

***Вопросы и задачи для самоконтроля к §7-8 гл. 2, раздел 7/2**

1. Сформулируйте определение гамма-функции. Укажите, в каких случаях интеграл, выражающий гамма-функцию, сходится, а в каких – расходится.

2. Перечислите свойства гамма-функции.

3. Основываясь на свойствах гамма-функции, вычислите:

3.1. $\Gamma(3)$; 3.2. $\Gamma(3.5)$.

4. Сформулируйте определение бета-функции. Укажите, в каких случаях интеграл, выражающий бета-функцию, сходится, а в каких – расходится.

5. Используя свойства бета- и гамма-функций, вычислите $B(3, 3)$.

6. Используя свойства бета-функции, вычислите интегралы

$$6.1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x)^5}; \quad 6.2. \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^5 x dx; \quad 6.3. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^5)^2}.$$

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §7-8 гл. 2, раздел 7/2

$$3.1. \Gamma(3) = 2! = 2.$$

$$3.2. \Gamma(3.5) = 2.5 \cdot \Gamma(2.5) = 2.5 \cdot 1.5 \cdot \Gamma(1.5) = 2.5 \cdot 1.5 \cdot 0.5 \cdot \Gamma(0.5) = 2.5 \cdot 1.5 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{\pi} = 1.875\sqrt{\pi}.$$

$$5. B(3, 3) = \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(3)}{\Gamma(3+3)} = \frac{2^2}{5!} = \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

$$6.1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x)^5} = B(3, 2) = \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{2 \cdot 1}{120} = \frac{1}{60}.$$

$$6.2. \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^5 x dx = \frac{1}{2} B(3, 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{60}.$$

$$\begin{aligned} 6.3. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^5)^2} &= \left[x^5 = t \atop x = t^{1/5} \right] dx = \frac{1}{5} t^{-4/5} dt = \frac{1}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-3/5} dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-2/5} dt}{(1+t)^{8/5+2/5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right) = \\ &= \frac{1}{5} \frac{\Gamma(8/5) \cdot \Gamma(2/5)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{5} \Gamma(8/5) \cdot \Gamma(2/5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{25} \Gamma\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{25} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{5}}. \end{aligned}$$