ТЕМА 8. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат XOY. В этой системе произвольное комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой Z, имеющей координаты (a, b). Положим $z \neq 0$, тогда для этой точки определены полярные координаты r и φ, где r — длина радиус-вектора $\overline{OZ}$, а φ — угол между положительным направлением оси OX и направлением вектора $\overline{OZ}$ (положительное направление ведется против часовой стрелки).

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad r > 0 \tag{7}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} \tag{8}$$

угол φ определяется с точностью до слагаемого кратного $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

- *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ *называется неотрицательное действительное число* r*, определяемое равенством* (7), *а величина полярного угла* φ*, определяемая равенством* (8), *называется аргументом комплексного числа.*

Модуль комплексного числа z обозначается символом $|z|$, а аргумент комплексного числа — символом $\operatorname{Arg} z$. Если $z = 0$, то $|z| = r = 0$, а $\operatorname{Arg} z$ не определен, то есть в этом случае комплексное число задается только своим модулем.

Значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$, обозначается $\arg z$ и обычно называется *главным значением аргумента*.

Таким образом, $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}\}$. Для определения главного значения аргумента удобно использовать формулу:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a} & a > 0, b > 0 \text{ или } b < 0 \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a} & a < 0, b > 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a} & a < 0, b < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Если $z = a + 0i$, то есть является действительным числом, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0} = |a|$. Таким образом, понятие модуля комплексного числа является обобщением понятия модуля действительного числа.

Число $\arg z$ так же можно считать обобщением понятия знака действительного числа. На действительной оси из начала координат O выходят два луча, которые мы отмечает знаками + и –. На комплексной плоскости из начала координат можно провести множество лучей; чтобы их различать, мы приписываем каждому из них определенное значение полярного угла φ, то есть $\arg z$ — это величина ориентированного угла.

Заметим, что геометрически сопряженные числа являются точками, симметричными относительно действительной оси (рис. 4). Отсюда следуют равенства

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$а)\ z = -2i, \quad б)\ z = -1 - i, \quad в)\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad г)\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Решение

$а)\ |z| = |0 - 2i| = \sqrt{0 + 2^2} = 2, \qquad \arg z = -\dfrac{\pi}{2}$ (см.формулу (9))•

$б)\ |z| = |-1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = -\pi + arctg 1 = -\dfrac{3}{4}\pi$ •

$в)\ |z| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1, \quad \arg z = arctg(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$ •

$г)\ |z| = \left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1, \quad \arg z = \pi + arctg(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) = \dfrac{5}{6}\pi$ •

Заметим, что комплексные числа z, имеющие один и тот же модуль r, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в точке O.

Определить геометрическое множество М точек на комплексной плоскости, состоящее из всех точек z, удовлетворяющих условию:

$$а)\ |z| = 2, \quad б)\ 1 \le |z| \le 3, \quad в)\ \arg z = \frac{\pi}{4}, \quad г)\ |z - 2 + i| \ge 2, \quad д)\ |z - 1| = |z - i|,$$

$$ж)\ |z - 2| - |z + 2| = 5.$$

Решение

$а)$ $|z| = |x + yi| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, следовательно, М есть окружность радиуса 2, с центром в начале координат•

$б)$ $1 \le |z| \le 3 \Rightarrow 1 \le x^2 + y^2 \le 9$, М есть кольцо с центром в точке O, радиус колец $r = 1$, $r = 3$•

в) $\arg z = \frac{\pi}{4}$, М есть луч, выходящий из точки *O* и образующий угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси *OX* •

г) $|z-2+i| = |z-(2-i)| = |x+yi-(2-i)| = |(x-2)+(y+1)i| =$
$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \geq 2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \geq 4,$ М – внешняя часть круга с центром в (·) (2,-1), радиуса 2 (рис. 5) •

д) Равенство $|z-1| = |z-i|$ означает, что расстояние от любой точки *z* до точки (0,1) равно расстоянию от этой же точки до точки (0,1); т.е. точка *z* находится на серединном перпендикуляре, соединяющем точки (1,0) и (0,1) (рис. 6) •

ж) Равенство $|z+2|+|z-2|=5$ определяет геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух точек $F_1 = (-2,0)$ и F_2 (2, 0), называемых фокусами, есть величина постоянная; обозначим ее $2a$, отсюда $2a=5$.

Из аналитической геометрии известно, что это по определению есть эллипс, где $c=2-$ расстояние от фокусов до точки *O*, одна его полуось $a=\frac{5}{2}$, другая полуось *b* определяется из равенства $b^2=a^2-c^2 \Rightarrow$ $b^2=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4} \Rightarrow b=\frac{3}{2}$ •

Для модулей суммы и разности комплексных чисел справедливы следующие два неравенства:

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|.$$

Модуль суммы двух комплексных чисел не превосходит суммы их модулей. Модуль разности двух комплексных чисел не меньше разности модулей этих чисел.

Доказательство следует из свойств сторон треугольника.