§7. Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и со специальным видом правой части

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = q(x). \tag{7.1}$$

Вводя линейный дифференциальный оператор $L[y]$, перепишем (7.1) в виде

$$L[y] = q(x). \tag{7.2}$$

Частное решение этого уравнения можно искать с помощью изложенного выше метода вариации произвольных постоянных, однако это решение может быть найдено проще и без применения метода Лагранжа, при специальном виде правой части уравнения (7.1) в следующих трех случаях:

I. $q(x) = P_m(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_m x^m$ ($m \geq 0$);

II. $q(x) = P_m(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1x + \ldots + A_m x^m)e^{\alpha x}$;

III. $q(x) = \left[P_m(x)\cos\beta x + P_l^*(x)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$,

где

$$P_m(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_m x^m,$$
$$P_l^*(x) = A_0^* + A_1^*x + \ldots + A_l^* x^l.$$

Отметим, что из этих трех случаев каждый предыдущий, по существу, является частным случаем последующего.

Рассмотрим первый из указанных случаев.

I. Пусть дано уравнение

$$L[y] = P_m(x), \tag{7.3}$$

где

$$P_m(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_m x^m.$$

Запишем однородное уравнение $L[y] = 0$, соответствующее исходному неоднородному уравнению (7.3), и составим для него характеристическое уравнение

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

1) Пусть $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения; тогда $a_n \neq 0$.

В этом случае частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (7.3) будем искать в виде многочлена той же степени, что и многочлен $q(x) = P_m(x)$, т. е. в виде

$$\tilde{y} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_m x^m = Q_m(x), \tag{7.4}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_m$ – неизвестные пока числа, которые надо подобрать так, чтобы удовлетворить уравнению (7.3).

Подставляя (7.4) в (7.3) получаем тождественное равенство двух многочленов: в левой части многочлен с неопределенными коэффициентами B_i, а в правой части многочлен с известными коэффициентами A_i. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^m & a_n B_m = A_m, \\ x^{m-1} & a_n B_{m-1} + m B_m a_{n-1} = A_{m-1}, \\ x^{m-2} & a_n B_{m-2} + (m-1) B_{m-1} a_{n-1} + m(m-1) B_m a_{n-2} = A_{m-2}, \\ \ldots & . \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

Эта система уравнений разрешима, так как $a_n \neq 0$. Из первого уравнения системы (7.5) найдем $B_m = A_m / a_n$, затем из второго уравнения определим B_{m-1} и т. д. Из последнего уравнения найдем B_0. Подставляя найденные коэффициенты B_i в (7.4), найдем искомое частное решение.

2) Пусть среди корней характеристического уравнения есть корень $\lambda = 0$ кратности k.

Тогда

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-k+1} = 0, \quad a_{n-k} \neq 0,$$

и уравнение (7.3) принимает вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-k} y^{(k)} = P_m(x).$$

Полагая здесь $y^{(k)} = z$, получим

$$z^{(n-k)} + a_1 z^{(n-k-1)} + \ldots + a_{n-k} z = P_m(x),$$

где $a_{n-k} \neq 0$.

По доказанному выше частное решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{z} = B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m = \tilde{y}^{(k)},$$

откуда в результате k-кратного интегрирования получим частное решение исходного уравнения в виде многочлена степени $(m+k)$

$$\tilde{y} = x^k Q_m(x)$$

где $Q_m(x)$ имеет вид (7.4).

Таким образом, получаем следующее правило: уравнение $L[y] = P_m(x)$, правая часть которого – многочлен степени m, имеет частное решение вида

$$\tilde{y} = x^k (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m), \tag{7.6}$$

где k – кратность корня нуль характеристического уравнения (если нуль не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$). Коэффициенты $B_0, B_1, \ldots, B_m$ определяются из тождества, получающегося после подстановки $\tilde{y}$ в уравнение $L[y] = P_m(x)$ указанным выше способом.

