Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

*В. Г. ПАК*

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. КОМБИНАТОРИКА

Санкт-Петербург
2008

УДК 519.1(076)
П13

**Пак, В.Г.**

**П13** Сборник задач по дискретной математике. Теория множеств. Комбинаторика / В. Г. Пак; Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.
ISBN 978-5-85546-380-4

Сборник содержит задачи по всем основным разделам теории множеств и начальным разделам комбинаторики, изучаемым в курсе дискретной математики. Излагаются основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. Большинство задач снабжены подробными решениями или указаниями.

Предназначено для студентов младших курсов для всех специальностей.

**УДК 519.1(076)**

Р е ц е н з е н т доц. каф. высшей математики БГТУ, канд. физ.-мат. наук *П. М. Винник*

*Утверждено
редакционно-издательским
советом университета*

**ISBN 978-5-85546—380-4**

# О Г Л А В Л Е Н И Е

# П Р Е Д И С Л О В И Е

В сборник включены задачи разного уровня, от элементарных до задач повышенной трудности. Их происхождение различно. Это классические задачи, без которых не обходится ни один задачник по дискретной математике. Например, доказательства законов алгебры множеств, доказательство бессчётности отрезка числовой оси, в котором демонстрируется гениальная идея канторовского диагонального метода, или вошедшие в математический фольклор задачи о супружеских парах и рыцарях Круглого стола. Многие задачи взяты из других сборников. Но большинство составляют задачи, возникшие в результате многолетнего преподавания автором курса дискретной математики.

Данный задачник предназначен студентам младших курсов. Почти все задачи снабжены подробными решениями, поэтому сборник может быть рекомендован для самостоятельной работы при подготовке к экзаменам и контрольным работам. Однако его предназначение гораздо шире и заключается в повышении математической культуры, развитии навыков абстрактного мышления, обращения с такими *абстрактными* математическими объектами, как множество, отношение, функция и т.д. Поэтому в основе разработки решений задач лежат логическая строгость и последовательность рассуждений, обоснованность каждого шага решения.

При составлении комбинаторных задач много внимания уделено задачам в общем виде на различные схемы выбора, приведено множество формул и методик решения. Это делалось с целью привить навыки самостоятельного решения разнообразных комбинаторных задач.

# Ч а с т ь I. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

## 1. Множества и операции над ними

### 1.1. Понятие множества и способы задания множеств

Множество – основополагающее понятие теории множеств. Её создатель немецкий математик Георг Кантор под множеством понимал «многое, определяемое как единое». Следуя Кантору, определим ***множество*** как совокупность абстрактных объектов, рассматриваемых как единое целое. Природа объектов, объединяемых в множество, совершенно не имеет значения. Правила формирования (создания) множеств произвольные. Такое весьма широкое понимание множества привело к возникновению антиномий (парадоксов) в канторовской («наивной») теории множеств. Однако для решения элементарных задач теории множеств такого определения вполне достаточно.

Для обозначения множеств будем использовать прописные латинские буквы $A, B, C, \ldots$ . Объекты, объединяемые в множество, называются его *элементами (членами)*. Они обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ . Факт принадлежности элемента $a$ множеству $A$ будем обозначать $a \in A$, соответственно $a \notin A$ означает, что $a$ не является элементом $A$.

Множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одинаковых элементов: $A = B$. Неравенство множеств будем обозначать $A \neq B$. Множество, не содержащее элеменов, называется *пустым*: $\emptyset$. Множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$ (множество $A$ включено в $B$), если любой элемент $A$ является одновременно элементом $B$: $A \subset B$ (или $B \supset A$). Понятно, что для любого множества $A$ справедливы включения $\emptyset \subset A$ и $A \subset A$. Эти множества будем называть *несобственными подмножествами* множества $A$. Все остальные подмножества $A$ называются *собственными*.

Для решения задач понадобится понятие универсального множества. Хотя оно «опасно» с точки зрения возникновения парадоксов и в аксиоматических системах теории множеств его стараются исключить, для задач элементарной теории множеств оно приемлемо. Итак, определим *универсальное множество* $\mathbb{U}$ таким образом, что любое другое множество является его подмножеством.

***Основные способы задания множеств***:

1) явное перечисление элементов множества. Например, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{$ яблоко, груша, банан $\}$. Далее фигурные скобки будут всегда ограничивать неупорядоченную совокупность, т.е. множество;

2) задание свойства, которому удовлетворяют элементы множества. Например, $A = \left\{a \in \mathbb{N} \mid a = 2^k, k \in \mathbb{N}_0\right\}$[1)] — множество чисел $a$, являющихся целыми неотрицательными степенями 2, т.е.

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}.$$

Другой пример: $B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех нечётных целых чисел;

[1)] Напомним обозначения множеств: $\mathbb{N}$ — натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — целых, $\mathbb{N}_0$ — неотрицательных целых, $\mathbb{Q}$ — рациональных, $\mathbb{R}$ — действительных, $\mathbb{C}$ — комплексных.

3) задание с помощью операций над другими множествами. Этот способ будет рассмотрен в подразд. 1.2.

## Задачи

1. Равны ли следующие множества?

а) $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$; б)$\{\emptyset\}$ и $\{\{\emptyset\}\}$; в) $\{1\}$ и $\{\{1\}\}$; г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ и $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

2. Докажите, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

3. Докажите:

а) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ ; б) если $A \subset \emptyset$, то $A = \emptyset$.

4. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$. Выпишите все собственные подмножества множеств $A$ и $B$. Какие из подмножеств $A$ не являются подмножествами $B$?

5. Пусть множество $A$ включает $n$ элементов. Сколько существует всевозможных подмножеств $A$? Сколько из них собственных?

6. Определите следующие множества другими способами:

а) множество всех целых чисел $x$, таких, что $x^2 + y^2 \leq 4$ при некотором целом $y$ ;

б) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z = 5k \text{ и } z = 7l \text{ при некоторых целых } k \text{ и } l\}$ ;

в) $\{x \in \mathbb{R} \mid \ln x = 0 \text{ или } \cos x = 0\}$ ;

г) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\arcsin x) = x\}$;

д) $\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 x = c, \text{ где } c \text{ — некоторое целое число } \}$;

е) множество всех точек пространства[2)], лежащих внутри единичной сферы с центром в начале координат;

ж) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ при всех действительных } y\}$.

7. Равны ли множества $A$ и $B$, если:

а) $A$ — множество действительных чисел $x$, для которых $\sin(\arcsin x) = x$, $B$ — множество действительных чисел, для которых $\arcsin(\sin x) = x$;

[2)] Естественно, здесь имеется в виду трёхмерное евклидово пространство.

б) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1\}$;

в) $A$ — множество всех точек $(x, y)$ плоскости, для которых $xy < 1$, $B$ — множество всех точек, для которых $y < \frac{1}{x}$;

г) $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 = 5\}$, $B$ — множество студентов «Военмеха», побывавших на Луне.

8. Сформулируйте следующие утверждения как отношения между множествами:

а) непрерывность функции в точке $x$ является необходимым, но не достаточным условием её дифференцируемости в этой точке;

б) точки локального экстремума функции одной переменной находятся среди её критических точек[3];

в) для того чтобы целое число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы оно оканчивалось на 0 или на 5;

г) для того чтобы целое число делилось на 10, необходимо, чтобы оно делилось на 5;

д) если четырёхугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны.

## 1.2. Операции над множествами

***Объединением (суммой)*** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A$ или $B$: $A \cup B$.

***Пересечением (произведением)*** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множествам $A$ и $B$ одновременно: $A \cap B$.

Операции объединения и пересечения естественным образом обобщаются на любое конечное (и даже бесконечное) число множеств.

***Разностью*** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов $A$, не принадлежащих $B$: $A \backslash B$.

[3] Критическими называются точки, в которых производная функции равна нулю или не определена.

***Дополнением (отрицанием)*** множества $A$ называется множество, состоящее из элементов, не принадлежащих $A$: $\overline{A}$. Очевидно, что

$$\overline{A} = \mathbb{U} \backslash A, A \backslash B = A \cap \overline{B}.$$

***Симметрической разностью*** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо $A$, либо $B$, но не обоим множествам одновременно: $A \div B$. Очевидно, что

$$A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$

Таким образом, комбинируя эти операции, можно определять одни множества через другие. Для однозначности такого определения установлен следующий приоритет операций: сначала выполняется дополнение, затем пересечение, разность, симметрическая разность, объединение. Однотипные операции выполняются слева направо. Скобки изменяют приоритет операций.

Определим ещё одну операцию над множествами — построение булеана. ***Булеаном*** множества $A$ называется семейство всех подмножеств множества $A$: $P(A)$.

### Задачи

1. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$. Выпишите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \div B$, $B \div A$.

2. Найдите:

а) $A \cup \emptyset$, $A \cap \emptyset$, $A \backslash \emptyset$, $\emptyset \backslash A$, $A \div \emptyset$, $\overline{\emptyset}$; б) $A \cup \mathbb{U}$, $A \cap \mathbb{U}$, $A \backslash \mathbb{U}$, $\mathbb{U} \div A$, $\overline{\mathbb{U}}$; в) $A \cup A$, $A \cap A$, $A \backslash A$, $A \div A$; г) $A \backslash B \cup B$; д) $(A \backslash B) \cap B$; е) $A \cup \overline{A}$, $A \cap \overline{A}$, $A \backslash \overline{A}$, $\overline{A} \backslash A$, $A \div \overline{A}$.

3. Докажите:

а) $A \subset B \Leftrightarrow A \backslash B = \emptyset$; б) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$;
в) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$; г) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$;
д) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$; е) $B \subset A \Rightarrow A \backslash B \cup B = A$.

4. Дайте описания следующих булеанов:

а) $P\left(A \cap B\right), P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$; б) $P\left(A \cup B\right), P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

5. Дайте описания булеанов:

а) $P(\emptyset)$; б) $P(\{\emptyset\})$; в) $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$; г) $P(\{1\})$; д) $P(\mathbb{U})$.

6. Множество $A$ содержит $n$ элементов. Сколько подмножеств из $P(A)$ содержат:

а) ровно $k$ элементов $(k \leq n)$; б) не более $k$ элементов $(k \leq n)$?

7. Множество $A$ содержит $n$ элементов. Докажите, что булеан $P(A)$ содержит $2^n$ множеств[4)].

8. Сформулируйте следующие утверждения как отношения между множествами:

а) целое число делится и на 7, и на 3 тогда и только тогда, когда оно делится на 21;

б) ромб есть параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны;

в) множество решений неравенства $(x-a)(x-b) > 0$, где $a > b$, составляют действительные числа $x$, большие $a$ или меньшие $b$.

## 1.3. Основные законы алгебры множеств

Множества с введёнными над ними операциями образуют *алгебру множеств*. Приведём её основные законы.

**I.** ***Законы коммутативности:***

**(1)** $A \cup B = B \cup A$;

**(2)** $A \cap B = B \cap A$;

**(3)** $A \div B = B \div A$.

---

[4)] По этой причине семейство всех подмножеств $A$ иногда обозначают $2^A$.

**II.** ***Законы ассоциативности:***

**(1)** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

**(2)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

**(3)** $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$.

**III.** ***Законы дистрибутивности:***

**(1)** $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$;

**(2)** $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

**(3)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

**(4)** $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \setminus A \cap C$ ;

**(5)** $A \cap (B \div C) = A \cap B \div A \cap C$.

**IV.** ***Законы идемпотентности:***

**(1)** $A \cup A = A$;

**(2)** $A \cap A = A$.

**V.** ***Закон исключённого третьего:***

**(1)** $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$.

**VI.** ***Закон противоречия:***

**(1)** $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

**VII.** ***Закон двойного отрицания:***

**(1)** $\overline{\overline{A}} = A$.

**VIII.** ***Законы двойственности де Моргана:***

**(1)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

**(2)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

## Задачи

1. Докажите законы I–VIII.

2. Докажите тождества:
а) $A \cup A \cap B = A$; б) $A \cap (A \cup B) = A$; в) $A \cup \overline{A} \cap B = A \cup B$;
г) $A \cap B \cup A \cap \overline{B} = A$; д) $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = A$.

3. Докажите тождества:
а) $A \cap B \cup C \cap D = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
в) $A \setminus B \cap C = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$[5];
г) $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \setminus C$;
д) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
е) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup A \cap C$;
ж) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

4. Докажите:
а) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$; б) $A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$ при любом множестве $C$;
в) $A \subset B \Rightarrow C \setminus B \subset C \setminus A$ при любом множестве $C$.

5. Докажите:
а) $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subset C$; б) $A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \cup \overline{B}$;
в) $A \cap B \subset C \Leftrightarrow (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

6. Верны ли следующие утверждения?
а) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$; б) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$;
в) $A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow A = B$.

7. Докажите:
а) $A \setminus B = A \div A \cap B$; б) $A \div (A \cup B) = B \setminus A$;
в) $A \cup B = A \div B \cup A \cap B$.

8. Докажите, что $A \div B = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

9. Докажите:

[5] Тождества *б* и *в* являются аналогами законов двойственности де Моргана, если $A \setminus B$ рассматривать как дополнение множества $B$ относительно $A$.

а) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$; б) $A \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$.

10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cap X = \emptyset, \\ B \cap \overline{X} = \emptyset, \end{cases}$$

где $A, B$ — заданные множества. При каких условиях система имеет решения?

11. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} A_1 \cap X = B_1, \\ \vdots \\ A_n \cap X = B_n; \end{cases}$ б) $\begin{cases} A_1 \cup X = B_1, \\ \vdots \\ A_n \cup X = B_n; \end{cases}$

в) $\begin{cases} A_1 \backslash X = B_1, \\ \vdots \\ A_n \backslash X = B_n; \end{cases}$ г) $\begin{cases} X \backslash A_1 = B_1, \\ \vdots \\ X \backslash A_n = B_n, \end{cases}$

где $A_1, \ldots, A_n,\ B_1, \ldots, B_n$ — заданные множества. Выведите условия существования решений.

12. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} A \backslash X = B, \\ A \cap X = C; \end{cases}$ б) $\begin{cases} X \backslash A = B, \\ A \cup X = C; \end{cases}$ в) $\begin{cases} A \backslash X = B, \\ B \backslash X = A; \end{cases}$

г) $\begin{cases} A \backslash X = B \cup X, \\ X \backslash B = C \cap X; \end{cases}$ д) $\begin{cases} X \backslash A = \overline{B \cup X}, \\ B \backslash X = \overline{C \backslash X}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} A \cap X = X \cup B, \\ C \cap X = B \backslash X, \end{cases}$

где $A$, $B$, $C$ — заданные множества. Выведите условия существования решений.

## 1.4. Конституенты

Пусть дано некоторое множество, которое будем называть единичным и обозначим $\mathfrak{I}$. Например, в качестве $\mathfrak{I}$ можно взять универсальное множество $\mathbb{U}$, произвольное пространство или область в пространстве. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные фиксированные подмножества $\mathfrak{I}$ ($n$ может быть и бесконечным).

Обозначим $A_i^1 = \mathfrak{I} \backslash A_i$, $A_i^0 = A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Множество $A_i^1$ называется дополнением $A_i$ относительно $\mathfrak{I}$.

***Конституентами*** единичного множества $\mathfrak{I}$ будем называть множества вида $A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}$, где $i_k \in \{0, 1\}$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Важную роль играет частный случай, когда все конституенты непусты. Множества $A_1, \ldots, A_n$ в этом случае называются *независимыми*.

## Задачи

1. Для следующих единичных множеств и семейств множеств $A_1, \ldots, A_n$ дайте описание всех конституент:

а) $\mathfrak{I}$ — множество, состоящее из трёх различных точек пространства: $P_1, P_2, P_3$ ; $A_1 = \{P_1\}, A_2 = \{P_2\}, A_3 = \{P_3\}$;

б) $\mathfrak{I}$ — множество, состоящее из четырёх различных точек пространства: $P_1, P_2, P_3, P_4$ ; $A_1 = \emptyset, A_2 = \{P_1\}, A_3 = \{P_1, P_2\}$;

в) $\mathfrak{I} = \mathbb{R}, A_1 = \emptyset, A_2 = \mathbb{R}$;

г) $\mathfrak{I} = [0; 1]$, семейство множеств $A_1, \ldots$ составляют полуинтервалы вида $[0; r)$, где $r$ — рациональное число из отрезка $[0; 1]$.

2. Определите, являются ли множества $A_1, A_2, \ldots$ независимыми, если:

а) $\mathfrak{I}$ — произвольное множество, $A_1 = A$, $A_2 = \mathfrak{I} \backslash A$, где $A$ — непустое подмножество $\mathfrak{I}$; б) $\mathfrak{I} = [0; 1]$, $A_1 = [0; 1)\,, A_2 = (0; 1]$.

3. Пусть $\mathfrak{I}$ — единичный куб в $\mathbb{R}^3$, т.е. множество таких точек $(x, y, z)$, что $z, y, x \in [0; 1]$. Выберем систему подмножеств $\mathfrak{I}$: $A_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathfrak{I} \mid \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$, $A_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathfrak{I} \mid \frac{1}{2} \le y \le 1\right\}$, $A_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathfrak{I} \mid \frac{1}{2} \le z \le 1\right\}$.

Докажите, что $A_1, A_2, A_3$ независимы.

4. Пусть $\mathfrak{I}$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$, т.е. множество таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, что $0 \le x_i \le 1, i = 1, \ldots, n$.

Семейство $A_1, \ldots, A_n$ состоит из множеств $A_i$ таких точек куба, у которых $\frac{1}{2} \le x_i \le 1$. Докажите, что $A_1, \ldots, A_n$ независимы.

5. Пусть $\mathfrak{I}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, т.е. множество таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполняется условие $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le 1$. Семейство $A_1, \ldots, A_n$ образуют множества $A_i$ точек шара, у которых $i$-я координата неотрицательна. Докажите, что $A_1, \ldots, A_n$ независимы.

6. Докажите, что различные конституенты не пересекаются.

7. Докажите, что объединение всех конституент равно $\mathfrak{I}$[6].

8. Докажите, что множество $A_i$ из семейства $A_1, \ldots, A_n$ равно объединению конституент, в состав которых входит $A_i^0$.

9. Докажите, что каждое непустое множество, полученное из множеств $A_1, \ldots, A_n$ операциями объединения, пересечения и разности, является суммой некоторого числа конституент[7].

10. Докажите, что если множества $A_1, \ldots, A_n$ независимы, то число различных конституент равно $2^n$.

11. Пусть $\mathfrak{I}$ — множество вершин трёхмерного единичного куба, $A_i$ — множество вершин грани в плоскости $x_i = 0$[8]. Выразите через соответствующие конституенты:

а) одноэлементные множества $\{(0,0,0)\}, \{(1,1,1)\}$ вершин;

б) $B_k$, $\mathfrak{I} \backslash B_k$ , где $B_k$ — множество вершин, лежащих на координатной оси $Ox_k, k = 1, 2, 3$.

12. Пусть $\mathfrak{I}$ — множество вершин $n$-мерного единичного куба, т.е. множество двоичных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$

---

[6] Результаты задач *6* и *7* выявляют замечательное свойство конституент, а именно: они являются «кирпичиками», из которых складывается множество $\mathfrak{I}$ и которые не пересекаются и формируются по единому правилу.

[7] Результат этой задачи показывает, что конституенты являются «кирпичиками», из которых можно сложить не только множество $\mathfrak{I}$, но и любое его подмножество, полученное из $A_1, \ldots, A_n$ с помощью основных операций.

[8] Здесь координаты в $\mathbb{R}^3$ обозначены $x_1, x_2, x_3$.

длины $n$. Семейство множеств $A_1, \ldots, A_n$ образуют множества $A_i$ $(n-1)$-мерных граней, у которых $i$-я координата равна нулю. Выразите через соответствующие конституенты:

а) $\{(0,\ldots,0)\}, \{(1,\ldots,1)\}, \left\{\left(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i},0,\ldots,0\right)\right\}$;

б) $B_k$, $\mathfrak{I}\backslash B_k$ , где $B_k$ — множество вершин, принадлежащих ребру на оси $Ox_k$, $k = 1, \ldots, n$.

# 2. Отношения

## 2.1. Декартовы произведения множеств

Назовём вектором (упорядоченной конечной последовательностью, кортежем) упорядоченный набор элементов $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $n$ — длина вектора. Таким образом, два вектора равны тогда и только тогда, когда их длины совпадают и на соответствующих местах стоят одинаковые элементы.

***Декартовым (прямым) произведением множеств*** $A_1, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Обозначим декартово произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Если $A_1 = \ldots = A_n = A$, то декартово произведение $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$ называется *декартовой (прямой) степенью* $A$ и обозначается $A^n$; $A^2$ — декартов квадрат $A$; $A^3$ — декартов куб и т.д.

***Свойства декартова произведения***:

**I.** **(1)** $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

**(2)** $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

**II.** **(1)** $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

**(2)** $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

**III.** **(1)** $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

**(2)** $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Свойства I, III естественным образом обобщаются на любые конечные объединения и пересечения множеств.

### Задачи

1. Дайте геометрическую интерпретацию следующих множеств:

а) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$; б) $[a;b]^2$, $[a;b]^3$; в) $[a;b] \times [c;d]$; г) $[0;1)^2$, $[0;1] \times [0;1] \times (0;1)$.

2. Обладает ли декартово произведение следующими свойствами?

а) коммутативностью; б) ассоциативностью.

3. Найдите $A \times B, B \times A, A^2$, если:
а) $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$;
б) $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$;
в) $A = [0;1]^2, B = [0, \infty)$.

4. В каких случаях $A \times B = \emptyset$?

5. Верны ли утверждения?
а) $\emptyset^n = \emptyset$; б) $\overline{A \times B} = \mathbb{U}^2 \setminus (A \times B)$.

6. Докажите свойства I – III декартова произведения.

7. Докажите:
а) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;
б) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
в) $\mathbb{U}^2 \setminus (A \times B) = ((\mathbb{U} \backslash A) \times \mathbb{U}) \cup (\mathbb{U} \times (\mathbb{U} \backslash B))$.

8. Пусть множество $A$ содержит $n$ элементов, $B$ — $m$ элементов. Сколько элементов содержит $A \times B$?

9. Даны множества $A_1, \ldots, A_k$, причём множество $A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ содержит $n_i$ элементов. Сколько элементов содержит $A_1 \times \ldots \times A_k$?

## 2.2. Бинарные отношения

***Бинарным отношением*** $R$ между элементами множеств $A$ и $B$ называется любое подмножество декартова произведения $A \times B$. Тот факт, что пара $\langle a, b\rangle$ находится в отношении $R$, будем обозначать $\langle a, b\rangle \in R$ или $aRb$.

*Областью определения* бинарного отношения $R$ называется множество $\delta_R$ таких элементов $a \in A$, что при некотором $b \in B$ $\langle a, b\rangle \in R$, т.е. $\delta_R = \{a \in A \mid \exists\, b \in B \ : \ \langle a, b\rangle \in R\}$.

*Областью значений* бинарного отношения $R$ называется множество $\rho_R$ таких элементов $b \in B$, что при некотором $a \in A$ $\langle a, b\rangle \in R$, т.е. $\rho_R = \{b \in B \mid \exists\, a \in A \ : \ \langle a, b\rangle \in R\}$.

*Дополнением* бинарного отношения $R$ называется бинарное отношение $-R = (A \times B) \setminus R$.

*Обратным* к бинарному отношению $R$ называется бинарное отношение $R^{-1} = \{\langle a, b\rangle \mid \langle b, a\rangle \in R\}$.

*Образом* множества $X$ относительно бинарного отношения $R$ называется множество

$$R\,(X) = \{b \in B \mid \exists\, a \in X \ : \ \langle a, b\rangle \in R\}\,.$$

*Прообразом* множества $X$ относительно бинарного отношения $R$ называется множество $R^{-1}\,(X)$.

*Композицией* бинарных отношений $R_1 \subset A \times B$ и $R_2 \subset B \times C$ называется бинарное отношение

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle a, c\rangle \mid \exists\, b \in B \ : \ \langle a, b\rangle \in R_1, \ \langle b, c\rangle \in R_2\}\,.$$

***Свойства бинарных отношений***:

**I.** $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$;

**II.** **(1)** $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

**(2)** $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

**III.** $-R^{-1} = (-R)^{-1}$;

**IV.** $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$, где $R \subset A \times B$; $S \subset B \times C$; $T \subset C \times D$;

**V.** $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$, где $R \subset A \times B$; $S \subset B \times C$;

**VI.** $(R \circ S)(X) = S(R(X))$, где $R \subset A \times B$; $S \subset B \times C$; $X \subset A$;

**VII.** **(1)** $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$, где $R, S \subset A \times B$; $T \subset B \times C$;
**(2)** $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$, где $R \subset A \times B$; $S, T \subset B \times C$.

Свойства II, V – VII естественно обобщаются на любое конечное число бинарных отношений в объединении, пересечении или композиции.

## Задачи

1. Пусть $A = \{x, y\}$, $B = \{x, z, u\}$, бинарное отношение $R$ составляют пары $\langle x, x\rangle$, $\langle x, z\rangle$, $\langle y, z\rangle$, $\langle y, u\rangle$. Найдите $R^{-1}$, $-R$, $\delta_R$, $\rho_R$, $R(\{x\})$, $R(\{x, y\})$.

2. Пусть множество $A$ состоит из следующих элементов: крокодила, удава, капусты, кролика, а множество $B$ включает козла, капусту, кролика, зайца. Определим бинарное отношение $R =$«ест»: $xRy \Leftrightarrow x$ ест $y$ ($y$ является пищей для $x$). Выпишите все пары $R$, если:
а) $R \subset A \times B$; б) $R \subset B \times A$; в) $R \subset A^2$; г) $R \subset B^2$.

3. Что является обратным к бинарному отношению $R$ из задачи *2* ? Выпишите все пары $R^{-1}$, если:
а) $R \subset A \times B$; б) $R \subset B \times A$.

4. Пусть на множествах $A$ и $B$ из задачи *2* определены два бинарных отношения «ест»: $R_1 \subset A \times B$ и $R_2 \subset B \times A$. Выпишите все пары $R_1 \circ R_2$, $R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.

5. Докажите:
а) $\delta_{R^{-1}} = \rho_R$, $\rho_{R^{-1}} = \delta_R$;
б) $\delta_{R \circ S} = R^{-1}(\rho_R \cap \delta_S)$, где $R \subset A \times B$; $S \subset B \times C$;
в) $\rho_{R \circ S} = S(\rho_R \cap \delta_S)$, где $R \subset A \times B$; $S \subset B \times C$.

