Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Теорема.

Пусть $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} -$ произвольное векторное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть функции $P(M); Q(M); R(M) -$ имеют непрерывные частные производные $\forall\, M \in A$.

Тогда векторное поле $\bar{a}(M)$ можно разложить на сумму двух полей

$$\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M), \qquad (**)$$

где $\overline{a_1}(M) -$ потенциальное поле, $\overline{a_2}(M) -$ соленоидальное поле $\forall\, M \in A$.

Доказательство:

Пусть $\overline{a_1}(M) -$ потенциальное поле $\Rightarrow$

$$\overline{a_1}(M) = gradf(M)\ \forall\, M \in A.$$

Следовательно,

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M)\ .$$

Из определения соленоидального векторного поля имеем

$$div\overline{a_2}(M) = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$div\big(\bar{a}(M) - gradf(M)\big) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$div\bar{a}(M) - divgradf(M) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$div\bar{a}(M) = divgradf(M) \qquad (*)$$

Уравнение (*) - это неоднородное уравнение в частных производных второго порядка, которое называется уравнением Пуассона. Это уравнение имеет бесконечное множество решений.

Пусть $f(M)$ – решение (*). Тогда

$$\overline{a_1}(M) = gradf(M)\ \forall\ M \in A \text{ и}$$

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M).$$

<u>ч.т.д.</u>

<u>Замечание</u>:

Представление векторного поля $\bar{a}(M)$ в виде (**) не единственно.

Пример.

Разложить векторное поле

$$\bar{a} = (x-y)\bar{\imath} + (x+y)\bar{\jmath} + (z+2)\bar{k}$$

а сумму потенциального и соленоидального полей.

Решение.

По предыдущей теореме векторное поле $\bar{a}\,(M)$ представимо в виде

$$\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M),$$

где

$$\overline{a_1}(M) = gradf(M) - \text{потенциальное поле},$$

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M) - \text{соленоидальное поле},$$

причем $f(M)$ –решение уравнения Пуассона

$$div\bar{a}(M) = divgradf(M).$$

Распишем это уравнение в координатной форме:

$$divgradf(M) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(M) + \frac{\partial}{\partial y} f'_y(M) + \frac{\partial}{\partial z} f'_z(M) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2},$$

т.е.

$$divgradf(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$div\bar{a}(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} - \qquad (***)$$

−это уравнением Пуассона в координатной форме.

Для нашего поля имеем

$$div\bar{a}(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \frac{\partial}{\partial z}(z+2) = 3.$$

Тогда уравнение (***) примет вид

$$\frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial z^2} = 3.$$

Частным решением этого уравнения является, например, функция (находим подбором, т.к. пока не умеем решать уравнение (***))

$$f(x;y;z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Для этой функции

$$gradf(x;y;z) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} = \bar{r}\,.$$

Следовательно, данное поле $\bar{a}$ (M) представимо в виде суммы потенциального поля

$$\overline{a_1}(M) = gradf(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} = \bar{r}$$

и соленоидального

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M) =$$

$$= \big((x-y) - x\big)\bar{\imath} + \big((x+y) - y\big)\bar{\jmath} + \big((z+2) - z\big)\bar{k} =$$

$$= -y\bar{\imath} + x\bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

Непосредственно можно проверить, что векторное поле $\overline{a_2}(M)$ является соленоидальным:

$$div\overline{a_2}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = 0\,.$$

Гармонические векторные поля

Определение (гармонического поля)

Векторное поле $\overline{a}(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$, называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным, и соленоидальным.

$$\begin{cases} \bar{a}(M) = gradf(M) \\ div\bar{a}(M) = 0 \end{cases}, \quad \forall\, M \in A.$$

Замечание:

Для гармонического поля справедливо равенство:

$$divgradf(M) = 0.$$

или

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} = 0.$$

Примеры гармонических полей.

1) Поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

2) Скалярное поле

$$f(M) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \text{ где } k = const.$$

В частности,

$f(M) = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (это потенциал поля тяготения , создаваемого точечной массой, помещенной в начало координат (для поля Ньютоновского притяжения)) ;

$f(M) = -\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (для электростатического поля точечного заряда).

3) $f(M) = kln\sqrt{x^2 + y^2}$, где $k = const$

Пример.

Выяснить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими

а) $f(M) = x^2 + 2xy - y^2$

б) $f(M) = x^2y + y^2z + xz^2$

Решение.

а)

$$\frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2y) = 2 - 2 = 0 \Longrightarrow$$

$f(M) -$ гармоническое поле.

б)

$$\frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy + z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + 2xz) = 2y + 2z + 2x \neq 0 \Longrightarrow$$

$f(M) -$ не является гармоническим полем.