Высшая математика – просто и доступно!

Блиц-курс
«Дифференциальные уравнения»

Данный курс позволяет буквально за день-два научиться решать наиболее распространённые типы дифференциальных уравнений. Методичка предназначена ***для студентов заочных отделений****, а также* ***для всех читателей, которые*** *недавно приступили к изучению темы и хотят в кратчайшие сроки освоить практику.*

Внимание! Чтобы освоить данный материал, нужно уметь дифференцировать и интегрировать хотя бы на среднем уровне!

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Эти два слова (ДУ) или, как их сокращают – диффуры, обычно приводят в ужас среднестатистического обывателя. Более того, дифференциальные уравнения кажутся чем-то запредельным и трудным в освоении и многим студентам: *уууууу… дифференциальные уравнения, как бы мне всё это пережить?!*

Но я не буду «кормить» вас этими мифами и запугивать (как в той сказке), а наоборот – только развеселю! **Потому что на самом деле**

Дифференциальные уравнения – это ПРОСТО и очень увлекательно.
Добро пожаловать в мою сказку!

Сначала вспомним обычные уравнения. Они содержат переменные и числа. Простейший пример: $3x = 12$. **Что значит решить** обычное уравнение? Это значит, найди **множество чисел**, которые удовлетворяют данному уравнению. Легко сообразить, что детское уравнение $3x = 12$ имеет единственный корень $x = 4$. Выполним проверку, подставив найденный корень в наше уравнение:

$3 \cdot 4 = 12$
$12 = 12$ – получено *верное равенство*, значит, решение найдено правильно.

Диффуры устроены примерно так же!

1.1. Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение *первого порядка*, **содержит**:

1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

В некоторых случаях в уравнении может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это ерунда – ВАЖНО чтобы в нём **была** первая производная y', и **не было** производных высших порядков – y'', y''' и т.д.

Как вы правильно догадываетесь, **дифференциального уравнение** *«энного» порядка* **обязательно содержит** производную n-го порядка: $y^{(n)}$ и НЕ содержит производные более высоких порядков.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций** $F(x; y) = C$, где C – произвольная постоянная, которые удовлетворяют данному уравнению, то есть, **корнями дифференциального уравнения являются функции**. Такое множество функций часто называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

В ряде случаев решение удаётся представить в «школьном» *(явном)* виде: $y = f(x; C)$, и тогда его называют ***общим решением*** дифференциального уравнения.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это простейший и самый распространённый тип дифференциального уравнения. Все методы и тонкости решений будем разбирать прямо на конкретных примерах:

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

И вопрос первый: **с чего начать?**

В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде. Вспоминаем громоздкое обозначение производной: $y' = \frac{dy}{dx}$. Такое обозначение производной многим из вас наверняка казалось нелепым и ненужным, но в диффурах рулит именно оно!

Итак, на первой шаге переписываем производную в нужном нам виде:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

Далее смотрим, **а нельзя ли разделить переменные?** – на это вообще всегда нужно посмотреть, когда вам дан ЛЮБОЙ диффур 1-го порядка.

Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно собрать **все «игреки»**, а **в правой – все «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это **полноправные множители** и активные участники «боевых действий». В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции *(Приложение **Школьные формулы**)*:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные (*Приложение **Таблица интегралов***):

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Как мы помним, к любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз *(ибо сумма двух констант – есть константа)*. В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решенным, и *общий интеграл* $\ln|y| = \ln|x| + C$ можно считать ответом. Однако многие с этим не согласятся :)

И поэтому нам нужно попробовать найти *общее решение*, то есть попытаться представить функцию в явном виде.

Пожалуйста, запомните **первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: **если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу** *во многих случаях* **целесообразно записать тоже под логарифмом**. И записать НЕПРЕМЕННО, если получились одни логарифмы (как в рассматриваемом примере).

То есть, **вместо** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Здесь $\ln|C|$ – это такая же полноценная константа, как и C *(поскольку* $\ln|C|$ *с тем же успехом принимает все действительные значения)*.

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем школьное свойство логарифмов: $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. В данном случае:

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

Теперь логарифмы и модули можно с чистой совестью убрать:

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Итак, **множество функций** $y = Cx$, где $C = const$ является *общим решением* дифференциального уравнения $xy' = y$.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и находим производную *(см. Приложение* ***Таблица производных****)*: $y' = (Cx)' = C$

Теперь подставляем наше решение $y = Cx$ и найденную производную $y' = C$ в исходное уравнение $xy' = y$:

$$x \cdot C = Cx$$

$Cx = Cx$ – в результате получено *верное равенство*, значит, решение найдено правильно. Иными словами, **общее решение** $y = Cx$ **удовлетворяет уравнению** $xy' = y$.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много ***частных решений*** дифференциального уравнения. Любая из функций $y = x$, $y = -3x$, $y = \frac{x}{5}$ и т.д. удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = y$.

Иногда общее решение так и называют – ***семейством функций***. В данном примере общее решение $y = Cx$, где $C = const$ – это семейство линейных функций, а точнее, семейство прямых пропорциональностей.

После обстоятельного разжевывания первого примера уместно ответить на несколько наивных вопросов о дифференциальных уравнениях:

1) *В этом примере нам удалось разделить переменные:* $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. *Всегда ли это можно сделать?* Нет, не всегда. И даже чаще переменные разделить нельзя. Например, почти во всех уравнениях следующих параграфов ☺, где нужно использовать различные приёмы и методы нахождения решений. Уравнения с разделяющимися переменными, которые мы рассматриваем сейчас – это простейший тип дифференциальных уравнений.

2) *Всегда ли можно проинтегрировать дифференциальное уравнение?* Нет, не всегда. Очень легко придумать уравнение (не обязательно «навороченное»), которое в жизнь не проинтегрировать и, кроме того, существует туча неберущихся интегралов. Но подобные ДУ можно решить приближенно с помощью специальных методов.

3) *В данном примере мы получили решение в виде общего интеграла* $\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|$. *Всегда ли можно из общего интеграла найти общее решение, то есть, выразить «игрек» в явном виде?* Нет не всегда. Например: $y+\ln|y|=\arcsin x+xy^2+C$. Ну и как тут выразить «игрек»?! В таких случаях ответ следует записать в виде *общего интеграла*, при этом **хорошим тоном** считается представить его в виде $F(x;\,y)=C$ – с одинокой константой в правой части: $y-xy^2-\arcsin x+\ln|y|=C$. Однако это вовсе не обязательное правило, а, порой, и неуместное действие.

Кроме того, в ряде случаев общее решение выразить можно, но оно записывается настолько громоздко и коряво, что уж лучше оставить ответ в виде общего интеграла.

Пожалуй, пока достаточно. В первом же уравнении нам встретился **ещё один очень важный момент**, но дабы не накрыть вас лавиной новой информации, торопиться не буду. Еще одно простое ДУ и еще один типовой приём решения:

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=-2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$

По условию требуется найти *частное решение* ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется ***задачей Коши***.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить, мальчики – налево, девочки – направо:

$$\frac{dy}{y}=-2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константу я нарисовал с надстрочной звёздочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем преобразовать общий интеграл в общее решение *(выразить функцию в явном виде)*. Вспоминаем старое, доброе, школьное: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$.

В данном случае:

$$|y| = e^{-2x+C^*}$$

Константа в показателе смотрится как-то некошерно, поэтому её обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней *(см. Приложение **Школьные формулы**)*, перепишем функцию следующим образом:

$$|y| = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то $e^{C^*} > 0$ – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$y = Ce^{-2x}$ – при этом модуль раскрываем, после чего константа «цэ» сможет принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений. На чистовике можно сразу перейти от $\ln|y| = -2x + C^*$ к $y = Ce^{-2x}$, но всегда будьте готовы объяснить этот переход.

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти *частное решение*, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$. Геометрически это означает, что из найденного семейства следует выбрать **ту** функцию, график которой проходит через точку $(0; 2)$.

И алгебраически нам нужно подобрать **такое** значение C, чтобы выполнялось начальное условие $y(0) = 2$. Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$2 = Ce^{-2\cdot 0}$

$2 = Ce^0$

$2 = C \cdot 1$, откуда следует, что $C = 2$.

Стандартная версия оформления: $y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя **два этапа**.

Сначала следует проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:

$y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:

$$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x}\cdot(-2x)' = -4e^{-2x}$$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$$-4e^{-2x} = -2\cdot 2e^{-2x}$$

$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$ – получено верное равенство.

Вывод: частное решение найдено правильно.

Переходим к более содержательным примерам.

Пример 3

Решить уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$, выполнить проверку

Решение: переписываем производную в «диффурном» виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные? Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

И перекидываем множители по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int\frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$$

Должен предупредить, приближается судный день. Если вы плохо изучили неопределенные интегралы, прорешали мало примеров, то деваться некуда – придется их осваивать сейчас. На всякий случай привожу гиперссылку на **соответствующий раздел сайта** и **экстремально короткий курс по интегралам**.

Догоняющие – да догонят :) Едем дальше:

Интеграл левой части легко найти *подведением функции под знак дифференциала*, с интегралом от котангенса расправляемся стандартным приёмом – с помощью бородатой тригонометрической формулы и последующим применением того же метода:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C^*|$$

В результате у нас получились одни логарифмы, и, согласно моей первой технической рекомендации, константу тоже записываем под логарифм.

Теперь пробуем упростить общий интеграл. Поскольку у нас одни логарифмы, то от них можно (и нужно) избавиться. С помощью известных свойств *(см. Приложение **Школьные формулы**)* максимально «упаковываем» логарифмы. Распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C^*|$$

$$\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C^*|$$

$$\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\left|\frac{C^*}{\sin x}\right|$$

Упаковка завершена, чтобы быть варварски ободранной:

$\sqrt{|2y+1|} = \dfrac{C^*}{\sin x}$, и сразу-сразу приводим *общий интеграл* к виду $F(x;y) = C$, коль скоро, это возможно:

$\sqrt{|2y+1|}\cdot\sin x = C^*$, ибо всегда же выгодно порадовать профессора ;-)

В принципе, это можно записать в ответ, но здесь ещё уместно возвести обе части в квадрат и переобозначить константу:

Ответ: общий интеграл: $(2y+1)\cdot\sin^2 x = C,$ где $C = const$

Можно ли выразить общее решение? Можно. Давайте выразим общее решение:

$$(2y+1)\cdot\sin^2 x = C \quad\Rightarrow\quad 2y+1 = \frac{C}{\sin^2 x} \quad\Rightarrow\quad 2y = \frac{C}{\sin^2 x} - 1 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}$$

Само собой, полученный результат годится для ответа, но обратите внимание, что общий интеграл смотрится компактнее, да и решение получилось короче.

Третий технический совет: если для получения общего решения нужно выполнить значительное количество действий, то *в большинстве случаев* **лучше воздержаться от этих действий и оставить ответ в виде общего интеграла. Это же касается и «плохих» действий, когда требуется выразить обратную функцию, возвести в степень, извлечь корень и т.п.** Дело в том, что общее решение будет смотреться вычурно и громоздко – с большими корнями, знаками $\pm$ и прочим математическим трэшем.

Как выполнить проверку? Проверку можно выполнить двумя способами. Способ первый: берём общее решение $y=\frac{C}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}$, находим производную $y'=\left(\frac{C}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\right)'$ и подставляем их в исходное уравнение $y'+(2y+1)ctgx=0$. Попробуйте самостоятельно!

Второй способ состоит в дифференцировании общего интеграла. Фактически нам нужно найти **производную неявно заданной функции**:

$$((2y+1)\cdot\sin^2 x)'=(C)'$$

Используем правило дифференцирования произведения *(см. Приложение **Таблица производных**)*:

$$(2y+1)'\cdot\sin^2 x+(2y+1)\cdot(\sin^2 x)'=0$$

$$(2y'+0)\cdot\sin^2 x+(2y+1)\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'=0$$

$$2y'\sin^2 x+(2y+1)\cdot 2\sin x\cdot\cos x=0$$

делим каждое слагаемое на $2\sin x$:

$$y'\sin x+(2y+1)\cdot\cos x=0$$

и на $\sin x$:

$$\frac{y'\sin x}{\sin x}+\frac{(2y+1)\cdot\cos x}{\sin x}=0$$

$$y'+(2y+1)ctgx=0$$

Получено в точности исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y\ln y+xy'=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$. Выполнить проверку.

Решаем самостоятельно! – пробуем свои силы. Напоминаю, что **решение** *задачи Коши* **состоит из двух этапов**:

1) нахождение общего решения;
2) нахождение требуемого частного решения.

Проверка тоже проводится в два этапа, нужно:

1) убедиться, что найденное частное решение действительно удовлетворяет начальному условию;
2) проверить, что частное решение вообще удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Если возникли затруднения, решайте по образцу Примера 2. Ну и в лучших традициях – полное решение и ответ в конце книги. Ссылку специально не ставлю, чтобы не было искушения =)

С боевым, а точнее, с учебным вас крещением!

Пример 5

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y\cdot e^{-x^2}dy-2xdx=0$$

$$e^y\cdot e^{-x^2}dy=2xdx$$

$$e^y dy=\frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy=2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy=2\int xe^{x^2}dx$$

Интеграл слева – табличный, интеграл справа – берём *методом подведения функции под знак дифференциала*:

$$\int e^y dy=\int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^y=e^{x^2}+C$$

Общий интеграл получен, нельзя ли удачно выразить общее решение? Можно. Навешиваем логарифмы на обе части. Поскольку правая часть не может быть отрицательной *(почему?)*, то знак модуля будет излишним – ставим просто скобки:

$$\ln e^y=\ln(e^{x^2}+C)$$

$$y=\ln(e^{x^2}+C)$$

На всякий случай *распишу:* $\ln e^y=y\ln e=y\cdot 1=y$.

Итак, общее решение:

$y=\ln(e^{x^2}+C)$, где $C=const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0)=\ln 2$. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» логарифм двух:

$$\ln 2=\ln(e^0+C)$$

$\ln 2=\ln(1+C)$, откуда следует, что $C=1$

Более привычное оформление: $y(0)=\ln(e^0+C)=\ln(1+C)=\ln 2 \Rightarrow C=1$

Подставляем найденное значение константы $C=1$ в общее решение и записываем

ответ: частное решение: $y=\ln(e^{x^2}+1)$

Проверка. Сначала проверим, выполнено ли начальное условие $y(0)=\ln 2$:
$y(0)=\ln(e^0+1)=\ln(1+1)=\ln 2$ – гуд.

Теперь проверим, а удовлетворяет ли вообще найденное частное решение $y=\ln(e^{x^2}+1)$ дифференциальному уравнению. Находим производную:

$$y'=(\ln(e^{x^2}+1))'=\frac{1}{(e^{x^2}+1)}\cdot(e^{x^2}+1)'=\frac{1}{(e^{x^2}+1)}\cdot e^{x^2}\cdot(x^2)'=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}$$

Смотрим на исходное уравнение: $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$ – оно представлено в дифференциалах. Есть два способа проверки. Можно из найденной производной выразить дифференциал dy:

$$y'=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}\Rightarrow dy=\frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}$$

после чего подставить $y=\ln(e^{x^2}+1)$ и $dy=\dfrac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}$ в исходное уравнение $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$.

Но это несколько неуклюжий вариант, здесь сподручнее разделить обе части диффура на dx:

$$\frac{e^{y-x^2}dy}{dx}-\frac{2xdx}{dx}=\frac{0}{dx}$$

$$e^{y-x^2}\cdot y'-2x=0$$

и подставить в полученное уравнение $y=\ln(e^{x^2}+1)$ и $y'=\dfrac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}$:

$$e^{\ln(e^{x^2}+1)-x^2}\cdot\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}-2x=0$$

По свойству степеней, «разбираем» экспоненту на множители:

$$e^{\ln(e^{x^2}+1)}\cdot e^{-x^2}\cdot\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}-2x=0$$

и используем основное логарифмическое тождество $e^{\ln a}=a$:

$$(e^{x^2}+1)\cdot\frac{1}{e^{x^2}}\cdot\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}-2x=0$$

$$2x-2x=0$$

$0=0$ – получено верное равенство.

Таким образом, частное решение найдено правильно.

Пример 6

Найти общий интеграл уравнения $\sqrt{3+y^2}dx+\sqrt{1-x^2}ydy=0$, ответ представить в виде $F(x;y)=C$.

Это пример для самостоятельного решения.

Какие трудности подстерегают при решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными?

1) Не всегда очевидно (особенно, «чайнику»), что переменные можно разделить. Рассмотрим условный пример: $\sqrt{xy-2x}\cdot y'+xy^2+5y^2=0$. Здесь нужно провести вынесение множителей за скобки: $\sqrt{x(y-2)}\cdot y'+y^2(x+5)=0$ и отделить корни: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-2}\cdot y'+y^2(x+5)=0$. Как действовать дальше – понятно.

2) Сложности при самом интегрировании. Интегралы нередко возникают не самые простые, и если есть пробелы в навыках нахождения неопределенного интеграла, то со многими диффурами придется туго. К тому же у составителей сборников и методичек популярна логика *«раз уж дифференциальное уравнение является простым, то тогда пусть интегралы будут посложнее»*.

3) Преобразования с константой – это уже относится и к диффурам других типов.

Как вы заметили, с константой в дифференциальных уравнениях можно обращаться достаточно вольно. И некоторые преобразования не всегда понятны новичку. Рассмотрим еще один условный пример: $\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln\left|y^2-3\right|+C^*$. В нём целесообразно умножить все слагаемые на 2: $\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+2C^*$. Полученная константа $2C^*$ – это тоже какая-то константа, которую можно обозначить через C^{**}: $\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+C^{**}$. Да, и поскольку у нас одни логарифмы, то константу C^{**} целесообразно переписать в виде другой константы: $\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+\ln|C|$.

Беда же состоит в том, что с индексами часто не заморачиваются и используют одну и ту же букву C. В результате запись решения принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln\left|y^2-3\right|+C$$

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+C$$

$$\ln|1-x|=\ln\left|y^2-3\right|+\ln|C|$$

Что за дела?! Тут же ошибки! Формально – да. А неформально – ошибок нет, подразумевается, что при преобразовании константы C всё равно получается равноценная варьируемая константа.

Или другой пример, предположим, что в ходе решения уравнения получен общий интеграл $-y^3-y-x^2-\ln x=C$. Такой ответ выглядит некрасиво, поэтому целесообразно сменить у всех множителей знаки: $y^3+y+x^2+\ln x=C$. Формально здесь опять ошибка – справа следовало бы записать «минус цэ». Но «между строк» подразумевается, что «минус цэ» – это всё равно константа, которая с тем же успехом принимает то же множество значений, и поэтому ставить «минус» не имеет смысла.

Я буду стараться избегать небрежного подхода и проставлять у констант разные индексы при их преобразовании, **чего и вам советую делать.**

Пример 7

Решить дифференциальное уравнение $2(xy+y)y'+x(y^4+1)=0$

Решение: данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные:

$$2(x+1)y\cdot\frac{dy}{dx}=-x(y^4+1)$$

$$\frac{2ydy}{y^4+1}=-\frac{xdx}{x+1}$$

Интегрируем:

$$2\int\frac{ydy}{y^4+1}=-\int\frac{(x+1-1)dx}{x+1}$$

$$\int\frac{d(y^2)}{(y^2)^2+1}=-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$arctg(y^2)=-x+\ln|x+1|+C$$

Константу C тут не стОит определять под логарифм, поскольку ничего путного из этого не получится.

Ответ: общий интеграл: $arctg(y^2)+x-\ln|x+1|=C,$ где $C=const$

И, разумеется, здесь НЕ НАДО выражать «игрек» в явном виде, ибо получится трэш (вспоминаем третий технический совет).

Обратите внимание, что условие этой задачи не требуется проверки. Но я **настоятельно рекомендую по возможности ВСЕГДА проверять решение.** Ну а зачем пропускать возможные ошибки там, где их можно 100% не пропустить?!

Поэтому дифференцируем полученный ответ:

$$(arctg(y^2)+x-\ln|x+1|)'=(C)'$$

$$(arctg(y^2))'+(x)'-(\ln|x+1|)'=0$$

$$\frac{1}{1+(y^2)^2}\cdot(y^2)'+1-\frac{1}{x+1}=0$$

$$\frac{2yy'}{1+(y^2)^2}+\frac{x+1-1}{x+1}=0$$

$$\frac{2yy'}{1+y^4}+\frac{x}{x+1}=0$$

Приводим дроби к общему знаменателю, после чего знаменатель испаряется *(можно сказать, что мы «поднимаем» его наверх правой части и умножаем на ноль)*:

$$\frac{2yy'(x+1)+x(1+y^4)}{(1+y^4)(x+1)}=0$$

$2(xy+y)y'+x(1+y^4)=0$ – получено исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 8

Найти частное решение ДУ.

$$2y'\sin y\cdot\cos y\cdot\sin^2 x+\cos x=0\,,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Это пример для самостоятельного решения. Единственная поправка в термине – здесь получится общий интеграл, а посему нужно исхитриться найти не частное решение, а *частный интеграл*. Полное решение и ответ в конце книги.