6. Найдите $\delta_R$, $\rho_R$, $R^{-1}$, $R{\circ}R$, $R^{-1}{\circ}R$, $R{\circ}R^{-1}$ для следующих бинарных отношений:

а) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}$ и $x$ — делитель $y\}$;

б) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}$ и $y$ — делитель $x\}$;

в) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}$ и $|x| + |y| = 1\}$;

г) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}$ и $x = y \bmod k\}$[9], $k$ — данное натуральное число;

д) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x \le ay\}$, $a$ — данное ненулевое действительное число;

е) $R = \left\{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right.$ и $\left. y \le \operatorname{tg} x\right\}$;

ж) $R = \left\{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}\right.$ и $\left. x^2 + y^2 = a^2\right\}$, $a$ — данное действительное число;

з) $R = \left\{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}\right.$ и $\left. x^2 - y^2 \ge a^2\right\}$, $a$ — данное ненулевое действительное число;

и) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{Z}$ и $x,\ y$ одинаковой чётности$\}$[10];

к) $R = \left\{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}\right.$ и $\left. x \ge y^2\right\}$;

л) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{Z}$ и $xy$ — простое число$\}$.

7. Докажите свойства I – VII бинарных отношений.

8. Докажите:

а) $R{\circ}(S \cap T) \subset (R \circ S){\cap}(R \circ T)$, где $R \subset A{\times}B$; $S, T \subset B{\times}C$;

б) $(R \cap S){\circ}T \subset (R \circ T){\cap}(S \circ T)$, где $R, S \subset A{\times}B$; $T \subset B{\times}C$.

9. Можно ли включения в задаче *8* заменить равенствами?

10. Пусть множества $A$ и $B$ содержат $n$ и $m$ элементов соответственно. Сколько существует различных бинарных отношений на множествах $A$ и $B$?

## 2.3. Функции

Бинарное отношение $f \subset A \times B$ называется ***функцией*** из $A$ в $B$, если $\delta_f = A$, $\rho_f \subset B$ и для всех $x \in \delta_f$, $y_1, y_2 \in \rho_f$

[9] Запись $x = y \bmod k$ читается: «число $x$ равно числу $y$ по модулю $k$» и означает, что $x$ и $y$ дают одинаковые остатки при делении на $k$, или $x - y$ делится без остатка на $k$.

[10] Либо оба чётные, либо оба нечётные.

из $xfy_1$ и $xfy_2$ следует $y_1 = y_2$. Функция $f$ из $A$ в $B$ обозначается $f : A \to B$. Вместо $xfy$ или $\langle x, y\rangle \in f$ будем писать $y = f(x)$, элемент $x$ назовём значением аргумента, а $y$ — значением функции $f$.

Функция $f$ называется *инъекцией (1 − 1-функцией)* $A$ в $B$, если для всех $x_1$ и $x_2$ из $A$ условие $x_1 \neq x_2$ влечёт $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Функция $f$ называется *сюръекцией* $A$ на $B$, если $\rho_f = B$.

Если $f$ является инъекцией и сюръекцией, то она называется *взаимнооднозначным соответствием (биекцией)* между множествами $A$ и $B$.

Взаимнооднозначное соответствие $f : A \to A$ называется *подстановкой* множества $A$. Множество всех функций $f : A \to B$ обозначается $B^A$.

***Свойства функций***:

**I.** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$[11], где $A, B \subset \delta_f$;

**II.** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, где $A, B \subset \delta_f$;

**III.** $f(A) \backslash f(B) \subset f(A \backslash B)$, где $A, B \subset \delta_f$;

**IV.** $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, где $A, B \subset \rho_f$;

**V.** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, где $A, B \subset \rho_f$;

**VI.** $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$, где $A, B \subset \rho_f$.

Свойства I – II, IV – V естественно обобщаются на любое конечное число множеств.

## Задачи

1. Являются ли следующие бинарные отношения функциями из $A$ в $B$:

а) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x = y^2\}$, $A = [0; \infty)$, $B = \mathbb{R}$;

б) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x = y^2\}$, $A = B = [0; \infty)$;

в) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $y = \cos x\}$, $A = B = \mathbb{R}$;

[11] $f(A)$ — образ множества $A$ при функции $f$.

г) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x = \cos y\}$, $A = B = \mathbb{R}$;

д) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $y = \sin x\}$, $A = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $B = \mathbb{R}$;

е) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{Z}$ и $y = x \bmod k\}$, $k$ — данное натуральное число?

2. Являются ли следующие функции из $A$ в $B$ инъекциями, сюръекциями, биекциями?

а) $y = x^2$, $A = \mathbb{R}$, $B = [0; \infty)$;

б) $y = kx + b$, где $k$, $b$ — заданные числа; $A = B = \mathbb{R}$;

в) $y = \cos x$, $A = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $B = [0; 1]$;

г) $y = \sin x$, $A = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $B = [-1; 1]$;

д) $y$ — остаток от деления $x$ на $k$, $A = B = \mathbb{Z}$;

е) $y = \sin x$, $A = [0; \pi]$, $B = [-1; 1]$.

3. Пусть $f$ — функция из $A$ в $B$. При каких условиях $f^{-1}$ будет функцией из $\rho_f$ в $A$?

4. Пусть $f$ — взаимнооднозначное соответствие между $A$ и $B$. Докажите, что $f^{-1}$ также взаимнооднозначное соответствие между $A$ и $B$.

5. Пусть $f$ — подстановка множества $A$. Докажите, что $f^{-1}$ также подстановка множества $A$.

6. Пусть $f$ — функция из $A$ в $B$, $g$ — функция из $\rho_f \subset B$ в $C$. Докажите, что $f \circ g$ — функция из $A$ в $C$.

7. Обозначим через $I_A$ подстановку множества $A$, оставляющую на месте каждый элемент $A$ (такая подстановка называется тождественной): $I_A\,(a) = a$ для всех $a \in A$. Пусть $f : A \to B$ — взаимнооднозначное соответствие. Докажите:

а) $f^{-1} \circ f = I_B$; б) $f \circ f^{-1} = I_A$.

8. Пусть $A$, $B$ — конечные множества, состоящие из $n$ и $m$ элементов соответственно.

а) Сколько существует инъекций из $A$ в $B$ и при каких условиях?

б) Сколько существует взаимнооднозначных соответствий между $A$ и $B$ и при каких условиях?

в) Сколько существует подстановок множества $A$?

9. Докажите свойства I – VI функций.

10. Докажите, что включения в свойствах II, III нельзя заменить равенствами.

11. Докажите, что если в свойствах II, III функция $f$ является инъекцией, то включения превращаются в равенства.

12. Пусть $A \subset B \subset \delta_f$. Докажите, что $f(A) \subset f(B)$.

13. Пусть $A \subset B \subset \rho_f$. Докажите, что $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

## 2.4. Специальные бинарные отношения

Рассматриваем только бинарные отношения $R \subset A^2$, $\delta_R = A$.

Бинарное отношение $R$ называется ***рефлексивным***, если для всех $a \in A$ выполняется $aRa$. Соответственно, $R$ называется ***иррефлексивным***, если для всех $a \in A$ неверно, что $aRa$.

Бинарное отношение $R$ называется ***симметричным***, если для всех $a$, $b \in A$ из $aRb$ следует $bRa$; ***антисимметричным***, если для всех $a$, $b \in A$ из $aRb$ и $bRa$ следует $a = b$.

Бинарное отношение $R$ называется ***транзитивным***, если для всех $a$, $b$, $c \in A$ из $aRb$ и $bRc$ следует $aRc$.

Рефлексивное, симметричное, транзитивное бинарное отношение на $A$ называется ***эквивалентностью*** на $A$. *Классом эквивалентности* $a \in A$ по $R$ называется множество элементов $A$, находящихся в отношении $R$ с $a$: $a/R$, т.е. $a/R = \{b \in A \mid bRa\}$.

Множество классов эквивалентности элементов $A$ по $R$ называется *фактор-множеством* $A$ по $R$: $A/R$.

### Задачи

1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Является ли бинарное отношение $R \subset A^2$ рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, если:

а) $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle\}$;
б) $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$;
в) $R = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$;
г) $R = \{\langle 3,2\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,3\rangle\}$?

2. Может ли бинарное отношение быть следующим:
а) рефлексивным и иррефлексивным одновременно;
б) рефлексивным, но не иррефлексивным;
в) иррефлексивным, но не рефлексивным;
г) симметричным и антисимметричным одновременно;
д) симметричным, но не антисимметричным;
е) антисимметричным, но не симметричным;
ж) ни симметричным, ни антисимметричным?

3. Докажите, что бинарное отношение, симметричное и антисимметричное одновременно, является транзитивным. Верно ли обратное утверждение?

4. Докажите, что для любых симметричных $R$, $S \subset A^2$ бинарное отношение $R \circ S$ симметрично тогда и только тогда, когда $R \circ S = S \circ R$.

5. Докажите, что $R \subset A^2$ транзитивно тогда и только тогда, когда $R \circ R \subset R$.

6. Являются ли следующие бинарные отношения рефлексивными, иррефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентностями?
а) $R = \{\langle a,b\rangle \mid a,\ b \in \mathbb{R}$ и $a = b\}$;
б) $R = \{\langle x,y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x^2 = y^2\}$;
в) $R = \{\langle x,y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x < y\}$;
г) $R = \{\langle x,y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x \le y\}$;
д) $R = \{\langle x,y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $x - y$ — рациональное число $\}$;
е) $R = \{\langle x,y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{Z}$ и $y = x \bmod k\}$, $k$ — данное натуральное число;
ж) $R = \{\langle x,y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $[x] = [y]\}$[12];

[12] $[x]$ — целая часть числа $x$.

з) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $\{x\} = \{y\}\}$[13].

7. Пусть $A$ — множество прямых на плоскости. Обладают ли следующие бинарные отношения $R \subset A^2$ свойствами, перечисленными в задаче *6*?

а) $R$ — множество пар параллельных прямых; б) $R$ — множество пар перпендикулярных прямых.

8. Пусть $A$ — множество векторов в пространстве. Обладают ли следующие бинарные отношения теми же свойствами, что и в задаче 6?

а) $R = \left\{\left\langle \vec{a}, \vec{b}\right\rangle \mid \vec{a},\ \vec{b} \in A \text{ и } \vec{a} \perp \vec{b}\right\}$[14];

б) $R = \left\{\left\langle \vec{a}, \vec{b}\right\rangle \mid \vec{a},\ \vec{b} \in A \text{ и } \vec{a}, \vec{b} \text{ коллинеарны } \right\}$[15];

в) $R = \left\{\left\langle \vec{a}, \vec{b}\right\rangle \mid \vec{a},\ \vec{b} \in A \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|\right\}$.

9. Пусть $A$ — множество всех треугольников на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие бинарные отношения?

а) $R = \{\langle a, b\rangle \mid a,\ b \in A$ и $a, b$ равновелики$\}$;

б) $R = \{\langle a, b\rangle \mid a,\ b \in A$ и $a, b$ подобны$\}$;

в) $R$ — множество пар треугольников $\langle a, b\rangle$, в которых $a$ симметричен $b$ относительно некоторой оси.

10. Пусть на множестве $A$ задана эквивалентность $R$. Докажите, что множества $a/R$ $(a \in A)$ попарно не пересекаются и их объединение равно $A$[16].

11. Пусть на множестве студентов $N$-й группы задано бинарное отношение $R$=«любит»: для любых студентов $X$ и $Y$

---

[13] $\{x\}$ — дробная часть числа $x$.

[14] Под перпендикулярностью векторов понимается, что они лежат на пересекающихся или скрещивающихся перпендикулярных прямых.

[15] Векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых.

[16] Из утверждения задачи следует, что эквивалентность, заданная на множестве, разбивает его на непересекающиеся классы эквивалентности, с точки зрения которой все элементы одного класса тождественны.

этой группы $\langle X,\, Y\rangle \in R$ тогда и только тогда, когда студент(ка) $X$ любит студентку(та) $Y$. Является ли $R$ эквивалентностью?

12. Пусть на множестве студентов $N$-й группы задано бинарное отношение $R$=«болеют за одну и ту же команду»: для любых студентов $X$ и $Y$ этой группы $\langle X,\, Y\rangle \in R$ тогда и только тогда, когда студенты $X$ и $Y$ болеют за одну и ту же футбольную команду. Предполагается, что каждый студент группы болеет в точности за одну команду. Является ли $R$ эквивалентностью? Если да, то что будет фактор-множеством по $R$?

13. Являются ли эквивалентностями следующие бинарные отношения? Если да, то опишите соответствующие фактор-множества.

а) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\, y \in \mathbb{Z}$ и $y = x \bmod 2\}$;
б) $R = \left\{\left\langle \vec{a}, \vec{b}\right\rangle \mid \vec{a},\, \vec{b} \in A \text{ и } \vec{a}||\vec{b}\right\}$;
в) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\, y \in \mathbb{R}$ и $xy \geq 0\}$;
г) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $xy > 0\}$;
д) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\, y \in \mathbb{Z},\, x \neq y$ и $x, y$ взаимно просты $\}$[17].

14. Докажите, что если $R$ — эквивалентность, то $R^{-1}$ — также эквивалентность. Как соотносятся между собой фактор-множества по $R$ и $R^{-1}$?

15. Докажите, что если $R$, $S$ — эквивалентности, то $R \circ S$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $R \circ S = S \circ R$.

16. Пусть $\Omega$ — семейство всех существующих множеств (вселенная множеств). На $\Omega$ задано бинарное отношение $R$: для любых множеств $X$ и $Y$ $\langle X, Y\rangle \in R$ тогда и только тогда, когда существует взаимнооднозначное соответствие между $X$ и $Y$. Докажите, что $R$ является эквивалентностью. Опишите фактор-множество $\Omega/R$.

[17] Целые числа взаимно просты, если их наибольший общий делитель равен единице.

## 2.5. Отношения порядка

Пусть дано произвольное множество $A$. С помощью бинарных отношений на $A$ можно различным образом упорядочить элементы $A$.

Бинарное отношение $R \subset A^2$ называется ***предпорядком (квазипорядком)***, если оно рефлексивно и транзитивно. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение называется ***частичным порядком***. Частичный порядок обозначим $\leq$. Бинарное отношение $\leq^{-1}$ называется *двойственным порядком* к $\leq$ и обозначается $\geq$.

Частичный порядок называется ***линейным***, если для любых элементов $a$, $b$ из $A$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$. Множество с заданным на нём частичным (линейным) порядком — ***частично (линейно) упорядоченным***.

Элемент $a$ частично упорядоченного множества называется ***максимальным (минимальным)***, если из $a \leq x$ $(x \leq a)$ следует $a = x$. Элемент $a \in A$ называется ***наибольшим (наименьшим)***, если $x \leq a$ $(a \leq x)$ для всех $x \in A$.

***Верхней (нижней) гранью подмножества*** $B$ частично упорядоченного множества $A$ называется такой элемент $a \in A$ , что для любого $b \in B$ верно отношение $b \leq a$ $(a \leq b)$.

***Точной верхней (точной нижней) гранью подмножества*** $B$ множества $A$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань $B$. Точная верхняя и нижняя грани множества $B$ обозначаются $\sup B$ и $\inf B$ соответственно.

Линейный порядок на множестве $A$ называется ***полным***, если каждое непустое подмножество множества $A$ имеет наименьший элемент. Множество $A$ в этом случае — ***вполне упорядоченное***.

### Задачи

1. Являются ли предпорядком, частичным порядком следующие бинарные отношения?

а) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $xy > 0\}$;
б) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $xy < 0\}$;
в) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}$ и $y - x$ неотрицательно $\}$;
г) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}$ и $x$, $y$ одинаковой чётности $\}$.

2. Являются ли частичным порядком, линейным порядком следующие бинарные отношения?
а) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{R}$ и $y - x$ неотрицательно $\}$;
б) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{Z}$ и $y - x$ неотрицательно $\}$;
в) $R$ — множество пар натуральных чисел $\langle x, y\rangle$, для которых $y - x$ неотрицательно, если $x$ и $y$ одинаковой чётности, либо $x$ чётно, а $y$ нечётно;
г) $R = \{\langle A, B\rangle \mid A,\ B$ принадлежат булеану $X$ и $A \subset B\}$, где $X$ — некоторое непустое множество;
д) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re} x \leq \operatorname{Re} y, \operatorname{Im} x \leq \operatorname{Im} y\}$.

3. Постройте линейный порядок на $\mathbb{C}$.

4. Докажите, что порядок, двойственный к частичному, также является частичным.

5. Докажите, что частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента.

6. Докажите, что наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества является единственным максимальным (минимальным). Верно ли обратное?

7. Докажите, что в линейно упорядоченном множестве понятия наибольшего (наименьшего) и максимального (минимального) элементов эквивалентны.

8. Найдите наибольший, максимальный элементы, точную верхнюю грань $B \subset A$, если:
а)$B = A = [-1; 1]$;
б) $B$ — множество рациональных чисел из $A = [-1; 1]$;
в) $B = \left\{x \mid x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, $A = [-1; 0]$[18].

[18] Здесь и далее отношение $\leq$ на числовых множествах понимается так же, как в элементарной арифметике.

9. Приведите пример частично упорядоченного множества, не имеющего ни наибольшего, ни минимального элементов, но имеющего точную верхнюю грань.

10. Являются ли вполне упорядоченными следующие множества?

а) $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$; б) $\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Q}$; г) множество положительных рациональных чисел.

11. Являются ли вполне упорядоченным булеан $P(A)$ некоторого множества $A$, частично упорядоченный отношением включения?

# 3. Кардинальные числа

## 3.1. Эквивалентность и мощность множеств

Множество $A$ называется ***эквивалентным*** множеству $B$ ($A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие. Очевидно, что отношение эквивалентности между множествами рефлексивно, симметрично и транзитивно.

***Мощностью*** множества $A$ ($\mathrm{card}(A)$) называется класс эквивалентности $A$. Эквивалентные множества называются *равномощными*. Мощность пустого множества обозначается числом 0. Мощность множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ — натуральным числом $n$. Множество $A$ называется ***конечным***, если существует такое конечное натуральное число $n$, что $\mathrm{card}(A) = n$. Мощность конечного множества определяет количество элементов в нём и обозначается $|A|$.

Множество, не являющееся конечным, называется ***бесконечным***. Множество ***счётное***, если оно либо конечно, либо бесконечно и эквивалентно множеству $\mathbb{N}_0$. Счётные бесконечные множества будем называть *счётно-бесконечными*.

Множество ***бессчётное***, если оно не является счётным. Множество, эквивалентное множеству $\mathbb{R}$, *континуальное*.

Если $A$ эквивалентно некоторому подмножеству множества $B$, будем писать $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$; если же $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ и неверно, что $A \sim B$, то $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$.

Если $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ и $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$, то $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ (*теорема Кантора — Бернштейна*). Несмотря на кажущуюся очевидность этого факта, доказать его довольно сложно.

## Задачи

1. Являются ли следующие множества конечными, счётно-бесконечными или бессчётными?

а) Множество студентов БГТУ; б) множество людей на Земле; в) множество звёзд во Вселенной; г) множество элементарных частиц в материальном мире; д) множество различных слов, составленных из букв русского алфавита (под словом понимается любая, не обязательно осмысленная, конечная последовательность букв); е) множество целых чисел; ж) множество рациональных чисел.

2. Докажите:

а) подмножество конечного множества конечно;

б) объединение конечного числа конечных множеств конечно;

в) декартово произведение конечного числа конечных множеств конечно.

3. Докажите:

а) $[0;1] \sim [a;b]$, где $[a;b]$ — произвольный отрезок числовой оси $(a < b)$; б) $(0;1) \sim \mathbb{R}$; в) $[0;1) \sim [0;\infty)$.

4. Докажите, что если существует функция из $A$ на $B$, то для кардинальных чисел $A$ и $B$ $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$.

5. Докажите:

а) $A \times B \sim B \times A$; б) $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$; в) $A \sim A \times \{a\}$; г) если $A \sim B$, $C \sim D$, то $A \times C \sim B \times D$; д) $A \sim A^{\{a\}}$; е) $\{a\}^A \sim \{a\}$; ж) если $A \sim B$, $C \sim D$, то $A^C \sim B^D$;

з) если $A \cap B = \emptyset$, то $X^{A \cup B} \sim X^A \times X^B$; и) $(A \times B)^X \sim A^X \times B^X$; к) $\left(X^A\right)^B \sim X^{A \times B}$.

6. Докажите, что если $A$ и $B$ счётны, то:
а) $A \cup B$ счётно; б) $A \times B$ счётно.

7. Докажите, что объединение счётного числа счётных множеств счётно.

8. Докажите, что всякое подмножество счётного множества счётно.

9. Докажите, что бесконечное множество содержит счётно-бесконечное подмножество.

10. Докажите:
а) если $A$ счётно-бесконечно, $B$ конечно, то $A \backslash B \sim A$;
б) если $A$ бесконечно, $B$ счётно, то $A \cup B \sim A$;
в) если $A$ бессчётно, $B$ счётно, то $A \backslash B \sim A$.

11. Докажите, что конечное множество не эквивалентно собственному подмножеству.

12. Докажите, что множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому собственному подмножеству[19)].

13. Докажите, что $[0; 1]$ — бессчётное множество.

14. Докажите:
а) $(0; 1) \sim [0; 1]$; б) $[0; 1] \sim \mathbb{R}$.

15. Докажите, что $\mathbb{R}$ бессчётно.

16. Какова мощность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел?

17. Какова мощность множества всех счётных последовательностей натуральных чисел?

---

[19)] Именно так определял Г. Кантор бесконечные множества.

18. Какова мощность множества всех счётных двоичных последовательностей?

19. Докажите:

а) $[0;1] \sim [0;1]^2$; б) $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

## 3.2. Арифметика кардинальных чисел

***Кардинальными числами*** множеств называются мощности соответствующих множеств. Для конечных множеств кардинальные числа равны количеству элементов в них. Например, кардинальное число пустого множества равно 0, множества $\{1\}$ равно 1, множества $\{1, 2\}$ — 2 и т. д. Первым бесконечным кардинальным числом является кардинальное число счётно-бесконечных множеств $\mathfrak{a}$. Кардинальное число континуальных множеств обозначается $\mathfrak{c}$. Известно, что $\mathfrak{c}$ бессчётно, но неизвестно, является ли оно первым бессчётным кардинальным числом.

Определим арифметические операции над кардинальными числами.

***Суммой*** кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ называется кардинальное число $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$), если каждое множество мощности $\mathfrak{m}$ представимо в виде объединения непересекающихся множеств с кардинальными числами $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$.

***Произведением*** $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ называется кардинальное число $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2$), если каждое множество мощности $\mathfrak{m}$ равномощно $A_1 \times A_2$, где $\mathrm{card}(A_1) = \mathfrak{n}_1$, $\mathrm{card}(A_2) = \mathfrak{n}_2$.

***Степенью*** с основанием $\mathfrak{n}$ и показателем $\mathfrak{v}$ называется кардинальное число $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{v}}$, если каждое множество мощности $\mathfrak{m}$ равномощно $A^B$, где $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{n}$, $\mathrm{card}(B) = \mathfrak{v}$.

### Задачи

1. Докажите:

а) для каждой пары кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ существует их сумма $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$;

б) для каждой пары кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ существует их произведение $\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2$;

в) для каждой пары кардинальных чисел $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{v}$ существует степень $\mathfrak{n}^{\mathfrak{v}}$.

2. Докажите, что сложение кардинальных чисел коммутативно и ассоциативно.

3. Докажите, что умножение кардинальных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения слева и справа.

4. Докажите:

а) $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}}$; б) $(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p})^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$; в) $(\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}}$; г) $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}$; д) $1^{\mathfrak{n}} = 1$, где $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ — кардинальные числа.

5. Докажите:

а) $5+2=7$ (под числами понимаются кардинальные числа конечных множеств); б) $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$; в) $\mathfrak{n}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{n}$ — конечное кардинальное число; г) $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$; д) $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$.

6. Докажите:

а) $5 \cdot 2 = 10$; б) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; в) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{n}$ — конечное кардинальное число; г) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$; д) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

7. Докажите, что для любого кардинального числа $\mathfrak{n}$:

а) $\mathfrak{n} \cdot 0 = 0 \cdot \mathfrak{n} = 0$; б) $\mathfrak{n}+0=0+\mathfrak{n}=\mathfrak{n}$.

8. Докажите:

а) $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$; б) $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$.

# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## 1. Множества и операции над ними

### 1.1. Понятие множества и способы задания множеств

1. а) Множество $\emptyset$ не содержит никаких элементов, а множество $\{\emptyset\}$ — один элемент, а именно, множество $\emptyset$, поэтому они неравны;

б) множества содержат по одному элементу, но в $\{\emptyset\}$ этот элемент — $\emptyset$, а в $\{\{\emptyset\}\}$ — множество, содержащее $\emptyset$. Эти элементы не совпадают, следовательно, множества не равны;

в), г) не равны.

2. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Пусть $A \subset B$ и $B \subset A$. Допустим, что $A \neq B$. Тогда существует хотя бы один элемент $x$ такой, что $x \in A$ и $x \notin B$ или же $x \in B$ и $x \notin A$. В первом случае существование такого $x$ противоречит условию $A \subset B$, во втором — $B \subset A$.

5. Занумеруем все элементы $A$ числами $1, 2, \ldots, n$. Тогда каждое подмножество $A$ можно зашифровать последовательностью 0 и 1 таким образом: на $i$-м месте в последовательно-

сти стоит 1, если элемент под номером $i$ принадлежит соответствующему подмножеству, и 0 в противном случае. Тогда каждому подмножеству соответствует единственная последовательность и наоборот. Следовательно, число различных подмножеств равно числу различных последовательностей $n$ нулей и единиц. А последнее равно $2^n$. Собственных подмножеств $2^n - 2$.

6. а) $\{0, 1, -1, 2, -2\}$;

б) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z = 35k$ при некотором целом $k\}$;

в) $\big\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ при некотором целом $k\big\}$;

г) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\} = [-1; 1]$;

д) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z = 2^c,$ где $c$ — некоторое целое число $\}$;

е) множество упорядоченных троек чисел $x, y, z$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 < 1$;

ж) $\emptyset$.

7. а) $A = [-1; 1]$, $B = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому $A \ne B$;

б) $A = \emptyset$, $B = \{i, -i\}$, поэтому $A \ne B$;

в) точка $(0; 0)$ принадлежит $A$, но не принадлежит $B$, поэтому $A \ne B$;

г) оба множества пусты, поэтому равны.

8. а) Если $A$ — множество функций, дифференцируемых в точке $x$, $B$ — множество функций, непрерывных в точке $x$, то $A \subset B$, причём $A \ne B$;

б) $A \subset B$, где $A$ — множество точек экстремума; $B$ — множество критических точек функции, причём возможны случаи $A = B$ и $A \ne B$ в зависимости от функции;

в) $A = B$, где $A$ — множество целых чисел, кратных 5; $B$ — множество целых чисел, оканчивающихся на 0 или на 5;

г) $A \subset B$, где $A$ — множество целых чисел, кратных 10; $A$ — множество целых чисел, кратных 5, $A \ne B$;

д) $A \subset B$, где $A$ — множество всех ромбов; $B$ — множество всех четырёхугольников с перпендикулярными диагоналями, причём $A \ne B$.

