Примеры

Пример 1. (первый способ нахождения потенциала)

Определить тип векторного поля $\overline{a}\,(M)$ и найти его потенциал.

$$\overline{a}(M) = (yz - 2x)\overline{\imath} + (xz - 2y)\overline{\jmath} + xy\overline{k}$$

Решение:

Для проверки потенциальности векторного поля $\overline{a}(M)$ найдем $rot\overline{a}(M)$:

$$rot\overline{a}(M) = \begin{vmatrix} \overline{\imath} & \overline{\jmath} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz - 2x & xz - 2y & xy \end{vmatrix} = \overline{\imath}(x - x) + \overline{\jmath}(y - y) + \overline{k}(z - z) = \overline{0},$$

следовательно векторное поле $\overline{a}(M)$ является потенциальным полем.

Найдем потенциал $f(x; y; z)$ этого поля.

Выбирем точку с коорддинатами $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0.$ из области определения

функций $P, Q\ и\ R.$

Тогда потенциал векторного поля может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z) = \int_0^x (-2x)dx + \int_0^y (-2y)dy + \int_0^z (xy)dz = -x^2 - y^2 + xyz + C.$$

Пример 2.(второй способ нахождения потенциала)

Определить тип векторного поля $\overline{a}\,(M)$ и найти его потенциал

$$\overline{a}(M) = yz\overline{\imath} + xz\overline{\jmath} + xy\overline{k} \quad \forall\ M(x; y; z) \in R^3$$

Решение:

Для проверки потенциальности векторного поля $\bar{a}(M)$ найдем $rot\bar{a}(M)$:

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \bar{\imath}(x - x) + \bar{\jmath}(y - y) + \bar{k}(z - z) = \bar{0},$$

следовательно , векторное поле $\bar{a}(M)$ является потенциальным.

Область R^3 звёздная с центром в начале координат, поэтому воспользуемся вторым способом для вычисления потенциала $f(M)$.

В нашем примере

$$\bar{a}(M') = \bar{a}(tx; ty; tz) = t^2 yz\bar{\imath} + t^2 xz\bar{\jmath} + t^2 xy\bar{k}.$$

и

$$\bar{a}(M') \cdot \bar{r}(M) = t^2(xyz + xyz + xyz) = 3t^2 xyz.$$

Тогда искомый потенциал

$$f(M) = \int_0^1 (\bar{a}(M') \cdot \bar{r}(M))dt + C = 3xyz \int_0^1 t^2 dt + \ C = xyz + C.$$

Итак,

$$f(M) = xyz + C$$

Для проверки правильности решения вычисляем $gradf(x; y; z)$ и он должен совпадать вектрным полем $\bar{a}(M)$.

Пример 3(третий способ нахождения потенциала)

Определить тип векторного поля $\bar{a}(M)$ и найти его потенциал

$$\bar{a}(M) = (y + z)\bar{\imath} + (x + z)\bar{\jmath} + (x + y)\bar{k} \quad \forall\, M(x; y; z) \in R^3$$

Решение:

Для проверки потенциальности векторного поля $\bar{a}(M)$ найдем $rot\bar{a}(M)$:

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \bar{\imath}(1-1) + \bar{\jmath}(1-1) + \bar{k}(1-1) = \bar{0},$$

следовательно , векторное поле $\bar{a}(M)$ является потенциальным.

По определению потенциал $f(x;y;z)$ есть такая скалярная функция, для которой $gradf(x;y;z) = \bar{a}(M)$.

Это векторное равенство равносильно трем скалярным равенствам:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + y \qquad (3)$$

Интегрируя (1) по x, получим

$$f(x;y;z) = \int_0^x (y+z)dx = xy + xz + \varphi(y;z), \qquad (4)$$

где $\varphi(y;z) -$ произвольная дифференцируемая функция от y и z.

Дифференцируя по y обе части равенства (4) и учитывая (2), получим соотношение для нахождения пока неопределенной функции $\varphi(y;z)$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi(y;z)}{\partial y}$$

или

$$x + z = x + \frac{\partial \varphi(y;z)}{\partial y},$$

откуда

$$z = \frac{\partial \varphi(y;z)}{\partial y}. \qquad (5)$$

Проинтерировав (5) по y, будем иметь

$$\varphi(y;z) = \int_0^y z dy = yz + \psi(z), \qquad (6)$$

где $\psi(z) -$ пока неопределенная функция от z.

Подставив (6) в (4), получим

$$f(x;y;z) = xy + xz + zy + \psi(z).$$

Дифференцируя по z обе части последнего равенства и учитывая соотношение (3), получим уравнение для нахождения $\psi(z)$:

$$x + y = x + y + \frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Отсюда

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = 0,$$

следовательно

$$\psi(z) = C = const.$$

Итак,

$$f(x;y;z) = xy + xz + zy + C.$$

Пример 4.

Вычислить линейный интеграл в векторном поле

$$\bar{a}(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$$

вдоль отрезка прямой , ограниченного точками A(-1;0;3) и B(2;-1;0).

Решение:

Проверим сначала, не является ли векторное поле потенциальным.

Для этого найдем $rot\bar{a}(M)$:

$$rot\bar{a}(M)=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\bar{\imath}(0-0)+\bar{\jmath}(0-0)+\bar{k}(0-0)=\bar{0},$$

т.е. векторное поле $\bar{a}(M)$ - это потенциальное поле.

Тогда линейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{\Gamma_{AB}}\bar{a}(M)\cdot d\bar{r}=\int_{\Gamma_{AB}}P(M)dx+Q(M)dy+R(M)dz=\int_{\Gamma_{AB}}df(M)=f(B)-f(A) \qquad (*)$$

Найдем потенциал векторного поля $\bar{a}(M)$.

Выбирем точку с коорддинатами $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=0.$ из области определения функций $P, Q\ u\ R.$

Тогда потенциал векторного поля может быть найден по формуле:

$$f(x;y;z)=\int_{x_0}^{x}P(x;y_0;z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x;y;z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x;y;z)dz+C.$$

Для нашего случая :

$$f(x;y;z)=\int_{0}^{x}x\,dx+\int_{0}^{y}y\,dy+\int_{z_0}^{z}z\,dz+C=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+C.$$

Применяя формулу (*), получим

$$\int_{\Gamma_{AB}}\bar{a}(M)\cdot d\bar{r}=f(B)-f(A)=f(2;-1;0)-f(-1;0;3)=\frac{5}{2}-5=-\frac{5}{2}$$