Метод вариации произвольных постоянных, или метод Лагранжа

Рассмотрим еще один метод нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Этот метод применим для уже рассмотренных уравнений с правой частью специального вида, а также для уравнений с правой частью более общего вида. Этот метод называют методом вариации произвольных постоянных, или методом Лагранжа.

Рассмотрим этот метод применительно к уравнению $y''+py'+qy=f(x)$, хотя он позволяет находить решение и более общего уравнения с переменными коэффициентами. Согласно этому методу сначала находят два линейно- независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного дифференциального уравнения. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде их линейной комбинации, в которой произвольные постоянные C_1 и C_2 заменяются на неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\tilde{y}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x). \qquad (1)$$

Подстановка этого выражения в неоднородное дифференциальное уравнение приводит к следующему уравнению:

$$\begin{gathered} C_1''y_1+2C_1'y_1'+C_1y_1''+C_2''y_2+2C_2'y_2'+C_2y_2''+ \\ +p\left[C_1'y_1+C_1y_1'+C_2'y_2+C_2y_2'\right]+q\left[C_1y_1+C_2y_2\right]=f. \qquad (2) \end{gathered}$$

Перегруппируем слагаемые в (2):

$$\begin{gathered} [C_1y_1''+C_1'y_1'+C_2y_2''+C_2'y_2']+[C_1'y_1'+C_2'y_2']+C_1[y_1''+py_1+qy_1]+ \\ C_2[y_2''+py_2+qy_2]+p[C_1'y_1+C_2'y_2]=f. \end{gathered} \qquad (3)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (3). Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения, выражения в третьей и четвертой скобках в (3) тождественно равны нулю. Наложим на пока неопределенные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ следующее условие:

$$C_1'y_1+C_2'y_2=0. \qquad (4)$$

Тогда выражение в пятой скобке в (3) также окажется равным нулю. Продифференцируем обе части равенства (3):

$$C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2 y_2'' + C_2' y_2' = 0.$$

Это соотношение показывает, что и выражение в первой скобке в (3) тождественно равно нулю.

Таким образом, при условии (4) уравнение (3) сводится к следующему: $C_1' y_1' + C_2' y_2' = f$. Иными словами, уравнение (3) равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f. \end{cases} \qquad (5)$$

Поскольку определитель этой системы является вронскианом двух линейно независимых решений $y_1(x)$и $y_2(x)$, и отличен от нуля, система всегда имеет единственное решение.

Решив систему уравнения (5), остается лишь найти $C_1(x)$ и $C_2(x)$, то есть проинтегрировать полученные из (5) функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$) и, подставить их в выражение для $\tilde{y}(x)$.

Пример 8.1. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'' - y = \frac{1}{x}.$$

Решение. В этом уравнении правая часть не подпадает под вид, допускающий применение метода неопределенных коэффициентов. Поэтому для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Но сначала для нахождения фундаментальной системы решений рассмотрим однородное дифференциальное уравнение: $y'' - y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 1$, и общее решение записывается в виде:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$\tilde{y}(x) = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot e^{-x}.$$

Система (5) приобретает вид:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0 \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2x} \\ C_2'(x) = -\dfrac{1}{2x} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x| \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|x|. \end{cases}$$

В итоге получаем: $\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x|(e^x + e^{-x})$.

Общее решение рассматриваемого уравнения принимает вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\ln|x|.$$