

Практика.

Соленоидальные поля

Определение

Векторное поле $\vec{a}(M) \forall M \in A \subset R^3$, называется *соленоидальным*, если

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0 \quad \forall M \in A$$

Свойства соленоидальных полей

1) $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0 \Rightarrow$ поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю, т.е. $\Pi_{\sigma} \vec{a}(M) = 0$;

2) $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0 \Rightarrow$ существует некоторое поле $\vec{b}(M)$, такое что

$$\vec{a}(M) = \operatorname{rot} \vec{b}(M) \quad \forall M \in A.$$

Тогда вектор \vec{b} называется *векторным потенциалом* поля $\vec{a}(M)$.

Замечания:

1) Векторный потенциал определяется неоднозначно
(это следует из свойства 2);

2) Векторное поле $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$ - это соленоидальное поле, то есть $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$.

Гармонические векторные поля

Определение (гармонического поля)

Векторное поле $\vec{a}(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$, называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным, и соленоидальным.

$$\begin{cases} \vec{a}(M) = \operatorname{grad} f(M) \\ \operatorname{div} \vec{a}(M) = 0 \end{cases}, \quad \forall M \in A.$$

Замечание:

Для гармонического поля справедливо равенство:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(M) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} = 0.$$

Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Теорема.

Пусть $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ – произвольное векторное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть функции $P(M); Q(M); R(M)$ – имеют непрерывные частные производные $\forall M \in A$.

Тогда векторное поле $\bar{a}(M)$ можно разложить на сумму двух полей

$$\bar{a}(M) = \bar{a}_1(M) + \bar{a}_2(M), \quad (**)$$

где $\bar{a}_1(M)$ – потенциальное поле, $\bar{a}_2(M)$ – соленоидальное поле $\forall M \in A$.

Замечание:

Представление векторного поля $\bar{a}(M)$ в виде (**) не единственно.

Дифференциальные операции 1 и 2 порядков

Основные формулы

Дифференциальные операции 1 порядка

Оператор Гамильтона (набла):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \right)$$

Тогда:

$\nabla f(M) = \text{grad } f(M)$ - для скалярного поля

$$\nabla \bar{a}(M) = \text{div } \bar{a}(M) \quad - \text{ для векторного поля}$$

$$\nabla \times \bar{a}(M) = \text{rot } \bar{a}(M) \quad - \text{ для векторного поля}$$

Свойства оператора Гамильтона

$$1) \nabla c = \bar{0}, \text{ где } c - \text{const}$$

$$2) \nabla \bar{c} = 0, \text{ где } \bar{c} - \text{постоянный вектор}$$

$$3) \nabla \times \bar{c} = \bar{0}, \text{ где } \bar{c} - \text{постоянный вектор}$$

$$4) \nabla(\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}) = \lambda_1 \nabla \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \bar{b}$$

$$5) \nabla \times (\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}) = \lambda_1 \nabla \times \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \times \bar{b}$$

Дифференциальные операции 2 порядка:

$$\text{div grad } f(M) = \nabla(\nabla f(M))$$

$$\text{rot grad } f(M) = \nabla \times \nabla f(M)$$

$$\text{grad div } \bar{a}(M) = \nabla(\nabla \bar{a}(M))$$

$$\text{div rot } \bar{a}(M) = \nabla(\nabla \times \bar{a}(M))$$

$$\text{rot rot } \bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M))$$

Дифференциальные операции 2 порядка, можно представить

в виде таблицы:

grad grad $f(M)$	grad div $\bar{a}(M)$	grad rot $\bar{a}(M)$
div grad $f(M)$	div div $\bar{a}(M)$	div rot $\bar{a}(M)$
rot grad $f(M)$	rot div $\bar{a}(M)$	rot rot $\bar{a}(M)$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

1) $f(M)$ – скалярное поле:

$$\Delta f(M) = \nabla \nabla f(M) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(M)$$

или в координатной форме

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}.$$

Замечание:

Если для скалярного поля $f(M)$ выполняется условие $\Delta f(M) = 0$, то такое поле называется *Лапласовым (или гармоническим)*.

2) $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ – векторное поле:

$$\overline{\Delta a}(M) = \Delta P(M)\bar{i} + \Delta Q(M)\bar{j} + \Delta R(M)\bar{k}$$

или в координатной форме

$$\overline{\Delta a}(M) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \bar{k}$$

Свойства оператора Лапласа.

1) $\Delta \bar{c} = 0$, где \bar{c} – постоянный вектор.

2) $\Delta(\bar{c} f(M)) = \bar{c} \Delta f(M)$, где \bar{c} – постоянный вектор.

3) $\Delta(C \bar{a}(M)) = C \Delta \bar{a}(M)$, $C = \operatorname{const}$.

4) $\Delta(\bar{a}_1(M) + \bar{a}_2(M)) = \Delta \bar{a}_1(M) + \Delta \bar{a}_2(M)$.

5) $\Delta \cdot (\nabla f(M)) = \nabla(\Delta f(M))$,

$$6) \Delta(\operatorname{div} \bar{a}(M)) = \operatorname{div}(\Delta \bar{a}(M)),$$

$$7) \Delta(\operatorname{rot} \bar{a}(M)) = \operatorname{rot}(\Delta \bar{a}(M))$$

Свойства 3) и 4) означают, что оператор Лапласа - это линейный оператор, преобразующий одну векторную величину в другую векторную величину.

Свойства 5) – 7) означают, что оператор Лапласа перестановочен с градиентом, дивергенцией и ротором.

Формулы для дифференциальных операций второго порядка:

$$1) \operatorname{rot} \operatorname{grad} f(M) = \bar{0}$$

или

$$\nabla \times (\nabla f(M)) = \bar{0}.$$

$$2) \nabla(\nabla \bar{a}(M)) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}(M)$$

или

$$\nabla(\nabla \bar{a}(M)) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \bar{k}.$$

$$3) \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \nabla(\nabla \times \bar{a}(M)) = 0.$$

$$4) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}(M) - \Delta \bar{a}(M)$$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M)) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}(M) - \Delta \bar{a}(M).$$

Таблица для дифференциальных операций 2 порядка

	$\bar{a}(M)$	$f(M)$	
	$grad f(M)$	$div \bar{a}(M)$	$rot \bar{a}(M)$
$grad f(M)$	---	$grad div \bar{a}(M) = \nabla(\nabla \bar{a}(M))$	---
$div \bar{a}(M)$	$div grad f(M) = \nabla(\nabla f(M)) = \Delta f(M)$	---	$div rot \bar{a}(M) = \nabla(\nabla \times \bar{a}(M)) = 0$
$rot \bar{a}(M)$	$rot grad f(M) = \nabla \times \nabla f(M) = \bar{0}$	---	$rot rot \bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M)) = grad div \bar{a}(M) - \Delta \bar{a}(M) = \nabla \nabla \bar{a}(M) - \Delta \bar{a}(M)$