§2. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений

Выше рассматривались, в основном, квадратные системы линейных уравнений, число неизвестных в которых совпадает с числом уравнений. В настоящем параграфе исследуются системы, в которых число уравнений и число неизвестных произвольны. Такие системы будем называть произвольными системами линейных уравнений.

Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где m и n – произвольные натуральные числа. Через A и A^* обозначим матрицу коэффициентов системы и её расширенную матрицу,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2.2}$$

Выполнив конечное число элементарных преобразований, матрицу A^* всегда можно привести к ступенчатой матрице A_1^* (см. теорему 1.2 гл. 1):

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1r}^{(1)} & a_{1,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(1)} & a_{r,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{rn}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.3}$$

Можно считать, что ни один из элементов $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{rr}^{(1)}$ матрицы A_1^* не равен нулю, в противном случае этого можно добиться перестановкой столбцов матрицы* A*, *изменив при этом нумерацию неизвестных.

Первые* n *столбцов матрицы A_1^* соответствуют матрице A_1, получающейся при указанных преобразованиях из матрицы* A. *При $r < m$ матрица A_1 имеет* r *ненулевых строк, а в матрице A_1^* число таких строк равно $(r+1)$ или* r, *в зависимости от величины её элемента $b_{r+1}^{(1)}$. При $r = m$ число ненулевых строк в матрицах* A_1 *и A_1^* одинаково и равно* r.

Случай 1. $r < m$, $b_{r+1}^{(1)} \neq 0$, ***число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* различно и равно* r *и $(r+1)$ соответственно.***

Матрица A_1^* является расширенной матрицей следующей системы

линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)}x_r + a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(1)}x_r + a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(1)}x_n = b_r^{(1)}, \\ 0\cdot x_1 \;+\; 0\cdot x_2 + \quad . \quad . \quad . \;+\; 0\cdot x_n = b_{r+1}^{(1)}, \\ 0\cdot x_1 \;+\; 0\cdot x_2 + \quad . \quad . \quad . \;+\; 0\cdot x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0\cdot x_1 \;+\; 0\cdot x_2 + \quad . \quad . \quad . \;+\; 0\cdot x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Система (2.4) несовместна, поскольку ее $(r+1)$***-е уравнение не имеет решений. Так как, в силу теоремы 1.1 главы 1, системы (2.1) и (2.4) равносильны, то несовместной оказывается и система (2.1).***

Пример 2.1. ***Решить систему уравнений***

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

►***Рассмотрим расширенную матрицу этой системы***

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Первые три столбца этой матрицы образуют матрицу* A *– матрицу коэффициентов системы. Подвергнем* A* *следующим элементарным преобразованиям. Переставим первую и вторую строки, затем последовательно умножим первую строку на (–2) и на (–3) и сложим со второй и третьей строками, после чего из третьей строки вычтем вторую:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_1^*.$$

Матрица* A *при этом преобразуется в матрицу A_1***, составленную из первых трёх столбцов матрицы*** A_1^****. Матрице*** A_1^* ***соответствует система*** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad 5x_2 - 4x_3 = 1, \\ \qquad 0\cdot x_3 = 1, \end{cases}$ ***которая является несовместной, так как её последнее уравнение не имеет решений. Поэтому несовместна и равносильная ей исходная система.*** ◄

Случай 2. $r < m,\ b_{r+1}^{(1)} = 0$ *или* $r = m$. *Число ненулевых строк в матрицах* A_1 *и* A_1^* *одинаково и равно* r.

В этом случае матрице A_1^* ***сопоставляется следующая система:***

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots+a_{1r}^{(1)}x_r+a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2r}^{(1)}x_r+a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(1)}x_r+a_{r,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}^{(1)}x_n=b_r^{(1)}, \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

равносильная системе (2.1), в силу теоремы 1.1 из главы 1.

