

§2. Замкнутые множества и области в m - мерном пространстве

Определение. Точка $X(x_1, x_2, \dots, x_m)$ множества E называется внутренней точкой этого множества, если она входит в E вместе с некоторой своей δ -окрестностью (достаточно малого радиуса δ).

Точка X , принадлежащая или не принадлежащая множеству E , называется граничной точкой этого множества, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие этому множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

Совокупность всех граничных точек множества E называется его границей.

Определение. Множество E точек m -мерного пространства называется открытой областью, если:

I. Всякая точка этого множества является его внутренней точкой.

II. Любые две точки множества E можно соединить непрерывной кривой, все точки которой также принадлежат E .

Если к открытой области присоединить ее границу, то получится множество, называемой замкнутой областью.

Употребляется и более общий термин – область, означающий либо открытую область, либо замкнутую область, либо множество промежуточного типа, получающееся из открытого множества присоединением к ней части границы.

Замечание. Понятие области не следует путать с понятием области определения (задания) функции. Область определения может быть произвольным множеством, в то время как область в смысле данного выше определения есть множество, удовлетворяющее условиям I и II. В следующих двух примерах обе части определения функции являются областями.

Пример 3.1. Найти область определения функции, заданной формулой $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{y}$.

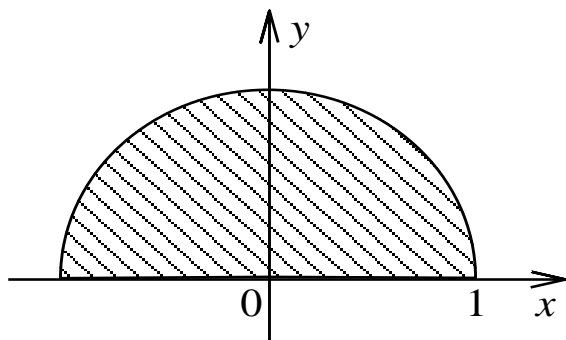


Рис. 3.1. Область определения функции в

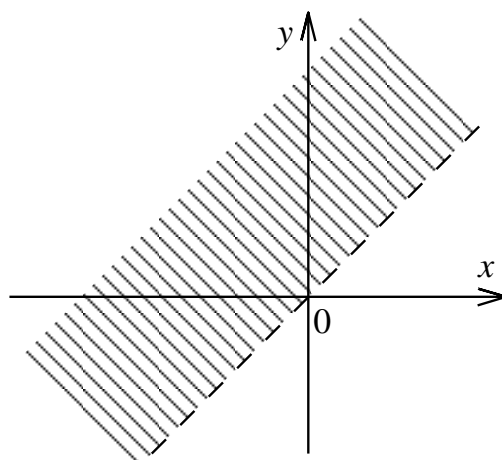


Рис. 3.2. Область определения функции в

► Область задания функции определяется неравенствами: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ и $y \geq 0$, т. е. $x^2 + y^2 \leq 1$ (круг) и $y \geq 0$ (верхняя полуплоскость). Таким образом, областью определения функции будет замкнутая область, имеющая форму полукруга, изображенного на рис. 3.1. ◀

Пример 3.2. Найти область задания функции, определяемой формулой $w = \ln(y - x)$.

► Область задания функции определяется неравенством $y - x > 0$, т. е. $y > x$ (полуплоскость). Таким образом, областью определения функции будет открытая область, показанная штриховкой на рис. 3.2. ◀

Определение. Множество E называется *ограниченным*, если все его точки можно заключить внутрь шара достаточно большого радиуса с центром в начале координат. В противном случае множество E называется *неограниченным*.

Например, область определения функции в рассмотренном выше примере 1 – ограниченная область, а в примере 2 – неограниченная область.

Определение. *Диаметром* множества называется точная верхняя грань расстояний между любыми двумя точками этого множества.