§3. Гипербола и её свойства

Определение 3.1. *Гиперболой* называется кривая, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,\ b>0. \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

Свойства гиперболы

1. Гипербола – *осесимметричная* и *центрально симметричная кривая.* Осями симметрии служат оси координат, а центром симметрии – начало координат.

Обоснование этого утверждения проводится так же, как и в случае эллипса. Оси симметрии называются *осями* гиперболы, а центр симметрии – её *центром*.

2. Точки гиперболы принадлежат множеству $G=\left\{(x,y)\colon |x|\ge a, |y|<\frac{b}{a}|x|\right\}$. Гипербола – *неограниченная* кривая.

Из (3.1) следует: $x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)$ и $y^2=b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)$, отсюда получаем соотношения: $x^2\ge a^2$, $y^2<\frac{b^2}{a^2}x^2$, приводящие к неравенствам: $|x|\ge a$ и $|y|<\frac{b}{a}|x|$. Итак, первая часть утверждения доказана. Заметим, что в силу второго из последних неравенств гипербола не пересекает прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Для расстояния OM произвольной точки гиперболы $M(x,y)$ до начала координат с учетом (3.1) имеем:

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-b^2}\,.$$

Используя это соотношение, заключаем, что при неограниченном увеличении $|x|$ ($|x|\to+\infty$) OM также неограниченно увеличивается, поэтому OM может быть сколь угодно большим. А это и означает, что гипербола – неограниченная кривая.

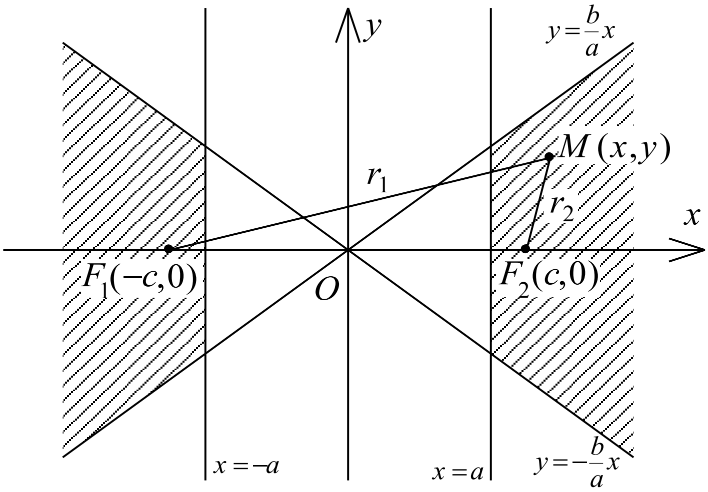

Рис. 3.1. К расположению гиперболы на координатной плоскости

Гипербола имеет две бесконечные ветви, расположенные в левой и правой полуплоскостях координатной плоскости. На рис. 3.1 заштрихованы те

части плоскости* Oxy*, в которых расположены ветви гиперболы.

Из уравнения (3.1) следует, что точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ принадлежат гиперболе, они называются *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2, а также его длина $2a$ называется *действительной* осью гиперболы (рис. 3.3). Гипербола не пересекает ось Oy.

3. *Фокусы гиперболы. Свойство фокальных радиусов точки гиперболы.* Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, находящиеся на действительной оси гиперболы, называются её *фокусами*, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки $M(x, y)$ до этих точек – *фокальными радиусами* точки M (рис. 3.1).

Свойство фокальных радиусов

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Обоснование этого равенства проводится так же, как в случае эллипса (см. §2). Свойство фокальных радиусов можно сформулировать следующим образом.

Модуль разности расстояний произвольной точки M гиперболы, определяемой уравнением (3.1), до двух фиксированных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, есть величина постоянная, равная длине её действительной оси.

4. *Асимптоты гиперболы. Построение гиперболы.* Прямые $L_1: y = \dfrac{b}{a}x$ и $L_2: y = -\dfrac{b}{a}x$, между которыми, как показано выше, лежат ветви гиперболы, играют важную роль в исследовании формы и построении гиперболы.

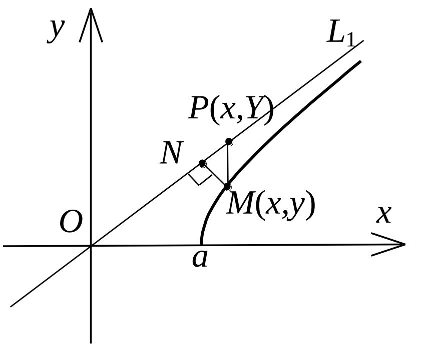

Рис. 3.2. К понятию асимптоты гиперболы

Рассмотрим часть гиперболы, расположенную в первом квадранте, и прямую $L_1: y = \dfrac{b}{a}x$ (рис. 3.2). Данная часть гиперболы определяется уравнением: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. На гиперболе возьмём любую точку $M(x, y)$, а на прямой L_1 соответствующую точку $P(x, Y)$. Эти точки имеют одинаковые абсциссы, а их ординаты удовлетворяют уравнениям этих линий: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $Y = \dfrac{b}{a}x$.