## 1.2. Операции над множествами

2. а) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \backslash \emptyset = A$, $\emptyset \backslash A = \emptyset$, $A \div \emptyset = A$, $\overline{\emptyset} = \mathbb{U}$;

б) $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$, $A \cap \mathbb{U} = A$, $A \backslash \mathbb{U} = \emptyset$, $\mathbb{U} \div A = \overline{A}$, $\overline{\mathbb{U}} = \emptyset$;

в) $A \cup A = A \cap A = A$, $A \backslash A = A \div A = \emptyset$;

г) пусть $x \in A \backslash B \cup B$. Тогда по определению объединения множеств возможны два варианта: либо $x \in A \backslash B$, либо $x \in B$. Понятно, что это равносильно тому, что либо $x \in A$, либо $x \in B$. Значит, $x \in A \backslash B \cup B \Leftrightarrow x \in A \cup B$. Следовательно, $x \in A \backslash B \cup B = A \cup B$;

д) пусть $x \in (A \backslash B) \cap B$. Это эквивалентно тому, что $x \in A \backslash B$ и $x \in B$, а это, в свою очередь, эквивалентно $x \in A$, $x \notin B$ и одновременно $x \in B$, что невозможно. Следовательно, таких $x$ не существует, $x \in (A \backslash B) \cap B = \emptyset$;

е) $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \backslash \overline{A} = A$, $\overline{A} \backslash A = \overline{A}$, $A \div \overline{A} = \mathbb{U}$.

3. а) Докажем необходимость. Пусть $x \in A \backslash B$. Тогда $x \in A$ и $x \notin B$. Но из условия $A \subset B$ следует, что таких элементов $x$ не существует. Следовательно, $A \backslash B = \emptyset$. Докажем достаточность. Пусть $x \in A$. Если предположить, что $x \notin B$, то тогда $x \in A \backslash B$, что невозможно, так как $A \backslash B = \emptyset$. Значит, $x \in B$, а следовательно, $A \subset B$;

б), г) следуют из определений операций $\cap$ и $\cup$;

в) докажем необходимость. Пусть $x \in A$. Предположим, что $x \notin B$. Тогда $x \notin A \cap B$, что противоречит условию $A \cap B = A$. Значит, $x \in B$, следовательно, $A \subset B$. Докажем достаточность. Воспользуемся утверждением задачи *2* подразд. 1.1. То есть для доказательства равенства $A \cap B = A$ нужно доказать два включения: $A \cap B \subset A$ и $A \subset A \cap B$. Первое из них доказано в задаче *б*. Докажем, что $A \subset A \cap B$. Пусть $x \in A$. Так как $A \subset B$, $x \in B$. Следовательно, $x \in A \cap B$, значит, $A \subset A \cap B$;

д) доказывается аналогично *в*;

е) докажем, что $A \backslash B \cup B \subset A$. Пусть $x \in A \backslash B \cup B$. Возможны два варианта: $x \in A \backslash B$ и $x \in B$. При первом из них

$x \in A$ по определению разности $A \backslash B$, при втором это следует из условия $B \subset A$. Значит, $x \in A$, следовательно, доказано, что $A \backslash B \cup B \subset A$. Докажем, что $A \subset A \backslash B \cup B$. Пусть $x \in A$. Рассмотрим два варианта: $x \in B$ и $x \notin B$. В первом случае $x \in A \backslash B \cup B$ по определению объединения. Во втором случае $x \in A \backslash B$, а значит, $x \in A \backslash B \cup B$. Следовательно, $A \subset A \backslash B \cup B$. Из двух доказанных включений вытекает, что $A \backslash B \cup B = A$.

Заметим, что при доказательстве включения $A \subset A \backslash B \cup B$ не использовалось условие $B \subset A$. Значит, это включение всегда верно.

4. а) Булеан $P(A \cap B)$ состоит из тех и только тех множеств, которые входят в булеаны $P(A)$ и $P(B)$ одновременно. Докажем это. Пусть $C$ — множество из $P(A \cap B)$. Тогда $C$ — подмножество $A \cap B$, а значит, и подмножество множеств $A$ и $B$. Следовательно, $C$ входит и в $P(A)$, и в $P(B)$. Обратно, пусть $C$ входит в $P(A)$ и $P(B)$ одновременно. Тогда $C$ — подмножество $A$ и $B$, значит, оно является подмножеством $A \cap B$, следовательно, входит в $P(A \cap B)$.

Обобщая этот результат на произвольное конечное число множеств, получаем, что булеан

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

состоит из тех и только тех множеств, которые входят во все булеаны $P(A_1), \ldots, P(A_n)$. Доказать это можно методом математической индукции по числу множеств $n$;

б) булеан $P(A \cup B)$ состоит из тех и только тех множеств, которые можно представить в виде $A_1 \cup B_1$, где $A_1$ входит в $P(A)$, $B_1$ — в $P(B)$. Докажем это. Пусть $C$ — множество из $P(A \cup B)$, т.е. $C$ — подмножество $A \cup B$. Тогда $C$ можно представить в виде $A_1 \cup B_1$, где $A_1$ — подмножество $A$, $B_1$ — подмножество $B$, например, $A_1 = C \cap A$, $B_1 = C \cap B$. Обратно, пусть $C = A_1 \cup B_1$, где $A_1$ — множество из $P(A)$, $B_1$ — множество из $P(B)$. Очевидно, что $C$ — подмножество $A \cup B$, т.е. входит в $P(A \cup B)$.

Обобщая этот результат, получаем, что булеан

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

состоит из тех и только тех множеств, которые представимы в виде

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

где $B_i$ — множество из $P(A_i)$.

5. а) Состоит из единственного множества $\emptyset$;

б) из множеств $\emptyset$, $\{\emptyset\}$;

в) из семейства множеств $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

г) из семейства множеств $\emptyset$, $\{1\}$;

д) из семейства всех множеств.

6. а) Число всех $k$-элементных подмножеств множества $A$ равно количеству различных двоичных последовательностей длины $n$, содержащих ровно $k$ единиц (см. задачу *5* подразд. 1.1). *Ответ:* $C_n^k$ [1)];

б) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k$.

7. См. задачу *5* подразд. 1.1.

8. а) $A_{21} = A_3 \cap A_7$, где $A_{21}, A_3, A_7$ — множества целых чисел, делящихся на 21, 3 и 7 соответственно;

б) $A = B \cap C$, где $A$ — множество ромбов; $B$ — множество параллелограммов; $C$ — множество четырёхугольников с перпендикулярными диагоналями;

в) обозначим через $A$ множество действительных чисел, больших $a$, через $B$ — больших $b$, $A_1$ — меньших $a$, $B_1$ — меньших $b$, $C$ — множество решений неравенства. Тогда $C = A \cap B \cup A_1 \cap B_1$. Из условия $b < a$ следует, что

$$A \subset B \;\Rightarrow A \cap B = A,\; B_1 \subset A_1 \;\Rightarrow A_1 \cap B_1 = B_1.$$

Отсюда $C = A \cup B_1$.

[1)] $C_n^k$ — число сочетаний из $n$ элементов по $k$, т.е. неупорядоченных выборок $k$ различных элементов, взятых из $n$ элементов.

### 1.3. Основные законы алгебры множеств

1. Законы I, II, IV – VII следуют из определений операций. Докажем законы III.

(1) Здесь и далее при доказательстве тождеств будем пользоваться результатом задачи *2* подразд. 1.1. Докажем $A \cap (B \cup C) \subset A \cap B \cup A \cap C$. Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$, откуда следуют два варианта (и только они): $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in A$ и $x \in C$. При первом из них $x \in A \cap B$, при втором — $x \in A \cap C$. Так как обязательно имеет место хотя бы один из них, $x \in A \cap B \cup A \cap C$. Значит, $A \cap (B \cup C) \subset A \cap B \cup A \cap C$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in A \cap B \cup A \cap C$. Тогда либо $x \in A \cap B$, либо $x \in A \cap C$. В обоих случаях $x \in A$ и обязательно $x$ принадлежит либо $B$, либо $C$. Иначе не имел бы места ни один из случаев. Значит, $x \in A$ и $x \in B \cup C$, следовательно, $x \in A \cap (B \cup C)$. Итак, доказано, что $A \cap B \cup A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$. Из доказанных включений следует, что $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$.

(2)Доказывается аналогично *(1)*.

(3) Докажем $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Пусть $x \in (A \cup B) \setminus C$. Это означает, что $x \in A \cup B$ и $x \notin C$. Если $x \in A$, то $x \in A \setminus C$, если $x \in B$, то $x \in B \setminus C$. Так как обязательно имеет место хотя бы один из вариантов, $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Докажем $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus C$. Пусть $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Возможны два варианта: $x \in A \setminus C$ или $x \in B \setminus C$. При обоих вариантах $x \notin C$. При этом $x$ принадлежит либо $A$, либо $B$, значит, $x \in A \cup B$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \setminus C$. Обратное включение, а значит, и тождество доказано.

(4) Доказывается аналогично *(3)*.

(5) Докажем $A \cap (B \div C) \subset A \cap B \div A \cap C$. Пусть $x \in A \cap (B \div C)$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \div C$, значит, $x$ принадлежит ровно одному из множеств $B$ или $C$. Отсюда, $x$ принадлежит ровно одному из множеств $A \cap B$ или $A \cap C$, т.е.

$x \in A \cap B \div A \cap C$. Докажем, что $A \cap B \div A \cap C \subset A \cap (B \div C)$. Пусть $x \in A \cap B \div A \cap C$. Тогда $x \in A \cap B$ либо $x \in A \cap C$, но не обоим множествам вместе. Это означает, что $x \in A$ и одному из множеств $B$ или $C$, но не обоим одновременно, т.е. $x \in B \div C$, следовательно, $x \in A \cap (B \div C)$. Включение доказано.

Докажем законы VIII.

(1) Доказательство $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \notin A \cup B$, следовательно, $x$ не принадлежит ни $A$, ни $B$, т.е. $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Доказательство $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Отсюда следует, что $x \notin A$ и $x \notin B$. Очевидно, что тогда $x$ не может принадлежать ни одному из множеств $A$ или $B$. Значит, $x \notin A \cup B$ и $x \in \overline{A \cup B}$.

(2) Можно доказать аналогично *(1)*, но проще поступить по-другому. Пусть $\overline{A} \cup \overline{B} = C$. Очевидно, что тогда $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{C}$. Используя доказанный закон двойственности *(1)*, получим $\overline{C} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}$. Применив закон двойного отрицания, имеем $\overline{C} = A \cap B$, откуда следует, что $C = \overline{A \cap B}$.

2. а) Применяя доказанные законы алгебры множеств, имеем

$$A \cup A \cap B = A \cap \mathbb{U} \cup A \cap B = A \cap (\mathbb{U} \cup B) = A \cap \mathbb{U} = A.$$

б) Используя результат задачи *а*, имеем

$$A \cap (A \cup B) = A \cap A \cup A \cap B = A \cup A \cap B = A.$$

в) Пусть $C = A \cup \overline{A} \cap B$, тогда

$$\overline{C} = \overline{A \cup \overline{A} \cap B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = \overline{A} \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = \overline{A} \cap A \cup \overline{A} \cap \overline{B} = \\ = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}.$$

Следовательно, $C = A \cup B$.

3. б) Используя тождество $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ и идемпотентность пересечения, имеем

$$A \backslash (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(A \cap \overline{C}\right) = \\ = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)\,;$$

в) $A \backslash B \cap C = A \cap \overline{B \cap C} = A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) = A \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{C} = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

д) $(A \backslash C) \setminus (B \backslash C) = A \cap \overline{C} \backslash B \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap \overline{C} \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = A \cap \overline{C} \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{C} \cap C = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \backslash B) \setminus C$;

е) $A \setminus (B \backslash C) = A \backslash B \cap \overline{C} = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = A \cap \overline{B} \cup A \cap C = (A \backslash B) \cup A \cap C$;

ж) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \backslash B) \setminus C$.

Все тождества из задач *2*, *3* могут быть доказаны непосредственно через определения операций, как это делалось в задаче *1*. Рекомендуется доказать это самостоятельно.

4. а) Пусть $x \in \overline{B}$. Тогда $x \notin B$, а так как по условию $A \subset B$, $x \notin A$, а значит, $x \in \overline{A}$ и $\overline{B} \subset \overline{A}$;

в) пусть $x \in C \backslash B$. Тогда $x \in C$ и $x \notin B$. По условию $A \subset B$, значит, $x \notin A$. Таким образом, $x \in C$ и $x \notin A$, следовательно, $x \in C \backslash A$.

Заметим, что утверждение *а* является частным случаем *в* при $C = \mathbb{U}$.

5. а) Докажем необходимость. Пусть $x \in A \backslash B$, значит, $x \in A$ и $x \notin B$. По условию $A \subset B \cup C$, откуда следует, что $x \in B \cup C$. Поскольку $x \notin B$, необходимо, чтобы $x \in C$. Следовательно, $A \backslash B \subset C$. Докажем достаточность. Пусть $x \in A$. Если при этом $x \in B$, то доказываемое включение очевидно, если же $x \notin B$, то $x \in A \backslash B$. По условию $A \backslash B \subset C$, значит, $x \in C$. Следовательно, $x \in B \cup C$;

б) необходимость. Пусть $x \in A$. Если при этом $x \notin B$, то $x \in \overline{B}$, значит, $x \in C \cup \overline{B}$. Если же $x \in B$, то $x \in A \cap B$. По условию $A \cap B \subset C$, значит, $x \in C$ и $x \in C \cup \overline{B}$. Достаточность. Пусть $x \in A \cap B$. Отсюда следует, что $x \in A$, значит, по условию $x \in C \cup \overline{B}$. Кроме того, $x \in B$, следовательно, $x \notin \overline{B}$. Значит, с необходимостью, $x \in C$;

в) необходимость. Предположим, что существует такой элемент $x$, что $x \in (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$. Тогда $x \notin C$, и $x$ принадлежит $A$ и $B$ одновременно, а значит, $x \in A \cap B$ и $x \notin C$, что противоречит условию $A \cap B \subset C$. Достаточность. Если $A \cap B = \emptyset$, то включение $A \cap B \subset C$ очевидно. Преположим, что существует элемент $x$, принадлежащий $A \cap B$ и не принадлежащий $C$. Тогда $x \in A \backslash C$ и $x \in B \backslash C$, т.е. $x \in (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$, что противоречит условию $(A \backslash C) \cap (B \backslash C) = \emptyset$.

6. а) Нет. Например, $A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $B \subset C$;

б) нет. Например, $C \subset A \subset B$, $A \neq B$;

в) нет. Например, если множества такие же, как в *а*.

7. а) $A \div A \cap B = (A \backslash A \cap B) \cup (A \cap B \backslash A) = A \cap \overline{A \cap B} \cup A \cap B \cap \cap \overline{A} = A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = A \cap \overline{B} = A \backslash B$;

б) $A \div (A \cup B) = (A \backslash (A \cup B)) \cup (A \cup B \backslash A) = A \cap \overline{A \cup B} \cup \cup (A \cup B) \cap \overline{A} = A \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{A} = B \cap \overline{A} = B \backslash A$;

в) $A \div B \cup A \cap B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup A \cap B = A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{A} \cup A \cap B = = A \cap \overline{B} \cup B = A \cup B$ (здесь применены тождества задачи *2,г* и *в*).

8. *Указание*: воспользуйтесь тождеством $A \div B = = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ и утверждениями задач *3,а* подразд. 1.2 и *2* подразд. 1.1.

9. а) Так как $A \cap B = A \backslash \overline{B}$, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \backslash \overline{B} = \emptyset$. Согласно утверждению задачи *3,а* подразд. 1.2 это эквивалентно тому, что $A \subset \overline{B}$, а из результата задачи *4,а* следует, что это включение эквивалентно $B \subset \overline{A}$.

10. Из задачи *9* следует, что множество $X$ является решением системы тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет двойному включению $B \subset X \subset \overline{A}$. Очевидно, что условием существования решений будет включение $B \subset \overline{A}$.

11. а) Чтобы воспользоваться результатом задачи *10*, нужно каждое уравнение системы привести к объединению двух множеств, одно из которых есть пересечение с $X$ (и только с ним), а второе — только с $\overline{X}$. Для $i$-го уравнения, согласно результату задачи *8*, имеем

$$A_i \cap X = B_i \Leftrightarrow (A_i \cap X \backslash B_i) \cup (B_i \backslash A_i \cap X) = \emptyset.$$

Преобразуем множество в левой части:

$$(A_i \cap X \backslash B_i) \cup (B_i \backslash A_i \cap X) = A_i \cap X \cap \overline{B_i} \cup B_i \cap \overline{A_i \cap X} =$$

$$= A_i \cap \overline{B_i} \cap X \cup B_i \cap \left(\overline{A_i} \cup \overline{X}\right) = A_i \cap \overline{B_i} \cap X \cup B_i \cap \overline{X} \cup B_i \cap \overline{A_i} = \emptyset.$$

Последнее пересечение в полученном объединении не содержит множества $X$, поэтому для того чтобы объединение было пустым множеством, необходимо выполнить условие $B_i \cap \overline{A_i} = \emptyset$, которое равносильно $B_i \backslash A_i = \emptyset$, или $B_i \subset A_i$. В итоге, $i$-уравнение приведено к виду $A_i \cap \overline{B_i} \cap X \cup B_i \cap \overline{X} = \emptyset$.

Получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} A_1 \cap \overline{B_1} \cap X \cup B_1 \cap \overline{X} = \emptyset, \\ \vdots \\ A_n \cap \overline{B_n} \cap X \cup B_n \cap \overline{X} = \emptyset \end{cases}$$

с условиями существования решений $B_1 \subset A_1, \ldots, B_n \subset A_n$. Для приведения её к виду системы из задачи *10* напишем объединение всех уравнений системы:

$$A_1 \cap \overline{B_1} \cap X \cup B_1 \cap \overline{X} \cup \ldots \cup A_n \cap \overline{B_n} \cap X \cup B_n \cap \overline{X} = \emptyset.$$

Используя закон дистрибутивности, вынесем $X$ из всех пересечений с $X$ и $\overline{X}$ из всех пересечений с $\overline{X}$:

$$\left(A_1 \cap \overline{B_1} \cup \ldots \cup A_n \cap \overline{B_n}\right) \cap X \cup (B_1 \cup \ldots \cup B_n) \cap \overline{X} = \emptyset.$$

Запишем полученное уравнение как систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \left(A_1 \cap \overline{B_1} \cup \ldots \cup A_n \cap \overline{B_n}\right) \cap X = \emptyset, \\ (B_1 \cup \ldots \cup B_n) \cap \overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

Теперь можно применить результат задачи *10*:

$$B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset X \subset \overline{A_1 \cap \overline{B_1} \cup \ldots \cup A_n \cap \overline{B_n}}.$$

Верхнюю границу включения можно преобразовать:

$$\overline{A_1 \cap \overline{B_1} \cup \ldots \cup A_n \cap \overline{B_n}} = \overline{A_1 \cap \overline{B_1}} \cap \ldots \cap \overline{A_n \cap \overline{B_n}} =$$
$$= \left(\overline{A_1} \cup B_1\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{A_n} \cup B_n\right).$$

Итак, получаем окончательный ответ:

$$B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset X \subset \left(\overline{A_1} \cup B_1\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{A_n} \cup B_n\right),$$

при $B_1 \subset A_1, \ldots, B_n \subset A_n$, $B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset \left(\overline{A_1} \cup B_1\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{A_n} \cup B_n\right)$;

б) аналогичными *а* преобразованиями приведём исходную систему к эквивалентной:

$$\begin{cases} \left(\overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_n}\right) \cap X = \emptyset, \\ \left(B_1 \cap \overline{A_1} \cup \ldots \cup B_n \cap \overline{A_n}\right) \cap \overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

При этом получим условия существования решений:

$$A_1 \subset B_1, \ldots, A_n \subset B_n.$$

Отсюда следует, что $B_1 \cap \overline{A_1} \cup \ldots \cup B_n \cap \overline{A_n} \subset X \subset \overline{\overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_n}}$. Преобразовав границы включений, получим

$$(B_1 \backslash A_1) \cup \ldots \cup (B_n \backslash A_n) \subset X \subset B_1 \cap \ldots \cap B_n,$$

при $A_1 \subset B_1, \ldots, A_n \subset B_n$, $(B_1 \backslash A_1) \cup \ldots \cup (B_n \backslash A_n) \subset B_1 \cap \ldots \cap B_n$;

в) применяя ту же методику, получаем ответ:

$$(A_1 \backslash B_1) \cup \ldots \cup (A_n \backslash B_n) \subset X \subset \overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n},$$

при $B_1 \subset A_1, \ldots, B_n \subset A_n$, $(A_1 \backslash B_1) \cup \ldots \cup (A_n \backslash B_n) \subset \overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n}$.

Его можно получить проще (используя результат задачи *а*) — заменой $X$ на $\overline{X}$. Подставляя $\overline{X}$ в ответ задачи *а*, получаем

$$B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset \overline{X} \subset \left(\overline{A_1} \cup B_1\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{A_n} \cup B_n\right).$$

Используя результат задачи *4,а*, получаем

$$\overline{\left(\overline{A_1} \cup B_1\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{A_n} \cup B_n\right)} \subset X \subset \overline{B_1 \cup \ldots \cup B_n},$$

откуда и следует приведённый выше ответ;

г) $B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset X \subset (A_1 \cup B_1) \cap \ldots \cap (A_n \cup B_n)$, при $A_1 \cap B_1 = \emptyset, \ldots, A_n \cap B_n = \emptyset$, $B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset (A_1 \cup B_1) \cap \ldots \cap$ $\cap (A_n \cup B_n)$.

*Указание*: приведите систему к виду системы *а* и следуйте её решению.

12. Используем ту же методику, что и в задаче *11*.

а) Преобразование первого уравнения:

$$A \backslash X = B \Leftrightarrow (A \backslash X) \backslash B \cup (B \backslash (A \backslash X)) = \emptyset;$$
$$A \cap \overline{X} \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{A \cap \overline{X}} = A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup B \cap \left(\overline{A} \cup X\right) =$$
$$= A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup B \cap X \cup B \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \backslash A = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A \Rightarrow A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup B \cap X = \emptyset.$$

Преобразование второго уравнения:

$$A \cap X = C \Leftrightarrow A \cap X \backslash C \cup (C \backslash A \cap X) = \emptyset;$$
$$A \cap X \cap \overline{C} \cup C \cap \overline{A \cap X} = A \cap \overline{C} \cap X \cup C \cap \left(\overline{A} \cup \overline{X}\right) =$$
$$= A \cap \overline{C} \cap X \cup C \cap \overline{X} \cup C \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C \backslash A = \emptyset \Leftrightarrow C \subset A \Rightarrow A \cap \overline{C} \cap X \cup C \cap \overline{X} = \emptyset.$$

Эквивалентная система:

$$\begin{cases} A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup B \cap X = \emptyset, \\ A \cap \overline{C} \cap X \cup C \cap \overline{X} = \emptyset \end{cases}$$

при условиях на данные множества $B \subset A$, $C \subset A$. Объединение уравнений системы:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{X} \cup B \cap X \cup A \cap \overline{C} \cap X \cup C \cap \overline{X} = \emptyset \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(A \cap \overline{B} \cup C\right) \cap \overline{X} \cup \left(A \cap \overline{C} \cup B\right) \cap X = \emptyset.$$

Окончательный вид преобразованной системы:

$$\begin{cases} \left(A \cap \overline{C} \cup B\right) \cap X = \emptyset, \\ \left(A \cap \overline{B} \cup C\right) \cap \overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

Отсюда получаем условия на множество $X$:

$$A \cap \overline{B} \cup C \subset X \subset \overline{A \cap \overline{C} \cup B}.$$

Преобразовав границы включений с учётом условий существования решений, получаем ответ:

$$A \backslash B \cup C \subset X \subset \overline{A} \cup C \backslash B,$$

при $B \subset A$, $C \subset A$, $A \backslash B \cup C \subset \overline{A} \cup C \backslash B$;

б) $C \backslash A \cup B \subset X \subset B \cap C \cup A$ при $A \cap B = \emptyset$, $A \subset C$, $C \backslash A \cup B \subset$ $\subset B \cap C \cup A$;

в) $X \subset \overline{A}$ (т.е. $X$ — любое множество, не пересекающееся с $A$), при $A = B$.

*Указание*: необходимыми условиями существования решений являются $A \subset B$ и $B \subset A$, т.е. $A = B$. При этом система вырождается в тривиальное уравнение;

г) $X = \emptyset$ при $A = B$.

*Указание*: преобразование первого уравнения приводит к тому, что с необходимостью $X = \emptyset$ и $A = B$. Подстановка $X = \emptyset$ во второе уравнение превращает его в тождество;

д) $X = \emptyset$ при $B = \mathbb{U}$ и $C = \emptyset$.

*Указание*: преобразование второго уравнения приводит к $X = \emptyset$ при условии $C \cup B = \mathbb{U}$. Подстановка $X = \emptyset$ в систему даёт приводимые в ответе условия на $B$ и $C$;

е) $B \subset X \subset A \backslash C$ при $B \subset A \backslash C$.

## 1.4. Конституенты

1. а) $A_1^0 = \{P_1\}$, $A_1^1 = \{P_2, P_3\}$, $A_2^0 = \{P_2\}$, $A_2^1 = \{P_1, P_3\}$, $A_3^0 = \{P_3\}$, $A_3^1 = \{P_1, P_2\}$, конституенты: $\emptyset, \{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}$;

б) $A_1^0 = \emptyset$, $A_1^1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $A_2^0 = \{P_1\}$, $A_2^1 =$ $= \{P_2, P_3, P_4\}$, $A_3^0 = \{P_1, P_2\}$, $A_3^1 = \{P_3, P_4\}$, конституенты: $\emptyset$, $\{P_1\}$, $\{P_2\}$, $\{P_3, P_4\}$;

в) конституенты: $\emptyset$, $\mathbb{R}$;

г) конституентами являются действительные числа отрезка $[0;1]$.

*Указание*: докажите, что конституенты являются пересечениями полуинтервалов вида $[r_1;r_2)$, где $r_1$, $r_2$ — рациональные числа из отрезка $[0;1]$. Тогда очевидно, что такие пересечения либо пусты, либо состоят из единственного действительного числа, являющегося пределом левых и правых рациональных концов полуинтервала.

2. а) Нет, так как $A_1^0 \cap A_2^0 = \emptyset$; б) нет, так как $A_1^1 \cap A_2^1 = \emptyset$.

3. Так как множества $A_i^0$, $A_i^1$ $(i = 1, 2, 3)$ — половины куба, получаемые его разрезанием плоскостями, проходящими через центр и параллельными координатным плоскостям, конституентами являются всевозможные пересечения различных не дополнительных друг другу половин куба. Очевидно, что все они не пусты.

4. *Указание*: докажите, что $A_i^0$, $A_i^1$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются половинами куба, полученными его разрезанием $(n-1)$-мерными гиперплоскостями, проходящими через центр и параллельными координатным гиперплоскостям.

5. *Указание*: решите задачу для $n = 2$ или $n = 3$, используя геометрическую интерпретацию, а затем обобщите на случай $n$-мерного гиперпространства (см. указание к задаче *4*).

