Практика.

Потенциальные векторные поля

<u>Определение</u> (потенциального поля)

Векторное поле $\overline{a}\,(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$ называется *потенциальным*, если его можно представить следующим образом:

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A,$$

где $f(M)$- скалярное поле, называемое ***потенциалом*** *потенциального поля*.

Критерий потенциальности векторного поля

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$

Для того, чтобы векторное поле $\overline{a}\,(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор этого поля был равен $\overline{0}$, т.е.

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall\,(\cdot) M \in A \Leftrightarrow rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{0}\ \forall\,(\cdot) M \in A$$

Свойства потенциальных полей

1. Пусть $\overline{a}\,(M)$- потенциальное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$

$$\Rightarrow circul_{\Gamma}\overline{a}(M) = 0,$$

где $\Gamma -$ любой замкнутый контур и $\Gamma \subset A$.

2. Пусть $\overline{a}\,(M)$- потенциальное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Тогда линейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\Gamma_{AB} \subset A$, т.е.

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a}(M) \cdot d\overline{r} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz = \int\limits_{\Gamma_{AB}} df(M) = f(B) - f(A),$$

$f(M) -$ потенциал векторного поля $\bar{a}(M)$.

<u>Замечание</u>

Из определения потенциального поля ($\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A$) следует, что потенциальное векторное $\overline{a}\,(M)$ определяется заданием его потенциала.

Вычисление потенциала потенциального векторного поля

Первый способ

Пусть $\overline{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$.

Тогда потенциал векторного поля может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) - произвольная точка из области определения функций P, Q *и* R.

Второй способ

Второй способ аналогичен нахождению полного дифференциала при решении дифференциальных уравнений 1 порядка в полных дифференциалах

(самостоятельно).

Соленоидальные поля

<u>Определение</u>

Векторное поле $\overline{a}(M) \forall\ M \in A \subset R^3$, называется *соленоидальным*, если

$$div\ \overline{a}(M) = 0\ \forall(\cdot)\ M \in A$$

Свойства соленоидальных полей

1) $div\ \overline{a}(M)=0 \Rightarrow$ поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю, т.е. $\Pi_\sigma \overline{a}(M)=0$;

2) $div\ \overline{a}(M)=0 \Rightarrow$существует некоторое поле $\overline{b}(M)$, такое что

$$\overline{a}(M) = rot\,\overline{b}(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A.$$

Тогда вектор $\overline{b}$ называется *векторным потенциалом* поля $\overline{a}(M)$.

<u>Замечания</u>:

1) Векторный потенциал определяется неоднозначно (это следует из свойства 2);

2) Векторное поле $rot\,\overline{a}(M)$ - это соленоидальное поле, то есть $div\,rot\,\overline{a}(M) = 0$.

Гармонические векторные поля

<u>Определение</u> (гармонического поля)

Векторное поле $\bar{a}\,(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$, называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным, и соленоидальным.

$$\begin{cases} \bar{a}(M) = gradf(M) \\ div\bar{a}(M) = 0 \end{cases}, \quad \forall\, M \in A.$$

<u>Замечание:</u>

Для гармонического поля справедливо равенство:

$$divgradf(M) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} = 0.$$

Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Теорема.

Пусть $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} -$ произвольное векторное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть функции $P(M); Q(M); R(M) -$ имеют непрерывные частные производные $\forall\, M \in A$.

Тогда векторное поле $\bar{a}(M)$ можно разложить на сумму двух полей

$$\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M), \qquad (**)$$

где $\overline{a_1}(M) -$ потенциальное поле, $\overline{a_2}(M) -$ соленоидальное поле $\forall\, M \in A$.

<u>Замечание</u>:

Представление векторного поля $\bar{a}(M)$ в виде (**) не единственно.

Диффереренциальные операции 1 и 2 порядков

Основные формулы

Диффереренциальные операции 1 порядка

Оператор Гамильтона (набла):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \right)$$

Тогда:

$\nabla f(M) = grad\, f(M)$ - для скалярного поля

$\nabla \overline{a}(M) = div\, \overline{a}(M)$ - для векторного поля

$\nabla \times \overline{a}\,(M) = rot\, \overline{a(M)}$ - для векторного поля

Свойства оператора Гамильтона

1)$\nabla c = \bar{0}$, где c – const

2)$\nabla \bar{c} = 0$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор

3) $\nabla \times \bar{c} = \bar{0}$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор

4) $\nabla\left(\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}\right) = \lambda_1 \nabla \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \bar{b}$

