§10. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Введём в пространстве прямоугольную систему координат *Oxyz*.

1°. Общие уравнения прямой. Пусть прямая L является линией пересечения двух непараллельных плоскостей P_1 и P_2, определяемых уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Система уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{10.1}$$

называется *общими уравнениями* прямой *L*. При этом равенства $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ не

имеют места хотя бы для одной из пропорций, иначе плоскости P_1 и P_2 были бы параллельны.

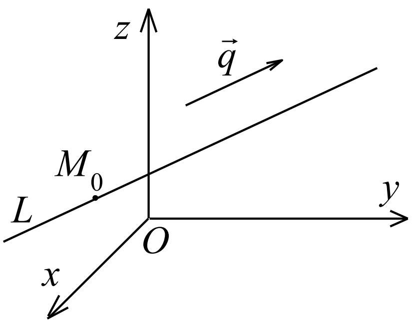

Рис. 10.1. К заданию прямой в пространстве каноническими уравнениями

2°. Канонические уравнения прямой. Любую прямую L в пространстве можно задать принадлежащей ей точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и ненулевым вектором $\vec{q}(l,m,n)$, коллинеарным ей и называемым её *направляющим вектором* (рис. 10.1), причём и точка M_0, и вектор $\vec{q}$ могут быть выбраны произвольно. Уравнения

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{10.2}$$

называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве.

Пример 10.1. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(1,-2,1)$ на плоскость $P: x+2y-z+2=0$.

►За направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра *AB* к плоскости *P* можно взять вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости *P* (рис. 10.2): $\vec{q}=\vec{n}=(1,2,-1)$. Уравнения *AB* имеют вид: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.◄

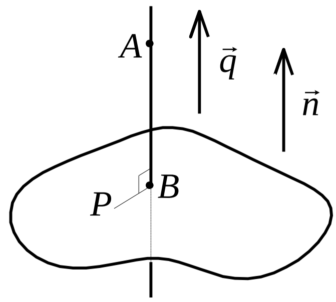

Рис. 10.2. К примеру 10.1

3°. Параметрические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой в пространстве получим так же, как для прямой на плоскости, приняв за параметр *t* равные отношения в уравнениях (10.2):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t. \tag{10.3}$$

Приравнивая каждое отношение в (10.3) к t и выражая из полученного равенст-ва соответствующую координату, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, t \in \boldsymbol{R}. \\ z = nt + z_0, \end{cases} \qquad (10.4)$$

Система (10.4) называется *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве. Она имеет такое же механическое истолкование, как и система (3.10).

4°. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Задание прямой каноническими уравнениями позволяет легко установить их взаимное расположение в пространстве. Так, пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \qquad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Их направляющие векторы – $\vec{q}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, n_2)$ соответственно.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 сводится к условию коллинеарности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, заключающемся в пропорциональности их координат:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (10.5)$$

Условие перпендикулярности этих прямых эквивалентно условию ортого-нальности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, которое, в свою очередь, приводит к условию выполнения равенства $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0$, или

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (10.6)$$

Понимая угол φ между прямыми L_1 и L_2 как угол между их направляющи-ми векторами, получаем для $\cos\varphi$ следующую формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (10.7)$$

Условием совпадения прямых L_1 и L_2 является совместное выполнение ра-венства (10.5) и равенства $\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{n_1}$, выражающего условие принадлежности точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой L_2 также и прямой L_1.

Пример 10.2. Найти значения параметров λ и μ так, чтобы прямые

$$L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}, \; L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{\lambda} = \frac{z}{\mu}$$

были: а) параллельны, б) перпендикулярны.

►Обозначим через $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых, $\vec{q}_1 = (2, -2, 1)$, $\vec{q}_2 = (3, \lambda, \mu)$.

а) $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \| \vec{q}_2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = -\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \lambda = -3, \mu = \frac{3}{2}$.

б) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \perp \vec{q}_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0 \Rightarrow 6 - 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda - 6, \\ \lambda \in \mathbf{R}, \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1,$

$\mu = -4$.◄

Пример 10.3. Найти угол φ между прямыми

$$L_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1},\ L_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{-1}.$$

►Обозначим через $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых $\vec{q}_1=(2,-2,1)$, $\vec{q}_2=(1,-4,1)$. Из (10.7) имеем

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1-2(-4)+1\cdot1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}.◄$$

5°. Переход от общих уравнений прямой к её каноническим уравнениям. Задание прямых в пространстве каноническими уравнениями позволяет исследовать их взаимное расположение по простым формулам, приведённым выше. Поэтому важно уметь переходить от общих уравнений прямой L вида (10.1) к её каноническим уравнениям вида (10.2). Координатами точки M_0, принадлежащей L, может служить любое решение системы (10.1). Предположим, что

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}. \tag{10.7}$$

Координате z придадим произвольное значение, например, z=0. Из системы (10.1) имеем:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-D_1, \\ A_2x+B_2y=-D_2. \end{cases} \tag{10.8}$$

Ввиду условия (10.7) система (10.8) имеет единственное решение, которое можно найти, например, способом подстановки. Обозначим его через (x_0, y_0). Тогда точка $M_0(x_0, y_0, 0)$ принадлежит L, так как её координаты удовлетворяют уравнениям (10.1) этой прямой. Чтобы найти направляющий вектор $\vec{q}$, заметим, что $\vec{q}\perp\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{q}\perp\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – векторы нормали к плоскостям P_1 и P_2, определяемым уравнениями системы (10.1) (рис. 10.3), поэтому за $\vec{q}$ можно принять векторное произведение нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, $\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$. После того как найдены координаты $\vec{q}$, пишут канонические уравнения L в форме (10.2).

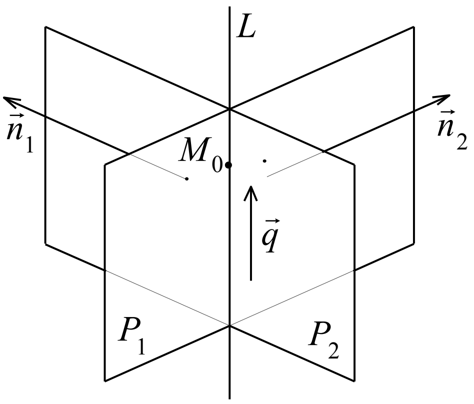

Рис. 10.3. К переходу от общих уравнений прямой L к её каноническим уравнениям

Пример 10.4. Перейти от общих уравнений прямой L к каноническим, если

$$L: \begin{cases} 2x-y+z+4=0, \\ x+2y-z+7=0, \end{cases} \tag{10.9}$$

►В уравнениях (10.9) положим $z=0$, приходим к системе: $\begin{cases} 2x-y+4=0, \\ x+2y+7=0, \end{cases}$ решив которую, получим: $x=-3$, $y=-2$. Таким образом, мы нашли точку $M_0(-3,-2,0)\in L$. За направляющий вектор $\vec{q}$ прямой L примем векторное произведение $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, которое найдём по формуле (5.5), главы 2, раздела 2:

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}\,.$$

Теперь, используя соотношение (10.2), напишем канонические уравнения данной прямой $L:\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{5}$. ◄