*§9. Асимптотическое представление бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x \to a$, а – вещественное число или один из символов ∞, +∞, –∞. Если

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то из теоремы 4.3 следует равенство $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1+\alpha(x)$ или

$$f(x)=g(x)+\alpha(x)g(x), \qquad (9.1)$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x \to a$. Произведение $\alpha(x)g(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $g(x)$, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$, и более низкий порядок роста, чем $g(x)$ при $x \to a$, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to a$. В обоих случаях верно равенство $\alpha(x)g(x)=o(g(x))$, где символ o имеет смысл, описанный в определениях 6.2 и 8.1. Заменив в (9.1) в силу последнего равенства $\alpha(x)g(x)$ на $o(g(x))$, приходим к соотношению:

$$f(x)=g(x)+o(g(x)), \qquad (9.2)$$

называемое асимптотическим представлением функции $f(x)$ при $x \to a$. Слагаемое o($g(x)$) в (9.2) называют остаточным членом. В качестве функции $g(x)$ обычно выбирают степенную функцию $C(x-a)^k$ или многочлен.

Асимптотические представления (иначе асимптотические разложения или асимптотические формулы) используются при решении различных задач математического анализа, например, при раскрытии неопределённостей, отыскании асимптот графиков функций и т.д.

Замечание 9.1. В разделе 5 будет рассмотрен другой способ получения асимптотических разложений, требующий, однако, чтобы функция удовлетворяла более жёстким условиям, чем те, при которых получена формула (9.2).

Замечание 9.2. Функция $g(x)$ из равенства (9.2) может служить аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$. Приближённое равенство $f(x)\approx g(x)$ представляет функцию $f(x)$ тем точнее, чем меньше |x–a|, если a – действительное число, или, чем больше | x|, если a один из символов ∞, + ∞ или – ∞.

Напишем асимптотические разложения для некоторых элементарных функций, используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций (таблица 7.1) и теорему 7.2.

Таблица 9.1.

Асимптотические разложения бесконечно малых функций

Пусть функция $\alpha=\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда

$$\sin\alpha=\alpha+o(\alpha), \quad (9.3) \qquad 1-\cos\alpha=\alpha^2/2+o(\alpha^2), \quad (9.4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\alpha+o(\alpha), \quad (9.5) \qquad \arcsin\alpha=\alpha+o(\alpha), \quad (9.6)$$

$$\operatorname{arctg}\alpha=\alpha+o(\alpha), \quad (9.7) \qquad e^{\alpha}-1=\alpha+o(\alpha) \quad (9.8)$$

$$\ln(1+\alpha)=\alpha+o(\alpha), \quad (9.9) \qquad (1+\alpha)^{\mu}-1=\mu\alpha+o(\alpha). \quad (9.10)$$

Равенства (9.3) – (9.10) служат источником для получения аналогичных формул для различных элементарных функций.

Пример 9.1. Найти асимптотическое разложение функции $f(x)=\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x$, при $x\to 0$ с остаточным членом вида $o(x^p)$, где p>0.

► $\cos 6x=1-18x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$ (разложение (9.4), $\alpha=6x$), отсюда имеем: $\sqrt[3]{\cos 6x}=(1-18x^2+o(x^2))^{1/3}$ или

$$\sqrt[3]{\cos 6x}=1+1/3(-18x^2+o(x^2))+o(-18x^2+o(x^2))=1-6x^2+o(x^2)$$

(формула (9.10) и свойства символа o, §6). Функцию $\sin^2 x$ запишем в виде:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}4x^2+o(4x^2))=x^2+o(x^2)$$

(формула (9.4)). Таким образом, приходим к равенству: $f(x)=1-6x^2+o(x^2)+x^2+o(x^2)$ или $f(x)=1-5x^2+o(x^2)$.◄

Пример 9.2. Найти асимптотическое разложение функции

$f(x)=(1+x)^x$ при $x\to 0$ с остаточным членом вида $o(x^p)$, где p>0.

►Для функции $f(x)$ справедливо равенство $f(x)=e^{x\ln(1+x)}$ (см. (5.1)). Из (9.9) при $x\to 0$ следует разложение $x\ln(1+x)=x(x+o(x))=x^2+o(x^2)$, следовательно, $f(x)=e^{x^2+o(x^2)}$. Теперь с помощью (9.8) приходим к соотношению:

$$f(x)=1+x^2+o(x^2)+o(x^2+o(x^2))$$

или, в силу свойств символа o (§6), $f(x)=(1+x)^x=1+x^2+o(x^2)$.◄

Асимптотическое разложение бесконечно малой функции можно получить, выделив её главную часть. Так, для функции $f(x)=\operatorname{arctg}(x^3-3x^2+4)$ при $x\to 2$ имеем разложение: $f(x)=3(x-2)^2+o((x-2)^2)$, поскольку $3(x-2)^2$ – её главная часть при $x\to 2$ (пример 7.4).

