§5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле аналогична такой же формуле для неопределенного интеграла:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,. \qquad (5.1)$$

Здесь $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

▶ Из дифференциального исчисления известна формула для дифференциала произведения двух функций $d(uv) = v\,du + u\,dv$. Интегрируем обе части равенства по промежутку $[a, b]$. Получаем $\int_a^b d(uv) = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$. Заметим, что $\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b$. Тогда $uv\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$. Отсюда следует формула (5.1). ◀

Примеры.

5.1. $$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{array}\right] = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1\,.$$

5.2. $$\int_1^e \ln x\,dx = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right] = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1\,.$$