Система (2.5) (а следовательно, и система (2.1)) будет иметь различное число решений в зависимости от соотношения между числами **r** ***и*** **n.**

2.1. $r=n$. ***Система (2.5) имеет вид***

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)}. \end{cases} \qquad (2.6)$$

и является крамеровской (она квадратная и ее определитель $\Delta \neq 0$),

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{rr}\neq 0. \qquad (2.7)$$

Система (2.6) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера (1.5), но естественнее и проще выполнить обратный ход метода Гаусса, который заключается в том, что сначала из последнего уравнения системы (2.6) находят $x_n=b_n^{(1)}/a_{nn}^{(1)}$***, потом из предпоследнего уравнения находят*** x_{n-1} ***после подстановки в него найденного значения*** x_n***. Аналогичные операции производят до тех пор, пока из первого уравнения не будет найдено*** x_1***.***

Пример 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=7, \\ x_1-2x_2+x_3=-4, \\ 4x_1-2x_2-x_3=1. \end{cases}$$

►Выпишем расширенную матрицу этой системы A^*

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

и подвергнем её элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа 2, 1, 4 и вычтем её последовательно из второй, третьей и четвёртой строк. После этого поменяем местами вторую и третью строки, а затем умножим вторую строку на числа 3, 2 и сложим её последовательно с третьей и четвёртой строками:

$$A^* \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Наконец, умножим вторую строку на (-1), третью строку вычтем из четвёртой,
после чего умножим третью строку на $(-1/5)$:

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует система $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ \quad\;\; x_2 \qquad = 2, \\ \qquad\qquad x_3 = -1, \end{cases}$ которая является крамеровской, так как её главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Она имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$. ◄

2.2. $r < n$. Перенесём члены с неизвестными $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правые части уравнений системы (2.5), получим

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1r}^{(1)} x_r = b_1^{(1)} - a_{1,r+1}^{(1)} x_{r+1} - \ldots - a_{1n}^{(1)} x_n, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)} x_r = b_2^{(1)} - a_{2,r+1}^{(1)} x_{r+1} - \ldots - a_{2n}^{(1)} x_n, \\ . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{rr}^{(1)} x_r = b_r^{(1)} - a_{r,r+1}^{(1)} x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(1)} x_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ система (2.8) является крамеровской, (число её уравнений равно числу неизвестных, и её определитель Δ отличен от нуля (см. (2.7)). Поэтому из системы (2.8) можно единственным образом выразить неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ по формулам Крамера или, осуществив обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11} x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,n-r} x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2,n-r} x_n, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r1} x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n-r} x_n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Числа $\beta_i,\ \alpha_{ij}\ (i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n-r)$ получаются в результате арифметических операций над коэффициентами и свободными членами системы (2.8) в процессе вычислений. Для них можно записать и явные выражения в виде:

$$\beta_i = \Delta_i / \Delta, \ \ \alpha_{ij} = -\Delta_{ij} / \Delta, \ \ j = 1, \ldots, n-r, \tag{2.10}$$

где через Δ_i, Δ_{ij} обозначены определители, полученные из Δ путём замены его i-го столбца на столбцы $\left(b_1^{(1)}, \ldots, b_r^{(1)}\right)^T$ и $\left(a_{1,j}^{(1)}, \ldots, a_{r,j}^{(1)}\right)^T$, $j = 1, \ldots, n-r$. Равенства (2.10) являются следствием формул Крамера и свойств определителей.

В равенствах (2.9) неизвестные $x_{r+1},\dots,x_n$ принимают произвольные значения, поэтому их называют *свободными* неизвестными, а неизвестные $x_1,\dots,x_r$ –
базисными. Используя для свободных неизвестных традиционные обозначения $x_{r+1}=C_1,\ x_{r+2}=C_2,\dots,\ x_n=C_{n-r}$, перепишем (2.9) в виде

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+\alpha_{11}C_1+\ldots+\alpha_{1,n-r}C_{n-r}, \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}C_1+\ldots+\alpha_{2,n-r}C_{n-r}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_r=\beta_r+\alpha_{r1}C_1+\ldots+\alpha_{r,n-r}C_{n-r}, \\ x_{r+1}=C_1\in\boldsymbol{R}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n=C_{n-r}\in\boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{2.11}$$

При частных значениях $C_1, C_2,\dots,C_{n-r}$ правые части равенств (2.11) определяют все решения системы (2.1).

Замечание 2.1. В равенствах (2.11) под $\boldsymbol{R}$ понимается множество вещественных чисел (см. раздел 4, глава 1, §3).

Определение 2.1. Совокупность правых частей системы равенств (2.11) называется *общим решением* системы (2.1).

