Глава 1

ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Понятие векторной функции скалярного аргумента. Годограф векторной функции.

До сих пор в курсе математического анализа мы изучали функциональную зависимость между величинами, принимающими только численные значения, будь то теория функций одной вещественной переменной или теория функций нескольких переменных. Иными словами, изучаемые ранее функции были скалярными функциями одного или нескольких переменных. По аналогии со скалярной функцией можно ввести понятие векторной функции скалярного аргумента.

Определение 1.1. *Будем говорить, что задана векторная функция* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *скалярного аргумента t, если каждому значению переменной t из некоторого множества* $T\subset \mathbf{R}$ *ставится в соответствие единственным образом вектор* $\vec{r}(t)$.

При изменении аргумента *t* вектор $\vec{r}(t)$ изменяется, вообще говоря, как по величине, так и по направлению. Как и в векторной алгебре, мы рассматриваем так называемые свободные векторы, которые считаются равными, если совпадают их длина и направление, или если они имеют одинаковые проекции на координатные оси. Будем считать, что вектор $\vec{r}(t)$ исходит из начала координат, то есть является радиус-вектором.

Определение 1.2. *Годографом векторной функции* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *называется кривая L* (Рис. 1.1) *, которую опишет в пространстве конец вектора* $\vec{r}(t)$ *при изменении аргумента t.*

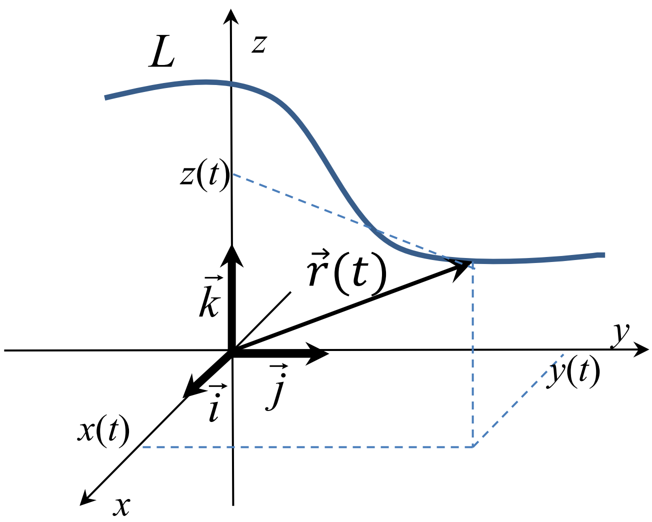

Рис. 1.1

Как известно из векторной алгебры, разложение вектора $\vec{r}(t)$ по ортам координатных осей имеет вид:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\,,$$

таким образом, задание векторной функции скалярного аргумента равносильно заданию трех скалярных функций одного вещественного аргумента *t*.

Уравнения $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \\ z = z(t), \end{cases}$

называются параметрическими уравнениями линии L.

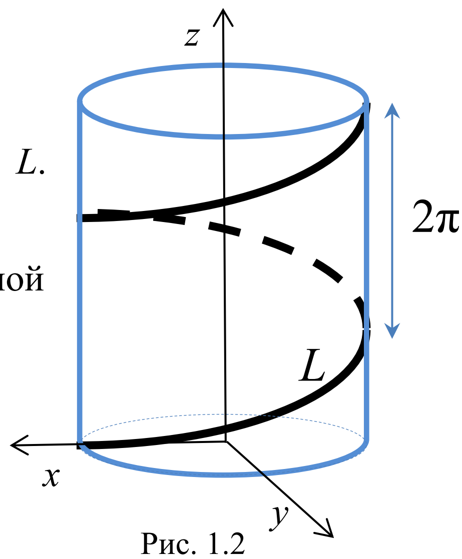

Рис. 1.2

В качестве примера рассмотрим годограф векторной функции $\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j} + t\, \vec{k}, \quad t \in [0, +\infty)$. Или линию L в пространстве (Рис. 1.2.), заданную параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \in [0, +\infty). \\ z = t, \end{cases}$$

Часто нам будет удобно отождествлять векторную функцию со столбцом ее координат, которые являются обычными скалярными функциями одного вещественного аргумента. То есть будем записывать следующим образом:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

§ 2. Предел и непрерывность векторной функции скалярного аргумента.

