§3. Свойства двойных интегралов

Свойства двойного интеграла во многом аналогичны свойствам определённого интеграла. Сформулируем их, предполагая рассматриваемые функции таковыми, что интегралы от них имеют смысл.

1. $\iint\limits_D dxdy = S$, где S – площадь области D.

2. *Аддитивность.* Если область D с помощью кусочно-гладкой кривой разбита на области D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

3. *Линейность.* Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – константы, то

$$\iint\limits_D \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x,y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \iint\limits_D f_i(x,y)\, dxdy.$$

4. *Интегрирование неравенств.* Если $f(M) \le g(M)$ на области D, то

$$\iint\limits_D f(M)\, dS \le \iint\limits_D g(M)\, dS.$$

5. *Оценка модуля интеграла.*

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \right| \le \iint\limits_D \left| f(x,y) \right| dxdy.$$

6. *Теорема о среднем.* Если $f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то в этой области существует такая точка (ξ, η), что

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = f(\xi,\eta) S,$$

где S – площадь области D.

Замечание 3.1. Доказательства первых пяти свойств основаны на определении двойного интеграла как предела интегральной суммы, последнее, как и в случае определённого интеграла, обосновывается с помощью свойства 4 и теоремы о функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области, которая принимает все промежуточные значения между двумя любыми своими значениями. Докажем, например, свойство 1. Здесь подынтегральная функция $f(x,y) = 1$ для любой точки области D. Поэтому имеем:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \iint\limits_D dxdy = S.$$