§7. Общий план исследования функции и построение её графика

Нижеследующий план-схема исследования функции обобщает результаты, изложенные в предыдущих параграфах. Исследование функции по этому плану позволит построить обоснованный математический эскиз графика функции.

План исследования функции

1. Отыскание области определения данной функции $y=f(x)$, установление свойств чётности (нечётности) и периодичности.

2. Отыскание точек пересечения графика функции с осями координат и промежутков знакопостоянства.

3. Исследование функции на непрерывность и существование асимптот.

4. Отыскание промежутков монотонности и точек экстремума.

5. Отыскание промежутков одинаковой направленности выпуклости графика функции и точек перегиба.

6. Построение математического эскиза графика функции и отыскание множества её значений.

Пример 7.1. Построить график функции $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}$.

►**1.** $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2. График пересекает оси координат в точках (2, 0) и (0, –4), $f(x)<0$ при $x<2$, $f(x)>0$ при $x>2$.

3. На $D(f)$ функция непрерывна как элементарная, $x=1$ – точка разрыва 2 рода ($\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}=-\infty$), прямая $x=1$– вертикальная асимптота графика функции (замечание 6.1). Вычисляя пределы (6.2), имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^3}{2x(x-1)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2+11x-8}{2(x-1)^2}=-2\Rightarrow \quad \Rightarrow b=-2.$$

Прямая L: $y=x/2-2$– наклонная асимптота графика (теорема 6.1).

4. $f'(x)=\left(\dfrac{(x-1)^3}{2(x-1)^2}\right)'=\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}$, на $D(f)$ только две критические точки: $x=-1$, $x=2$, $f'(-1)=f'(2)=0$. Вместе с точкой $x=1$ они делят ось Ox на 4 промежутка: $(-\infty,-1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$. Знак $f'(x)$ в каждом из них приведён в таблице 7.1. Характер изменения функции указан стрелками, $\nexists$ – символ несуществования, $x=-1$ – точка гладкого максимума, а в точке $x=2$ нет экстремума, ибо $f'(x)$ не меняет

Таблица 7.1

x		–1		1		2	
$f'(x)$	+	0	–	$\nexists$	+	0	
$f(x)$	↗	–27/8 max	↘	$\nexists$	↗	0	↗

знака при переходе аргумента x через эту точку.

5. $f''(x)=\left(\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}\right)'=\dfrac{3(x-2)}{(x-1)^4}$, $x=2$ – единственная точка, подозрительная на перегиб, $f''(2)=0$. Вместе с точкой $x=1$ она делит ось Ox на три промежутка: $(-\infty,1)$, $(1,\ 2)$, $(2,+\infty)$. Знак $f''(x)$ в каждом из них приведён в таблице 7.2. В ней дугами указано направление выпуклости графика функции, (2, 0) – точка перегиба графика.

Таблица 7.2

x		1		2	
$f''(x)$	–	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	$\nexists$	$\cap$	0	$\cup$

6. Результаты проведённых исследований используем для построения графика данной функции. Сначала строим асимптоты, точку максимума и точку перегиба, затем строим график функции с учётом характера поведения функции на $D(f)$ (таблица 7.1) и направления выпуклости графика (таблица 7.2). График данной функции приведён на рис. 7.1, $E(y)=\boldsymbol{R}$.◄

