Резюме

Пусть функция f непрерывна на сегмента $[a;b]$, $a<b$, и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если $f(a)=f(b)$, то на $(a;b)$ найдется число ξ такое, что $f'(\xi)=0$ (теорема Ролля).

Пусть функция f непрерывна на сегмента $[a;b]$, $a<b$, и дифференцируема на интервале $(a;b)$. На $(a;b)$ найдется точка ξ такая, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ (теорема Лагранжа).

Пусть функции f и g непрерывны на сегмента $[a;b]$, $a<b$, и дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем $\forall x \in (a;b)\ \ g'(x)\neq 0$. Тогда на $(a;b)$ найдется ξ такое, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(теорема Коши).

Эти теоремы имеют многочисленные и разнообразные приложения в анализе. На них, в частности, основывается правило Лопиталя – эффективный способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

К важнейшим формулам анализа принадлежит формула Тейлора. Если функция f n, $n\in\mathbf{N}$, раз дифференцируема в точке x_0, то справедливо представление:

$$f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0,$$

где $T_n(x)=f(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (формула Тейлора–Пеано).

В задачах по вычислению значений функции используется другой вид формулы Тейлора: если функция f дифференцируема на интервале $(a;b)$ $n+1$ $(n\in\mathbf{N})$ раз, содержащем точку x_0, то найдется ξ, $\xi\in(a;b)$, такое, что

$$f(x)=T_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}$$

(формула Тейлора–Лагранжа).

Контрольные вопросы к главе 2

1. Сформулируйте теорему Ферма о точке локального экстремума. Каков геометрический смысл этой теоремы?

2. Сформулируйте теорему Ролля; в чем состоит ее геометрический смысл?

3. Сформулируйте теоремы Коши и Лагранжа. Каков геометрический смысл формулы конечных приращений?

4. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$.

5. Запишите разложение функции f в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора порядка n с остаточными членами в форме Пеано.

6. Используя известные разложения, разложите функцию $f(x)=(x+5)e^{2x}$ по формуле Тейлора до $o(x^3)$.

Ответы на контрольные вопросы

5. а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) -2; г) $+\infty$; д) 0; е) 1.

6. $f(x)=5+11x+12x^2+\dfrac{26}{3}x^3+o(x^3)$.