Для разности $Y - y$ имеем:

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ т.е. } Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Из последнего равенства следует, что разность $Y - y$ неограниченно уменьшается с увеличением абсциссы x. Поскольку $|MP| = Y - y$, то приходим к выводу, что длина отрезка MP неограниченно уменьшается с увеличением абсциссы x. Обозначим через d расстояние точки $M(x,y)$ до прямой L_1, $d = |MN|$ (рис. 3.2). Из свойства наклонной и перпендикуляра, опущенных из одной точки на прямую, имеем неравенство: $0< |MN| < |MP|$. Отсюда заключаем, что расстояние d произвольной точки гиперболы $M(x,y)$ до прямой L_1 неограниченно уменьшается с увеличением её абсциссы, т. е. с удалением точки $M(x,y)$ по гиперболе от начала координат. Другими словами, по мере удаления (с увеличением x) точки $M(x, y)$ от начала координат по гиперболе вправо ($y > 0$) эта точка приближается сколь угодно близко к прямой L_1 (но никогда не пересекает ее – см. рис. 3.2 и свойство 2). Прямая L_1 называется *асимптотой* для ветви гиперболы, расположенной в первом квадранте. В силу свойства симметрии гиперболы прямая L_1 является асимптотой и для ветви гиперболы, расположенной в третьем квадранте, а прямая L_2 – асимптотой для её ветвей, расположенных во втором и четвёртом квадрантах. Асимптоты гиперболы проходят через противолежащие вершины прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$, который называется *основным прямоугольником* гиперболы (рис. 3.3).

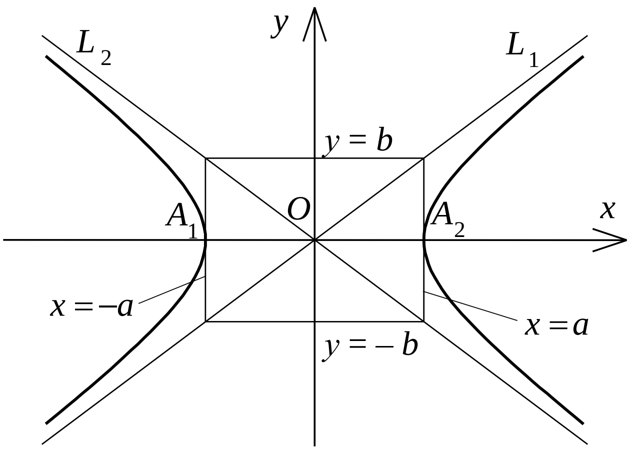

Рис. 3.3. Построение гиперболы, прямые L_1 и L_2 – асимптоты гиперболы

5. *Эксцентриситет гиперболы.*

Определение 3.2. Отношение расстояния между фокусами гиперболы к длине её действительной оси называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается e.

По определению $e = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$, откуда следует, что $e > 1$, поскольку для гиперболы $c > a$. При фиксированной действительной полуоси a с увеличением эксцентриситета c увеличивается, поэтому b также увеличивается ($b = \sqrt{c^2 - a^2}$). При этом увеличивается угол наклона асимптоты гиперболы $y = \dfrac{b}{a}x$ к оси Ox и, следовательно, ветви гиперболы раскрываются (рис. 3.4).

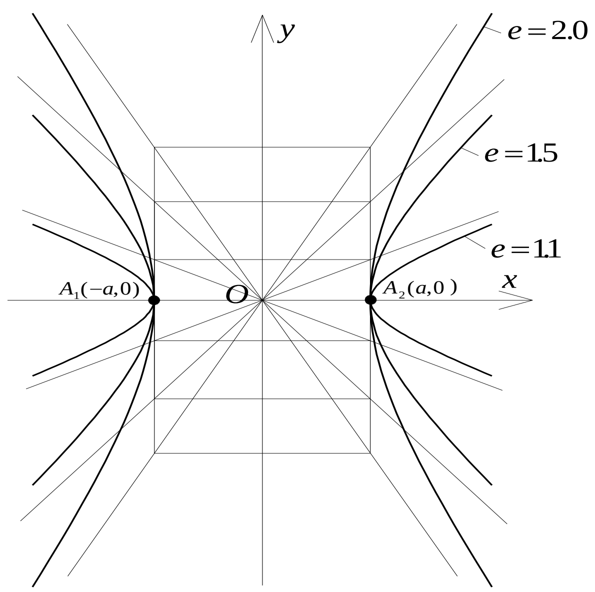

Рис. 3.4. Влияние эксцентриситета на форму гиперболы

6. *Каноническая* система координат. *Каноническое* уравнение гиперболы.