Равенство $\sin\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}=\dfrac{3}{5x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ – асимптотическое разложение функции $g(x)=\sin\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$ при $x\to\infty$, ибо $\dfrac{3}{5x^2}$ – главная часть $g(x)$ при $x\to\infty$ (пример 7.5).

Пример 9.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\arcsin(x^3-2x^2)}$.

►Дробь под знаком предела при $x\to 0$ даёт неопределённость $\frac{0}{0}$. Поскольку $(1+x)^x-1=x^2+o(x^2)$ (пример 9.2) и $\arcsin(x^3-2x^2)=x^3-2x^2+$ $+o(x^3-2x^2)=-2x^2+o(x^2)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{\arcsin(x^3-2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{-2x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(x^2)/x^2}{-2+o(x^2)/x^2}=-\frac{1}{2},$$

так как $o(x^2)/x^2\to 0$ при $x\to 0$ по определению символа о (определение 6.2).◄

Пример 9.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)^{1/\mathrm{tg}^2 x}$.

►Выражение под знаком предела при $x\to 0$ даёт неопределённость 1^∞. Из основного логарифмического тождества и замечания 2.2 следует равенство:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)^{1/\mathrm{tg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)/\mathrm{tg}^2 x}.$$

Так как $\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x=1-5x^2+o(x^2)$ (пример 9.1), то

$$\ln(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)=\ln(1-5x^2+o(x^2))==-5x^2+o(x^2)$$

(формула (9.9) и свойства символа о, §6). Функцию $\mathrm{tg}^2 x$ запишем в виде: $\mathrm{tg}^2 x=(x+o(x))^2=x^2+2x\cdot o(x)+(o(x))^2=x^2+o(x^2)$ (формула (9.5) и свойства символа о, §6). Итак, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)}{\mathrm{tg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-5+o(x^2)/x^2}{1+o(x^2)/x^2}=-5.$$

Отсюда получаем: $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)^{1/\mathrm{tg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(\sqrt[3]{\cos 6x}+\sin^2 x)/\mathrm{tg}^2 x}=e^{-5}$.◄

Пример 9.5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-\sqrt{2-x}-\mathrm{arctg}(x-1)}{\sin(x-1)}$.

►Выражение под знаком предела при $x\to 1$ – неопределённость $\frac{0}{0}$. Сделаем замену переменной:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-1}-\sqrt{2-x}-\mathrm{arctg}(x-1)}{\sin(x-1)}=\left|\begin{matrix}u=x-1\\ x=u+1\end{matrix}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{e^{u(u+2)}-\sqrt{1-u}-\mathrm{arctg}u}{\sin u}.$$

Имеем $e^{u(u+2)}=1+u(u+2)+o(u(u+2))=1+2u+o(u)$, $\mathrm{arctg}u=u+o(u)$, $\sqrt{1-u}=(1-u)^{1/2}=1-u/2+o(u)$. Числитель запишем в виде: $e^{u(u+2)}-$

$\sqrt{1-u} - \operatorname{arctg} u = 1 + 2u + o(u) - (1 - u/2 + o(u)) - (u + o(u)) \qquad = 3u/2 + o(u)$ (использованы свойства символа o), а знаменатель – в виде: $\sin u = u + o(u)$. Подставив полученные разложения в вычисляемый предел, получим:

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u(u+2)} - \sqrt{1-u} - \operatorname{arctg} u}{\sin u} = \lim_{u\to 0}\frac{3u/2 + o(u)}{u + o(u)} = \lim_{u\to 0}\frac{3/2 + o(u)/u}{1 + o(u)/u} = \frac{3}{2}. \blacktriangleleft$$

В настоящей главе в процессе изложения теории пределов функций рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих различные способы отыскания пределов функций. Эти способы можно резюмировать в виде следующих правил.

Правила вычисления пределов

1. В отсутствии неопределённости предел вычисляется с помощью теорем о пределах и непрерывности функций (теоремы 2.2, 4.3 – 4.5, замечание 2.2).

2. Предел выражения, представляющего неопределённость $\frac{0}{0}$ или $0\cdot\infty$, вычисляется с помощью теоремы о замене эквивалентными бесконечно малыми (теорема 7.1), при этом применяется таблица эквивалентных бесконечно малых функций (таблица 7.1).

3. Если $x \to a \neq 0$, то целесообразно сделать замену $z = x - a$. Тогда $z \to 0$.

4. Для вычисления предела неопределённого выражения, содержащего сумму или разность бесконечно малых или бесконечно больших функций применяется таблица асимтотических разложений некоторых элементарных функций (таблица 9.1).

Например, предел из примера 2.1 вычисляется с помощью правила 1, предел из примера 7.1 – с применением правила 2, а в примере 9.5 применены правила 3 и 4. При вычислении других пределов производятся некоторые преобразования, после этого применяется одно из вышеупомянутых правил.