Как уже отмечалось, в диффурах с разделяющимися переменными нередко вырисовываются не самые простые интегралы. И вот как раз парочка таких примеров для самостоятельного решения. **Рекомендую прорешать эти уравнения, независимо от уровня вашей подготовки** – это позволит размяться и вспомнить основные методы нахождения интегралов:

Пример 9

Решить дифференциальные уравнения

а) $(1+e^x)ydy-e^y dx=0$;

б) $y-xy'=3(1+x^2y')$

Если на чём-то появился «затык», то не теряйте время и обращайтесь к образцу, где я проставил ссылки на нужные темы и уроки. Кроме того, «внешний вид» ваших ответов может отличаться от «внешнего вида» моих ответов – как вы заметили, **общий интеграл можно записать не единственным способом.**

В этой связи возьмите на заметку важную вещь:

Если ваш ответ не совпал с заранее известным ответом *(задачника, например)*, или вам выдала «не тот» ответ какая-нибудь программа – **то это ещё не значит, что ваш ответ неправильный!** Особенно часто мои читатели приводят аргумент *«но программа же не тот ответ выдаёт!»*. Да, возможно, читатель и в самом деле ошибся, но здесь я всегда замечаю следующее: 1) программу мог написать «на коленке» какой-нибудь студент, 2) и даже в «серьёзных» программах бывают ошибки, а в задачниках – опечатки (последнее довольно часто), 3) зачастую машина решит вам так – как не решит ни один человек :) – наверное, все сталкивались с забавным автоматическим переводом текста на другой язык, вот и здесь так же.

Поэтому

более высокий приоритет (и авторитет) имеет ручная проверка!

Да, конечно, иногда встречаются «тяжёлые случаи», но это скорее исключение, чем правило. Но я-то не буду томить вас долгими ожиданиями – прямо сейчас, с энтузиазмом и восторженными глазами, мы перейдём к изучению следующего параграфа =)

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере:

Пример 10

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

Однако не спешим. **Что в первую очередь следует проанализировать** при решении **любого** дифференциального уравнения первого порядка? Правильно – нужно проверить, а нельзя ли в нём разделить переменные?

Попробуйте мысленно или на черновике попереносить слагаемые из части в часть, повыносить множители за скобки, поперекидывать их по правилу пропорции…. После непродолжительных и тщетных попыток, вы придёте к выводу, что «школьными» действиями **переменные тут разделить нельзя**. Возникает вопрос – как же решить этот диффур?

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

вместо x подставляем λx;
вместо y подставляем λy;
производную не трогаем:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda (y - x e^{\frac{y}{x}})$$

В результате параметр исчез как сон, как утренний туман:

$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ – и мы получили исходное уравнение.

Вывод: данное уравнение является однородным.

Как решить однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка?

У меня очень хорошая новость. Абсолютно все такие уравнения можно решить с помощью одной-единственной (!) стандартной замены.

Функцию «игрек» нужно **заменить произведением** некоторой функции t *(тоже зависящей от «икс»)* и «икса»:

$y = t(x) \cdot x$, или короче: $y = tx$

Используя правило дифференцирования произведения, найдём производную:
$y' = (tx)' = (t)' \cdot x + t \cdot (x)' = t' \cdot x + t \cdot 1 = t'x + t$

Теперь подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

$$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$$

Что даст такая замена? После данной замены и проведенных упрощений мы гарантированно получим уравнение с разделяющимися переменными.

ЗАПОМИНАЕМ как первую любовь: $y = tx$ **и**, соответственно, $y' = t'x + t$.

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$x(t'x + t) = x(t - e^t)$$
$$t'x + t = t - e^t$$
$$t'x = -e^t$$

В результате получено уравнение с разделяющимися переменными. Далее алгоритм работает по накатанной колее. Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью $t' = \frac{dt}{dx}$.

Таким образом, наше уравнение приобретает вид:

$$x\frac{dt}{dx} = -e^t$$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$$-e^{-t}dt = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$-\int e^{-t}dt = \int \frac{dx}{x}$$

Согласно моему первому техническому совету, константу можно «оформить» под логарифм:

$$e^{-t} = \ln|x| + \ln|C|$$

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести **обратную замену**, она тоже стандартна и единственна:

Если $y = tx$, то $t = \frac{y}{x}$

В данном случае получаем: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$

Ответ: общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$, где $C = const$

Общее решение однородного уравнения почти всегда записывают в виде общего интеграла. Дело в том, что в большинстве случаев невозможно выразить «игрек» в явном виде (получить общее решение), а если и возможно, то чаще всего получается громоздкий и корявый ответ.

В нашем примере общее решение выразить можно, навешиваем логарифмы на обе части общего интеграла:

$$\ln e^{-\frac{y}{x}} = \ln \ln|Cx|$$

$$-\frac{y}{x} = \ln \ln|Cx|$$

$y = -x \ln \ln|Cx|$ – ну, ещё куда ни шло, хотя всё равно смотрится кривовато.

Полученный ответ нетрудно проверить. Для этого нужно продифференцировать общий интеграл:

$$\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)' = (\ln|Cx|)'$$

$$e^{-\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{Cx} \cdot (Cx)'$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{(y'x - y)}{x^2} = \frac{1}{Cx} \cdot C$$

$$-\frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Избавляемся от дробей, умножая каждую часть уравнения на x^2:

$$-\frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)}{x^2} \cdot x^2 = \frac{1}{x} \cdot x^2$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y) = x$$

$$y'x - y = -\frac{x}{e^{-\frac{y}{x}}}$$

$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ – в результате получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено правильно.

Кстати, в разобранном примере я не совсем «прилично» записал общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$. **Это не ошибка**, но лучше таки представить его в виде $F(x;y) = C$. И для этого сразу после интегрирования, константу следовало записать без логарифма:

$$e^{-t} = \ln|x| + C,$$

чтобы получить общий интеграл в «классическом» виде:

$$e^{-\frac{y}{x}} - \ln|x| = C, \text{ где } C = const$$

Многие составители задачников и методичек прямо указывают на соблюдение «приличий», и я – не исключение:)

Пример 11

Проверить на однородность и решить дифференциальное уравнение $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$, ответ представить в виде $F(x;y) = C$. Выполнить проверку.

Следует отметить, что многие однородные ДУ проверить не так-то просто – для этого требуется весьма и весьма приличная техника дифференцирования. Но по возможности всегда проверяйте!

А теперь обещанный **важный момент**, о котором я упомянул в самом начале книги, выделю его жирными чёрными буквами:

если в ходе преобразований мы «сбрасываем» множитель *(не константу)* **в знаменатель, то РИСКУЕМ потерять решения!**

Так, в процессе решения уравнения $xy' = y$ (Пример 1) «игрек» оказывается в знаменателе: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, но $y = 0$, очевидно, является решением ДУ и в результате неравносильного преобразования (деления) есть все шансы его потерять! Другое дело, что оно вошло в общее решение $y = Cx$ при нулевом значении константы. Сброс «икса» в знаменатель тоже можно не принимать во внимание, так как $x = 0$ не удовлетворяет исходному диффуру.

Аналогичная история с уравнением $y' + (2y+1)ctgx = 0$ (Пример 3), в ходе решения которого мы «сбросили» $2y+1$ в знаменатель. Строго говоря, здесь следовало проверить, а не является ли $y = -\frac{1}{2}$ решением данного диффура. Ведь является! Но и тут «всё обошлось», поскольку эта функция вошла в общий интеграл $\sqrt{|2y+1|} = \frac{C}{\sin x}$ при $C = 0$.

И если с «разделяющимися» уравнениями такое часто ;) «прокатывает», то с однородными и некоторыми другими диффурами может и «не прокатить». Однако, в Примерах 10-11 «сброс» икса тоже оказался безопасен, ибо там есть $e^{\frac{y}{x}}$ и $tg\frac{y}{x}$, а посему сразу понятно, что $x = 0$ не может быть решением. Но «счастливые случаи» я, конечно же, устроил специально, и не факт, что на практике попадутся именно они:

Пример 12

Решить уравнение $xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0$

И перед тем, как **решать**, СТОП, **не торопимся**, а мысленно либо на черновике анализируем: **нельзя ли разделить переменные?** Нет, нельзя.

Проверим уравнение на однородность, для этого ВМЕСТО x подставляем λx и ВМЕСТО y подставляем λy:

$$\lambda xy' + 2\sqrt{\lambda x \cdot \lambda y} - \lambda y = 0$$

$$\lambda xy' + 2\sqrt{\lambda^2 xy} - \lambda y = 0$$

$$\lambda xy' + 2\lambda\sqrt{xy} - \lambda y = 0$$

выносим «лямбду» за скобки, после чего она испаряется:

$$\lambda(xy' + 2\sqrt{xy} - y) = 0$$

$xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0$ – получено исходное ДУ, значит, оно является однородным.

В реальной практике на чистовике такую проверку проводить не нужно (если специально не просят), и очень быстро вы приноровитесь выполнять её устно.

Проведём типовую замену, а именно подставим $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение:

$$x(t'x + t) + 2\sqrt{x \cdot tx} - tx = 0$$

И первая опасность нас поджидает совсем не там. Дело в том, что $\sqrt{x^2} = |x|$, и этот факт очень легко упустить из виду:

$$x \cdot t'x + tx + 2|x|\sqrt{t} - tx = 0$$

$$t'x^2 + 2|x|\sqrt{t} = 0$$

Вспоминаем, как раскрывается модуль: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$.

Таким образом, у нас получается **два** уравнения:

$t'x^2 + 2x\sqrt{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t'x + 2\sqrt{t} = 0$, если $x > 0$, и

$t'x^2 + 2(-x)\sqrt{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t'x - 2\sqrt{t} = 0$, если $x < 0$.

Уравнения отличаются знАком при корне и, по существу, достаточно решить одно из них. Решим 1-е уравнение:

$$x\frac{dt}{dx} = -2\sqrt{t}$$

$\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} = -\dfrac{dx}{x}$ – **при этом у корня нужно сохранить знак**: в уравнении $t'x + 2\sqrt{t} = 0$ перед ним знак «плюс», и перед интегрированием тоже «плюс»!

И опасность третья: сейчас мы разделили обе части на x и поэтому нужно проверить, не является ли $x = 0$ решением исходного уравнения $xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0$:

$0 + 0 - y = 0$ – *неверное равенство*, ответ «нет».

Кроме того, мы сбросили в знаменатель $\sqrt{t}$, а значит, проверке подлежит функция $t=\frac{y}{x}=0 \Rightarrow y=0$. Подставляем её вместе с её производной $y'=(0)'=0$ в исходное уравнение:

$0+0-0=0$ – получено *верное равенство*, значит, $y=0$ – **это одно из решений ДУ, и мы его рискуем потерять**.

Берём это на заметку и интегрируем обе части:

$$\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\sqrt{t}=-\ln|x|+C$$

Упрощать тут нечего, поэтому проводим обратную замену $t=\frac{y}{x}$:

$\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$, если $x>0$. Привыкаем к виду $F(x;y)=C$!

Аналогично, от 2-го уравнения $t'x-2\sqrt{t}=0$ переходим к уравнению $-\frac{dt}{2\sqrt{t}}=-\frac{dx}{x}$, **сохраняя при корне «минус»**, и после интегрирования и обратной замены получаем:

$$-\sqrt{t}=-\ln|x|+C$$

$-\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$, если $x<0$

Обе «ветки» решения можно записать единым общим интегралом:

$\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$, где «сигнум икс» – это специальная функция, которая возвращает знак «икс»: $\operatorname{sgn}x=1$, если $x>0$, $\operatorname{sgn}x=0$, если $x=0$ и $\operatorname{sgn}x=-1$, если $x<0$.

Допустима и запись $\pm\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$, но она требует дополнительных письменных комментариев.

И на финишной черте вспоминаем о решении $y=0$. В общий интеграл **оно не вошло**, и поэтому его нужно дополнительно указать в **ответе**:

общий интеграл: $\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C,$ где $C=const$, ещё одно решение: $y=0$.

Если по условию требуется найти частное решение, например, с начальным условием $y(-1)=-1$, то следует выбрать нужную ветку: $-\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$ (т.к. $x=-1<0$) и выполнить подстановку: $-\sqrt{\frac{-1}{-1}}+\ln|-1|=C \Rightarrow -1+0=C \Rightarrow C=-1 \Rightarrow -\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=-1$ – искомый частный интеграл. Впрочем, задачу Коши в однородных уравнениях почему-то (уж не знаю почему) предлагают крайне редко.

Продолжаем, сейчас будет становиться **всё жарче и жарче!**

Пример 13

Решить дифференциальное уравнение
$$(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$$

Это очень интересный пример, прямо целый триллер! Сначала убеждаемся в том, что переменные тут разделить нельзя, после чего проводим проверку на однородность:
$$((\lambda y)^2-2\lambda x\cdot\lambda y)dx+(\lambda x)^2dy=0$$
$$(\lambda^2y^2-2\lambda^2xy)dx+\lambda^2x^2dy=0$$
$$\lambda^2(y^2-2xy)dx+\lambda^2x^2dy=0$$
$$\lambda^2\cdot\left[(y^2-2xy)dx+x^2dy\right]=0$$
$(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$ – в результате получено исходное ДУ, значит, оно является однородным.

Особенность этого уравнения состоит в том, что оно содержит готовые дифференциалы, и его можно решить модифицированной заменой:
$$y=tx \quad\Rightarrow\quad dy=xdt+tdx$$

Но я не советую использовать такую подстановку, поскольку получится Великая китайская стена дифференциалов, где нужен глаз да глаз. С технической точки зрения выгоднее перейти к «штриховому» обозначению производной, для этого делим обе части уравнения на dx:
$$\frac{(y^2-2xy)dx}{dx}+\frac{x^2dy}{dx}=\frac{0}{dx}$$
$$y^2-2xy+x^2y'=0$$

И уже здесь мы совершили «опасное» преобразование! Нулевому дифференциалу $dx=0$ соответствует $x=C$ – семейство прямых, параллельных оси OY. Являются ли они решениями нашего ДУ? Подставим в него $x=C$ и $dx=d(C)=0$:
$$(y^2-2Cy)\cdot 0+C^2dy=0$$
$$C^2dy=0$$

Данное равенство справедливо, если $C=0$, то есть, при делении на dx мы рисковали потерять корень $x=0$, **и мы его потеряли** – так как он УЖЕ **не удовлетворяет** полученному уравнению $y^2-2xy+x^2y'=0$.

Следует заметить, что если бы нам **изначально** было дано уравнение $y^2-2xy+x^2y'=0$, то о корне $x=0$ речи бы не шло.

Продолжаем решение стандартной заменой $y=tx,\quad y'=t'x+t$:
$$(tx)^2-2x\cdot tx+x^2(t'x+t)=0$$

после подстановки упрощаем всё, что можно упростить:
$$t^2x^2-2x^2t+x^2(t'x+t)=0$$
$$t^2-2t+t'x+t=0$$
$$t^2+t'x-t=0$$

Разделяем переменные:

$$x\frac{dt}{dx}=t-t^2$$

$$\frac{dt}{t(1-t)}=\frac{dx}{x}$$

И вот здесь снова СТОП: при делении на $t(1-t)$ мы рискуем потерять сразу две функции. Так как $t=\frac{y}{x}$, то это функции:

$$t=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$$

$$1-t=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad y=x$$

Очевидно, что первая функция является решением уравнения $y^2-2xy+x^2y'=0$. Проверяем вторую – подставляем $y=x$ и её производную $y'=(x)'=1$:

$$x^2-2x\cdot x+x^2\cdot 1=0$$

$$x^2-2x^2+x^2=0$$

$0=0$ – получено *верное равенство*, значит, функция $y=x$ тоже является решением дифференциального уравнения.

И при делении на $t(1-t)$ мы эти решения рискуем потерять. Впрочем, они могут войти в общий интеграл. Но могут и не войти.

Берём всё это на заметку и интегрируем обе части:

$$\int\frac{dt}{t(1-t)}=\int\frac{dx}{x}$$

Интеграл левой части можно решить методом выделения полного квадрата, но в диффурах удобнее использовать метод неопределенных коэффициентов.

Разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}=\frac{1}{t(1-t)}$$

$$A(1-t)+Bt=1$$

$$\begin{cases}-A+B=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow B=1$$

Таким образом: $\frac{1}{t(1-t)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}$ – удобнее так.

Находим оставшиеся интегралы:

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\ln|x|+\ln|C|$$

$\ln|t|-\ln|t-1|=\ln|x|+\ln|C|$ – так как у нас нарисовались одни логарифмы, то константу тоже заталкиваем под логарифм.

Перед обратной заменой **снова упрощаем всё, что можно упростить**:

$$\ln\left|\frac{t}{t-1}\right| - \ln|x| = \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{t}{x(t-1)}\right| = \ln|C|$$

Сбрасываем цепи:

$$\frac{t}{x(t-1)} = C$$

И вот только теперь обратная замена $t = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x}}{x\left(\frac{y}{x} - 1\right)} = C$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{y - x} = C$$

$$\frac{y}{x(y-x)} = C$$

Теперь вспоминаем о «потеряшках»: решение $y = 0$ вошло в общий интеграл при значении $C = 0$, а вот $y = x$ – «пролетело мимо кассы», т.к. оказалось в знаменателе. Поэтому в ответе оно удостаивается отдельной фразы, и да – не забываем о потерянном решении $x = 0$ («икс», к слову, тоже оказался внизу).

Ответ: общий интеграл: $\frac{y}{x(y-x)} = C,$ где $C = const$. Ещё решения: $x = 0,\ \ y = x$

Здесь не так трудно выразить общее решение:

$\frac{y}{y-x} = Cx \Rightarrow y = Cxy - Cx^2 \Rightarrow Cxy - y = Cx^2 \Rightarrow (Cx-1)y = Cx^2 \Rightarrow y = \frac{Cx^2}{Cx-1}$, но это уже «понты».

Удобные, впрочем, для проверки. Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{Cx^2}{Cx-1}\right)' = \frac{(Cx^2)'(Cx-1) - Cx^2(Cx-1)'}{(Cx-1)^2} = \frac{2Cx(Cx-1) - Cx^2 \cdot C}{(Cx-1)^2}$$

и подставим $y = \frac{Cx^2}{Cx-1},\ y' = \frac{2Cx}{Cx-1} - \frac{C^2x^2}{(Cx-1)^2}$ в левую часть уравнения:

$$y^2 - 2xy + x^2y' = \left(\frac{Cx^2}{Cx-1}\right)^2 - 2x \cdot \frac{Cx^2}{Cx-1} + x^2\left(\frac{2Cx}{Cx-1} - \frac{C^2x^2}{(Cx-1)^2}\right) =$$

$= \frac{C^2x^4}{(Cx-1)^2} - \frac{2Cx^3}{Cx-1} + \frac{2Cx^3}{Cx-1} - \frac{C^2x^4}{(Cx-1)^2} = 0$ – в результате получена правая часть уравнения, что и требовалось проверить.

Тренируемся!

Пример 14

Решить дифференциальные уравнения

а) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

б) и что-нибудь простенькое… вот: $(x+y)dy + ydx = 0$, а то вы больше не придёте к такому маньяку :) Выполнить проверку.

Однородность этих уравнений, думаю, всем виднА, но ни в коем случае не следует забывать и о Проверке № 0 ;) Ибо уравнение $yy' = x$ тоже однородно, но в нём можно преспокойно разделить переменные, дабы не блуждать в трёх соснах с первой любовью :)

Решения и ответы в конце книги, и не забывайте, что «внешний вид» ваших решений и ответов не обязан совпадать с образцом. Проверка и ещё раз проверка!

Итак: при неравносильных преобразованиях ВСЕГДА проверяйте *(по крайне мере, устно)*, **не теряете ли вы решения!** Какие это преобразования? Как правило, сокращение на что-то, деление на что-то, вынесение из-под корня / внесение под корень. Так, например, при делении на $\sqrt{y^2 - x^2}$ нужно проверить, не являются ли функции $y = -x,\ y = x$ решениями дифференциального уравнения. Если проводится замена $y = tx$, то легче лёгкого потерять одну из веток решения, поэтому не забываем про модуль: $\sqrt{t^2x^2 - x^2} = |x|\sqrt{t^2 - 1}$, и после его раскрытия **сохраняем знаки при корне**, несоблюдение этого правила может закончиться фатальной ошибкой. В ряде случаев удаётся избавиться от функции $\operatorname{sgn} x$ или знаков $\pm$, но чтобы вас не путать, я опустил эти примеры.

При делении на *разложимый* на множители квадратный трёхчлен $y^2 + 6y + 5$ есть все шансы потерять возможные корни $y = -1,\ y = -5$. В то же время при делении на $\sqrt{y^2 + 4}$ или *неразложимый* трёхчлен $y^2 + 2y + 2$ надобность в такой проверке уже отпадает – по причине того, что эти делители не обращается в ноль.

Вот ещё одна опасная ситуация:

$(y-1)(...) = (y-1)(.......)$

Здесь, избавляясь от $y - 1$, следует проверить, не является ли $y = 1$ решением исходного ДУ. Часто в качестве такого множителя встречается «икс», «игрек», и мы рискуем потерять $x = 0,\ y = 0$, которые могут оказаться решениями.

Потеря решения будет серьёзным недочётом и основанием для незачёта задачи!