Гипербола определяется уравнением (3.1), если система координат выбрана следующим образом: ось *Ox* проходит через фокусы гиперболы, а ось *Oy* – через её центр симметрии. Такая система координат называется *канонической* по отношению к данной гиперболе, а уравнение (3.1) называется *каноническим* уравнением гиперболы. В другой прямоугольной системе координат уравнение данной гиперболы не будет каноническим и может содержать члены с первыми степенями координат и их произведением.

Пример 3.1. Гипербола задана уравнением $9x^2-16y^2=144$. Найти её полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот. Изобразить гиперболу на чертеже.

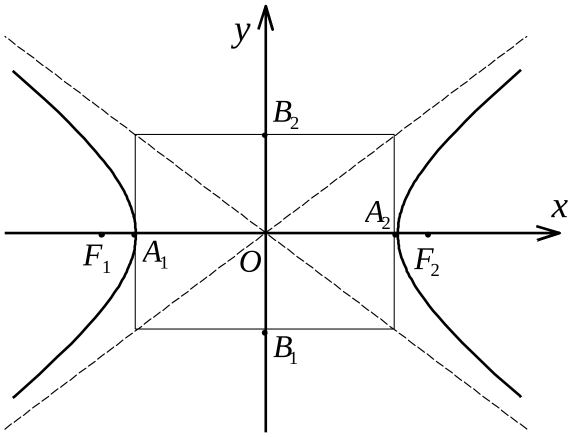

Рис. 3.5. К примеру 3.1

►Разделив обе части данного уравнения на 144, имеем равенство $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, сравнив которое с (3.1), заключаем, что $a^2=16$, $b^2=9$, откуда $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. Точки $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$ – фокусы гиперболы, а её эксцентриситет $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Асимптоты гиперболы L_1 и L_2 имеют уравнения $y=\pm\frac{3}{4}x$. Основной прямоугольник гиперболы образован прямыми $x=\pm4$, $y=\pm3$, асимптоты L_1 и L_2 проходят через его вершины (рис. 3.5). На этом рисунке изображена данная гипербола, её действительная ось A_1A_2, $A_1(-5,0)$, $A_2(5,0)$, отрезок B_1B_2, называемый *мнимой осью*, $B_1(0,-4)$, $B_2(0,4)$, точки F_1, F_2 – фокусы гиперболы. ◄

Уравнение (3.1) при $a=b$ принимает вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ или

$$x^2-y^2=a^2 \tag{3.2}$$

и определяет так называемую *равнобочную* гиперболу. Её асимптоты имеют уравнения $y=\pm x$ и являются биссектрисами координатных углов, а основной прямоугольник – квадратом. С равнобочной гиперболой читатель уже встречался в курсе элементарной математики, а именно, при изучении обратно пропорциональной зависимости. График этой функции является равнобочной гиперболой. Действительно, рассмотрим функцию $y=\frac{k}{x}$ в предположении $k>0$, и преобразуем последнее равенство к виду:

$$xy=k. \tag{3.3}$$

Рассмотрим новую прямоугольную декартову систему координат $Ox'y'$, которая получается из системы Oxy поворотом на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг начала координат (рис. 3.6). Используя формулы (6.4) из главы 2 раздела 2, напишем формулы преобразования координат:

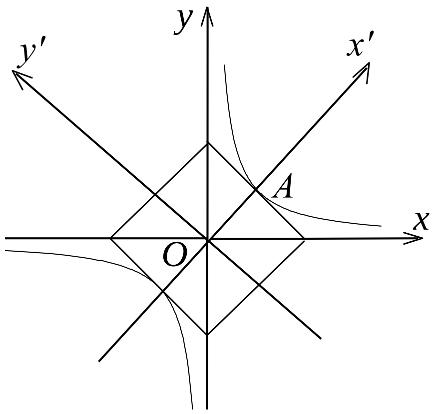

Рис. 3.6. Равнобочная гипербола как график обратно пропорциональной зависимости

$$y=\frac{k}{x}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\dfrac{\pi}{4} - y'\sin\dfrac{\pi}{4}, \\ y = x'\sin\dfrac{\pi}{4} + y'\cos\dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$$ или

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y',$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Подставим последние равенства в (3.3):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)=k$$ или

$$x'^2-y'^2=2k.$$

Положив в последнем уравнении $2k=a^2$, приходим к уравнению

$$x'^2-y'^2=a^2. \qquad (3.4)$$

Сравнив это равенство с уравнением (3.2), заключаем, что уравнение (3.4) определяет равнобочную гиперболу. Она изображена на рис. 3.6,