

Вопросы и задачи для самоконтроля к §§1, 2 гл. 4, раздел 7

1. Сформулируйте определения трех видов несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

2. Какой геометрический смысл несобственного интеграла первого рода по промежутку $[a, +\infty)$?

3. Вычислите по определению несобственные интегралы:

$$3.1. \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}. \quad 3.2. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

4. Применяя свойство линейности и формулу Ньютона – Лейбница, вычислите несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$

5. Установите расходимость интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ непосредственно по определению.

6. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$

7. Выполнив подстановку $x^2 = z$, вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§1, 2 гл. 2, раздел 8

$$3.1. -\frac{1}{2}; \quad 3.2. 1.$$

$$\begin{aligned} 4. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} + [\ln(x+1) - \ln x] \Big|_1^{+\infty} = \\ &= 1 + \ln \frac{x+1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

$$5. \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_2^{+\infty} \ln x \, d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$

$$6. \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\ln x = u \left| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{x^2} = dv \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right. \right] = -\frac{\ln x}{x} \Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$7. 1/2.$$