§5. Неопределённости.
Вычисление пределов степенно-показательных функций.

Арифметические действия с бесконечно малыми и бесконечно большими функциями, как и в случае последовательностей (замечание 4.3 главы 2), могут привести к так называемым *неопределённостям*, когда неприменимы теоремы 2.2 и 4.5. Например, при вычислении $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, если $f(x), g(x)\to+\infty$ или $f(x), g(x)\to-\infty$ при $x\to a$, неприменима теорема 4.5. В этом случае говорят, что выражение $f(x)-g(x)$ при $x\to a$ приводит к неопределённости вида $\infty-\infty$, а отыскание его предела называют *раскрытием неопределённости*. Если $f(x)\to 0, g(x)\to 0$ или $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$ при $x\to a$, то при вычислении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ неприменима теорема 2.2, говорят, что частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ приводит к неопределённости $0/0$ или ∞/∞. Ниже рассматриваются некоторые методы для раскрытия некоторых неопределённостей.

1°. Неопределённость ∞/∞ в отношении многочленов при $x\to\infty$. Пусть

$$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n},$$

при этом $a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$. В членах дроби вынесем за скобки старшие степени x:

$$\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}=\frac{x^k(a_0+a_1x^{-1}+\ldots+a_{k-1}x^{1-k}+a_kx^{-k})}{x^n(b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n})}=$$
$$=x^{k-n}\frac{a_0+a_1x^{-1}+\ldots+a_{k-1}x^{1-k}+a_kx^{-k}}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n}}.$$

Предел второго сомножителя полученного произведения равен $a_0/b_0\neq 0$ (пример 1.6, теорема 2.2), а $\lim\limits_{x\to\infty}x^{k-n}=\begin{cases}0 \text{ при } k<n,\\ 1 \text{ при } k=n,\\ \infty \text{ при } k>n,\end{cases}$ (примеры 1.6, 4.3).

Тогда, в силу теорем 2.2 и 4.7,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}0 & \text{при } k<n,\\ a_0/b_0 & \text{при } k=n,\\ \infty & \text{при } k>n.\end{cases}\qquad(5.1)$$

Так, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x}{3x^3-x+2}=\dfrac{2}{3}$ $(k=n=3,\ a_0=2, b_0=3)$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+5}{2x^3-x^2+1}=0$, так как здесь $k=2, n=3,$ и, следовательно, $k<n.$

2°. Неопределённость ∞/∞ в отношении алгебраических функций, содержащих иррациональности, $x\to+\infty$. Неопределённость раскрывается в результате выделения в обоих членах дроби старшей степени x.

Пример 5.1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+5x}$.

►Вынесем из-под знака радикала старшие степени x, после чего вынесем их за скобку в обоих членах дроби:

$$\frac{\sqrt{x^3+x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+5x}=\frac{x^{3/2}\sqrt{1+1/x^2}+x}{x\sqrt{1-3/x}+5x}=\frac{x^{3/2}(\sqrt{1+1/x^2}+x^{-1/2})}{x(\sqrt{1-3/x}+5)}=x^{1/2}\frac{\sqrt{1+1/x^2}+x^{-1/2}}{\sqrt{1-3/x}+5}.$$

В силу теоремы 4.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/2}\dfrac{\sqrt{1+1/x^2}+x^{-1/2}}{\sqrt{1-3/x}+5}=+\infty$, так как

$x^{1/2}\to+\infty$ при $x\to+\infty$ (пример 4.3), а второй сомножитель стремится к 1/6

(теорема 2.2 и пример 1.6).◄

3°. Неопределённость $0/0$ в отношении многочленов, $x\to a$, $a\in\boldsymbol{R}$. Метод раскрытия таких неопределённостей состоит в разложении на множители обеих членов дроби и последующего сокращения на разность $x-a$. При этом используется следующая теорема: “если число $x=a$ является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на разность $x-a$ без остатка”.

Пример 5.2. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-5x+6}$.

►Многочлен $P_3(x)=x^3-3x^2+4$ делится на разность $x-2$, ибо $x=2$ – его корень, имеем: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{P_3(x)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$.