С другой стороны, если что-то ИЗНАЧАЛЬНО находится в знаменателе, то повода для такого беспокойства нет. Так, в однородном уравнении $y' = \frac{3x - 2y}{x + 5y}$ можно не беспокоиться о функции $y = -\frac{x}{5}$, ибо она изначально «заявлена» в знаменателе.

Переходим к изучению третьего, **важнейшего типа дифференциального уравнения:**

1.4. Линейное неоднородное уравнение первого порядка

Если переменные разделить не удалось, и уравнение однородным не является, то перед нами с ОЧЕНЬ высокой вероятностью линейное неоднородное уравнение 1-го порядка.

Данное уравнение имеет следующий вид:

$y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где $p(x), q(x)$ – члены, зависящие *только от «икс»*.

Как вариант:

1) $q(x)$ может быть константой (конкретным числом):

$y' + p(x) \cdot y = k$;

2) $p(x)$ может быть константой:

$y' + ky = q(x)$, простейшие случаи $y' + y = q(x)$, $y' - y = q(x)$;

3) и иногда рядом с производной красуется «иксовый» множитель:

$r(x) \cdot y' + p(x) \cdot y = q(x)$ – это тоже линейное неоднородное уравнение *(опционально $p(x)$ или $q(x)$ может быть константой).*

Разумеется, в практических примерах члены уравнения могут быть переставлены местами, но гораздо чаще они расположены в стандартном порядке:

Пример 15

Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^x$

Решение: неразделимость переменных и неоднородность этого уравнения совершенно очевидна, и перед нами линейное уравнение вида:
$y' - y = q(x)$

Как решить линейное неоднородное уравнение 1-го порядка?

Существуют два способа решения, и сначала я познакомлю вас с наиболее распространённым ***методом Бернулли***. Он более чёткий, более простой и в очередной раз приносит нам отличную новость! Линейное дифференциальное уравнение тоже можно решить одной-единственной заменой:

$y = u(x) \cdot v(x)$, где u и v – некоторые, *пока ещё* неизвестные функции, зависящие от «икс».

Коль скоро, у нас произведение $y = uv$, то по правилу дифференцирования произведения: $y' = (uv)' = u'v + uv'$

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение $y' - y = e^x$:

$u'v + uv' - uv = e^x$

Все дальнейшие действия, как вы правильно догадались, будут посвящены отысканию функций «у» и «вэ».

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах:

$$u'v + \boxed{uv' - uv} = e^x$$

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае:

$u'v + u(v' - v) = e^x$

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно:

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v' - v = 0$ (первое уравнение)

Если $v' - v = 0$, тогда наш страх $u'v + u(v' - v) = e^x$ заметно уменьшается:

$u'v + u \cdot 0 = e^x$

$u'v = e^x$ – это второе уравнение.

Уравнения записываем в систему:

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = e^x \end{cases}.$$

Именно в таком порядке – чтобы не путаться. Система опять же решается стандартно.

Сначала **из первого уравнения находим функцию** $v(x)$**.** Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными, поэтому его решение я приведу без комментариев:

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{dx} = v$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln|v| = x$

$v = e^x$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы <u>не приписываем</u>.

Далее **подставляем найденную функцию** $v = e^x$ **во второе уравнение системы** $u'v = e^x$:

$u' \cdot e^x = e^x$

Да это даже не удовольствие – это мечта!

Из второго уравнения находим функцию $u(x)$:

$u' = 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$u = \int dx = x + C$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C .

Опс. А задача-то решена! Вспоминаем, с чего всё начиналось: $y = uv$.
Обе функции найдены:

$v = e^x$

$u = x + C$

Записываем общее решение:

$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$

В ответе можно раскрыть скобки, это дело вкуса:

Ответ: общее решение $y = Ce^x + xe^x$, где $C = const$

Проверка выполняется по знакомой технологии, берём ответ $y = Ce^x + xe^x$ и находим производную:

$y' = (Ce^x + xe^x)' = C(e^x)' + (x)'e^x + x(e^x)' = Ce^x + e^x + xe^x$

Подставим $y = Ce^x + xe^x$ и $y' = Ce^x + e^x + xe^x$ в исходное уравнение $y' - y = e^x$:

$Ce^x + e^x + xe^x - (Ce^x + xe^x) = e^x$

$Ce^x + e^x + xe^x - Ce^x - xe^x = e^x$

$e^x = e^x$

Получено верное равенство, таким образом, общее решение найдено правильно.

Разбираем «на одном дыхании»:

Пример 16

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Решение: данное уравнение имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ линейного уравнения. Проведем замену: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ и подставим $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$

После подстановки вынесем множитель за скобки, какие два слагаемых нужно мучить – смотрите предыдущий пример. Хотя, наверное, все уже поняли:

$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$

Составляем систему. Для этого приравниванием к нулю то, что находится в скобках: $v'+2xv=0$, автоматически получая и второе уравнение системы:

$$u'v+u\cdot 0=xe^{-x^2}$$

$$u'v=xe^{-x^2}$$

В результате:

$$\begin{cases} v'+2xv=0 \\ u'v=xe^{-x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем функцию v:

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\frac{dv}{v}=-2xdx$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int xdx$$

$$\ln|v|=-x^2$$

$v=e^{-x^2}$ – без константы! Найденную функцию подставляем во второе уравнение системы $u'v=xe^{-x^2}$:

$$u'\cdot e^{-x^2}=xe^{-x^2}$$

Теперь находим функцию u. Уравнение опять получилось простенькое:

$$\frac{du}{dx}=x$$

$$u=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$$

Обе функции найдены:

$$v=e^{-x^2}$$

$$u=\frac{x^2}{2}+C$$

Таким образом, общее решение: $y=uv=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\cdot e^{-x^2}$

Ответ: общее решение: $y=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\cdot e^{-x^2}$, где $C=const$

Без остановки решаем самостоятельно:

Пример 17

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$, выполнить проверку.

Как видите, алгоритм довольно прост. **В чём особенность решения линейных неоднородных уравнений 1-го порядка?** Особенность состоит в том, практически всегда в ответе получается *общее решение*, в отличие от тех же однородных уравнений, где общее решение хорошо выражается крайне редко и ответ приходится записывать в виде *общего интеграла*.

Рассмотрим что-нибудь с дробями:

Пример 18

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'+\frac{y}{x}-2e^{x^2}=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$

Напоминаю, что такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

И сразу обратим внимание, что уравнение представлено не совсем в стандартной форме. Этого можно не делать, но я все-таки рекомендую всегда переписывать уравнения в привычном виде $y'+p(x)\cdot y=q(x)$:

$$y'+\frac{y}{x}=2e^{x^2}$$

Алгоритм **решения** полностью сохраняется, за исключением того, что в конце прибавится один небольшой пунктик. Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем замену $y=uv,\quad y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=2e^{x^2}$$

и типовой «вынос» за скобки:

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=2e^{x^2}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v'+\frac{v}{x}=0 \\ u'v=2e^{x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=-\ln|x|$$

$$\ln|v|=\ln|x|^{-1}$$

$$\ln|v|=\ln\frac{1}{|x|}$$

$v=\frac{1}{x}$ – подставим найденную функцию во второе уравнение $u'v=2e^{x^2}$ системы:

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=2e^{x^2}$$

$$du=2xe^{x^2}dx$$

$$u=2\int xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}d(x^2)=e^{x^2}+C$$

(здесь интеграл взят *методом подведения функции под знак дифференциала*)

Обе функции найдены, таким образом, общее решение:

$$y=uv=(e^{x^2}+C)\cdot\frac{1}{x}=\frac{e^{x^2}+C}{x},\text{ где } C=const$$

На заключительном этапе нужно решить задачу Коши, то есть найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$:

$$y(1)=\frac{e^{1^2}+C}{1}=e+C=e\quad\Rightarrow\quad C=0$$

Ответ: частное решение: $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$

Ещё раз повторим алгоритм проверки частного решения. Сначала проверяем, действительно ли выполняется начальное условие $y(1)=e$?

$y(1)=\dfrac{e^{1^2}}{1}=e$ – да, начальное условие выполнено.

Теперь берём полученный ответ $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$ и находим производную. Используем правило дифференцирования частного:

$$y'=\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)'=\frac{(e^{x^2})'x-e^{x^2}(x)'}{x^2}=\frac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x-e^{x^2}}{x^2}=2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x^2}$$

Подставим $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$ и $y'=2e^{x^2}-\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$ в исходное уравнение $y'+\dfrac{y}{x}-2e^{x^2}=0$:

$$2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x^2}+\frac{\frac{e^{x^2}}{x}}{x}-2e^{x^2}=0$$

$$2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x^2}+\frac{e^{x^2}}{x^2}-2e^{x^2}=0$$

$0=0$ – получено верное равенство, в чём и хотелось убедиться.

Пример 19

Найти решение задачи Коши

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ y(0)=\frac{1}{2}$$

Это пример для самостоятельного решения, полное решение и ответ в конце книги.

Не знаю, обратили вы внимание или нет, но всех задачах я «объявляю» тип дифференциального уравнения. Это не случайность!

В начале решения крайне желательно указывать тип уравнения

Это опять же не является каким-то строгим правилом, но «голое» решение могут запросто «завернуть» со вполне обоснованным вопросом: *А почему вы здесь провели такую замену?* Риск незачёта серьёзно увеличивается, если в вашей работе «одни формулы». Поэтому **решение нужно обязательно снабжать словесными комментариями**, пусть минимальными, в частности, указывать, что это за зверь.

Перейдем к рассмотрению чуть более замысловатых уравнений:

Пример 20

Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения
$x^2y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$

Решение: в данном уравнении слагаемые снова не на своих местах, поэтому сначала максимально близко приближаем диффур к виду $y' + p(x)\cdot y = q(x)$:
$x^2y' - 2xy = 3$

Что в нём особенного? Во-первых, в правой части у нас константа $q(x) = 3$. Это допустимо. Во-вторых, рядом с производной есть множитель x^2, который зависит только от «икс». Это тоже допустимо. Из-за этих особенностей линейное уравнение не перестает быть линейным.

Алгоритм решения полностью сохраняется за исключением пары нюансов в самом начале. Проведем замену $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:
$x^2(u'v + uv') - 2xuv = 3$

Теперь следовало бы выполнить вынесение множителя за скобки. Прозвучит каламбурно, но сначала нам нужно раскрыть скобку, поскольку одно из нужных нам слагаемых недоступно:
$x^2u'v + x^2uv' - 2xuv = 3$

Вот теперь проводим вынесение множителя скобки:
$x^2u'v + xu(xv' - 2v) = 3$

Обратите внимание на тот факт, что за скобки мы вынесли не только функцию u, но еще и «икс». **Всё**, что можно вынести за скобки – выносим.

Составим и решим систему:
$$\begin{cases} xv' - 2v = 0 \\ x^2u'v = 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v:

$$x\frac{dv}{dx}=2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=2\ln|x|$$

$$\ln|v|=\ln x^2$$

$v=x^2$ – подставим во второе уравнение системы:

$$x^2u'\cdot x^2=3$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{3}{x^4}$$

$$u=3\int\frac{dx}{x^4}=C-\frac{1}{x^3}$$

Таким образом, общее решение:

$y=uv=\left(C-\frac{1}{x^3}\right)\cdot x^2=Cx^2-\frac{1}{x}$, где $C=const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(1)=C\cdot 1^2-\frac{1}{1}=C-1=-1\Rightarrow C=0$$

Ответ: частное решение: $y=-\frac{1}{x}$ – проверка тут чуть ли не устная.

Самостоятельно щёлкаем следующий орешек:

Пример 21

Найти частное решение ДУ

$xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$, $y(1)=0$

Какие трудности встречаются в ходе решения линейного неоднородного уравнения? Основной камень преткновения состоит в том, что может появиться довольно сложный интеграл. Как правило, неприятный интеграл появляется при нахождении функции u (в то время как с нахождением функции v обычно проблем не возникает).

Второй момент касается вообще всех диффуров, а именно их «внешнего вида». Он зачастую обманчив:

не редкость, когда «страшный» диффур на самом деле оказывается несложным, а «легкий» на вид диффур вызывает мучительную боль за бесцельно прожитые часы

Ну вот, например: $y'-2xy=2x^3y^2$ …это простое уравнение? Как вы думаете?

Вперёд! – оно нас уже заждалось:

1.5. Дифференциальное уравнение Бернулли

Не путать с *методом Бернулли*. Данное уравнение по общей структуре напоминает линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$y' + p(x)\cdot y = q(x)y^n$ с теми же частными разновидностями: $p(x)$ или $q(x)$ может быть числом, а у производной может присутствовать множитель $r(x)$.

Характерным признаком, по которому можно определить уравнения Бернулли, является наличие функции «игрек» в степени «эн»: y^n, при этом $n \neq 1$ *(иначе получится уравнение с разделяющимися переменными)* и $n \neq 0$ *(т.к. получится как раз линейное неоднородное ДУ)*.

Степень n может быть не только положительной, но и отрицательной, например: $y^{-1} = \frac{1}{y}$, а также обыкновенной дробью, например: $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$.

Если $n > 0$, то уравнение Бернулли имеет очевидное решение $y = 0$, которое «теряется» в ходе использования типового алгоритма:

Пример 22

Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданному начальному условию.

$y' - 2xy = 2x^3y^2$, $y(0) = 1$

И вопрос на засыпку: с чего начать **решение**? С проверки нельзя ли разделить переменные! Нельзя. Так же очевидно, что уравнение не однородно, и по причине множителя y^2 – не линейно. Данный диффур имеет «классический» вид $y' + p(x)y = q(x)y^n$ уравнения Бернулли.

Как решить дифференциальное уравнение Бернулли?

Уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному уравнению с помощью замены, и алгоритм решения незамысловат:

На первом шаге необходимо избавиться от «игрека» в правой части. Для этого сбрасываем y^2 в низ левой части и проводим почленное деление:

$\frac{y' - 2xy}{y^2} = 2x^3$ – вот здесь-то как раз и теряется решение $y = 0$. Но в нашем случае это не имеет особого значения, поскольку требуется решить задачу Коши:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$$

Теперь надо избавиться от «игрека» вот в этом слагаемом:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$$

Для этого проводим замену: $\frac{1}{y}=z(x)$, то есть меняем дробь с «игреком» на функцию «зет». Найдём её производную, распишу очень подробно:

$z'=\left(\frac{1}{y}\right)'=(y^{-1})'=-y^{-2}\cdot y'=-\frac{y'}{y^2}$, откуда выразим $\frac{y'}{y^2}=-z'$

Таким образом, в результате замены $\frac{1}{y}=z,\ \frac{y'}{y^2}=-z'$ уравнение $\frac{y'}{y^2}-\frac{2x}{y}=2x^3$ превращается в уравнение:

$-z'-2xz=2x^3$

из эстетических соображений сменим знаки:

$z'+2xz=-2x^3$

В результате получено линейное неоднородное уравнение с той лишь разницей, что вместо привычного «игрека» у нас буква «зет». Дальше алгоритм работает по накатанной колее, проводим стандартную замену $z=uv\Rightarrow z'=u'v+uv'$:

$u'v+uv'+2xuv=-2x^3$

$u'v+u(v'+2xv)=-2x^3$

Составим и решим систему: $\begin{cases} v'+2xv=0 \\ u'v=-2x^3 \end{cases}$

Из первого уравнения найдем v:

$\frac{dv}{dx}=-2xv$

$\int\frac{dv}{v}=-2\int xdx$

$\ln|v|=-x^2$

$v=e^{-x^2}$ – подставляем найденную функцию во второе уравнение:

$u'\cdot e^{-x^2}=-2x^3$

$\frac{du}{dx}=-2x^3e^{x^2}$

$u=-2\int x^3e^{x^2}dx=(*)$

Этот интеграл берётся по частям, и вместо занятых u и v, я буду использовать буквы «а» и «бэ»:

$a=x^2 \quad\Rightarrow\quad da=2xdx$

$db=-2xe^{x^2}dx \quad\Rightarrow\quad b=-2\int xe^{x^2}dx=-\int e^{x^2}d(x^2)=-e^{x^2}$

и по формуле $\int adb=ab-\int bda$:

$(*)=-x^2e^{x^2}+2\int xe^{x^2}dx=-x^2e^{x^2}+\int e^{x^2}d(x^2)=-x^2e^{x^2}+e^{x^2}+C$

Таким образом:
$$z = uv = (-x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2} = Ce^{-x^2} - x^2 + 1$$

Но это ещё далеко не всё, вспоминаем, что $\frac{1}{y} = z$ и выполняем обратную замену:
$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{-x^2} - x^2 + 1}$, где $C = const$ – общее решение.

Обратите внимание, что решение $y = 0$ в это семейство не вошло, но сейчас данный факт не актуален, поскольку нам нужно решить задачу Коши, а именно найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$:
$$y(0) = \frac{1}{Ce^0 - 0^2 + 1} = \frac{1}{C+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{1 - x^2}$

Проверка здесь весьма простА:

1) $y(0) = \frac{1}{1 - 0^2} = 1$ – начальное условие выполнено.

2) Найдём $y' = \left(\frac{1}{1 - x^2}\right)' = -\frac{1}{(1-x^2)^2} \cdot (1 - x^2)' = -\frac{1}{(1-x^2)^2} \cdot (0 - 2x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ и подставим $y = \frac{1}{1-x^2}$, $y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ в исходное уравнение $y' - 2xy = 2x^3 y^2$:
$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} - 2x \cdot \frac{1}{1-x^2} = 2x^3 \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$$
$$\frac{2x - 2x(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$$
$$\frac{2x - 2x + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$$
$\frac{2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$ – верное равенство.

Таким образом, частное решение найдено верно. При желании можно проверить и общее решение – с более громоздкими, но не сверхъестественными выкладками.

Самостоятельно:

Пример 23

$$y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0, \; y(0) = -1$$

Здесь перед решением удобно представить уравнение в «стандартном» виде уравнения Бернулли, т.е. перенести «игрек квадрат» направо.

Вообще, иногда составители сборников и методичек зашифровывают уравнения до неузнаваемости, например, то же уравнение $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -y^2$$

$$dy + \frac{ydx}{x+1} = -y^2 dx$$

$$(x+1)dy + ydx = -y^2(x+1)dx$$

$$(x+1)dy + ydx + (xy^2 + y^2)dx = 0$$

И поэтому, **если предложенное вам уравнение «по виду» не подпадает ни под один распространённый тип**, то имеет смысла пораскрывать скобки, попереставлять слагаемые и т.д., а там, глядишь, и вообще переменные разделить удастся!

А теперь предлагаю вашему вниманию ещё один «триллер»:

Пример 24

Найти решение ДУ $y' - \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y}$, соответствующее начальному условию $y(1) = 1$

Корни, куда же без них

Решение: данное ДУ имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$ уравнения Бернулли с той особенностью, что множитель y^n «замаскирован» под корень.

Сначала убираем «игрек» из правой части, для этого делим каждую часть на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y' - \frac{2y}{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2x\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{y}}{x} = 2x$$

здесь потеряно тривиальное решение $y = 0$, но оно нас сильно не интересует.

Теперь с помощью замены нужно избавиться от «игрека» вот в этом слагаемом:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{y}}{x} = 2x$$

и из вышесказанного следует замена: $\sqrt{y} = z$

Найдем производную:

$z' = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$, откуда выразим:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$2z' - \frac{2z}{x} = 2x$$

каждое слагаемое которого можно «безболезненно» разделить на «двойку»:

$$z' - \frac{z}{x} = x$$

И чтобы вы не заскучали, я расскажу о ***Методе вариации произвольной постоянной***. Да не пугайтесь так ☺ – он интереснее замены $z = uv$!

1) Сначала найдём общее решение соответствующего *линейного однородного* уравнения. Грубо говоря, это то же уравнение с «отброшенным» членом $q(x)$:

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

Данное ДУ допускает разделение переменных, и мы без труда отыскиваем его общее решение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|\tilde{C}|$$

$$\ln|z| = \ln|\tilde{C}x|$$

$$z = \tilde{C}x, \quad \text{где } \tilde{C} = const$$

2) Далее ВМЕСТО константы записываем *пока ещё* неизвестную функцию: $z = u(x) \cdot x$ *(это и называется варьировать постоянную)*, находим производную: $z' = (ux)' = (u)' \cdot x + u \cdot (x)' = u'x + u$ и подставляем $z = ux$ и $z' = u'x + u$ в неоднородное уравнение $z' - \frac{z}{x} = x$:

$$u'x + u - \frac{ux}{x} = x$$

Если всё сделано правильно, то два слагаемых должны испариться, как оно и происходит в нашем случае:

$$u'x + u - u = x$$

$$u'x = x$$

тут ещё и «иксы» исчезают:

$$\frac{du}{dx} = 1$$

в результате получилось примитивное уравнение с очевидным решением:

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + C$$

Теперь вспоминаем, что $z = ux = (x + C)x$, и в результате обратной замены $z = \sqrt{y}$ получаем общий интеграл $\sqrt{y} = (x + C) \cdot x$, из которого легко выразить и общее решение:

$$y = ((x + C) \cdot x)^2 = (x + C)^2 \cdot x^2, \quad \text{где } C = const$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(1)=1$:

$y(1)=(1+C)^2\cdot 1=1$

…вот тебе и раз. Уравнение $(1+C)^2=1$ имеет два корня $C=-2, C=0$ и в результате получаются… два частных решения?