Рассмотрим векторную функцию скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Для этой функции можно ввести основные понятия математического анализа аналогично тому, как это делается со скалярными функциями одной или нескольких переменных.

Пусть функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в проколотой окрестности точки t_0.

Определение 2.1. *Вектор $\vec{r}_0$ называется пределом векторной функции $\vec{r}(t)$ при стремлении t к t_0 (или в точке t_0), если длина вектора $\vec{r}(t) - \vec{r}_0$ стремится к нулю, то есть*

$$\lim_{t \to t_0} \left| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \right| = 0. \qquad (2.1)$$

При этом пишут: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ или $\vec{r}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \vec{r}_0$.

Заметим, что определение предела векторной функции сводится к понятию предела скалярной величины – длины вектора. Это понятие уже известно из предыдущего курса математического анализа. Запишем формулу для нахождения длины разности векторов $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ и $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$:

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}\,.$$

Тогда из условия (2.1) сразу видно, что

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0, \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0, \\ \lim\limits_{t \to t_0} z(t) = z_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Это означает, что вычисление предела векторной функции можно производить покоординатно.

Далее, непосредственно из определения следует, что если $\vec{r}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \vec{r}_0$, то и $|\vec{r}(t)| \underset{t \to t_0}{\to} |\vec{r}_0|$. В частности, условие $\vec{r}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \vec{0}$ равносильно тому, что $|\vec{r}(t)| \underset{t \to t_0}{\to} 0$.

Замечание 2.1. Пользуясь определением предела векторной функции или условием (2.2), нетрудно доказать, что предел суммы, разности и произведения векторной функции на скалярную существуют и равны соответственно сумме, разности или произведению пределов. Разумеется, предполагается, что исходные функции имеют пределы при $t \to t_0$.

Дадим теперь (по аналогии со скалярной функцией) определение непрерывности векторной функции $\vec{r}(t)$. Пусть эта функция определена в некоторой окрестности точки t_0 (включая саму точку t_0).

Определение 2.2. *Функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если выполняется условие*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)\,. \tag{2.3}$$

В случае нарушения условия (2.3) говорят, что функция $\vec{r}(t)$ терпит разрыв в точке t_0.

Мы уже знаем, что соотношение (2.3) эквивалентно следующим трем условиям для координат функции $\vec{r}(t)$:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x(t_0),\\ \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=y(t_0),\\ \lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z(t_0),\end{cases}$$

то есть непрерывность векторной функции эквивалентна покоординатной непрерывности.

Как мы уже отмечали, из условия $\vec{r}(t)\underset{t\to t_0}{\to}\vec{r}(t_0)$ вытекает соотношение $\left|\vec{r}(t)\right|\underset{t\to t_0}{\to}\left|\vec{r}(t_0)\right|$. Это означает, что непрерывность векторной функции влечет за собой непрерывность ее модуля (обратное утверждение, вообще говоря, неверно). Нетрудно также показать, что сумма и разность непрерывных векторных функций непрерывны, а также произведение непрерывной векторной функции и непрерывной скалярной функции тоже являются непрерывными векторными функциями.

§ 3. Производная векторной функции по скалярному аргументу, ее геометрический и механический смысл.

Перейдем теперь к вопросу о производной векторной функции по скалярному аргументу.

Пусть функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ задана на интервале (α,β), $t_0\in(\alpha,\beta)$. Возьмем приращение аргумента Δt, чтобы $t_0+\Delta t\in(\alpha,\beta)$.

Определение 3.1. *Вектор* $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ *– приращение функции* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *в точке* t_0*, вызванное приращением аргумента* Δt.

Определение 3.2. *Если существует предел отношения приращения векторной функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда* $\Delta t\to 0$*, то этот предел называется производной векторной функции* $\vec{r}(t)$ *по скалярному аргументу t, а сама функция называется дифференцируемой в точке* t_0.

Производная обозначается тремя разными способами: $\left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$, $\vec{r}'(t_0)$ или $\dot{\vec{r}}(t_0)$.

В курсе теоретической механики обычно применяют последнее обозначение, поэтому мы также будем использовать его. То есть $\dot{\vec{r}}(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}(t_0)$, если этот предел существует.

