§5. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат и заданы прямая

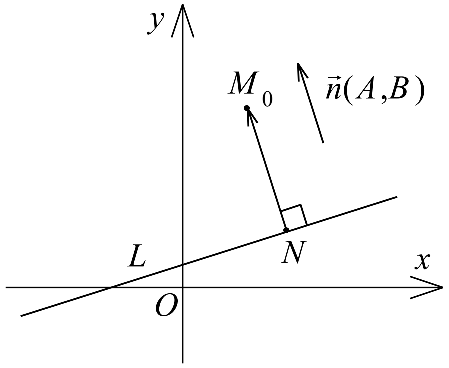

Рис. 5.1. К понятию расстояния от точки M_0 до прямой L

$$L:\ Ax+By+C=0, \tag{5.1}$$

а также точка $M_0(x_0, y_0)$, не принадлежащая L.

Расстоянием d от точки M_0 до прямой L называется, как известно, длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1)$ – проекция точки M_0 на прямую L (рис. 5.1). Из определения проекции вектора на ось следует, что $d = |\,\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{NM_0}\,|$, где $\vec{n}(A, B)$ – вектор нормали к L. Так как $\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{NM_0} = \dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM_0}}{|\,\vec{n}\,|}$, а $\overrightarrow{NM_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, то $d = \dfrac{|\,\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM_0}\,|}{|\,\vec{n}\,|} = \dfrac{|\,A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ или

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5.2}$$

Точка $N(x_1, y_1)$ принадлежит L, поэтому её координаты удовлетворяют уравнению (5.1), значит $Ax_1 + By_1 + C = 0$, отсюда имеем $Ax_1 + By_1 = -C$. Подставляя это равенство в (5.2), получим:

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Найти длину стороны квадрата, если одна из его сторон расположена на прямой L: $y = -x + 3$, а одна из вершин находится в точке $A(3, 6)$.

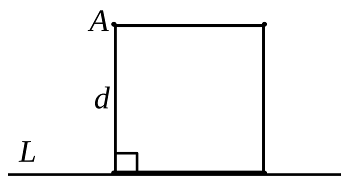

Рис. 5.2. К примеру 5.1

►Точка A не принадлежит прямой L, ибо её координаты не удовлетворяют уравнению L. Длина стороны квадрата равна расстоянию d от точки A до прямой L (рис. 5.2). Преобразовав уравнение L к виду: $x + y - 3 = 0$, найдём это расстояние по формуле (5.1): $d = \dfrac{|3+6-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.◄