§8. Производные неявных функций и функций, заданных параметрически

1°. Понятие неявной функции одной переменной. Вычисление производных от неявных функций.

Определение 8.1. Пусть дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (8.1)$$

связывающее две переменные x и y. Если каждому значению x из некоторого множества X это уравнение ставит в соответствие одно значение y так, что упорядоченная пара (x, y) является его решением, то говорят, что уравнение (8.1) на множестве X задаёт y как *неявную функцию x*.

Не всегда уравнение вида (8.1) задаёт какую-либо неявную функцию. Так, уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не задаёт никакой функции. В некоторых случаях уравнение вида (8.1) задаёт две и более неявных функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ на промежутке $(-1,1)$ задаёт неявно две функции: $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$. Вопрос об условиях, при которых уравнение (8.1) задаёт так называемую однозначную неявную функцию, достаточно сложен и будет рассмотрен далее в разделе 8. Там же будут рассмотрены условия существования производной неявной функции. В настоящем параграфе приводятся примеры вычисления производной неявной функции.

Пример 8.1. Найти y'_x, если $y = x + \operatorname{arctg} y$.

►Считая, что равенство из условия задачи задаёт y как неявную функцию x,
продифференцируем обе его части по x, рассматривая $\operatorname{arctg} y$ как сложную функцию x: $y'_x = 1 + \dfrac{1}{1+y^2} \cdot y'_x$. Перенесём в левую часть все члены, содержащие y'_x, и вынесем из них y'_x за скобки: $y'_x(1 - \dfrac{1}{1+y^2}) = 1$. Отсюда $y'_x = \dfrac{1+y^2}{y^2}$.◄

Пример 8.2. Найти y'_x, если $y - x\operatorname{tg}\ln(x^2+y^2) = 0$.

►Из условия примера имеем: $y/x = \operatorname{tg}\ln(x^2+y^2)$. Считая y неявной функцией x, возьмём производные по x от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{x \cdot y'_x - y}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\ln(x^2+y^2)} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'_x}{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad \frac{x \cdot y'_x - y}{x^2} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'_x}{x^2+y^2}$$

(дробь $\dfrac{1}{\cos^2\ln(x^2+y^2)}$ заменена на $1 + \operatorname{tg}^2\ln(x^2+y^2) = 1 + \dfrac{y^2}{x^2}$). После упрощений получаем $x \cdot y'_x - y = 2x + 2y \cdot y'_x$, отсюда $y'_x = (2x+y)/(x-2y)$.◄

С помощью производной неявной функции можно получить уравнения касательных к некоторым кривым, например, к кривым 2-го порядка.

Пример 8.3. Написать уравнение касательной к эллипсу Г: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, в его точке $M_0(x_0,y_0)$.

►Уравнение эллипса задаёт неявно две функции: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in(-a,a)$. Однако формула для производной каждой из этих функций будет одной и той же. Возьмём производные по x от обеих частей уравнения эллипса, считая y функцией x: $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'_x}{b^2}=0$ или $y'_x=-\frac{b^2x}{a^2y}$. Итак, $y'_x(x_0)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ для $\forall x_0\in(-a,a)$. Подставим выражение для $y'_x(x_0)$ и координаты точки $M_0(x_0,y_0)$ в уравнение касательной (2.2): $y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$. Умножим обе части этого равенства на a^2y_0 и перенесём в левую часть члены, содержащие x и y: $b^2x_0x+a^2y_0y=$ $=b^2x_0^2+a^2y_0^2$. Поделим обе части последнего равенства на a^2b^2, получим: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, так как $\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2}{a^2b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ в силу того, что координаты точки $M_0(x_0,y_0)$ удовлетворяют уравнению эллипса. Уравнение касательной к эллипсу в его точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \tag{8.2}$$

Используя равенство (8.2), получим, например, уравнение касательной T к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ в его точке $M_0(4,\frac{9}{5})$. Очевидно, в этом случае $a^2=25$, $b^2=9$, $x_0=4$, $y_0=9/5$, поэтому T: $\frac{4x}{25}+\frac{9y/5}{9}=1$ или T: $4x+5y-25=0$.

Уравнение (8.2) получено в предположении, что $x\in(-a,a)$. Можно показать, что оно также определяет касательную к эллипсу при $x=\pm a$.◄

2º. Понятие функции, заданной параметрически. Вычисление производных от таких функций. Зависимость переменной y от переменной x может быть задана через посредство третьей переменной, которую, как правило, обозначают через t и называют *параметром*.

Определение 8.2. Пусть x и y заданы как функции t:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} t\in[\alpha,\beta]. \tag{8.3}$$

Если функция $x=x(t)$ на промежутке $[\alpha,\beta]$ имеет обратную $t=t(x)$, то на множестве $X=E(x(t))$ определена сложная функция от x:

$$y=y(t(x)),$$

называемая функцией, *заданной параметрически* равенствами (8.3).

Формула для производной функции, заданной параметрически, следует из правил дифференцирования сложной и обратной функции (§6). Имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (8.4)$$

Замечание 8.1. Формулу (8.4) можно также получить, рассматривая y'_x как отношение дифференциалов dy и dx (замечание (3.2)): $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$. Вычислив dy и dx: $dy = y'_t dt,\ dx = x'_t dt$, подставив эти равенства в выражении для y'_x и произведя сокращения, приходим к формуле (8.4).

Пример 8.4. Найти y'_x, если $x = \cos^{-1} t$, $y = \operatorname{tg} t - t$.

► $x'_t = -(\cos t)^{-2}(-\sin t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, $\qquad y'_t = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1 = \dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$.

Подставив выражения для y'_t и x'_t в формулу (8.4), имеем: $y'_x = \sin t$. ◄

Замечание 8.2. Производная функции, заданной параметрически, вычисленная по формуле (8.4), также является функцией, заданной параметрически, её зависимость от *x* даётся через посредство параметра *t*.