§1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка

Определение 1.1. *Поверхностью второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0, \qquad (1.1)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \boldsymbol{R}$, а $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$.

Можно показать [3], что при надлежащем выборе прямоугольной системы координат множество точек, определяемое уравнением (1.1) будет описываться одним из ниже перечисленных уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (1.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad (1.5)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z; \qquad (1.6)$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z; \qquad (1.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1.9)$$

$$y^2=2px; \qquad (1.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad (1.11)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1; \qquad (1.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad (1.13)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad (1.14)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (1.15)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \qquad (1.16)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1; \qquad (1.17)$$

$$x^2=0. \qquad (1.18)$$

Предполагается, что $a, b, c, p, q > 0$ в каждом из уравнений (1.2) – (1.17). Уравнения (1.15) – (1.17) задают пустые множества точек, уравнение (1.13) задаёт ось *Oz* ($x=0, y=0, z \in \boldsymbol{R}$), уравнение (1.14) – начало координат ($x=0, y=0, z=0$). Уравнения (1.11) и (1.12) определяют пару пересекающихся и пару параллельных плоскостей, уравнение (1.18) – пару слипшихся плоскостей. Геометрические образы, задаваемые уравнениями (1.2) – (1.10), называются *невырожденными поверхностями второго порядка*, а уравнения (1.2) – (1.10) – их *каноническими уравнениями*. Форма и некоторые свойства этих поверхностей, вытекающие из их уравнений, изучаются в следующих параграфах с помощью так называемого *метода параллельных сечений*.