§8. Задача о делении отрезка в данном отношении

Пусть на некоторой прямой l заданы две различные точки A, B и некоторое положительное число λ. Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. В предположении, что известны координаты x_A, y_A, z_A и x_B, y_B, z_B точек A и B, требуется найти координаты точки C из отрезка $[AB]$ такой, что выполняется равенство: $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \lambda$ (рис. 8.1).

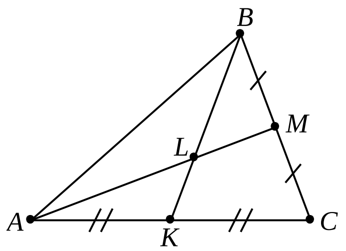

Рис. 8.3. К примеру 8.1

Рис. 8.1. Задача о делении отрезка в данном отношении. Случай $\lambda > 0$ ($\lambda = 2$)

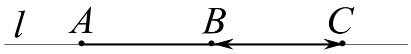

Рис. 8.2. Задача о делении отрезка в данном отношении. Случай $\lambda < 0$ ($\lambda = -2$)

Для векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ справедливо соотношение:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}. \tag{8.1}$$

Число λ называется отношением, в котором точка C делит отрезок $[AB]$.

Так как $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$, $\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C)$, то, переходя в (8.1) к координатам, имеем

$$x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C),\ \ y_C - y_A = \lambda(y_B - y_C),\ \ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_C).$$

Определяя из этих соотношений x_C, y_C, z_C, приходим к равенствам

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{8.2}$$

Замечание 8.1. В случае, если точка C делит отрезок $[AB]$ пополам, то $\lambda=1$ и формулы (8.2) принимают вид

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}. \tag{8.3}$$

Замечание 8.2. Формулы (8.2) остаются справедливыми и тогда, когда точка C не принадлежит отрезку $[AB]$. Число λ определяется из равенства: $\lambda = -\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$ (векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ противонаправлены, рис. 8.2), таким образом, при данной постановке задачи λ отрицательно. И в этом случае λ называется отношением, в котором точка C делит отрезок $[AB]$, хотя здесь она не принадлежит этому отрезку. Заметим, что в принятой постановке задачи $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$.

Пример 8.1. Даны вершины треугольника: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Найти координаты точки пересечения его медиан.

►Пусть точки K и M – середины сторон AC и BC данного треугольника, тогда BK

и AM – его медианы, а L – точка их пересечения (рис.8.3). Из планиметрии известно, что $\dfrac{KL}{LB}=\dfrac{1}{2}$. Координаты точки K найдём по формулам (8.2):

$$x_K=\frac{x_1+x_3}{2},\; y_K=\frac{y_1+y_3}{2},\; z_K=\frac{z_1+z_3}{2},$$

а координаты точки L – по формулам (8.1), приняв $\lambda=1/2$. Для x_L, например, имеем:

$$x_L=\frac{x_k+\frac{1}{2}x_2}{1+1/2}=\frac{\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_2}{2}}{3/2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

Проведя аналогичные вычисления для y_L и z_L, получим равенства:

$$y_L=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\; z_L=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.◄$$

Пример 8.2. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1, 3, –3)$, $B(2, –5, 5)$ и точка $M(1, 1, 1)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты остальных вершин.

►Пусть $M(x_M, y_M, z_M)$, $D\ (x_D, y_D, z_D)$. Точка M – середина отрезков AC и BD (рис. 8.4). Запишем формулы (8.2) для координат точки C:

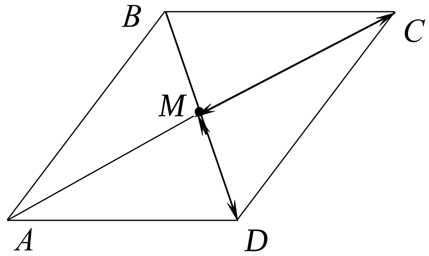

Рис. 8.4. К примеру 8.2

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda},\; y_C=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda},\; z_C=\frac{z_A+\lambda z_M}{1+\lambda},$$

где $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CM}|}=-2$, и подставим в эти формулы координаты точек A, M и число λ:

$$x_C=\frac{1-2\cdot 1}{1-2}=1,\; y_C=\frac{3-2\cdot 1}{1-2}=-1,\; z_C=\frac{-3-2\cdot 1}{1-2}=5.$$

Координаты точки D можно найти аналогичным образом. Имеем: $C(1, –1, 5)$, $D(0, 7, –3)$.◄