§3. Теоремы о среднем для интеграла. Среднее значение функции на промежутке

Теорема 3.1. ***Пусть функция $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ удовлетворяет неравенствам $m \le f(x) \le M$. Тогда существует число μ, заключенное между теми же пределами m и M, $m \le \mu \le M$, такое, что имеет место равенство***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \tag{3.1}$$

▶ Применим свойство 7 об оценках интеграла: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$. Рассмотрим сначала случай, когда $a<b$. Тогда $b-a>0$. Разделим все части неравенств, выражающих оценки интеграла на $b-a$. Получим $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$. Положив $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, найдем, что $m \le \mu \le M$ и $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Если $a=b$, то слева и справа в формуле (3.1) стоят нули, поэтому и в этом случае формула (3.1) остается справедливой. Если же $a>b$, то $b<a$, и для промежутка $[b,a]$ по доказанному имеем $\int_b^a f(x)dx = \mu(a-b)$. Отсюда $-\int_a^b f(x)\,dx = -\mu(b-a)$ и далее $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. Все случаи рассмотрены. Теорема доказана. ◀

Геометрический смысл равенства (3.1). Если функция $f(x)$ неотрицательна в промежутке интегрирования, то площадь криволинейной трапеции, выраженной рассматриваемым интегралом, равна площади прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой μ (рис. 3.1). Высота μ прямоугольника подбирается так, чтобы площадь части трапеции, находящейся вне прямоугольника, равнялась площади части прямоугольника, находящейся вне трапеции.

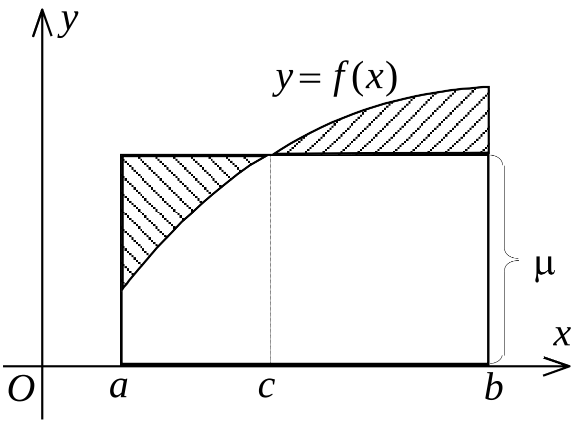

Рис. 3.1. Геометрическая иллюстрация теорем о среднем 3.1 и 3.2 для интеграла

Теорема 3.2. ***Если функция $f(x)$ в промежутке интегрирования $[a,b]$ непрерывна то в этом промежутке существует такая точка c, что выполняется равенство***

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{3.2}$$

Геометрическая интерпретация равенства (3.2) показана на рис. 3.1. В этом случае $\mu = f(c)$.

▶ Так как по условию функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она принимает на этом промежутке как свое наименьшее значение m, так и свое наибольшее значение M. Поэтому $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$. Тогда по предыдущей теореме 3.1 имеет место формула (3.1): $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, где μ – промежуточное число, лежащее между значениями функции m и M. По теореме Больцано – Коши, непрерывная функция $f(x)$ принимает это промежуточное значение в некоторой точке c промежутка $[a, b]$: $\mu = f(c)$. Тогда формула (3.1) переходит в формулу (3.2). ◀

Определение 3.1. ***Число*** μ ***из теоремы о среднем 3.1 для интеграла, определяемое равенством***

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{3.3}$$

называется средним значением функции $f(x)$ ***на промежутке*** $[a, b]$ ***(точнее, интегральным средним функции на промежутке).***

Замечание 3.1.. К формуле (3.3) можно прийти естественным путем, который и объясняет название «среднее» для величины μ. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей равной длины $\Delta x = (b-a)/n$ точками $a = x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n = b$. Рассмотрим среднее арифметическое значений функции в точках деления промежутка:

$$y_{\text{ср}} = \frac{f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\to} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 3.1.. Найти среднее значение функции $y = x^2$ на промежутке $[0, 2]$.

▶ $\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\cdot 8 = \frac{4}{3}$. Здесь $m = 0$; $M = 4$; $0 < \frac{4}{3} < 4$. ◀