Ясно, что производная $\dot{\vec{r}}(t)$ при изменении аргумента также является векторной функцией скалярного аргумента t и ее производная, если она существует, дает вторую производную, которую будем обозначать $\ddot{\vec{r}}(t)$.

Дифференциал векторной функции определяется равенством $d\,\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)dt$, а значит, тоже является вектором при каждом значении t и приращении аргумента $\Delta t = dt$.

Выясним теперь геометрический смысл производной векторной функции. Пусть задана дифференцируемая на интервале (α, β) функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, годографом которой является линия L в пространстве. Пусть точка M этой кривой соответствует какому-нибудь фиксированному значению аргумента t, а точка N – значению аргумента $t + \Delta t$ (Рис. 3.1). Здесь векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ есть радиус-векторы точек M и N соответственно. Тогда разность этих векторов даст новый вектор $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}(t)$.Мы видим, что этот вектор направлен по секущей кривой L. Умножив вектор $\overrightarrow{MN} = \Delta\vec{r}(t)$ на скаляр $\dfrac{1}{\Delta t}$, получим новый вектор $\vec{q} = \dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$, коллинеарный вектору $\Delta\vec{r}(t)$. Если $\Delta t > 0$, то при умножении на $\dfrac{1}{\Delta t}$ направление вектора $\vec{q}$ не изменится, то есть он будет сонаправлен с вектором $\Delta\vec{r}(t)$. Если же $\Delta t < 0$, то вектор $\vec{q}$ будет противонаправлен вектору $\Delta\vec{r}(t)$. Мы предполагаем, что годограф векторной функции $\vec{r}(t)$ имеет касательную во всех своих точках, поэтому при $\Delta t \to 0$ точка N будет приближаться к точке M, секущая MN в пределе перейдет в касательную, а вектор $\vec{q}$ в пределе перейдет в вектор $\dot{\vec{r}}(t)$, касательный к кривой L, направленный в сторону возрастания параметра t.

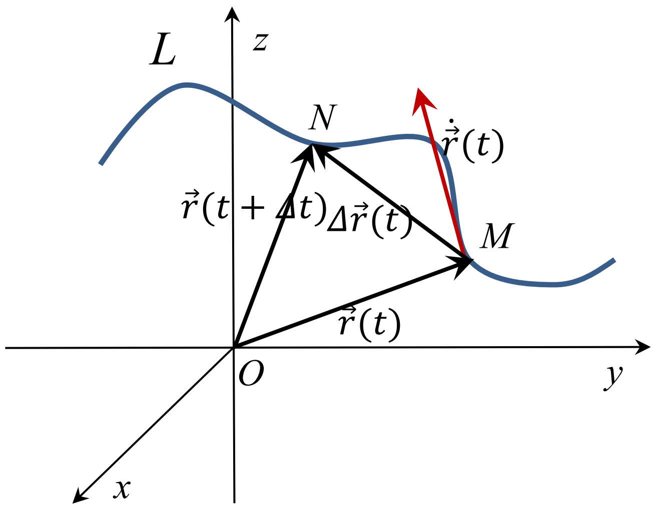

Рис. 3.1

Перейдем теперь к механическому смыслу производной векторной функции. Пусть годограф функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ является траекторией движения материальной точки; уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t – время, является уравнением движения этой точки. Тогда вектор $\overrightarrow{MN} = \Delta\vec{r}(t)$ изображает перемещение точки M за время Δt, а вектор $\vec{q} = \dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ является средней скоростью перемещения за этот период времени. В пределе этот вектор средней скорости даст вектор мгновенной скорости в момент времени t, то есть

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t).$$

Таким образом, производная радиус-вектора движущейся точки по времени есть вектор скорости движения, касательный к траектории в соответствующей точке и направленный в сторону ее движения.

Полученный выше вектор скорости $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ также зависит от времени, и, дифференцируя его, получим вектор ускорения:

$$\vec{w}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t).$$

Как было сказано выше, в дальнейшем нам удобно будет заменять вектор $\vec{r}(t)$ на столбец его координат: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, а тогда, используя покоординатное дифференцирование, можно записать:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix},\ \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

§ 4. Правила дифференцирования векторных функций.

Рассмотрим теперь правила вычисления производных векторной функции.