Нет! Когда мы выражали общее решение, то выполнили возведение в квадрат, из-за чего у нас появился *посторонний* корень. Поэтому начальное условие $x=1, y=1$ лучше подставить непосредственно в общий интеграл $\sqrt{y}=(x+C)\cdot x$:

$\sqrt{1}=(1+C)\cdot 1$

$1=1+C \quad \Rightarrow \quad C=0$ – и помещаем этот ноль уже в общее решение $y=(x+C)^2\cdot x^2$:

$y=(x+0)^2\cdot x^2=x^4$

Легко видеть, что значению $C=-2$ соответствует *частный интеграл* $\sqrt{y}=(x-2)\cdot x$, и он не удовлетворяет начальному условию $y(1)=1$.

Вот так-то оно бывает! – в однородных уравнениях мы «теряли» решения, а здесь, наоборот – «приобрели» лишнее. И как тут не вспомнить третий технический совет, где я не рекомендовал возводить в степени или извлекать корни в общем интеграле.

Ответ: частное решение $y=x^4$ – проверку выполните сами, она тут устная.

Но кино ещё не закончилось, и следующий факт должен быть понятен, даже если вы не знаете, как выглядит график многочлена 4-й степени. Семейство *кривых* $y=(x+C)^2\cdot x^2$ (общее решение ДУ) расположено в верхней полуплоскости и *касается* оси абсцисс в каждой её точке. Можно сказать, что множество графиков $y=(x+C)^2\cdot x^2$ *(при всех значениях константы)* своими точками касания *порождает* решение $y=0$, которое, как заправский партизан засело в чаще леса и в общее решение не вошло.

Такое необычное решение называют ***особым решением*** дифференциального уравнения. В общем случае особое решение тоже является кривой, которая *огибает* «основное семейство». В рассмотренном же примере оно представляет собой прямую, которая ассоциируется с «подставкой» под графики функций $y=(x+C)^2\cdot x^2$.

Пример 25

Решить дифференциальное уравнение $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$

После сведения к неоднородному уравнению я использовал *метод вариации произвольной постоянной*, но, разумеется, там годится и замена $z=ux$.

Иногда в уравнениях Бернулли встречаются и другие степени «игрека», например: $y'+\frac{3y}{x}=x^3y^3$ с заменой $\frac{1}{y^2}=z\Rightarrow\frac{y'}{y^3}=-\frac{1}{2}z'$ или $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}\cdot(2+3\cos x)\cdot y^{-1}$ с заменой $y^2=z\Rightarrow 2yy'=z$. Решения эти диффуров можно найти в **соответствующей статье** сайта, но они не столь актуальны, поскольку есть более насущный материал:

1.6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Сначала быстренько вспомним, что такое ***частные производные*** и *полный дифференциал* функции двух переменных. Рассмотрим простую функцию:

$z = F(x;\, y) = x^2 + y^2 - xy + x - y$

и найдём её частные производные первого порядка: $F'_x = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ – в диффурах больше «в почёте» их дробные обозначения. Повторяем основное правило:

– если мы берём производную по «икс», то «игрек» считается константой:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_x = 2x + 0 - y + 1 - 0 = 2x - y + 1$$

– если мы берём производную по «игрек», то константой уже считается «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_y = 0 + 2y - x + 0 - 1 = 2y - x - 1$$

Полный дифференциал имеет вид: $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$, в данном случае:

$dF = (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$

Пример 26

Решить дифференциальное уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

Не ожидали? =)

То есть, данное дифференциальное уравнение является полным дифференциалом функции $F(x;\, y) = x^2 + y^2 - xy + x - y + C$ – единственное, к ней нужно ещё приписать константу. Отсюда и название уравнения.

Как решить диффур в полных дифференциалах?

Очевидно, что нужно выполнить некоторые обратные действия, чтобы восстановить исходную функцию (общий интеграл). Не так давно я что-то там дифференцировал. Какое действие является обратным? Правильно, интегрирование.

А теперь, пожалуйста, забудьте задачку про частные производные и готовый ответ. Ведь когда нам предложено **произвольное дифференциальное уравнение**, то **мы ещё не знаем** о том, что это уравнение в полных дифференциалах. И поэтому сначала имеет смысл «покрутить-повертеть» исходное уравнение:

$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

Вдруг тут можно разделить переменные? Или уравнение является однородным? А может здесь «спрятан» какой-то другой тип уравнения? – не так давно я зашифровал в такой форме даже уравнение Бернулли!

И только после этих безуспешных попыток проверяем: **а не является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах?** Чтобы выполнить эту проверку, выпишем из уравнения $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ множители, находящиеся при дифференциалах:

$P=2x-y+1,\quad Q=2y-x-1$ – **строго обозначая их буквами «пэ» и «ку», и строго в таком порядке!** Это стандарт.

Теперь найдём следующие частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(2x-y+1)'_y=0-1+0=-1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y-x-1)'_x=0-1-0=-1$$

Если $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (наш случай), то данное ДУ является полным дифференциалом $dF=F'_x dx+F'_y dy$ некоторой функции F *(а равенство вышенайденных производных – есть не что иное, как равенство смешанных производных 2-го порядка: $F''_{xy}=F''_{yx}$).*

Ну а коль скоро уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ имеет вид $\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy=0$, то:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

Таким образом, нам известны две частные производные, и задача состоит в том, чтобы восстановить общий интеграл $F(x;y;C)=0$. Существуют два зеркальных способа решения, и мы пойдём более привычным путём, и именно начнём с «иксовой» производной $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$. Нижнюю производную $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$ пока запишем на листочек и спрячем в карман. Да-да – **прямо так и сделайте!** Я подожду….

Действие первое. Поскольку в нашем распоряжении есть частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$, то нужная нам функция F восстанавливается с помощью обратного действия – *частного интегрирования* по «икс». Интегрирование осуществляется по тому же принципу, что и нахождение частных производных.

Когда мы берём интеграл по «икс», то переменная «игрек» считается <u>константой</u>, распишу очень подробно:

$$F=\int(2x-y+1)dx=2\int xdx-y\int dx+\int dx=2\cdot\frac{x^2}{2}-y\cdot x+x+\varphi(y)=x^2-xy+x+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая <u>только от «игрек»</u>.

Правильно ли найден интеграл? Выполним проверку, т.е. возьмём частную производную по «икс»:

$F'_x = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_x = 2x - y + 1 + 0 = 2x - y + 1$ – получена исходная подынтегральная функция, в чём и требовалось убедиться

Примечание: *надеюсь всем, понятно, почему* $(\varphi(y))'_x = 0$ *– функция* $\varphi(y)$ *зависит только от «игрек», а, значит, является константой.*

Действие второе. Берем «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_y = 0 - x + 0 + \varphi'_y(y) = -x + \varphi'_y(y)$$

Функцию $\varphi(y)$ мы пока не знаем, но производная-то по «игрек» у неё существует, поэтому запись $\varphi'_y(y)$ – совершенно законна.

Действие третье. Перепишем результат предыдущего пункта: $\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'_y(y)$ и достаем из широких штанин листочек с производной: $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$

Приравниваем одно с другим:

$-x + \varphi'_y(y) = 2y - x - 1$

и уничтожаем всё, что можно уничтожить:

$\varphi'_y(y) = 2y - 1$

Находим функцию $\varphi(y)$, для этого нужно взять интеграл:

$$\varphi(y) = \int (2y - 1)dy = y^2 - y + C$$

Заключительный аккорд: подставим найденную функцию $\varphi(y) = y^2 - y + C$ в «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$:

$$F = x^2 - xy + x + y^2 - y + C$$

Ответ: общий интеграл: $x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0,$ где $C = const$

Проверка уже выполнена в самом начале параграфа: находим частные производные первого порядка и составляем полный дифференциал – в результате должно получиться исходное дифференциальное уравнение. Оно же получится и в результате прямого дифференцирования общего интеграла:

$$(x^2 + y^2 - xy + x - y + C)' = (0)'$$

$$2x + 2yy' - y - xy' + 1 - y' + 0 = 0$$

$$(2y - x - 1)y' + (2x - y + 1) = 0$$

$$(2y - x - 1)\frac{dy}{dx} + (2x - y + 1) = 0$$

$$(2y - x - 1)dy + (2x - y + 1)dx = 0$$

Проделаем всё то же самое, только короче:

Пример 27

Решить дифференциальное уравнение $(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$

Решение: после неутешительного анализа на «другие типы», проверим, не является ли данный диффур уравнением в полных дифференциалах. Выписываем множители при дифференциалах:

$$P = 3x^2 - 3y^2 + 4x, \quad Q = -(6xy + 4y) = -6xy - 4y$$

Внимание! Не теряем «минус» при записи Q!

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 4x)'_y = 0 - 6y + 0 = -6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-6xy - 4y)'_x = -6y - 0 = -6y$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, значит, уравнение $(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

В данном случае:

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x$ – будем работать с этой производной.

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$ – про эту производную пока забываем.

1) Если $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x$, то:

$$F = \int (3x^2 - 3y^2 + 4x)dx = 3\int x^2 dx - 3y^2 \int dx + 4\int x dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3y^2 \cdot x + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая только от «игрек».

Напоминаю, что когда мы интегрируем по «икс», то переменная «игрек» считается константой и выносится за значок интеграла.

2) Берём «недоделанный» результат предыдущего пункта $F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y) = -6xy + \varphi'_y(y)$$

3) Переписываем трофей предыдущего пункта $\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy + \varphi'_y(y)$ и вспоминаем про «забытую» производную:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$$

Приравниваем и упрощаем:

$$-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$$

$$\varphi'_y(y) = -4y$$

***Примечание**: на практике решение обычно записывают короче, объединяя пункты № 2 и 3:*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y) = -6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y,$$ *то есть сразу же после нахождения производной приравнивается «забытая» производная. В последнем равенстве $-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$ происходит взаимоуничтожение слагаемых, откуда следует: $\varphi'_y(y) = -4y$.*

Восстанавливаем функцию $\varphi(y)$ интегрированием по «игрек»:

$$\varphi(y) = -4\int y\,dy = -4 \cdot \frac{y^2}{2} + C = -2y^2 + C$$

В «недоделанный» результат $F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$ пункта № 1 подставляем найденную функцию $\varphi(y) = -2y^2 + C$.

Ответ: общий интеграл: $x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0$, где $C = const$

Константу можно записывать и в правой части, но тогда возникает заморочка с её переобозначением, и поэтому лично я привык оставлять ответ именно в таком виде. Долой приличия, да здравствует удобство! :) Решение должно быть со всеми удобствами, рядом с метро, в центре.

Выполним проверку. Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_x = 3x^2 - 3y^2 + 4x - 0 + 0 = 3x^2 - 3y^2 + 4x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_y = 0 - 6xy + 0 - 4y + 0 = -6xy - 4y = -(6xy + 4y)$$

Составим дифференциальное уравнение $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$:

$$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

Получено исходное ДУ, значит, задание выполнено правильно.

Второй способ состоит в дифференцировании общего интеграла:
$(x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)' = (0)'$ – с тем же итоговым результатом.

И по «горячим следам» решаем самостоятельно!

Пример 28

$(6y-3x^2+3y^2)dx+(6x+6xy)dy=0$ и выполнить проверку.

Образец решения я записал максимально коротко и без пунктов, то есть приблизил его к «боевым» условиям – примерно так нужно оформлять задачу на практике.

Многочлены хорошо, а другие функции – лучше. Рассмотрим ещё пару примеров.

Пример 29

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y dy}{1+x^2}=0$$

…ну а кому сейчас легко? ☺

Решение: после предварительного анализа, проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах. Выпишем члены при дифференциалах:

$$P=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2},\quad Q=\frac{e^y}{1+x^2}$$

и найдём частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(1-e^y)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(0-e^y)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

– обратите внимание, как за знак производной выносятся целые выражения с «мёртвыми» переменными:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{e^y}{1+x^2}\right)'_x=e^y\cdot((1+x^2)^{-1})'_x=-e^y(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)'_x=$$

$$=-\frac{e^y}{(1+x^2)^2}\cdot(0+2x)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, уравнение $\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y dy}{1+x^2}=0$ является полным дифференциалом некоторой функции F и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

То есть, в нашем распоряжении оказываются частные производные первого порядка:

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$ – работаем с этой производной

$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}$ – про эту производную пока забываем

Если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, то:

$$F = \int \frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2} = (1-e^y)\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1-e^y)}{1+x^2} + \varphi(y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)$$

Здесь $(1-e^y)$ является константой, которая вынесена за знак интеграла, а сам интеграл найден *методом подведения функции под знак дифференциала*.

Находим частную производную по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)\right)'_y = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'_y(y) = \frac{e^y}{1+x^2}$$

Это стандартное короткое оформление задания, когда после нахождения производной сразу приравнивается «забытая» производная $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$.

Из последнего равенства $\frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'_y(y) = \frac{e^y}{1+x^2}$ следует, что $\varphi'_y(y) = 0$, это простейший интеграл:

$$\varphi(y) = \int 0dy = C = const$$

Подставляем найденную функцию $\varphi(y) = C$ в «недоделанный» результат $F = \frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)$ и записываем

ответ: общий интеграл: $\frac{e^y-1}{1+x^2} + C = 0,$ где $C = const$

И как всегда – приятная неожиданность! Научимся решать задачу «зеркальным» способом, а именно:

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$ – про эту производную пока забываем

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$ – и начинаем «пляску» от «игрековой» производной.

Так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$, то $F = \int \frac{e^y dy}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\int e^y dy = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – *пока ещё* неизвестная функция, зависящая только от «икс».

Дифференцируем трофей по «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{e^y}{1+x^2} + \varphi(x)\right)'_x = e^y \cdot ((1+x^2)^{-1})'_x + \varphi'_x(x) = -\frac{e^y}{(1+x^2)^2} \cdot 2x + \varphi'_x(x) =$$

$= -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} + \varphi'_x(x) = \frac{2x-2xe^y}{(1+x^2)^2}$ – и приравниваем полученную производную к «забытой» производной.

В правой части последнего равенства выполняем почленное деление (это можно было сделать сразу):

$$-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}+\varphi'_x(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

уничтожаем несладкую парочку:

$$\varphi'_x(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

и восстанавливаем функцию «фи»:

$\varphi(x)=\int\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{1+x^2}+C$ – после чего подставляем её в «недоделанную» функцию $F=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi(x)$:

$$F=\frac{e^y}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}+C$$

Ответ: общий интеграл: $\frac{e^y-1}{1+x^2}+C=0$, где $C=const$

«Зеркальный» способ решения **ни в коем случае не лишний** и нисколько не экзотичен. На «традиционном» пути запросто может встретиться трудный или даже ОЧЕНЬ трудный интеграл, и тогда альтернативный вариант окажется просто спасением! И, кроме того, второй способ может показаться вам удобнее чисто субъективно.

Пример 30

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

Решайте так, как вам удобно! Но на всякий-то случай пройдите обоими путями ;)

Кроме того, существуют уравнения, *сводящиеся* к уравнению в полных дифференциалах, которые решаются методом *интегрирующего множителя*. Но вероятность встречи с ними крайне мала, и поэтому мы продолжаем.

Полного вам дифференциала во второй части книги!

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$ и **обязательно** содержит производную «энного порядка» $y^{(n)}$ и НЕ содержит производные более высоких порядков.

Так, простейшее уравнение 2-го порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ выглядит так: $y'' = 0$, простейшее уравнение 3-го порядка $F(x, y, y', y'', y''') = 0$ – так: $y''' = 0$ и т.д.

Принцип точно такой же: **решить ДУ высшего порядка – это значит, найти множество функций, которые удовлетворяют данному уравнению**. Это множество называют *общим интегралом* $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ (или *общим решением*), которое содержит ровно «эн» констант. Придавая им различные значения, мы можем получить бесконечно много *частных интегралов (решений)* дифференциального уравнения.

Капитан Очевидность говорит нам о том, что существуют разные типы уравнений высших порядков, и мы незамедлительно приступаем к их изучению.

2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Уже из самого названия становится понятно, что такие сводятся к уравнениям более низкого порядка. Различают **три подтипа** таких диффуров, и чтобы не плодить трёхуровневое меню, я буду использовать словесную нумерацию:

Подтип первый. Уравнения, разрешимые повторным интегрированием

Данное уравнение имеет вид $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ зависит *только от «икс»*, и в тривиальном случае представляет собой константу.

Чтобы решить такое уравнение, нужно n раз проинтегрировать правую часть.

Пример 31

$y'' = x^2 - 2x$

Решение: данное дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$. Интегрируем правую часть, понижая степень уравнения до 1-го порядка:

$y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$, или короче: $y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$

Теперь интегрируем правую часть еще раз, получая *общее решение*:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

Проверяются такие уравнения обычно очень легко. В данном случае нужно лишь найти вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2\right)' = \frac{1}{12}\cdot 4x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 + C_1 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

В результате получено исходное дифференциальное уравнение $y'' = x^2 - 2x$, значит, общее решение найдено правильно.

Пример 32

Решить дифференциальные уравнения

а) $y'' = 3,$ б) $y'' + \sin 2x = \sqrt{x},$ в) $y''' = 0$

Это пример для самостоятельного решения, … не тушуемся – решаем!

Нахождение *частного решения* (задача Коши) имеет свои особенности, одна из которых такова: **каков порядок уравнения – столько и начальных условий**. Это, кстати, касается и других типов диффуров, и если у вас начальных условий меньше, то в условии вашей задачи опечатка, точнее, недопечатка.

Пример 33

Найти частное решение ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$y''' = e^{2x}, \qquad y(0) = \frac{9}{8},\ y'(0) = \frac{1}{4},\ y''(0) = -\frac{1}{2}$$

Уравнение третьего порядка – три начальных условия.

Решение: данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$, а значит, нам нужно последовательно проинтегрировать правую часть три раза.

Сначала понижаем степень уравнения до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

Первый интеграл принёс нам константу C_1. В уравнениях рассматриваемого типа рационально **сразу же** применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим условием:

$$y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} - x + C_2$$

Выползла константа C_2, с которой мы немедленно расправляемся. Возникла тут у меня забавная ассоциация, что я злой дед Мазай с одноствольным ружьём. Ну и действительно, константы «отстреливаются», как только покажут уши из-под интеграла.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом: $y' = \frac{1}{4}e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + C_3$$

Для третьей константы используем последний патрон $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Зайцы плачут, заряды были с солью (я же не Дед Мазай в самом деле ☺)

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1$

Выполним **проверку**, благо, она ненапряжная и чёткая:

1) Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$:

$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8}$ – выполнено.

2) Находим производную:

$$y' = \left(\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1\right)' = \frac{1}{8} \cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4}e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ – выполнено.

3) Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right)' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$$

Проверяем начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$:

$y''(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ – выполнено.

4) Найдем третью производную:

$$y''' = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right)' = e^{2x} - 0 = e^{2x}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y''' = e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Пример 34

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, и выполнить проверку

$x^3 y''' = 6$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$

Решение и ответ в конце книги.

Время от времени в дифференциальных уравнениях рассматриваемого типа приходится находить более трудные интегралы: использовать *метод замены переменной*, *интегрировать по частям*, прибегать к другим ухищрениям. Но это уже всё зависит от вашей техники интегрирования и к сегодняшней теме не относится.

Подтип второй. В уравнении в явном виде отсутствует функция y.

Простейшее уравнение этого подтипа в общем виде выглядит так:

$F(x, y', y'') = 0$ – всё есть, а «игрека» нет. Точнее, его нет *в явном виде*, но он обязательно всплывёт в ходе решения.

Кроме того, вместе с «игреком» в явном виде может отсутствовать первая производная:

$F(x, y'', y''') = 0$ – это уже уравнение третьего порядка.

Может дополнительно отсутствовать и вторая производная:

$F(x, y''', y^{IV}) = 0$ – уравнение четвертого порядка.

И так далее. Думаю, вы увидели закономерность, и теперь сможете без труда определить такое уравнение в практических примерах. Заостряю внимание, что во всех этих уравнениях **обязательно** присутствует независимая переменная «икс».

На самом деле есть общая формула и строгая формулировка, но от них легче не станет, и поэтому мы сразу переходим к практическим вопросам:

Как решать такие уравнения? Они решаются с помощью очень простой замены.

Пример 35

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$$

Решение: в предложенном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y. Заменим первую производную y' новой функцией z, которая зависит от «икс»: $y' = z(x)$

Если $y' = z$, то $y'' = z'$

Цель проведённой замены очевидна – понизить степень уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$$

Получено самое что ни на есть обычное линейное неоднородное ДУ 1-го порядка, с той лишь разницей, что вместо привычной функции «игрек» у нас функция «зет». Для разнообразия я решу его методом вариации произвольной постоянной:

1) Найдём общее решение соответствующего *линейного однородного* уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|z| = -\ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|z| = \ln\left|\frac{C}{x+1}\right|$$

$$z = \frac{\tilde{C}}{x+1}, \text{ где } \tilde{C} = const$$

2) Варьируя постоянную $\tilde{C}$, в неоднородном уравнении проведём замену:

$z = \dfrac{u}{x+1} \quad \Rightarrow \quad z' = \dfrac{u'(x+1) - u}{(x+1)^2} = \dfrac{u'}{x+1} - \dfrac{u}{(x+1)^2}$ – подставляем «зет» и «зет штрих» в уравнение $z' + \dfrac{z}{x+1} = 9(x+1)$:

$$\frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2} + \frac{u}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

Пара слагаемых в левой части испаряются, значит, мы на верном пути:

$$\frac{u'}{x+1} = 9(x+1)$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx} = 9(x+1)^2$$

$$\int du = 9\int (x+1)^2 dx$$

$$u = 9\int (x+1)^2 dx = 9\cdot\frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 = 3(x+1)^3 + C_1$$

Таким образом:

$$z = \frac{u}{x+1} = \frac{3(x+1)^3 + C_1}{x+1} = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Итак, функция z найдена, и тут на радостях можно забыть про одну вещь и машинально записать ответ. Нет-нет, ещё не всё. Вспоминаем, что в начале задания была выполнена замена $y' = z$, следовательно, нужно провести обратную замену $z = y'$:

$$y' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Общее решение восстанавливаем интегрированием правой части:

$$y = \int\left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}\right)dx = (x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2$$

На заключительном этапе нарисовался партизан «игрек», который, как мы помним, в дифференциальное уравнение в явном виде не входил.