6. Пусть конституенты $B = A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}$ и $C = A_1^{j_1} \cap \ldots \cap A_n^{j_n}$ не совпадают. Тогда $i_k \neq j_k$, по крайней мере для одного индекса $k \leq n$. Но в таком случае $A_k^{i_k} \cap A_k^{j_k} = A_k^0 \cap A_k^1 = A_k \cap (\mathfrak{I} \backslash A_k) = \emptyset$, следовательно, $B \cap C = \emptyset$.

7. Очевидно, что $A_i^0 \cup A_i^1 = A_i \cup (\mathfrak{I} \backslash A_i) = \mathfrak{I}$. Следовательно, $\left(A_1^0 \cup A_1^1\right) \cap \left(A_2^0 \cup A_2^1\right) \cap \ldots \cap \left(A_n^0 \cup A_n^1\right) = \mathfrak{I}$. Если в левой части последнего равенства раскрыть скобки, то получим объединение всех конституент.

8. Согласно утверждению задачи *7* $\mathfrak{I} = S_1 \cup \ldots \cup S_k$, где $S_1, \ldots, S_k$ — все конституенты, поэтому $A_i = A_i \cap \mathfrak{I} = A_i \cap (S_1 \cup \ldots \cup S_k) = A_i \cap S_1 \cup A_i \cap S_2 \cup \ldots \cup A_i \cap S_k$. Ес-

ли $S_p$ содержит в пересечении $A_i^1$, то

$$A_i \cap S_p = \ldots \cap A_i \cap A_i^1 \cap \ldots = \ldots \cap A_i \cap (\mathfrak{I} \backslash A_i) \cap \ldots = \emptyset.$$

Если же $S_p$ содержит $A_i^0$, то

$$A_i \cap S_p = \ldots \cap A_i \cap A_i^0 \cap \ldots = \ldots \cap A_i^0 \cap \ldots = S_p.$$

Поэтому в объединении $A_i = A_i \cap S_1 \cup A_i \cap S_2 \cup \ldots \cup A_i \cap S_k$ останутся только конституенты, содержащие в пересечении $A_i^0$.

9. Для множеств $A_1, \ldots, A_n$ утверждение задачи очевидно. Поэтому достаточно доказать, что если множества $X$ и $Y$ являются объединениями конечного числа конституент, то и множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ (если они непусты) можно представить в виде объединения конституент. Пусть $X = S_1 \cup \ldots \cup S_k$, $Y = S_1' \cup \ldots \cup S_l'$, где $S_1, \ldots, S_k$, $S_1', \ldots, S_l'$ — конституенты. Тогда

$$X \cup Y = S_1 \cup \ldots \cup S_k \cup S_1' \cup \ldots \cup S_l'.$$

Если среди конституент есть повторяющиеся, то к ним можно применить закон идемпотентности. Стало быть, $X \cup Y$ является объединением различных конституент.

Далее, $X \cap Y = (S_1 \cup \ldots \cup S_k) \cap \left(S_1' \cup \ldots \cup S_l'\right) = \bigcup_{i,j} S_i \cap S_j'$. Если $S_i \neq S_j'$, то $S_i \cap S_j' = \emptyset$ (см. задачу *6*), иначе $S_i \cap S_j' = S_i \cap S_i = S_i$. Отсюда следует, что $X \cap Y$ либо пусто, либо является суммой некоторого числа конституент.

Доказательства для $X \cup Y$ и $X \cap Y$ можно обобщить по индукции на любое конечное число множеств.

Докажем теперь утверждение для разности множеств:

$$X \backslash Y = X \cap (\mathfrak{I} \backslash Y) = X \cap \left(\mathfrak{I} \backslash \left(S_1' \cup \ldots \cup S_l'\right)\right) = \\ = X \cap \left(\mathfrak{I} \backslash S_1'\right) \cap \ldots \cap \left(\mathfrak{I} \backslash S_l'\right).$$

(Здесь использовалось тождество из задачи *3,б* подразд. 1.3.)

Если $S = A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}$ — конституента, то

$$\mathfrak{I} \backslash S = \mathfrak{I} \backslash \left(A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}\right) = \left(\mathfrak{I} \backslash A_1^{i_1}\right) \cup \ldots \cup \left(\mathfrak{I} \backslash A_n^{i_n}\right).$$

(Здесь использовано тождество из задачи *3,в* подразд. 1.3.)

Очевидно, что $\mathfrak{I}\backslash A_i^0 = A_i^1, \mathfrak{I}\backslash A_i^1 = A_i^0$, поэтому $\mathfrak{I}\backslash S$ является объединением конституент. Итак, $X\backslash Y$ — есть пересечение множеств, каждое из которых можно представить в виде объединения конституент, а по доказанному выше оно само есть объединение некоторого числа конституент.

10. Пусть $S = A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}$ — конституента. Равенство

$$A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n} = A_1^{j_1} \cap \ldots \cap A_n^{j_n}$$

справедливо тогда и только тогда, когда $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$. Действительно, допустим, что при некотором $k \leq n$ выполняется условие $i_k \neq j_k$, например, $i_k = 0$, $j_k = 1$. Тогда

$$A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_k^0 \cap \ldots \cap A_n^{i_n} = A_1^{j_1} \cap \ldots \cap A_k^1 \cap \ldots \cap A_n^{j_n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_k^0 \cap \ldots \cap A_n^{i_n} \cap A_k^0 =$$
$$= A_1^{j_1} \cap \ldots \cap A_k^1 \cap \ldots \cap A_n^{j_n} \cap A_k^0 \Leftrightarrow A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_k^0 \cap \ldots \cap A_n^{i_n} =$$
$$= S = A_1^{j_1} \cap \ldots \cap (\mathfrak{I}\backslash A_k) \cap \ldots \cap A_n^{j_n} \cap A_k = \emptyset,$$

что противоречит условию независимости.

Итак, все различные конституенты однозначно представимы в виде

$$S = A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n},$$

значит, их количество равно числу различных упорядоченных двоичных наборов $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$, т.е. $2^n$.

11. а) $\{(0,0,0)\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^0$;

$$\{(1,1,1)\} = \mathfrak{I}\backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (\mathfrak{I}\backslash A_1) \cap (\mathfrak{I}\backslash A_2) \cap (\mathfrak{I}\backslash A_3) =$$
$$= A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^1;$$

б) $B_1$ — пара вершин, лежащих на оси $Ox_1$, поэтому

$$B_1 = A_2 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 \cap \mathfrak{I} = A_2 \cap A_3 \cap (A_1 \cup (\mathfrak{I}\backslash A_1)) =$$
$$= A_2^0 \cap A_3^0 \cap \left(A_1^0 \cup A_1^1\right) = A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^0.$$

Этот же ответ можно получить непосредственно:

$$B_1 = \{(0,0,0)\} \cup \{(1,0,0)\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cup (\mathfrak{I} \backslash A_1) \cap A_2 \cap$$
$$\cap A_3 = A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^0.$$

Аналогично:

$$B_2 = A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^0 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0; B_3 =$$
$$= A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^0 \cup A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^1.$$

Теперь выразим через конституенты $\mathfrak{I} \backslash B_1$:

$$\mathfrak{I} \backslash B_1 = A_2^1 \cup A_3^1 = \left(A_1^0 \cup A_1^1\right) \cap A_2^1 \cap \left(A_3^0 \cup A_3^1\right) \cup \left(A_1^0 \cup A_1^1\right) \cap$$
$$\cap \left(A_2^0 \cup A_2^1\right) \cap A_3^1 = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap$$
$$\cap A_3^1 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap$$
$$\cap A_3^1 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^1 = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap$$
$$\cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^1.$$

Если выписать верхние индексы множеств по конституентам, то нетрудно заметить, что они являются координатами вершин, входящих в $\mathfrak{I} \backslash B_1$ (то же верно и для $B_1$, $B_2$, $B_3$). Поэтому по аналогии можно без вычислений написать ответы для $\mathfrak{I} \backslash B_2$ и $\mathfrak{I} \backslash B_3$:

$$\mathfrak{I} \backslash B_2 = A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap$$
$$\cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^1;$$

$$\mathfrak{I} \backslash B_3 = A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^0 \cap A_3^1 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^1 \cap A_2^1 \cap$$
$$\cap A_3^1 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cup A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^1.$$

Строгие вычисления приводят к тем же результатам.

12. а) Обобщая решение задачи *11*, получаем ответы:

$$\{(0,\dots,0)\} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^0;\ \{(1,\dots,1)\} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^1;$$

$$\left\{\left(0,\dots,0,\underbrace{1}_{i},0,\dots,0\right)\right\} =$$

$$= A_1^0 \cap \ldots \cap A_{i-1}^0 \cap A_i^1 \cap A_{i+1}^0 \cap \ldots \cap A_n^0;$$

б) обобщая решение задачи *11,б* в части, касающейся верхних индексов входящих в конституент множеств, можно сразу написать ответы:

$$B_k = A_1^0 \cap \ldots \cap A_n^0 \cup A_1^0 \cap \ldots \cap A_{k-1}^0 \cap A_k^1 \cap A_{k+1}^0 \cap \ldots \cap A_n^0;$$

$$\mathfrak{I} \backslash B_k = \bigcup A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n},$$

где объединение берётся по всем двоичным наборам $\langle i_1,\dots,i_n\rangle$, за исключением $\langle 0,\dots,0\rangle$ и $\left\langle 0,\dots,0,\underbrace{1}_{k},0,\dots,0\right\rangle$, где $k$ — любое целое число от 1 до $n$.

Рекомендуем получить эти ответы с помощью строгих выкладок без использования геометрической интерпретации.

# 2. Отношения

## 2.1. Декартовы произведения множеств

1. а) $\mathbb{R}^2$ — действительная числовая плоскость, $\mathbb{R}^3$ — действительное числовое пространство;

б) $[a;b]^2 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbb{R},\ a \le x,\ y \le b\}$ — квадрат в плоскости $\mathbb{R}^2$; $[a;b]^3 = \{\langle x,y,z\rangle \mid x,y,z \in \mathbb{R},\ a \le x,\ y,\ z \le b\}$ —куб в пространстве $\mathbb{R}^3$;

г) $[0;1)^2$ — единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$ без двух сторон, не лежащих на осях координат, $[0;1] \times [0;1] \times (0;1)$ — единичный куб в $\mathbb{R}^3$ без верхней и нижней граней.

2. а), б) Не обладает. Опровергающие примеры постройте самостоятельно.

4. $A = \emptyset$ либо $B = \emptyset$, и только в этих случаях.

5. а) Да; б) нет, верно лишь включение $\mathbb{U}^2 \setminus (A \times B) \subset \subset \overline{A \times B}$.

6. Докажем, например, свойство III(1). Предполагается, что $A \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$, иначе тождество очевидно.

Докажем $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$. Пусть $x \in \in A \times (B \cap C)$. Тогда $x$ есть пара $\langle a, b \rangle$, где $a \in A$, $b \in B \cap C$, т.е. $b \in B$ и $b \in C$. Следовательно, пара $x = \langle a, b \rangle$ принадлежит и $A \times B$ (т.е. $a \in A$ и $b \in B$), и $A \times C$ (т.е. $a \in A$ и $b \in C$). Значит, $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Включение доказано.

Докажем включение $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$. Пусть $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Тогда $x \in A \times B$ и $x \in A \times C$ одновременно. Значит, $x = \langle a, b \rangle$, где $a \in A$, $b \in B$ и $b \in C$, следовательно, $a \in A$, $b \in B \cap C$, $x = \langle a, b \rangle \in A \times (B \cap C)$.

Аналогично доказываются остальные свойства.

7. а) *Указание*: примените дважды свойство I(1) или I(2);

б) докажем $(A \cap B) \times (C \cap D) \subset (A \times C) \cap (B \times D)$. Пусть $x = \langle a, b \rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D)$. Тогда $a \in A \cap B$ и $b \in C \cap D$. Отсюда следует, что $\langle a, b \rangle$ принадлежит как $A \times C$ (так как $a \in A$, а $b \in C$), так и $B \times D$ (так как $a \in B$ и $b \in D$), а значит, $x = \langle a, b \rangle \in \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

Аналогично доказывается обратное включение.

8. $nm$.

9. $n_1 \dots n_k$.

## 2.2. Бинарные отношения

1. По определениям получаем:

$$R^{-1} = \{\langle x, x \rangle, \langle z, x \rangle, \langle z, y \rangle, \langle u, y \rangle\}; -R = \{\langle x, u \rangle, \langle y, x \rangle\};$$
$$\delta_R = \{x, y\} = A; \rho_R = \{x, z, u\} = B;$$
$$R(\{x\}) = \{x, z\}; R(\{x, y\}) = \{x, z, u\} = B.$$

5. а) Следует из определений множеств $\delta$ и $\rho$;

б) докажем $\delta_{R \circ S} \subset R^{-1}(\rho_R \cap \delta_S)$. Пусть $x \in \delta_{R \circ S}$. Это значит, что при некотором $y \in C$ верно, что $x\,(R \circ S)\,y$, а это, в свою очередь, означает, что при некотором $z \in B$ $xRz$ и $zSy$. Следовательно, элемент $z$ принадлежит как $\rho_R$ (так как $xRz$), так и $\delta_S$ (так как $zSy$), т.е. $z \in \rho_R \cap \delta_S$. А поскольку $xRz$, $x \in R^{-1}(\rho_R \cap \delta_S)$. Включение доказано.

Докажем теперь $R^{-1}(\rho_R \cap \delta_S) \subset \delta_{R \circ S}$. Пусть $x \in R^{-1}(\rho_R \cap \delta_S)$. Это означает, что при некотором $z \in \rho_R \cap \delta_S$ верно $xRz$ ($R^{-1}(\rho_R \cap \delta_S)$ — прообраз множества $\rho_R \cap \delta_S$ относительно $R$). Так как $z \in \delta_S$, $zSy$ при некотором $y \in C$. Из условий $xRz$ и $zSy$ следует, что $x \in \delta_{R \circ S}$. Включение, а вместе с ним и тождество доказаны;

в) докажем $\rho_{R \circ S} \subset S(\rho_R \cap \delta_S)$. Пусть $y \in \rho_{R \circ S}$. Тогда при некотором $x \in A$ выполняется $x\,(R \circ S)\,y$, следовательно, при некотором $z \in B$ верно, что $xRz$ и $zSy$, откуда следует, что $z \in \rho_R \cap \delta_S$. Значит, поскольку $zSy$, $y \in S(\rho_R \cap \delta_S)$.

Докажем $S(\rho_R \cap \delta_S) \subset \rho_{R \circ S}$. Пусть $y \in S(\rho_R \cap \delta_S)$. Это значит, что при некотором $x \in \rho_R \cap \delta_S$ выполняется $xSy$. Так как $x \in \rho_R$, то при некотором $z \in A$ справедливо $zRx$. Из условий $zRx$ и $xSy$ следует $z\,(R \circ S)\,y$, а это значит, что $y \in \rho_{R \circ S}$;

6. а) Поскольку для любого натурального числа найдутся натуральные делитель и кратное, $\delta_R = \rho_R = \mathbb{N}$, $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ и } y \text{ — делитель } x\}$.

По определению композиции бинарных отношений $R \circ R$ — множество пар натуральных чисел $\langle x, y\rangle$, для которых существует такое $z \in \mathbb{N}$, что $x$ — делитель $z$, а $z$ — делитель $y$. Поэтому

$$R \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ — делитель } y\} = R;$$

Далее, $R \circ R^{-1}$ — множество пар $\langle x, y\rangle$, для которых $x$ и $y$ — делители некоторого $z \in \mathbb{N}$. Поскольку для любых натуральных чисел $x$, $y$ в качестве $z$ можно взять их общее кратное, $R \circ R^{-1} = \mathbb{N}^2$;

Аналогично, $R^{-1} \circ R$ — множество пар $\langle x, y\rangle$, для которых некоторое $z \in \mathbb{N}$ является одновременно делителем $x$ и $y$. В качестве такого $z$ можно взять общий делитель $x$, $y$, поэтому $R^{-1} \circ R = \mathbb{N}^2$;

б) аналогично задаче *а*: $\delta_R = \mathbb{Z}$, $\rho_R = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}$ и $x$ — делитель $y\}$; $R \circ R = R$; $R \circ R^{-1} = \mathbb{Z}^2$, $R^{-1} \circ R = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ (для любых *ненулевых* целых $x$ и $y$ в качестве $z$ можно взять их общее кратное);

в) $\delta_R = \rho_R = [-1; 1]$; $R = R^{-1}$;

$$R \circ R = R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid \exists\, z \in [-1; 1] \text{ такое, что } |x| + |z| = 1,\ |z| + |y| = 1\} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in [-1; 1] \text{ и } |x| = |y|\}$$

(символ $\exists$ означает «существует»);

г) $\delta_R = \rho_R = \mathbb{Z}$; $R = R^{-1}$; $R \circ R = R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \exists\, z \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = z \bmod k$ и $z = y \bmod k\}$.

Так как

$$\begin{cases} x = z \bmod k, \\ z = y \bmod k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = kl, \\ z - y = kt, \end{cases} \Leftrightarrow x - y = k(l + t),$$

где $l$, $t$ — некоторые целые числа, то $x = y \bmod k$. Следовательно,

$$R \circ R = R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = R;$$

д) $\delta_R = \rho_R = \mathbb{R}$; $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}$ и $y \le ax\}$; $R \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid$ существует $z \in \mathbb{R}$ такое, что $x \le az$, $z \le ay\}$.

Имеем

$$\begin{cases} x \le az, \\ z \le ay, \end{cases} \Rightarrow x \le a^2 y.$$

Следовательно, $R \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}$ и $x \le a^2 y\}$.

Далее,

$$R^{-1} \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z \in \mathbb{R} \text{ такое, что } z \le ax,\ z \le ay\} = \mathbb{R}^2$$

(при любых $x$ и $y$ можно взять любое $z \le \min\{ax, ay\}$);

$$R \circ R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z \in \mathbb{R} \text{ такое, что } x \le az,\ y \le az\} = \mathbb{R}^2$$

(при любых $x$ и $y$ можно взять произвольное $z \geq \max\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right\}$ при $a > 0$, $z \leq \min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right\}$ при $a < 0$);

е) $\delta_R = \left[-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\rho_R = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \rho_R,\ y \in \delta_R \text{ и } x \leq \operatorname{tg} y\};$$

$$R \circ R =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z \in \delta_R \cap \rho_R = \delta_R \text{ такое, что } z \leq \operatorname{tg} x,\ y \leq \operatorname{tg} z\} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid x \in \delta_R,\ y \in \rho_R \text{ и } y \leq \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\};$$

$$R^{-1} \circ R =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid \text{существует } z \in \delta_R \text{ такое, что } x \leq \operatorname{tg} z,\ y \leq \operatorname{tg} z\} =$$
$$= \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]^2$$

(при любых $x$ и $y$ можно взять $z \geq \max\{\operatorname{arctg} x, \operatorname{arctg} y\}$);

$$R \circ R^{-1} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid \text{существует } z \in \rho_R \text{ такое, что } z \leq \operatorname{tg} x,\ z \leq \operatorname{tg} y\} =$$
$$= \left[-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)^2$$

(при любых $x$ и $y$ можно взять $z \leq \min\{\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y\}$).

В этой задаче полагается, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$, не определён, если же положить его равным $\pm\infty$, то ответы будут несколько иные;

ж) $\delta_R = \rho_R = [-a; a]$; $R^{-1} = R$;

$$R \circ R = R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} =$$
$$= \left\{\langle x, y\rangle \mid \exists\, z \in [-a; a] \text{ такое, что } x^2 + z^2 = a^2,\ z^2 + y^2 = a^2\right\} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in [-a; a] \text{ и } |x| = |y|\};$$

з) $\delta_R = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, $\rho_R = \mathbb{R}$;

$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \rho_R,\ y \in \delta_R$ и $y^2 - x^2 \geq a^2\}$;

$$R \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid \exists\, z \in \delta_R \cap \rho_R = \delta_R \text{ такое, что } x^2 - z^2 \geq a^2,$$
$$z^2 - y^2 \geq a^2\} = \Big\{\langle x, y\rangle \mid x \in \delta_R,\ y \in \rho_R \text{ и } x^2 - y^2 \geq 2a^2\Big\};$$
$$R^{-1} \circ R =$$
$$= \Big\{\langle x, y\rangle \mid \exists\, z \in \delta_R \text{ такое, что } z^2 - x^2 \geq a^2,\ z^2 - y^2 \geq a^2\Big\} =$$
$$= \rho_R^2 = \mathbb{R}^2;$$
$$R \circ R^{-1} =$$
$$= \Big\{\langle x, y\rangle \mid \exists\, z \in \rho_R \text{ такое, что } x^2 - z^2 \geq a^2,\ y^2 - z^2 \geq a^2\Big\} =$$
$$= \delta_R^2 = ((-\infty; -a] \cup [a; +\infty))^2$$

(при любых таких $x$ и $y$, что $x^2 \geq a^2$, $y^2 \geq a^2$, можно взять $z = 0$);

и) $\delta_R = \rho_R = \mathbb{Z}$; $R^{-1} = R$;

$$R \circ R = R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid \text{существует } z \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x,\ z \text{ и } z,\ y$$
$$\text{одинаковой чётности}\} = R;$$

к) $\delta_R = [0; \infty)$, $\rho_R = \mathbb{R}$;
$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \rho_R,\ y \in \delta_R$ и $y \geq x^2\}$;

$$R \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid \text{существует } z \in \delta_R \cap \rho_R = \delta_R \text{ такое, что } x \geq z^2,$$
$$z \geq y^2\} = \Big\{\langle x, y\rangle \mid x \in \delta_R,\ y \in \rho_R \text{ и } x \geq y^4\Big\};$$
$$R^{-1} \circ R =$$
$$= \Big\{\langle x, y\rangle \mid \text{существует } z \in \delta_R \text{ такое, что } z \geq x^2,\ z \geq y^2\Big\} =$$
$$= \rho_R^2 = \mathbb{R}^2;$$
$$R \circ R^{-1} =$$
$$= \Big\{\langle x, y\rangle \mid \text{существует } z \in \rho_R \text{ такое, что } x \geq z^2,\ y \geq z^2\Big\} =$$
$$= \delta_R^2 = [0; \infty)^2;$$

л) $\delta_R = \rho_R = \{n \in \mathbb{Z} \mid n$ — простое число$\} \cup \{1\}$[2]; $R^{-1} = R$;

$$R \circ R = R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid \exists z \in \delta_R \text{ такое, что } xz \text{ и } zy \text{ простые числа}\} =$$
$$= (\delta_R \setminus \{1\})^2 \cup \{\langle 1, 1\rangle\} \text{ (при любых простых } x,\ y \text{ берётся } z = 1,$$
$$\text{при } x = y = 1\ z \text{ — любое простое число).}$$

*Указание* к задачам *в*, *д*, *е*, *ж*, *з*, *к*: изобразите на координатной плоскости множества точек, принадлежащих данным бинарным отношениям.

7. Свойство I следует из определения обратного бинарного отношения.

Свойство II(1). Докажем $(R \cup S)^{-1} \subset R^{-1} \cup S^{-1}$. Пусть $\langle x, y\rangle \in (R \cup S)^{-1}$. Тогда $\langle y, x\rangle \in R \cup S$, т.е. либо $\langle y, x\rangle \in R$, либо $\langle y, x\rangle \in S$. В первом случае $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, во втором случае $\langle x, y\rangle \in S^{-1}$. Так как обязательно имеет место хотя бы один из случаев, то $\langle x, y\rangle \in R^{-1} \cup S^{-1}$.

Включение $R^{-1} \cup S^{-1} \subset (R \cup S)^{-1}$ доказывается обратной цепочкой рассуждений.

Свойство II(2) доказывается аналогично.

Свойство III. Докажем $-R^{-1} \subset (-R)^{-1}$. Пусть $R \subset A \times B$, $\langle a, b\rangle \in -R^{-1}$. Тогда $\langle b, a\rangle \in B \times A$ и $\langle b, a\rangle \notin R^{-1}$, т. е. $\langle a, b\rangle \notin R$. Итак, $\langle a, b\rangle \in A \times B$ и $\langle a, b\rangle \notin R$, следовательно, $\langle a, b\rangle \in -R$, а $\langle b, a\rangle \in (-R)^{-1}$.

Обратное включение доказывается теми же утверждениями в обратном порядке.

Свойство IV (ассоциативность композиции) следует из определения композиции.

Свойство V. Докажем $(R \circ S)^{-1} \subset S^{-1} \circ R^{-1}$. Пусть $\langle c, a\rangle \in (R \circ S)^{-1}$, т.е. $c\,(R \circ S)^{-1}\,a$. Это означает, что $a\,(R \circ S)\,c$, следовательно, при некотором $b \in B$ верно, что $aRb$ и $bSc$. Это равносильно тому, что $cS^{-1}b$ и $bR^{-1}a$, а значит, по определению композиции $c\left(S^{-1} \circ R^{-1}\right)a$, т.е. $\langle c, a\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

[2] Напомним, что 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Рассуждая в обратном порядке, получим доказательство $S^{-1} \circ R^{-1} \subset (R \circ S)^{-1}$.

Свойство VI. Докажем $(R \circ S)(X) \subset S(R(X))$. Пусть $y \in (R \circ S)(X)$. Это значит, что при некотором $x \in X$ верно $x (R \circ S) y$, что, в свою очередь, равносильно тому, что при некотором $b \in B$ верно, что $xRb$ и $bSy$. Из первого условия следует, что $b \in R(X)$, что вместе со вторым условием даёт $y \in S(R(X))$.

Докажем теперь $S(R(X)) \subset (R \circ S)(X)$. Пусть $y \in S(R(X))$. Это значит, что при некотором $b \in R(X)$ выполняется $bSy$. Условие $b \in R(X)$ означает, что при некотором $x \in X$ верно, что $xRb$. Из $xRb$ и $bSy$ следует, что $x (R \circ S) y$, а так как $x \in X$, то $y \in (R \circ S)(X)$.

Свойство VII(1): докажем $(R \cup S) \circ T \subset R \circ T \cup S \circ T$. Пусть $\langle a, c \rangle \in (R \cup S) \circ T$, т.е. $a ((R \cup S) \circ T) c$. Отсюда следует, что при некотором $b \in B$ верны отношения $a (R \cup S) b$ и $bTc$. Значит, либо $aRb$, либо $aSb$. В первом случае из $aRb$ и $bTc$ следует $a (R \circ T) c$, во втором из $aSb$ и $bTc$ — $a (S \circ T) c$. Так как имеет место хотя бы один из случаев, то $a (R \circ T \cup S \circ T) c$, т.е. $\langle a, c \rangle \in R \circ T \cup S \circ T$.

Докажем $R \circ T \cup S \circ T \subset (R \cup S) \circ T$. Пусть $\langle a, c \rangle \in R \circ T \cup S \circ T$, т. е. $a (R \circ T \cup S \circ T) c$. Это значит, что $a (R \circ T) c$ или $a (S \circ T) c$. В первом случае при некотором $b_1 \in B$ верны отношения $aRb_1$ и $b_1Tc$, во втором — при некотором $b_2 \in B$ верно, что $aSb_2$ и $b_2Tc$. Рассмотрим первый случай. Так как $b_1 \in B$, а $aRb_1$, то $a (R \cup S) b_1$, а из $b_1Tc$ следует $a ((R \cup S) \circ T) c$. Аналогично получается такой же вывод и во втором случае. Итак, $a ((R \cup S) \circ T) c$, т.е. $\langle a, c \rangle \in (R \cup S) \circ T$.

