\cdot\sin x$ – бесконечно малые при $x\to+\infty$ как произведения бесконечно малой функции $1/x$ на ограниченные функции $\cos x,\ \sin x$.◄

Правило Лопиталя применяется также для раскрытия неопределённостей $0\cdot\infty, \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$. С помощью некоторых тождественных преобразований задача сводится к раскрытию неопределённости $0/0$ или ∞/∞, после чего и применяется правило Лопиталя.

Пример 5.5. Найти $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\sin x}$.

►Выражение под знаком предела – неопределённость ∞^{0}. С помощью основного логарифмического тождества и свойства непрерывности показательной функции приходим к равенству: $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln(1/x)}$. Задача сведена к вычислению $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln 1/x=-\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x$, т.е. к раскрытию неопределённости $0\cdot\infty$. Преобразуем произведение $\sin x\ln x$ в дробь: $\sin x\ln x=\dfrac{\ln x}{1/\sin x}$. Эта дробь при $x\to+0$ есть неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1/\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}=[\dfrac{0}{0}]$. Можно опять применить правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $[0/0]$, однако, проще использовать первый замечательный предел и теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (раздел 4, глава 3):

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin x}{\cos x}=1\cdot 0=0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln 1/x=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln(1/x)}=e^0=1$.◄