# Соленоидальные векторные поля

**<u>Определение</u>** (соленоидальное поле)

Векторное поле $\overline{a}\,(M)$ для любой точки $M$, принадлежащей области $A \subset R^3$, называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля в точке $M$ равна нулю для любой точки $M \in A$, т.е. $div\ \overline{a}\,(M)=0\ \ \forall(\cdot)\ M \in A$

## Свойства соленоидальных полей

1) $div\ \overline{a}\,(M)=0 \Rightarrow$ поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю,т.е. $\Pi_\sigma \overline{a}\,(M)=0$;

2) $div\ \overline{a}\,(M)=0 \Rightarrow$существует некоторое поле $\overline{b}\,(M)$, такое что его ротор равен $\overline{a}\,(M)$ для любой точки $M \in A$ , т.е.

$$\overline{a}\,(M)= rot\,\overline{b}\,(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A\,.$$

Тогда вектор $\overline{b}$ называется *векторным потенциалом* соленоидального поля $\overline{a}\,(M)$.

3) Пусть $\overline{a}\,(M)$ - произвольное векторное поле.

Следовательно, $rot\,\overline{a}\,(M)$- есть соленоидальное поле, то есть

$$div\,rot\,\overline{a}\,(M)=0\,.$$

<u>Доказательство 3 свойства:</u>

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M),Q(M),R(M)\}$.

$$rot\,\overline{a}\,(M)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{P_1}\cdot\bar{i}+\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{Q_1}\cdot\bar{j}+\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{R_1}\cdot\bar{k}=\{P_1(M);Q_1(M);R_1(M)\}$$

Тогда $div\, rot\, \overline{a}\,(M) = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0$ .

ч.т.д.

Замечание 1:

Свойства 1) и 2) в литературе могут быть использованы как определение соленоидального поля;

Замечание 2:

Векторный потенциал определяется неоднозначно (это следует из свойства 2)

## Вычисление векторного потенциала соленоидального поля

### *1 способ*

**Определение** (звёздной области)

Область $A \subset R^3$ ( $R^2$ ), называется *звёздной относительно некоторой точки* $M \in A$, если любой луч, выходящий из точки $M$ , пересекает границу области $A$ не более чем в одной точке.

Примеры звёздных областей:

$R^2$ : сама плоскость $R^2$ ; круг; параллелограмм и т.д.

$R^3$ : само ространство $R^3$ ; шар;куб и т.д.

**Теорема**

Пусть $\bar{a}\,(M)$- соленоидальное поле $\forall\,(\cdot) M \in A \subset R^3$.

Пусть $A$- звёздная область относительно точки $O\,(\,0;0;0\,)$ ( $\bar{a}\,(M)$ в точке $O$ может быть не определено).

Тогда

$$\bar{b}\,(M) = \int_0^1 \left(\bar{a}(M') \times \bar{r}(M)\right) \cdot t \cdot dt,$$

где $\bar{r}(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} -$ радиус –вектор точки $M$, точка $M'$ $(tx; ty; tz)$ $\forall t \in [0,1]$ пробегает отрезок $OM$ прямой, проходящей через точки $O$ и $M$.

(б/д)

***2 способ***

Пусть $\overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k} -$ соленоидальное поле $\forall\, M(x;y;z) \in A \subset R^3$

Векторный потенциал векторного поля это вектор,

$$\bar{b}\,(M) = P_1(x,y,z)\cdot\bar{i} + Q_1(x,y,z)\cdot\bar{j} + R_1(x,y,z)\cdot\bar{k},$$

удовлетворяющий условию:

$$rot\,\bar{b}(M) = \bar{a}(M) \quad \forall\, M(x;y;z) \in A \subset R^3 \qquad (1)$$

В координатной форме равенство (1) запишется так:

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R \qquad (2)$$

Вычисление $\bar{b}\,(M)$ сводится к нахождению частного решения системы (2).

