§2. Вычисление площади в полярных координатах

Во многих случаях площадь целесообразно выразить в полярных координатах. Пусть под углом θ (радиан!) из центра круга радиуса **R** ***проведены два радиуса. Площадь полученного таким образом сектора (рис. 2.1д), как известно из школьного курса, равна:***

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta. \tag{2.1д}$$

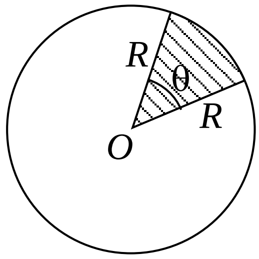

Рис. 2.1д. Круговой сектор с центральным углом θ.

Этот результат позволяет найти площадь S обобщенного сектора (уже не кругового!), ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и непрерывной кривой с уравнением $r = f(\varphi)$ в полярных координатах (рис. 2.1). С этой целью разобьем промежуток $[\alpha, \beta]$, как обычно, на n частей, вставив между α и β (рис. 2.1) значения

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

Проведем соответствующие углам φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ лучи. Если ввести наибольшее и наименьшее из значений $f(\varphi)$ в $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$: m_k и M_k, то круговые секторы с радиусами m_k и M_k, заключенные между лучами $\varphi = \varphi_{k-1}$ и $\varphi = \varphi_k$, будут соответственно входящими и выходящими для обобщенного сектора.

Составим отдельно из входящих секторов (они на рис. 2.1 заштрихованы) и выходящих секторов две фигуры, площади которых в силу (2.1а) будут

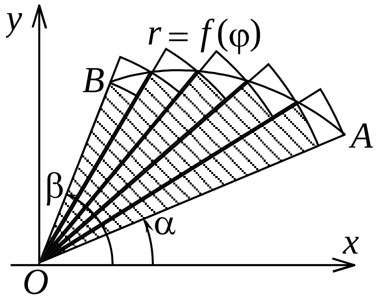

Рис. 2.1. Обобщённый сектор

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta\varphi_k \text{ и } \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta\varphi_k,$$

где $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$.

Площадь S всего обобщенного сектора удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta\varphi_k \le S \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

(2.2д)

Поскольку $f(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, числа m_k и M_k суть значения этой функции в некоторых точках соответствующего промежутка $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$, так что суммы, стоящие слева и справа в неравенствах (2.2д), являются интегральными суммами для интеграла

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi, \tag{2.3д}$$

и поэтому при $\lambda = \max\limits_{k} \Delta\varphi_k \to 0$ $(n \to \infty)$ имеют (2.3д) своим пределом. Из неравенств (2.2д) тогда вытекает, что $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$, т. е. $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$.

Если непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то площадь *S* фигуры *AOB* (рис. 2.1), ограниченной дугой кривой и двумя полярными радиусами *OA* и *OB*, соответствующими значениям $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, выразится интегралом

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi}. \tag{2.1}$$