§1. Понятие об уравнении плоской линии. Алгебраические линии. Теорема об инвариантности порядка

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy и некоторая линия Γ.

Определение 1.1. Уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными x и y называ-ется *уравнением плоской линии* Γ, если ему удовлетворяют координаты x, y любой точки Γ и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих Γ.

В аналитической геометрии под функцией $F(x, y)$ от двух переменных x, y понимают, как правило, многочлен.

Равенство

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1.1}$$

есть уравнение окружности с центром в точке $A(a, b)$ и радиусом r (рис. 1.1), так как ему удовлетворяют координаты любой её точки и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

Замечание 1.1. Уравнение вида (1.1) не всегда задаёт линию. Так, уравнению $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ удовлетворяют координаты единственной точки $A(a,b)$, а уравнению $(x-a)^2 + (y-b)^2 = -1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

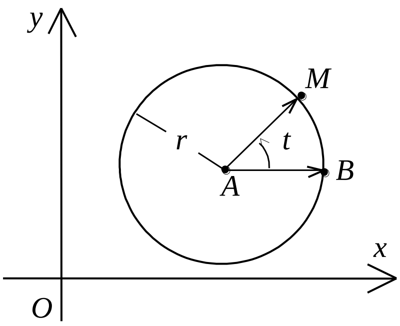

Рис. 1.1. Окружность с центром в точке A и радиусом r

Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости

1. По описанию общего геометрического свойства всех точек линии Γ получить уравнение Γ в выбранной системе координат и по нему изучить такие её свойства, как форма, место расположения на плоскости и т. д.

2. Данному уравнению сопоставить линию Γ и с его помощью исследовать её свойства.

Для окружности, задаваемой уравнением (1.1), рассмотрена первая из этих задач, а для уравнений $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ и $(x-a)^2 + (y-b)^2 = -1$ – вторая.

Уравнение с двумя переменными не является единственным способом задания линии Γ с помощью уравнения. В некоторых случаях представляется удобным выразить координаты точек этой линии через третью вспомогательную переменную (или параметр) t.

Определение 1.2. Система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T, \tag{1.2}$$

называется *параметрическими уравнениями* линии Γ, если для любой её точки $M(x_0, y_0)$ найдётся такое значение параметра $t_0 \in T$, что её координаты определятся из этой системы при $t = t_0 : x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$, а для точек, не принадлежащих ей, такого значения t не существует.

Под $x(t)$ и $y(t)$ в правых частях уравнений системы (1.2) понимаются некоторые функции параметра t, например, такие, которые выражаются через элементарные функции, изученные в школьном курсе алгебры и начал анализа.

В соответствии с принятым определением система уравнений

$$\begin{cases} x = r\cos t + a, \\ y = r\sin t + b, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

задаёт рассмотренную выше окружность. Параметр t в данном случае является углом поворота вектора $\overrightarrow{AB}$, коллинеарного оси Ox, до совмещения с вектором $\overrightarrow{AM}$, где $M(x, y)$ – произвольная точка окружности (рис. 1.1).

При задании параметрическими уравнениями траектории Γ движущейся по плоскости точки M за параметр t принимается время, прошедшее от начала движения. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ из уравнений (1.2) определят координаты точки M на любой момент времени t из промежутка T.

Определение 1.3. Плоская линия Γ называется *алгебраической линией порядка* n, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy она может быть задана уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \tag{1.3}$$

где все показатели степени – неотрицательные целые числа, n – степень этого уравнения, равная наибольшей из сумм $k_i + l_i$, $i = 1, \ldots, s$, при этом отличен от нуля хотя бы один коэффициент A_i, для которого $k_i + l_i = n$.

На плоскости можно выбрать бесчисленное множество прямоугольных декартовых систем координат, поэтому возникает вопрос о зависимости порядка данной алгебраической линии от выбора системы координат. Ответом на этот вопрос служит теорема об инвариантности порядка.

Теорема 1.1. Порядок алгебраической линии инвариантен по отношению к выбору прямоугольной декартовой системы координат.

►Перейдём от системы координат Oxy к системе координат $O'x'y'$ по формулам (6.4) из главы 2 раздела 2:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases} \tag{1.4}$$

Чтобы получить уравнение линии в новой системе координат $O'x'y'$, подставим в уравнение (1.3) равенства (1.4). При этом имеем

$$\begin{aligned} x^{k_i} &= (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a)^{k_s},\ i = 1, \ldots, s, \\ y^{l_i} &= (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + a)^{l_s},\ i = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{1.5}$$

При возведении правых частей равенств (1.5) в степени k_i и l_i получаем слагаемые, степени которых не превышают этих чисел, поэтому заключаем, что степень n_1 уравнения данной линии в новой системе координат и, тем самым, её порядок, не превышает n, т.е. $n_1 \le n$.

Наоборот, при переходе от $O'x'y'$ к Oxy, рассуждая аналогичным образом, приходим к неравенству $n \le n_1$. Следовательно, остается принять $n = n_1$. ◄

Замечание 1.2. Все линии, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. Таковыми будут, например, графики логарифмической, показательной, тригонометрических функций.