5) $\nabla \times \left(\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}\right) = \lambda_1 \nabla \times \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \overline{\times b}$

Дифференциальные операции 2 порядка:

$$div\, grad\, f(M) = \nabla\left(\nabla\, f(M)\right)$$

$$rot\, grad\, f(M) = \nabla \times \nabla\, f(M)$$

$$grad\, div\, \overline{a}(M) = \nabla\left(\nabla\, \overline{a}(M)\right)$$

$$div\, rot\, \overline{a}(M) = \nabla\left(\nabla \times \overline{a}(M)\right)$$

$$rot\, rot\, \overline{a}(M) = \nabla \times \left(\nabla \times \overline{a}(M)\right)$$

Дифференциальные операции 2 порядка, можно представить

в виде таблицы:

$\xcancel{grad\ grad\ f(M)}$	$grad\ div\ \overline{a}(M)$	$\xcancel{grad\ rot\ \overline{a}(M)}$
$div\ grad\ f(M)$	$\xcancel{div\ div\ \overline{a}(M)}$	$div\ rot\ \overline{a}(M)$
$rot\ grad\ f(M)$	$\xcancel{rot\ div\ \overline{a}(M)}$	$rot\ rot\ \overline{a}(M)$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

1) $f(M) -$ **скалярное поле**:

$$\Delta f(M) = \nabla\nabla f(M) = div\ grad\ f(M)$$

или в координатной форме

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}.$$

Замечание:

Если для скалярного поля $f(M)$ выполняется условие $\Delta f(M) = 0$, то такое поле называтся *Лапласовым (или гармоническим).*

2) $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} -$ **векторное поле:**

$$\overline{\Delta a}(M) = \Delta P(M)\bar{\imath} + \Delta Q(M)\bar{\jmath} + \Delta R(M)\bar{k}$$

или в координатной форме

$$\overline{\Delta a}(M) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Свойства оператора Лапласа.

1) $\Delta\bar{c} = 0$, где $\bar{c} -$ постоянный вектор.

2) $\Delta\big(\bar{c}\, f(M)\big) = \bar{c}\, \Delta f(M)$, где $\bar{c} -$ постоянный вектор.

3) $\Delta\big(C\, \bar{a}(M)\big) = C\, \Delta\bar{a}(M), C = const.$

4) $\Delta\big(\bar{a}_1(M) + \bar{a}_2(M)\big) = \Delta\bar{a}_1(M) + \Delta\bar{a}_2(M).$

5) $\Delta\cdot\big(\nabla f(M)\big) = \nabla(\Delta f(M),$

6) $\Delta\big(div\bar{a}(M)\big) = div\big(\Delta\bar{a}(M)\big),$

7) $\Delta\big(rot\bar{a}(M)\big) = rot(\Delta\bar{a}(M))$

Свойства 3) и 4) означают, что оператор Лапласа - это линейный оператор, преобразующий одну векторную величину в другую векторную величину.

Свойства 5) – 7) означают, что оператор Лапласа перестановочен с градиентом, дивергенцией и ротором.

Формулы для дифференциальных операций второго порядка:

1) $rotgradf(M) = \bar{0}$

или

$\nabla\times(\nabla f(M) = \bar{0}.$

2) $\nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) = graddiv\bar{a}(M)$

или

$$\nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}\,.$$

3) $divrot\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla\times\bar{a}(M)\big) = 0\,.$

4) $rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M).$$

Таблица для дифференциальных операций 2 порядка

	$\bar{a}(M)$	$f(M)$	
	$grad\ f(M)$	$div\ \bar{a}\ (M)$	$rot\ \bar{a}\ (M)$
$grad\ f(M)$	---	$grad\ div\ \bar{a}(M) =$ $\nabla\left(\nabla\ \bar{a}(M)\right)$	---
$div\ \bar{a}\ (M)$	$div\ grad\ f(M) =$ $\nabla\left(\nabla\ f(M)\right) = \Delta f(M)$	---	$div\ rot\ \bar{a}(M) =$ $\nabla\left(\nabla \times \bar{a}(M)\right) = 0$
$rot\ \bar{a}\ (M)$	$rot\ grad\ f(M) =$ $\nabla \times \nabla\ f(M) = \bar{0}$	---	$rot\ rot\ \bar{a}(M) = \nabla \times \left(\nabla \times \bar{a}(M)\right) =$ $grad\ div\ \bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M) =$ $\nabla\nabla\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$