§6. Уравнение Бернулли

Так называется дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0,\ n \neq 1). \tag{6.1}$$

Уравнение может быть решено, как и линейное уравнение, способом Бернулли: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2. \tag{6.2}$$

▶ Положим $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Уравнение (6.2) примет вид $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = xu^2v^2 \Rightarrow$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = xu^2v^2. \tag{6.3}$$

Упростим уравнение (6.3), выбрав функцию v так, чтобы она обращала в нуль функцию, стоящую в круглых скобках: $v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow$

$$v = \frac{1}{x}. \tag{6.4}$$

При функции v, определяемой по формуле (4), уравнение (3) примет вид $u'\frac{1}{x} = \frac{u^2}{x}$, откуда $\frac{u'}{u^2} = 1$ $\Rightarrow -\frac{1}{u} = x - C \Rightarrow u = \frac{1}{C - x}$. Тогда общее решение $y = uv$ уравнения (6.2) запишется следующим образом:

$$y = \frac{1}{x(C - x)}. \tag{6.5}$$

Кроме того, при делении на u^2 мы могли потерять решение $u \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0$. Проверка показывает, что $y \equiv 0$ является решением уравнения (6.2). Это – особое решение. Оно не может быть получено из общего решения (6.5) ни при каком C. ◀