Глава 1. **Двойной интеграл**

В этой главе будут рассмотрены интегралы по плоским областям. К двойным интегралам приводят задачи вычисления аддитивных физических и механических величин (массы, моментов инерции, статических моментов, зарядов и т.п.), связанные с кусочно-непрерывным распределением некоторой величины по плоской области. С помощью двойного интеграла вычисляются также площади плоских фигур и площади криволинейных поверхностей.

§1. Определение двойного интеграла

1°. Пусть $D\subset \boldsymbol{R}_2$ – замкнутая область, ограниченная кусочно-гладкой кривой, и пусть в этой области задана функция $f(M)$, где $M(x,y)\in D$ (рис.1.1). Кусочно-гладкими кривыми разобьём область D на n частичных областей D_1, … , D_n, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, … , ΔS_n. В каждой из областей D_i, выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i)$, вычислим в ней значение функции $f(M_i)$ и составим сумму:

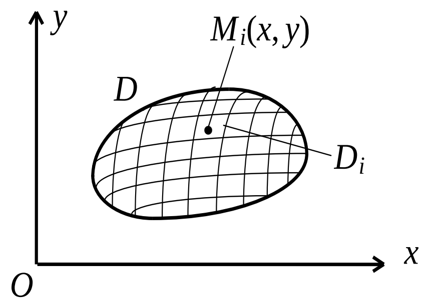

Рис 1.1. К определению двойного интеграла

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i\,, \qquad (1.1)$$

называемую *интегральной суммой* функции $f(M)$ по области D. Значение σ_n зависит не только от n, но и от способа разбиения области D на части и от способа выбора точки M_i в каждой из областей D_i.

Назовём *диаметром* d_i области D_i наибольшее из расстояний между граничными точками этой области. Обозначим через λ *ранг разбиения*, равный наибольшему из диаметров d_i частичных областей: $\lambda=\max\limits_i\{d_i\}$. Если устремить λ к нулю, то число n частичных областей будет неограниченно увеличиваться.

Определение 1.1. Если существует конечный предел интегральной суммы (1.1) при $\lambda\to 0$, понимаемый в смысле определения 2.1 из гл.1, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(M)$ по области D и обозначается одним из символов: $\iint\limits_D f(M)\,dS$ или $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Функция $f(x,y)$ при этом называется *интегрируемой* (*по Риману*) по области D. Таким образом, по определению имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta S_i\,.$$

Классы интегрируемых функций устанавливают следующие теоремы.

Теорема 1.1 (*необходимое условие интегрируемости*). Если функция $f(x,y)$ интегрируема по области D, то она ограничена в области D.

Теорема 1.2. (*достаточное условие интегрируемости*). Если функция $f(M)$ ограничена в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей и непрерывна в D за исключением, быть может, конечного числа гладких кривых, то она интегрируема по этой области.

Указанные в теоремах 1–2 классы функций практически исчерпывают все функции, встречающиеся в приложениях, В дальнейшем предполагается, что рассматриваются только такие функции.