Ответ: общее решение: $y = (x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2,$ где $C_1, C_2 - const$

В большинстве случаев проверить такие уравнения не составляет труда.

Находим первую и вторую производные от ответа:

$$y' = ((x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2)' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)}$$

$$y'' = \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)}\right)' = 6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2}$$

и подставляем их в исходное уравнение $y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$:

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + \frac{\left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)}\right)}{x+1} = 9(x+1)$$

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + 3(x+1) + \frac{C_1}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

$$6(x+1) + 3(x+1) = 9(x+1)$$

$9(x+1) = 9(x+1)$ – в результате получено верное равенство, значит, общее решение найдено правильно.

Если дано аналогичное уравнение с более «высокими» производными:
$y''' + \frac{y''}{x+1} = 9(x+1)$, то решение будет очень похожим.

В результате замены $y'' = z \Rightarrow y''' = z'$ мы получим то же самое линейное уравнение $z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$, однако после обратной замены у нас нарисуется диффур *первого подтипа*:

$y'' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$, который следует решить двукратным интегрированием правой части:

$y' = \int\left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}\right)dx = (x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2$ – в точности ответ предыдущей задачи, который нужно проинтегрировать ещё раз:

$$y = \int\left((x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2\right)dx = \frac{(x+1)^4}{4} + C_1(x+1)(\ln|x+1| - 1) + C_2x + C_3$$

Готово.

Всегда ли в результате таких замен получается линейное неоднородное уравнение 1-го порядка? Нет, не всегда. Запросто может получиться уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение или какая-нибудь другая интересность:

Пример 36

Решить дифференциальное уравнение
$(1+\sin x)y''' = \cos x \cdot y''$

Это пример для самостоятельного решения.

Что делать, если в уравнении рассмотренного подтипа требуется найти частное решение? Выгодно использовать ту же методику – последовательный «отстрел» констант.

Подтип третий. В дифференциальном уравнении в явном виде отсутствует независимая переменная x.

Такое уравнение решается с помощью замены $y' = z(y)$, где z – функция, зависящая от «игрек». Следует отметить, что по правилу дифференцирования сложной функции: $y'' = z'(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y)$, или, если короче, в дифференциальном уравнении нужно провести подстановку:

$y' = z \Rightarrow y'' = z'z$, не забывая по ходу решения, что $z' = \frac{dz}{dy}$

Встреча с такими диффурами в отчётной работе крайне маловероятна, и поэтому я воздержусь от конкретных примеров, но на всякий случай **вот ссылка** *(см. низ статьи)*.

Вы готовы к новым свершениям? Впереди ключевые уравнения!

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

В рамках данного курса мы будем рассматривать уравнения с *постоянными коэффициентами*. Такое уравнение имеет вид:

$y'' + py' + qy = 0$, где p и q – конкретные числа (постоянные коэффициенты), а в правой части – **строго** ноль.

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое ***характеристическое уравнение***:

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение с двумя корнями λ_1, λ_2, которые нам нужно найти *(алгоритм я напомнил в Приложении **Школьные формулы**)*. При этом возможны три случая:

Случай первый. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных** действительных корня λ_1, λ_2 (т.е., если дискриминант $D > 0$), то *общее решение* однородного уравнения выглядит так:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Если один из корней равен нулю, то решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Пример 37

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
и вычислим его дискриминант *(см. Приложение **Школьные формулы**)*:
$D = 1 + 8 = 9 > 0$, значит, уравнение имеет различные действительные корни.

Порядок корней не имеет значения, но обычно их располагают в порядке возрастания: $\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2, \quad \lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ – **для проверки** подставляем найденные значения в квадратное уравнение и убеждаемся, что они «подходят».

Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$, где $C_1, C_2 - const$

Не будет ошибкой, если записать общее решение «наоборот»: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, но, как я отметил выше, традиционным стилем считается расположить коэффициенты по возрастанию, сначала –2, потом 1.

Как выполнить проверку? По большому счёту, достаточно проверить квадратное уравнение, т.е. подставить значения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ в уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, но я напомню и **общий принцип** – найденное множество функций должно удовлетворять дифференциальному уравнению. Посмотрим, как это работает в нашем случае – берём ответ $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ и находим производную:

$$y' = (C_1e^{-2x} + C_2e^x)' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x$$

Далее находим вторую производную:

$$y'' = (-2C_1e^{-2x} + C_2e^x)' = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x$$

и подставляем $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$, $y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x$ и $y'' = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x$ **в левую часть** уравнения $y'' + y' - 2y = 0$:

$$y'' + y' - 2y = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x + (-2C_1e^{-2x} + C_2e^x) - 2(C_1e^{-2x} + C_2e^x) =$$
$= 4C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} - 2C_2e^x = 0$ – в результате получена правая часть исходного уравнения (ноль), значит, общее решение $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y' - 2y = 0$ и найдено правильно.

Проделанный «длинный путь» был не лишним – этот навык потребуется нам в дальнейшем, и поэтому **со всей серьёзностью** отнеситесь к следующему заданию:

Пример 38

Найти общее решение дифференциального уравнения, выполнить проверку
$y'' - 4y' = 0$

Решение и ответ в конце книги.

Случай второй. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два ***кратных*** (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы. Вместо λ_1 в формуле можно нарисовать λ_2 или пару λ_1, λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2xe^{0\cdot x} = C_1 + C_2x$. Кстати, $y = C_1 + C_2x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$. И в самом деле – его *характеристическое уравнение* $\lambda^2 = 0$ как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Кроме того, решение этого диффура можно получить двукратным интегрирование правой части:

$$y' = \int 0dx = C_1$$

$$y = C_1\int dx = C_1x + C_2$$

И это были последние интегралы в этой книге!

Пример 39

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$
Здесь можно вычислить дискриминант, равный нулю, и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ *(которую, конечно, ещё нужно «увидеть»)*:
$(\lambda - 3)^2 = 0$ – получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Результат можно записать и в виде $y = (C_2x + C_1)e^{3x}$, который, кстати, удобен для **проверки**. Найдём первую производную:
$y' = ((C_2x + C_1)e^{3x})' = C_2e^{3x} + 3(C_2x + C_1)e^{3x} = (3C_2x + 3C_1 + C_2)e^{3x}$,
вторую:
$y'' = ((3C_2x + 3C_1 + C_2)e^{3x})' = 3C_2e^{3x} + 3(3C_2x + 3C_1 + C_2)e^{3x} = (9C_2x + 9C_1 + 6C_2)e^{3x}$
– обратите внимание на рациональную технику дифференцирования – часть действий можно (и на данный момент уже нужно!) выполнять устно.

Подставляем $y = (C_2x + C_1)e^{3x}$, $y' = (3C_2x + 3C_1 + C_2)e^{3x}$ и $y'' = (9C_2x + 9C_1 + 6C_2)e^{3x}$ в левую часть уравнения, «собираем» всё под единой скобкой и проводим упрощения:
$y'' - 6y' + 9y = (9C_2x + 9C_1 + 6C_2)e^{3x} - 6(3C_2x + 3C_1 + C_2)e^{3x} + 9(C_2x + C_1)e^{3x} =$
$= (9C_2x + 9C_1 + 6C_2 - 18C_2x - 18C_1 - 6C_2 + 9C_2x + 9C_1)e^{3x} = 0 \cdot e^{3x} = 0$ – в результате получена правая часть исходного уравнения, значит, решение найдено правильно.

Пример 40

Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$

Решаем самостоятельно.

Случай третий. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни. Даже если вы не знаете, что такое **комплексные числа**, этот случай можно освоить чисто формально.

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корня $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:
$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.

Примечание: *сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается: $y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 41

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$
$D = 4 - 40 = -36$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$, где $C_1, C_2 - const$

«Тягать» производные и выполнять громоздкую подстановку тут уже, конечно, не хочется *(хотя иногда приходится)*, и поэтому в качестве достаточно надежной проверки рациональнее перепроверить решение квадратного уравнения… 1-2-3 раза ☺

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 42

Решить уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$

Иногда в заданиях требуется найти *частное решение*, удовлетворяющее заданным начальным условиям, то есть, решить *задачу Коши*. Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце задачи добавляется дополнительный пункт:

Пример 43

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
$y'' - 4y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4 = 0$
$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$
$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$
Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:
$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$, где $C_1, C_2 - const$

Теперь нужно найти частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Наша задача состоит в том, чтобы **найти ТАКИЕ значения констант C_1, C_2, чтобы выполнялись ОБА условия**. Алгоритм нахождения частного решения будет отличаться от «отстрела» констант, который мы использовали ранее.

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$:
$y(0) = C_1 e^{-2\cdot 0} + C_2 e^{2\cdot 0} = C_1 + C_2$
Согласно начальному условию, получаем первое уравнение: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$.

Далее берём наше общее решение $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$ и находим производную:

$$y' = (C_1e^{-2x} + C_2e^{2x})' = -2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x}$$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -2C_1e^{-2\cdot 0} + 2C_2e^{2\cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$$

Согласно второму начальному условию, получаем <u>второе уравнение</u>: $y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$, или ещё проще – все члены уравнения можно сразу разделить на два: $-C_1 + C_2 = 1$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Здесь можно использовать «школьный» метод решения *(выразить в каком-нибудь уравнении одну переменную через другую и подставить её во второе уравнение)*, но удобнее провести *почленное* сложение уравнений:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ + & & + & & + \\ -C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ \| & & \| & & \| \\ 0 & & 2C_2 & = & 2 \end{array}$$

из уравнения $2C_2 = 2$ находим $C_2 = 1$ и подставляем это значение в любое, например, первое уравнение системы: $C_1 + 1 = 1$, откуда следует, что $C_1 = 0$.

Всё, что осталось сделать – это подставить найденные значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$:

$$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Проверка осуществляется по уже знакомой схеме:

1) Сначала проверим, выполняется ли начальное условие $y(0) = 1$:

$y(0) = e^{2\cdot 0} = 1$ – начальное условие выполнено.

2) Находим первую производную от ответа:

$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ и проверяем выполнения начального условия $y'(0) = 2$:

$y'(0) = 2e^{2\cdot 0} = 2$ – второе начальное условие тоже выполнено.

3) Находим вторую производную: $y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$ и подставляем её вместе с $y = e^{2x}$ в левую часть исходного уравнения:

$y'' - 4y = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ – в результате получена его правая часть.

Вывод: частное решение найдено верно.

Пример 44

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi)=-1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4$. Выполнить проверку.

$y''+4y=0$

Это пример для самостоятельного решения, ***справочно***:
$\sin\pi=0,\quad \sin 2\pi=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos 2\pi=1$

Решение и ответ в конце книги.

Как видите, особых сложностей с однородными уравнениями нет, **главное, правильно решить квадратное уравнение.**

Иногда встречаются «нестандартные» однородные уравнения, например уравнение в виде $ry''+py'+qy=0$, где при второй производной есть некоторая константа r, отличная от единицы (и, естественно, отличная от нуля). Алгоритм решения ничуть не меняется: следует невозмутимо составить характеристическое уравнение и найти его корни. Если характеристическое уравнение $r\lambda^2+p\lambda+q=0$ будет иметь два различных действительных корня, например: $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{3}$, то общее решение запишется по обычной схеме: $y=C_1e^{-\frac{x}{2}}+C_2e^{\frac{x}{3}}$, где $C_1, C_2-const$.

В ряде случаев из-за опечатки в условии или задумки автора могут получиться «нехорошие» корни, что-нибудь вроде $\lambda_1=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$, $\lambda_2=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$. В подобной ситуации я рекомендую **перепроверить** решение квадратного уравнения *(вдруг мы сами ошиблись?)* и в случае «подтверждения» корней спокойно записать ответ:

$$y=C_1e^{\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)x}+C_2e^{\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)x},\ \text{где } C_1, C_2-const$$

С «плохими» сопряженными комплексными корнями наподобие $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$ тоже никаких проблем, общее решение:

$$y=e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$ – и не так уж «плохо» оно и выглядит ;)

То есть, **общее решение в любом случае существует**. Потому что любое квадратное уравнение имеет два корня.

И, как подсказывает интуиция, если существует **однородное** уравнение, то должно существовать и **НЕоднородное** уравнение:

2.3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

Оно отличается ненулевой правой частью:

$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q, как мы оговорили ранее – постоянные коэффициенты, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае $f(x)$ может быть функцией-константой, *отличной от нуля*.

Какая догадка сразу приходит в голову? Неоднородное уравнение решить труднее. И интуиция нас опять не подводит!

Для решения данного диффура существует универсальный ***метод вариации произвольных постоянных***, но он отличается сложностью и громоздкостью, и поэтому на практике *(если это возможно)* используют ***метод подбора***, который я и рассмотрю в рамках настоящего курса. Этот метод работает лишь для некоторых функций $f(x)$.

Алгоритм решения состоит из трёх этапов:

1) Сначала нужно **найти общее решение** соответствующего однородного уравнения. Да-да, взять уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, откинуть правую часть: $y'' + py' + qy = 0$ – и найти общее решение, чем мы только и занимались в предыдущем параграфе. Общее решение однородного уравнения я привык обозначать буквой Y.

2) Наиболее трудный этап. Точнее говоря, замысловатый и даже приключенческий. Необходимо **ПОДОБРАТЬ частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения**. Отсюда и название метода. Как подобрать? – об этом в практических примерах

Внимание! *В ваших лекциях, методичках, практических занятиях общее решение однородного уравнения Y и подобранное частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}$,* ***скорее всего, обозначаются не так****. В частности, популярна версия:*

y_{OO} – ***о****бщее решение* ***о****днородного уравнения;*

$y_{ЧН}$ – ***ч****астное решение* ***н****еоднородного уравнения*

Я «намертво» привык к обозначениям Y, $\tilde{y}$, которые легче нарисовать, и буду использовать именно их.

3) На третьем шаге надо **составить общее решение y неоднородного уравнения**. Это совсем легко: $y = Y + \tilde{y}$. Совершенно верно – следует просто приплюсовать завоёванные трофеи. *Вариант обозначения: $y_{ОН}$ –* ***о****бщее решение* ***н****еоднородного ур-я.*

Если изначально в условии сформулирована *задача Коши* (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап:

4) Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Схема нахождения частного решения рассмотрена в Примерах 43-44, и здесь её принципы сохраняются.

По существу, вся новизна здесь состоит в *Пункте 2*, однако хватит лирики, …какой ужас – целая страница получилась! – срочно переходим к физике:

Пример 45

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' = 8 - 16x$, поначалу я буду нумеровать этапы **решения**:

1) Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур $y'' - 4y' = 8 - 16x$ и обнуляем правую часть:
$y'' - 4y' = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4\lambda = 0$
$\lambda(\lambda - 4) = 0$
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1 + C_2 e^{4x}$, где $C_1, C_2 - const$

2) Теперь нужно подобрать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$. И **вопрос, который вызывает затруднения чаще всего**:
В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть: $f(x) = 8 - 16x$. Тут у нас многочлен первой степени и по идее, частное решение тоже следует искать в виде линейного многочлена $\tilde{y} = Ax + B$, где A, B – *пока ещё* неизвестные коэффициенты (числа). То есть, нам нужно посмотреть на правую часть неоднородного уравнения и «собезьянничать» её, но уже с неопределёнными коэффициентами.

При этом степени пропускать нельзя! – даже если в правой части находится неполный многочлен. Так, если $f(x) = -16x$, то выдвигаем ту же версию $\tilde{y} = Ax + B$;
если $f(x) = 3x^2$, то $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$;
если $f(x) = 2x^3 - x$, то $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и т.д.
То есть, во всех случаях прописываем ВСЕ степени многочлена.

Вариант подбора, который «сразу приходит в голову», я неформально буду называть ***«заготовкой»*** или ***первоначальной версией*** подбора. Почему первоначальной? Потому что она может измениться. А может и нет. От чего это зависит? **В общем решении Y и в подбираемом частном решении $\tilde{y}$ не должно быть подобных членов** *(например, двух констант, членов* $C_* x$ *и* Ax, $C_* e^{2x}$ *и* Ae^{2x}, $C_* x\cos 3x$ *и* $Ax\cos 3x$, *и т.д. – они отличаются ТОЛЬКО множителем-константой. В противном случае члены не подобны, например:* $C_* e^{x}$ *и* Ae^{-x}, $C_* x\cos 3x$ *и* $Ax\cos 2x$, $C_* \cos 3x$ *и* $Ax\cos 3x$*)*

Смотрим на общее решение $Y = C_1 + C_2 e^{4x}$ и на нашу «заготовку» $\tilde{y} = Ax + B$.
И там, и там есть «одинокая» константа, и поэтому «заготовка» не годится. **Чтобы избежать подобных членов, ВСЮ первоначальную версию подбора следует домножить на «икс»**:
$\tilde{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ – **это правило универсально**, оно работает и в остальных тематических задачах.

Если изначально подобных членов нет, то домножать $\tilde{y}$ на x, понятно, не надо.

Итак, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$.

Найдем первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$

$\tilde{y}'' = (2Ax + B)' = 2A$

и подставим их **в левую часть** неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$:

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' = 2A - 4(2Ax + B) = 2A - 8Ax - 4B = 8 - 16x$ – после максимальных упрощений сразу приравниваем $2A - 8Ax - 4B$ **к правой части** исходного уравнения.

Теперь приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$2A - 8Ax - 4B = 8 - 16x$$

и составляем систему линейных уравнений. Уравнения обычно записывают в порядке убывания степеней, в данном случае – начиная с «иксовых» коэффициентов:

$$\begin{cases} -8A = -16 \\ 2A - 4B = 8 \end{cases}$$

Система получилась устная, и из неё следует, что $A = 2,\ B = -1$ – подставляем найденные коэффициенты в «заготовку» $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$:

$\tilde{y} = 2x^2 - x$ частное решение неоднородно уравнения.

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2e^{4x} + 2x^2 - x,$ где $C_1, C_2 - const$

Ответ: общее решение: $y = C_1 + C_2e^{4x} + 2x^2 - x,$ где $C_1, C_2 - const$

Ещё перед записью общего решения (пунктом 3) целесообразно провести «быструю» проверку. Сначала проверяем, правильно ли мы решили квадратное уравнение, после чего первая часть ответа $C_1 + C_2e^{4x}$ *(общее решение однородного уравнения)* будет гарантировано правильной.

Осталось проверить, верно ли найдена вторая часть ответа *(подобранное частное решение)* $\tilde{y} = 2x^2 - x$. Это тоже просто. Берём первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = 4x - 1,\quad \tilde{y}'' = 4$ и подставляем их в левую часть исходного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$:

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' = 4 - 4(4x - 1) = 4 - 16x + 4 = 8 - 16x$ – в результате получена правая часть уравнения, значит, частное решение подобрано верно.

Тренируемся самостоятельно!

Пример 46

Решить дифференциальные уравнения

а) $y'' + 2y' + 3y = 4$, б) $y'' - 4y = 8x^3$

Здесь в явном виде присутствует функция «игрек» и в ходе подбора частного решения, помимо производных $\tilde{y}', \tilde{y}''$, в левую часть нужно подставлять и сам подбор $\tilde{y}$.

Если возникла какая-то загвоздка – не теряйте времени и сверяйтесь с образцом, который я постарался расписать максимально подробно.

Перейдём к рассмотрению, может быть, самого распространенного случая – когда в правой части находится экспонента:

Пример 47

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения
$y''-6y'+10y=51e^{-x}$

Решение начинается стандартно:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y''-6y'+10y=0$

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2-6\lambda+10=0$
$D=36-40=-4$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$ – получены сопряженные комплексные корни, которые лучше незамедлительно проверить. Опытные читатели могут подставить их в характеристическое уравнение, но более лёгкий способ – это просто ВНИМАТЕЛЬНО его решить ещё раз. Чтобы в общем решении наверняка не было ошибок:
$Y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

2) На втором шаге выполняем подбор частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.

Сначала выясним, в каком виде его нужно искать. Смотрим на правую часть уравнения и выдвигаем первоначальную гипотезу: раз в правой части находится экспонента, умноженная на константу: $51e^{-x}$, то частное решение нужно искать в «родственном» виде $\tilde{y}=Ae^{-x}$, где A – *пока ещё* неизвестный коэффициент.

