§2. Признаки сравнения сходимости положительных рядов

Признаки сравнения позволяют свести выяснение вопроса о сходимости данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или поведение которого уже выяснено.

Теорема 2.1 (первый признак сравнения). ***Пусть имеются два положительных ряда***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (2.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \qquad (2.2)$$

причём члены первого не превосходят соответствующих членов второго:

$$a_n \le b_n, \; n = 1, 2, \dots \qquad (2.3)$$

Тогда из сходимости ряда (2.2) следует сходимость ряда (2.1), а из расходимости ряда (2.1) следует расходимость ряда (2.2).

Теорема 2.2 (признак сравнения в предельной форме). ***Пусть имеются два строго положительных ряда***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (2.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2.5)$$

($a_n > 0$, $b_n > 0$ для всех $n \in \mathrm{N}$). Пусть существует конечный, отличный от нуля, предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (l \ne 0, \; l \ne +\infty).$$

Тогда ряды (2.4) и (2.5) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 2.1. Пусть имеется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (этот ряд называется *гармоническим*). Известно, что $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1$. Значит, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ сходятся или расходятся одновременно. Было показано ранее (см. главу 1, §1, пример 1.2), что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится. Следовательно, гармонический ряд есть ряд расходящийся.

Замечание 2.1. Признаки сравнения для успешного их применения нуждаются в некотором арсенале «эталонных рядов», как сходящихся, так и расходящихся, с которыми затем сравниваются исследуемые ряды. Поэтому мы при всякой появляющейся возможности будем стремиться пополнять этот арсенал. Одним из таких рядов является обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Сходимость этого ряда исследована в следующем параграфе.

Другим «эталонным» рядом является геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \ge 1$.

Следствие (из теоремы 2.2). ***Пусть дан положительный ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$***, причём*** $a_n \sim \frac{C}{n^{\alpha}}$ ***при*** $n \to \infty$***, где*** C ***– постоянное число, тогда ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится при*** $\alpha > 1$ ***и расходится при*** $\alpha \le 1$***. (Здесь ~ является знаком эквивалентности.)***

Пример 2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$.

► Имеем: $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. В этом случае $\alpha = 2 > 1$, следовательно, данный ряд сходится. ◄

Пример 2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 5n^2 + 3}{2^n - \sqrt{n}}$.

► Данный ряд расходится, поскольку его общий член

$$a_n = \frac{3^n - 5n^2 + 3}{2^n - \sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ где } q = \frac{3}{2} > 1. ◄$$