Пусть функция $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ задана на некотором промежутке $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$.

Тогда выбранному значению t будет отвечать вектор $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, а значению $t + \Delta t$ – вектор $\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}$.

Найдем приращение $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$:

$$\Delta\vec{r}(t) = \big(x(t+\Delta t) - x(t)\big)\vec{i} + \big(y(t+\Delta t) - y(t)\big)\vec{j} + \big(z(t+\Delta t) - z(t)\big)\vec{k}\text{, или}$$

$$\Delta\vec{r}(t) = \Delta x(t)\vec{i} + \Delta y(t)\vec{j} + \Delta z(t)\vec{k}\text{, где}$$

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t),\ \Delta y(t) = y(t+\Delta t) - y(t),\ \Delta z(t) = z(t+\Delta t) - z(t).$$

Тогда, разделив на $\Delta t \neq 0$, получим: $\dfrac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \dfrac{\Delta y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \dfrac{\Delta z(t)}{\Delta t}\vec{k}.$

Если функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют производные при выбранном значении t, то, переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta t \to 0$, получим формулу:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}\,. \tag{4.1}$$

Эта формула позволяет фактически вычислять производную векторной функции, вычисляя производные от скалярных функций ее координат.

Пользуясь выражением (4.1), легко показать, что все основные правила дифференцирования скалярных функций остаются в силе и для векторных функций. Далее будем рассматривать только те функции, которые имеют производные.

Теорема 4.1. *Производная суммы двух векторных функций равна сумме производных:* $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\right) = \dot{\vec{r}}_1(t) + \dot{\vec{r}}_2(t).$

Теорема 4.2. *Если векторная функция* $\vec{r}(t)$ *умножается на скалярную функцию* $\varphi(t)$*, то* $\dfrac{d}{dt}\left(\varphi(t)\vec{r}(t)\right) = \dot{\varphi}(t)\vec{r}(t) + \varphi(t)\dot{\vec{r}}(t).$

Следствие. *Постоянный числовой множитель можно вынести за знак производной:* $\dfrac{d}{dt}\left(k\vec{r}(t)\right) = k\dot{\vec{r}}(t).$

Теорема 4.3. *Производная от скалярного произведения векторов выражается формулой:* $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right) = \dot{\vec{r}}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\cdot\dot{\vec{r}}_2(t).$

Теорема 4.4. *Производная от векторного произведения векторов выражается формулой:* $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right) = \dot{\vec{r}}_1(t)\times\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\times\dot{\vec{r}}_2(t).$

Как было сказано выше, вывод всех этих формул может быть произведен с помощью формулы (4.1). Однако они могут быть выведены, если исходить из общего определения производной векторной функции. В качестве примера выведем формулу для производной скалярного произведения векторных функций.

Для приращения скалярного произведения $\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)$ при переходе от точки t к точке $t + \Delta t$ получим:

$$\Delta(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2) = (\vec{r}_1+\Delta\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2+\Delta\vec{r}_2) - \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_1\cdot\Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_1\cdot\Delta\vec{r}_2 - \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 =$$
$$= \vec{r}_1\cdot\Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_1\cdot\Delta\vec{r}_2.$$

Разделим на $\Delta t \neq 0$ и воспользуемся свойством линейности скалярного произведения:

$$\frac{\Delta(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_1\cdot\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} + \Delta\vec{r}_1\cdot\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}\cdot\vec{r}_2\right) + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\vec{r}_1\cdot\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\vec{r}_1\cdot\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}\right)$$
$$= \dot{\vec{r}}_1\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2 + \vec{0}\cdot\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_1\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2.$$

В заключение этого параграфа заметим, что если векторная функция $\vec{a}(t)$ такова, что $|\vec{a}(t)| = C,\ C\in\mathbf{R}$, то $\vec{a}(t)\perp\dot{\vec{a}}(t)$, то есть эти векторы перпендикулярны при любом значении $t\in\mathbf{R}$.

Имеем: $\vec{a}\cdot\vec{a} = C^2$. Продифференцируем это скалярное произведение, согласно приведенному выше правилу: $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{a}) = 2\dot{\vec{a}}\cdot\vec{a} = 0$, а равенство нулю скалярного произведения как раз и означает перпендикулярность векторов.