§2. Теорема Ролля

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$
1. определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$,
2. дифференцируема на интервале (a,b),
3. $f(a) = f(b)$,

то на интервале (a,b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой $f'(c) = 0$.

►В силу второй теоремы Вейерштрасса (теорема 4.2 главы 4 раздела 4) данная функция принимает на отрезке $[a,b]$ свои наименьшее и наибольшее значения, т.е. найдутся числа m и M такие, что $m = \min\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)$, при этом m и M есть значения функции $f(x)$ для некоторых x из отрезка $[a,b]$.

Если $m = M$, то $f(x) = const.$ на промежутке $[a,b]$ и, следовательно, $f'(x) = 0$ для любого x из интервала (a,b).

Предположим, что $m \neq M$, тогда одно из этих значений функция $f(x)$ принимает в некоторой точке c интервала (a,b), поскольку на концах этого интервала значения функции равны. Так как в точке c функция $f(x)$ имеет экстремум, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$.◄

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Пусть функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда на интервале (a, b) в соответствии с теоремой Ролля и геометрическим смыслом производной найдётся хотя бы одна точка c такая, что *касательная* T к графику Г этой функции, проведённая в точке $(c, f(c))$ будет *параллельна оси* Ox (рис. 2.1).

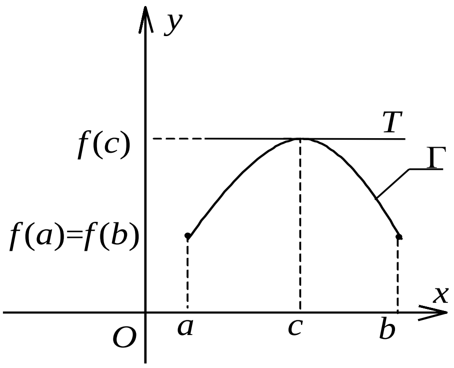

Рис. 2.1. К геометрической интерпретации теоремы Роля

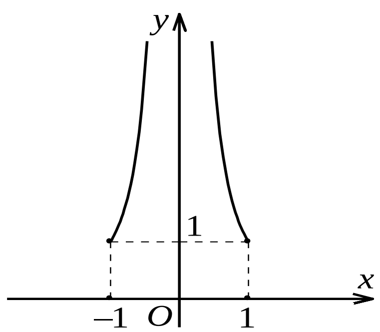

Рис. 2.2. График функции $f(x) = 1/x^2$ на отрезке $[-1,1]$

Пример 2.1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ на отрезке $[0, 2]$.

►Данная функция непрерывна на отрезке $[0, 2]$ как элементарная и на его концах принимает равные значения: $f(0) = f(2) = 1$, дифференцируема в любой точке интервала $(0, 2)$, $f'(x) = -2x + 2$. Итак, для $f(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля и на интервале $(0, 2)$ должна существовать точка c, в которой $f'(c)=0$. Действительно, из равенства $f'(c)=-2c+2=0$ имеем: $c=1\in(0,2)$.◄

Замечание 2.1. Все условия теоремы Ролля существенны для справедливости её заключения. Так, например, рассмотрим функцию $f(x)=1/x^2$, заданную и непрерывную во всех точках отрезка [–1, 1], кроме точки $x=0$, где она имеет разрыв 2-го рода, $f(-1)=f(1)=1$. На интервале (–1, 1) нет точки, где бы её производная $f'(x)=-2/x^3$ обратилась в нуль (рис. 2.2).

Следствие из теоремы Ролля. Между двумя нулями дифференцируемой функции всегда есть хотя бы один нуль её производной.

►Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), при этом $f(a)=f(b)=0$. Тогда по теореме Ролля на интервале (a,b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой $f'(c)=0$.