§ 4. Дивергенция векторного поля

Дивергенция (расходимость) векторного поля даёт информацию о распределении и интенсивности источников и стоков векторного поля.

Определение (дивергенции векторного поля)

Пусть $\bar{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть σ – гладкая, двухсторонняя, ориентированная в сторону внешней нормали, замкнутая поверхность, ограничивающая тело T: $\sigma \subset A$.

Конечный предел (если он существует) отношения потока векторного поля $\bar{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ в напрвлении внешней нормали к объему тела T (μT), ограниченного поверхность σ, при условии, что $diamT \to 0$ и тело стягивается а точку M, называется *дивергенцией векторного поля* $\bar{a}(M)$ и обозначается:

$$\lim_{\substack{diamT \to 0 \\ (\mu T \to 0)}} \frac{\Pi_\sigma \bar{a}(M)}{\mu T} = div\,\bar{a}(M),$$

где μT – объем тела T

Замечания:

1) Приведенное выше определение дивергенции векторного поля является инвариантным относительно задания СК;

2) Точки M, в которых $div\,\bar{a}(M) > 0$, называются *источниками векторного поля.*

Точки M, в которых $div\,\bar{a}(M) < 0$, называются *стоками векторного поля.*

3) $\left| div\,\bar{a}(M) \right|$ даёт интенсивность источника/стока в точке M.

<u>Теорема</u> (о вычислении дивергенции векторного поля в ПДСК)

Пусть в R^3 задана ПДСК.

Пусть $\bar{a}(M)$ – векторное поле:

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\cdot\bar{i} + Q(x,y,z)\cdot\bar{j} + R(x,y,z)\cdot\bar{k} \qquad \forall(\cdot)\, M(x,y,z)\in A\subset R^3$$

Пусть функции $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z); P'_x(x,y,z); Q'_y(x,y,z); R'_z(x,y,z)$ – непрерывны $\forall(\cdot)\, M(x,y,z)\in A\subset R^3$.

Тогда

$$div\,\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

<u>Доказательство</u>:

Пусть σ – гладкая, двусторонняя, ориентированная в сторону внешней нормали, замкнутая поверхность, ограничивающая тело T: $\sigma\subset A$.

Пусть единичный вектор внешней нормали имеет координаты $\overline{n}_0 = \{cos\alpha; cos\beta; cos\gamma\}$

Пусть точка M лежит внутри σ, т.е. точка $M\in T$.

Рассмотрим поток векторного поля:

$$\Pi_\sigma \bar{a}(M) = \oiint\limits_{\sigma_{внеш}} \bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}\right)dxdydz =$$

=[по теореме о среднем значении тройного интеграла]=

$$= \left[\frac{\partial P(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_1)}{\partial z}\right]\cdot\mu T \text{ (где } \mu T - \text{объем тела } T).$$

Т. о. имеем

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) == \left[\frac{\partial P(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_1)}{\partial z}\right]\cdot\mu T$$

Последнее равенство почленно поделим на μT и перейдем к пределу при $diamT \to 0$ (т. е. $M_1 \to M$):

$$\lim_{diam T\to 0}\frac{\Pi_\sigma \bar{a}(M)}{\mu T}=\lim_{diam T\to 0}\left[\frac{\partial P(M_1)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M_1)}{\partial y}+\frac{\partial R(M_1)}{\partial z}\right]=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

Замечания:

1) Равенство $div\,\bar{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ в некоторой литературе используется как определение дивергенции векторного поля;

2) Пусть выполнены условия теоремы Остроградского-Гаусса.

Тогда

$$\oiint_{\sigma_{\text{внеш}}} \bar{a}(M)\cdot \bar{n}_0(M)d\sigma=\iiint_T div\bar{a}(M)dxdydz$$

– векторная форма записи теоремы Остроградского-Гаусса.

3) Дивергенция – скалярная характеристика векторного поля.

Свойства дивергенции векторного поля

1) $div\left(\lambda_1\cdot\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot\overline{a_2}(M)\right)=\lambda_1\cdot div\,\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot div\,\overline{a_2}(M)$,

где $\lambda_1,\lambda_2=const$

Доказательство:

а) $div\left(\lambda_1\cdot\overline{a_1}(M)\right)=\frac{\partial(\lambda_1\cdot P_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\lambda_1\cdot Q_1)}{\partial y}+\frac{\partial(\lambda_1\cdot R_1)}{\partial z}=\lambda_1\cdot\left[\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}\right]=\lambda_1\cdot div\,\overline{a_1}(M)$

б)

$$div\left(\overline{a_1}(M)\pm\overline{a_2}(M)\right)=\frac{\partial(P_1\pm P_2)}{\partial x}+\frac{\partial(Q_1\pm Q_2)}{\partial y}+\frac{\partial(R_1\pm R_2)}{\partial z}=\left[\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}\right]\pm\left[\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}+\frac{\partial R_2}{\partial z}\right]=$$

$$=div\,\overline{a_1}(M)\pm div\,\overline{a_2}(M)$$

Из пунктов а) и б) следует, что

$div\left(\lambda_1\cdot\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot\overline{a_2}(M)\right)=\lambda_1\cdot div\,\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot div\,\overline{a_2}(M)$.

