§8. Бета-функция Эйлера

Бета-функцией (иначе – *интегралом Эйлера первого рода*) называется функция двух переменных $\mathrm{B}(p,q)$, выраженная несобственным интегралом

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,. \qquad (8.1)$$

Особыми точками подынтегральной функции будут $x=0$ при $p<1$ и $x=1$ при $q<1$.

Исследование интеграла с помощью предельного признака сходимости показывает, что интеграл (8.1) сходится тогда и только тогда, когда $p>0$ и $q>0$. При этих значениях параметров $p,\ q$ он определяет бета-функцию.

Свойства бета-функции.

1. Связь бета-функции с гамма-функцией выражается формулой

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,. \qquad (8.2)$$

Эта формула дает способ вычисления значений бета-функции через значения гамма-функции, для которой имеются таблицы. Эта формула определяет также свойства бета-функции.

2. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

3. $$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}\,. \qquad (8.3)$$

Формула (8.3) полезна при вычислении многих интегралов.

4. $$\int_0^{\pi/2}\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\mu+1}{2},\frac{\nu+1}{2}\right). \qquad (8.4)$$

Примеры.

8.1. $J=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^4)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{z^{1/2}z^{-3/4}dz}{(1+z)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{z^{\frac{3}{4}-1}dz}{(1+z)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}}$. Подстановка $x^4=z$; $x=z^{1/4}$; $dx=\frac{1}{4}z^{-3/4}dz$.

$$J=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{1\cdot\Gamma(1)}=\frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{16}\sqrt{2}\,.$$

8.2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} =$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$