§9. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли

Метод математической индукции применяется для доказательства истинности утверждения $\alpha(n)$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$, при этом должны быть выполнены следующие два условия:

1). Утверждение $\alpha(n)$ истинно для n=1 – база индукции.

2). Из гипотезы: утверждение $\alpha(n)$ верно при $n = k$ (k – любое натуральное число) следует, что оно истинно и при n= k+1 – индукционный шаг.

Пример 9.1. Доказать, что неравенство Бернулли $(1+a)^n \geq 1+na$ верно при $\forall n \in \boldsymbol{N}$ и $\forall a \geq -1$.

►Заметим, что при $a=-1$ справедливость неравенства Бернулли очевидна. Далее предполагаем, что $a \neq -1$.

При n=1 имеем верное равенство 1+a=1+a. Гипотеза: данное неравенство верно при n=k, т.е. неравенство $(1+a)^k \geq 1+ka$ верно при $\forall k \in \boldsymbol{N}$. Проверяя гипотезу, умножим обе части последнего неравенства на 1+a, получим:

$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ или

$(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2=1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$. Итак,

$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$, а это и означает, что неравенство Бернулли верно при n= k+1. Отсюда следует, что оно верно и для $\forall n \in \boldsymbol{N}$ и $\forall a \geq -1$.◄