§2. Частные производные высших порядков

Пусть функция $w = f(x, y)$ задана в области D и имеет в ней частные производные. Эти частные производные являются функциями переменных x, y (вообще говоря, в новой области $D_1 \subset D$), и можно поставить задачу вычисления их частных производных. Эти частные производные (от функций $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$) называются *частными производными второго порядка* (*вторыми частными производными*) исходной функции и обозначаются

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{или} \quad f''_{x^2}(x, y)$$

(первое и второе дифференцирование по x),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{или} \quad f''_{xy}(x, y)$$

(первое дифференцирование по x, второе – по y),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad \text{или} \quad f''_{yx}(x, y)$$

(первое дифференцирование по y, второе – по x),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad \text{или} \quad f''_{y^2}(x, y)$$

(первое и второе дифференцирование по y).

Частные производные $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ называют *смешанными*.

Пример 2.1. $w = x^y$. Найти вторые смешанные частные производные в любой допустимой точке (x, y).

▶
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x.$$

Видим, что $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$. Это не случайно, как будет показано ниже.

Аналогично вводятся частные производные третьего, четвертого и т. д. порядков; аналогичны и обозначения: например, $\frac{\partial^n w}{\partial x^r \partial y^s}$, где $r + s = n$ – функция дифференцируется r раз по x, а затем s раз по y.

Теорема 2.1 (о смешанных производных). ***Если функция*** $f(x,y)$ ***имеет в некоторой области*** D ***непрерывные смешанные частные производные*** $f''_{xy}(x,y)$ ***и*** $f''_{yx}(x,y)$***, то во всех точках этой области*** $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

▶ Пусть (x,y) – произвольная точка области D, и Δx и Δy столь малы, что прямоугольник с вершинами (x,y), $(x+\Delta x,y)$, $(x,y+\Delta y)$, $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ целиком лежит в области D. Зафиксировав Δx и Δy, рассмотрим величину

$$A=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y).$$

С одной стороны, A можно записать так:

$$A=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)\right]-\left[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right],$$

и рассматривать как приращение по x функции $\varphi(x)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$; тогда, применяя формулу Лагранжа, будем иметь:

$$A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\varphi'(x+\theta\Delta x)\Delta x=$$

$$=\left[f'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)-f'_x(x+\theta\Delta x,y)\right]\Delta x=f''_{xy}(x+\theta\Delta x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y\Delta x,$$

т. е.

$$A=f''_{xy}(x+\theta\Delta x,y+\theta_1\Delta y)\Delta x\Delta y,\quad 0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1. \tag{2.1}$$

С другой стороны, A можно записать иначе:

$$A=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right]-\left[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right]$$

и рассматривать как приращение по y функции

$$\psi(y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y);$$

тогда, применяя формулу Лагранжа, получаем

$$A=\psi(y+\Delta y)-\psi(y)=\psi'(y+\theta_2\Delta y)\Delta y=$$

$$=\left[f'_y(x+\Delta x,y+\theta_2\Delta y)-f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\right]\Delta y=f''_{yx}(x+\theta_3\Delta x,y+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

т. е.

$$A=f''_{yx}(x+\theta_3\Delta x,y+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,\quad 0<\theta_2<1,\quad 0<\theta_3<1. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$f''_{xy}(x+\theta\Delta x,y+\theta_1\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta_3\Delta x,y+\theta_2\Delta y). \tag{2.3}$$

Переходя в неравенстве (2.3) к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, в силу непрерывности f''_{xy} и f''_{yx} в рассматриваемой точке $(x,y)\in D$ будем иметь

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

Так как (x,y) – произвольная точка области D, то равенство смешанных частных производных будет иметь место всюду в этой области.

Замечание. Доказанная теорема очевидным образом может быть обобщена на случай любого числа переменных для смешанных производных любого порядка.