§3. Интегрирование иррациональных функций

1°. Интеграл вида

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+q}}, \ldots, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+q}}\right) dx}. \qquad (3.1)$$

Здесь $R(x,u,\ldots,v)$ – рациональная функция своих аргументов. Дробно-линейная функция $(ax+b)/(cx+q)$, в частности, может быть линейной $ax+b$ или просто аргументом x.

Интеграл рационализируется подстановкой

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+q} = z^k}, \qquad (3.2)$$

где k – наименьшее общее кратное всех показателей $m,\ldots,n$ радикалов: $k = \text{НОК}(m,\ldots,n)$.

Пример 3.1. $J = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

Подстановка

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t; \quad \frac{1+x}{1-x} = t^2; \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}; \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Получим далее

$$J = \int \frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot t \cdot \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2} = 4\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt.$$

Интеграл рационализировался. Подынтегральную функцию разлагаем на элементарные дроби, полагая $t^2 = z$.

$$\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1};$$

$$z = A(z+1) + B(z-1).$$

Применяем метод частных значений.

$$\begin{array}{r|l} z=1 & 1=2A \;\Rightarrow\; A=1/2; \\ z=-1 & -1=-2B \;\Rightarrow\; B=1/2. \end{array}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right); \qquad \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right).$$

$$J = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1} + \int\frac{dt}{t^2+1}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \operatorname{arctg} t\right) + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

.

Пример 3.2. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$k = \text{НОК}(2,3) = 6$. Выполняем подстановку $x = z^6$. Тогда

$$z = \sqrt[6]{x}; \quad \sqrt{x} = z^3; \quad \sqrt[3]{x} = z^2; \quad dx = 6z^5 dz\,.$$

$$J = \int \frac{6z^5 dz}{z^3 + z^2} = 6\int \frac{z^3}{z+1}\,dz = 6\int\left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}\right)dz =$$

$$= 6\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - \ln|z+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C\,.$$

2°. Интеграл вида

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx} \tag{3.2}$$

подстановками

$$\boxed{x = a\sin t \quad \text{или} \quad x = a\cos t} \tag{3.3}$$

сводится к интегралу вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, который во многих случаях может быть проще. В общем случае он рассмотрен в §2.

К такому же типу интегралов приводится и интеграл вида

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx} \tag{3.4}$$

с помощью подстановки

$$\boxed{x = a\,\mathrm{tg}\,t}. \tag{3.5}$$

Пример 3.3.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{matrix} x = \sin t; \ \sqrt{1-x^2} = \cos t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix}\right] = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\mathrm{ctg}\,t + C = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C\,.$$

Пример 3.4.

$$J = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \left[\begin{matrix} x = \mathrm{tg}\,z; \ dx = dz/\cos^2 z \\ \sqrt{1+x^2} = \sec z = 1/\cos z \end{matrix}\right] = \int \frac{1/\cos z}{\sin^2 z/\cos^2 z}\cdot\frac{dz}{\cos^2 z} = \int \frac{dz}{\cos z\sin^2 z} = \int \frac{\cos z\,dz}{\cos^2 z\sin^2 z} =$$

$$= \int \frac{\cos z\,dz}{(1-\sin^2 z)\sin^2 z} = [\sin z = t; \ z = \arcsin t] = \int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \int\left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right| - \frac{1}{\sin z} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\mathrm{arctg}\,x}{1-\sin\mathrm{arctg}\,x}\right| - \frac{1}{\sin\mathrm{arctg}\,x} + C\,.$$

Так как $\sin\mathrm{arctg}\,x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, то

$$J=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

***3°. Интеграл от дифференциального бинома**.

Дифференциальным биномом (иначе – *биномиальным дифференциалом*) называется выражение вида

$$\boxed{x^m(a+bx^n)^p\,dx}. \qquad (3.6)$$

Здесь a, b – вещественные, m, n, p – рациональные числа. Интеграл от дифференциального бинома имеет вид

$$\boxed{\int x^m(a+bx^n)^p\,dx}. \qquad (3.7)$$

В следующих трех случаях интеграл рационализируется с помощью подстановок, если он содержит иррациональности.

1) p – целое. Тогда этот интеграл в общем случае типа (3.1).

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое.

Рекомендуется подстановка

$$a+bx^n=z^k, \qquad (3.8)$$

где k – знаменатель $p=s/k$.

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое.

Рекомендуется подстановка

$$ax^{-n}+b=z^k, \qquad (3.9)$$

где k – знаменатель $p=s/k$.

В остальных случаях интеграл не выражается через конечное число элементарных функций.

Пример 3.5. $J=\int x\left(1+\sqrt{x}\right)^2dx$.

Здесь $m=1$, $n=1/2$, $p=2$ – целое. Возводим бином в квадрат и разбиваем интеграл на сумму трех интегралов.

$$J=\int x\left(1+2\sqrt{x}+x\right)dx=\int x\,dx+2\int x^{3/2}dx+\int x^2dx=\frac{x^2}{2}+2x^{5/2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{x^3}{3}+C$$

.

Пример 3.6. $J=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int x^{-1}(1+x^2)^{1/2}dx$.

Здесь $m=-1$, $n=2$, $p=1/2$.Так как $(m+1)/n=(-1+1)/2=0$, то имеем второй случай. Тогда выполняем подстановку

$$1+x^2=z^2; \quad 2x\,dx=2z\,dz; \quad x\,dx=z\,dz; \quad \sqrt{1+x^2}=z\,.$$

$$J=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,x\,dx=\int\frac{z}{z^2-1}\,z\,dz=\int\frac{(z^2-1)+1}{z^2-1}\,dz=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1-z^2}\right)dz=z-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C+\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}\right|+C\,.$$

Пример 3.7. $J=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx=\int x^{-2}(1+x^2)^{1/2}\,dx\,.$

Здесь $m=-2$, $n=2$, $p=1/2$. Так как $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}+\frac{1}{2}=0$, то имеем третий случай для дифференциального бинома. Выполняем подстановку $x^{-2}+1=z^2$. Тогда $-2x^{-3}dx=2z\,dz$; $x^{-3}dx=-z\,dz$; $x^{-2}=z^2-1$; $x^2=\frac{1}{z^2-1}$; $\sqrt{x^{-2}+1}=z\,.$

$$J=\int\frac{x\sqrt{x^{-2}+1}}{x^2}\,dx=\int x^2\sqrt{x^{-2}+1}\,x^{-3}dx=\int\frac{1}{z^2-1}\cdot z\cdot(-z)\,dz=-\int\frac{(z^2-1)+1}{z^2-1}\,dz=\int\left(-1+\frac{1}{1-z^2}\right)dz=$$

$$=-z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C=-\sqrt{x^{-2}+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^{-2}+1}}{1-\sqrt{x^{-2}+1}}\right|+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right|+C\,.$$

Этот интеграл в примере 3.4 был взят с помощью тригонометрической подстановки.