При вычислении предела x принадлежит проколотой окрестности точки $x=2$ ($x\neq2$), поэтому оба члена дроби под знаком предела можно разделить на $x-2$. Дробь из правой части последнего равенства не даёт неопределённости при $x\to2$, её предел вычисляем по теореме 2.2. Окончательно получаем: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-5x+6}=\dfrac{0}{-1}=0$.◄

4°. Неопределённость $0/0$ в отношении алгебраических функций, содержащих иррациональности, $x\to a$, $a\in\boldsymbol{R}$. Неопределённость раскрывается путём перенесения иррациональности из одного члена дроби в другой и последующем разложении полученных многочленов на множители с целью сокращения на разность $x-a$.

Пример 5.3. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}$.

►Перенесём иррациональность из числителя дроби в знаменатель:

$$\frac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\frac{(\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3})(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}=\frac{x^3-3x^2+4}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{(x^2-x-2)(x-2)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}=\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})},$$

многочлен x^3-3x^2+4 разложен на множители как в примере 5.2. Имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}.$$

Сократим оба члена дроби в правой части последнего равенства на $(x-2)^2$:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3}}$. Теперь, в силу теоремы 2.2, приходим к равенству: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\dfrac{3}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.◄

5°. Неопределённость $\infty-\infty$**.** Общий принцип – трансформация данной неопределённости в неопределённость ∞/∞ или $0/0$.

Пример 5.4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})$.

►Разность радикалов под знаком предела умножим и разделим на сопряженное выражение:

$$\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\frac{(x^2+3x)-(x^2-4)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}=\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}.$$

Теперь при $x\to\infty$ имеем неопределённость ∞/∞. Аналогично примеру 5.1:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}=\frac{x(3+4/x)}{x(\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-4/x})}=\frac{3+4/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-4/x}}$$ и

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+4/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-4/x}}=\frac{3}{2}.◄$$

6°. Вычисление пределов степенно-показательных выражений.

Функция вида $y=u(x)^{v(x)}$ называется степенной-показательной. С помощью основного логарифмического тождества она может быть представлена в виде:

$$y=u(x)^{v(x)}=(e^{\ln u(x)})^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}. \tag{5.1}$$

При вычислении $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$ могут встретиться следующие случаи.

1. $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=A^B$, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, A>0, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$. Действительно, в силу замечания 2.2, $\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)=B\ln A$ и

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)}=e^{B\ln A}=(e^{\ln A})^B=A^B.$$

2. $$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\begin{cases}0, & \text{если} \lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)=-\infty,\\ +\infty, & \text{если} \lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)=+\infty.\end{cases}$$

Это утверждение следует из формулы (5.1), а также из равенств: $\lim\limits_{z\to+\infty}e^z=+\infty$, $\lim\limits_{z\to-\infty}e^z=0$, которые следуют из примера 4.2 и теоремы 4.4.

3. Выражение $u(x)^{v(x)}$ является неопределённым, когда $v(x)\ln u(x)$ – неопределённость $0\cdot\infty$, т.е. если

а). $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\ln u(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x)=0$;

б). $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\ln u(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$;

в). $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to a}\ln u(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x)=1$.

В этих случаях говорят, что выражение $u(x)^{v(x)}$ представляет из себя неопределённость вида $0^0, \infty^0, 1^\infty$.

Пример 5.5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}}$.

►Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ (пункт 1), $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})=3/2$ (пример 5.4), следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}}=2^{3/2}=2\sqrt{2}$.◄

Пример 5.6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2+3x}}$.

►В силу формулы (5.1) имеем $\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2+3x}}=e^{\sqrt{x^2+3x}\ln((2x+1)/(x-1))}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ (пункт 1), $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{1+3/x^2}=+\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}\ln\frac{2x+1}{x-1}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2+3x}}=+\infty.◄$$

Пример 5.7. Найти $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{1/(x-1)}$.

►Выражение $(2x-1)^{1/(x-1)}$ при $x \to 1$ – неопределённость 1^{∞}. Имеем

$$(2x-1)^{1/(x-1)} = e^{\ln(2x-1)/(x-1)},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{1/(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln(2x-1)/(x-1)}$ (см. замечание 2.2). Так как

$$\frac{\ln(2x-1)}{x-1} = \frac{\ln(1+2x-2)}{x-1} = \frac{\ln(1+2(x-1))}{2(x-1)} \cdot 2, \text{ то } \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x-1} = 2$$

($\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+2(x-1))}{2(x-1)} = 1$, см. §3), поэтому $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{1/(x-1)} = e^2$.◄