§5. Непрерывность элементарных функций

Рассмотрим сначала некоторые простейшие и основные элементарные функции.

1°. $y=C=$const. для $\forall x \in X$, где $X-$ промежуток числовой прямой.

Очевидно, данная функция непрерывна на X по теореме 1.1, так как $\Delta y = 0 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для $\forall x_0 \in X$.

2°. Многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$ (пример 3.1).

3°. Рациональная алгебраическая дробь $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{b_0 x^m + \ldots + b_{m-1} x + b_m}{a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n}$ непрерывна на своей области определения (пример 3.2).

4°. Показательная функция $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

Имеем $\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$. С помощью определения предела функции в точке (определения 1.1 или определения 1.2 главы 3) можно доказать равенство: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$ (см., например, **[**1**]**), поэтому для показательной функции $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$, следовательно, она непрерывна на $\boldsymbol{R}$ по теореме 1.1.

5°. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

Эта функция непрерывна на своей области определения – промежутке $(0, +\infty)$ по теореме существования и непрерывности обратной функции (теорема 4.5), как обратная по отношению к показательной функции.

6°. Степенная функция $y = x^a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, $D(y) = (0, +\infty)$.

При $x > 0$ эту функцию можно рассматривать как суперпозицию показательной и логарифмической функций: $x^a = e^{a \ln x}$, поэтому степенная функция непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$ по теореме 3.4 как суперпозиция непрерывных функций.

7°. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Непрерывность функции $y = \sin x$ на $\boldsymbol{R}$ показана в примере 1.3, непрерывность функции $y = \cos x$ на $\boldsymbol{R}$ обосновывается аналогично. Непрерывность функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ на их областях определения следует из теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями (теорема 3.1), поскольку эти функции являются отношениями непрерывных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

8°. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Эти функции описаны в §8 главы 1. Они непрерывны на своих областях определения как функции, обратные по отношению к соответствующим тригонометрическим функциям, в силу теоремы о существовании и непрерывности обратной функции (теорема 4.5).

Итак, непрерывность основных элементарных функций обоснована.

Теорема 5.1. Любая элементарная функция, определённая на некотором промежутке вещественной оси, конечном или бесконечном, непрерывна на этом промежутке.

Доказательство теоремы 5.1 следует из определения элементарной функции (определение 8.1 главы 1), из непрерывности основных элементарных функций, из теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями (теорема 3.1), из теоремы о непрерывности сложной функции (теорема 3.4).

Замечание 5.1. Условие теоремы 5.1, требующее, чтобы элементарная функция была определена на некотором промежутке, существенно для заключения об её непрерывности. Так, элементарная функция $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$ имеет разрывы в любой точке своей области определения $D(y)$, состоящей из отдельных точек ($D(y)=\{x=\pi k, k\in\mathbf{Z}\}$).

Пример 5.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$.

►Положим $z=\arcsin x$, тогда $z\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности функции $\arcsin x$. Поскольку $x=\sin z$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$ в силу первого замечательного предела и теоремы 2.2 главы 3.◄

Упражнение 5.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{acrtg} x}{x}=1$.

Пример 5.2. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

►Имеем: $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$ (свойства логарифмов), $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (второй замечательный предел, §3 главы 3). В силу непрерывности логарифмической функции,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x})=\ln e=1$.◄

Пример 5.3. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

►Пусть $z=e^x-1$, тогда $z\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности показательной функции. Так как $x=\ln(1+z)$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=1$ (пример 5.2 и теорема 2.2 главы 3).◄

Пример 5.4. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

►Пусть $1+x=e^z$, тогда $z=\ln(1+x)\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности логарифмической функции. Имеем $\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{e^{\mu z}-1}{e^{z}-1}=\frac{e^{\mu z}-1}{\mu z}\cdot\frac{z}{e^{z}-1}\cdot\mu$. Поскольку $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{\mu z}-1}{\mu z}=1$ и $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^{z}-1}=1$ (пример 5.3 и теорема 2.2 главы 3), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ по теореме 2.2 главы 3.◄