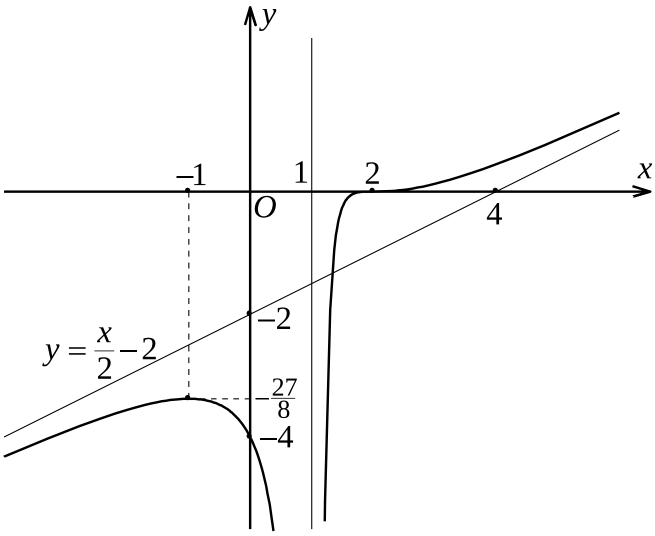

Рис. 7.1. График функции $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}$

Пример 7.2. Построить график функции $f(x)=\dfrac{x}{\ln|x|}$.

►**1.** $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,\ 0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f(x)$ – нечётная функция, так как $f(-x)=-f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Далее исследование функции и построение графика проведём на промежутке $(0,+\infty)$, потом, используя симметрию графика, построим его и на промежутке $(-\infty,0)$.

2. График не имеет точек пересечения с осями координат, $f(x)<0$ при $0<x<1$, $f(x)>0$ при $x>1$.

3. Данная функция непрерывна как элементарная в любой точке промежутка $(0,+\infty)$, кроме точки $x=1$, где она имеет разрыв. Прямая $x=1$– вертикальная асимптота графика функции, поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{\ln|x|}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{\ln|x|}=+\infty$. В точке $x=0$ данная функция имеет правосторонний устранимый разрыв, так как $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{\ln x}=0$, поэтому через эту точку не проходит вертикальная асимптота.

Вычисляя пределы (6.2), имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0\Rightarrow k=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. В соответствии с теоремой 6.1 заключаем, что график функции при $x\to+\infty$ не имеет наклонных и горизонтальных асимптот.

4. $f'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$, на промежутке $(0,+\infty)$ есть только одна критическая точка: $x=e$, $f'(e)=0$. Вместе с точкой $x=1$ она разбивает его на три промежутка: (0, 1), $(1,e)$, $(e,+\infty)$. Определив в каждом из них знак $f'(x)$, результаты сведём в таблицу 7.3. В ней стрелками указан характер изменения функции на данном промежутке, $\nexists$ – символ несуществования. В точке $x=e$ функция имеет гладкий минимум.

Т а б л и ц а 7.3

x	0		1		e	
$f'(x)$	$\nexists$	–	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	e min	$\nearrow$

5. $f''(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\right)'=\frac{-\ln x+2}{\ln^3 x}$, $f''(x)=0$ при $x=e^2$, в этой точке график функции может иметь перегиб. Вместе с точкой $x=1$ она разбивает промежуток $(0,+\infty)$ на три промежутка: $(0,1)$, $(1,e^2)$, $(e^2,+\infty)$. Знак $f''(x)$ в каждом из них приведён в таблице 7.4, в ней дугами указан характер направления выпуклости графика функции, $(e^2,e^2/2)$ – точка перегиба графика.

Т а б л и ц а 7.4

x		1		e^2	
$f''(x)$	–	$\nexists$	+	0	–
$f(x)$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	$e^2/2$	$\cap$

6. Используя результаты выполненных исследований, построим график функции на промежутке $(0,+\infty)$. Сначала строим асимптоты, точку минимума и точку перегиба, затем график функции с учётом характера поведения функции (таблица 7.3) и направления выпуклости графика (таблица 7.4). Часть графика данной функции, отвечающую отрицательным значениям x, получим, используя центральную симметрию. График функции приведён на

