Практика

Характеристики векторных полей.

Дивергенция. Линейный интеграл. Циркуляция. Ротор.

Дивергенция векторного поля

Дивергенция (расходимость) векторного поля даёт информацию о распределении и интенсивности источников и стоков векторного поля.

Дивергенция векторного поля $\overline{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ находится по формуле:

$$div\,\overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Замечания:

1) Дивергенция – скалярная характеристика векторного поля.

2) Если $div\,\overline{a}(M) > 0$, то в точке M находится *источник векторного поля*, если $div\,\overline{a}(M) < 0$ - *сток векторного поля*.

3) $|div\,\overline{a}(M)|$ даёт интенсивность источника(стока) в точке M.

Векторная форма записи теоремы Остроградского-Гаусса.

Пусть выполнены условия теоремы Остроградского-Гаусса.

Тогда справедлива формула:

$$\oiint\limits_{\sigma_{\text{внеш}}} \overline{a}(M) \cdot \overline{n}_0(M) d\sigma = \iiint\limits_T div\overline{a}(M) dxdydz$$

Свойства дивергенции векторного поля

1) $div\left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot \overline{a_2}(M)\right) = \lambda_1 \cdot div\,\overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot div\,\overline{a_2}(M)$, где $\lambda_1, \lambda_2 = const$

2) $div\left(\varphi(M) \cdot \overline{a}(M)\right) = \overline{a}(M) \cdot grad\,\varphi(M) + \varphi(M) \cdot div\,\overline{a}(M)\ \ \forall(\cdot)\, M \in A \subset R^3$

Линейный интеграл векторного поля.

Пусть $\overline{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть $Г_{AB}$ – простая, спрямляемая, ориентированная кривая: $Г_{AB} \subset A$.

Тогда

$$\int\limits_{Г_{AB}} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau_0} dl$$

- *линейный интеграл векторного поля*, где

$\overline{\tau_0}$ - единичный вектор направляющего вектора $\overline{\tau}$ касательной, проведённой к кривой $Г_{AB}$ в точке M, направление которого совпадает с ориентацией кривой $Г_{AB}$.

Другие формы записи линейного интеграла

1) $\int\limits_{Г_{AB}} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau_0} dl = \int\limits_{Г_{AB}} Пр_{\overline{\tau_0}} \overline{a}(M) \cdot dl = \int\limits_{Г_{AB}} \overline{a}(M)_{\overline{\tau_0}}\, dl$

2) Пусть $\overline{r}(M)$ – радиус-вектор точки $M \in Г_{AB}$,

тогда $\overline{\tau_0} dl = d\overline{r}$ и

$$\int\limits_{Г_{AB}} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau}_0(M) dl = \int\limits_{Г_{AB}} \overline{a}(M) \cdot d\,\overline{r}$$

3) Пусть

$$\overline{a}(M)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}.$$

Точка $M\in\Gamma_{AB}$, $\overline{r}(M)=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$ и $d\overline{r}(M)=dx\cdot\overline{i}+dy\cdot\overline{j}+dz\cdot\overline{k}$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}=\int\limits_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

Свойства линейных интегралов

1) $$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\left(\lambda_1\cdot\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot\overline{a_2}(M)\right)\cdot d\overline{r}=\lambda_1\cdot\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a_1}(M)\cdot d\overline{r}\pm\lambda_2\cdot\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a_2}(M)\cdot d\overline{r},$$

где $\lambda_1,\lambda_2=const$

2) Пусть $\Gamma_{AB}=\Gamma_{AC}\vee\Gamma_{CB}$.

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}=\int\limits_{\Gamma_{AC}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}+\int\limits_{\Gamma_{CB}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}$$

3) $$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}=-\int\limits_{\Gamma_{BA}}\overline{a}(M)\cdot d\overline{r}$$

Замечание (о физическом смысле линейного интеграла)

Если поле $\overline{a}(M)$ рассматривать как силовое поле $\overline{F}(M)$, то

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\overline{F}(M)d\overline{r}$$

представляет собой работу по перемещению материальной точки силой $\overline{F}$ вдоль кривой Γ_{AB}.

