## §3. Необходимые условия существования экстремума. Критические точки

Понятие экстремума функции введено в §1 предыдущей главы. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она непрерывна.

**Теорема 3.1** (*необходимые условия существования экстремума*). Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ из интервала $(a,b)$ экстремум, то либо $f'(x_0)=0$, либо $f'(x_0)=\infty$, либо $f'(x_0)$ не существует.

►Пусть $x_0$ – точка экстремума функции $f(x)$. Возможны только два случая: либо $f'(x_0)$ существует, либо не существует. Если $f'(x_0)$ существует, то также возможны только два случая: либо $f'(x_0)$ конечна, либо $f'(x_0)=\infty$. Если $f'(x_0)$ конечна, то по теореме Ферма из §1 $f'(x_0)=0$.◄

**Определение 3.1.** Точки из области определения функции $f(x)$, в которых её производная равна нулю, бесконечности, или не существует, называются *критическими точками* данной функции (иначе *точками, подозрительными на экстремум)*. Точки, где производная $f'(x)$ равна нулю, называют также *стационарными точками*.

**Пример 3.1.** Найти критические точки функции $f(x)=x|x+1|$.

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<-1,\\ x^2+x, & x\geq -1,\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}-2x-1, & x<-1,\\ 2x+1, & x>-1,\end{cases}$

$f'(x)=0$ при $x=-1/2$ и $f'(x)$ не существует при $x=-1$ (пример 1.2, глава 1). Таким образом, точки $x=-1/2$ и $x=-1$ – критические для данной функции, а точка $x=-1/2$ является также стационарной точкой.◄

**Пример 3.2.** Найти критические точки функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x)=((x-1)^{2/3})'=\dfrac{2}{3}(x-1)^{-1/3}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$, $f'(x)$ не обращается в нуль на $D(f)$, но $f'(1)=\infty$. Точка $x=1$– критическая точка $f(x)$.◄

**Определение 3.2.** Экстремум функции $f(x)$, достигаемый в стационарной точке, называется *гладким экстремумом*. Если в точке экстремума не существует $f'(x)$, но существуют неравные между собой односторонние производные,
то такой экстремум называется *угловым*. Если в точке экстремума производная бесконечна, то он называется *острым*.

Например, функция $f(x)=x|x+1|$ в точке $x=-1/2$ имеет гладкий минимум, а в точке $x=-1$ – угловой максимум (рис. 2.2 главы 1). Функция $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ имеет в точке $x=1$ острый минимум (рис. 2.4 главы 1).

***Замечание 3.1.*** Характер экстремума определяет положение касательной к графику функции в точке экстремума. В точке гладкого экстремума функции $f(x)$ касательная к её графику Г параллельна оси *Ox*. В точке углового экстремума график Г имеет различные односторонние касательные, а в точке острого экстремума – вертикальную касательную. Например, график функции $f(x) = x\,|\,x+1|$ в точке гладкого минимума (–1/2, –1/4) имеет горизонтальную касательную, а в точке углового максимума (–1, 0) – односторонние касательные (рис. 3.1). График функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в точке (1, 0) острого экстремума имеет вертикальную касательную (рис. 2.4 главы 1).

***Замечание 3.2.*** Необходимые условия существования экстремума (теорема 3.1) не являются достаточными, ибо не в любой критической точке функция имеет экстремум. Например, для функций $y = x^2$ и $y = x^3$ точка $x = 0$ является критической ($(x^2)' = 2x = 0$ и $(x^3)' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$), однако первая из них

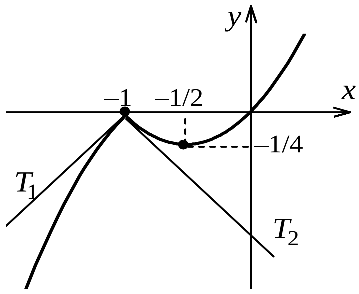


Рис. 3.1. График функции $f(x) = x\,|\,x+1|$

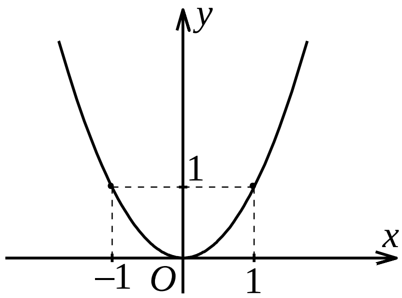


Рис. 3.2. График функции $f(x) = x^2$

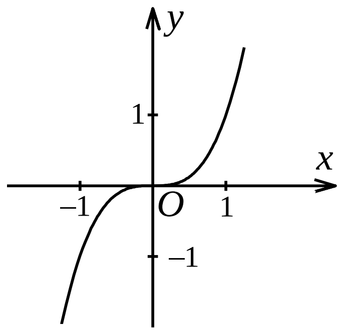


Рис. 3.3. График функции $f(x) = x^3$

имеет в этой точке экстремум (гладкий минимум), а вторая функция не имеет экстремума в этой точке (рис. 3.2, 3.3). Для функций $y = \sqrt[3]{x-1}$ и $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ точка $x = 1$ является критической ($y'(1) = \infty$), при этом первая функция не имеет в ней экстремума, а вторая имеет острый минимум (рис. 2.3, 2.4 главы 1).