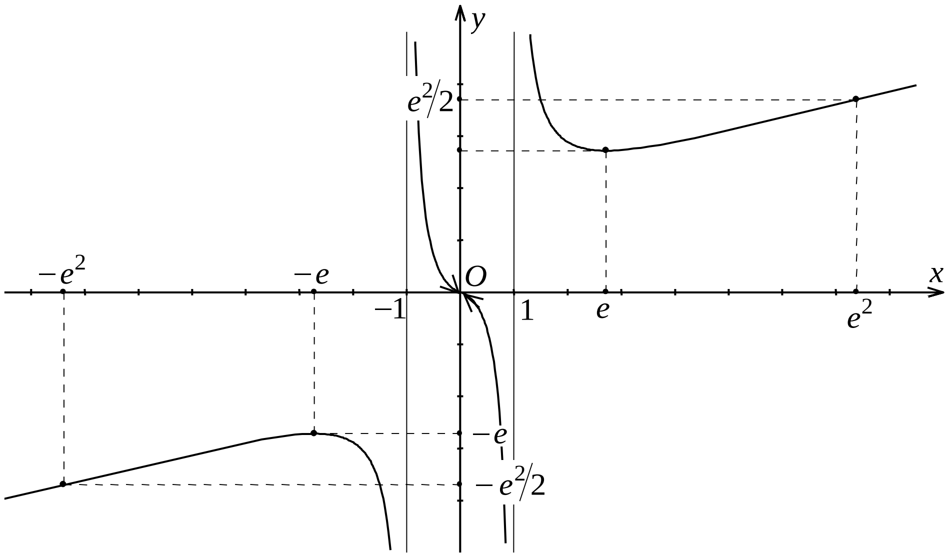

Рис. 7.2. График функции $f(x)=\frac{x}{\ln|x|}$

рис. 7.2, $E(y)=\boldsymbol{R}$.◄

Пример 7.3. Построить график функции $f(x)=(x-2)e^{-1/(x-2)}$.

►**1.** $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, на $D(f)$ данная функция непрерывна как элементарная, $x=2$ – точка разрыва. В примере 6.1 показано, что прямая L: $x=2$ является вертикальной асимптотой графика данной функции при $x\to 2-0$, при этом $f(x)\to-\infty$. Но L не является асимптотой при $x\to 2+0$, так как $f(2+0)=0$ (пример 6.1).

Получив с помощью формулы (9.7) главы 3 раздела 4 разложение $e^{-1/(x-2)}=1-\dfrac{1}{x-2}+o\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$, имеем: $f(x)=(x-2)\left(1-\dfrac{1}{x-2}+o\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\right)$ или $f(x)=x-3-(x-2)\cdot o\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$. Поскольку $(x-2)\cdot o\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\to 0$ при $x\to\pm\infty$, то в соответствии с определением 6.2 приходим к выводу, что прямая L: $y=x-3$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$.

2. $f'(x)=\dfrac{x-1}{x-2}e^{-1/(x-2)}$, на $D(f)$ есть одна критическая точка: $x=1$, в которой $f'(x)=0$. Вместе с точкой x=2 она делит вещественную ось на три интервала: $(-\infty,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$. Знак $f'(x)$ в каждом из них приведён в таблице 7.5. В ней стрелками указан характер изменения функции на данном промежутке. В точке $x=1$ функция имеет гладкий максимум.

Таблица 7.5

x		1		2	
$f'(x)$	+	0	–	$\nexists$	+
$f(x)$	↗	$-e$ max	↘	$\nexists$	↗

3. $f''(x)=\dfrac{1}{(x-2)^3}e^{-1/(x-2)}$, на $D(f)$ нет точек перегиба, $f''(x)<0$ при $x<2$ и $f''(x)>0$ при $x>2$, следовательно, график функции направлен выпуклостью вверх на промежутке $(-\infty,2)$ и выпуклостью вниз – на промежутке $(2,+\infty)$.