Свойство VII(2) доказывается аналогично.

9. Нет. Опровергающие примеры постройте самостоятельно.

10. $2^{mn}$.

*Указание*: бинарное отношение есть подмножество $A \times B$. Воспользуйтесь результатами задач *8* подразд. 2.1 и *5* подразд. 1.1.

## 2.3. Функции

1. а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет.

2. а) Не инъекция, сюръекция, не биекция; б) да; в) не инъекция, сюръекция, не биекция; г) да; д) нет; е) нет.

3. Если $f$ является инъекцией из $A$ в $\rho_f$. Докажем это. Пусть $f$ — инъекция. Это значит, что из условий $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_1 = y_2$ следует $x_1 = x_2$. А это и есть определение функции $f^{-1}$.

4. Так как $f$ — взаимнооднозначное соответствие между $A$ и $B$, то $\delta_f = A$, $\rho_f = B$, значит, $\delta_{f^{-1}} = B$, $\rho_{f^{-1}} = A$ (см. задачу *5,а* подразд. 2.2). Так как $f$ по определению инъекция, то $f^{-1}$ — функция из $A$ на $B$ (результат задачи *3*), т.е. сюръекция. Осталось доказать, что $f^{-1}$ — инъекция. Пусть $b_1$, $b_2 \in \delta_{f^{-1}} = \rho_f = B$, $b_1 \neq b_2$. Тогда при некоторых $a_1$, $a_2 \in \delta_f = \rho_{f^{-1}} = A$ верны равенства $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, причём $a_1 \neq a_2$ (в силу того, что $f$ — функция). Тогда $a_1 = f^{-1}(b_1)$, $a_2 = f^{-1}(b_2)$, $a_1 \neq a_2$. А это значит, что $f^{-1}$ — инъекция.

5. Следует из результата задачи *4* при $B = A$.

6. Пусть $a \in A$, $c_1$, $c_2$ — элементы $C$, удовлетворяющие условиям $a\,(f \circ g)\,c_1$ и $a\,(f \circ g)\,c_2$. Нужно доказать, что $c_1 = c_2$. Из условия $a\,(f \circ g)\,c_1$ следует, что при некотором $b_1 \in \rho_f$ верно, что $afb_1$ и $b_1gc_1$. Аналогично, при некотором $b_2 \in \rho_f$ верно, что $afb_2$ и $b_2gc_1$. Поскольку $f$ — функция, $b_1 = b_2$, а так как $g$ — функция и $\rho_f \subset B$, то $c_1 = c_2$.

7. а) Из задач *4* и *6* следует, что $f^{-1} \circ f : B \to B$ — функция. Так как $f : A \to B$ и $f^{-1} : B \to A$ — взаимнооднозначные соответствия, то $\delta_{f^{-1}} = \rho_f = B$, $\rho_{f^{-1}} = \delta_f = A$, поэтому $\delta_{f^{-1} \circ f} = \rho_{f^{-1} \circ f} = B$, следовательно, $f^{-1} \circ f$ — сюръекция из $B$ на $B$. Остаётся доказать, что $f^{-1} \circ f$ — инъекция. Пусть $b_1$, $b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, $c_1 = \left(f^{-1} \circ f\right)(b_1)$, $c_2 = \left(f^{-1} \circ f\right)(b_2)$. Это означает, что при некотором $a_1 \in A$ верны равенства $a_1 = f^{-1}(b_1)$, $c_1 = f\,(a_1)$, а при некотором $a_2 \in A$ — равенства $a_2 = f^{-1}(b_2)$,

$c_2 = f(a_2)$. При этом $a_1 \neq a_2$ (так как $f^{-1}$ — инъекция), а значит, и $c_1 \neq c_2$ (так как $f$ — инъекция);

б) доказывается аналогично *а*.

8. а) Инъекция из $A$ в $B$ — функция, при которой каждому элементу $A$ ставится в соответствие ровно один элемент $B$, при этом разным элементам $A$ соответствуют разные элементы $B$. Поэтому каждую инъекцию можно зашифровать как последовательность $n$ различных чисел, каждое из которых может принимать любое значение от 1 до $m$. При этом порядковый номер числа в последовательности равен номеру элемента множества $A$ (от 1 до $n$), а число, стоящее под этим номером, равно номеру элемента множества $B$ (от 1 до $m$), соответствующего этому элементу $A$ при данной инъекции. Понятно, что каждой такой последовательности соответствует одна и только одна инъекция. Подсчитаем число таких последовательностей. На первом месте может стоять любое из $m$ чисел ($m$ вариантов), на втором — любое из $m$, кроме числа на первом месте ($m-1$ вариантов), на третьем — любое из $m-2$ чисел и т.д. На последнем, $m$-м, месте может стоять любое из $m-n+1$ чисел. Так как все эти выборы комбинируются друг с другом, то число всевозможных комбинаций, т.е. последовательностей, равно $m(m-1)\ldots(m-n+1)$. Ясно, что при этом должно быть $m \geq n$, иначе элементам $A$ не хватит элементов $B$ при инъекции;

б) из полученного в задаче *а* результата следует, что для существования взаимнооднозначного соответствия между множествами $A$ и $B$ должны одновременно выполняться условия $m \geq n$ (существуют инъекции из $A$ в $B$) и $n \geq m$ (существуют инъекции из $B$ в $A$). Значит, $m = n$, и количество взаимнооднозначных соответствий равно $n(n-1)\ldots 1 = n!$;

в) $n!$.

9. Докажем свойство I.

Сначала докажем $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Пусть $y \in f(A \cup B)$. Это значит, что при некотором $x \in A \cup B$ верно равенство $y = f(x)$. Если $x \in A$, то $y \in f(A)$, если же $x \in B$, то

$y \in f(B)$. Так как имеет место хотя бы один из этих случаев, $y \in f(A) \cup f(B)$. Докажем включение $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Пусть $y \in f(A) \cup f(B)$. Если $y \in f(A)$, то при некотором $x_1 \in A$ верно равенство $y = f(x_1)$, если $y \in f(B)$, то при некотором $x_2 \in B$ верно $y = f(x_2)$. Пусть, для определённости, имеет место первый случай. Тогда, очевидно, что $x_1 \in A \cup B$ и $y \in f(A \cup B)$.

Аналогично доказываются свойства II, III.

Докажем свойство IV.

Доказательство $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Пусть $x \in$ $\in f^{-1}(A \cup B)$. Следовательно, $y = f(x) \in A \cup B$. Если $y \in A$, то $x \in f^{-1}(A)$, если $y \in B$, то $x \in f^{-1}(B)$. Так как имеет место хотя бы один из случаев, $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Докажем $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Пусть $x \in$ $\in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Если $x \in f^{-1}(A)$, то $y = f(x) \in A$, если $x \in f^{-1}(B)$, то $y = f(x) \in B$. Так как имеет место хотя бы один из случаев, $y \in A \cup B$. Это значит, что $x = f^{-1}(y) \in f^{-1}(A \cup B)$.

Аналогично доказываются свойства V, VI.

11. Пусть в свойстве II $f$ является инъекцией. Докажем при этом условии включение $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Пусть $y \in f(A) \cap f(B)$. Так как $y \in f(A)$, при некотором $x_1 \in A$ верно, что $y = f(x_1)$, так как одновременно $y \in f(B)$, при некотором $x_2 \in B$ верно, что $y = f(x_2)$, а так как $f$ — инъекция, то $x_1 = x_2 = x$. Следовательно, $x \in A \cap B$ и $y = f(x) \in f(A \cap B)$.

Аналогично доказывается обратное включение в свойстве III.

## 2.4. Специальные бинарные отношения

1. а) Рефлексивно, не иррефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, транзитивно;

б) не рефлексивно, не иррефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно;

в) не рефлексивно, не иррефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно;

г) не рефлексивно, иррефлексивно, не симметрично, антисимметрично, не транзитивно.

2. а) Нет; б, в) да; г) да, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$; д, е) да; ж) да, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$.

3. Пусть $R \subset A^2$ симметрично и антисимметрично. Возьмём произвольную пару $\langle a, b\rangle$ из $R$. Так как $R$ симметрично, $\langle b, a\rangle \in R$, а поскольку $R$ антисимметрично, $a = b$. Значит, все пары из $R$ имеют вид $\langle a, a\rangle$. Очевидно, что такое бинарное отношение транзитивно.

Обратное неверно.

4. Симметричность бинарного отношения $R$, по определению, эквивалентна условию $R = R^{-1}$. Поэтому симметричность $R \circ S$ эквивалентна $R \circ S = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. (Здесь использовалось свойство V бинарных отношений (см. подразд. 2.2).) А поскольку $R$ и $S$ симметричны, последнее равенство эквивалентно $R \circ S = S \circ R$.

5. Пусть $R$ транзитивно и $a\,(R \circ R)\,b$. Тогда при некотором $c \in A$ верны отношения $aRc$ и $cRb$, и в силу транзитивности $R$ справедливо отношение $aRb$, из чего следует $R \circ R \subset R$. Пусть теперь $R \circ R \subset R$. Докажем, что $R$ транзитивно. Возьмём такие произвольные $a$, $b$, $c$ из $A$, что $aRb$ и $bRc$. Это значит, что $a\,(R \circ R)\,c$. Тогда, в силу $R \circ R \subset R$ верно и $aRc$, что доказывает транзитивность $R$.

6. а) Рефлексивно, не иррефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно, эквивалентность;

б) рефлексивно, не иррефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно, эквивалентность;

в) не рефлексивно, иррефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно, не эквивалентность;

г) рефлексивно, не иррефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно, не эквивалентность;

д) так как $x - x = 0$ — рациональное число для всех $x \in \mathbb{R}$, верно отношение $xRx$, поэтому $R$ рефлексивно. Иррефлексивным, стало быть, оно не является. Поскольку, если $x - y$ —

рациональное число, то и $y - x$ — также рациональное число, $R$ симметрично. Очевидно, что если $x - y$ рационально, то не обязательно $x = y$, поэтому $R$ не антисимметрично.

Пусть $xRy$ и $yRz$, т.е.

$$\begin{cases} x - y = r_1, \\ y - z = r_2, \end{cases}$$

где $r_1$, $r_2$ — рациональные числа. Отсюда следует, что $x - z = r_1 + r_2$. Сумма рациональных чисел всегда рациональна, поэтому $x - z$ рационально, $xRz$, значит, $R$ транзитивно.

Так как $R$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, оно является эквивалентностью;

е) так как $x - x = 0$ делится на $k$ при любом $x$, $xRx$ при любом целом $x$, $R$ рефлексивно и не иррефлексивно. Далее, если $x - y$ делится на $k$, то и $y - x$ делится на $k$, поэтому $R$ симметрично. Из того, что $x - y$ делится на $k$, не следует с необходимостью, что $x = y$, поэтому $R$ не антисимметрично.

Пусть $xRy$ и $yRz$, т.е.

$$\begin{cases} x - y = k\,n_1, \\ y - z = k\,n_2, \end{cases}$$

где $n_1$, $n_2$ — целые числа. Отсюда следует, что $x - z = k\,(n_1 + n_2)$, т.е. $x - z$ кратно $k$, $xRz$, значит, $R$ транзитивно.

Следовательно, $R$ является эквивалентностью;

ж, з) рефлексивно, не иррефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно, эквивалентность.

7. а) Рефлексивно, не иррефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно, эквивалентность;

б) не рефлексивно, иррефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно, не эквивалентность.

8. а) Не рефлексивно, не иррефлексивно, так как нулевой вектор перпендикулярен самому себе, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно, не эквивалентность;

б, в) рефлексивно, не иррефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно, эквивалентность.

9. а, б) да;

в) нет, так как не каждый треугольник симметричен самому себе относительно некоторой оси, т.е. $R$ не рефлексивно.

10. Нужно доказать, что любой элемент $a \in A$ попадает в какой-либо класс эквивалентности, и что любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.

Так как $R$ рефлексивно, для любого $a \in A$ выполняется $aRa$, значит, $a \in a/R$ (любой элемент попадает в свой класс эквивалентности). Пусть теперь $a$, $b \in A$, $a \in b/R$ (т.е. $aRb$). Докажем, что $a/R$ и $b/R$ совпадают. Пусть $x \in a/R$. Это значит, что $xRa$. Поскольку $R$ — эквивалентность, из $xRa$ и $aRb$ следует $xRb$, т.е. $x \in b/R$. Таким образом, доказано, что $a/R \subset b/R$. Точно так же доказывается, что $b/R \subset a/R$. Теперь докажем, что в случае $a \notin b/R$ классы $a/R$ и $b/R$ не пересекаются. Предположим, что $a/R \cap b/R \neq \emptyset$, т.е. существует элемент $x \in a/R \cap b/R$. Тогда верны отношения $xRa$ и $xRb$, откуда в силу симметричности и транзитивности $R$ следует $aRb$, что противоречит условию $a \notin b/R$.

13. а) Является. Фактор-множество состоит из двух классов эквивалентности: множества чётных и множества нечётных целых чисел;

б) является. Классы эквивалентности — направления (прямые) на плоскости. Каждый такой класс содержит все векторы, параллельные некоторой прямой;

в) не является. Пары $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 0, -1\rangle$ принадлежат $R$, а пара $\langle 1, -1\rangle$ не принадлежит, поэтому $R$ не транзитивно;

г) является. Классов эквивалентности два: множество положительных и множество отрицательных действительных чисел;

д) не является.

14. Пусть $R \subset A^2$ — эквивалентность. Тогда $R^{-1} \subset A^2$. Так как $R$ рефлексивно, для любого $x \in A$ верно, что $xRx$, значит, $xR^{-1}x$, т.е. $R^{-1}$ также рефлексивно. Так как $R$ симметрично, из

$xRy$ следует $yRx$, а это означает, что из $yR^{-1}x$ следует $xR^{-1}y$, т.е. $R^{-1}$ также симметрично. Наконец, пусть $xR^{-1}z$ и $zR^{-1}y$. Это означает, что $zRx$ и $yRz$. В силу транзитивности $R$ отсюда следует, что $yRx$, т.е. $xR^{-1}y$. Следовательно, $R^{-1}$ транзитивно, стало быть, является эквивалентностью.

Нетрудно убедиться, что фактор-множества по $R$ и $R^{-1}$ совпадают.

15. Необходимость следует из результата задачи *4*. Докажем достаточность. Пусть $R$, $S$ — эквивалентности, $R \circ S = S \circ R$. Докажем, что $R \circ S$ — эквивалентность. Рефлексивность очевидна. Симметричность доказана в задаче *4*. Остаётся доказать транзитивность. Используя свойства бинарных отношений, преобразуем следующую композицию:

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) = R \circ (S \circ R) \circ S = R \circ (R \circ S) \circ S = (R \circ R) \circ (S \circ S)\,.$$

Так как $R$, $S$ транзитивны, из результата задачи *5* следует, что $R \circ R \subset R$, $S \circ S \subset S$, поэтому

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ (S \circ S) \subset R \circ S.$$

Из задачи *4* также следует, что $R \circ S$ транзитивно. (Здесь мы воспользовались утверждением: если $R$, $R_1 \subset A \times B$, $S$, $S_1 \subset B \times C$ — бинарные отношения и $R \subset R_1$, $S \subset S_1$, то $R \circ S \subset R_1 \circ S_1$. Докажите это самостоятельно.)

16. Тождественная подстановка $I_A$ множества $A$ (см. задачу *7* подразд. 2.3) является биекцией множества на само себя. Поэтому для любого множества $A$ верно, что $\langle A, A \rangle \in R$, т.е. $R$ рефлексивно. Далее, если $S$ — биекция $A$ на $B$, то $S^{-1}$ — биекция $B$ на $A$ (см. задачу *4* подразд. 2.3), значит, $R$ симметрично. Наконец, если $S$ — взаимнооднозначное соответствие между $A$ и $B$, $T$ — взаимнооднозначное соответствие между $B$ и $C$, то $S \circ T$ — биекция $A$ на $C$ (докажите это самостоятельно). Следовательно, $R$ транзитивно.

Классами эквивалентности $\Omega/R$ по $R$ являются классы множеств, между которыми можно установить взаимнооднозначные соответствия. Такие множества называются равномощными. Подробнее об этом в подразд. 3.1.

## 2.5. Отношения порядка

1. а) Предпорядок, не частичный порядок; б) не предпорядок; в) предпорядок, частичный порядок; г) предпорядок, не частичный порядок.

2. а, б, в) Частичный порядок, линейный порядок;

г) частичный порядок, не линейный порядок. Если, например, $A$ и $B$ не пересекаются, то ни $\langle A, B\rangle$, ни $\langle B, A\rangle$ не принадлежат $R$;

д) частичный порядок, не линейный порядок.

3. Бинарное отношение

$$R =$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid x,\ y \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ x < \mathrm{Re}\ y \text{ или } \mathrm{Re}\ x = \mathrm{Re}\ y,\ \mathrm{Im}\ x \le \mathrm{Im}\ y\}$$

задаёт на $\mathbb{C}$ линейный порядок.

4. Пусть $\le$ — частичный порядок, т.е. бинарное отношение $\le$ рефлексивно, транзитивно, антисимметрично. В решении задачи *14* подразд. 2.4 показано, что из рефлексивности и транзитивности $\le$ следуют рефлексивность и транзитивность $\le^{-1}$.

Докажем антисимметричность $\le^{-1}=\ge$. Пусть $x \ge y$ и $y \ge x$. Это значит, что $y \le x$ и $x \le y$. Из антисимметричности $\le$ следует, что $x = y$.

5. Докажем утверждение для наибольшего элемента. Пусть на множестве $A$ задан частичный порядок $\le$. Предположим, что в $A$ существуют два наибольших элемента $a$ и $b$. Тогда для любого элемента $x$ из $A$ $x \le a$, $x \le b$. Так как $a$ и $b$ принадлежат $A$, $b \le a$ и $a \le b$. В силу антисимметричности $\le$ отсюда следует, что $a = b$.

Доказательство единственности наименьшего элемента аналогично.

6. Докажем утверждение для наибольшего элемента. Пусть $a \in A$ — наибольший элемент частично упорядоченного отношением $\le$ множества $A$. Пусть существует такой элемент

$x \in A$, что $a \leq x$. Так как $a$ — наибольший элемент $A$, $x \leq a$. А значит, в силу антисимметричности $\leq$ отсюда следует $a = x$. Следовательно, $a$ — максимальный элемент $A$.

Предположим теперь, что, кроме наибольшего элемента $a$ (единственного, как следует из задачи *5*), существует другой максимальный элемент $b$. Тогда $b \leq a$ в силу того, что $a$ — наибольший элемент, а так как $b$ — максимальный элемент, $b = a$.

Обратное утверждение в общем случае неверно, т.е. максимальный или минимальный элемент может не быть наибольшим (соответственно, наименьшим). Например, пусть множество $A$ тривиально упорядочено отношением равенства, т.е. $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a = b$. В этом случае каждый элемент множества является как максимальным, так и минимальным , но не наибольшим и не наименьшим.

7. Пусть $\leq$ — линейный порядок на $A$. Приведём решение задачи для наибольшего и максимального элементов. То, что наибольший элемент $A$ является максимальным, доказано в задаче *6* (причём для этого достаточно частичного упорядочения).

Пусть $a$ — максимальный элемент $A$. Докажем, что он является наибольшим. В силу линейности порядка для всех $x \in A$ либо $x \leq a$, либо $a \leq x$. Во втором случае $a = x$, так как $a$ — максимальный элемент. Следовательно, для всех $x \in A$ $x \leq a$, т.е. $a$ — наибольший элемент $A$.

8. а) Наибольший, максимальный элементы, точная верхняя грань равны 1;

б) ни наибольшего, ни максимального элементов в $B$ нет, точная верхняя грань $B$ равна 1;

в) ни наибольшего, ни максимального элементов в $B$ нет, точная верхняя грань $B$ равна 0.

10. а) Да; б) нет. Множество отрицательных целых чисел не имеет наименьшего элемента; в) нет; г) нет. Множество $\left\{x \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ не имеет наименьшего элемента.

# 3. Кардинальные числа

## 3.1. Эквивалентность и мощность множеств

1. е) Счётно-бесконечно. Чтобы показать это, занумеруем элементы $\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & 5, & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots
\end{array}
$$

Очевидно, что каждое целое число получит неотрицательный целый номер, поэтому $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}_0$;

ж) счётно-бесконечно. Чтобы показать это, занумеруем все рациональные числа следующим образом:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & & & & & \\
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{-1} \arrow[dl] & \frac{1}{2} \arrow[r] & \frac{1}{-2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{-3} \arrow[dl] & \frac{1}{4} \arrow[r] & \frac{1}{-4} \cdots \arrow[dl] \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{-1} \arrow[ur] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{2}{-2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{-3} \arrow[ur] & \frac{2}{4} \arrow[dl] & \frac{2}{-4} \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{-1} \arrow[dl] & \frac{3}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{-2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{-3} \arrow[dl] & \frac{3}{4} \arrow[ur] & \cdots \\
\frac{4}{1} \arrow[d] & \frac{4}{-1} \arrow[ur] & \frac{4}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{-2} \arrow[ur] & \frac{4}{3} \arrow[dl] & \frac{4}{-3} \arrow[ur] & \cdots & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Очевидно, что в этом пересчёте некоторые числа будут повторяться. Их нужно исключить. Понятно, что таким образом каждое рациональное число получит свой неотрицательный целый номер, т.е. будет установлено взаимнооднозначное соответствие между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}_0$.

3. а) Функция $y = a + (b - a)\,x$ является взаимнооднозначным соответствием между $[0;1]$ и $[a;b]$;

б) функция $z = -\frac{\pi}{2} + \pi t$ является взаимнооднозначным соответствием между $(0;1)$ и $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а $y = \operatorname{tg} z$ — между $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $\mathbb{R}$. Таким образом, $y = \operatorname{tg}\,\left(-\frac{\pi}{2} + \pi t\right)$ — взаимнооднозначное соответствие между $(0;1)$ и $\mathbb{R}$;

в) функция $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ — взаимнооднозначное соответствие между $[0;1)$ и $[0;\infty)$.

4. Пусть $f$ — функция из $A$ на $B$. Для каждого $b$ из $B$ выберем по одному элементу из множества $f^{-1}(\{b\})$ (которое, очевидно, непусто для любого $b$, поскольку $f$ — сюръекция).Обозначим его $a_b$. Тогда функция $g(b) = a_b$ есть взаимнооднозначное соответствие между $B$ и множеством $\Delta \subset A$, составленным из элементов $a_b$.

5. а) Поставив паре $\langle a,b\rangle \in A \times B$ в соответствие пару $\langle b,a\rangle \in B \times A$, получим биекцию $A \times B$ на $B \times A$;

б) поставив в соответствие паре $\langle a,\langle b,c\rangle\rangle \in A \times (B \times C)$ взаимнооднозначным образом пару $\langle\langle a,b\rangle, c\rangle \in (A \times B) \times C$, получим биекцию $A \times (B \times C)$ на $(A \times B) \times C$;

в) поставим в соответствие элементу $b$ из $A$ пару $\langle b,a\rangle$;

г) поставим в соответствие паре $\langle a,c\rangle \in A \times C$ пару $\langle b,d\rangle \in B \times D$;

д) поставим в соответствие элементу $b$ из $A$ пару $\langle a,b\rangle$, которая, очевидно, является функцией из $\{a\}$ в $A$;

е) множество $\{a\}^A$ состоит из единственного элемента: функции, определённой на $A$ и принимающей постоянное значение $\{a\}$;

ж) пусть $f \in A^C$, т.е. $f$ — функция, определённая на $C$ и принимающая значения в $A$, $g : A \to B$, $h : D \to C$ — биекции, существующие согласно условию. Поставим в соответствие $f$

отображение $t = h \circ f \circ g$. Из результата задачи *6* подразд. 2.3 следует, что оно является функцией из $D$ в $B$, т. е. принадлежит $B^D$. Очевидно, что по отображению $t$ отображение $f = h^{-1} \circ t \circ g^{-1}$ определяется взаимнооднозначно, т.е. построенное соответствие является биекцией;

з) поставим функции $f \in X^{A \cup B}$ в соответствие упорядоченную пару $\langle f|_A, f|_B \rangle$, где $f|_A$, $f|_B$ — сужения функции $f$ на множества $A$ и $B$ соответственно, например, $f|_A = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ и } y = f(x)\}$. Аналогично определяется $f|_B$. Понятно, что $f|_A \in X^A$, $f|_B \in X^B$, значит, $\langle f|_A, f|_B \rangle \in X^A \times X^B$. Очевидно, что по функции $f$ пара $\langle f|_A, f|_B \rangle$ определяется однозначно. Обратно, по паре $\langle f|_A, f|_B \rangle$, где $f|_A \in X^A$, $f|_B \in X^B$, можно построить отображение $f$ множества $A \cup B$ в $X$, например, объединив $f|_A$ и $f|_B$. Поскольку $A \cap B = \emptyset$, такое отображение будет функцией из $A \cup B$ в $X$ (т.е. $f \in X^{A \cup B}$) и определится однозначно. Таким образом, сопоставление $f \in X^{A \cup B}$ пары $\langle f|_A, f|_B \rangle$ взаимнооднозначно, значит, эти множества равномощны;

и) если $f \in (A \times B)^C$, то $f(x)$ для каждого $x \in C$ является упорядоченной парой $\langle g(x), h(x) \rangle$, где $g$, $h$ — отображения $C$ в $A$ и $B$ соответственно, $g(x) \in A$, $h(x) \in B$, причём $f(x)$ определяется однозначно. Отсюда следует, что $g \in A^C$, $h \in B^C$, а $\langle g, h \rangle \in A^C \times B^C$. Обратно, паре $\langle g, h \rangle \in A^C \times B^C$ поставим в соответствие отображение $f$ по правилу: для каждого $x \in C$ значение $f(x)$ есть пара $\langle g(x), h(x) \rangle$, где $g(x)$ и $h(x)$ — значения функций $g$ и $h$ при данном $x$. Очевидно, что $f$ является функцией $C$ в $A \times B$ (т.е. $f \in (A \times B)^C$) и определяется однозначно. Следовательно, данное сопоставление взаимнооднозначно, значит, множества $(A \times B)^C$ и $A^C \times B^C$ равномощны;

к) пусть $f \in X^{A \times B}$. Это значит, что $f$ — функция двух аргументов $a$ и $b$, пробегающих множества $A$ и $B$ соответственно, со значениями в $X$. Для каждого фиксированного $b \in B$ определим функцию $g_b$ одного аргумента $a$ по формуле $g_b(a) = f(a, b)$. Ясно, что $g_b \in X^A$. Теперь поставим в соответствие функции $f$ отображение $F$, определяемое равенством $F(b) = g_b$. Оно сопоставляет каждый элемент $b \in B$ и функцию $g_b \in X^A$, т.е. $F \in \left(X^A\right)^B$. Обратно, каждой функции $F \in \left(X^A\right)^B$ поставим в соответствие функцию $f \in X^{A\times B}$ по формуле $f(a,b) = g_b(a)$, где $g_b = F(b)$. Покажем, что такое сопоставление взаимнооднозначно. Если $f_1$ и $f_2$ — две различные функции из множества $X^{A\times B}$, то и соответствующие им функции $F_1$ и $F_2$ также различны. Это следует из того, что если $f_1(a_0,b_0) \neq f_2(a_0,b_0)$, то элементы $F_1(b_0)$ и $F_2(b_0)$ множества $X^A$ различны (эти функции отличаются по крайней мере при $a = a_0$). Таким образом, установлено взаимнооднозначное соответствие между множествами $X^{A\times B}$ и $\left(X^A\right)^B$, что и доказывает их эквивалентность.

