§3. Векторное произведение двух векторов

Определение 3.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведённых к общему началу, называется *правоориентированной* или *правой* (соответственно *левой*), если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против (по) часовой стрелке (рис. 3.1, 3.2).

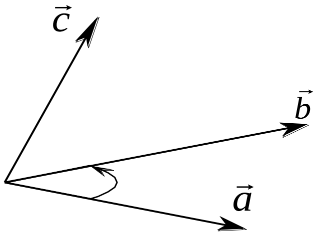


Рис. 3.1. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая

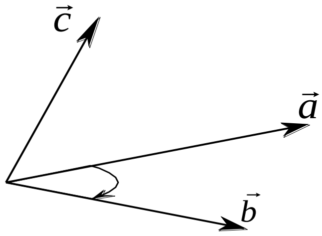


Рис. 3.2. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая

Замечание 3.1. Угол φ поворота от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ в этом определении, очевидно, равен по величине углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, и поэтому $0<\varphi<\pi$. Он не может быть равным 0 или π, так как $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные векторы и, следовательно, $\vec{a}, \vec{b}$ – неколлинеарные векторы.

Замечание 3.2. В соответствии с ориентацией ортов декартовой прямоугольной системы координат, последняя называется *правой* или *левой*. В дальнейшем, если не оговорено противное, используется правая система координат.

Определение 3.2. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$;
2. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Замечание 3.3. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или хотя бы один из них нулевой, то их векторное произведение $\vec{c}$ считается равным нуль-вектору. В самом деле, в этом случае $|\vec{c}| = 0$, так как либо $\sin(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = 0$, либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$.

Для векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$, иногда $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Пример 3.1. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$, где $\vec{i}, \vec{j}$ – орты прямоугольного базиса. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ и изобразить его на чертеже.

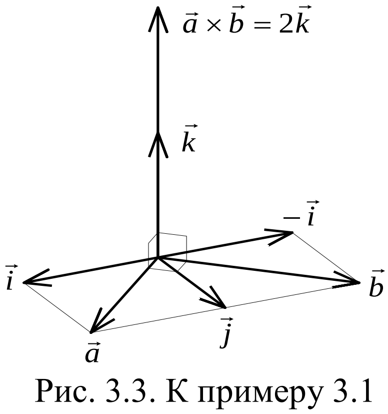


Рис. 3.3. К примеру 3.1

►Рассмотрим прямоугольный базис $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ и построим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.3). Так как $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\pi/2$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$, то $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=2$. Вектор $\vec{k}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{k}$ – правая (рис. 3.3). Поэтому векторы $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{k}$ коллинеарны и сонаправлены, и $\vec{a}\times\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{k}|}\vec{k}=2\vec{k}$.◄

Векторное произведение применяют, например, в физике для вычисления момента $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно данной точки O, который по определению равен $\vec{r}\times\vec{F}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки P – точки приложения силы $\vec{F}$, отложенный от точки O (рис. 3.4). Таким образом,

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}\,. \tag{3.1}$$

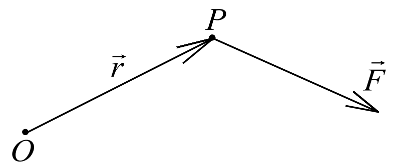


Рис. 3.4. К понятию момента силы $\vec{F}$ относительно точки O

Свойства векторного произведения

1. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах.

2. Векторное произведение ненулевых векторов равно нуль-вектору тогда и только тогда, когда его сомножители коллинеарны (линейно зависимы).

Следствие: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

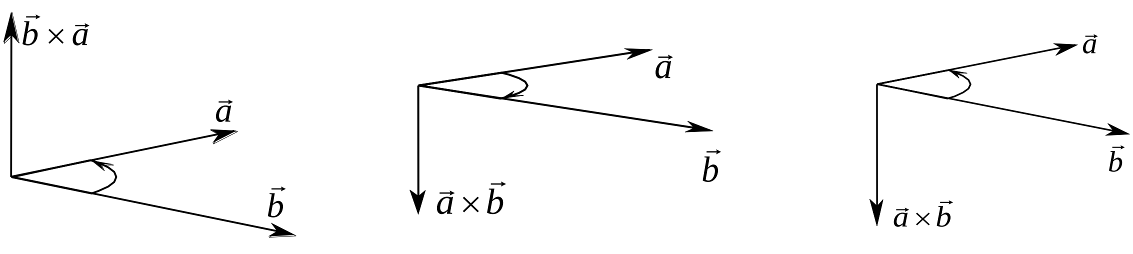
3. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативность).

