§1. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Метод Гаусса

1°. Основные понятия. Равносильные системы.

Определение 1.1. Система линейных алгебраических уравнений (или система линейных уравнений) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

при этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ – *коэффициентами при неизвестных* или *коэффициентами системы*, причем индекс i означает номер уравнения в системе (1.1), а индекс k – номер неизвестной. Величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами*. Иногда систему (1.1) для простоты будем называть *линейной системой*.

Замечание 1.1. Если система (1.1) содержит не более четырёх неизвестных, то они часто обозначаются буквами *x, y, z, t* без индексов.

Если $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, то систему (1.1) называют *квадратной*. При $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ система (1.1) называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Например, $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ – неоднородная квадратная линейная система из двух уравнений с двумя неизвестными x и y.

Определение 1.2. *Решением системы* (1.1) называется такой упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, который при подстановке в систему (1.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ превращает её в систему тождеств:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение системы (1.1) принято обозначать следующим образом: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ или $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Определение 1.3. Система (1.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае. Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение и *неопределённой* в противном случае.

Пример 1.1. Система $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$, поэтому является совместной определённой системой.

Пример 1.2. Система

$$\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ -6x+8y=2 \end{cases}$$

имеет более одного решения, например, её решениями являются: $x=1,\ y=1$; $x=2,\ y=7/4$; $x=5,\ y=4$. Эта система является совместной неопределённой системой.

Пример 1.3. Система

$$\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ -6x+8y=7 \end{cases}$$

не имеет решений, т.е. является несовместной.

Решить систему (1.1) – это значит найти все её решения или доказать, что она не имеет решений. Для этого систему преобразуют в более простую, решения которой легко найти или доказать её несовместность. При этом центральным понятием является равносильность двух систем.

Определение 1.4. Две линейные системы с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *равносильными*, если они обе несовместны, или же они обе совместны и каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

Пример 1.4. Системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0 \end{cases}$ являются равносильными, так как $x=1, y=1$ является решением и той и другой системы, а других решений они не имеют.

Пример 1.5. Системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 3x-4y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=0 \end{cases}$ также являются равносильными, поскольку обе они несовместны.

Число уравнений в равносильных совместных системах может быть различным, но они должны содержать одни и те же неизвестные.

2°. Теорема об элементарных преобразованиях в системе линейных уравнений.

Определение 1.5. *Элементарными преобразованиями* над системой линейных уравнений вида (1.1) называются:
1) перестановка местами двух любых её уравнений;
2) умножение всех членов любого уравнения системы на любое отличное от нуля число;
3) почленное сложение любых двух её уравнений.

На практике обычно объединяют последние два элементарных преобразования в одно и рассматривают два основных типа:
первый тип – перестановка местами уравнений системы;
второй тип – почленное сложение двух любых её уравнений, все члены одного из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Теорема 1.1. Конечное число последовательно выполненных элементарных преобразований первого и второго типов приводят систему (1.1) к равносильной ей системе.

*►Очевидно, достаточно доказать теорему для одного элементарного преобразования каждого из двух типов.

Пусть в системе (1.1) переставлены местами какие-либо два уравнения, например, первое и второе:

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.3}$$

Если система (1.1) несовместна, то и система (1.3) должна быть несовместной. Действительно, предположим противное: система (1.3) имеет решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Подставляя его в уравнения системы (1.3), приходим к системе тождеств:

$$\begin{cases} a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{1.4}$$

Переставляя в (1.4) первое и второе равенства, получаем систему тождеств (1.2) и заключаем, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – решение системы (1.1). Поскольку этот вывод противоречит условию несовместности этой системы, то предположение о совместности системы (1.3) неверно и остаётся принять утверждение о несовместности этой системы. Аналогичным образом доказывается обратное утверждение: несовместность системы (1.3) влечет несовместность системы (1.1).

Предположим теперь, что система (1.1) совместна, т. е. справедлива система тождеств (1.2) для какого-либо решения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ этой системы. Тогда, переставив первое и второе тождество в (1.2), приходим к системе тождеств (1.4). А это означает, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – решение системы (1.3). Аналогично доказывается, что любое решение системы (1.3) является решением системы (1.1).

Таким образом, доказано, что преобразование первого типа превращает систему (1.1) в равносильную систему (1.3).