Пользуясь произволом в выборе вектора $\overline{b}(M)$, для упрощения положим , например, $P_1(x,y,z) \equiv 0 \; \forall \; M(x;y;z) \in A$, т.е. вектор $\overline{b}(M)$ будем искать в виде

$$\overline{b}\,(M) = Q_1(x,y,z)\cdot \overline{j} + R_1(x,y,z)\cdot \overline{k}\,.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (2) для нахождения неизвестных функций $Q_1(x;y;z)$ и $R_1(x;y;z)$ примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial z} = P \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial x} = -Q \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = R \end{cases} \qquad (3) \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} + P \\ R_1(x;y;z) = -\int Q(x;y;z)dx + C_1(y;z) \\ Q_1(x;y;z) = \int R(x;y;z)dx + C_2(y;z) \end{cases},$$

где $C_1(y;z)$ и $C_2(y;z) -$ любые дифференцируемые функции, зависящие от переменных $y$ и $z$.

Положим для упрощения $C_2(y;z) \equiv 0$ и выбирем функцию $C_1(y;z)$ так, чтобы удовлетворялось первое уравнение системы (3). Для этого подставим в первое уравнение (3) найденные выражения для $Q_1$ и $R_1$:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial C_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx = P(x,y,z)\,.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + P(x,y,z)$$

Можно проверить (самостоятельно), что правая часть этого уравнения не зависит от $x$, так как $div\,\overline{a}\,(M) = 0$ в любой точке множества $A$.

Интегрируя последнее равенство по y, найдем

$$C_1(y,z) = \int\left[\ \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + P(x,y,z)\ \right]\cdot dy + C_3(z)\,. \qquad (4)$$

Полагая в (4) $C_3(z) \equiv 0$ и подставляя (4) в выражение для $R_1(x;y;z)$, получим частное решение системы (3) :

$$P_1(x;y;z) \equiv 0\ , \qquad (5)$$

$$Q_1(x,y,z) = \int R(x,y,z)dx\ , \qquad (6)$$

$$R_1(x,y,z) = \int\left[\ \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + P(x,y,z)\ \right]\cdot dy - \int Q(x,y,z)dx\,. \qquad (7)$$

Вектор $\overline{b}(M)$, координаты $P_1(x;y;z)$, $Q_1(x;y;z)$ и $R_1(x;y;z)$ которго определяются формулами (5), (6), (7), является векторным потенциалом , так как он удовлетворяет условию $rot\ \overline{b}(M) = \overline{a}(M)$.

<u>Замечание</u> 1*:*

В виду произвола, допустимого при выборе вектора $\overline{b}$ , вместо условия $P_1(x;y;z) \equiv 0$ можно потребовать, чтобы $Q_1(x;y;z) \equiv 0$ или $R_1(x;y;z) \equiv 0$. Система уравнений (3) и формулы (5), (6) и (7) соответственно изменятся.

Замечание 2*:*

Из (1) следует, что $\overline{b}(M)$ определяется не однозначно .
Например, условию (1) удовлетворяет так же вектор

$$\overline{B}(M) = \overline{b}(M) + gradf(M),$$

т.к. $rot\big(gradf(M)\big) = \overline{0}$ .

Замечание 3:

Если $\overline{b_1}(M)$ и $\overline{b_2}(M)$ два векторных потенциала соленоидального векторного поля $\overline{a}(M)$, найденные разными способами, то

$$\begin{cases} \overline{b_1}(M) - \overline{b_2}(M) = gradf(M) \\ rotgradf(M) = \overline{0} \end{cases} ,$$

где $f(M) -$ некоторое скалярное поле.

Замечание 4:

Заметим , что для вектоного поля $(\overline{b_1} - \overline{b})$ функция $f(M)$ являетя потенциалом, так как $\overline{b_1} - \overline{b} = gradf(M)$, а поле $\left(\overline{b_1} - \overline{b}\right) -$ потенциальное поле. Поэтому для нахождения скалярного поля $f(M)$ можно воспользоваться формулой

$$f(M) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x; y_0; z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x; y; z_0)dx + \int\limits_{z_0}^{z} R(x; y; z)dx + C$$

где точка $(x_0; y_0; z_0)$ - любая точка из области определения функций $P(x; y; z); Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$.