Пример 2.3. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2, \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=5, \\ 3x_1-2x_2+5x_3-4x_4=7, \\ x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$$

►Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Подвергнем матрицу A^* элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа (–2) и (–3) и сложим последовательно со второй и третьей строкой, после этого вычтем вторую строку из третьей и четвертой:

$$A^*\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\to A_1^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует следующая система:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2, \\ x_2+2x_3-x_4=1, \end{cases}$$

равносильная данной. Неизвестные x_1, x_2 примем за *базисные,* а неизвестные x_3, x_4 – за *свободные*. Перенесём члены со свободными неизвестными в правые части уравнений последней системы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - x_3 + x_4, \\ \quad x_2 = 1 - 2x_3 + x_4. \end{cases}$ Отсюда имеем $\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_3 + x_4, \\ x_1 = 2 - x_3 + x_4 + x_2 = 3 - 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

Приняв обозначения: $x_3 = C_1 \in \boldsymbol{R},\, x_4 = C_2 \in \boldsymbol{R}$, получаем совокупность всех решений данной системы в виде: $\begin{cases} x_1 = 3 - 3C_1 + 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 + C_2, \\ x_3 = C_1 \in \boldsymbol{R}, \\ x_4 = C_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$ ◄

Таким образом, при решении произвольной системы линейных уравнений (т.е. системы (2.1)) реализуется один из следующих случаев(Теорема Кронекера – Капели):

1) Система (2.1) не имеет решений (т.е. является несовместной), если не совпадает число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^*, полученных в результате приведения матрицы системы A и её расширенной матрицы A^* к ступенчатой форме.

2) Система (2.1) имеет единственной решение (т.е. является совместной и определённой), если число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1* одинаково и равно числу неизвестных. В этом случае система (2.1) крамеровская или равносильна такой системе.

3) Система (2.1) имеет бесчисленное множество решений (т.е. является совместной и неопределённой), если число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и меньше числа неизвестных.

Замечание 2.2. Множество решений системы (2.1) может быть либо пустым, либо состоять из одного элемента, либо быть бесконечным. Оно не может состоять из двух, трёх и т. д. элементов.

Пример 2.4. ***Дана система линейных уравнений*** $\begin{cases} (\lambda-2)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda-2)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda-2)x_3 = 1. \end{cases}$

При каких значениях параметра λ она: а) не имеет решений? б) имеет единственное решение? в) имеет бесчисленное множество решений?

►Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \text{ и } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \end{array}\right).$$

Для приведения матрицы A^* (и тем самым матрицы A) к ступенчатой форме A_1^* выполним над A^* следующие элементарные преобразования.

1. Переставим местами первую и третью строки:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ \lambda-2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

2. Последовательно вычтем из второй строки первую и из третьей – первую, умноженную на $(\lambda-2)$, получим:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -\lambda^2+4\lambda-3 & 3-\lambda \end{array}\right).$$

3. К третьей строке прибавим вторую, имеем

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda & 3-\lambda \end{array}\right) \Rightarrow A \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}.$$

При $-\lambda^2+3\lambda\neq 0$ (т. е. $\lambda\neq 0,\ \lambda\neq 3$) матрицы A_1 и A_1^* имеют по три ненулевых строки, причём число ненулевых строк совпадает с числом неизвестных в системе. Таким образом, в этом случае рассматриваемая система является крамеровской и имеет единственное решение.

При $\lambda=0$ имеем: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* различно, поэтому при $\lambda=0$ система не имеет решений.

При $\lambda=3$ имеем: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково, оно меньше числа неизвестных, поэтому система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а) система не имеет решений при $\lambda=0$;

б) система имеет единственное решение при $\lambda\neq 0,\ \lambda\neq 3$;

в) система имеет бесчисленное множество решений при $\lambda=3$. ◄

Замечание 2.3. Поскольку, в силу теоремы 5.1 гл. 2, число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* совпадает с их рангами, и, как было отмечено в §5 главы 2, справедливы равенства $\operatorname{rang} A_1 = \operatorname{rang} A$, $\operatorname{rang} A_1^* = \operatorname{rang} A^*$, то приведённое выше резюме можно перефразировать следующим образом:

1) если $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} A^*$, то система (2.1) несовместна;
2) если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = r$ и $r=n$, то система (2.1) имеет единственное решение;
3) если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = r$ и $r<n$, то система (2.1) имеет бесчисленное множество решений.