§4. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона – Лейбница

Предварительно заметим, что величина определённого интеграла зависит от вида подынтегральной функции $f(x)$, от пределов интегрирования a, b и не зависит от обозначения переменной интегрирования. Ее можно обозначить буквами x, u, t, z и т. д. Поэтому имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (4.2)$$

Он является функцией верхнего предела x. Эта функция обладает более простыми свойствами, чем подынтегральная, поэтому операцию интегрирования можно рассматривать как операцию сглаживания функции.

Теорема 4.1 (*о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).* Если функция $f(x)$ интегрируема по промежутку $[a,b]$, и $x \in [a,b]$, то функция $\Phi(x)$ из (4.2) непрерывна в промежутке $[a,b]$.

► Доказательство теоремы опирается на ряд свойств интеграла, верных для любой интегрируемой функции, но в нашем курсе обоснованных для класса кусочно-непрерывных функций, наиболее важного для практических приложений, которым мы и ограничиваемся в наших рассмотрениях Доказательство свойств интеграла, а стало быть и теоремы 4.1, для общего случая интегрируемых функций можно найти в более подробных курсах, например, например, в [1, 8].

Придадим аргументу x функции $\Phi(x)$ приращение Δx такое, что точка $x+\Delta x$ не выходит за пределы рассматриваемого промежутка $[a,b]$. Тогда

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Отсюда

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применим к интегралу теорему 3.1 о среднем, получим: $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \mu\Delta x$. Здесь μ содержится между точными границами m' и M' функции $f(x)$ в промежутке между точками x и $x+\Delta x$, а следовательно, и подавно между постоянными границами m и M функции в основном промежутке $[a,b]$. Напомним при этом, что всякая интегрируемая функция необходимо ограничена на промежутке интегрирования, поэтому для нее существуют точная верхняя и нижняя границы на рассматриваемом промежутке. Итак, $\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \mu\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x. Так как точка x – любая из $[a,b]$, то доказана непрерывность $\Phi(x)$ на $[a,b]$. ◄

Теорема 4.2 (*теорема Барроу,* 1630–1677*, английский математик, учитель Ньютона*). Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, то для любого x из промежутка $[a,b]$ справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \qquad (4.3)$$

Итак, производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна подынтегральной функции, взятой на верхнем пределе интеграла.

► Рассмотрим приращение функции $\Phi(x)$: $\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) =$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x.$$

Здесь к последнему интегралу применена теорема о среднем 3.2 (формула (3.2)). При этом точка c принадлежит промежутку с концами x и $x+\Delta x$. Далее находим $\Delta\Phi(x)/\Delta x = f(c)$. Отсюда

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x),$$

так как при $\Delta x \to 0$ точка c стремится к точке x, и по непрерывности подынтегральной функции $f(c)$ стремится к $f(x)$. ◄

* ***Замечание.*** В более общем случае, когда подынтегральная функция не является везде непрерывной в промежутке интегрирования, равенство (4.3) сохраняется во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

► Используем обозначения и результаты доказательства теоремы 4.1.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt;\ \ \Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \mu\cdot\Delta x, \text{ где } m' \le \mu \le M'.$$

Отсюда $\Delta\Phi(x)/\Delta x = \mu$. По определению непрерывности функции $f(t)$ в точке $t = x$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $|\Delta x| < \delta$ будут выполняться неравенство

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

для всех значений t из промежутка с концами x и $x+\Delta x$. Так как m' и M' – точные границы $f(t)$ в этом промежутке, то для них эти неравенства принимают вид: $f(x) - \varepsilon \le m' \le M' \le f(x) + \varepsilon$. Тогда $f(x) - \varepsilon \le \mu \le f(x) + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mu = f(x)$. Отсюда следует, что

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x)/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\mu = f(x). \ ◄$$

Следствие из теоремы Барроу. Для всякой непрерывной функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ существует в этом промежутке первообразная. Одной из первообразных для $[a,b]$ является интеграл с переменным верхним пределом (4.2).

Теорема Барроу имеет огромное теоретическое и практическое значение. С одной стороны, она устанавливает связь между двумя самостоятельно развитыми разделами математического анализа – теориями неопределённого и определённого интегралов. С другой стороны, она даёт важнейший способ вычисления определённого интеграла с помощью первообразной подынтегральной функции. Этот способ известен как формула Ньютона – Лейбница, рассматриваемая ниже. Формула Ньютона – Лейбница в средней школе служила определением определённого интеграла. Здесь она выводится, так как определённый интеграл определялся иначе, как предел интегральной суммы.

Теорема 4.3 (*Формула Ньютона – Лейбница*). Определённый интеграл равен разности значений любой первообразной для подынтегральной функции, взятых на верхнем и нижнем пределах интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{4.4}$$

Здесь $F'(x) = f(x)$.

► Теорема Барроу установила, что интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных для подынтегральной функции $f(t)$. Пусть $F(x)$ – ещё одна из первообразных. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, так как две любые первообразные для одной и той же функции $f(x)$ отличаются лишь на постоянную. Найдем эту постоянную C, положив в последнем равенстве $x = a$. Получаем $\Phi(a) = F(a) + C$. Отсюда $C = \Phi(a) - F(a) = -F(a)$, так как $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Итак, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C = F(x) - F(a)$. Отсюда при $x = b$ находим $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Это и есть иначе записанная формула (4.4). ◄

Примеры.

4.1. $\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$.

4.2. $\int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$.