Вопросы и задачи для самоконтроля к §§1–3 гл. 1, раздел 8

1. Сформулируйте определение определенного интеграла.

2. Вычислите интеграл $\int\limits_a^b dx$, пользуясь общим определением интеграла.

3. Перечислите классы интегрируемых функций. Относятся ли к одному из этих классов функции

3.1. $y=\dfrac{1}{x}$; 3.2 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ на промежутке $[0,1]$?

4. Укажите геометрический смысл интеграла $\int\limits_0^1 x\,dx$. Вычислите этот интеграл, пользуясь его геометрической интерпретацией.

5. Сформулируйте свойства определенного интеграла.

6. Пользуясь свойством 7 об оценках интеграла, оцените интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\,dx$ снизу и сверху.

7. Сформулируйте теорему о среднем для интеграла.

8. Что такое среднее значение функции на промежутке $[a,b]$? Пользуясь этим определением, найдите среднее значение функции $f(x)=x$ на промежутке $[0,1]$.

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§1–3 гл. 1, раздел 8

2. $\int\limits_a^b dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_k=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(x_1-x_0+x_2-x_1+\ldots x_n-x_{n-1}\right)=\lim\limits_{\lambda\to 0}(x_n-x_0)=\lim\limits_{\lambda\to 0}(b-a)=b-a$.

3.1. $\dfrac{1}{x}\underset{x\to+0}{\to}+\infty$, следовательно, функция $\dfrac{1}{x}$ не принадлежит ни одному из классов интегрируемых функций. Так как нарушается необходимое условие интегрируемости (ограниченность), то эта функция неинтегрируема на $[0,1]$.

3.2. Функция $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ непрерывна в полуинтервале $(0,1]$, имеет точку разрыва $x=0$ и ограничена на сегменте $[0,1]$, так как $\dfrac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1\le\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}<\operatorname{arctg}(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что эта функция интегрируема на промежутке $[0,1]$. Она удовлетворяет условиям теоремы 1.3.

4. $\int\limits_0^1 x\,dx$ численно равен площади треугольника, ограниченного прямыми $y = x$, $y = 0$, $x = 1$. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{arctg}1 \cdot (1-0) < \int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx < \operatorname{arctg}(+\infty)\cdot(1-0)$. Отсюда $\frac{\pi}{4} < \int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx < \frac{\pi}{2}$.

8. По формуле (3.3) $\mu = \frac{1}{1-0}\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (см. ответ к задаче 4).