§7. Геометрические приложения двойного интеграла

1°. Площадь плоской области. Из свойства 1 двойного интеграла (см. §3) следует, что площадь S плоской области D может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy\,. \tag{7.1}$$

Пример 7.1. Найти площадь области D, ограниченной гиперболами $xy = 1$, $xy = 4$ и параболами $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

►Область D изображена на рис. 6.3, её площадь вычислим, используя формулу (7.1). В интеграле из правой части (7.1) перейдём к координатам u, v по формулам (6.4). Разрешим соотношения (6.4) относительно x, y:

$$\begin{cases} x = u^{2/3}v^{-1/3}, \\ y = u^{1/3}v^{1/3}. \end{cases}$$

Используя полученные равенства, вычисляем якобиан:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u^{-1/3}v^{-1/3}/3 & u^{-2/3}v^{1/3}/3 \\ -u^{2/3}v^{-4/3}/3 & u^{1/3}v^{-2/3}/3 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}v^{-1} + \frac{1}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v}.$$

В силу (6.5), получаем:

$$S = \iint\limits_{D'} \left|1/3v\right| dudv\,. \tag{7.2}$$

Для координат u, v точек области D справедливы неравенства: $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 2$. Переходя в (7.2) от двойного интеграла к повторному, имеем:

$$S = \int\limits_1^4 du \int\limits_1^2 \frac{1}{3v} dv = \ln v\Big|_1^2 = \ln 2\,.◄$$

Замечание 7.1. Площадь области D из примера 7.1 можно найти и с помощью определённого интеграла, но это приводит к громоздким выкладкам.

2°. Объём цилиндрического бруса. Как было установлено в §2, объём V цилиндрического бруса, ограниченного плоскостью Oxy, поверхностью, определяемой уравнением $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур области D (рис. 2.1), вычисляется по формуле:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,. \tag{7.3}$$

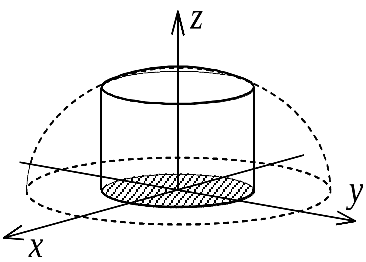

Рис. 7.1. К примеру 7.2

Пример 7.2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2 = 4$ и плоскостью Oxy (рис. 7.1).

►Здесь $z = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ и $V = \iint\limits_D \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, D − область, ограниченная эллипсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Перейдём к обобщённым полярным координатам по формулам (6.7), $J(r,\varphi) = abr$. В новых координатах уравнение данного эллипса имеет вид $r = 1$. Тогда

$$V=\iint\limits_{D'}\sqrt{4-r^2}\,abr\,dr d\varphi=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{4-r^2}\,r\,dr=-\pi ab\int\limits_0^1\sqrt{4-r^2}\,d(4-r^2)=$$

$$=-\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2\pi ab}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)\text{ ед. объёма.}◄$$

3°. Понятие гладкой поверхности. Вычисление площади криволинейной поверхности.

Определение 7.1. Поверхность (S), определяемая уравнением

$$F(x,y,z)=0, \tag{7.4}$$

называется *гладкой*, если функция $F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в любой точке $M\in(S)$, при этом

$$F_x'^2(M)+F_y'^2(M)+F_z'^2(M)>0. \tag{7.5}$$

Так, гладкой будет поверхность (S), определяемая явным уравнением вида

$$z=\varphi(x,y),\ (x,y)\in D\subset \boldsymbol{R}_2, \tag{7.6}$$

при условии, что функция $\varphi(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка на множестве D. Действительно, в этом случае $F(x,y,z)=\varphi(x,y)-z$, $F_x'^2(M)+F_y'^2(M)+F_z'^2(M)=\varphi_x'^2(N)+\varphi_y'^2(N)+1>0$, где точка $N(x,y)\in D$, а точка $M(x,y,\varphi(x,y))\in(S)$.

Уравнение касательной плоскости T к поверхности (S), определяемой уравнением (7.6), в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(S)$ имеет вид:

$$T:\ z_x'(x-x_0)+z_y'(y-y_0)-(z-z_0)=0. \tag{7.7}$$

Частные производные здесь вычисляются в точке $N(x_0,y_0)$. Известно, что вектор $\vec{n}=(A, B, C)$ есть вектор нормали к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Поэтому вектор $\vec{n}_0=\left(z_x'(x_0,y_0), z_y'(x_0,y_0), -1\right)$ является вектором нормали к касательной плоскости к поверхности (S): $z=\varphi(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Нормаль к касательной плоскости, проходящая через точку касания плоскости с поверхностью, называется *нормалью* к этой поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Поставим задачу дать определение площади криволинейной поверхности. Пусть поверхность (S): $z=\varphi(x,y)$, проектируется на плоскость Oxy в замкнутую область D (рис. 7.2). Разобьём область D кусочно-гладкими кривыми на n частей: D_1, … , D_n с площадями ΔS_1, … , ΔS_n и пусть λ – ранг разбиения. В i-й частичной области ($i = 1, 2, … , n$) выберем