4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

5. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивность).

►**1.** Как известно из планиметрии, площадь параллелограмма S равна произведению длин его смежных сторон на синус угла между ними. Поэтому имеем $S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}\times\vec{b}|$.

2. Из равенства $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ следует коллинеарность этих векторов. Действительно, предположив, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны из определения 3.2 (условие 1) получаем $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$, поскольку в этом случае $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\neq 0$, $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{b}|\neq 0$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$ или π, поэтому $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$, либо один из векторов нулевой. В любом из этих случаев имеем $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



$\vec b,\ \vec a,\ \vec b\times\vec a$ – правая тройка $\quad$ $\vec a,\ \vec b,\ \vec a\times\vec b$ – правая тройка $\quad$ $\vec b,\ \vec a,\ \vec a\times\vec b$ – левая тройка

Рис. 3.5. Иллюстрация к доказательству свойства 3 – свойства антикоммутативности векторного произведения

3. Доказываемое равенство очевидно, если $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны или один из них нулевой. Далее предполагаем, что $\vec a$ и $\vec b$ – неколлинеарные и, следовательно, ненулевые векторы. Длины векторов $\vec a\times\vec b$ и $\vec b\times\vec a$ равны в силу первого условия из определения 3.2, так как $(\widehat{\vec a,\vec b})=(\widehat{\vec b,\vec a})$. Они коллинеарны, поскольку перпендикулярны одной и той же паре неколлинеарных векторов. Остаётся показать, что они противонаправлены. В самом деле, тройки векторов $\vec b$, $\vec a$, $\vec b\times\vec a$ и $\vec a$, $\vec b$, $\vec a\times\vec b$ – обе правые по определению 3.2, а тройка векторов $\vec b$, $\vec a$, $\vec a\times\vec b$ – левая (рис. 3.5). Поэтому $\vec a\times\vec b$ и $\vec b\times\vec a$ противонаправлены.

4. Доказываемое соотношение очевидно, если векторы $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны, либо один из них нулевой, либо $\lambda=0$. Для неколлинеарных (и, следовательно,
ненулевых) векторов $\vec a$ и $\vec b$ и $\lambda\neq0$ покажем, что вектор $\lambda(\vec a\times\vec b)$ является векторным произведением векторов $\lambda\vec a$ и $\vec b$. Имеем

$$|\lambda(\vec a\times\vec b)|=|\lambda|\cdot|\vec a\times\vec b|=|\lambda|\cdot|\vec a|\cdot|\vec b|\sin(\widehat{\vec a,\vec b})=|\lambda\vec a|\cdot|\vec b|\sin(\widehat{\vec a,\vec b}).$$

Углы $(\widehat{\vec a,\vec b})$ и $(\widehat{\lambda\vec a,\vec b})$ либо совпадают (при $\lambda>0$, рис. 3.6), либо в сумме равны π (при $\lambda<0$, рис. 3.6), отсюда $\sin(\widehat{\vec a,\vec b})=\sin(\widehat{\lambda\vec a,\vec b})$. Окончательно получаем $|\lambda(\vec a\times\vec b)|=|\lambda\vec a|\cdot|\vec b|\sin(\widehat{\lambda\vec a,\vec b})=|(\lambda\vec a)\times\vec b|$. Условие 1 из определения 3.2 выполнено.

