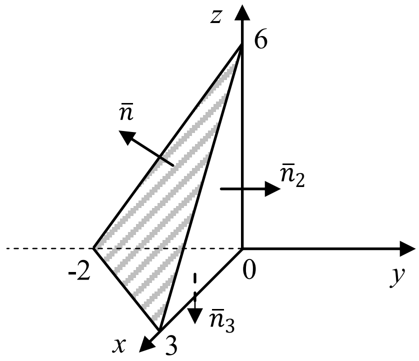
Формула Остроградского–Гаусса

Формула Остроградского – Гаусса связывает поверхностный интеграл II рода и тройной интеграл.

Пример 1:



Вычислить поверхностный интеграл II рода

$\oiint_{\sigma_{\text{внеш}}} -x\,dy\,dz + z\,dx\,dz + 5\,dx\,dy$, где

σ: $2x - 3y + z = 6$; $x = 0; y = 0; z = 0$

по формуле Остроградского – Гаусса

Решение:

По формуле Остроградского – Гаусса получим:

$$\oiint\limits_{\sigma_{\text{внеш}}} -x\,dy\,dz + z\,dx\,dz + 5\,dx\,dy = \iiint\limits_{\mathbb{T}} (-1 + 0 + 0)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= -\iiint\limits_{\mathbb{T}} dx\,dy\,dz = -\int\limits_0^3 dx \int\limits_{(2x-6)/3}^{0} dy \int\limits_0^{6-2x+3y} dz =$$

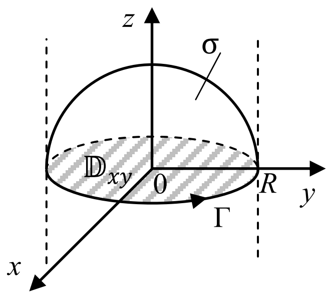
$$= -\int\limits_0^3 dx \int\limits_{(2x-6)/3}^{0} (6 - 2x + 3y)dy = \ldots = -6.$$

Формула Стокса

Формула Стокса является обобщением формулы Грина на $\mathbb{R}^3$ и связывает поверхностный интеграл II рода и криволинейный интеграл II рода.

Пример 2:

Вычислить криволинейный интеграл II рода



$$\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz,$$

используя формулу Стокса, где

$$\Gamma: \begin{matrix} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{matrix},$$

взяв в качестве поверхности σ полусферу

$$\sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ ,$$

для которой кривая Γ является границей.

Решение:

Пусть Г – линия пересечения σ и $z = 0$

$$\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz = \begin{bmatrix} P = x^2y^3 \\ Q = 1 \\ R = z \end{bmatrix} =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= -3 \underbrace{\iint\limits_{\sigma} x^2y^2dx\,dy}_{\substack{\text{поверхностный интеграл} \\ \text{II рода}}} = -3 \underbrace{\iint\limits_{\mathbb{D}_{xy} = \text{Пр}_{xy}\sigma} x^2y^2dx\,dy}_{\text{двойной интеграл}} =$$

$$= -3\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} r^4 \cdot \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cdot r\,dr = -\frac{R^6}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{sin^2 2\varphi}{4} d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1 - cos4\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

Пример 3

Решение

Скалярное поле задано функцией $U(x,y,z)=z/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Найти уравнения поверхностей уровня. Какая из этих поверхностей проходит через точку A(2;0;-2/$\sqrt{3}$)?

Решение. По формуле (2.1.1), уравнения поверхностей уровня:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C.$$

Если поверхность проходит через точку A, то

$$C = \frac{-2/\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+0^2+(-2/\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2},$$

так что ее уравнение имеет вид:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3z^2 \\ z<0 \end{cases}.$$

Это поверхность прямого кругового конуса, точнее, одна из ее двух полостей.

Пример 4

Найти производную скалярного поля

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4yz$$

в направлении $\overline{M_0M}$, где $M_0(0,1,2)$ и $M(2,3,3)$.

Решение

$\bar{l} = \overline{M_0M} = \{2,2,1\} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3},\; \cos\gamma = \frac{1}{3} \;\Rightarrow$

$\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

Тогда по формуле (1)

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\cos\gamma,$$

получим

$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}\right|_{M_0} = 2x\big|_{M_0}\cdot\frac{2}{3} + (2y-4z)\big|_{M_0}\cdot\frac{2}{3} - 4y\big|_{M_0}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{16}{3} < 0 \Rightarrow$ скалярное поле $f(x,y,z)$ при переходе через точку M_0 убывает.

Пример 5

Найти наибольшую скорость возрастания функции

$f(x;y;z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $M_0(-1;1;-1)$.

Решение

$$gradf(M_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\bar{i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\bar{j} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\bar{k} =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\right|_{M_0}\bar{i} + \left.\left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\right|_{M_0}\bar{j} + \left.\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)\right|_{M_0}\bar{k} = 2\bar{i} + 0\cdot\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции $f(x;y;z)$ в точке M_0 равна:

$$f(x;y;z) = |gradf(M_0)| = \left|2\bar{i} - 2\bar{k}\right| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$$

Замечание*Наибольшая скорость убывания функции $f(x;y;z)$ в точке M_0 равная* $2\sqrt{2}$, будет если в точке M_0 движение будет в направлении

$$-gradf(M_0) = -2\bar{i} + 2\bar{k}.$$

Пример 6

Найти производную скалярного поля $u(M) = xz^2 - \sqrt{yx^3}$ в точке $M_0(2;2;4)$

по направлению нормали к поверхности σ, образующей острый угол с положительным напрвлением оси Oz, где σ: $x^2 - y^2 - 3z - 18 = 0$.

<u>Решение</u>

Нормаль к поврхности σ можно натий с помощью градиента:

$$\overline{n} = gradf(x;y;z) = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k} = 2x\overline{i} - 2y\overline{j} - 3\overline{k} \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{n}(M_0) = -4\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Так как, по условию угол между нормалью с положительным напрвлением оси Oz острый, то $\overline{n}(M_0) = 4\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}.$

Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{n}(M_0)$:

$$cos\alpha = -\frac{4}{|\overline{n}|} = -\frac{4}{\sqrt{41}}; \quad cos\beta = \frac{4}{\sqrt{41}}\ ; \quad cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{41}}.$$

Далее находим производну фукции $u(M)$ по напралению $\overline{n}(M_0)$ по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma$$

В нашем случае получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\left(z^2 - \frac{2}{3}\sqrt{xy}\right)\right|_{M_0} = 13;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y}}\right|_{M_0} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.2xz\right|_{M_0} = 16;$$

Таким образом получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} = 13 \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right) - 1 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} + 16 \cdot \frac{3}{\sqrt{41}}\ .$$