4. График функции, построенный с использованием результатов проведённых исследований, приведён на рис. 7.3, $E(y)=(-\infty,4]\,U\,(0,+\infty)$.◄

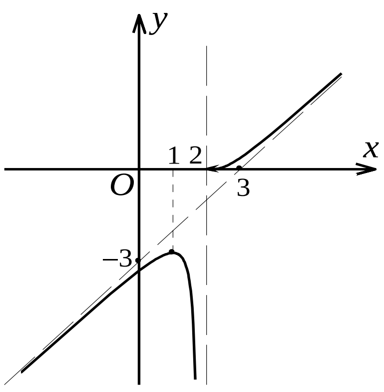

Рис. 7.3. График функции $f(x)=(x-2)e^{-1/(x-2)}$

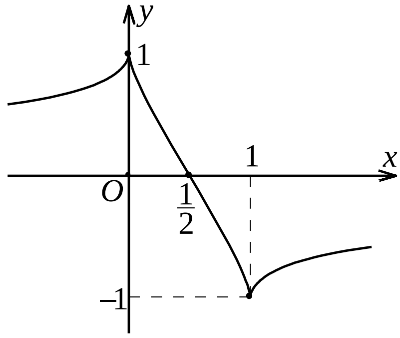

Рис. 7.4. График функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$

Пример 7.4. Построить график функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

►**1.** $D(f)=\boldsymbol{R}$. Для координат точек пересечения графика с осями координат имеем соотношения: $x=0\Rightarrow y=1$; $y=0\Rightarrow\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}=0\Rightarrow\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{x^2}$, отсюда получаем: $(x-1)^2=x^2\Rightarrow -2x+1=0\Rightarrow x=1/2$. Итак, график пересекает оси координат в точках: (0, 1) и $(1/2,0)$. Поскольку

$$f(x)>0\Rightarrow\sqrt[3]{(x-1)^2}>\sqrt[3]{x^2}\Leftrightarrow(x-1)^2>x^2\Leftrightarrow -2x+1>0\Rightarrow x<1/2,$$

то приходим к выводу, что $f(x)>0$ при $x<1/2$, $f(x)<0$ при $x>1/2$.

2. График функции не имеет вертикальных асимптот, поскольку функция непрерывна на $\boldsymbol{R}$ как элементарная. Прямая L: $y=0$ – горизонтальная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2})=0$ (замечание (6.3)). Действительно,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2-x^2}{\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x-1)^2x^2}+\sqrt[3]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x-1)^2x^2}+\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x+1}{x^{4/3}\left(\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^4}+\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}+1\right)}=0.$$

3. $f'(x)=((x-1)^{2/3}-x^{2/3})'=\dfrac{2}{3}((x-1)^{-1/3}-x^{-1/3})=\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$,

$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}>0$ при $\forall x\in\boldsymbol{R}$, $f'(x)=\infty$ при $x=0, x=1$. Итак, функция имеет две критические точки: $x=0$, $x=1$, они делят ось Ox на три интервала: $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$. Определив в каждом из них знак $f'(x)$, полученные результаты сведём в таблицу 7.6. В ней стрелками указан характер изменения функции на данном промежутке. В точке $x=0$ функция имеет острый максимум, а в точке $x=1$ – острый минимум.

Т а б л и ц а 7.6

x		0		1	
$f'(x)$	+	∞	–	∞	+
$f(x)$	$\nearrow$	1 max	$\searrow$	–1 min	$\nearrow$

4. $f''(x)=\dfrac{2}{3}((x-1)^{-1/3}-x^{-1/3})'=\dfrac{2}{9}(x^{-4/3}-(x-1)^{-4/3})=\dfrac{2}{9}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^4}-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4(x-1)^4}}$,

$f''(x)=0$ при $\sqrt[3]{(x-1)^4}-\sqrt[3]{x^4}=0$, отсюда имеем: $\sqrt[3]{(x-1)^4}=\sqrt[3]{x^4}\Rightarrow$ $(x-1)^4=x^4\Rightarrow(x-1)^4-x^4=0$. Разложив левую часть последнего соотношения
на множители по формуле разность квадратов, получим: $((x-1)^2-x^2)((x-1)^2+x^2)=0\Rightarrow(-2x+1)((x-1)^2+x^2)=0$. Итак, $f''(x)=0$ при $-2x+1=0\Rightarrow x=1/2$. В точках $x=0, x=1$ не

