§3. Неявные функции

Неявная функция y аргумента x – это функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно переменных x и y, т. е. уравнением вида

$$F(x, y) = 0. \tag{3.1}$$

Если для каждого значения x в некотором промежутке существует одно или несколько значений y, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (3.1), то этим определяется однозначная или многозначная функция $y = y(x)$, для которой равенство

$$F\big(x, y(x)\big) = 0 \tag{3.2}$$

имеет место уже тождественно относительно x.

Например, уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3.3}$$

задает неявную функцию $y = y(x)$. В простейших случаях уравнения, задающие неявные функции, могут быть разрешены в классе элементарных функций, т. е. удается найти элементарные функции, удовлетворяющие этим уравнениям. Так, в уравнении (3.3) имеем

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}. \tag{3.4}$$

Как видим, здесь удалось найти для y очень простое аналитическое выражение через x. В общем случае таких элементарных функций найти не удается.

Не всякое уравнение вида (3.1) задает неявную функцию. Так, если ограничиваться лишь вещественными значениями переменных, то уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задает неявную функцию, т. е. это уравнение не удовлетворяется ни одной парой вещественных значений x и y. Уравнение $e^{xy} = 0$ вообще не удовлетворяется ни одной парой вещественных или комплексных значений x и y.

Теорема существования неявных функций в простейшей формулировке утверждает, что если функция $F(x, y)$ в уравнении (3.1) обращается в нуль при паре значений x_0, y_0 ($F(x_0, y_0) \equiv 0$) и дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), причем $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ непрерывны в этой окрестности и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 существует одна и только одна непрерывная функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y) = 0$ и обращающаяся в y_0 при $x = x_0$; при этом

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{3.5}$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [Ф., гл. 19].

Замечание. Аналогично уравнению (3.1) можно рассматривать уравнение с большим числом переменных. Пусть, например, имеем уравнение с тремя переменными

$$F(x, y, z) = 0\,. \tag{3.6}$$

При известных условиях этим уравнением z определяется как неявная функция от двух переменных x и y:

$$z = z(x, y)\,, \tag{3.7}$$

которая, вообще говоря, будет многозначной функцией. Если подставить ее вместо z, то будем иметь тождество

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) \equiv 0$$

относительно $x,\ y$. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{3.8}$$

задает неявную функцию $z = z(x, y)$, для которой из уравнения (3.8) удается найти простое аналитическое выражение

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,. \tag{3.9}$$

Если в вопросе о существовании однозначной неявной функции, определяемой уравнением (3.1), решающую роль играло требование, чтобы в рассматриваемой точке, удовлетворяющей уравнению, не обращалась в нуль производная F'_y, именно по той переменной, которая подлежала определению как неявная функция, то в вопросе о существовании однозначной неявной функции z, определяемой уравнением (3.6), аналогичную роль будет играть частная производная F'_z именно по той переменной, которая подлежит определению. При условии $F'_z \neq 0$ в окрестности соответствующей точки существует одна и только одна непрерывная функция $z = z(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y, z) = 0$; при этом

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_z(x, y)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_z(x, y)}\,.$$