§5. Формула Грина

Определение 5.1. Плоская область D называется *односвязной*, если для любого самонепересекающегося контура $\Gamma \subset D$ ограниченная им область D_1 также расположена в D (рис. 5.1).

Теорема 5.1 (*теорема Грина*). Пусть D – замкнутая односвязная область плоскости Oxy, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области D и имеют там непрерывные частные производные $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (5.1)$$

Формула (5.1) называется *формулой Грина* (Грин Д. (1793-1841, английский математик и физик); она связывает двойной интеграл по области D с криволинейным интегралом по границе Γ этой области. Предполагается, что обход контура Γ совершается в положительном направлении, т.е. область D при обходе контура остаётся слева (рис. 5.2).

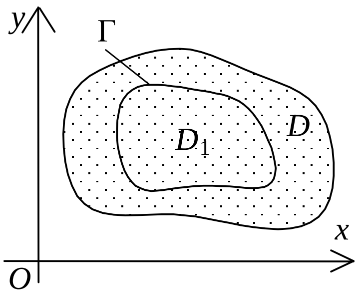

Рис. 5.1. Односвязная Область

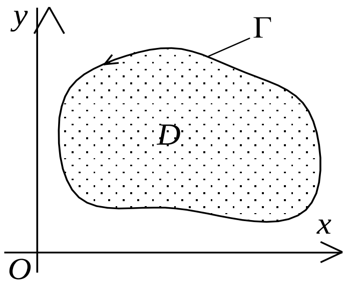

Рис. 5.2. К формуле Грина

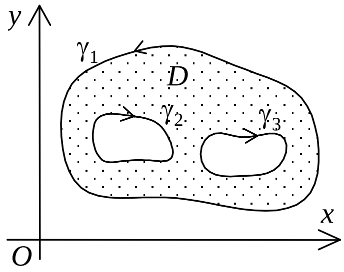

Рис. 5.3. Многосвязная Область

Замечание 5.1. Формула (5.1) остаётся в силе и для *многосвязных* областей, т.е. для областей, граница которых состоит из двух и более кусочно-гладких контуров (рис. 5.3, контур Γ области D есть $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$). При этом обход каждого из контуров совершается в таком направлении, при котором область D остаётся слева (рис. 5.3).

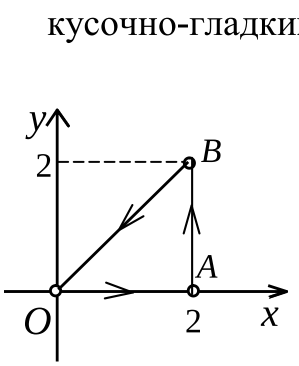

Рис. 5.4. К примеру 5.1

Пример 5.1. Используя формулу Грина, вычислить интеграл: $I = \oint\limits_{\Gamma}(x-2y)dx + (3x-y)dy$, где Γ – ΔOAB, $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$. Направление движения по Γ показано на рис. 5.4.

► $P(x,y) = x - 2y,\ Q(x,y) = 3x - y,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 5.$ В силу формулы (5.1) имеем $I = \iint\limits_{\Delta OAB} 5dxdy = 5S_{\Delta OAB} = 5 \cdot 2 = 10.$ ◄