Пусть теперь ко всем членам какого-либо уравнения системы (1.1) (для определенности первого) прибавили все члены другого уравнения (для определенности второго), умноженные на одно и то же число λ, не равное нулю:

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda a_{21})x_1 + (a_{12} + \lambda a_{22})x_2 + \ldots + (a_{1n} + \lambda a_{2n})x_n = b_1 + \lambda b_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.5}$$

Если система (1.1) несовместна, то и система (1.5) должна быть несовместна. Доказывая это утверждение, предположим противное: система (1.5) имеет решение $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Подставляя его в эту систему, приходим к следующей системе тождеств:

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda a_{21})\alpha_1 + (a_{12} + \lambda a_{22})\alpha_2 + \ldots + (a_{1n} + \lambda a_{2n})\alpha_n = b_1 + \lambda b_2, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{1.6}$$

Вычитая из первого тождества системы (1.6) почленно второе тождество, все члены которого умножены на одно и то же число λ, не равное нулю, получаем систему тождеств (1.2) и заключаем, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – решение (1.1). Этот вывод противоречит условию несовместности системы (1.1). Полученное противоречие означает, что предположение о совместности системы (1.5) было неверным, и остается принять то, что требовалось доказать. Аналогично доказывается, что из несовместности системы (1.5) следует несовместность системы (1.1).

Предположим теперь, что система (1.1) совместна и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – какое-либо её решение, т. е. справедлива система тождеств (1.2). Прибавляя ко всем членам первого ее тождества соответствующие члены второго, умноженные на одно и то же число $\lambda \neq 0$, получим систему тождеств (1.6). А это означает, что $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – решение (1.5).

Аналогично, предполагая, что $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – решение (1.5) (т.е. справедлива система тождеств (1.6)), и вычитая почленно из первого тождества этой системы второе, все члены которого умножены на одно и то же число $\lambda \neq 0$, приходим к системе (1.2). А это означает, что $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – решение (1.1).

Таким образом, и для элементарных преобразований второго типа утверждение теоремы доказано.◄

Пример 1.6. Показать, что при помощи элементарных преобразований можно из системы $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ получить систему $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0. \end{cases}$

►Проведём последовательно следующие элементарные преобразования.

1) Умножим первое уравнение исходной системы на 3, а второе – на 7, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 9x - 12y = -3, \\ 14x + 35y = 49. \end{cases}$$

2) К первому уравнению прибавим второе:

$$\begin{cases} 23x + 23y = 46, \\ 14x + 35y = 49. \end{cases}$$

3) Первое уравнение умножим на 1/23, а второе – на 2/7:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 4x + 10y = 14. \end{cases}$$

4) Ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на (–7):

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ -3x + 3y = 0. \end{cases}$$

5) Второе уравнение умножим на (–1/3): $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0. \end{cases}$ ◄

3°. Расширенная матрица системы. Ступенчатая матрица. Метод Гаусса. Коэффициенты a_{ik} системы (1.1) удобно объединить в прямоугольную таблицу, называемую *матрицей системы*. Для матрицы принято обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A содержит m горизонтальных рядов, называемых *строками*, и n вертикальных рядов, называемых *столбцами*, числа a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, k = 1,2,…,n, называются её *элементами*. Таким образом, первый индекс i элемента a_{ik} указывает номер строки (номер уравнения системы (1.1)), а второй индекс k – номер столбца (или номер неизвестной x_k, коэффициентом при котором является a_{ik} в i-ом уравнении системы (1.1)).

Если m=n, то матрица A называется *квадратной* матрицей n-го (или m-го) порядка. У квадратной матрицы число строк и столбцов одинаково. Квадратная матрица называется *единичной*, если её элементы $a_{ii} = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$, а все остальные элементы равны нулю.

Так, матрица $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 3-го порядка, а матрица $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 2-го порядка. Нижние индексы в обозначениях квадратных матриц соответствуют их порядку.

Если к матрице A добавить $(n+1)$-ый столбец из свободных членов, то получим так называемую *расширенную* матрицу A* системы, содержащую всю информацию о системе:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Для системы из примера 1.1 матрицей системы является $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, а расширенной матрицей этой системы является матрица $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{array}\right)$.

На практике элементарным преобразованиям подвергают не саму систему (1.1), а её расширенную матрицу. Преобразованиям двух типов над системой (1.1) соответствуют два типа элементарных преобразований над строками матрицы A^*:

1-ый тип – перестановка местами двух любых её строк;

2-ой тип – сложение соответствующих элементов двух любых её строк, все элементы одной из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Целью элементарных преобразований является приведение расширенной матрицы A^* системы (1.1) к так называемой ступенчатой форме.