Циркуляция векторного поля

$$circul_{\Gamma}\overline{a}(M) = \oint_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau}_0(M)dl$$

Ротор векторного поля.

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$.

Пусть $P, Q, R \in C^1\,(A)$.

Ротором векторного поля $\overline{a}\,(M)$ в точке M называется **вектор** $\overline{W}$:

$$rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{W} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\bar{k}$$

Свойства ротора векторного поля

1) $rot\,\overline{a}\,(M) = \bar{0}\ \forall(\cdot)M \in A \subset R^3 \Rightarrow \overline{a}(M) = \bar{c},\ где\ \bar{c}$ – постоянный вектор $\forall(\cdot)M \in A \subset R^3$.

2) $rot\,(\lambda\overline{a}) = \lambda \cdot rot\overline{a}$, где $\lambda = const$

3) $rot\,(\lambda_1\overline{a_1}(M) \pm \lambda_2\overline{a_2}(M)) = \lambda_1 \cdot rot\,\overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot rot\,\overline{a_2}(M),\ где\ \lambda_1,\ \lambda_2 = const$

4) $rot\,(\varphi(M)\cdot\overline{a_1}(M)) = grad\,\varphi(M)\times\overline{a}(M) + \varphi(M)\cdot rot\,\overline{a}(M)$

Векторная форма записи формулы Стокса

Пусть выполнены условия теоремы Стокса, тогда справедлива формула:

$$\oint_{\Gamma}\overline{a}(M)\cdot d\bar{r} = \iint_{\sigma} rot\,\overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)\cdot d\sigma$$

Плотность циркуляции векторного поля

Пусть задано $\overline{a}\,(M)$ - векторное поле $\forall(\cdot)M \in A \subset R^3$.

Пусть плоскость P и $(\cdot)M \in P$.

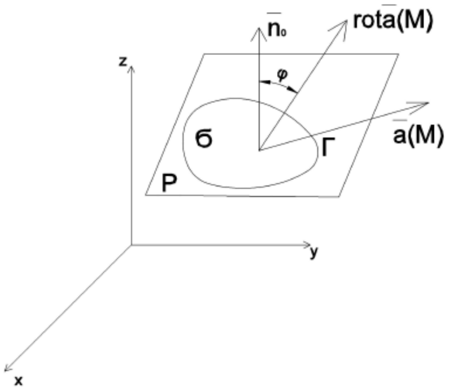
Пусть σ - плоская поверхность, лежащая в плоскости P.

Пусть Γ – замкнутый контур, ограничивающий плоскую поверхность σ

и точка $M \in \sigma$ и лежит внутри контура Γ.

Пусть $\bar{n}_0$ − единичный вектор нормали к плоской поверхности σ.

Выбирем на контре Γ напрвление обхода, соответствующее теореме Стокса.



<u>Определение (</u>плотности циркуляции векторного поля**)**

Предел

$$\lim_{diam\sigma \to 0} \frac{\oint\limits_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot d\overline{r}}{\mu\sigma}$$

называется (удельной) *плотностью циркуляции* по кривой Г векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M_0.

<u>Обозначение:</u> $\Pi\left(\overline{a}(M); \overline{n_0}\right)$.

Вычисление плотности циркуляции

Если задано векторное поле $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, то плотность циркуляции в точке M_0 в направлении $\bar{n}_0$ можно найти по формуле.

$$\Pi(\bar{a}(M_0);\ \bar{n}_0) = \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(M_0) & Q(M_0) & R(M_0) \end{vmatrix}$$

Инвариантное определение ротора векторного поля

Ротором векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M называется **вектор** $\overline{W}$, проекция которого на любое направление $\overline{n_0}$ равна плотности циркуляции векторного поля.

Обозначение:

$$Пр_{\overline{n_0}}\overline{W} = \Pi\left(\bar{a}(M); \overline{n_0}\right)$$

Замечание:

Из определения $rot\bar{a}(M)$ вытекает, что направление ротора – это направление вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность по сравнению с циркуляцией вокруг любого другого напрвления и величина наибольшей плотности циркуляции равна $|rot\bar{a}(M_0)|$.