§3. Операция умножения вектора на число и её свойства

Определение 3.1. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими тремя условиями:

1) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, если $\lambda>0$, и противонаправлены, если $\lambda<0$.

Для введённой операции применяется обозначение: $\lambda\vec{a}$, т.е. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. При $\vec{a}=\vec{0}$ или $\lambda=0$ из условия 1 следует $|\lambda\vec{a}|=0$, т.е. $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

При $\lambda=\frac{1}{|\vec{a}|}$ получаем вектор $\vec{b}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0-$ орт вектора $\vec{a}$, при $\lambda=-1$ – противоположный вектор $(-\vec{a})=(-1)\cdot\vec{a}$.

Теорема 3.1 (*свойство коллинеарных векторов*). Для того чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{b}=\lambda\vec{a} \qquad (3.1)$$

при некотором вещественном λ.

►Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Положим $\lambda=\pm|\vec{b}|/|\vec{a}|$, причем выберем знак “+”, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) и “–”, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противонаправлены ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$). Тогда $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ по определению 3.1.

Предположим теперь, что равенство (3.1) справедливо для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при некотором действительном λ. Тогда коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует из определения 3.1.◄

Замечание 3.1. Число λ в равенстве (3.1) определяется единственным образом.

Свойства операции умножения вектора на число

1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

2. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (свойство ассоциативности относительного скалярного множителя);

3. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (свойство дистрибутивности умножения вектора на сумму вещественных чисел);

4. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (свойство дистрибутивности умножения вещественного числа на сумму векторов).

►Свойство 1 непосредственно следует из определения произведения вектора на число.

Свойство 2 очевидно, если $\lambda=0$, или $\mu=0$, или $\vec{a}=\vec{0}$. Поэтому его необходимо доказывать только при условии $\lambda\neq0$, $\mu\neq0$, $\vec{a}\neq\vec{0}$. Для доказательства заметим, что векторы $\lambda(\mu\vec{a})$ и $(\lambda\mu)\vec{a}$ коллинеарны и имеют одинаковую длину $|\lambda||\mu||\vec{a}|$ (определение 3.1). При этом они одинаково направлены с вектором $\vec{a}$, если числа λ

и μ имеют одинаковые знаки, и противонаправлены, если знаки λ и μ – разные. Итак, в любом случае $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ по определению равных векторов (определение 1.2).

Доказательства свойств 3 и 4 приведены, например, в [3].◄

Замечание 3.2. Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются *линейными операциями* над векторами.

Пример 3.1. Показать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

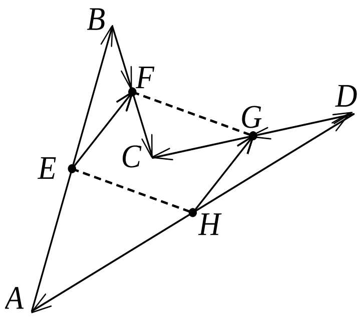

Рис. 3.1. Иллюстрация к примеру 3.1

►Обозначим середины сторон четырехугольника $ABCD$ буквами E, F, G, H (рис. 3.1). Тогда для вектора $\overrightarrow{EF}$ имеем равенство:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).$$

Аналогично

$$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}).$$

Так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, то, очевидно, $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{HG}=\vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Последнее равенство означает равенство длин и параллельность двух противолежащих сторон четырехугольника $EFGH$. Следовательно, как известно из планиметрии, он является параллелограммом. ◄