Определение 1.6. Матрица называется *ступенчатой*, если для неё выполняются следующие условия:

1) если какая-либо строка данной матрицы состоит из нулей, то и все последующие строки также состоят из нулей;
2) если a_{ik} – первый ненулевой элемент i –той строки, а $a_{i+1,m}$ – первый ненулевой элемент $(i+1)$ –ой строки, то $k < m$.

Так, например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

является ступенчатой.

Матрица из одной строки считается ступенчатой по определению.

Теорема 1.2. Любую матрицу A конечным числом элементарных преобразований первого и второго типов можно преобразовать в ступенчатую матрицу.

*►Если данная матрица A состоит из одной строки или является нулевой (все её элементы равны нулю), то она по определению ступенчатая.

Пусть теперь ненулевая матрица A содержит $m \geq 2$ строк и n столбцов. Проводя доказательство методом математической индукции, предположим, что матрицу с числом строк, меньшим m, можно привести к ступенчатому виду. Поскольку A – ненулевая матрица, то хотя бы один её элемент отличен от нуля. Выберем в A строку, в которой первый ненулевой элемент расположен в столбце с наименьшим номером k $(1 \le k \le n)$. Во всех других строках первые ненулевые элементы расположены в столбцах с номерами, большими или равными k. Преобразованием первого типа переставим эту строку на первое место сверху. Тогда преобразованная матрица имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{1k} \ne 0.$$

Проделаем следующие элементарные преобразования второго типа: к элементам 2-ой, 3-ей, …, m-ой строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на числа $-a_{2k}/a_{1k}$, $-a_{3k}/a_{1k}$, … , $-a_{mk}/a_{1k}$. В результате преобразованная матрица имеет вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\ . & . & . & . & B & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все элементы k-го столбца матрицы A_2, кроме первого, являются нулями, а через B обозначена матрица из $(m-1)$-ой строки и $(n-k)$ столбцов.

По предположению индукции матрица B приводится к ступенчатой форме преобразованиями первого и второго типов. Очевидно, выполняя эти же преобразования над $m-1$ строками матрицы A_2 (над всеми, кроме первой), приведём и матрицу A_2 к ступенчатому виду, так как при этом нули в первых k столбцах матрицы A_2 переходят при этих преобразованиях в нули.◄

Пример 1.7. Привести к ступенчатому виду матрицу $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

►Выполним следующие элементарные преобразования над матрицей A^*:

1) к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой строки и из элементов 3-ей строки вычтем элементы 1-ой строки, в результате A^* преобразуется к виду:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right);$$

2) переставим 2-ую и 3-ью строки: $A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$;

3) из последней строки полученной матрицы вычтем 2-ую строку, умноженную на 3, получим:

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right). \blacktriangleleft$$

На приведении расширенной матрицы A^* системы (1.1) к ступенчатой матрице A_1^* основан *метод Гаусса*, или метод последовательного исключения неизвестных. Система линейных уравнений с расширенной ступенчатой матрицей A_1^* называется *ступенчатой*, по теореме 1.1 она будет равносильна системе (1.1). Приведение системы (1.1) к ступенчатой форме называется *прямым ходом* метода Гаусса. Решение полученной ступенчатой системы называется *обратным ходом* метода Гаусса. Он может быть выполнен как в форме последовательного определения неизвестных, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, так и в форме преобразования матрицы A^* к ступенчатой матрице B^* специального вида.

Пример 1.8. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x+2z=8, \\ -x+3y=-5, \\ x+y+z=4. \end{cases}$

► $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Прямой ход метода Гаусса. В примере 1.7, матрица A^* при помощи элементарных преобразований приведена к следующей ступенчатой матрице:

$$A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right).$$

Теперь матрице A_1^* сопоставим систему, для которой она будет расширенной матрицей: $\begin{cases} x+2z=8, \\ y-z=-4, \\ \quad 5z=15. \end{cases}$

Обратный ход метода Гаусса. 1 - ы й с п о с о б. Имеем

$$z=3;$$
$$y=-4+z=-4+3=-1 \Rightarrow y=-1;$$
$$x=8-2z=8-6=2.$$

2 – о й с п о с о б. Умножим последнюю строку матрицы A_1^* на 1/5, сложим со второй строкой, а к первой строке прибавим последнюю, умноженную на

(–2), с целью получить нули в третьем столбце:

$$A_1^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = B^*.$$

Напишем систему с расширенной матрицей B^*: $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=3. \end{cases}$

Ответ: система совместная и определенная, она имеет единственное решение $x = 2, y = -1, z = 3.$ ◄

Замечание 1.2. В главе 3 рассмотрены примеры на метод Гаусса, отражающие различные случаи, встречающиеся при решении линейных систем.