6. а) Пусть элементы множеств $A$ и $B$ занумерованы следующим образом: $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$. Тогда элементы $A \cup B$ можно занумеровать так:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_0, & b_0, & a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & b_3, & a_4, & b_4, & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots
\end{array}$$

Если некоторые $a_i$ и $b_j$ совпадают ($A \cap B$ может быть непустым), то повторяющиеся элементы следует исключить из нумерации. Очевидно, что тогда каждый элемент $A \cup B$ получит неотрицательный целый номер;

б) пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$. Тогда $A \times B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} A \times \{b_i\}$. В решении задачи *5,в* было доказано, что $A \times \{b_i\} \sim A$, поэтому из утверждения задачи *7* следует, что $A \times B$ счётно.

7. Без потери общности можно считать, что число множеств бесконечно, и среди них нет ни одного конечного. Пусть $A_0 = \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots\}$, $A_1 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \ldots\}$, $\ldots$ . Занумеру-

ем элементы $A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
a_{00} \arrow[r] & a_{01} \arrow[dl] & a_{02} \arrow[r] & a_{03} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{10} \arrow[d] & a_{11} \arrow[ur] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[ur] & \cdots \\
a_{20} \arrow[ur] & a_{21} \arrow[dl] & a_{22} \arrow[ur] & \cdots & \cdots \\
a_{30} \arrow[d] & a_{31} \arrow[ur] & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Некоторые элементы в этом пересчёте могут повторяться (множества $A_0$, $A_1, \ldots$ могут попарно пересекаться). Их нужно исключать. Очевидно, что таким образом можно перенумеровать все элементы объединения и чисел в $\mathbb{N}_0$ хватит для этой нумерации. Следовательно, установлено взаимнооднозначное соответствие между $A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ и $\mathbb{N}_0$.

8. Очевидно, что достаточно доказать утверждение для $\mathbb{N}_0$. Пусть $I$ — бесконечное подмножество $\mathbb{N}_0$ (если $I$ конечно, то утверждение тривиально). Построим взаимнооднозначное соответствие $f$ между $\mathbb{N}_0$ и $I$. Возьмём в качестве $f(0)$ наименьший элемент $I$ (таковой существует в силу полной упорядоченности $\mathbb{N}_0$). Множество $I \setminus \{f(0)\}$ бесконечно, иначе множество $(I \setminus \{f(0)\}) \cup \{f(0)\} = I$ было бы конечным (см. задачу *2,б*). Возьмём в качестве $f(1)$ наименьший элемент $I \setminus \{f(0)\}$, в качестве $f(2)$ — наименьший элемент $I \setminus \{f(0), f(1)\}$ (которое опять же будет бесконечным) и т. д. Получим нужную биекцию $f$.

9. Пусть множество $A$ бесконечно. Выберем в $A$ произвольный элемент $a_0$. Множество $A \setminus \{a_0\}$ также бесконечно (см. задачу *8*). Выберем в $A \setminus \{a_0\}$ произвольный элемент $a_1$. Множество $A \setminus \{a_0, a_1\}$ также будет бесконечным. Продолжая этот процесс, можно составить множество $a_0, a_1, a_2, \ldots$, которое и

будет счётным (точнее, счётно-бесконечным) подмножеством $A$.

10. а) Множество $A \backslash B \subset A$ счётно в силу утверждения задачи *8*. Конечным оно быть не может, так как иначе множество $(A \backslash B) \cup B = A$ было бы конечным в силу утверждения задачи *2,б*. Поэтому $A \backslash B$ счётно-бесконечно;

б) пусть $A_1$ — счётно-бесконечное подмножество $A$, существующее в силу утверждения задачи *9*. Так как $A \cup B = (A \backslash A_1) \cup (A_1 \cup B)$ (докажите это), а $A_1 \cup B \sim A_1$ (следует из задачи *6,а*), то $A \cup B \sim (A \backslash A_1) \cup A_1 = A$;

в) докажем, что $A \backslash B$ бесконечно. Действительно, если предположить противное, то в силу утверждения задачи *6,а* $(A \backslash B) \cup B = A$ счётно. Итак, $A \backslash B$ бесконечно, $B$ счётно, значит, $A = (A \backslash B) \cup B \sim A \backslash B$ в силу утверждения задачи *6*.

11. Предположим, что существует биекция $f$ конечного множества $A$ на собственное подмножество, т.е. $f(A) \subset A$ и $f(A) \neq A$. Пусть $a \in A \backslash f(A)$. Построим последовательность: $a_0 = a, a_{i+1} = f(a_i), i \in \mathbb{N}_0$. Тогда $a_0 \notin f(A)$, $a_1 = f(a_0) \in f(A)$, поэтому $a_1 \neq a_0$. Покажем, что $a_1 \notin f(f(A))$. Действительно, если предположить, что $a_1 \in f(f(A))$, то поскольку $a_1 = f(a)$, имеем $a \in f(A)$, что противоречит условию выбора $a$. Значит, $a_1 \notin f(f(A))$. А так как $a_2 = f(a_1) = f(f(a)) \in f(f(A))$, то $a_2 \neq a_1$. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что $a_i \notin f(f(\ldots f(A)\ldots))$ $(i+1$ раз) (иначе, переходя в обратном порядке к аргументам функции $f$, мы бы получили в конце концов, что $a \in f(A)$), но $a_{i+1} \in f(f(\ldots f(A)\ldots))$ $(i+1$ раз), поэтому $a_{i+1} \neq a_i$. Следовательно, все элементы в последовательности $\{a_0, a_1, \ldots\}$ различны, т. е. она бесконечна и содержится в $A$, что невозможно.

12. Докажем необходимость. Пусть $A$ бесконечно, $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ — его счётно-бесконечное подмножество, существующее в силу утверждения задачи *9*. Тогда $A = (A \backslash B) \cup B$, $B \sim B \backslash \{b_0\}$ (следует из утверждения задачи *10,а*), следовательно,

$$A = (A \backslash B) \cup B \sim (A \backslash B) \cup (B \backslash \{b_0\}) = A \backslash \{b_0\}.$$

(Докажите самостоятельно последнее равенство.)

Достаточность следует из утверждения задачи *11*.

13. Предположим, что имеется некоторый пересчёт всех чисел из $[0;1]$, т.е. бесконечных десятичных дробей вида $0,a_1a_2a_3\ldots$, где $a_i$ — десятичные знаки, $i \in \mathbb{N}$, если дробь конечна, то справа от последнего ненулевого знака добавляется бесконечный ряд нулей. Построим число $\alpha$ по правилу: на $i$-м месте после запятой ставим 1, если у числа с $i$-м номером в имеющемся пересчёте на $i$-м месте после запятой стоит не 1, и 2, если у этого числа на $i$-м месте после запятой стоит 1. Очевидно, что построенное число $\alpha$ будет отличаться от числа под номером $i$ в данном пересчёте $i$-м знаком после запятой, т.е. $\alpha \in [0;1]$ останется вне этого пересчёта. Полученное противоречие доказывает, что числа отрезка $[0;1]$ нельзя пересчитать, т.е. $[0;1]$ — бессчётное множество.

14. а) $(0;1) = [0;1] \setminus \{0,1\}$. Утверждение следует из результатов задач *13* и *10,в*;

б) следует из результатов задач *а* и *3,б* в силу транзитивности отношения эквивалентности множеств.

15. Следует из результатов задач *13* и *14,б*.

16. Каждому конечному упорядоченному набору натуральных чисел можно взаимнооднозначно поставить в соответствие конечную десятичную дробь из интервала $(0;1)$. Множество таких дробей является подмножеством $\mathbb{Q}$, которое счётно (см. задачу *1,ж*). Следовательно, оно не более, чем счётно. Кроме того, конечным оно быть не может, поскольку содержит бесконечное множество дробей вида $0,1$; $0,2$; $0,3$ и т.д. Поэтому множество конечных десятичных дробей из $(0;1)$, а вместе с ним и множество конечных наборов натуральных чисел, счётно-бесконечно.

17. Каждой последовательности натуральных чисел $\{a_0, a_1, \ldots\}$ можно поставить в соответствие действительное число $0,a_0a_1a_2\ldots$ из полуинтервала $(0;1]$ взаимнооднознач-

ным образом[3]. А множество таких чисел бессчётно (следует из результатов задач *13* и *10,в*).

18. Это множество бессчётно (см. решение задачи *17*).

19. а) Докажем сначала $(0;1) \sim (0;1)^2$. Так как $(0;1) \times \{0.5\} \subset (0;1)^2$, $\operatorname{card}((0;1)) \leq \operatorname{card}\left((0;1)^2\right)$. Покажем, что справедливо неравенство $\operatorname{card}\left((0;1)^2\right) \leq \operatorname{card}((0;1))$. Возьмём произвольную точку из открытого квадрата $(0;1)^2$. Обозначим её координаты — действительные числа из $(0;1)$ — через $0,a_1a_2a_3\ldots$ и $0,b_1b_2b_3\ldots$. Поставим этой паре чисел в соответствие следующее число из $(0;1)$: $0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$. При таком сопоставлении каждой точке квадрата будет взаимнооднозначно соответствовать число из интервала $(0;1)$. При этом некоторым числам интервала не будут соответствовать никакие точки квадрата. Например, число $0,09090909\ldots \in (0;1)$ сопоставляется с парой чисел $0,000\ldots = 0$, $0,999\ldots = 1$, не являющихся координатами никакой точки квадрата. Таким образом, построено взаимнооднозначное соответствие между точками квадрата $(0;1)^2$ и некоторыми точками $(0;1)$, следовательно, $\operatorname{card}\left((0;1)^2\right) \leq \operatorname{card}((0;1))$. Из двух полученных неравенств по теореме Кантора — Бернштейна следует, что $(0;1) \sim (0;1)^2$. Теперь эквивалентность $[0;1] \sim [0;1]^2$ следует из результатов задач *14,а* и *5,г*;

б) следует из результатов задач *14,б*, *5,г*, *а*.

## 3.2. Арифметика кардинальных чисел

1. а) Пусть $\operatorname{card}(A) = \mathfrak{n}_1$, $\operatorname{card}(B) = \mathfrak{n}_2$. Для множеств $A$ и $B$ существуют такие множества $A_1$ и $B_1$, что $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ (например, $A_1 = A \times \{a\}$, $B_1 = B \times \{b\}$, где $a \neq b$). Тогда множество $A_1 \cup B_1$ распадается на непересекающиеся множества $A_1$ и $B_1$, причём $\operatorname{card}(A_1) = \mathfrak{n}_1$,

---

[3] Напомним, что $0,9999\ldots = 1$.

$\mathrm{card}\,(B_1) = \mathfrak{n}_2$, и это, очевидно, выполняется для любого равномощного $A_1 \cup B_1$ множества. Следовательно, по определению $\mathrm{card}\,(A_1 \cup B_1) = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$;

б) пусть $\mathrm{card}\,(A) = \mathfrak{n}_1$, $\mathrm{card}\,(B) = \mathfrak{n}_2$, $C \sim A$, $D \sim B$ ($C$, $D$ — произвольные множества из классов эквивалентности $A$ и $B$). Тогда $C \times D \sim A \times B$ (см. задачу *5,г* подразд. 3.1). Значит,

$$\mathrm{card}\,(A \times B) = \mathrm{card}\,(C \times D) = \mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2;$$

в) пусть $\mathrm{card}\,(A) = \mathfrak{n}$, $\mathrm{card}\,(B) = \mathfrak{v}$, $C \sim A$, $D \sim B$ ($C$, $D$ — произвольные множества из классов эквивалентности $A$ и $B$). Тогда $C^D \sim A^B$ (см. задачу *5,ж* подразд. 3.1). Значит,

$$\mathrm{card}\left(A^B\right) = \mathrm{card}\left(C^D\right) = \mathfrak{n}^{\mathfrak{v}}.$$

2. Докажем коммутативность. Пусть $\mathrm{card}\,(A) = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$. Тогда $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $\mathrm{card}\,(A_1) = \mathfrak{n}_1$; $\mathrm{card}\,(A_2) = \mathfrak{n}_2$. Далее, $A = A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$, следовательно, $\mathrm{card}\,(A) = \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1$, т. е. $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1$. Коммутативность доказана.

Аналогично доказывается ассоциативность.

3. Коммутативность и ассоциативность следуют из результатов задач *5,а* и *б* подразд. 3.1.

Дистрибутивность произведения относительно суммы слева следует из соответствующей дистрибутивности декартова произведения относительно объединения и того очевидного факта, что

$$B \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset.$$

(Докажите это утверждение). Дальнейшее решение проведите самостоятельно по аналогии с решением задачи *2*.

Аналогично доказывается дистрибутивность справа.

4. а) Пусть $\mathrm{card}\,(X) = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}}$. Это означает, что $X = A^{B \cup C}$, где $B \cap C = \emptyset$, $\mathrm{card}\,(A) = \mathfrak{n}$, $\mathrm{card}\,(B) = \mathfrak{p}$, $\mathrm{card}\,(C) = \mathfrak{q}$. Из результата задачи *5,з* подразд. 3.1 следует, что $X \sim A^B \times A^C$, а значит,

$$\mathrm{card}\,(X) = \mathrm{card}\left(A^B \times A^C\right) = \mathrm{card}\left(A^B\right) \cdot \mathrm{card}\left(A^C\right) = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}};$$

б) следует из результата задачи *5,и* подразд. 3.1. Докажите самостоятельно, основываясь на решении задачи *а*;

в) следует из результата задачи *5,к* подразд. 3.1. Докажите самостоятельно;

г) следует из результата задачи *5,д* подразд. 3.1;

д) следует из результата задачи *5,е* подразд. 3.1.

5. а) Пусть $\mathrm{card}\,(X) = 5 + 2$. Это означает, что множество $X$ распадается на конечные непересекающиеся множества $A$ и $B$, причём $|A| = 5$, $|B| = 2$. Очевидно, что тогда $X$ конечно, $|X| = |A \cup B| = 7$. Последнее справедливо для любого равномощного $X$ множества, что и доказывает равенство;

б) пусть $\mathrm{card}\,(X) = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$. Это означает, что множество $X$ является объединением счётно-бесконечных непересекающихся множеств $A$ и $B$. Из результата задачи *6,а* подразд. 3.1 следует, что $X = A \cup B$ счётно-бесконечно, и это, очевидно, верно для любого равномощного $X$ множества. Равенство доказано.

в) *Указание*: сначала докажите, что если $A$ счётно, $B$ конечно, то $A \cup B$ счётно.

г) *Указание*: сначала докажите, что если $A$ континуально, $B$ счётно, то $A \cup B$ континуально;

д) *Указание*: сначала докажите, что объединение двух континуальных множеств есть континуальное множество.

6. а) Пусть $\mathrm{card}\,(X) = 5 \cdot 2$. Это означает, что $X = A \times B$, где $|A| = 5$, $|B| = 2$. Очевидно, что $X$ конечно, $|X| = |A \times B| = 10$, что верно для любого равномощного $X$ множества.

б) *Указание*: воспользуйтесь утверждением задачи *6,б* подразд. 3.1.

в) *Указание*: сначала докажите, что если $A$ счётно, $B$ конечно, то $A \times B$ счётно.

г) *Указание*: сначала докажите, что если $A$ континуально, $B$ счётно, то $A \times B$ континуально.

д) *Указание*: воспользуйтесь результатом задачи *19,б* подразд. 3.1.

7. а) *Указание*: воспользуйтесь результатом задачи *4* подразд. 2.1.

8. а) *Указание*: воспользуйтесь результатом задачи *18* подразд. 3.1.

б) *Указание*: воспользуйтесь результатом задачи *17* подразд. 3.1.

# Часть II. КОМБИНАТОРИКА

## 1. Перестановки, размещения, сочетания

Объекты исследования комбинаторики — различные комбинации элементов множеств, которые будем называть выборками. Точнее выборку определим следующим образом. Пусть имеются $n$ различных типов (видов) элементов. Это означает, что элементы разных типов отличны друг от друга, а элементы одного типа неразличимы. Имеется сколько угодно элементов каждого типа. ***Выборкой*** из $n$ типов элементов по $r$ ($(n, r)$-***выборкой***) называется совокупность $r$ элементов, выбранных из данных $n$ типов элементов. Число $r$ называется *объёмом выборки*.

При подсчёте количества комбинаций при формировании выборок используются два основных правила комбинаторики.

***Правило суммы***. Если выбор предмета $A$ можно осуществить $n$ способами, а предмета $B$ — $m$ способами, причём их совместный выбор исключён, то выбор либо $A$, либо $B$ можно осуществить $n + m$ способами.

***Правило произведения***. Если выбор предмета $A$ можно осуществить $n$ способами, а после выбора $A$ предмет $B$ можно выбрать $m$ способами, то выбор и $A$, и $B$ в указанном порядке можно осуществить $nm$ способами.

Выборка называется *упорядоченной*, если в ней задан порядок следования элементов. Упорядоченную выборку, содержащую элементы $a_1$, $a_2, \ldots, a_r$, будем обозначать $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$. Выборка называется *неупорядоченной*, если порядок отбора в неё не имеет значения: $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Выборка называется *бесповторной*, если все элементы в ней различны (взяты из разных типов), *повторной*, если в ней могут быть одинаковые элементы.

***Размещением*** (без повторений) из $n$ элементов по $r$ называется упорядоченная бесповторная $(n, r)$-выборка. Число различных размещений из $n$ по $r$ обозначается $A_n^r$. Нетрудно доказать, что $A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.[1)]

***Перестановкой*** (без повторений) $n$ элементов называется их расположение в ряд. Число различных перестановок $n$ элементов обозначается $P_n$ и равно $P_n = n!$.

***Размещением с повторениями*** из $n$ типов элементов по $r$ называется упорядоченная повторная $(n, r)$-выборка. Их число обозначается $\overline{A}_n^r$ и вычисляется по формуле $\overline{A}_n^r = n^r$.

Введём понятие перестановки с повторениями. Пусть даны $n_1$ элементов первого вида, $n_2$ элементов второго вида, …, $n_k$ элементов $k$-го вида. Все элементы одного вида неразличимы. Общее количество элементов равно $n$, т.е. $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. ***Перестановкой с повторениями*** называется расположение этих элементов в ряд. Число различных перестановок с повторениями равно

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

***Сочетанием*** (без повторений) из $n$ элементов по $r$ называется неупорядоченная бесповторная $(n, r)$-выборка. Таким образом, сочетание определяется только качественным составом отобранных в него элементов, но не порядком их отбора. Число

---

[1)] Напомним, что $0! = 1$.

различных сочетаний $C_n^r$[2)] вычисляется по формуле

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

***Сочетанием с повторениями*** из $n$ типов элементов по $r$ называется неупорядоченная повторная $(n, r)$-выборка. Количество различных сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^r$ вычисляется по формуле $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$.

**Задачи**

1. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$. Выпишите все размещения и сочетания без повторений элеметов из $A$ по 2, 3. Подсчитайте их количества и убедитесь, что они вычисляются по соответствующим формулам.

2. Пусть даны цифры 1, 2, причём имеется неограниченное количество цифр каждого вида. Выпишите все размещения и сочетания с повторениями из этих цифр по 2, 4. Подсчитайте их количества и убедитесь, что они вычисляются по соответствующим формулам.

3. Из пункта А в пункт Б ведут 5 дорог, а из пункта Б в пункт В 7.

а) Сколькими способами можно добраться из А в В через Б, если ни одну из дорог нельзя проходить более одного раза?

б) Сколькими способами можно добраться из А в В через Б и вернуться обратно, если идти по разным дорогам?

4. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых различны?

5. Сколько существует шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, делящихся а) на 5; б) на 3?

6. Сколько существует шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, делящихся на 4, если:

---

[2)] В литературе часто встречается также обозначение $\binom{n}{r}$.

а) любая цифра может повторяться произвольное число раз;

б) каждая цифра может повторяться не более одного раза?

7. Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, цифры которых идут а) в возрастающем порядке; б) в убывающем порядке?

8. В школе изучаются 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если должно быть 5 уроков по разным предметам?

9. Сколькими способами можно расставить 10 человек разного роста в колонну по двое, если в каждой люди должны стоять по росту?

10. Сколькими способами можно расставить $n$ различных предметов в ряд так, чтобы данные два предмета а) стояли рядом; б) не стояли рядом?

11. Сколькими способами можно переставлять числа $1, 2, \ldots, n$ так, чтобы данные 3 числа стояли рядом а) в любом порядке; б) в порядке возрастания; в) в порядке убывания?

12. Выведите формулы для чисел размещений и перестановок без повторений.

13. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «апрель»[3)]?

14. Выведите формулу для числа перестановок с повторениями.

15. Сколькими способами можно переставлять буквы слов: а) «парабола»; б) «математика»?

16. Выведите формулу для числа размещений с повторениями.

[3)] Перестановки букв слова называются его анаграммами. Анаграммы не обязательно осмысленные слова.

17. Сколькими способами можно разложить 5 разных мячей в 3 разные корзины?

18. Сколькими способами можно разложить 3 разные фотографии по 7 разным конвертам?

19. Выведите формулу для числа сочетаний без повторений.

20. Докажите свойства $C_n^k$:
а) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство симметрии);
б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (формула Паскаля);
в) $C_n^k C_k^r = C_n^r C_{n-r}^{k-r}$.

21. В шахматном турнире принимало участие $n$ шахматистов. Сколько было сыграно партий, если игры проводились в один тур, в два тура?

22. В группе 20 студентов. Сколькими способами можно из них составить команду из четырёх человек для участия в забеге на 5000 м?

23. В группе 20 студентов, из них 12 юношей и 8 девушек. Сколькими способами можно из них составить две команды для участия в мужской и женской эстафетах $4 \times 100$ м?

24. На плоскости проведены $n$ прямых, причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения этих прямых?

25. В выпуклом $n$-угольнике проведены все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения диагоналей?

26. В группе 22 студента. Сколькими способами можно из них сформировать делегацию из трёх человек для участия в студенческой конференции?

27. В группе 20 студентов. Сколькими способами можно из них выбрать 7 человек для хозработ, если студентов А и Б нельзя посылать вместе?

28. Выведите формулу для числа сочетаний с повторениями.

29. Докажите: $\overline{C}_n^k = \overline{C}_n^{k-1} + \overline{C}_{n-1}^k$.

30. Докажите: $C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \ldots + C_{k+m}^m = C_{k+m+1}^m$.

31. Трое грибников собрали 20 боровиков, 33 подберёзовика и 28 подосиновиков. Сколькими способами они могут их разделить между собой, если грибы каждого вида считаются одинаковыми? А если каждый из грибников должен получить хотя бы по 5 грибов каждого вида?

32. Даны $n_1$ предметов первого вида, $n_2$ предметов второго вида, $\ldots$ , $n_k$ предметов $k$-го вида, предметы одного вида неразличимы. Сколькими способами можно распределить их по $m$ разным группам?

33. Решите задачу *32* при условии, что в каждую группу должны попасть не менее $s_1$ предметов первого вида, $s_2$ предметов второго вида, $\ldots$ , $s_k$ предметов $k$-го вида.

34. Сколькими способами можно разделить 10 бананов, 3 апельсина, 8 груш, 4 яблока между двумя детьми, если фрукты каждого вида неразличимы? Тот же вопрос, если каждый из детей должен получить хотя бы по 2 банана и по одной груше, апельсину и яблоку.

35. Даны $n_1$ предметов первого вида, $n_2$ предметов второго вида, $\ldots$ , $n_k$ предметов $k$-го вида, предметы одного вида неразличимы. Сколькими способами их можно разделить на две разные группы?

36. Решите задачу *35* при условии, что в каждую группу должно попасть не менее $s_1$ предметов первого вида, $s_2$ предметов второго вида, $\ldots$ , $s_k$ предметов $k$-го вида.

37. Имеются 3 хомяка, 4 морские свинки и 2 хорька. Сколькими способами можно отобрать несколько животных так, чтобы среди них были и хомяки, и морские свинки, и хорьки, если животные одного вида неразличимы?

38. Решите задачу *37* при условии, что все животные различимы.

39. Даны $n$ различных предметов. Сколькими способами их можно разложить по $k$ разным ящикам так, чтобы в первый ящик попали $n_1$ предметов, во второй ящик — $n_2$ предметов, $\ldots$, в $k$-й ящик — $n_k$ предметов, где $n_1 + \ldots + n_k = n$? Порядок расположения предметов в ящиках не имеет значения.

40. Сколько различных делителей имеет натуральное число $N$?

41. Имеются $n$ различных предметов. Сколькими способами их можно разделить на $k$ разных групп, если имеет значение не только качественный состав предметов в группах, но и порядок их расположения?

42. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом $n$ мужчин и $n$ женщин так, чтобы мужчины и женщины чередовались?

43. Сколькими способами можно рассадить $n$ детей на $n$ - местной карусели?

44. Сколько различных ожерелий можно составить из $n$ разных бусинок?

45. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Сатурн» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке?

46. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Юпитер» так, чтобы и согласные, и гласные шли в алфавитном порядке?

47. Сколькими способами можно представить натуральное число $N$ в виде суммы $k$ натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными?

48. Решите задачу *47* при условии, что все слагаемые в разбиении целые неотрицательные.

49. Сколькими способами можно представить 1 000 000 000 в виде произведения четырёх натуральных сомножителей, если представления, отличающиеся порядком сомножителей, считаются различными?

50. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «водопровод» так, чтобы четыре буквы «о» не шли подряд?

51. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «перешеек» так, чтобы две буквы «е» не шли подряд?

52. Сколькими способами можно раздать колоду из 36 карт шести игрокам по шесть карт каждому?

53. Сколькими способами можно разложить 9 разных книг по трём разным бандеролям по 4, 3 и 2 книги?

54. Сколькими способами можно разложить 12 разных книг на 3 одинаковые стопки по 4 книги (порядок стопок не принимается во внимание)?

55. Имеются $n$ различных предметов. Сколькими способами их можно разделить на $m$ групп так, чтобы $m_1$ групп содержали по $n_1$ предметов, $m_2$ групп — по $n_2$ предметов, $\ldots$ , $m_k$ групп — по $n_k$ предметов $(m_1 + \ldots + m_k = m$, $m_1n_1 + \ldots + m_kn_k = n)$, если:

а)группы различимы; б) группы неразличимы?

