§10. Символ суммирования. Факториал. Бином Ньютона.

Пусть имеется набор из n пронумерованных вещественных чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для суммы этих чисел употребляется обозначение:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

при этом символ Σ называется символом суммирования.

Произведение всех натуральных чисел, не превышающих n, обозначают через $n!$ (читается «эн факториал»). Таким образом, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Во многих формулах удобно использовать символы 0! и 1! (нуль факториал и один факториал), принимая по определению: $0!=1!=1$.

Для любых вещественных чисел a и b и любого натурального n справедлива формула:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k , \qquad (10.1)$$

называемая биномом Ньютона (И. Ньютон (1643-1727 гг.) − английский математик, физик). Коэффициенты этой формулы C_n^k, $k=0,1,\ldots,n$, называются биномиальными коэффициентами и определяются равенством:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} . \qquad (10.2)$$

Отметим следующие свойства биномиальных коэффициентов.

1 . $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$; $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

2 . $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, $k=1,2,\ldots,n$.

Замечание 10.1. Свойство 1 упрощает процедуру вычисления биномиальных коэффициентов C_n^k с верхними индексами, близкими к n. Например, для C_{10}^7 из (10.2) имеем: $C_{10}^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{7!}$, а с помощью свойства 1 получаем равенство: $C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$.

Замечание 10.2. Обоснование формулы (10.1) и свойств биномиальных коэффициентов будет проведено далее (см. раздел 5, глава 2, §6).

При $n=2$, 3 из (10.1) следуют формулы для квадрата и куба двучлена:

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

Биномиальные коэффициенты C_n^k при небольших значениях n удобно получать с помощью так называемого треугольника Паскаля (рис. 10.1). Данный коэффициент бинома получаем в соответствующей строке как сумму двух коэффициентов предыдущей строки,

	1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
	. . . .

Рис.10.1. Треугольник Паскаля

расположенных слева и справа от него. Таким образом, например, для $(a+b)^5$ имеем равенство:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

а для $(a+b)^6$ – равенство:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

биномиальные коэффициенты в котором получены с помощью треугольника Паскаля.