Замечание 1.2 **(об оценке суммы остатка ряда).** Пусть знакочередующийся ряд (1.1) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Рассмотрим сначала остаток ряда (1.1) после $2m$-го члена, сумму которого обозначим через σ:

$$\sigma = a_{2m+1} - a_{2m+2} + a_{2m+3} - a_{2m+4} + \ldots \ .$$

По замечанию 1.1 имеем: $0 \le \sigma \le a_{2m+1}$. Видим, что

1) сумма σ остатка ряда имеет знак первого члена остатка;

2) $|\sigma| \le a_{2m+1}$, т.е. абсолютная величина суммы остатка не превосходит абсолютной величины первого члена этого остатка.

Рассмотрим теперь остаток ряда (1.1) после $(2m-1)$-го члена. Обозначим сумму этого остатка через $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = -a_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} + \ldots = -(a_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} - \ldots).$$

Пусть

$$\tilde{\sigma}_* = a_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} - \ldots \ , \tag{1.3}$$

а тогда

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{\sigma}_*. \tag{1.4}$$

Замечаем, что ряд (1.3) – знакочередующийся и удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Первый член ряда (1.3) – положительный. Поэтому, по доказанному выше, будем иметь:

1) $\tilde{\sigma}_* > 0$;

2) $|\tilde{\sigma}_*| \le a_{2m}$.

Но тогда:

1) $\tilde{\sigma} < 0$ (так как $\tilde{\sigma} = -\tilde{\sigma}_*$);

2) $|\tilde{\sigma}| = |-\tilde{\sigma}_*| = |\tilde{\sigma}_*| \le a_{2m}$.

Следовательно, и в этом случае имеем:

1) сумма $\tilde{\sigma}$ остатка ряда имеет знак первого члена остатка;

2) $|\tilde{\sigma}| \le a_{2m}$, т.е. абсолютная величина суммы остатка не превосходит абсолютной величины первого члена остатка.