Криволинейные интегралы I рода.

Примеры

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L xy^2 dl$$

где L - отрезок прямой между точками A (0,0), B(4,3).

Решение.

Прямолинейный отрезок AB лежит в плоскости Oxy (рис. 4.2), на нем задана функция $f(x, y) = xy^2$.

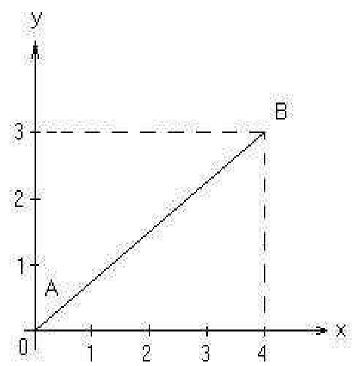

рис. 4.2

Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x$. Так как $y' = \frac{3}{4}$, то

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{4}dx.$$

По формуле (1.6) получаем

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2 \frac{5}{4}dx = \int_0^4 \frac{45}{64}x^3 dx = \frac{45}{64}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4 = \frac{45}{64}\frac{4^4}{4} = 45.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(x^5 + 8xy\right) dl,$$

где L - дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$, $x = 1$.

Решение:

Поскольку $y' = x^3$, $dl = \sqrt{1+x^6}dx$ и на дуге кривой $4y = x^4$ функция

$$f(x,y) = \left(x^5 + 8xy\right) = x^5 + 4y2x = x^5 + x^4\,2x = 3x^5,$$

то по формуле (1.6)

$$\int_L \left(x^5 + 8xy\right) dl = \int_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}dx = 3\int_0^1 \left(1+x^6\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6} d\left(1+x^6\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L y\sqrt{y^2+1}dl,$$

где L - дуга кривой $x = \ln(y)$ между точками, для которых $y = 1$, $y = 4$.

Решение:

Так как кривая задана уравнением $x = \phi(y)$, то дифференциал ее дуги выражается формулой

$$dl = \sqrt{1+x'^2}dy$$

Криволинейный интеграл вычислим по формуле

$$\int_L f(x,y)dl = \int_c^d f\left[\phi(y), y\right]\sqrt{1+x'^2}dy.$$

В данном случае $c = 1$, $d = 4$ и

$$dl = \sqrt{1+x'^2}dy = \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}dy = \frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy.$$

Тогда получим:

$$\int_L y\sqrt{y^2+1}dl = \int_1^4 y\sqrt{y^2+1}\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy = \int_1^4 \left(y^2+1\right)dy = \left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3}+4\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right) =$$

$$= \frac{64}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1 = 24.$$

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (2x+y)\,dl,$$

где *L* - контур треугольника ABO (рис. 4.3) с вершинами A(1,0), B(0,2), O(0,0).

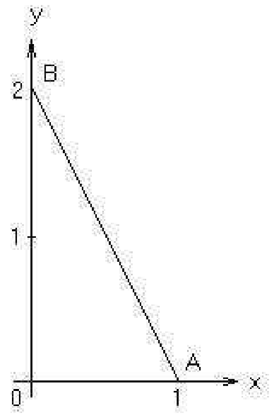

рис. 4.3

Решение:

В соответствии с четвертым свойством криволинейного интеграла первого рода

$$\int_L (2x+y)\,dl = \int_{AB} (2x+y)\,dl + \int_{BO} (2x+y)\,dl + \int_{OA} (2x+y)\,dl.$$

На отрезке AB : $y = -2x + 2$.

$$y' = -2,\ dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx,\ 0 \le x \le 1.$$

На отрезке BO: $x = 0$

$$x' = 0,\ dl = \sqrt{1+x_y'^2},\ dy = dy,\ 0 \le y \le 2.$$

На отрезке OA: $y = 0$

$$y' = 0,\ dl = \sqrt{1+y'^2},\ dx = dx,\ 0 \le x \le 1.$$

Принимая во внимание первое свойство криволинейного интеграла и используя формулы (1.6) и (1.7), получаем

$$\int_L (2x+y)\,dl = \int_0^1 2\sqrt{5}dx + \int_0^2 ydy + \int_0^1 2xdx = 2\sqrt{5}x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^1 = 3 + 2\sqrt{5}.$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x+y)\,dl$$,

где L - лепесток лемнискаты Бернулли $\rho = a\sqrt{\sin 2\phi}$ (рис.4.4), расположенный в первом координатном углу.

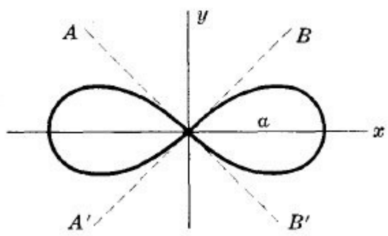

Рис. 4.4

Решение:

Линия *L* задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (1.8).

Так как

$$\rho_\phi' = a\frac{1}{2\sqrt{\sin 2\phi}}\cos 2\phi \cdot 2 = \frac{a\cos 2\phi}{\sqrt{\sin 2\phi}},$$

то

$$dl = \sqrt{a^2\sin 2\phi + \frac{a^2\cos^2 2\phi}{\sin 2\phi}}d\phi = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\phi}}d\phi = \frac{a^2 d\phi}{a\sqrt{\sin 2\phi}} = \frac{a^2 d\phi}{\rho}$$

Заметим, что угол между AB' или A'B и осью x = 45°, т.е.

