§8. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Теорема 8.1. Если функция $f(x)$ на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 имеет производную $f^{(n+1)}(x)$, то для $f(x)$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (8.1)$$

где θ – некоторое число из промежутка (0, 1).

Равенство (8.1) называется *формулой Тейлора функции* $f(x)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*.

►Рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$, имеем:

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0,\ \varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)! \text{ для } \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

Пусть $R_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$ – остаточный член формулы Тейлора функции $f(x)$. Надо доказать, что $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\theta \in (0,1)$.

Предположим сначала, что $x < x_0$, $x \in U(x_0)$. Функции $R_n(x)$ и $\varphi(x)$ и их производные до n –го порядка включительно удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[x, x_0]$, а также на любом отрезке $[a, x_0] \subset [x, x_0]$. В силу теоремы Коши с учётом равенства $R_n(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ имеем:

$$\frac{R_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{R'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)},\ x < x_1 < x_0. \qquad (8.1а)$$

Применяя теорему Коши к функциям $R'_n(x)$ и $\varphi'(x)$ на отрезке $[x_1, x_0]$ с учётом равенства $R'_n(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$, получаем:

$$\frac{R'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R'_n(x_1) - R'_n(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{R''_n(x_2)}{\varphi''(x_2)},\ x_1 < x_2 < x_0. \qquad (8.1б)$$

Из (8.1а) и (8.1б) следует равенство:

$$\frac{R_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{R'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R''_n(x_2)}{\varphi''(x_2)},\ x < x_1 < x_2 < x_0.$$

Применив теорему Коши последовательно к функциям $R''_n(x)$ и $\varphi''(x)$, $R'''_n(x)$ и $\varphi'''(x)$, … , $R^{(n)}_n(x)$ и $\varphi^{(n)}(x)$ с учётом свойств остаточного члена имеем равенство:

$$\frac{R_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{R'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \ldots = \frac{R^{(n)}_n(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{R^{(n+1)}_n(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}, \qquad (8.1в)$$

где $x < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < x_0$. Ввиду того, что число x_{n+1} принадлежит отрезку $[x, x_0]$, оно представимо в виде: $x_{n+1} = x_0 + \theta(x - x_0)$, θ – некоторое число из промежутка $(0, 1)$. Поскольку $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1}) = (n+1)!$, а силу свойств остаточного члена формулы Тейлора $R_n^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1})$, то (8.1в) преобразуется к виду:

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!},$$

отсюда получаем $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. Теорема доказана для $x < x_0$. Очевидно, что случай $x > x_0$ рассматривается аналогично.◄

Замечание 8.1. При $x_0 = 0$ равенство (8.1) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{8.2}$$

и называется формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Напишем формулы Маклорена вида (8.2) для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

(8.3)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + \pi n)}{(2n)!}x^{2n},$$

(8.4)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos(\theta x + \pi(2n+1)/2)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

(8.5)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}x^{n+1},$$

(8.6)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

(8.7)

В каждой из формул (8.3) – (8.7) $0 < \theta < 1$, они отличаются от соответствующих формул (7.8)–(7.12) только выражением для остаточных членов.

Замечание 8.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа позволяет оценить погрешность при замене функции её многочленом Тейлора. Например, с её помощью можно вычислить число e с любой наперёд заданной точностью.

Пример 8.1. Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0.0001.

►В разложении (8.3) для e^x положим $x=1$, получим:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1.$$

Заметим, что $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$, так как $e<3$ и $e^{\theta}<3$ для $0<\theta<1$. Наименьшее значение n, удовлетворяющее условию:

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\leq 0.0001,$$

есть $n_0=7$, следовательно, $e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{7!}=2.7183.$◄

Замечание 8.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа служит базой для получения разложений функций в так называемый ряд Тейлора (раздел 11).

Перенесём в формуле (8.1) $f(x_0)$ в левую часть, получим

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1. \tag{8.8}$$

Левая часть соотношения (8.8) является приращением функции $f(x)$: $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$. Поскольку $x-x_0=\Delta x=dx$, то произведения производных на степени разности $x-x_0$ в правой части равенства (8.8) можно рассматривать как дифференциалы соответствующих порядков. В результате формула (8.1) записывается в следующей модификации:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0)+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta(x-x_0)),\ 0<\theta<1. \tag{8.9}$$

При $n=0$ из (8.9) получаем формулу (4.7), следующую из теоремы Лагранжа. Таким образом, формула (8.9), а вместе с ней и формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа является дальнейшим развитием формулы (4.7) и теоремы Лагранжа. Необходимо, однако, отметить, что формулы (8.8) и (8.9) при $n\geq 1$ справедливы для функции $f(x)$, удовлетворяющей более жёстким условиям, чем условия теоремы Лагранжа.