§ 7. Потенциальные, соленоидальные и гармонические векторные поля

Потенциальные векторные поля

<u>Определение</u> (потенциальное поле)

Векторное поле $\overline{a}\,(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$ называется *потенциальным*, если его можно представить следующим образом:

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A,$$

где $f(M)$- скалярное поле, называемое *потенциалом потенциального поля*.

<u>Теорема</u> (о потенциальности векторного поля)

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты

$$\{P(M), Q(M), R(M)\}\ \forall(\cdot)\ M \in A \subset R^3,$$

где A – односвязная область.

Пусть функции $P, Q, R \in C^1\ (A)$.

Для того, чтобы векторное поле $\overline{a}\,(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор этого поля был равен $\overline{0}$, т.е.

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall\ (\cdot) M \in A \Leftrightarrow rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{0}\ \forall\ (\cdot) M \in A$$

<u>Доказательство.</u>

Необходимость:

По условию дано: $\overline{a}\,(M)$- потенциальное поле $\forall\ M \in A \subset R^3 \Rightarrow$

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall\ (\cdot) M \in A$$

Нужно доказать, что $rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{0}$.

Вычислим

$$rot\,\overline{a}\,(M)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x'(M) & f_y'(M) & f_z'(M) \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)\cdot\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\cdot\bar{j}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\cdot\bar{k}=\bar{0}$$

Достаточность:

По условию дано: $rot\,\overline{a}\,(M)=\bar{0}$.

Надо доказать , что существует такое скалярное поле $f(M)$, что

$$\overline{a}(M) = grad f(M) \quad \forall\, M\in A\subset R^3$$

По теореме Стокса имеем:

$$\iint\limits_{\sigma}\underbrace{rot\,\overline{a}}_{равно\,0}\cdot\overline{n_0}\cdot d\sigma=\oint\limits_{\Gamma}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}=\oint\limits_{\Gamma}P(M)dx+Q(M)dy+R(M)dz=0$$

Тогда, по теореме о независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования, существует функция $f(M)$, такая, что

$$df(M)=P(M)dx+Q(M)dy+R(M)dz.$$

Для этого необходимо и достаточно выполнения равенств:

$$P(M)=f_x'(M);\quad Q(M)=f_y'(M);\quad R(M)=f_z'(M)$$

Таким образом,

$$\overline{a}\,(M)=\{P(M),Q(M),R(M)\}=\{f_x'(M),f_y'(M),f_z'(M)\}=grad\,f(M).$$

ч.т.д.

Замечание:

В качестве определения потенциальности поля может быть использована формула

$$rot\,\overline{a}\,(M)=\bar{0}.$$

Свойства потенциальных полей

1. Пусть $\overline{a}(M)$ - потенциальное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$

$$\Rightarrow circul_{\Gamma}\overline{a}(M) = 0,$$

где $\Gamma -$ замкнутый контур и $\Gamma \subset A$.

<u>Доказательство</u>

$$circul_{\Gamma}\overline{a}(M) = \oint_{\Gamma}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r} = \iint_{\sigma}\underbrace{rot\,\overline{a}}_{равно\,0}\cdot\overline{n_0}\cdot d\sigma = 0.$$

2. Пусть $\overline{a}(M)$ - потенциальное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Тогда линейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\Gamma_{AB} \subset A$, т.е.

$$\int_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r} = \int_{\Gamma_{AB}}P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz = \int_{\Gamma_{AB}}df(M) = f(B) - f(A),$$

$f(M) -$ потенциал векторного поля $\bar{a}(M)$.

<u>Замечание</u>

Из определения потенциального поля ($\overline{a}(M) = grad\, f(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A$) следует, что $\overline{a}(M)$ определяется заданием одной скалярной функции $f(x, y, z)$, т.е. ее потенциалом.

Вычисление потенциала потенциального векторного поля

Первый способ

Пусть $\overline{a}\,(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ − потенциальное поле

Тогда потенциал $f(M)$ векторного поля $\bar{a}(M)$ может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) - произвольная точка из области определения функций P, Q *и* R.

Второй способ

<u>Определение</u> (звёздной области)

Область $A \subset R^3\,(R^2)$, называется *звёздной относительно некоторой точки* $M \in A$, если любой луч, выходящий из точки M, пересекает границу области A не более чем в одной точке.

<u>Замечание</u>:

Для плоскости звездными областями будут, например, сама плоскость, параллелограм, круг и т.д. В трехмерном пространстве – само пространство, параллелепипед, шар и т.д.

<u>Теорема</u>

Пусть $\overline{a}\,(M)$ - потенциальное поле $\forall\,(\cdot)M \in A \subset R^3$.

Пусть A - звёздная область относительно точки $O\,(0;0;0)$ ($\overline{a}\,(M)$ в точке O может быть не определено).

Тогда потенциал $f(M)$ потенциального векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке $M(x; y; z)$ находится по формуле:

$$f(M) = \int_0^1 (\bar{a}(M') \cdot \bar{r}(M))dt + C, \quad C = const,$$

где $\bar{r}(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} -$ радиус – вектор точки M, точка M' имеет координаты $(tx; ty; tz)$ $\forall t \in [0,1]$ и пробегает отрезок OM прямой, проходящей через точки O и M.

(б/д)

Замечание.
Применение этой теоремы мы рассмотрим на пркгических занятиях

Третий способ.

Для нахождения потенциала $f(M)$ потенциального векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке $M(x; y; z)$ можно так же воспользоваться приемом, который мы использовали для нахождения полного дифференциала для дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах (вспомнить самостоятельно).