Резюме

Пусть A – либо число, либо один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞, и пусть функция f определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}_a$, где a – либо число, либо символ ∞.

$A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если для любой последовательности $\{x_k\}$, такой, что: 1) при всех $k \in \mathbf{N}$ $x_k \in \overset{\circ}{V}_a$ и 2) $x_k \to a$, соответствующая последовательность $\{f(x_k)\}$ стремится к A.

В частности, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, где a, A и B – некоторые числа. Тогда:

а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = A+B$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = AB$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\lambda f(x) = \lambda A$, где $\lambda \in \mathbf{R}$;

в) если при всех $x \in \overset{\circ}{V}_a$ $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$;

г) если в $\overset{\circ}{V}_a$ $f(x) \le g(x)$, то $A \le B$.

Если $p < A$ ($p > A$), то существует $\delta > 0$ такое, что в $\overset{\circ}{V}_a$ $p < f(x)$ ($p > f(x)$).

Пусть 1) при всех $x_k \in \overset{\circ}{V}_a$, где a – либо число, либо символ ∞, справедливо $f(x) \le g(x) \le h(x)$, и 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, $A \in \mathbf{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существует и равен A.

Пусть a – либо число, либо символ ∞, функция $\alpha(x)$ определена в $\overset{\circ}{V}_a$. $\alpha(x)$ называют бесконечно малой (бесконечно большой) функцией при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \infty$).

Справедливы утверждения:

1) Сумма и произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малые функции.

2) Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A \in \mathbf{R}$, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - A\big) = 0$.

4) Пусть $\alpha(x)$ определена в $\overset{\circ}{V}_a$ и при всех $x \in \overset{\circ}{V}_a$ $\alpha(x) \neq 0$; тогда

а) если $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \underset{x\to a}{\to} \infty$;

б) если $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} \infty$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$.

Пусть функция f определена в $\overset{\circ}{V}_{x_0}$, $x_0 \in \mathbf{R}$, и удовлетворяет условиям: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $y_0 \in \mathbf{R}$, и 2) при всех $x \in \overset{\circ}{V}_{x_0}$ $f(x) \neq y_0$. Пусть, далее, функция g определена в $\overset{\circ}{V}_{y_0}$. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$, где $F(x) = g\big(f(x)\big)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$.

Пусть функция f монотонно не убывает (монотонно не возрастает) на $(a; b)$, $a < b$, а $E(f)$ есть множество ее значений.

I. Если $E(f)$ ограничено сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup E(f)$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup E(f)$).

II. Если $E(f)$ ограничено снизу, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf E(f)$ ($\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf E(f)$).

Контрольные вопросы к главе 2

1. Опишите понятие «функция одной переменной». Что называют графиком функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (a, b)? Приведите примеры.

2. Пусть a и A – некоторые числа. На языке последовательн6остей и на языке «ε–δ» сформулируйте утверждение: $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Опираясь на определение предела, докажите: $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

4. Пусть A – некоторое число. На языке последовательностей сформулируйте утверждения: а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Как эти утверждения формулируются на языке «ε–δ»?

5. Пусть $\lim\limits_{x\to} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, где A и B – числа, а a – либо число, либо символ ∞. Чему равны $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$? В каком случае можно гарантировать, что существует конечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$? Чему он равен?

6. Сформулируйте определение функции, бесконечно большой при x, стремящихся к a, где a – некоторое число. Приведите пример.

7. Сформулируйте определение функции, бесконечно большой при x, стремящемся к ∞. Приведите пример.

8. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, где a – либо число, либо ∞. Что можно утверждать о поведении функций $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ в окрестности a?

9. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, где a – либо число, либо ∞, причем $f(x)\neq 0$ в проколотой окрестности a. Что можно утверждать о поведении функций $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ в окрестности a?

10. Опишите понятие сложной функции, приведите примеры. Сформулируйте теоремы о пределе сложной функции.

11. Дайте определение функции, монотонной (строго монотонной) на промежутке. Приведите примеры.

12. Пусть функция f определена на $(a;b)$, $a<b$, и

а) монотонно не убывает и ограничена сверху на $(a;b)$;

а) монотонно не убывает и не ограничена сверху на $(a;b)$;

а) монотонно не возрастает и ограничена снизу на $(a;b)$;

а) монотонно не возрастает и не ограничена снизу на $(a;b)$.

Что можно утверждать о $\lim\limits_{x\to b-0} f(a)$ в случаях а) и б) и о $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$ в случаях в) и г)?

Ответы на контрольные вопросы к главе 2

4. а) Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при всех x, $x > \delta$, справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$.

б) Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при всех x, $x < -\delta$, справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$.

в) Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при всех x, $|x| > \delta$, справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$.

12. а) Существует конечный $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a;\, b)} f(x)$.

б) $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

в) Существует конечный $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a;\, b)} f(x)$.

г) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$