§9. Производные высших порядков

Определение 9.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y'_x = g(x),\ x \in X$. Если существует производная $g'_x,\ x \in X$, то она называется *производной второго порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначается следующими символами: $y'',\ y''_{x^2},\ f''(x),\ f''_{x^2}(x),\ \dfrac{d^2y}{dx^2},\ \dfrac{d^2 f}{dx^2}$. Итак, $y'' = (y')'$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t при движении по прямой, тогда, как было установлено в §2, $\dot{s}(t) = v(t)$ – скорость движения точки в момент времени t. Для второй производной от пути по времени справедливо равенство: $\ddot{s}(t) = \dot{v}(t)$ и, следовательно, вторая производная от пути по времени в прямолинейном движении интерпретируется как *ускорение*.

Пример 9.1. Показать, что если скорость $v(t)$ прямолинейного движения материальной точки пропорциональна корню кубическому из пути $s(t)$, пройдённому за время t, то ускорение материальной точки обратно пропорционально корню кубическому из пути $s(t)$.

►По условию $v(t) = k\sqrt[3]{s(t)}$ или $\dot{s}(t) = k\sqrt[3]{s(t)}$, где k – коэффициент пропорциональности. Возьмём производные по t от обеих частей последнего равенства: $\ddot{s}(t) = k(\sqrt[3]{s(t)})'_t = k_1 s^{-2/3}(t)\cdot \dot{s}(t)$, $k_1 = k/3$. Заменив в последнем равенстве множитель $\dot{s}(t)$ на равное ему выражение $k\sqrt[3]{s(t)}$, имеем $\ddot{s}(t) = k_1 s^{-2/3}(t)\cdot k\sqrt[3]{s(t)} = k_2 \big/ \sqrt[3]{s(t)}$, где $k_2 = k_1\cdot k = k^2/3$.◄

Определение 9.2. Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется *производной третьего порядка* и обозначается y''', $y''' = (y'')'$ и т.д. Для обозначения производных более высоких порядков используют римские цифры или арабские в круглых скобках: $y^{IV}, y^{V},\ldots, y^{X},\ldots$ или $y^{(4)}, y^{(5)},\ldots, y^{(10)},\ldots$.

Производной n – го порядка $y^{(n)}$ (или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$) данной функции в точке x называется производная от её производной $(n$-1) – го порядка. Итак,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{9.1}$$

Пример 9.2. Найти y^{IV}, если $y = (x^3+2)/(x-1)$.

►Представим y в виде суммы многочлена и некоторой рациональной дроби. Имеем: $x^3 + 2 = (x^2 + x + 1)(x-1) + 3$. Разделим обе части этого равенства на x–1: $(x^3+2)/(x-1) = x^2 + x + 1 + 3/(x-1)$. Имеем: $y^{IV} = ((x^3+2)/(x-1))^{IV} =$ $(x^2+x+1)^{IV} + (3/(x-1))^{IV}$ или $y^{IV} = (3/(x-1))^{IV}$, ибо $(x^2+x+1)^{IV} = 0$. В самом деле, $(x^2+x+1)' = 2x+1,\ (x^2+x+1)'' = 2,$ $(x^2+x+1)''' = (x^2+x+1)^{IV} = 0$. Так как $(3/(x-1))' = -3/(x-1)^2$,

$(3/(x-1))'' = 6/(x-1)^3$, $(3/(x-1))''' =$
$= -18/(x-1)^4$, $(3/(x-1))^{IV} = 72/(x-1)^5$, то $y^{IV} = 72/(x-1)^5$.◄

Замечание 9.1. В процессе решения примера 9.2 установлено, что многочлен 2–ой степени имеет производные любого порядка, при этом все его производные порядка выше 2–го равны нулю. Этот результат обобщается на случай многочлена *n*– ой степени, который имеет производные любого порядка при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, все его производные, начиная с (*n*+1)–го порядка, равны нулю.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке *x*, $x \in \boldsymbol{R}$, производные любого порядка, то представляет интерес формула для производной *n* – го порядка от данной функции, $y^{(n)}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Пример 9.3. Найти $y^{(n)}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, если $y = x\mathrm{e}^x$.

►Решим задачу методом математической индукции.

1) База индукции – изучение частных случаев. Имеем $y' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = = (x+1)\mathrm{e}^x$, $y'' = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$.

2) Гипотеза: $y^{(n)} = (x+n)\mathrm{e}^x$ для $n = k$, где *к* – произвольное натуральное число, т.е. $y^{(k)} = (x+k)\mathrm{e}^x$.

3) Покажем, что гипотеза справедлива и при $n = k+1$. Из (9.1) имеем

$$y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = ((x+k)\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + (x+k)\mathrm{e}^x = (x+k+1)\mathrm{e}^x.$$

Полученное выражение следует из гипотезы при $n = k+1$, поэтому приходим к выводу, что эта формула верна при $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Таким образом, $y^{(n)} = (x+n)e^x, \forall n \in \boldsymbol{N}$.◄

С помощью метода математической индукции можно обосновать следующие формулы:

$$(e^x)^{(n)} = e^x \text{ для } \forall x \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{9.2}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2}) \text{ для } \forall x \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{9.3}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2}) \text{ для } \forall x \in \boldsymbol{R} \text{ и } \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{9.4}$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ для } \forall x \in (-1, +\infty) \text{ и } \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{9.5}$$

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \text{ для } \forall x \in (-1, +\infty), \tag{9.6}$$

$\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$ и $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Используя метод математической индукции, покажем, например, что справедливо равенство (9.3).

