Резюме

В простейших случаях предел функции вычисляют с помощью теоремы об арифметических действиях с пределами (II, п. 2.4, глава 2), теоремы об арифметических действиях с непрерывными функциями (теорема 1.3, глава 3) и теоремы об арифметических действиях с бесконечно большими функциями (утверждения а) – г), п. 2.6, глава 2). Если для вычисления предела следует раскрыть неопределенность, указанных выше средств может оказаться недостаточно. Неопределенность часто удается раскрыть с помощью «замечательных пределов» и свойств эквивалентных функций.

Если существуют $C \neq 0$ и $\lambda > 0$ такие, что $\alpha(x) \sim C(x-x_0)^{\lambda}$, $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, то $\beta(x) = C(x-x_0)^{\lambda}$ называют главной частью бесконечно малой при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$.

Если существуют $C \neq 0$ и $\lambda > 0$ такие, что $\alpha(x) \sim C\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda}$, $x \to \infty$, то $\beta(x) = C\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda}$ называют главной частью бесконечно малой при $x \to \infty$ функции $\alpha(x)$.

Отыскание предела методом выделения главной части основано на возможности упрощать вычисление предела, заменяя б. м. функции их главными частями.

Контрольные вопросы к главе 3

1. Вычисление каких из этих пределов связано с раскрытием неопределенностей? Какого вида неопределенностей?

а) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1+x^2)$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln(1+x^2)$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\frac{1+x^2}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\ln(1+x^2)}$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\ln(1+x^2)}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\ln x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to +0}(x+\ln x)$; з) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\ln(1+x^2)\right)$; и) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\ln(1+x^2)\right)$.

2. Какие из этих формул верны при $x \to a$?

а) $\sin 3x \sim \ln\cos 3x$, $a = 0$;

б) $\cos 3x \sim \ln(1+\cos 3x)$, $a = \frac{\pi}{2}$;

в) $\ln\frac{x+1}{x} \sim \operatorname{tg}\frac{1}{x}$, $a = \infty$;

г) $\sqrt{\frac{1+x}{x}} \sim \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a = +0$;

д) $\sqrt{\frac{1+x}{x}} \sim \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$, $a = +0$.

3. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{4x^2-1}{\sin(1-2x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\cos x-\cos 2x}$.

4. Какие из этих формул верны при $x \to a$?

а) $\ln\cos 3x = o(\sin 3x)$, $a = 0$;

б) $\frac{x}{1+x^2} = o(e^x - 1)$, $a = 0$;

в) $\frac{x^4}{1+x^2} = o(x^3)$, $a = \infty$;

г) $x^3 - x^2 - x + 1 = o(x^3 - x)$, $a = 1$.

5. Найти главную часть и порядок бесконечно малых при $x \to 0$:

а) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{1-x}$; б) $\sqrt[3]{x^2} - x$; в) $3\sin^3 x - x^4$; г) $e^x - \cos x$.

Ответы на контрольные вопросы

1. в) $0\cdot\infty$; г) 0^0; и) $\infty-\infty$.

2. б); в); д).

3. а) 1; б) -2; в) $\frac{16}{3}$.

4. а); в); г).

5. а) $3\sqrt[3]{x^2}$, порядок равен $\frac{2}{3}$; б) $\sqrt[3]{x^2}$, порядок равен $\frac{2}{3}$; в) $3x^3$, порядок равен 3; г) x, порядок равен 1.