§1. Условие тождественного равенства двух многочленов

Пусть n – заданное натуральное число, а p_0, p_1, … , p_n – заданные комплексные числа, при этом $p_0 \neq 0$. Функция

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n,$$

где z – любое комплексное число, называется *алгебраическим многочленом степени* n и обозначается через $P_n(z)$:

$$P_n(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}.$$

Числа p_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, называются *коэффициентами* многочлена $P_n(z)$, а p_0– его *старшим коэффициентом*. Если $p_0 = p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$, то $P_n(z)$ называется многочленом нулевой степени, очевидно, в этом случае $P_n(z) \equiv p_n$ при всех $z \in \boldsymbol{C}$.

Теорема 1.1. Многочлен $P_n(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n$ равен нулю для $\forall z \in \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда равны нулю все его коэффициенты.

►Очевидно, если $p_0 = p_1 = \ldots = p_{n-1} = p_n = 0$, то $P_n(z) \equiv 0$ на $\boldsymbol{C}$.

Пусть теперь $P_n(z) \equiv 0$ на $\boldsymbol{C}$, тогда $P_n(z) = P_n'(z) = \ldots = P_n^{(n)}(z) = 0$ для $\forall z \in \boldsymbol{C}$ и в том числе при $z = 0$. Из формулы Маклорена для многочлена $P_n(z)$ (см. равенство (7.3), глава 1) имеем $p_k = \dfrac{P_n^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$, поэтому приходим к выводу: $p_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$.◄

Теорема 1.2 (*о тождественном равенстве двух многочленов*)**.** Два многочлена $P_n(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n$ и $Q_n(z) = q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots + q_{n-1} z + q_n$ равны при $\forall z \in \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда равны все их коэффициенты при соответствующих степенях z, т.е. $p_k = q_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

►Очевидно, если $p_k = q_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то $P_n(z) \equiv Q_n(z)$ на $\boldsymbol{C}$.

Пусть теперь $P_n(z) \equiv Q_n(z)$ на $\boldsymbol{C}$. Рассмотрим многочлен

$$T_n(z) = P_n(z) - Q_n(z) = (p_0 - q_0) z^n + (p_1 - q_1) z^{n-1} + \ldots + (p_{n-1} - q_{n-1}) z + (p_n - q_n).$$

Так как $T_n(z) \equiv 0$, то $p_k - q_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (теорема 1.1), отсюда $p_k = q_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.◄

Теорема 1.2 является теоретической базой для *метода сравнения коэффициентов*, который будет рассмотрен далее.