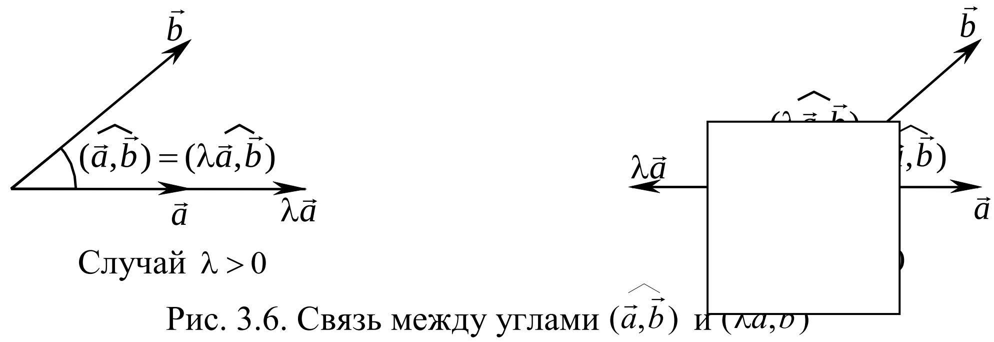


Рис. 3.6. Связь между углами $(\widehat{\vec a,\vec b})$ и $(\widehat{\lambda\vec a,\vec b})$

Условие 2 также выполнено, ибо вектор $\lambda(\vec a\times\vec b)$ перпендикулярен векторам $\vec a$ и $\vec b$, поэтому перпендикулярен и векторам $\lambda\vec a$ и $\vec b$. Наконец, векторы $\lambda\vec a$, $\vec b$ и $\lambda(\vec a\times\vec b)$ при любом $\lambda\neq0$ образуют правую тройку (рис. 3.7).◄

Свойство 5 будет доказано в §4 настоящей главы.

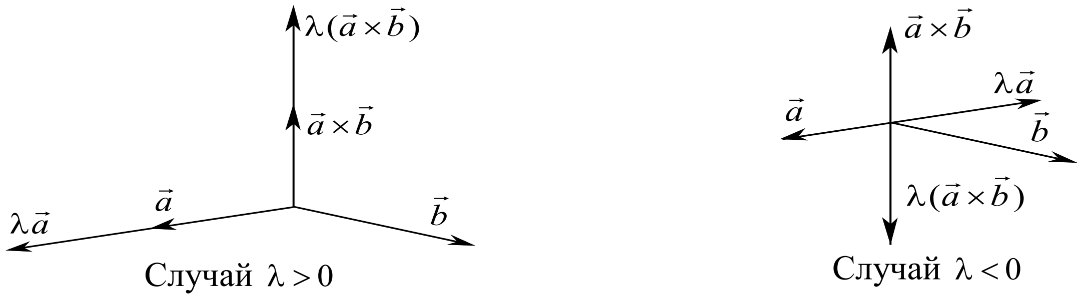


Рис. 3.7. Иллюстрация к доказательству св. 4 векторного произведения

Пример 3.2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec a=2\vec p-\vec q$ и $\vec b=\vec p+3\vec q$, если $|\vec p|=2$, $|\vec q|=3$, а $(\widehat{\vec p,\vec q})=\pi/6$.

►Искомая площадь $S=|\vec a\times\vec b|$ (свойство 1), $\vec a\times\vec b=(2\vec p-\vec q)\times(\vec p+3\vec q)$. Используем свойство 5: $\vec a\times\vec b=(2\vec p)\times\vec p-\vec q\times\vec p+(2\vec p)\times(3\vec q)-\vec q\times(3\vec q)$. По следствию из свойства 2: $(2\vec p)\times\vec p=\vec q\times(3\vec q)=\vec 0$, а по свойству 4: $(2\vec p)\times(3\vec q)=6(\vec p\times\vec q)$. В результате получаем равенство $\vec a\times\vec b=-\vec q\times\vec p+6(\vec p\times\vec q)$. Поменяем местами сомножители в первом слагаемом в правой части (3.2). В силу свойства 3 это слагаемое изменяет знак. После приведения подобных членов приходим к соотношению $\vec a\times\vec b=7(\vec p\times\vec q)$. Теперь имеем

$S=|7(\vec p\times\vec q)|=7|\vec p\times\vec q|=7|\vec p|\,|\vec q|\sin(\widehat{\vec p,\vec q})=7\cdot2\cdot3\cdot1/2=21$(кв. ед.).◄