56. Сколькими способами можно переставлять $n$ различных предметов так, чтобы между двумя данными предметами стояло ровно $r$ предметов?

57. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «образец» так, чтобы между «о» и «ц» стояло не менее двух букв?

58. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «квадрат» так, чтобы «к» не стояла непосредственно перед «д»?

59. Сколькими способами можно поставить 9 студентов в колонну так, чтобы студент А стоял впереди студента Б (не обязательно непосредственно перед ним)?

## 2. Бином Ньютона

***Биномом Ньютона***[4] называется формула

$$(a+b)^n =$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Часто применяется другая форма бинома Ньютона:

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \ldots + C_n^k t^k + \ldots + t^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k.$$

Коэффициенты бинома Ньютона называются *биномиальными* и обозначаются $C_n^k$, так же как и числа сочетаний. Это объясняется тем, что они вычисляются по одинаковым формулам. При небольших $n$ числа $C_n^k$ можно находить с помощью

[4] Формула, вошедшая в науку под названием бинома Ньютона, была известна задолго до Ньютона. Её знали Омар Хайям, Гиясэддин на Востоке, Б. Паскаль в Европе. Заслуга Ньютона в том, что он обобщил её на случай нецелых показателей.

*треугольника Паскаля*[5]:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

В этом треугольнике в вершине ставится 1 (нулевая строка), далее, в первой строке слева и справа от вершины — 1. Элементы каждой следующей строки равны сумме элементов предыдущей строки слева и справа от вычисляемого. Если каких-то элементов нет (для крайних позиций), то они заменяются нулями. Числа $n$ -строки равны биномиальным коэффициентам $C_n^k$, $k = 0, \ldots, n$, где $k$ — номер позиции числа в строке, считая слева направо от нуля.

Обобщением бинома Ньютона является *полиномиальная формула*:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{0 \le k_1, \ldots, k_m \le n \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} P\,(k_1, \ldots, k_m)\, a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m},$$

где $P\,(k_1, \ldots, k_m)$ — *полиномиальные коэффициенты*, являющиеся числами перестановок с повторениями. При $m = 2$ полиномиальная формула превращается в бином Ньютона.

В полиномиальной формуле сумма берётся по всем разбиениям числа $n$ на $m$ неотрицательных целых слагаемых с учётом их порядка. Ясно, что если разбиение $\langle s_1, \ldots, s_m \rangle$ получается из разбиения $\langle k_1, \ldots, k_m \rangle$ перестановкой слагаемых, то соответствующие полиномиальные коэффициенты равны. Это обстоятельство облегчает их вычисление. Достаточно вычислить

[5] Это название исторически несправедливо. Треугольник Паскаля был известен задолго до Паскаля, который называл его арифметическим треугольником.

коэффициенты для разбиений $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$, а затем всевозможными способами переставлять слагаемые — показатели степеней.

## Задачи

1. Выведите бином Ньютона.

2. Докажите, что элементы $n$-й строки треугольника Паскаля являются биномиальными коэффициентами.

3. Докажите:
а) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

4. Сколько рациональных членов содержится в разложении?
а) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{10}$; б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{20}$; в) $\left(\sqrt[5]{7}+\sqrt[4]{2}\right)^{100}$; г) $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt{6}\right)^{51}$; д) $\left(1+\sqrt{7}\right)^{26}$.

5. Вычислите:
а) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$; б) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k$; в) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k$; г) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$; д) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{C_n^k}{k+1}$; е) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}$; ж) $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)C_n^k$; з) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)C_n^k$; и) $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$; к) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(C_n^k\right)^2$; л) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+2}$; м) $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$.

6. Докажите:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

7. Докажите:

$$\begin{gathered} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = \\ = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}. \end{gathered}$$

8. Докажите:

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} P\left(k_1, \ldots, k_m\right) = m^n.$$

9. Выведите полиномиальную формулу.

10. Напишите разложение $(x+y+z)^5$.

11. Найдите коэффициент, получающийся в выражении после раскрытия скобок и приведения подобных членов:
а) $(1+x^2+x^3)^{10}$ при $x^{12}$; б) $(2+x-x^3)^{12}$ при $x^7$;
в) $(1-2x^5+3x^7)^{30}$ при $x^{23}$.

12. Найдите коэффициенты при $x^{19}$, $x^{21}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(3+x^7+x^{11})^{20}$.

13. Найдите сумму всех коэффициентов, получающихся после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражениях:
а) $(2-x+x^3)^{50}$; б) $(1+x+2y^3)^{70}$.

14. Найдите сумму коэффициентов при $x$ с чётными степенями, получающихся после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x-x^2+3x^5)^{51}$.

15. Найдите свободный член в разложении $(1+x+x^2+x^3)^{100}$.

16. Найдите свободный член в разложении:
а) $\left(1+x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$; б) $\left(1-x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$.

17. Найдите все члены, не содержащие радикалов в разложении:
а) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\sqrt{x}\right)^8$; б) $\left(1-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$.

## 3. Формула включений и исключений

Пусть имеется $N$ предметов и $n$ свойств $p_1,\ldots,p_n$ (свойства могут быть попарно совместны). Каждый предмет может обладать или не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $\alpha(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$ количество предметов, обладающих свойствами $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \le i_1, \ldots, i_k \le n)$ (остальными свойствами эти предметы могут как обладать, так и не обладать), через $\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n})$ количество предметов, не обладающих ни одним из свойств $p_1, \ldots, p_n$. Тогда $\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n})$ вычисляется по *формуле включений и исключений*:

$$\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}) = N - \sum_{i=1}^{n} \alpha(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha(p_i, p_j) - \\ - \sum_{1 \le i < j < l \le n} \alpha(p_i, p_j, p_l) + \ldots + \\ +(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}) + (-1)^n \alpha(p_1, \ldots, p_n).$$

## Задачи

1. Докажите формулу включений и исключений.

2. Пусть даны конечные множества $A_1, \ldots, A_n$ и известны мощности всех этих множеств, а также мощности их всевозможных пересечений. Докажите, что мощность объединения этих множеств вычисляется по формуле

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \le i < j < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \ldots + \\ +(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + \\ +(-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

3. *Задача о беспорядках.* В ряд расставлены $n$ различных предметов. Сколькими способами их можно переставлять так, чтобы ни один предмет не оказался на своём прежнем месте?

4. *Задача о встречах.* В ряд расставлены $n$ различных предметов. Сколькими способами их можно переставлять так, чтобы ровно $k$ из них оставались на своих прежних местах, а ни один из остальных не оставался?

5. Каждый студент группы — либо девушка, либо блондин(ка), либо спортсмен(ка). В группе 10 девушек, из них 5 блондинок и одна блондинка — спортсменка. Из 14 блондинов(ок) 6 спортсменов(ок), а всего 9 спортсменов(ок), из них 3 девушки. Сколько студентов в группе?

6. Из 58 студентов английский язык знают 30 человек, немецкий язык — 28, французский язык — 18, английский и французский — 12, немецкий и французский — 5, английский и немецкий — 15, все три языка знают 2 студента. Сколько студентов не знает ни одного языка? Сколько знает ровно два языка? Сколько только английский?

7. *Функцией Эйлера* называется функция $\varphi(n)$, определённая на множестве натуральных чисел и равная количеству натуральных чисел, не превосходящих $n$ и взаимно простых с $n$. Докажите, что $\varphi(n)$ вычисляется по формуле

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{q_k}\right),$$

где $q_1, \ldots, q_k$ — все простые делители числа $n$.

8. Найдите количество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5, 11.

9. Найдите количество натуральных чисел от 1 до 999, не делящихся ни на одно из чисел 3, 7, 15.

10. Найдите количество натуральных чисел от 1 до 999, не делящихся ни на одно из чисел 6, 9, 15.

11. Сколькими способами можно разложить 5 разных фотографий по четырём разным конвертам так, чтобы не было пустых?

12. Даны $n$ разных предметов и $m$ разных ящиков. Докажите:

а) число способов, которыми можно разложить эти предметы по ящикам так, чтобы не было пустых, равно

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n;$$

б) число способов, которыми можно разложить эти предметы по ящикам так, чтобы ровно $r$ ящиков остались пустыми, равно

$$C_m^r \sum_{k=0}^{m-r}(-1)^k C_{m-r}^k (m-r-k)^n.$$

13. Сколькими способами можно разложить 10 разных папок по шести разным ящикам стола так, чтобы:

а) не было пустых ящиков;

б) один фиксированный ящик (например, верхний) остался пустым;

в) ровно один (любой) ящик остался пустым;

г) ровно половина ящиков остались пустыми.

14. В лифт вошли 5 человек. Сколькими способами они могут выйти на пяти этажах так, чтобы:

а) на каждом этаже вышел по крайней мере один человек;

б) ровно на двух этажах не вышел ни один человек.

15. Сколькими способами можно посадить в ряд двух студентов факультета И, двух студентов факультета Н, двух студентов факультета Р и двух студентов факультета Е так, чтобы никакие 2 студента одного факультета не сидели рядом?

16. Сколькими способами можно пересаживать трёх математиков, трёх физиков и трёх астрономов так, чтобы никакие трое коллег не сидели рядом?

17. Сколькими способами можно переставлять буквы слов «варвар», «кокарда», «сенбернар» так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

18. В группе 12 студентов, из них 3 девушки. Сколькими способами их можно рассадить в ряд так, чтобы никакие 2 девушки не сидели рядом?

19. Сколькими способами можно переставлять $n$ разных предметов так, чтобы никакие два из фиксированного набора $a_1, \ldots, a_k$ предметов не стояли рядом?

20. *Задача мажордома.* К обеду за круглым столом у короля Артура приглашены $n$ пар враждующих рыцарей ($n \geq 2$). Сколькими способами их можно рассадить так, чтобы никакие два врага не сидели рядом?

21. *Задача о супружеских парах.* Сколькими способами можно рассадить за круглым столом $n$ супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## 1. Перестановки, размещения, сочетания

3. а) По правилу произведения получаем $5 \cdot 7 = 35$ способов; б) $5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 840$ способов.

4. Первой цифрой числа может быть любая, кроме нуля (9 вариантов), второй — любая, кроме той, что стоит на первом месте (9 вариантов), третьей — любая, кроме двух, стоящих на первом и втором местах (8 вариантов) и т. д. По правилу произведения получаем: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ чисел.

5. а) По правилу произведения: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 7776$ чисел (последняя цифра — только 5);

б) используем признак делимости на 3: сумма цифр числа должна быть кратна 3. Сумма всех цифр, кроме одной, может быть любой и давать при делении на 3 остаток либо 0, либо 1, либо 2. Нетрудно убедиться, что при любом варианте оставшаяся последняя цифра может быть любой из двух (например, если сумма пяти цифр делится на 3, то шестая цифра — либо 3, либо 6). По правилу произведения получаем: $6^5 \cdot 2 = 15552$ числа.

6. а) Из равенства $\overline{ABCD} = 100 \cdot \overline{AB} + \overline{CD}$[1)] следует условие

---

[1)] $\overline{ABC\ldots}$ означает десятичное число, записанное цифрами $A, B, C, \ldots$.

делимости на 4: число должно оканчиваться на 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56 или 64. Первые две цифры могут быть любые. Получаем: $6^2 \cdot 9 = 324$ числа;

б) число должно оканчиваться на одну из комбинаций: 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64. Первые две цифры выбираются из четырёх оставшихся $A_4^2$ способами. Получаем: $A_4^2 \cdot 8 = 96$ чисел.

7. а) Каждое четырёхзначное число с возрастающим порядком цифр однозначно определяется четвёркой цифр от 1 до 7. Обратно, каждой четвёрке цифр соответствует единственное четырёхзначное число, цифры которого идут в возрастающем порядке (выбираем в произвольном порядке четыре цифры, а затем расставляем их единственным образом в возрастающем порядке). Следовательно, нужных нам чисел столько же, сколько неупорядоченных выборок по четыре цифры из данных семи, т.е. сочетаний без повторений. Получаем ответ: $C_7^4 = 35$ чисел;

б) ответ такой же.

8. $A_9^5 = 15120$ способов.

9. Выбираем произвольно 5 человек из 10 для первой колонны, а затем единственным образом расставляем их по росту. Оставшихся 5 человек также единственным образом расставляем по росту. Получаем: $C_{10}^5 = 252$ способа.

10. а) Эти данные 2 предмета можно считать одним и нужно ещё учесть, что их можно переставлять местами. Получаем: $2!(n-1)! = 2(n-1)!$ способов;

б) чтобы найти число перестановок, в которых они не стоят рядом, нужно найденное количество перестановок вычесть из их общего числа: $n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$.

11. а) В любом порядке $3!(n-2)! = 6(n-2)!$ способов (см. решение задачи *10*);

б, в) в порядке возрастания, убывания $(n-2)!$ способов (эти три числа уже нельзя переставлять).

12. Каждое размещение определяется тем, какие элементы ставятся на её позиции с первой по $r$-ю. На первую можно поставить любой из $n$ элементов, на вторую — любой из $n$, кроме

стоящего на первом месте (элементы не повторяются), на третью — любой из $n-2$ элементов и т.д. На последнюю, $r$-ю, позицию можно поставить любой из $n-r+1$ элементов (любой, кроме стоящих на первых $r-1$ местах). Так как эти выборы нужно сделать совместно в указанном порядке, по правилу произведения получаем нужную формулу.

Очевидно, что перестановка — размещение без повторений всех данных $n$ элементов. Поэтому $P_n = A_n^n$, откуда и следует нужная формула.

13. $6! = 720$ способов.

14. Если все предметы разные, то число перестановок равно $n!$. Но за счёт перестановок одинаковых элементов некоторые перестановки переходят друг в друга. Предположим, что предметы первого вида одинаковы, а все остальные разные. Тогда все перестановки разбиваются на классы, в каждый класс включаются перестановки, переходящие друг в друга перестановкой $n_1$ одинаковых элементов. Очевидно, что в каждом классе $n_1!$ перестановок. А число этих классов есть количество различных, не переходящих друг в друга перестановок. Чтобы получить это число, нужно общее число перестановок $n!$ поделить на число перестановок в одном классе $n_1!$. Следовательно, с учётом того, что среди $n$ предметов $n_1$ одинаковых, получаем $\frac{n!}{n_1!}$ разных перестановок. Если теперь предположить, что $n_2$ предметов второго вида одинаковы, то рассуждая аналогично, получим $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ разных перестановок с $n_1$ одинаковыми предметами первого вида, $n_2$ одинаковыми предметами второго вида. Проведя такое рассуждение для всех типов предметов, получим требуемую формулу.

15. а) Переставляются 8 букв, среди них 3 одинаковые буквы «а». По формуле перестановок с повторениями получаем: $\frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 6720$ способов;

б) $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$ способов.

16. *Указание*: см. решение задачи *12*.

17. $\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243$ способа (каждый из пяти мячей можно положить в любую их трёх корзин).

18. $\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343$ способа.

19. Размещение есть упорядоченное сочетание. Поскольку сочетание $r$ элементов можно упорядочить $r!$ способами, получаем $r!C_n^r = A_n^r$, откуда и следует доказываемая формула.

20. Эти свойства можно доказать, используя формулу для числа сочетаний. Мы же приведём чисто комбинаторные доказательства.

а) Выбор $k$ элементов из совокупности $n$ элементов равносилен оставлению $n-k$ элементов в совокупности. Значит, число способов сделать то и другое одинаково;

б) зафиксируем некоторый элемент из данных $n$ и разобьём все сочетания по $k$ (их количество равно $C_n^k$) на два класса. В первый класс включим те из них, которые не содержат зафиксированный элемент, во второй — те, которые его содержат. Подсчитаем количество сочетаний в каждом классе. Сочетания первого класса объёма $k$ отбираются из $n-1$ элемента (зафиксированный нами элемент брать нельзя). Поэтому их число равно $C_{n-1}^k$. Сочетания второго класса уже содержат один (зафиксированный нами) элемент, а отбирать их надо из $n-1$ элемента. Поэтому их число равно $C_{n-1}^{k-1}$. Так как классы не пересекаются, по правилу суммы получаем формулу Паскаля;

в) подсчитаем, сколькими способами можно выбрать пару сочетаний, одно из которых содержит $r$ элементов, а другое — $k-r$ других элементов. С одной стороны, этот выбор можно делать в таком порядке. Сначала выбираем $r$ элементов из $n$ ($C_n^r$ способов), затем из оставшихся $n-r$ элементов выбираем $k-r$ ($C_{n-r}^{k-r}$ способов). Выбор пары сочетаний можно сделать $C_n^r C_{n-r}^{k-r}$ способами (правило произведения). С другой стороны, можно сначала выбрать $k$ элементов из $n$ ($C_n^k$ способов), а затем из этих $k$ элементов выбрать $r$ для первого сочетания ($C_k^r$ способов). Оставшиеся $k-r$ элементы образуют второе сочетание. По правилу произведения получим $C_n^k C_k^r$ способов. Двумя описанными схемами выбора мы получим одни и те же пары сочетаний, что и доказывает равенство.

21. Если игры проводились в один тур, то было сыграно

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ партий (каждая партия определяется парой шахматистов). Если игры проводились в два тура, то было сыграно $A_n^2 = n(n-1)$ партий (партия определяется упорядоченной парой шахматистов).

22. $C_{20}^4 = 4845$ способов.

23. $A_{12}^4 A_8^4 = 19958400$ способов (имеет значение не только состав команды, но и кто на каком этапе побежит).

24. $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ точек (каждая точка пересечения определяется парой прямых).

25. $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ точек (каждой точке пересечения диагоналей взаимнооднозначно соответствует неупорядоченная четвёрка вершин $n$-угольника).

26. $C_{22}^3 = 1540$ способов.

27. $C_{20}^7 - C_{18}^5 = 68950$ способов (от общего количества способов отнимается количество способов, при которых студенты А и Б идут вместе на хозработы).

28. Зашифруем каждое сочетание с повторениями последовательностью нулей и единиц следующим образом. Сначала идёт столько единиц, сколько в сочетании элементов первого вида, затем разделитель (нуль), затем столько единиц, сколько элементов второго вида, затем опять разделитель и т.д. Если два нуля идут подряд, то это означает, что элементов соответствующего типа в сочетании нет; если нуль стоит на первом (последнем) месте, то элементов первого ($n$-го) типа нет. Ясно, что в этой последовательности будет $r$ единиц (число всех элементов в сочетании) и $n-1$ нулей (число разделителей $n$ типов). Длина последовательности равна $n+r-1$. Очевидно, что каждой последовательности нулей и единиц такого состава взаимнооднозначно соответствует сочетание с повторениями. А число таких последовательностей равно

$$P(n-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = C_{n+r-1}^r.$$

29. *Указание*: см. решение задачи *20,б.*

30. Можно доказать индукцией по $m$, используя формулу Паскаля (рекомендуется доказать самостоятельно). Здесь же будет приведено комбинаторное решение задачи.

Пусть имеются предметы $k+1$ разных типов, например, буквы $a$, $b$, $c, \ldots$, $x$, число предметов каждого типа неограниченно. Число сочетаний с повторениями по $m$ из этих $k+1$ типов предметов равно $\overline{C}_{k+1}^{m} = C_{k+m}^{m}$. Разобьём эти сочетания на $m+1$ класс, отнеся к $s$-му классу сочетания, в которые предметы некоторого фиксированного типа, например, буквы $x$, входят ровно $s$ раз $(0 \le s \le m)$. Число сочетаний в $s$-м классе равно $\overline{C}_{k}^{m-s} = C_{k+m-s-1}^{m-s}$ (выбираем из $k$ типов предметов $m-s$ предметов с повторениями, чтобы дополнить $s$ уже выбранных предметов фиксированного типа до сочетания объёма $m$). Так как эти классы попарно не пересекаются, по правилу суммы число сочетаний во всех классах равно

$$C_{k+m-1}^{m} + C_{k+m-2}^{m-1} + \ldots + C_{k-1}^{0} = \sum_{s=0}^{m} C_{k+m-s-1}^{m-s} = \sum_{s=0}^{m} C_{k+s-1}^{s}.$$

(Здесь произведена замена $m-s$ на $s$). Общее число рассматриваемых сочетаний равно числу сочетаний во всех классах, отсюда, приравняв последнюю полученную сумму к $C_{k+m}^{m}$ и заменив $k$ на $k+1$, получим доказываемое равенство.

31. Подсчитаем число способов раздела боровиков. Разложим их в ряд и будем делить следующим образом. Положим между некоторыми грибами два разделителя (например, два камня). Грибы до первого камня достаются первому грибнику, между первым и вторым — второму и за третьим — третьему. Поскольку никаких условий раздела нет, камни можно класть произвольно. Например, если положить камень слева от всех грибов, ничего не достаётся первому грибнику , если справа — третьему, если оба камня положены вместе, то второму. Очевидно, что каждая такая перестановка 20 одинаковых грибов и двух одинаковых камней определяет единственный способ раздела грибов и наоборот. Поэтому число способов раздела равно

числу таких перестановок, т.е.

$$P(20,2) = \frac{22!}{20! \cdot 2!} = C_{22}^2 = 231.$$

(Этот же результат можно получить иначе. Число способов раздела равно числу выбора двух позиций для камней из 21-й позиции (19 между грибами плюс две крайние) с повторениями, т.е. $\overline{C}_{21}^2 = C_{22}^2$.)

Аналогично получаем способы раздела подберёзовиков:

$$P(33,2) = \frac{35!}{33! \cdot 2!} = C_{35}^2 = 595$$

и подосиновиков:

$$P(28,2) = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = C_{30}^2 = 435.$$

По правилу произведения всего получаем: $C_{22}^2 C_{35}^2 C_{30}^2 = 59788575$ способов.

Если каждый должен получить хотя бы по 5 грибов каждого вида, то сначала раздадим это минимальное количество каждому грибнику (так как грибы одного вида одинаковы, это можно сделать одним способом). Останутся 5 боровиков, 18 подберёзовиков, 13 подосиновиков. Их раздадим без всяких ограничений (см. выше). Получаем: $C_7^2 C_{20}^2 C_{15}^2 = 418950$ способов.

32. Рассуждая так же, как при решении задачи *31*, получаем:

$$C_{n_1+m-1}^{m-1} C_{n_2+m-1}^{m-1} \ldots C_{n_k+m-1}^{m-1} = C_{n_1+m-1}^{n_1} C_{n_2+m-1}^{n_2} \ldots C_{n_k+m-1}^{n_k}$$

способов.

33. $C_{n_1-m(s_1-1)-1}^{m-1} C_{n_2-m(s_2-1)-1}^{m-1} \ldots C_{n_k-m(s_k-1)-1}^{m-1}$ способов (см. решение задачи *31*).

34. Бананы можно разделить одиннадцатью способами (первый ребёнок может получить любое количество бананов

от 0 до 10, остальные достаются второму), апельсины — четырьмя, груши — девятью, яблоки — пятью. По правилу произведения получаем: $11 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5 = 1980$ способов.

Если каждый должен получить хотя бы по 2 банана и по одной груше, апельсину и яблоку, то сначала раздадим детям минимально необходимое количество фруктов (один способ, так как фрукты каждого вида одинаковы), а то, что осталось, разделим без всяких ограничений. Получаем:

$$(10-2\cdot2+1)(3-2\cdot1+1)(8-2\cdot1+1)(4-2\cdot1+1) = 294 \text{ способа.}$$

35. $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ способов (см. решение задачи *34*).

36. $(n_1-2s_1+1)(n_2-2s_2+1)\ldots(n_k-2s_k+1)$ способов (см. решение задачи *34*).

37. $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ способа.

38. Из трёх хомяков отобрать какое-то количество (подмножество) можно $2^3$ способами (для каждого хомяка два варианта: либо брать, либо не брать). Но один из них (не брать ни одного) не подходит. Остаётся $2^3-1$ способов. Аналогично для морских свинок $2^4-1$, для хорьков $2^2-1$ способов. По правилу произведения получаем: $(2^3-1)(2^4-1)(2^2-1) = 315$ способов.

39. Занумеруем все предметы числами от 1 до $n$ и сопоставим каждой раскладке предметов по ящикам перестановку $n_1$ единиц, $n_2$ двоек, $\ldots$, $n_k$ чисел $k$ по следующему правилу. Если $i$-й предмет попадает в $s$-й ящик, то на $i$-м месте перестановки стоит число $s$. Легко убедиться в том, что каждой такой перестановке при описанном сопоставлении соответствует один и только один способ раскладки предметов по ящикам с указанными в задаче условиями. Значит, число способов равно числу таких перестановок, которое вычисляется по известной формуле. Получаем ответ:

$$P(n_1,\ldots,n_k) = \frac{(n_1+\ldots+n_k)!}{n_1!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} \text{ способов.}$$

40. Пусть натуральное число $N$ представлено в виде $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые делители $N$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные показатели степеней (хорошо известно, что такое представление единственно). Значит, каждый делитель $N$ имеет вид $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \ldots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k$. Так как $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, все эти делители попарно не равны (докажите это). Поэтому число различных делителей равно числу способов одновременного выбора показателей степеней $\beta_1, \ldots, \beta_k$ из указанных диапазонов. Получаем ответ: $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$.

41. Сначала расположим эти предметы в ряд ($n!$ способов), а затем разделим их на $k$ групп так же, как в задаче *32*. По правилу произведения получаем ответ: $n! C_{n+k-1}^{k-1} = A_{n+k-1}^{n}$.

42. Сначала сажаем мужчин ($n!$ способов), затем женщин между ними ($n!$ способов). Всего $(n!)^2$ способов. Следует учесть возможность рассаживания сначала женщин, потом мужчин. По правилу суммы получаем: $2\,(n!)^2$ способов.

43. Так как карусель может вращаться, имеет значение расположение детей относительно друг друга, а не относительно карусели. Поэтому сажаем сначала одного ребёнка на любое место. Остальных можно сажать всевозможными способами на оставшиеся места. Получаем: $(n-1)!$ способов.

44. $\frac{(n-1)!}{2}$ способов (ожерелье можно переворачивать, следовательно, $(n-1)!$ способов разбиваются на пары совмещаемых при переворачивании).

45. $\frac{6!}{4!} = 30$ способов.

46. $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ способов.

47. $C_{N-1}^{k-1}$ способов (см. решение задачи *33*).

48. $C_{N+k-1}^{k-1}$ способов (см. решение задачи *32*).

49. Так как $1\ 000\ 000\ 000 = 2^9 \cdot 5^9$, любое представление этого числа в виде произведения четырёх натуральных сомножителей имеет вид $\left(2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}\right) \cdot \left(2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}\right) \cdot \left(2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}\right) \cdot \left(2^{\alpha_4} \cdot 5^{\beta_4}\right)$, где $\alpha_i$, $\beta_i$ — такие неотрицательные целые числа, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 9$; $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 9$. Число 9 разбивается на четыре целых неотрицательных слагаемых $C_{12}^3$ способами

(см. задачу *48*). Поскольку разбиения на суммы $\alpha_i$ и $\beta_i$ комбинируются , по правилу произведения получаем: $\left(C_{12}^3\right)^2 = 48400$ способов.