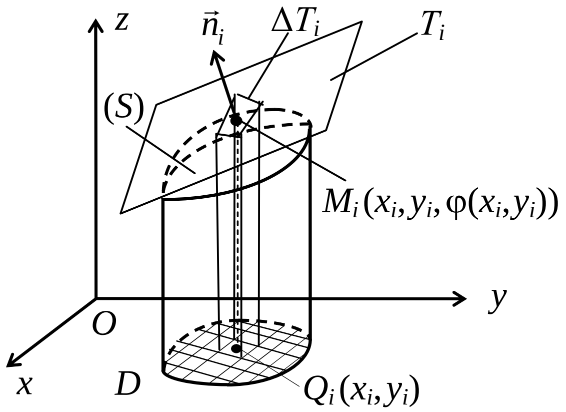

Рис. 7.2. Иллюстрация к определению площади кривой поверхности.

произвольную точку $Q_i(x_i, y_i)$. В точке $M(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i))$ поверхности (S) построим касательную плоскость T_i.

Обозначим через (ΔT_i) часть касательной плоскости T_i, проекцией которой на плоскость Oxy будет область D_i (рис. 7.2). Площадь ΔT_i этой части касательной плоскости можно считать приближённо равной площади части поверхности (S), проекция которой на плоскость Oxy есть область D_i, а сумму $\sum_{i=1}^{n}\Delta T_i$ естественно принять за приближённое значение площади всей поверхности (S).

За площадь S поверхности (S) принимается $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta T_i$, если он существует и конечен. Здесь $\lambda = \max_{i=1,\ldots,n}\Delta T_i$.

В случае, если (S) – гладкая поверхность, определяемая уравнением: $z=\varphi(x,y)$, этот предел существует и равен двойному интегралу:

$$S=\iint_D \sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}\,dx\,dy.$$

Последнее равенство можно записать иначе:

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy. \qquad (7.8)$$

Замечание 7.2. Подынтегральное выражение в (7.9) $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=dS$ принято называть элементом площади поверхности (S): $z=\varphi(x, y)$.

Пример 7.3. Найти площадь S части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ ($z\ge 0$), заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2y$ (рис. 7.3).

► Так как $z=\sqrt{x^2+y^2}$ для $z\ge 0$, то $z_x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

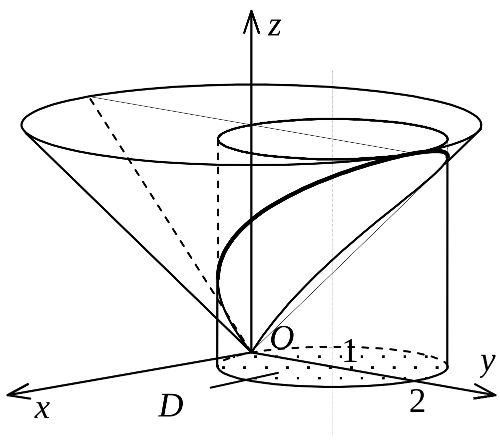

Рис. 7.3. К примеру 7.3

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy.$$

По формуле (7.8) имеем:

$$S=\iint_D \sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\iint_D dxdy=S_1\sqrt{2},$$

где $S_1=\pi$ – площадь круга D радиуса 1, в который проектируется данная часть поверхности конуса (рис. 7.3). Итак, $S=\pi\sqrt{2}$.◄

Замечание 7.3. В случае, если (S) – гладкая поверхность, определяемая уравнением: $x=\psi(y,z)$ или уравнением: $y=\eta(x,z)$, её площадь можно вычислить по формулам:

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dy\,dz\,, \qquad (7.9)$$

$$S = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dx\,dz\,, \qquad (7.10)$$

где D_{yz}, D_{xz} – области в плоскостях Oyz и Oxz, на которые проектируется поверхность (S).

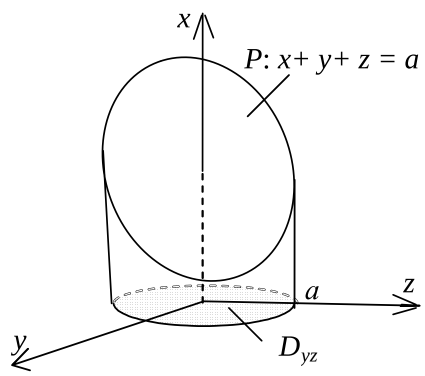

Рис. 7.4. К примеру 7.4

Пример 7.4. Найдите площадь части плоскости P: $x + y + z = 2a$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = a^2$.

►Рассматриваемая часть плоскости $x + y + z = 2a$ проектируется на плоскость Oyz в круг D_{yz}: $y^2 + z^2 \le a^2$ (рис. 7.4). Найдём x из уравнения плоскости: $x = 2a - y - z$. Так как $1 + x_y'^2 + x_z'^2 = 3$, то в силу формулы (7.9) имеем

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dy\,dz = \sqrt{3}\iint\limits_{Dyz} dy\,dz = = \sqrt{3}S_{D_{yz}} = \pi a^2\sqrt{3}. ◄$$

Замечание 7.4. Проектирование рассматриваемой части плоскости из примера 7.4 в плоскость Oxy и вычисления её площади по формуле (7.8) привело бы к более громоздким выкладкам.