§4. Операция сопряжения её свойства

Определение 4.1. Комплексные числа $x+iy$ и $x-iy$, т.е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряжёнными*. Число, сопряжённое числу z, обозначается $\bar{z}$, т.е., если $z=x+iy$, то $\bar{z}=x-iy$.

На комплексной плоскости числа z и $\bar{z}$ расположены симметрично относительно вещественной оси (оси Ox).

Свойства операции сопряжения

1. $z=\bar{z}$ тогда и только тогда, когда z – вещественное число.

2. $|z|=|\bar{z}|$.

3. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$, $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

4. Пусть $z\neq 0$; если $\varphi=\arg z$, то число $(-\varphi)$ является одним из значений аргумента $\bar{z}$.

5. $\overline{(\bar{z})}=z$;

6. $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

7. Если в некотором выражении над комплексными числами производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, то после перехода в нём к сопряжённым числам и само это выражение изменяет своё значение на сопряжённое.

►Свойства 1 и 5 следуют из определения 4.1. Свойства 2 и 3 проверяются непосредственно. Свойство 4 является следствием расположения чисел z и $\bar{z}$ на комплексной плоскости. Для доказательства первого равенства из свойства 6 рассмотрим комплексные числа: $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$. Имеем:

$$\overline{(z_1+z_2)}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=$$
$$=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

Аналогично проверяются второе и третье равенства из свойства 6. Свойство 7 следует из свойства 6.◄

Пример 4.1. Вычислить $\dfrac{\overline{(z_1^2)}}{z_2}$, если $z_1=3+2i$, $z_2=2+2i$.

►Используя свойства операции сопряжения, имеем:

$$\frac{\overline{(z_1^2)}}{z_2}=\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}=\frac{\bar{z}_1^2\cdot\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{\bar{z}_1^2\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(3-2i)^2(2-2i)}{4+4}=\frac{2(9-12i+4i^2)(1-i)}{8}=$$
$$=\frac{(5-12i)(1-i)}{4}=\frac{5-12i-5i+12i^2}{4}=\frac{-7-17i}{4}=-\frac{7}{4}-i\frac{17}{4}.◄$$