Теперь смотрим на общее решение $Y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ – в нём НЕТ члена вида C_*e^{-x}, а значит, первоначальную версию $\tilde{y}=Ae^{-x}$ домножать на «икс» НЕ НУЖНО и она принимается в качестве рабочего варианта.

Найдём производные, они здесь простецкие:
$\tilde{y}'=(Ae^{-x})'=-Ae^{-x}$
$\tilde{y}''=(-Ae^{-x})'=Ae^{-x}$

и подставим $\tilde{y}=Ae^{-x}$, $\tilde{y}'=-Ae^{-x}$ и $\tilde{y}''=(-Ae^{-x})'=Ae^{-x}$ в левую часть неоднородного уравнения $y''-6y'+10y=51e^{-x}$:

$\tilde{y}''-6\tilde{y}'+10\tilde{y}=Ae^{-x}+6Ae^{-x}+10Ae^{-x}=17Ae^{-x}=51e^{-x}$ – после упрощений приравниваем результат к правой части неоднородного уравнения.

Из последнего равенства $17A=51$ следует, что $A=3$. Таким образом, у нас нарисовалось частное решение $\tilde{y}=3e^{-x}$, которое тоже лучше сразу же проверить:

Подставим $\tilde{y} = 3e^{-x}$ с очевидными производными $\tilde{y}' = -3e^{-x}$, $\tilde{y}'' = 3e^{-x}$ в левую часть исходного уравнения $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 10\tilde{y} = 3e^{-x} - 6(-3e^{-x}) + 10 \cdot 3e^{-x} = 3e^{-x} + 18e^{-x} + 30e^{-x} = 51e^{-x}$ – получена правая часть уравнения, значит, частное решение найдено правильно.

3) Осталось с лёгким сердцем записать итоговый результат:
$y = Y + \tilde{y} = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$

Ответ: общее решение: $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$, где $C_1, C_2 - const$

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 48

$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$

В случае затруднений сверяйтесь с образцом в конце книги. После чего рассмотрим ещё одну классику жанра:

Пример 49

Решить дифференциальное уравнение
$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

Алгоритм **решения** полностью сохраняется:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y'' - 6y' + 9y = 0$
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Как раз тот случай «озарения» по формуле $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:
$(\lambda - 3)^2 = 0$
$\lambda_{1,2} = 3$ – получены кратные действительные корни, поэтому общее решение:
$Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$. Смотрим на правую часть неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, после чего сразу появляется первая версия подбора: $\tilde{y} = Ae^{3x}$. Но в общем решении Y **уже есть** подобный член: $C_1 e^{3x}$, поэтому нашу версию нужно умножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot Ae^{3x} = Axe^{3x}$ – однако и такой член **тоже есть** в общем решении: $C_2 x e^{3x}$.

Что делать? Всё гениальное просто – **ещё раз домножаем** нашу «заготовку» на «икс» и ищем решение в виде $\tilde{y} = x \cdot Axe^{3x} = Ax^2 e^{3x}$ – такого перца в общем решении $Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ уже нет.

Надеюсь, все приноровились применять правило $(uv)' = u'v + uv'$ устно:

$\tilde{y}' = (Ax^2e^{3x})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$

$\tilde{y}'' = ((3Ax^2 + 2Ax)e^{3x})' = (6Ax + 2A)e^{3x} + (9Ax^2 + 6Ax)e^{3x} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$

Подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть исходного уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ и максимально упростим выражение:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x} - 6(3Ax^2 + 2Ax)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} =$

$= (9Ax^2 + 12Ax + 2A - 18Ax^2 - 12Ax + 9Ax^2) \cdot e^{3x} = 2Ae^{3x} = e^{3x}$ – после упрощений приравниваем результат к правой части.

Из последнего равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$ следует, что:

$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{2}$ – подставляем найденное значение в подбор $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$:

$\tilde{y} = \dfrac{1}{2}x^2e^{3x}$. Блиц-проверку выполните самостоятельно ;)

Собираем камни:

3) $y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{3x}$ – общее решение неоднородного уравнения, которое можно записать более стильно:

Ответ: $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_1\right)e^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Прямо таки маленькое математическое событие под названием «Воссоединение членов многочлена» =)

Возможно, у вас возник вопрос: *а что произойдет, если мы будем подбирать частное решение в некорректном виде?* Вот только что мы его искали в виде $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$, а что будет, если попробовать «первоначальную» версию $\tilde{y} = Ae^{3x}$?

Поначалу всё будет хорошо: удастся найти производные $\tilde{y}', \tilde{y}''$, провести подстановку. Но далее перед глазами возникнет грустный факт – у нас не получится красивого финального равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$, грубо говоря, «ничего не сойдётся»:

$\tilde{y} = Ae^{3x}$

$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}$

$\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$

подставляем эти штуки в левую часть диффура:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = 9Ae^{3x} - 6 \cdot 3Ae^{3x} + 9Ae^{3x} = 0$ – в результате чего получился ноль, и поэтому в конце мы не можем приписать правую часть неоднородного уравнения, ибо:

$0 \neq e^{3x}$

Таким образом, попытка подобрать частное решение в виде $\tilde{y} = Ae^{3x}$ не увенчалась успехом.

И если вам встретится (или уже встретился) подобный казус, **то знайте** – вы изначально пытались подобрать частное решение НЕ В ТОМ виде.

Переходим к следующему типовому случаю и заодно вспомним *задачу Коши*:

Пример 50

Найти частное решение уравнения $y''+4y=xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-\frac{1}{16}$, $y'(0)=2$

Ход **решения** такой же, но в конце добавляется дополнительный пункт:

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y''+4y=0$
$\lambda^2+4=0$
$\lambda_{1,2}=\pm 2i$ – получены сопряженные, *чисто мнимые* комплексные корни, поэтому общее решение:
$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

2) Подбираем частное решение $\tilde{y}$. Поскольку в правой части неоднородного уравнения $y''+4y=xe^{2x}$ находится многочлен 1-й степени, умноженный на экспоненту, то в качестве первоначальной версии подбора рассматриваем $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}$,

при этом степени многочлена пропускать нельзя! *(в нашем случае – константу)*
То есть, если в правой части ДУ находится неполный многочлен, например, $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$, то в подборе **всё равно** прописываем все его степени:
$\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$

Теперь смотрим на нашу «заготовку» $\tilde{y}=Axe^{2x}+Be^{2x}$ и на общее решение $Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Очевидно, здесь нет подобных членов, и поэтому домножать $\tilde{y}$ на «икс» НЕ НАДО. Таким образом, первоначальная версия подбора принимается в качестве рабочего варианта.

Найдём производные:
$\tilde{y}'=((Ax+B)e^{2x})'=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}=(2Ax+A+2B)e^{2x}$
$\tilde{y}''=((2Ax+A+2B)e^{2x})'=2Ae^{2x}+2(2Ax+A+2B)e^{2x}=(4Ax+4A+4B)e^{2x}$

И подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:
$\tilde{y}''+4\tilde{y}=(4Ax+4A+4B)e^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}=$
$=(4Ax+4A+4B+4Ax+4B)e^{2x}=(8Ax+4A+8B)e^{2x}=(x+0)e^{2x}$ – после максимальных упрощений приравниваем результат к правой части. Обращаю ваше внимание, что **отсутствующие коэффициенты многочлена правой части равны нулю.**

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и составляем систему:
$\begin{cases}8A=1\\4A+8B=0\end{cases}$, из которой следует, что $A=\frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ $4\cdot\frac{1}{8}+8B=0$ $\Rightarrow$ $B=-\frac{1}{16}$

Таким образом: $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}=\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{16}\right)e^{2x}$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

4) и найдём частное решение, соответствующее заданным начальным условиям.

Сначала применяем к общему решению начальное условие $y(0) = -\frac{1}{16}$:

$y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right)e^0 = C_1 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$, откуда сразу получаем $C_1 = 0$.

Далее находим производную: $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + 2\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$ и применяем к ней второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 1 + \frac{1}{8}e^0 + 2\left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right)e^0 = 2C_2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

Надо сказать, с константами тут повезло – отыскались сразу. Чаще приходится составлять и решать систему двух уравнений. Ну а в том, что пришлось иметь дело с дробями, нет ничего необычного – это, скорее, дело обычное ☺

Ответ: частное решение: $y = \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$

Выполним **полную проверку**. Сначала проверяем, выполняется ли начальное условие $y(0) = -\frac{1}{16}$:

$y(0) = \sin 0 + \left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right) \cdot e^0 = 0 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$ – да, начальное условие выполнено.

Находим производную от ответа: $y' = 2\cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + 2\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x} = 2\cos 2x + \frac{x}{4}e^{2x}$ и проверяем, выполняется ли начальное условие $y'(0) = 2$:

$y'(0) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ – да, второе начальное условие тоже выполнено.

Берём вторую производную: $y'' = -4\sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} + 2 \cdot \frac{x}{4}e^{2x} = -4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ и подставляем её вместе с $y = \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$ в левую часть исходного уравнения:

$$y'' + 4y = -4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 4 \cdot \left[\sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}\right] =$$

$= -4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = xe^{2x}$ – в результате получена правая часть исходного уравнения, в чём и требовалось убедиться.

Аналогично можно выполнить полную проверку любого общего решения с той лишь разницей, что не нужно проверять выполнение начальных условий. Но гораздо проще, конечно, «быстрая» проверка или, как я её жаргонно называю, проверка-«лайт».

Обязательно всё прорешиваем и во всём разбираемся:

Пример 51

Решить задачу Коши, выполнить проверку
$y'' + 2y' = (4 - 4x)e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1$

Образец я приблизил к чистовому варианту – примерно так нужно оформлять задачу. Не забываем о минимальных словесных комментариях, в которых, к слову, совсем не обязательно обосновывать вид, в котором вы подбираете частное решение $\tilde{y}$.

И в заключение параграфа рассмотрим не менее важные уравнения с тригонометрическими функциями в правой части:

Пример 52

$y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x$

Решение: найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y'' - 2y' + 5y = 0$
Характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$
$D = 4 - 20 = -16$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2}$
$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:
$Y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ – **внимательно перепроверяем квадратное уравнение**, и убеждаемся, что ошибок мы не допустили.

Теперь подбираем частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x$.

Правило: если в правой части находится сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента *(в нашем случае аргумента* $2x$*)*, ИЛИ одинокий косинус *(например,* $10\cos 2x$ *и больше ничего)*, ИЛИ одинокий синус *(например,* $3\sin 2x$ *и больше ничего)*, то **во всех трёх случаях** в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем сумму косинуса и синуса *(того же аргумента)* с двумя неопределенными коэффициентами. В нашей задаче:
$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A и B – пока ещё неизвестные коэффициенты.

Теперь смотрим на «заготовку» $\tilde{y}$ и на общее решение $Y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$, в котором для наглядности я раскрыл скобки. В общем решении НЕТ членов вида $C_* \cos 2x, C_{**} \sin 2x$, а значит, первоначальную версию $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$ домножать на «икс» **не нужно** и она принимается в качестве рабочего варианта.

Найдем производные:
$\tilde{y}' = (A\cos 2x + B\sin 2x)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$
$\tilde{y}'' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения
$y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x$:

$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + 5\tilde{y} =$

$= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 5(A\cos 2x + B\sin 2x) =$

раскрываем скобки:

$= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 5A\cos 2x + 5B\sin 2x =$

группируем слагаемые при косинусе и синусе:

$= (-4A - 4B + 5A)\cos 2x + (-4B + 4A + 5B)\sin 2x =$

$= (A - 4B)\cos 2x + (4A + B)\sin 2x = 21\cos 2x - \sin 2x$ – и после упрощений в скобках приравниваем результат к правой части неоднородного уравнения.

В последнем равенстве приравниваем коэффициенты при *соответствующих тригонометрических функциях* и получаем систему:

$$\begin{cases} A - 4B = 21 \\ 4A + B = -1 \end{cases}$$

Систему не возбраняется решить «школьным» методом *(выразить, например, из второго уравнения* $B = -4A - 1$ *– и подставить в первое уравнение)*, но чаще их решают «вышматовским» способом. Умножим второе уравнение на 4 и выполним почленное сложение:

$$\begin{cases} A - 4B = 21 \\ 16A + 4B = -4 \end{cases} + \quad \Rightarrow 17A = 17 \Rightarrow A = 1$$ – подставим в любое, например, в первое уравнение:

$1 - 4B = 21$

$-4B = 20 \;\Rightarrow B = -5$, после чего подставляем найденные значения A и B в наш подбор: $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x - 5\sin 2x$ – искомое частное решение.

Выполним «быструю» проверку, а именно, найдём производные:

$\tilde{y}' = (\cos 2x - 5\sin 2x)' = -2\sin 2x - 10\cos 2x$

$\tilde{y}'' = (-2\sin 2x - 10\cos 2x)' = -4\cos 2x + 20\sin 2x$

и подставим их вместе с $\tilde{y} = \cos 2x - 5\sin 2x$ в левую часть исходного уравнения:

$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + 5\tilde{y} =$

$= -4\cos 2x + 20\sin 2x - 2(-2\sin 2x - 10\cos 2x) + 5(\cos 2x - 5\sin 2x) =$

$= -4\cos 2x + 20\sin 2x + 4\sin 2x + 20\cos 2x + 5\cos 2x - 25\sin 2x =$

$= 21\cos 2x - \sin 2x$ – надо просто быть упрямым и уметь ~~играть на скрипке~~ дифференцировать =)

После чего мы практически стопроцентно можем быть уверены в правильности итогового результата: $y = Y + \tilde{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x$ – общее решение неоднородного уравнения.

Ответ: $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x,$ где $C_1, C_2 - const$

Простенькое уравнение для самостоятельного решения:

Пример 53

$y'' + y = 2\cos x$

И некоторые более редкие случаи я разберу в обзорном порядке:

$y'' + 9y = 2x\sin 3x$

Правило: если в правой части находится синус, умноженный на многочлен ИЛИ косинус того же аргумента, умноженный на многочлен той же степени *(например,* $(1-x)\cos 3x$*)*, ИЛИ их сумма, то **во всех трёх случаях** в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем «полный комплект», в нашем примере:

$\tilde{y} = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x$, где A, B, C, D *пока ёще* неизвестные коэффициенты, **при этом степени многочленов пропускать нельзя!**

Теперь смотрим на общее решение $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$ и на «заготовку» $\tilde{y} = Ax\cos 3x + B\cos 3x + Cx\sin 3x + D\sin 3x$. Подобные члены виднЫ невооруженным глазом, и поэтому ВСЮ первоначальную версию подбора следует домножить на «икс»:

$\tilde{y} = x\cdot\big((Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x\big) = (Ax^2+Bx)\cos 3x + (Cx^2+Dx)\sin 3x$

Другой случай – когда в правой части находится экспонента, умноженная на тригонометрическую функцию, например:

$y'' - 2y' + 5y = e^x\sin 2x$

Правило: если в правой части находится такое произведение ИЛИ произведение этой же экспоненты на косинус такого же аргумента *(например,* $-3e^x\cos 2x$*)*, ИЛИ ЖЕ сумма таких слагаемых (например, $2e^x\cos 2x - e^x\sin 2x = e^x(2\cos 2x - \sin 2x)$), то **во всех трёх случаях** первоначальная версия подбора имеет вид:

$\tilde{y} = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Следует отметить, что здесь нам «светит» нахождение громоздких производных $\tilde{y}', \tilde{y}''$ и весёлая подстановка. Однако это ещё половина счастья. По той причине, что $Y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. А посему ВСЯ «заготовка» подлежит домножению на «икс»:

$\tilde{y} = x\cdot e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) = e^x(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x)$

Но такая жесть, конечно, встречается очень редко. Впрочем, и она нипочём – с хорошими навыками интегрирования и повышенным уровнем внимания. Существует ещё бОльшая жесть вроде $f(x) = e^x x\sin 2x$, но её совсем не припомню.

Иногда в правой части неоднородного уравнения находится «ассорти», например:

$y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$

В подобных случаях частное решение неоднородного уравнения удобно разделить на две части: $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ и провернуть алгоритм дважды – для подбора $\tilde{y}_1 = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$ и для $\tilde{y}_2 = Ce^{3x}$, после чего просуммировать найденные решения.

Как быть если в правой части находится какая-либо функция другого вида? Если это гиперболический синус $sh(ax)$ или косинус $ch(ax)$, то раскладываем их по известным формулам в сумму двух экспонент; в других же случаях применяют универсальный **метод вариации произвольных постоянных**, но такое задание ввиду его громоздкости вряд ли предложат в вашей отчётной работе.

2.4. Коротко о линейных уравнениях более высоких порядков

Всё очень и очень похоже. Они тоже бывают однородные и неоднородные. Так, *линейное однородное* ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$y''' + ry'' + py' + qy = 0$, где $r,\ p,\ q$ – конкретные числа.

Для данного уравнения тоже нужно составить характеристическое уравнение и уравнение и найти его корни. Характеристическое уравнение, как нетрудно догадаться, выглядит так:

$\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, и оно <u>в любом случае</u> имеет **ровно три** корня.

Пусть, например, все корни действительны и различны: $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 5$, тогда общее решение запишется следующим образом:

$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + C_3e^{5x}$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Если один корень действительный $\lambda_1 = 2$, а два других – сопряженные комплексные $\lambda_{2,3} = \sqrt{3} \pm 5i$, то общее решение записываем так:

$y = C_1e^{2x} + e^{\sqrt{3}x}(C_2\cos 5x + C_3\sin 5x)$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Особый случай, когда все три корня кратны (одинаковы). Знакомый малыш $y''' = 0$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^3 = 0$ с тремя совпавшими нулевыми корнями $\lambda_{1,2,3} = 0$, поэтому его общее решение записываем так:

$y = C_1 + C_2x + C_3x^2$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Если характеристическое уравнение $\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет три кратных ненулевых корня, например, $\lambda_{1,2,3} = -1$, то общее решение, соответственно, такое:

$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Оформим решение «цивилизованно»:

<u>Пример 54</u>

Решить однородное дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' + y' = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_{2,3} = \pm i$ – получен один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Подобные уравнения вполне могут быть предложены для решения, и поэтому немного разовьём тему:

Линейное однородное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами s, r, p, q имеет вид:

$y^{IV} + sy''' + ry'' + py' + qy = 0$, и соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 + s\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ всегда имеет **ровно четыре** корня.

Общее решение записывается точно по таким же принципам, как и для однородных диффуров младших порядков. Единственное, закомментирую тот случай, когда все 4 корня являются кратными. Если они равны нулю, то это в точности тривиальное уравнение $y^{IV} = 0$ с общим решением:

$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$, где $C_1, C_2, C_3, C_4 - const$

Если, характеристическое уравнение имеет четыре одинаковых ненулевых корня, например, $\lambda_{1,2,3,4} = 3$, то общее решение запишется так:

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x} + C_4 x^3 e^{3x}$, где $C_1, C_2, C_3, C_4 - const$.

Пример 55

Решить уравнения

а) $y^{IV} - 4y = 0$, б) да чего тут мелочиться, сразу 6-го порядка: $y^{VI} - y^{V} = 0$

Догадайтесь самостоятельно! И да, потренируйтесь в проверке, она, кстати, помогает в сомнительных случаях. Решения и ответы в конце книги.

Линейное НЕоднородное уравнение 3-го и более высоких порядков отличается, как легко догадаться, ненулевой правой частью $f(x)$ и его **алгоритм решения будет точно таким же, как и для уравнений второго порядка**. С той поправкой, при подборе частного решения $\tilde{y}$ и при проверке придётся находить дополнительные производные. Фанаты могут ознакомиться с соответствующей статьёй сайта, но это уже диффуры «третьей категории» важности.

И я вас поздравляю!
Теперь вы сможете решить почти любое ДУ вашей отчётной работы!

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в соответствующем разделе портала mathprofi.ru *(ссылка на карту сайта)*, при этом следующим пунктом целесообразно изучить **системы дифференциальных уравнений** *(если они есть в вашей учебной программе)*.

Из прикладной литературы рекомендую следующие **книги**:

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, в Сети есть полный решебник этого задачника;

М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко Дифференциальные уравнения, где разобраны более редкие уравнения и методы решения, которых вообще нет на сайте.

Желаю успехов!

Решения и ответы

Пример 4. Решение: *Найдем общее решение. Разделяем переменные:*

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=-y\ln y$$

$$\frac{dy}{y\ln y}=-\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=-\ln|x|+\ln|C|$$

Общий интеграл получен, пытаемся его упростить. Упаковываем логарифмы и избавляемся от них:

$$\ln|\ln y|=\ln\frac{1}{|x|}+\ln|C|$$

$$\ln|\ln y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\ln y=\frac{C}{x}$$

Выражаем функцию в явном виде, используя $\ln a=b\Rightarrow a=e^{b}$*:*

$y=e^{\frac{C}{x}}$, *где* $C=const$ *– общее решение.*

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$.