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},$$

следовательно $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Тогда по формуле (1.8) получим

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\phi + \rho\sin\phi)\frac{a^2 d\phi}{\rho} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi + \sin\phi)\,d\phi = a^2(\sin\phi - \cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L xdl,$$

где L - первая арка циклоиды

$$x = a\left(t - \sin t\right),\quad y = a\left(1 - \cos t\right)\quad (a > 0).$$

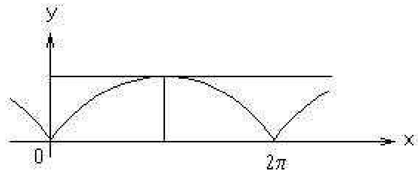

рис. 4.5

Решение:

Применим формулу (1.5). Для первой арки циклоиды (рис. 4.5) для $0 \le t \le 2\pi$, т. е. $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Поскольку

$$x'_t = a\left(1 - \cos t\right),\quad y'_t = a\sin t$$

и

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \sqrt{a^2\left(1 - \cos t\right)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

по формуле (4.5) получаем:

$$\int\limits_L xdl = \int\limits_0^{2\pi} a\left(t - \sin t\right) 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\int\limits_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2,$$

Так как

$$\int\limits_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt = -2\int\limits_0^{2\pi} td\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt = -2\left(2\pi\cos\pi - 0\cos 0\right) + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt = 2\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}2d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = 4\left.\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (2x+4y-4z+7)\,dl ,$$

где *L* - отрезок прямой между точками $M_1(8, 9, 3)$, $M_2(6, 10, 5)$.

Решение:

Составим сначала уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2,:

$$\frac{x-8}{6-8}=\frac{y-9}{10-9}=\frac{z-3}{5-3} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{-2}=\frac{y-9}{1}=\frac{x-3}{2}(=t)$$

Таким образом, получены параметрические уравнения прямой:

$$x=8-2t,\ y=9+t,\ z=3+2t.$$

Когда точка M пробегает отрезок M_1M_2,тогда параметр t изменяется от 0 до 1, т. е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Так как $x'=-2$, $y'=1$, $z'=2$, то

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{4+1+4}\,dt=3dt.$$

По формуле (1.4)

$$\int_L (2x+4y-4z+7)\,dl=\int_0^1 \left[2(8-2t)+4(9+t)-4(3+2t)+7\right]3dt=3\int_0^1 (47-8t)\,dt=3\left(47t-4t^2\right)\Big|_0^1=$$

$$=3(47-4)=129.$$

Пример 8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L xydl,$$

где *L* - дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (рис. 4.6), ограниченная

точками, для которых $t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{2}$.

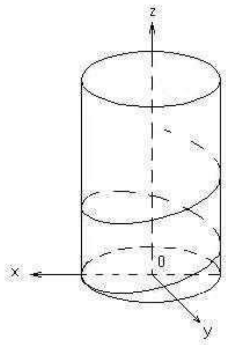

рис. 4.6

Решение:

Применим формулу (1.4).

Поскольку

$$x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = b,$$

то

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt.$$

и

$$\int\limits_L xydl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos tb\sin t\sqrt{a^2 + b^2}dt = ab\sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin tdt = ab\sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin td(\sin t) =$$

$$= ab\sqrt{a^2 + b^2}\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример 9. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl,$$

где *L* – линия , полученная в результате $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $y=z$.

Решение:

В данном случае линия задана пересечением двух поверхностей: сферы и плоскости. Составим параметрические уравнения линии пересечения, положив $y=z=t$.

Тогда

$$x=\pm\sqrt{R^2-2t^2}$$

(получено из уравнения $x^2+y^2+z^2=R^2$ с учетом равенств $y=z=t$).

Из параметрических уравнений линии

$$x=\pm\sqrt{R^2-2t^2},\quad y=t$$

находим:

$$x'=\pm\frac{2t}{\sqrt{R^2-2t^2}},\quad y'=1,\quad z'=1.$$

Тогда получим:

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{\frac{4t^2}{R^2-2t^2}+1+1}dt=\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2-2t^2}}dt.$$

Из равенств $x=\pm\sqrt{R^2-2t^2}$ определим пределы изменения *t*.

Пусть $x=0$, т.е. $R^2-2t^2=0$, откуда $t_1=\frac{-R}{\sqrt{2}}$, $t_2=\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Заметив, что на данной линии $x^2+2z^2=R^2$

или $\sqrt{x^2+2z^2}=R$, по формуле (1.4)

$$\int_L \sqrt{x^2 + 2z^2}\,dl = 2\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} R\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\,dt = 2R^2\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{R^2 - \left(\sqrt{2}t\right)^2}} = 2R^2 \arcsin\frac{\sqrt{2}t}{R}\Bigg|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} =$$

$$= 2R^2\left[\arcsin 1 - \arcsin\left(-1\right)\right] = 2R^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi R^2.$$