§4. Замена переменной в неопределенном интеграле

Обычно замена переменной в неопределенном интеграле выполняется в двух вариантах. Цель – взять данный интеграл, который после введения новой переменной станет известным или даже табличным.

1-е правило. Искомый интеграл $\int f(x)\,dx$ преобразуем к следующему виду.

$$\int f(x)\,dx = \int g\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx = \int g\left[\varphi(x)\right]d\varphi(x).$$

Далее выполняем подстановку $\varphi(x) = t$. Тогда получаем интеграл $J = \int g(t)\,dt = F(t) + C$, который известен. Затем возвращаемся к старой переменной. Искомый интеграл взят: $J = F\left[\varphi(x)\right] + C$.

Запись:

$$\int f(x)\,dx = \int g\left[\varphi(x)\right]d\varphi(x) = \left[\varphi(x) = t\right] = \int g(t)\,dt = F(t) + C = F\left[\varphi(x)\right] + C. \qquad (4.1)$$

Функция $t = \varphi(x)$ предполагается дифференцируемой в рассматриваемой области.

Пример 4.1. $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \left[\sin x = t\right] = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$.

Пример 4.2. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{x} = \left[\ln x = t\right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\ln x\right| + C$.

2-е правило. В искомом интеграле $J = \int f(x)\,dx$ выполняем подстановку $x = \varphi(t)$. Искомый интеграл преобразуется к виду $J = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt = F(t) + C$. Здесь $g(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$, а интеграл $\int g(t)\,dt$ предполагается известным. Интеграл J взят: $J = F\left[\psi(x)\right] + C$, где $t = \psi(x)$ – функция, обратная для $x = \varphi(t)$.

Запись:

$$\int f(x)\,dx = \left[x = \varphi(t)\right] = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt = F(t) + C = F\left[\psi(x)\right] + C. \qquad (4.2)$$

Функция $x = \varphi(t)$ предполагается дифференцируемой и осуществляющей взаимно однозначное соответствие между переменными x и t в рассматриваемых областях их изменения. Эти требования обеспечиваются, если $\varphi(t)$ строго монотонна и дифференцируема.

Пример 4.3.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x = t^2;\ t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{t+1} = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\left(\int dt - \int \frac{d(t+1)}{t+1}\right) =$$

$$= 2\left(t - \ln|t+1|\right) + C = 2\left(\sqrt{x} - \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C.$$

Пример 4.4.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \begin{bmatrix} x = 1/t;\;\; t = 1/x \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt \end{bmatrix} = -\int \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{4-1/t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{\sqrt{(2t)^2-1}} =$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{(2t)^2-1}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{4-x^2}\right| + C\,.$$