Способ первый, вместо «икса» подставляем 1, вместо «игрека» – «е»:

$$e=e^{\frac{C}{1}}$$

$$e=e^{C}\quad\Rightarrow\quad C=1$$

Способ второй:

$$y(1)=e^{\frac{C}{1}}=e^{C}=e\ \Rightarrow\ C=1$$

Подставляем найденное значение константы $C=1$ *в общее решение.*

Ответ: *частное решение:* $y=e^{\frac{1}{x}}$

Выполним проверку. *Сначала проверяем, действительно ли выполняется начальное условие:*

$y(1)=e^{\frac{1}{1}}=e^{1}=e$ *– да, начальное условие* $y(1)=e$ *выполнено.*

Теперь проверим, удовлетворяет ли вообще частное решение $y = e^{\frac{1}{x}}$ *дифференциальному уравнению. Находим производную:*

$$y' = (e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Подставим полученное частное решение $y = e^{\frac{1}{x}}$ *и найденную производную* $y' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ *в исходное уравнение* $y \ln y + xy' = 0$*:*

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) = 0$$

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$0 = 0$$

Получено верное равенство, таким образом, решение найдено правильно.

Пример 6. Решение*: Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:*

$$\sqrt{1-x^2}\,ydy = -\sqrt{3+y^2}\,dx$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{d(3+y^2)}{2\sqrt{3+y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{3+y^2} = -\arcsin x + C$$

Ответ*: общий интеграл:* $\arcsin x + \sqrt{3+y^2} = C$, *где* $C = const$

Примечание*: тут можно получить и общее решение:*

$$\sqrt{3+y^2} = -\arcsin x + C$$

$$3 + y^2 = (C - \arcsin x)^2$$

$$y^2 = (C - \arcsin x)^2 - 3$$

$$y = \pm\sqrt{(C - \arcsin x)^2 - 3}$$

Но, согласно моему третьему техническому совету, делать это нежелательно, поскольку такой ответ смотрится плохо.

***Пример 8*. *Решение*:** *данное ДУ допускает разделение переменных:*

$$2\frac{dy}{dx}\sin y\cdot\cos y\cdot\sin^2 x=-\cos x$$

$$2\sin y\cdot\cos ydy=-\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$$

$\sin 2ydy=-\dfrac{\cos xdx}{\sin^2 x}$ *(использовали триг. формулу* $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ *).*

Интегрируем:

$$\int\sin 2ydy=-\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{2}\int\sin 2yd(2y)=-\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$$

Общий интеграл: $-\dfrac{1}{2}\cos 2y=\dfrac{1}{\sin x}+C$

Найдем частное решение (частный интеграл), соответствующий заданному начальному условию $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. *Подставляем в общий интеграл* $x=\dfrac{\pi}{2}$ *и* $y=0$:

$$-\frac{1}{2}\cos 0=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}+C$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{1}+C$$

$$-\frac{1}{2}=1+C\ \Rightarrow\ C=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

***Ответ*:** $-\dfrac{1}{2}\cos 2y=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{3}{2}$

***Пример 9*.**

а) ***Решение*:** *данное уравнение допускает разделение переменных:*

$$(1+e^x)ydy=e^ydx$$

$$\int ye^{-y}dy=\int\frac{dx}{1+e^x}$$

Левую часть интегрируем по частям:

$$u=y\ \Rightarrow\ du=dy$$

$$dv=e^{-y}dy\ \Rightarrow\ v=-e^{-y}$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

В интеграле правой части проведем замену:

$$t=1+e^x\ \Rightarrow\ e^x=t-1$$

$$dt=e^xdx\ \Rightarrow\ dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t-1}$$

Таким образом:

$$-ye^{-y}+\int e^{-y}dy=\int\frac{dt}{t(t-1)}$$

Дробь правой части раскладывается в сумму методом неопределенных коэффициентов, но она настолько проста, что подбор коэффициентов можно выполнить и устно:

$$-ye^{-y}-e^{-y}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$-e^{-y}(y+1)=\ln|t-1|-\ln|t|+C^*$$

Обратная замена: $t=1+e^x$

$$-e^{-y}(y+1)-\ln|1+e^x-1|+\ln|1+e^x|=C^*$$

$$-e^{-y}(y+1)-\ln e^x+\ln(1+e^x)=C^*$$

$$-e^{-y}(y+1)-x+\ln(1+e^x)=C^*$$

***Ответ**: общий интеграл:* $e^{-y}(y+1)+x-\ln(1+e^x)=C,$ *где* $C=const$

*б) **Решение**: разделяем переменные и интегрируем:*

$$y-xy'=3+3x^2y'$$

$$3x^2y'+xy'=y-3$$

$$(3x^2+x)\frac{dy}{dx}=y-3$$

$$\frac{dy}{y-3}=\frac{dx}{3x^2+x}$$

$$\int\frac{dy}{y-3}=\int\frac{dx}{x(3x+1)}$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{3x+1}=\frac{1}{x(3x+1)}$$

$$A(3x+1)+Bx=1$$

$$\begin{cases}3A+B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow B=-3$$

***Примечание**: интеграл* $\int\frac{dx}{3x^2+x}$ *можно было также найти методом выделения полного квадрата*

$$\ln|y-3|=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{3x+1}\right)dx$$

$$\ln|y-3|=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(3x+1)}{3x+1}$$

$$\ln|y-3|=\ln|x|-\ln|3x+1|+\ln|C|$$

$$\ln|y-3|=\ln\left|\frac{Cx}{3x+1}\right|$$

$$y-3=\frac{Cx}{3x+1}$$

***Ответ:** общее решение:* $y=\frac{Cx}{3x+1}+3,$ *где* $C=const$

Пример 11*. *Решение: *проверим уравнение на однородность, для этого* ***вместо*** x *подставим* λx, *а* ***вместо*** y *подставим* λy:

$$\lambda x y' - \lambda y = \lambda x tg \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$\lambda (x y' - y) = \lambda x tg \frac{y}{x}$$

$xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$ – *в результате получено исходное уравнение, значит, данное ДУ является однородным.*

Проведем замену: $y = tx \quad \Rightarrow \quad y' = t'x + t$ – *подставим в исходное уравнение и проведём максимальные упрощения:*

$$x(t'x + t) - tx = xtg\frac{tx}{x}$$

$$t'x + t - t = tgt$$

$x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ *(использовали тригонометрическую формулу* $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$*).*

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{\cos t dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\sin t)}{\sin t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin t| = \ln|x| + \ln|C|$$

Перед обратной заменой результат целесообразно упростить:

$$\ln|\sin t| = \ln|Cx|$$

$$\sin t = Cx$$

Обратная замена $t = \dfrac{y}{x}$:

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

Ответ: *общий интеграл:* $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{y}{x} = C,\;$ *где* $C = const$

Проверка: *дифференцируем ответ:*

$$\left(\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)' = (C)'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)' = 0$$

$$-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' = 0$$

$$-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=0$$

умножаем обе части на x^3:

$$-x\sin\frac{y}{x}+(y'x-y)\cos\frac{y}{x}=0$$

и делим на $\cos\frac{y}{x}$:

$$-xtg\frac{y}{x}+(y'x-y)=0$$

$xy'-y=xtg\frac{y}{x}$ *– получено исходное ДУ, значит, общий интеграл найден верно.*

Примечание: *очевидно, что* $y=0$ *является решением уравнения, и это решение вошло в общий интеграл* $\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}=C$ *при нулевом значении константы. Однако мы рисковали его потерять, это произошло в тот момент, когда* $\sin t$ $\left(t=\frac{y}{x}\right)$ *оказался в знаменателе. Более подробно об этом нюансе можно узнать в следующих примерах.*

Пример 14.

а) Решение*: данное уравнение является однородным, проведем замену:*

$$y=tx\Rightarrow dy=t'x+t$$

$$t^2x^2+x^2(t'x+t)=x\cdot tx(t'x+t)$$

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$t^2+t'x+t=t'tx+t^2$$

$$t'x+t=t'tx$$

$$t'tx-t'x=t$$

$$(tx-x)t'=t$$

$$x(t-1)t'=t$$

разделяем переменные:

$$x(t-1)\frac{dt}{dx}=t$$

$$\frac{(t-1)dt}{t}=\frac{dx}{x}$$

Контроль потенциально потерянных решений*:*

$x=0$ *– не является решением уравнения* $y^2+x^2y'=xyy'$,

а вот $t=\frac{y}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$, *очевидно, является.*

Интегрируем:

$$\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\int\frac{dx}{x}$$

$$t-\ln|t|=\ln|x|+C$$

и перед обратной заменой записываем уравнение как можно компактнее:

$$t-\ln|t|-\ln|x|=C$$

$$t-(\ln|t|+\ln|x|)=C$$

$$t-\ln|tx|=C$$

Проведём обратную замену $t=\dfrac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x}-\ln\left|\frac{y}{x}\cdot x\right|=C$$

$$\frac{y}{x}-\ln|y|=C$$

Решение $y=0$ *в общий интеграл не вошло, и поэтому его следует дополнительно прописать в* ***ответе****:*

общий интеграл: $\dfrac{y}{x}-\ln|y|=C,$ *где* $C=const$, *ещё одно решение:* $y=0$.

Выполним проверку*:*

$$\left(\frac{y}{x}-\ln|y|\right)'=(0)'$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)'-(\ln|y|)'=0$$

$$\frac{y'x-y}{x^2}-\frac{1}{y}\cdot y'=0$$

приводим к общему знаменателю:

$$\frac{(y'x-y)\cdot y-y'\cdot x^2}{x^2y}=0$$

и умножаем обе части на x^2y:

$$xyy'-y^2-x^2y'=0$$

$y^2+x^2y'=xyy'$ *– в результате получено исходное дифференциальное уравнение, таким образом, общий интеграл найден верно.*

б) ***Решение****: разделим обе части уравнения на* dx:

$(x+y)y'+y=0$, *при этом* $x=C$ *не является решением исходного уравнения, поэтому корней мы точно не потеряем.*

Проведем замену $y=tx\Rightarrow y'=t'x+t$ *и максимально упростим уравнение:*

$$(x+tx)(t'x+t)+tx=0$$

$$x(1+t)(t'x+t)+tx=0$$

$$(1+t)(t'x+t)+t=0$$

$$(1+t)t'x+(1+t)t+t=0$$

$$(1+t)t'x+t+t^2+t=0$$

$$(1+t)t'x+t^2+2t=0$$

Разделяем переменные:

$$(1+t)x\cdot\frac{dt}{dx}=-(t^2+2t)$$

$$\frac{(1+t)dt}{t(t+2)}=-\frac{dx}{x}$$

Контроль потенциально потерянных решений:

$$t=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$$

$$t+2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=-2 \quad\Rightarrow\quad y=-2x$$

Первая функция, очевидно, является решением уравнения $(x+y)y'+y=0$, *проверяем вторую подстановкой* $y=-2x$ *и её производной* $y'=-2$*:*

$$(x-2x)\cdot(-2)-2x=0$$

$$2x-2x=0$$

$0=0$ *– получено верное равенство, значит, функция* $y=-2x$ *является решением.*

Интегрируем:

$$\int\frac{(1+t)dt}{t^2+2t}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+2t)}{t^2+2t}=-\ln|x|+\ln|C^*|$$

$$\frac{1}{2}\ln|t^2+2t|=-\ln|x|+\ln|C^*|$$

умножим обе части на 2:

$$\ln|t^2+2t|=-2\ln|x|+2\ln|C^*|$$

переобозначим константу $2\ln|C^*|$ *через* $\ln|C|$*:*

$$\ln|t^2+2t|=-2\ln|x|+\ln|C|$$

и «упаковываем» логарифмы:

$$\ln|t^2+2t|=\ln x^{-2}+\ln|C|$$

$$\ln|t^2+2t|=\ln\frac{|C|}{x^2}$$

$$t^2+2t=\frac{C}{x^2}$$

Обратная замена: $t=\dfrac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}$$

Умножим все слагаемые на x^2*:*

$$y^2+2xy=C$$

Решения $y=0,\ y=-2x$ *вошли в общий интеграл при нулевом значении константы.*

Ответ*: общий интеграл:* $y^2+2xy=C,$ *где* $C=const$

Проверка: *дифференцируем общий интеграл:*

$(y^2+2xy)'=(C)'$

$(y^2)'+2(xy)'=0$

$2yy'+2(y+xy')=0$

$yy'+y+xy'=0$

$(x+y)y'+y=0$

$(x+y)dy+ydx=0$

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено верно.

Пример 17. ***Решение:*** *Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем замену* $y=uv\Rightarrow y'=u'v+uv'$ *:*

$$u'v+uv'+uvtgx=\frac{1}{\cos x}$$

$$u'v+u(v'+vtgx)=\frac{1}{\cos x}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v'+vtgx=0 \\ u'v=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v *:*

$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$\ln|v|=\ln|\cos x|$$

$v=\cos x$ – *подставим во второе уравнение* $u'v=\dfrac{1}{\cos x}$ *системы:*

$$u'\cdot\cos x=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$$

Таким образом:

$$y=uv=(tgx+C)\cdot\cos x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+C\right)\cdot\cos x$$

Ответ: *общее решение:* $y=C\cos x+\sin x$, *где* $C=const$.

Проверка: *подставим* $y = C\cos x + \sin x$ *и* $y' = -C\sin x + \cos x$ *в левую часть исходного уравнения:*

$$y' + ytgx = -C\sin x + \cos x + (C\cos x + \sin x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= -C\sin x + \cos x + C\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} =$$

$$= \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$ *– в результате получена правая часть уравнения, значит, решение найдено верно.*

Пример 19. Решение: *Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену* $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ *:*

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$$

$$u'v + \left(v' - \frac{2v}{x+1}\right)u = (x+1)^3$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{x+1} = 0 \\ u'v = (x+1)^3 \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем v *:*

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1}$$

$$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|$$

$v = (x+1)^2$ *– подставим во второе уравнение системы:*

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$\frac{du}{dx} = (x+1)$$

$$u = \int(x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Таким образом, общее решение:

$$y = uv = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right]\cdot(x+1)^2 = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2},$$ *где* $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(0) = C + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$$

Ответ: $y = \dfrac{(x+1)^4}{2}$

Пример 21. Решение: *Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену* $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ *:*

$$x(u'v + uv') + (x+1)uv = 3x^2e^{-x}$$
$$xu'v + xuv' + (x+1)uv = 3x^2e^{-x}$$

(раскрыли только левые скобки!)

$$xu'v + u(xv' + (x+1)v) = 3x^2e^{-x}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} xv' + (x+1)v = 0 \\ xu'v = 3x^2e^{-x} \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем v *:*

$$x\frac{dv}{dx} = -(x+1)v$$
$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{(x+1)dx}{x}$$
$$\ln|v| = -\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$\ln|v| = -x - \ln|x|$$
$$v = e^{-x-\ln|x|} = e^{-x}\cdot e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}e^{-x}$$

Примечание*: здесь использовано основное логарифмическое тождество:*

$$e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = e^{\ln\frac{1}{|x|}} = \frac{1}{x}$$

Подставим найденную функцию во второе уравнение:

$$xu'\cdot\frac{1}{x}e^{-x} = 3x^2e^{-x}$$
$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$
$$u = 3\int x^2dx = x^3 + C$$

Таким образом, общее решение:

$$y = uv = (x^3 + C)\cdot\frac{1}{x}e^{-x} = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x},\ \text{где } C = const$$

Найдем частное, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(1) = (1+C)e^{-1} = \frac{1+C}{e} = 0 \Rightarrow C = -1$$

Ответ*:* $y = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)e^{-x}$

Пример 23*. *Решение: *представим уравнение в виде* $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$.

Данное ДУ является уравнением Бернулли, разделим обе части на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y(x+1)} = -1$$

Проведем замену $\frac{1}{y} = z \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'$:

$$-z' + \frac{z}{x+1} = -1$$

$$z' - \frac{z}{x+1} = 1$$

Получено линейное неоднородное уравнение, проведем замену:

$$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x+1} = 1$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x+1}\right) = 1$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x+1} = 0 \\ u'v = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x+1}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = \ln|x+1|$$

$v = x+1$ – *подставим во второе уравнение:*

$$u'(x+1) = 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

$$u = \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$$

Таким образом:

$$z = uv = (\ln|x+1| + C) \cdot (x+1)$$

Обратная замена $y = \frac{1}{z}$ *и общее решение:* $y = \frac{1}{(\ln|x+1| + C) \cdot (x+1)}$, *где* $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(0) = \frac{1}{(0+C) \cdot 1} = \frac{1}{C} = -1 \;\Rightarrow\; C = -1$$

Ответ: $y = \frac{1}{(\ln|x+1| - 1) \cdot (x+1)}$

Пример 25*. *Решение: *Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части на* $\sqrt{y}$:

$$\frac{xy'}{\sqrt{y}}-\frac{4y}{\sqrt{y}}=x^2$$

$$\frac{xy'}{\sqrt{y}}-4\sqrt{y}=x^2$$

при этом очевидно, что $y=0$ *является решением исходного уравнения.*

Проведём замену $\sqrt{y}=z\Rightarrow z'=\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}\Rightarrow\dfrac{y'}{\sqrt{y}}=2z'$ *:*

$$2xz'-4z=x^2$$

Полученное линейное неоднородное уравнение решим методом вариации произвольной постоянной:

1) Найдём общее решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$2xz'-4z=0$$

$$xz'-2z=0$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=2z$$

$$\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|=2\ln|x|+\ln|\tilde{C}|$$

$$\ln|z|=\ln|\tilde{C}x^2|$$

$z=\tilde{C}x^2$, *где* $\tilde{C}=const$

2) В неоднородном уравнении $2xz'-4z=x^2$ *проведём замену* $z=ux^2\Rightarrow z'=(ux^2)'=u'x^2+2ux$ *:*

$$2x(u'x^2+2ux)-4ux^2=x^2$$

$$2x^3u'+4ux^2-4ux^2=x^2$$

$$2x^3u'=x^2$$

$$2xu'=1$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2x}$$

$$u=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

Таким образом: $z=ux^2=\left(\dfrac{1}{2}\ln|x|+C\right)\cdot x^2$

Обратная замена $z=\sqrt{y}$ *:*

$$\sqrt{y}=\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)\cdot x^{2}$$

$$\frac{\sqrt{y}}{x^{2}}=\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

Ответ: *общий интеграл:* $\frac{\sqrt{y}}{x^{2}}-\frac{1}{2}\ln|x|=C,$ *где* $C=const$, *ещё одно решение:* $y=0$

Пример 28. Решение: *проверим, является ли данное ДУ уравнением в полным дифференциалах:*

$$P=6y-3x^{2}+3y^{2},\quad Q=6x+6xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(6y-3x^{2}+3y^{2})'_{y}=6-0+6y=6+6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(6x+6xy)'_{x}=6+6y$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, *значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:*

$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, *в нашем случае:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6y-3x^{2}+3y^{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6x+6xy$$

Если $\frac{\partial F}{\partial x}=6y-3x^{2}+3y^{2}$, *то:*

$$F=\int(6y-3x^{2}+3y^{2})dx=6xy-x^{3}+3xy^{2}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=(6xy-x^{3}+3xy^{2}+\varphi(y))'_{y}=6x+6xy+\varphi'_{y}(y)=6x+6xy$$

$\varphi'_{y}(y)=0\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=\int 0dy=C$ *– подставляем в* $F=6xy-x^{3}+3xy^{2}+\varphi(y)$.

Ответ: *общий интеграл:* $6xy-x^{3}+3xy^{2}+C=0,$ *где* $C=const$

Проверка. *Найдём частные производные:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(6xy-x^{3}+3xy^{2}+C)'_{x}=6\cdot1\cdot y-3x^{2}+3\cdot1\cdot y^{2}+0=6y-3x^{2}+3y^{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=(6xy-x^{3}+3xy^{2}+C)'_{y}=6x\cdot1-0+3x\cdot2y+0=6x+6xy$$

и составим дифференциальное уравнение $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$:

$$(6y-3x^{2}+3y^{2})dx-(6x+6xy)dy=0$$

В результате получено исходное ДУ, значит, решение найдено правильно.

Пример 30*. *Решение: *проверим, является ли данное ДУ уравнением в полным дифференциалах:*

$$P=\frac{\sin 2x}{y}+x,\quad Q=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)'_y=-\frac{\sin 2x}{y^2}+0=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)'_x=0-\frac{2\sin x}{y^2}\cdot(\sin x)'_x=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, *значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

Способ первый:

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$ *– работаем с этой производной,*

$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$ *– про эту производную пока забываем.*

Так как $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$, *то:*

$$F=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx=\frac{1}{y}\int\sin 2x dx+\int x dx=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

Дифференцируем по y *и приравниваем результат к «забытой» производной:*

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)\right)'_y=-\frac{\cos 2x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+0+\varphi'_y(y)=$$

$$=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'_y(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

Преобразуем правую часть с помощью формулы $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'_y(y)=y-\frac{1-\cos 2x}{2y^2}$$

$$\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'_y(y)=y-\frac{1}{2y^2}+\frac{\cos 2x}{2y^2}$$

$$\varphi'_y(y)=y-\frac{1}{2y^2}$$

Восстанавливаем функцию:

$$\varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+C$$ – *и подставляем её в* $F=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$*:*

$$F=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+C=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2y}+C$$

Ответ*: общий интеграл* $\frac{y^2+x^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+C=0,$ *где* $C=const$

Способ второй*:*

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$ – *про эту производную пока забываем.*

$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$ – *будем работать с этой производной.*

Если $\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$*, то:*

$$F=\int\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=\int ydy-\sin^2 x\int\frac{dy}{y^2}=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$$

Найдём частную производную по x *и приравняем её к «забытой» производной:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)\right)'_x=0+\frac{2\sin x\cos x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+x$$

Из последнего равенства следует, что:

$\varphi'_x(x)=x \quad\Rightarrow\quad \varphi(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$ – *подставляем в «недостроенную» функцию* $F=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$.

