Примеры

Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Пример 1.

Разложите векторное поле

$$\bar{a} = (x-y)\bar{\imath} + (x+y)\bar{\jmath} + (z+2)\bar{k}$$

на сумму потенциального и соленоидального полей.

Решение.

Векторное поле $\bar{a}\,(M)$ представимо в виде

$\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M),$

где

$\overline{a_1}(M) = gradf(M) -$ потенциальное поле,

$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M) -$ соленоидальное поле,

причем $f(M)$ −решение уравнения Пуассона

$$divgradf(M) = div\bar{a}(M).$$

Распишем это уравнение в координатной форме.

Левая часть уравнения:

$$divgradf(M) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(M) + \frac{\partial}{\partial y} f'_y(M) + \frac{\partial}{\partial z} f'_z(M) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2},$$

т.е.

$$divgradf(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} = div\bar{a}(M) \qquad (***)$$

− это уравнением Пуассона (неоднородное уравнение в частных производных второго порядка) в координатной форме.

Для нашего поля имеем

$$div\bar{a}(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \frac{\partial}{\partial z}(z+2) = 3.$$

Тогда уравнение (***) примет вид

$$\frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x;y;z)}{\partial z^2} = 3.$$

Частным решением этого уравнения является, например,
функция (находим подбором, т.к. пока не умеем решать уравнение (***))

$$f(x;y;z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Для этой функции

$$grad f(x;y;z) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} = \bar{r}\ .$$

Следовательно, данное поле $\bar{a}$ (M) представимо в виде суммы потенциального поля

$$\overline{a_1}(M) = grad f(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$$

и соленоидального

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - grad f(M) =$$
$$= \big((x-y)-x\big)\bar{\imath} + \big((x+y)-y\big)\bar{\jmath} + \big((z+2)-z\big)\bar{k} =$$
$$= -y\bar{\imath} + x\bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

Проверим, что векторное поле $\overline{a_2}(M)$ является соленоидальным:

$$div\overline{a_2}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = 0\ .$$

Ответ: $\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M)$, где

$$\overline{a_1}(M) = \bar{a}_{\text{потенц}}(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$$

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}_{\text{соленод}}(M) = -y\bar{\imath} + x\bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

Диффереренциальные операции 1 и 2 порядков

Пример 2.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$$div(u\bar{a}) = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu,$$

где $u -$ скалярная функция, $\bar{a} -$ векторная функция.

Решение.

В символьной форме записи

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (\, u\bar{a}).$$

Учитывая сначала дифференциальный характер ∇ , мы должны написать

$$\nabla \cdot (\, u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u$$

В результате получаем формулу

$$div(u\bar{a})\nabla \cdot (\, u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu.$$

Пример 3.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$$rot(u\bar{a}) = u \cdot rot\bar{a} - \bar{a} \times gradu.$$

Решение.

В символьной форме записи

$$rot(u\bar{a}) = (\nabla \times u\bar{a}) + \nabla u \times \bar{a}$$

В первом слагаемом, т.к. оператор ∇ должен действовать вектор $\bar{a}$, а скалярная функциия u должена стоять перед оператором ∇, то используя свойство векторного произведения(скалярную функцию можно вынести за знак векторного произведения), имеем

$$\nabla \times u\bar{a} = u(\nabla \times \bar{a})\,.$$

Во втором слагаемом , т.к. оператор ∇ должен действовать на скалярную функцию u, а вектор $\bar{a}$ должен стоять перед оператором ∇, то используя свойство векторного произведения (при перестановке векторов – знак меняется на противоположный), имеем

$$\nabla u \times \bar{a} = -\bar{a} \times \nabla u\,.$$

Таким образом ,

$$rot(u\bar{a}) = u(\nabla \times \bar{a}) - \bar{a} \times \nabla u$$

или

$$rot(u\bar{a}) = u \cdot rot\bar{a} - \bar{a} \times gradu.$$

Пример 4.

Доказать следующие равенства дифференциальных операций второго порядка, используя оператор «набла»,

4.1 $rotgradf(M) = \bar{0}$;

4.2 $divrot\bar{a}(M) = 0$;

4.3 $rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$.

Решение 4.1:

$$rotgradf(M) = \nabla \times (\nabla f(M) = (\nabla \times \nabla) f(M) = [\text{т.к. } \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}] = \bar{0},$$

т.е. $rotgradf(M) = \bar{0}$ или $\nabla \times (\nabla f(M) = \bar{0}$.

Решение 4.2:

$divrot\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla \times \bar{a}(M)\big) = 0,$ т.к. смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю.

Решение 4.3

$$rotrot\bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = \left[\begin{matrix} \bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b}\bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{a}\bar{b} \\ \text{двойное векторное произведение} \end{matrix}\right] =$$

$$= \nabla\left(\nabla\bar{a}(M)\right) - (\nabla\nabla)\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M),$$

т. е. $$rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M).$$