2) $div\left(\varphi(M)\cdot\bar{a}(M)\right)=\bar{a}(M)\cdot grad\,\varphi(M)+\varphi(M)\cdot div\,\bar{a}(M)\ \ \forall(\cdot)\,M\in A\subset R^3$

Доказательство:

$$div\left(\varphi(M)\cdot\overline{a}(M)\right)=\left[\overline{a}(M)=P(x,y,z)\cdot\overline{i}+Q(x,y,z)\cdot\overline{j}+R(x,y,z)\cdot\overline{k}\right]=$$

$$=\frac{\partial\left(\varphi(M)\cdot P(M)\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\varphi(M)\cdot Q(M)\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\varphi(M)\cdot R(M)\right)}{\partial z}=P(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x}+Q(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial y}+R(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial z}+$$

$$\varphi(M)\cdot\left(\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}\right)=\overline{a}(M)\cdot grad\,\varphi(M)+\varphi(M)\cdot div\,\overline{a}(M)$$

§ 6. Линейный интеграл векторного поля. Циркуляция векторного поля.

Линейный интеграл векторного поля

Определение (линейного интеграла)

Пусть $\overline{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M\in A\subset R^3$.

Пусть Γ_{AB} – простая, спрямляемая, ориентированная кривая: $\Gamma_{AB}\subset A$.

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)\cdot\overline{\tau_0}dl \text{ - \textit{линейный интеграл векторного поля},}$$

где $\overline{\tau_0}$ - единичный вектор касательного вектора $\overline{\tau}$ к Γ_{AB} в точке M, направление которого совпадает с ориентацией кривой $\Gamma_{AB.}$

Замечания (другие формы записи линейного интеграла)

1) $$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)\cdot\overline{\tau_0}dl=\int\limits_{\Gamma_{AB}}Пр_{\overline{\tau_0}}\overline{a}(M)\cdot dl=\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)_{\overline{\tau_0}}dl$$

2) Пусть Γ_{AB} задана так

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\y&=\psi(t)\\z&=\lambda(t)\end{aligned}\right\}\ \forall\,t\in\left[t_1;t_2\right]:t_1\to(\cdot)A;\ \ t_2\to(\cdot)B$$

Пусть $\overline{r}(M)$ – радиус-вектор любой точки M, принадлежащей кривой $\Gamma_{AB.}$

$$\overline{r}(M)=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}=\varphi(t)\cdot\overline{i}+\psi(t)\cdot\overline{j}+\lambda(t)\cdot\overline{k}\,.$$

Тогда

$$d\overline{r}=\varphi'(t)dt\cdot\overline{i}+\psi'(t)dt\cdot\overline{j}+\lambda'(t)dt\cdot\overline{k}$$

По свойству призводной от векторной функции: $d\overline{r}$ коллинеарен $\overline{\tau}_0$, т. е

$$\overline{\tau_0}dl = d\bar{r}.$$

Так как

$$\left|d\bar{r}\right| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\lambda'(t))^2}\,dt = dl,$$

то получаем еще одну форму записи для линейного интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot\bar{\tau}_0(M)dl = \int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot d\,\bar{r}$$

3) Пусть $\bar{a}(M) = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$.

Точка $M \in \Gamma_{AB}$, $\bar{r}(M) = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$ и $d\bar{r}(M) = dx\cdot\bar{i} + dy\cdot\bar{j} + dz\cdot\bar{k}$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Свойства линейных интегралов

1) $\int\limits_{\Gamma_{AB}} \left(\lambda_1\cdot\overline{a_1}(M) \pm \lambda_2\cdot\overline{a_2}(M)\right)\cdot d\bar{r} = \lambda_1\cdot\int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a_1}(M)\cdot d\bar{r} \pm \lambda_2\cdot\int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a_2}(M)\cdot d\bar{r}$,

где $\lambda_1, \lambda_2 = const$

2) Пусть $\Gamma_{AB} = \Gamma_{AC} \vee \Gamma_{CB}$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} = \int\limits_{\Gamma_{AC}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} + \int\limits_{\Gamma_{CB}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r}$$

3) $\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} = -\int\limits_{\Gamma_{BA}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r}$

Доказательства свойств линейных интегралов вытекают из свойств криволинейных интегралов II рода.

Замечание (о физическом смысле линейного интеграла)

Если поле $\overline{a}(M)$ рассматривать как силовое поле $\overline{F}(M)$_, то линейный интеграл

$$\int_{\Gamma_{AB}} \overline{F}(M)d\overline{r}$$

представляет собой работу по перемещению материальной точки силой $\overline{F}$ вдоль кривой Γ_{AB}.

Циркуляция векторного поля

Определение (циркуляция векторного поля)

Циркуляцией векторного поля $\overline{a}(M)$ *для любой точки* M, принадлежащей области A, в свою очередь являющейся частью R^3, называется линейный интеграл по замкнутому контуру Γ и обозначается $circul_\Gamma \overline{a}(M)$ *или* $Ц_\Gamma \overline{a}(M)$.,

т.е.

$$circul_\Gamma \overline{a}(M) = \oint_\Gamma \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau}_0(M)dl \quad \text{или}$$

$$Ц_\Gamma \overline{a}(M) = \oint_\Gamma \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau}_0(M)dl$$