§2. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 2.1. ***Пусть ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится. Тогда***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (2.1)$$

► Обозначим через s сумму данного ряда. Имеем:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \text{ ◄}$$

Замечание 2.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то это вовсе *не означает*, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Так, в примере 1.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится, хотя $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$, $n \to \infty$. Далее также будет показано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, но очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является *необходимым условием* сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится).

Пример 2.1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$ расходится.

► Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, значит, не выполняется необходимое условие сходимости, и данный ряд расходится. ◄