►1) Проверим, что оно выполняется на частных случаях, например, при $n = 1, 2$. Имеем $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x$. Очевидно, эти равенства получаются из (9.3) при указанных значениях *n*.

2) Выдвигаем гипотезу: равенство (9.3) справедливо при любом натуральном *n*.

3) Проверим, что гипотеза верна на следующем шаге, т.е. при $n+1$.

Имеем $(\sin x)^{(n+1)}=((\sin x)^{(n)})'=(\sin(x+\pi n/2))'=\cos(x+\pi n/2)$. Так как $\cos(x+\pi n/2)= \; =\sin(x+\pi n/2+\pi/2)=\sin\big(x+\pi(n+1)/2\big)$ (формулы приведения из элементарной тригонометрии), то приходим к равенству: $(\sin x)^{(n+1)}=\sin\big(x+\pi(n+1)/2\big)$, которое получается из (9.3) при замене n на n+1 и поэтому соотношение (9.3) справедливо при любом натуральном n. ◄

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы n раз в точке x, $x\in\boldsymbol{R}$, то их сумма и произведение также n раз дифференцируемы в этой точке и справедливы формулы:

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}, \tag{9.7}$$

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(k)}\,v^{(n-k)}, \tag{9.8}$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, а коэффициенты C_n^k, $k=0,1,\ldots,n$, называемые биномиальными (§10 главы 1 раздела 4), определяются равенством:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{9.9}$$

Замечание 9.2. Равенство (9.8) называется формулой Лейбница.

►1) Равенство (9.8) выполняется в частных случаях: $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ (n=1), $(u\cdot v)''=((u\cdot v)')'=(u'v+uv')'=u''v+2u'v'+uv''$ (n=2).

2) Выдвигаем гипотезу: равенство (9.8) верно при любом натуральном n.

3) Проверим, что гипотеза верна на следующем шаге, т.е. при $n+1$. Имеем

$$(u\cdot v)^{(n+1)}=\big((u\cdot v)^{(n)}\big)'=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(k)}\,v^{(n-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\big(u^{(k)}\,v^{(n-k)}\big)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\big(u^{(k+1)}\,v^{(n-k)}+u^{(k)}\,v^{(n-k+1)}\big)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k+1)}\,v^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}\,v^{(n+1-k)}.$$

Заменим индекс суммирования по следующим формулам: $k+1=i$ или $k=i-1$ для первого слагаемого и $k=i$ для второго, получим:

$$(u\cdot v)^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{n+1}C_n^{i-1}u^{(i)}\,v^{(n+1-i)}+\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}\,v^{(n+1-i)}=$$

$$=C_n^n u^{(n+1)}\,v^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}(C_n^{i-1}+C_n^i)u^{(i)}\,v^{(n+1-i)}+C_n^0 u^{(0)}v^{(n+1)}.$$

Из свойств биномиальных коэффициентов следуют соотношения: $C_n^{i-1}+C_n^i=C_{n+1}^i$, $C_n^n=C_{n+1}^{n+1}$, $C_n^0=C_{n+1}^0$, поэтому для $(u\cdot v)^{(n+1)}$ имеем: $(u\cdot v)^{(n+1)}=\sum\limits_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\,u^{(i)}\,v^{(n+1-i)}$ или $(u\cdot v)^{(n+1)}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\,u^{(k)}\,v^{(n+1-k)}$. Последнее равенство получается из гипотезы при замене n на n+1, потому заключаем, что гипотеза справедлива (и вместе с ней равенство (9.8)) при любом натуральном n.◄

Пример 9.4. Найти $y^{(20)}$, если $y=(x^2+1)\sin x$.

►Из (9.8) имеем $y^{(20)}=(u\cdot v)^{(20)}=\sum\limits_{k=0}^{20}C_{20}^k\,u^{(k)}\,v^{(20-k)}$, где $u=x^2+1$,

$v = \sin x$. Поскольку $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = u^{(4)} = \ldots = u^{(20)} = 0$, то для $y^{(20)}$ получаем:

$$y^{(20)} = (u \cdot v)^{(20)} = \sum_{k=0}^{2} C_{20}^{k} u^{(k)} v^{(20-k)} = C_{20}^{0} u \cdot v^{(20)} + C_{20}^{1} u' \cdot v^{(19)} + C_{20}^{2} u'' \cdot v^{(18)}.$$

Коэффициенты $C_{20}^{0}, C_{20}^{1}, C_{20}^{2}$ вычислим по формуле (9.9): $C_{20}^{0} = 1$, $C_{20}^{1} = 20$, $C_{20}^{2} = 190$, производную $v^{(18)}$ по формуле (9.3): $v^{(18)} = (\sin x)^{(18)} = = \sin(x + 18\pi/2) =$ $\sin(x + 9\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$. Для производных $v^{(19)}$, $v^{(20)}$ имеем равенства: $v^{(19)} = ((\sin x)^{(18)})' = -\cos x$, $v^{(20)} = ((\sin x)^{(19)})' = \sin x$. В результате приходим к равенству: $y^{(20)} = (x^2 + 1)\sin x - 40x\cos x - 380\sin x$. ◄