Ответ: *общий интеграл* $\frac{y^2+x^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+C=0,$ *где* $C=const$.

Вопрос: *какой способ проще?*

***Пример 32*. Решение:**

а) *Дважды интегрируем правую часть:*

$$y' = 3\int dx = 3x + C_1$$

$$y = \int (3x + C_1)dx = \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2$$

Ответ: $y = \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2$, *где* $C_1, C_2 - const$

б) *Преобразуем уравнение:* $y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$. *Данное ДУ имеет вид* $y'' = f(x)$. *Дважды интегрируем правую часть:*

$$y' = \int (x^{\frac{1}{2}} - \sin 2x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C_1x + C_2 = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$$

Ответ: *общее решение:* $y = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$, *где* $C_1, C_2 - const$

в) *Трижды интегрируем правую часть:*

$$y'' = \int 0 \cdot dx = C_1$$

$$y' = C_1\int dx = C_1x + C_2$$

$$y = \int (C_1x + C_2)dx = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Ответ: *общее решение:* $y = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$, *где* $C_1, C_2, C_3 - const$

***Пример 34*. Решение:** *Преобразуем уравнение:* $y''' = \frac{6}{x^3}$

Данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$. *Трижды интегрируем правую часть:*

$$y'' = 6\int \frac{dx}{x^3} = 6\cdot\frac{1}{(-2x^2)} + C_1 = -\frac{3}{x^2} + C_1$$

В соответствии с начальным условием:

$$y''(1) = -3 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 4$$

$$y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + 4\right)dx = \frac{3}{x} + 4x + C_2$$

В соответствии с начальным условием:

$$y'(1) = 3 + 4 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = -2$$

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + 4x - 2\right)dx = 3\ln|x| + 2x^2 - 2x + C_3$$

В соответствии с начальным условием:

$$y(1) = 0 + 2 - 2 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

Ответ: *частное решение:* $y = 3\ln|x| + 2x^2 - 2x$

Пример 36*. *Решение: *В данном уравнении в явном виде не участвуют функция* y *и первая производная* y'. *Проведём замену:*

$y''=z$

Если $y''=z$, *то* $y'''=z'$

Таким образом, уравнение понижено до первого порядка:

$(1+\sin x)z'=\cos x\cdot z$

В результате получено уравнение с разделяющимися переменными, разделяем переменные и интегрируем:

$$(1+\sin x)\frac{dz}{dx}=\cos x\cdot z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{\cos x dx}{(1+\sin x)}$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{d(1+\sin x)}{(1+\sin x)}$$

$$\ln|z|=\ln|1+\sin x|+\ln|C_1|$$

$$\ln|z|=\ln|C_1(1+\sin x)|$$

$$z=C_1(1+\sin x)$$

Проведём обратную замену: $z=y''$

$y''=C_1(1+\sin x)$

Данное уравнение имеет вид: $y''=f(x)$.

Дважды интегрируем правую часть:

$$y'=\int C_1(1+\sin x)dx=C_1(x-\cos x)+C_2$$

$$y=\int(C_1(x-\cos x)+C_2)dx=C_1\left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)+C_2x+C_3$$

Ответ: *общее решение:* $y=C_1\left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)+C_2x+C_3,$ *где* $C_1,C_2,C_3-const$

Пример 38*. *Решение: *составим и решим характеристическое уравнение:*

$\lambda^2-4\lambda=0$

$\lambda(\lambda-4)=0$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=4$ *– различные действительные корни*

Ответ: *общее решение:* $y=C_1+C_2e^{4x},$ *где* $C_1,C_2-const$

Проверка*: найдем производные* $y'=(C_1+C_2e^{4x})'=0+4C_2e^{4x}=4C_2e^{4x}$, $y''=(4C_2e^{4x})'=16C_2e^{4x}$ *и подставим их в левую часть исходного уравнения:*

$y''-4y'=16C_2e^{4x}-4\cdot 4C_2e^{4x}=0$ *– в результате получена правая часть , таким образом, общее решение найдено правильно.*

Пример 40*. *Решение: *составим и решим характеристическое уравнение:*
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda + 1)^2 = 0$
Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = -1$

Ответ: *общее решение:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 42*. *Решение: *Составим и решим характеристическое уравнение:*
$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$
$D = 16 - 20 = -4$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$ – *сопряженные комплексные корни*

Ответ: *общее решение:* $y = e^{2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 44*. *Решение: *Составим и решим характеристическое уравнение:*
$\lambda^2 + 4 = 0$
$\lambda_{1,2} = \pm 2i$ – *получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:*
$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, *где* $C_1, C_2 - const$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
$y(\pi) = C_1 \sin 2\pi + C_2 \cos 2\pi = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2$, *то есть* $y(\pi) = C_2 = -1$, *(значение константы получилось сразу же).*

$y' = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x$
$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2C_1 \cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) - 2C_2 \sin\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) = 2C_1 \cos \pi - 2C_2 \sin \pi = 2C_1 \cdot (-1) - 2C_2 \cdot 0 = -2C_1$
То есть $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2C_1 = -4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$.
Ответ: *частное решение:* $y = 2\sin 2x - \cos 2x$

Проверка*:* $y(\pi) = 2\sin 2\pi - \cos 2\pi = 0 - 1 = -1$ – *начальное условие выполнено.*

$y' = (2\sin 2x - \cos 2x)' = 4\cos 2x + 2\sin 2x$
$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4\cos \pi + 2\sin \pi = -4 + 0 = -4$ – *второе начальное условие выполнено.*

$y'' = (4\cos 2x + 2\sin 2x)' = -8\sin 2x + 4\cos 2x$
Подставим $y = 2\sin 2x - \cos 2x$ *и* $y'' = -8\sin 2x + 4\cos 2x$ *в левую часть исходного уравнения:*
$y'' + 4y = -8\sin 2x + 4\cos 2x + 4(2\sin 2x - \cos 2x) =$
$= -8\sin 2x + 4\cos 2x + 8\sin 2x - 4\cos 2x = 0$
Получена правая часть исходного уравнения (ноль).

Такие образом, частное решение найдено верно.

***Пример 46*. Решение:**

а) *1) Найдём обще решение соответствующего однородного уравнения:*
$y'' + 2y' + 3y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$

$D = 4 - 12 = -8$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$ *– получены сопряженные комплексные корни, таким образом:* $Y = e^{-x}(C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}x)$

2) Подберём частное решение $\tilde{y}$ *неоднородного уравнения. Так как правая часть* $f(x) = 4$ *неоднородного уравнения является константой, то в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем* $\tilde{y} = A$*, где* A *– пока ещё неизвестный коэффициент. Поскольку в общем решении* $Y = e^{-x}(C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}x)$ *НЕТ «одинокой» константы, то частное решение следует искать в том же виде* $\tilde{y} = A$.

Подставим $\tilde{y} = A$ *и очевидные производные* $\tilde{y}' = 0, \tilde{y}'' = 0$ *в левую часть исходного уравнения* $y'' + 2y' + 3y = 4$:

$0 + 2 \cdot 0 + 3A = 3A = 4$ *– после упрощений приравниваем результат к правой части исходного уравнения. Из последнего равенства следует, что* $A = \dfrac{4}{3}$ *– подставляем найденное значение в «заготовку»:* $\tilde{y} = A = \dfrac{4}{3}$.

Для проверки подставим $\tilde{y} = \dfrac{4}{3}$ *и* $\tilde{y}' = \left(\dfrac{4}{3}\right)' = 0, \tilde{y}'' = 0$ *в неоднородное уравнение:*

$0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 4$

$4 = 4$ *– получено верное равенство, т.е. частное решение найдено правильно.*

3) Составим общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = e^{-x}(C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}x) + \dfrac{4}{3}$

Ответ: $y = Y + \tilde{y} = e^{-x}(C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}x) + \dfrac{4}{3}$, *где* $C_1, C_2 - const$

б) *1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур* $y'' - 4y = 8x^3$ *и обнуляем правую часть:*

$y'' - 4y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ *– получены различные действительные корни, поэтому общее решение:* $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

2) Найдём частное решение $\tilde{y}$ *неоднородного уравнения* $y'' - 4y = 8x^3$.

Поскольку в правой части находится многочлен 3-й степени, то в качестве первоначальной версии подбора выдвигаем $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, *где* A, B, C, D *– пока ещё неизвестные коэффициенты.*

Теперь смотрим на общее решение $Y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$ *– в нём нет ни члена* C_*x^3, *ни* C_*x^2, *ни* C_*x, *ни константы* C_*. *Таким образом, подобных членов нет и домножать* $\tilde{y}$ *на «икс» не нужно. Ищем частное решение в виде* $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Найдём первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

Подставим $\tilde{y}$ *и* $\tilde{y}''$ *в левую часть неоднородного уравнения, раскроем скобки:*

$$\tilde{y}'' - 4\tilde{y} = 6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$$

$= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = 8x^3$ *– и приравняем результат к правой части* $8x^3$ *исходного уравнения.*

Теперь нужно ***приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений****. В картинках процесс выглядит так:*

$$\boxed{6A}x + 2B\boxed{-4A}x^3 - 4Bx^2\boxed{-4C}x - 4D = \boxed{8}x^3 + 0\cdot x^2 + \boxed{0}\cdot x + 0$$

Уравнения лучше записать в порядке убывания степеней, начиная с коэффициентов при кубах «икс»:

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ -4B = 0 \\ 6A - 4C = 0 \\ 2B - 4D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 0 \end{cases}$$

В данном случае система получилась очень простой, и многие из вас, наверное, справились с ней устно. Подставляем найденные значения A, B, C, D *в наш исходный подбор* $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:

$\tilde{y} = -2x^3 + 0\cdot x^2 - 3x + 0 = -2x^3 - 3x$ *– частное решение неоднородного уравнения:*

И сразу выполним ***проверку****, найдём:*

$$\tilde{y}' = (-2x^3 - 3x)' = -6x^2 - 3$$

$$\tilde{y}'' = (-6x^2 - 3)' = -12x$$

и подставим $\tilde{y} = -2x^3 - 3x$ *и* $\tilde{y}'' = -12x$ *в левую часть неоднородного уравнения* $y'' - 4y = 8x^3$:

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y} = -12x - 4(-2x^3 - 3x) = -12x + 8x^3 + 12x = 8x^3$ *– получена правая часть исходного уравнения, значит, частное решение* $\tilde{y} = -2x^3 - 3x$ *найдено правильно.*

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - 2x^3 - 3x$, *где* $C_1, C_2 - const$

Ответ: *общее решение:* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - 2x^3 - 3x$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 48*. *Решение: *1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:*

$y'' - 7y' + 12y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$D = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = 1$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{7 \pm 1}{2}$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ *– получены различные действительные значения, которые удовлетворяют характеристическому уравнению (не забываем проверить!).*

Таким образом: $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

2) Выполним подбор частного решения $\tilde{y}$. *Поскольку в правой части исходного уравнения* $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$ *находится экспонента, умноженная на константу, то в качестве первоначально версии подбора выдвигаем* $\tilde{y} = Ae^{4x}$. *Теперь смотрим на общее решение однородного уравнения – в нём уже есть подобный член:*

$Y = C_1 e^{3x} + \boxed{C_2 e^{4x}}$

Поэтому первоначальную версию следует домножить на «икс» и искать частное решение в виде:

$\tilde{y} = x \cdot Ae^{4x} = Axe^{4x}$, *где* A *– пока еще неизвестный коэффициент.*

Используя правило $(uv)' = u'v + uv'$ *дифференцирования произведения, найдём первую и вторую производную:*

$\tilde{y}' = (Axe^{4x})' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} = (4Ax + A)e^{4x}$

$\tilde{y}'' = ((4Ax + A)e^{4x})' = 4Ae^{4x} + 4(4Ax + A)e^{4x} = (16Ax + 8A)e^{4x}$

Подставим $\tilde{y} = Axe^{4x}$, $\tilde{y}' = (4Ax + A)e^{4x}$ *и* $\tilde{y}'' = (16Ax + 8A)e^{4x}$ *в левую часть исходного уравнения* $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$ *и проведём максимальные упрощения:*

$\tilde{y}'' - 7\tilde{y}' + 12\tilde{y} = (16Ax + 8A)e^{4x} - 7(4Ax + A)e^{4x} + 12Axe^{4x} =$

$= (16Ax + 8A - 28Ax - 7A + 12Ax)e^{4x} = Ae^{4x} = 3e^{4x}$ *– после чего приравняем результат к правой части исходного уравнения.*

Из последнего равенства $Ae^{4x} = 3e^{4x}$ *автоматически получаем* $A = 3$ *– подставляем найденное значение в наш подбор:* $\tilde{y} = Axe^{4x} = 3xe^{4x}$ *– искомое частное решение.*

Быстренько выполним проверку, а именно найдём $\tilde{y}' = 3e^{4x} + 12xe^{4x} = (12x + 3)e^{4x}$, $\tilde{y}'' = 12e^{4x} + 4(12x + 3)e^{4x} = (48x + 24)e^{4x}$ *и подставим их вместе с* $\tilde{y} = 3xe^{4x}$ *в левую часть:*

$\tilde{y}'' - 7\tilde{y}' + 12\tilde{y} = (48x + 24)e^{4x} - 7(12x + 3)e^{4x} + 12 \cdot 3xe^{4x} =$

$= (48x + 24 - 84x - 21 + 36x)e^{4x} = 3e^{4x}$ *– в результате получена правая часть уравнения, что и требовалось проверить.*

3) Составляем общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 3xe^{4x}$, *которое можно было, в принципе, сразу записать в*

ответ: *общее решение:* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 3xe^{4x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 51*. *Решение: *найдём общее решение соответствующего однородного уравнения* $y''+2y'=0$. *Составим и решим характеристическое уравнение:*

$$\lambda^2+2\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda+2)=0$$

$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=0$ – *различные действительные корни, поэтому:* $Y=C_1e^{-2x}+C_2$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^{-2x}$

Примечание: *первоначальная версия подбора* $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-2x}=Axe^{-2x}+Be^{-2x}$ *подлежит домножению на* x, *так как в общем решении* Y *есть подобный член:* C_1e^{-2x}.

Найдём производные:

$$\tilde{y}'=((Ax^2+Bx)e^{-2x})'=(2Ax+B)e^{-2x}-2(Ax^2+Bx)e^{-2x}=(-2Ax^2+2Ax-2Bx+B)e^{-2x}$$

$$\tilde{y}''=((-2Ax^2+2Ax-2Bx+B)e^{-2x})'=(-4Ax+2A-2B)e^{-2x}-2(-2Ax^2+2Ax-2Bx+B)e^{-2x}=$$

$$=(-4Ax+2A-2B+4Ax^2-4Ax+4Bx-2B)e^{-2x}=(4Ax^2-8Ax+4Bx+2A-4B)e^{-2x}$$

и подставим их в левую часть неоднородного уравнения $y''+2y'=(4-4x)e^{-2x}$:

$$\tilde{y}''+2\tilde{y}'=(4Ax^2-8Ax+4Bx+2A-4B)e^{-2x}+2(-2Ax^2+2Ax-2Bx+B)e^{-2x}=$$

$$=(4Ax^2-8Ax+4Bx+2A-4B-4Ax^2+4Ax-4Bx+2B)e^{-2x}=$$

$=(-4Ax+2A-2B)e^{-2x}=(4-4x)e^{-2x}$ – *после максимальных упрощений приравниваем результат к правой части.*

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и решим систему:

$\begin{cases}-4A=-4\\ 2A-2B=4\end{cases}\Rightarrow\ A=1$ – *подставляем во 2-е уравнение:* $2-2B=4\Rightarrow B=-1$

Таким образом: $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^{-2x}=(x^2-x)e^{-2x}$

Общее решение неоднородного уравнения:

$y=Y+\tilde{y}=C_1e^{-2x}+C_2+(x^2-x)e^{-2x}$, *где* $C_1,C_2-const$

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.
Применяем к общему решению условие $y(0)=1$:

$$y(0)=C_1e^0+C_2+(0^2-0)e^0=C_1+C_2+0=C_1+C_2=1$$

Найдём производную:

$$y'=(C_1e^{-2x}+C_2+(x^2-x)e^{-2x})'=-2C_1e^{-2x}+(2x-1)e^{-2x}-2(x^2-x)e^{-2x}$$

и применим к ней начальное условие $y'(0)=-1$:

$$y'(0)=-2C_1e^0+(0-1)e^0-2\cdot0=-2C_1-1=-1$$

Составим и решим систему:

$\begin{cases}C_1+C_2=1\\ -2C_1-1=-1\end{cases}$, *откуда следует, что* $C_1=0, C_2=1$ – *подставляем найденные значения в общее решение* $y=C_1e^{-2x}+C_2+(x^2-x)e^{-2x}$

Ответ: *частное решение:* $y=1+(x^2-x)e^{-2x}$

Выполним ***проверку****. Проверим выполнение начального условия* $y(0)=1$*:*

$y(0)=1+(0^2-0)e^0=1+0=1$ *– выполнено.*

Найдём производную: $y'=(1+(x^2-x)e^{-2x})'=0+(2x-1)e^{-2x}-2(x^2-x)e^{-2x}=$
$=(2x-1-2x^2+2x)e^{-2x}=(-2x^2+4x-1)e^{-2x}$ *и проверим выполнение начального условия* $y'(0)=-1$*:*

$y'(0)=(-0+0-1)e^0=-1$ *– выполнено.*

Найдём вторую производную:

$y''=((-2x^2+4x-1)e^{-2x})'=(-4x+4-0)e^{-2x}-2(-2x^2+4x-1)e^{-2x}=$
$=(-4x+4+4x^2-8x+2)e^{-2x}=(4x^2-12x+6)e^{-2x}$ *и подставим её вместе с* $y'=(-2x^2+4x-1)e^{-2x}$ *в левую часть исходного уравнения:*

$y''+2y'=(4x^2-12x+6)e^{-2x}+2(-2x^2+4x-1)e^{-2x}=$
$=(4x^2-12x+6-4x^2+8x-2)e^{-2x}+=(4-4x)e^{-2x}$ *– в результате получена правая часть исходного уравнения.*

Вывод: *задание решено верно.*

Пример 53*. *Решение: *найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:*

$y''+y=0$

$\lambda^2+1=0$

$\lambda_{1,2}=\pm i$ *– характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни, поэтому:* $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде: $\tilde{y}=Ax\cos x+Bx\sin x$

Примечание: *первоначальная версия* $\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$ *подлежит домножению на «икс», поскольку в общем решении* Y *уже есть подобные члены.*

Найдём производные:

$\tilde{y}'=A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x=(A+Bx)\cos x+(-Ax+B)\sin x$

$\tilde{y}''=B\cos x-(A+Bx)\sin x-A\sin x+(-Ax+B)\cos x=(-Ax+2B)\cos x+(-Bx-2A)\sin x$

Подставим $\tilde{y}$ *и* $\tilde{y}''$ *в левую часть неоднородного уравнения* $y''+y=2\cos x$*:*

$\tilde{y}''+\tilde{y}=(-Ax+2B)\cos x+(-Bx-2A)\sin x+Ax\cos x+Bx\sin x=$
$=2B\cos x-2A\sin x=2\cos x$ *– приравниваем результат к правой части.*

Приравниваем коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях: $\begin{cases}2B=2\\-2A=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\A=0\end{cases}$

Примечание*:* $-2A=0$ *– по той причине, что в правой части отсутствует синус, и формально его можно записать с нулевым коэффициентом:* $f(x)=2\cos x+0\cdot\sin x$

Таким образом: $\tilde{y}=Ax\cos x+Bx\sin x=0\cdot x\cos x+1\cdot x\sin x=x\sin x$.

Проверка *найденного частного решения:*

$\tilde{y}' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$

$\tilde{y}'' = (\sin x + x\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$

Подставим $\tilde{y} = x\sin x$ *и* $\tilde{y}'' = 2\cos x - x\sin x$ *в левую часть исходного уравнения* $y'' + y = 2\cos x$*:*

$\tilde{y}'' + \tilde{y} = 2\cos x - x\sin x + x\sin x = 2\cos x$ *– в результате получена правая часть, в чём и требовалось убедиться.*

Составим общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x$

Ответ: *общее решение:* $y = C_1\cos x + (x + C_2)\sin x,$ *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 55. Решение:

а) *составим и решим характеристическое уравнение:*

$\lambda^4 - 4 = 0$

$(\lambda^2)^2 - 2^2 = 0$

$(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 2) = 0$

$(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})(\lambda^2 + 2) = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$ *– получены два различных действительных корня и два сопряженных комплексных корня.*

Ответ: *общее решение*

$y = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2e^{\sqrt{2}x} + C_3\cos(\sqrt{2}x) + C_4\sin(\sqrt{2}x),$ *где* $C_1, C_2, C_3, C_4 - const$

б) *Составим и решим характеристическое уравнение:*

$\lambda^6 - \lambda^5 = 0$

$\lambda^5(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_{1,2,3,4,5} = 0$, $\lambda_6 = 1$ *– получены пять кратных нулевых корней и действительный корень* $\lambda_6 = 1$

Ответ: *общее решение*

$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6e^x$, *где* $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 - const$