Т а б л и ц а 7.7

x		0		$1/2$		1	
$f''(x)$	+	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	–
$f(x)$	$\cup$	1	$\cup$	0	$\cap$	–1	$\cap$

существует $f''(x)$, так как в них первая производная бесконечна. Точки $x=0$, $x=1/2$, $x=1$– точки, подозрительные на перегиб. Они разбивают ось Ox на четыре интервала: $(-\infty,0)$, $(0,1/2),(1/2,1)$, $(1,+\infty)$. Определив в каждом из них знак $f''(x)$, результаты сведём в таблицу 7.7. В ней дугами указан характер направления выпуклости графика функции на данном промежутке, $(1/2,0)$ – точка перегиба графика.

5. Используя результаты проведённых исследований, строим график функции (рис. 7.4), $E(y)=[-1\,1]$.◄

Пример 7.5. Построить график функции $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

►**1.** $D(f)=\boldsymbol{R}$. Данная функция чётная ($f(-x)=f(x)$) – её график обладает осевой симметрией относительно оси Oy.

2. $x=0\Rightarrow y=\arcsin 1=\pi/2$, $y=0\Rightarrow\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0\Rightarrow\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0\Rightarrow x=\pm1$ – график пересекает оси координат в точках $(0,\pi/2)$ и $(\pm1,0)$. Так как $f(x)>0\Rightarrow\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}>0\Leftrightarrow 0<\dfrac{1-x^2}{1+x^2}<1\Leftrightarrow -1<x<1$, то приходим к выводу, что $f(x)>0$ при $-1<x<1$, $f(x)<0$ при $x<-1$, $x>1$.

3. Функция непрерывна на $\boldsymbol{R}$ как элементарная – график функции не имеет вертикальных асимптот. Прямая $L: y=-\pi/2$ – горизонтальная асимптота графика при $x\to\pm\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$ (замечание 6.3).

4. Вопрос о промежутках монотонности и экстремумах данной функции был рассмотрен в примере 4.2, в таблице 4.2 приведены результаты этих исследований. На интервале $(-\infty,0)$ функция $f(x)$ возрастает, а на интервале $(0,+\infty)$ она убывает. В точке $x=0$ функция имеет угловой максимум, $f(0)=\pi/2$, $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=-1$.

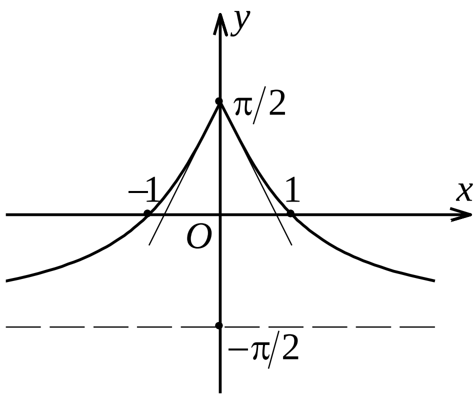

Рис. 7.5. График функции $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

5. $f'(x)=\begin{cases}2/(1+x^2), & x<0,\\ -2/(1+x^2), & x>0,\end{cases}$ $x\neq0$ (пример 4.2), отсюда

$f''(x)=\begin{cases}-4x/(1+x^2)^2, & x<0,\\ 4x/(1+x^2)^2, & x>0.\end{cases}$ Поскольку $f''(x)>0$ при любом $x\neq0$, то из теоремы 5.1 заключаем, что при любом $x\neq0$ график $f(x)$ направлен выпуклостью вниз.

6. При построении графика сначала строим асимптоту $L: y=-\pi/2$, затем точку углового максимума $(0,\pi/2)$, указав в неё направления односторонних касательных. График приведён на рис. 7.5, $E(y)=(-\pi/2,\pi/2]$.◄