Замечание. Из формулы Лейбница для производной k-го порядка от произведения двух функций следует равенство

$$(e^{\alpha x}x)^{(k)} = e^{\alpha x}\sum_{i=1}^{k} C_k^i \alpha^i z^{(k-i)},$$

с помощью которого легко доказывается тождество

$$L^0[e^{\alpha x}z] \equiv e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\alpha)z^{(k)}.$$

Используя это тождество, можно доказать следующие два правила:

II. Уравнение

$$L[y] = e^{\alpha x}P_m(x),$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m, имеет частное решение вида:

$$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m), \qquad (7.7)$$

где k – кратность корня α характеристического уравнения (если α не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$).

III. Уравнение

$$L[y] = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + P_l^*(x)\sin\beta x\right],$$

где $P_m(x)$, $P_l^*(x)$ – многочлены степени соответственно m и l, имеет частное решение вида

$$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}\left[(B_0 + B_1 x + \ldots + B_s x^s)\cos\beta x + (B_0^* + B_1^* x + \ldots + B_s^* x^s)\sin\beta x\right]. \qquad (7.8)$$

Здесь $s = \max(m, l)$, k – кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического уравнения.

Таблица (правило построения частного решения в трех рассмотренных случаях)

№	Вид правой части уравнения $L[y] = q(x)$	Вид частного решения
1	$q(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$	$\tilde{y} = x^k(B_0 + B_1 + \ldots + B_m x^m)$, где k – кратность корня $\lambda = 0$ характеристического уравнения (если нуль не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$).
2	$q(x) = e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)$	$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}(B_0 + B_1 + \ldots + B_m x^m)$, где k – кратность корня $\lambda = \alpha$ характеристического уравнения (если α не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$).
3	$q(x) = e^{\alpha x}\left[(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)\cos\beta x + \right.$ $\left. + (A_0^* + A_1^* x + \ldots + A_l^* x^l)\sin\beta x\right]$	$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}\left[(B_0 + B_1 + \ldots + B_s x^s)\cos\beta x + \right.$ $\left. + (B_0^* + B_1^* x + \ldots B_s^* x^s)\sin\beta x\right]$, где $s = \max(m, l)$, k – кратность корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения (если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$).

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' + y' = x + \sin x$.

▶ Ищем общее решение исходного уравнения в виде

$$y = Y + \tilde{y},$$

где Y – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''' + y' = 0$, а $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения. Это решение по теореме о суперпозиции решений будем искать в виде суммы двух решений

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ – соответственно решения уравнений $y''' + y' = x$, $y''' + y' = \sin x$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda = 0$ и найдем его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Найдем $\tilde{y}_1$ – частное решение уравнение $y''' + y' = x$ (см. случай I). Так как в правой части уравнения стоит многочлен первой степени и среди корней характеристического уравнения есть корень $\lambda_1 = 0$, то решение $\tilde{y}_1$ будем искать по формуле (7.6) в виде

$$\tilde{y}_1 = x(A_1 x + A_0).$$

Подставляя $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_1' = 2A_1 x + A_0$ и $\tilde{y}_1''' = 0$ в данное уравнения, получим , откуда $A_1 = 1/2$, $A_0 = 0$. Итак,

$$\tilde{y}_1 = \frac{x^2}{2}.$$

Найдем $\tilde{y}_2$ – частное решение уравнения $y''' + y' = \sin x$ (см. случай III). Здесь правая часть $q(x) = \sin x$ и, следовательно, $\alpha + i\beta = i$, $P_m(x) = 0$, $P_l^*(x) = 1$. Среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряженный корень $\lambda_{2,3} = \pm i$ и поэтому $\tilde{y}_2$ ищем по формуле (8), положив $k = 1$:

$$\tilde{y}_2 = x(M \cos x + N \sin x).$$

Найдем производные $\tilde{y}_2'$ и $\tilde{y}_2'''$ (проделайте выкладки подробно):

$$\tilde{y}_2' = (M + Nx)\cos x + (N - Mx)\sin x,$$
$$\tilde{y}_2''' = (-Nx - 3M)\cos x + (Mx - 3N)\sin x$$

и подставим в данное уравнение; после упрощения получим

$$-2M \cos x - 2N \sin x \equiv \sin x,$$

откуда найдем $M = 0$; $-2N = 1$, $N = -1/2$.

Итак, $\tilde{y}_2 = -\frac{x}{2}\sin x$.

Таким образом, получаем общее решение данного неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\sin x. \blacktriangleleft$$