

Контрольные вопросы и задачи к главе 4, раздел 10

Задание 3. (Функциональные и степенные ряды.)

3.1. Найдите область сходимости функциональных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+3}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2x^2-3x+2}}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (2x+3)^n.$$

3.2. Найдите радиус сходимости, интервал сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}+1} (x+3)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}.$$

3.3. Разложение функций в степенные ряды.

Разложите заданные функции в степенные ряды (по степеням x). Укажите интервал сходимости полученных рядов.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(x) = x \ln(1+x^2); & \text{б) } f(x) = x \operatorname{arctg} x; & \text{в) } f(x) = x \sin x^2; \\ \text{г) } f(x) = \frac{x}{4+x^2}; & \text{д) } f(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+5)}. \end{array}$$

3.4. Вычислите интеграл, разлагая подынтегральную функцию в ряд и ограничиваясь двумя первыми, отличными от нуля, членами разложения.

$$\text{а) } \int_0^1 e^{\frac{x^2}{3}} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{0.8} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$$

3.5. Найдите три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = y(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0; & \text{б) } y' = \cos x + y^2, y(0) = 1; \\ \text{в) } y' = x^2 + y^2, y(0) = 2. \end{array}$$

3.6. Дайте понятие равномерно сходящегося функционального ряда. Найдите все значения x , при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно.

3.7. Сформулируйте свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2 + 1}$? Ответ обосновать.

3.8. Что такое степенной ряд? Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x_0 = -2$. С помощью теоремы Абеля установите, какое из следующих утверждений справедливо: А) этот ряд сходится абсолютно в точке $x_1 = -1$; В) этот ряд сходится в точке $x_2 = 0$; С) этот ряд расходится в точке $x_3 = 3$; Д) нет правильного ответа.

3.9. Что значит разложить функцию в степенной ряд? Зависят ли коэффициенты такого разложения от способа его получения?

Разложив в ряд Маклорена функцию $f(x) = x/(1+x^2)$, найдите $f^{(2n+1)}(0)$.

3.10. Разложите функцию $y = \operatorname{tg} x$ в ряд Тейлора по степеням $(x - \pi/4)$, выписав первые 3 члена, отличные от нуля.

*3.11. Вычислите приближённо с точностью до 10^{-3} , оценив погрешность по признаку

Лейбница для знакочередующегося ряда: $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$.

3.12. Выпишите два первых, отличных от нуля члена разложения в ряд по степеням x решения уравнения $y'' = 2xy' + 4y$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ответы на контрольные вопросы и задачи к главе 4, раздел 10

Задание 3. (Функциональные и степенные ряды.)

3.1. а) $x \in (-2; +\infty)$.

3.2.а) $R = 1/2$; $|x| < 1/2$.

3.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}$, $|x| < 1$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}} x^{2n-1}$, $|x| < 2$. **3.4. а)** $10/9$.

3.5. а) $2x + 2x^2 + \frac{10}{3}x^3$.

3.6. $(-\infty; +\infty)$. **3. 7.** Нет, нельзя, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n^2 x}{n^2 + 1} \right)'$ расходится.

3.8. В), С). **3.9.** $(-)^n (2n + 1)!$ **3.10.** $\operatorname{tg} x = 1 - 2(1 - \pi/4) + 2(1 - \pi/4)^2 + \dots$.

3.*11. 0.458. **3.12.** $y = x + x^3 + \dots$