50. $P(2,2,4,1,1) - P(2,2,1,1,1) = 36540$ способов (если четыре буквы «о» идут подряд, их можно считать одной буквой).

51. $4!{\cdot}C_5^4 = 120$ способов (сначала расставляем все отличные от «е» буквы, а затем выбираем из пяти позиций четыре, на которые ставим четыре буквы «е»).

52. $C_{36}^6 C_{30}^6 C_{24}^6 C_{18}^6 C_{12}^6 C_6^6 = \frac{36!}{(6!)^6} \approx 2,67017773663715{\cdot}10^{24}$ способов. Можно также воспользоваться результатом задачи *39*.

53. $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1260$ способов (см. решение задачи *52*).

54. $\frac{12!}{(4!)^3\cdot 3!} = 825$ способов (сначала раскладываем книги по стопкам, которые потом перемешиваем).

55. а) $\frac{n!}{(n_1!)^{m_1}(n_2!)^{m_2}\ldots(n_k!)^{m_k}}$ способов (см. решения задач *52*, *39*);

б) $\frac{n!}{(n_1!)^{m_1}(n_2!)^{m_2}\ldots(n_k!)^{m_k} m_1!\ldots m_k!}$ способов (перемешиваем группы, содержащие поровну предметов).

56. $2!(n-2)!(n-r-1)$ способами.

57. $7! - 2!\cdot 6! - 2!\cdot 5!\cdot 5 = 2400$ способами.

58. $P(2,1,1,1,1,1) - P(2,1,1,1,1) = 2160$ способами.

59. $\frac{9!}{2} = 181440$ способами.

## 2. Бином Ньютона

1. Рассмотрим разложение:

$$\begin{gathered}(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n) = \\ = 1 + (t_1 + \ldots + t_n) + (t_1t_2 + t_1t_3 + \ldots + t_{n-1}t_n) + \\ + (t_1t_2t_3 + \ldots + t_{n-2}t_{n-1}t_n) + \ldots + t_1\ldots t_n.\end{gathered}$$

Если положить в нём $t_1 = \ldots = t_n = t$, то очевидно, что коэффициент при $t^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будет равен числу неупорядоченных наборов $k$ индексов из $1, 2, \ldots, n$, т.е. $C_n^k$. Получаем

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + C_n^3 t^3 + \ldots + t^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k.$$

Положив теперь $t = \frac{b}{a}$ и домножив получившееся равенство на $a^n$, придём к доказываемому биному Ньютона.

2. Правило построения треугольника Паскаля можно изобразить в виде диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 \arrow[dr] & & C_1^1 \arrow[dl] & & \\
 & C_2^0 \arrow[dr] & & C_2^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_2^2 \arrow[dl] & \\
C_3^0 \arrow[dr] & & C_3^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^3 \arrow[dl] \\
 & C_4^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_4^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_4^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

(Стрелки идут от складываемых элементов к сумме.) По ней видно, что элементы $n$-й строки согласно формуле Паскаля действительно являются биномиальными коэффициентами.

4. а) Разложим $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{10}$ по биному Ньютона:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{\frac{10-k}{2}} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{5-\frac{k}{2}}.$$

Рациональными здесь будут те члены, которые содержат 2 и 3 в целых (не дробных) степенях. Поэтому $k = 0, \ldots, 10$ должно быть чётным. Имеем 6 рациональных членов;

б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k 2^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{20-k}{2}} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k 2^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{10-\frac{k}{2}}$, $k = 0, \ldots, 20$ должно быть кратным 2 и 3, т.е. 6. *Ответ:* 4

рациональных члена; в) 6 членов; г) рациональных членов нет; д) 14 членов.

5. а) *Первый способ.*

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n2^{n-1}.$$

(Здесь произведена замена индекса суммирования $k$ на $k-1$ и использован результат задачи *3,а*).

*Второй способ.* Воспользуемся тождеством

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k.$$

Продифференцируем его по $t$:

$$n\,(1+t)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k t^{k-1}.$$

Подстановка в полученное тождество $t = 1$ даёт найденный первым способом ответ;

б) 0; в) $n(n-1)2^{n-2}$.

г) *Первый способ.*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \\ = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

*Второй способ.* Проинтегрируем тождество

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k$$

по $t$ от 0 до $t$. Получим

$$\frac{1}{n+1}\Big((1+t)^{n+1}-1\Big)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}t^{k+1}.$$

Подстановка в полученное тождество $t=1$ даёт найденный первым способом ответ;

д) $\frac{1}{n+1}$; е) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2}-n-3\right)$;

ж) $(3n-4)2^{n-1}+2$.

*Указание*: $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)C_n^k=3\sum_{k=1}^{n}kC_n^k-2\sum_{k=1}^{n}C_n^k$. Далее воспользуйтесь результатами задач *а* и *3,а*;

з) 0;

и) воспользуемся тождеством $(1+t)^n\,(1+t)^n=(1+t)^{2n}$. Подставим вместо биномов в левой и правой частях их разложения, перемножим слева суммы по правилу свёртки[2)] и приравняем коэффициенты при $t^n$ слева и справа. Получим равенство

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}=C_{2n}^n.$$

Применив свойство симметрии биномиальных коэффициентов (см. задачу *20,а* разд. 1), получаем, что исходная сумма равна $C_{2n}^n$;

к) $(-1)^{\frac{n}{2}}\,C_n^{\frac{n}{2}}$, если $n$ чётно; 0, если $n$ нечётно.

*Указание*: воспользуйтесь тождеством $(1+t)^n\,(1-t)^n = (1-t^2)^n$ (см. решение задачи *и*);

л) $\frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

*Указание*: воспользуйтесь равенством

$$\frac{1}{k+2}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\ \text{(первый способ)}$$

[2)]Напомним, что правило свёртки (для многочленов) заключается в следующем. Если перемножаются два многочлена $a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$ и $b_0+b_1t+\ldots+b_mt^m$, то коэффициент при $t^k$ в произведении равен

$$a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0=\sum_{s=0}^{k}a_sb_{k-s}.$$

или тождеством

$$t\,(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{k+1} \text{ (второй способ);}$$

м) $n(n+1)2^{n-2}$.

*Указание*: воспользуйтесь равенством $k^2 = k(k-1)+k$.

6. Докажем индукцией по $n$. База индукции ($n = 1$) очевидна. Предположение индукции:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Шаг индукции:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{n+1}^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Докажем последнее равенство:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{n+1}^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + \frac{(-1)^n}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^{k-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Вычислим отдельно вторую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^k - \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

(Здесь мы воспользовались результатом задачи *5,д*). Подставив вычисленную вторую сумму, а вместо первой суммы предположение индукции, приходим к доказываемому равенству.

7. Равенство $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots$ следует из результата задачи *3,б*.

Равенство $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1}$ (или $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1}$) следует из формулы Паскаля.

9. Докажем, что коэффициент при $a_1^{k_1}\ldots a_m^{k_m}$ равен $P(k_1,\ldots,k_m)$. Запишем $(a_1+\ldots+a_m)^n$ в виде произведения $n$ сомножителей, раскроем скобки и выпишем в каждом слагаемом все сомножители в порядке их появления. Очевидно, что каждое из этих слагаемых будет перестановкой с повторениями букв $a_1,\ldots,a_m$ длины $n$. Некоторые из таких перестановок дадут подобные члены при приведении. Поэтому коэффициент при $a_1^{k_1}\ldots a_m^{k_m}$ после приведения подобных слагаемых будет равен количеству перестановок, в которых буква $a_1$ встречается (в любых местах) $k_1$ раз, буква $a_2$ — $k_2$ раз, $\ldots, a_m$ — $k_m$ раз. Следовательно, этот коэффициент равен $P(k_1,\ldots,k_m)$.

10. Число 5 можно разбить на сумму трёх неотрицательных целых слагаемых следующими способами (без учёта порядка слагаемых): $5=5+0+0$, $5=4+1+0$, $5=3+2+0$, $5=3+1+1$, $5=2+2+1$. Далее, $P(5,0,0)=1$, $P(4,1,0)=5$, $P(3,2,0)=10$, $P(3,1,1)=20$, $P(2,2,1)=30$. Поэтому

$$(x+y+z)^5=x^5+y^5+z^5+5x^4y+5xy^4+5x^4z+5xz^4+\\+5y^4z+5yz^4+10x^3y^2+10x^3z^2+10x^2y^3+10x^2z^3+10y^3z^2+\\+10y^2z^3+20x^3yz+20xy^3z+20xyz^3+30x^2y^2z+\\+30x^2yz^2+30xy^2z^2.$$

11. а) Общий член разложения равен $P(k_1,k_2,k_3)\,x^{2k_2+3k_3}$. Коэффициент при $x^{12}$ складывается из коэффициентов таких членов, для которых $2k_2+3k_3=12$, $0\le k_1,k_2,k_3\le 10$, $k_1+k_2+k_3=10$. Этим условиям удовлетворяют следующие тройки: $k_1=6$, $k_2=0$, $k_3=4$; $k_1=5$, $k_2=3$, $k_3=2$; $k_1=4$, $k_2=6$, $k_3=0$. Поэтому искомый коэффициент равен $P(6,0,4)+P(5,3,2)+P(4,6,0)=2940$;

б) $2^9\cdot P(9,1,2)+2^7\cdot(-1)\cdot P(7,4,1)+2^5\cdot P(5,7,0)=-143616$;

в) 0.

12. При $x^{19}$ коэффициент равен 0. При $x^{21}$ коэффициент равен $3^{17} \cdot P(17, 3, 0) = 147219785820$.

13. а) $2^{50}$; б) $4^{70}$.

14. Обозначим через $S_1$, $S_2$ суммы коэффициентов при нечётных и чётных степенях $x$ соответственно. Подстановка $x = 1$ в многочлен даёт уравнение $S_1 + S_2 = 4^{51}$. Подстановка $x = -1$ даёт уравнение $S_2 - S_1 = -4^{51}$. Получаем систему

$$\begin{cases} S_2 + S_1 = 4^{51}, \\ S_2 - S_1 = -4^{51}, \end{cases}$$

решив которую, находим: $S_1 = 4^{51}$, $S_2 = 0$. Таким образом, сумма коэффициентов при чётных степенях $x$ равна 0 (попутно мы нашли, что сумма коэффициентов при нечётных степенях $x$ равна $4^{51}$).

15. 1.

16. а) Общий член разложения равен $P\left(k_1, k_2, k_3\right) x^{3k_2 - 2k_3}$. Свободный член является суммой тех членов разложения, для которых $3k_2 - 2k_3 = 0$, $0 \le k_1, k_2, k_3 \le 10$, $k_1 + k_2 + k_3 = 10$. Получаем ответ: $1 + P(5, 2, 3) + P(0, 4, 6) = 2731$. Можно также представить исходное выражение в виде

$$\frac{\left(1 + x^2 + x^5\right)^{10}}{x^{20}}$$

и найти коэффициент многочлена в числителе при $x^{20}$;

б) аналогично *а* получаем ответ:

$$1 - P(17, 1, 2) + P(14, 2, 4) - P(11, 3, 6) + P(8, 4, 8) - \\ - P(5, 5, 10) + P(2, 6, 12) = 5793139.$$

17. а) Разложение имеет вид

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\sqrt{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} 2^k C_8^k x^{\frac{5k-16}{6}}.$$

Для того чтобы член не содержал радикалов, необходимо выполнение условия: $5k-16$ кратно 6. Нетрудно проверить, что это выполняется при $k=2$ и $k=8$. Получаем ответ:

$$2^2C_8^2\cdot\frac{1}{x}+2^8C_8^8\cdot x^4=112\cdot\frac{1}{x}+256x^4;$$

б) общий член разложения имеет вид $(-1)^{k_2}\,P\left(k_1,k_2,k_3\right)x^{\frac{k_2-k_3}{3}}$. Отсюда получаем члены, не содержащие радикалов:

$$1-P(3,1,1)+P(1,2,2)+\left(P(0,4,1)-P(2,3,0)\right)x+$$
$$+\left(P(2,0,3)-P(0,1,4)\right)\cdot\frac{1}{x}=11-5x+5\cdot\frac{1}{x}.$$

## 3. Формула включений и исключений

1. Докажем индукцией по числу свойств $n$. База индукции очевидна: $\alpha\left(\overline{p_1}\right)=N-\alpha\left(p_1\right)$. Предположение индукции:

$$\alpha\left(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n}\right)=N-\sum_{i=1}^{n}\alpha\left(p_i\right)+$$
$$+\sum_{1\le i<j\le n}\alpha\left(p_i,p_j\right)-\sum_{1\le i<j<l\le n}\alpha\left(p_i,p_j,p_l\right)+\ldots+$$
$$+(-1)^k\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\alpha\left(p_{i_1},\ldots,p_{i_k}\right)+\ldots+$$
$$+(-1)^n\alpha\left(p_1,\ldots,p_n\right).$$

Делаем индукционный шаг. Добавим к свойствам $p_1,\ldots,p_n$ свойство $p_{n+1}$ и докажем формулу

$$\alpha\left(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{p_{n+1}}\right)=N-\sum_{i=1}^{n+1}\alpha\left(p_i\right)+\sum_{1\le i<j\le n+1}\alpha\left(p_i,p_j\right)-$$
$$-\sum_{1\le i<j<l\le n+1}\alpha\left(p_i,p_j,p_l\right)+\ldots+$$
$$+(-1)^k\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n+1}\alpha\left(p_{i_1},\ldots,p_{i_k}\right)+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}\alpha\left(p_1,\ldots,p_n,p_{n+1}\right).$$

Рассмотрим совокупность предметов, обладающих свойством $p_{n+1}$ (их $\alpha(p_{n+1})$). Согласно предположению индукции для этой совокупности верна формула

$$\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_{n+1}) = \alpha(p_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha(p_i, p_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha(p_i, p_j, p_{n+1}) - \sum_{1 \le i < j < l \le n} \alpha(p_i, p_j, p_l, p_{n+1}) + \ldots +$$
$$+ (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}, p_{n+1}) +$$
$$+ \ldots + (-1)^n \alpha(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}).$$

Теперь вычтем из индукционного предположения последнюю формулу. Нетрудно убедиться в том, что справа получится правая часть доказываемой формулы. А слева получится разность:

$$\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}) - \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_{n+1}) = \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{p_{n+1}}).$$

2. Введём для элементов множества $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ следующую систему свойств. Свойство $p_i$ означает, что элемент принадлежит множеству $A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Так как элементов $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, не обладающих ни одним из свойств, нет, формула включений и исключений применительно к ним будет иметь вид:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \ldots +$$
$$+ (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots +$$
$$+ (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n| = 0.$$

Из этого равенства и следует доказываемая формула.

3. Введём для всех перестановок (их $n!$) систему свойств: свойство $p_i$ означает, что предмет, стоявший на $i$-м месте, вернулся на своё место $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда число перестановок,

обладающих $k$ свойствами ($k$ предметов вернулись на свои места, остальные стоят где угодно), равно $C_n^k(n-k)!$. По формуле включений и исключений получаем

$$\alpha\left(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n}\right) =$$
$$= n! - n(n-1)! + C_n^2(n-2)! - C_n^3(n-3)! + \ldots + (-1)^n \cdot 1 =$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

4. Выбираем $k$ предметов, которые останутся на своих местах ($C_n^k$ способов), к остальным применяем формулу, полученную в задаче *3*. Получаем ответ:

$$C_n^k(n-k)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right) =$$
$$= \frac{n!}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

5. По формуле задачи *2* получаем: $10+14+9-5-6-3+1 = 20$ студентов.

6. Число студентов, не знающих ни одного языка, находим по формуле включений и исключений:

$$58 - 30 - 28 - 18 + 12 + 5 + 15 - 2 = 12 \text{ студентов.}$$

Число студентов, знающих ровно два языка: $12+15+5-3\cdot 2 = 26$ (среди студентов, знающих по крайней мере два языка, студенты, владеющие всеми тремя языками, учтены трижды). Число студентов, знающих только английский язык: $30 - 15 - 12 + 2 = 5$.

7. Введём для натуральных чисел от 1 до $n$ следующую систему свойств. Свойство $p_i$ означает, что число делится на

$q_i$. Очевидно, что

$$\alpha(p_i) = \frac{n}{q_i}, 1 \le i \le k,$$
$$\alpha(p_i, p_j) = \frac{n}{q_i q_j}, 1 \le i, j \le k,$$
$$\vdots$$
$$\alpha(p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}) = \frac{n}{q_{i_1} \ldots q_{i_s}}, 1 \le i_1, \ldots, i_s \le k.$$

Значение функции $\varphi(n)$ есть по определению количество чисел от 1 до $n$, не делящихся ни на одно из чисел $q_1, \ldots, q_k$, т.е. $\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k})$. По формуле включений и исключений получаем

$$\varphi(n) =$$
$$= n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{n}{q_i q_j} - \ldots + (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le k} \frac{n}{q_{i_1} \ldots q_{i_s}} +$$
$$+ \ldots + (-1)^k \frac{n}{q_1 \ldots q_k} =$$
$$= n\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{1}{q_i q_j} - \ldots + (-1)^k \frac{1}{q_1 \ldots q_k}\right) =$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_k}\right).$$

8. Введём для чисел от 1 до 1000 следующие три свойства. Свойство $p_1$ означает, что число делится на 3, $p_2$ — на 5, $p_3$ — на 11. Очевидно, что $\alpha(p_1) = \left[\frac{1000}{3}\right]$, $\alpha(p_2) = \left[\frac{1000}{5}\right]$, $\alpha(p_3) = \left[\frac{1000}{11}\right]$, $\alpha(p_1, p_2) = \left[\frac{1000}{3 \cdot 5}\right]$ и т.д. По формуле включений и исключений получаем

$$\alpha(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = 1000 - \left[\frac{1000}{3}\right] - \left[\frac{1000}{5}\right] - \left[\frac{1000}{11}\right] + \left[\frac{1000}{3 \cdot 5}\right] +$$
$$+ \left[\frac{1000}{3 \cdot 11}\right] + \left[\frac{1000}{5 \cdot 11}\right] - \left[\frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 11}\right] = 485 \text{ чисел.}$$

9. По формуле включений и исключений получаем

$$999 - \left[\frac{999}{3}\right] - \left[\frac{999}{7}\right] - \left[\frac{999}{15}\right] + \left[\frac{999}{3\cdot 7}\right] + \left[\frac{999}{7\cdot 15}\right] + \left[\frac{999}{15}\right] - \\ - \left[\frac{999}{105}\right] = 571 \text{ число.}$$

10. 755 чисел.

11. Всего $4^5$ способов раскладывания. Из них при $C_4^1 \cdot 3^5$ способах (по крайней мере) один конверт остаётся пустым, при $C_4^2 \cdot 2^5$ способах два конверта пустые и т.д. По формуле включений и исключений получаем

$$4^5 - C_4^1 \cdot 3^5 + C_4^2 \cdot 2^5 - C_4^3 \cdot 1^5 = 240 \text{ способов.}$$

12. а) *Указание*: см. решение задачи *11*;

б) сначала выбираем $r$ ящиков, которые останутся пустыми, а затем применяем к оставшимся формулу из задачи $a$.

13. а) Применяя результат задачи *12,а*, получаем

$$6^{10} - C_6^1 \cdot 5^{10} + C_6^2 \cdot 4^{10} - C_6^3 \cdot 3^{10} + C_6^4 \cdot 2^{10} - C_6^5 \cdot 1^{10} = \\ = 16435440 \text{ способов;}$$

б) $5^{10} - C_5^1 \cdot 4^{10} + C_5^2 \cdot 3^{10} - C_5^3 \cdot 2^{10} + C_5^4 \cdot 1^{10} = 5103000$ способов;

в) $C_6^1 \cdot \left(5^{10} - C_5^1 \cdot 4^{10} + C_5^2 \cdot 3^{10} - C_5^3 \cdot 2^{10} + C_5^4 \cdot 1^{10}\right) = 30618000$ способов;

г) $C_6^3 \cdot \left(3^{10} - C_3^1 \cdot 2^{10} + C_3^2 \cdot 1^{10}\right) = 1119600$ способов.

14. а) $5^5 - C_5^1 \cdot 4^5 + C_5^2 \cdot 3^5 - C_5^3 \cdot 2^5 + C_5^4 \cdot 1^5 = 120$ способов; б) $C_5^2 \cdot \left(3^5 - C_3^1 \cdot 2^5 + C_3^2 \cdot 1^5\right) = 1500$ способов.

15. Всех студентов можно пересаживать $8!$ способами. Из них в $C_4^1 \cdot 2! \cdot 7!$ способах два студента одного факультета сидят рядом (выбираем факультет $C_4^1$ способами, двух студентов этого факультета можно считать одним объектом пересаживания, и нужно учесть возможность их пересаживания друг с другом). Аналогично подсчитываются количества рассаживаний, при которых студенты двух, трёх, четырёх факультетов

сидят рядом. По формуле включений и исключений получаем

$$8! - C_4^1 \cdot 2! \cdot 7! + C_4^2 \cdot (2!)^2 \cdot 6! - C_4^3 \cdot (2!)^3 \cdot 5! + C_4^4 \cdot (2!)^4 \cdot 4! = \\ = 13824 \text{ способа.}$$

16. $9! - C_3^1 \cdot 3! \cdot 7! + C_3^2 \cdot (3!)^2 \cdot 5! - C_3^3 \cdot (3!)^4 = 283824$ способа.

17. Буквы слова «варвар» можно переставлять $P(2,2,2)$ способами. Из них в $P(1,2,2)$ перестановках рядом стоят буквы «в», в стольких же перестановках рядом стоят буквы «а» и «р», по две буквы стоят рядом в $P(1,1,2)$ перестановках, все три буквы стоят рядом в $P(1,1,1)$ перестановках. По формуле включений и исключений получаем

$$P(2,2,2) - C_3^1 P(1,2,2) + C_3^2 P(1,1,2) - C_3^3 P(1,1,1) = \\ = 30 \text{ способов.}$$

Для слова «кокарда»:

$$P(2,2,1,1,1) - C_2^1 P(2,1,1,1,1) + C_2^2 P(1,1,1,1,1) = \\ = 660 \text{ способов.}$$

Для слова «сенбернар»:

$$P(2,2,2,1,1,1) - C_3^1 P(2,2,1,1,1,1) + C_3^2 P(2,1,1,1,1,1) - \\ - C_3^3 P(1,1,1,1,1,1) = 21960 \text{ способов.}$$

18. $12! - C_3^2 \cdot 2! \cdot 11! + 3! \cdot 10! = 261273600$ способов.

19. $n! - C_k^2 \cdot 2!(n-1)! + C_k^3 \cdot 3!(n-2)! - \ldots + (-1)^k \cdot k!(n-k+1)!$ способов.

20. Найдём количество рассаживаний, при которых $k$ пар врагов сидят рядом. Сначала выбираем те $k$ пар врагов, которые будут сидеть рядом ($C_n^k$ способов). Первую пару из выбранных можно посадить за стол $4n$ способами (первого рыцаря из пары можно посадить на любое из $2n$ мест, второго — по правую или левую руку от него). После этого останется $2n - 2$ места. На них нужно посадить $k - 1$ оставшуюся пару врагов и $2n - 2k$ остальных рыцарей. Это можно сделать

$(2n - 2k + k - 1)! = (2n - k - 1)!$ способами. И ещё нужно учесть, что в $k-1$ парах врагов можно менять местами. Получаем, что при $C_n^k \cdot 4n \cdot 2^{k-1}(2n-k-1)!$ рассаживаниях $k$ пар врагов сидят рядом. По формуле включений и исключений получаем количество рассаживаний, при которых ни одна пара врагов не сидит рядом:

$$(2n)! - C_n^1 \cdot 4n(2n-2)! + C_n^2 \cdot 4n \cdot 2(2n-3)! - \ldots + \\ + (-1)^k \cdot C_n^k \cdot 4n \cdot 2^{k-1}(2n-k-1)! + \ldots + \\ + (-1)^n \cdot 4n \cdot 2^{n-1}(n-1)! = n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^{k+1} \cdot C_n^k (2n-k-1)!.$$

21. Подсчитаем количество рассаживаний, при которых $k$ пар супругов сидят рядом. Выбираем эти $k$ пар $C_n^k$ способами. Затем сажаем первую пару из выбранных $4n$ способами. На оставшиеся $2n-2$ места нужно посадить $k-1$ пару супругов и остальных $n-k$ мужчин и $n-k$ женщин. Для пар супругов, которые должны сидеть рядом, выделяется $2n-2k+k-1 = 2n-k-1$ мест (каждую из $k-1$ пары считаем за один объект). Посадить на них $k-1$ пару можно $A_{2n-k-1}^{k-1}$ способами. Оставшихся мужчин и женщин нужно посадить так, чтобы они чередовались. Это можно сделать $((n-k)!)^2$ способами. Всего получаем $C_n^k \cdot 4nA_{2n-k-1}^{k-1}\,((n-k)!)^2$ способов. По формуле включений и исключений получаем ответ:

$$4n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k A_{2n-k-1}^{k-1} \, ((n-k)!)^2 \text{ способов.}$$

### ***Библиографический список***

1. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика / Н.Я.Виленкин. М.:Наука, 1969. 328 с.

2. *Виленкин, Н.Я.* Рассказы о множествах / Н.Я.Виленкин. М.:МЦНМО, 2004. 152 с.

3. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика / Н.Я.Виленкин, А.Н.Виленкин, П.А.Виленкин. М.: Фима, МЦНМО, 2006. 400 с.

4. *Гаврилов, Г.П.* Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 416 с.

5. *Клини, С.К.* Введение в метаматематику / С.К.Клини. М.: ИЛ, 1957. 529 с.

6. *Куратовский, К.* Теория множеств / К.Куратовский, А.Мостовский. М.: Мир, 1970. 416 с.

7. *Лавров, И.А.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 256 с.

8. *Матросов, В.Л.* Лекции по дискретной математике / В.Л.Матросов, В.Н.Стеценко. М.:МПГУ, 1997. 219 с.

9. *Новиков, Ф.А.* Дискретная математика для программистов / Ф.А.Новиков. СПб.:Питер, 2000. 304 с.

10. *Романовский, И.В.* Комбинаторный анализ / И.В. Романовский. СПб.:Невский диалект, 2004. 320 с.

11. *Рыбников, К.А.* Введение в комбинаторный анализ / К.А.Рыбников. М.: Изд-во МГУ, 1985. 312 с.

12. *Сачков, В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В.Н.Сачков. М.: МЦНМО, 2004. 424 с.

13. *Шапорев, С.Д.* Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий / С.Д.Шапорев. СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2006. 396 с.

14. *Яблонский, С.В.* Введение в дискретную математику / С.В.Яблонский. М.: Высшая школа, 2003. 384 с.

*Пак Вадим Геннадьевич*

**Сборник задач по дискретной математике.**
**Теория множеств. Комбинаторика**

Редактор *А.А.Баутдинова*
Корректор *Л.А.Петрова*
Подписано в печать 11.08.2008. Формат бумаги $60 \times 84/16$. Бумага документная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 6,875. Тираж 250 экз. Заказ № 133
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1