§1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

Здесь F – некоторая известная функция от своих аргументов, которую будем предполагать обязательно вещественной. Производная y' обязательно входит в уравнение (1.1).

Функция $y = y(x)$, определённая и непрерывно дифференцируемая в интервале (a, b) и обращающая уравнение (1.1) в тождество

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) \equiv 0,$$

справедливое для всех x из интервала (a, b), называется *решением уравнения* (1.1) в интервале (a, b). График решения уравнения (1.1) называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Пример. Для дифференциального уравнения первого порядка

$$xy' - y - \frac{1}{4}y^2 = 0 \tag{1.2}$$

функция $y = x^2$, для которой $y' = 2x$, будет решением, ибо эта функция обращает уравнение (1.2) в тождество: $x \cdot 2x - x^2 - \frac{1}{4}4x^2 \equiv 0$.

Многие вопросы теории дифференциальных уравнений первого порядка проще рассматривать, записав уравнение (1.1) в виде, разрешённом относительно производной от искомой функции:

$$y' = f(x, y). \tag{1.3}$$

Такую форму уравнения первого порядка называют *нормальной формой*. Она называется также *нормальной формой Коши*.

Уравнение (1.3) будем считать заданным в области D двумерного пространства, если в каждой точке $(x, y) \in D$ задана функция f.

Если в уравнении (1.3) перейти к дифференциалам, получим еще одну формул дифференциального уравнения первого порядка

$$f(x, y)\,dx - dy = 0,$$

тогда оно становится частным случаем уравнения вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.4}$$

В уравнениях вида (1.4) естественно считать переменные x и y равноправными, т. е. не интересоваться тем, какие из них являются независимыми.

Задача Коши. В общем виде для уравнения первого порядка в нормальной форме (1.3) задача Коши ставится так: требуется найти решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

что коротко записывается следующим образом:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \tag{1.5}$$

где x_0 и y_0 – заданные числа. Геометрически в задаче Коши речь идет о нахождении интегральной кривой уравнения (1.3), проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Исключительно большое значения для теории дифференциальных уравнений и её приложений имеет вопрос о существовании решения задачи Коши и о единственности этого решения.

Теорема 1.1 (существования и единственности решения задачи Коши). ***Всякое уравнение вида (1.3)***

$$y' = f(x, y)$$

имеет решение, удовлетворяющее начальному условию (1.5)

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,$$

если функция $f(x, y)$ ***непрерывна в некоторой окрестности точки*** (x_0, y_0). ***Если помимо этого в указанной окрестности частная производная*** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ***ограничена, то это решение дифференциального уравнения (1.3) единственно.***

Примем эту теорему без доказательства.

Определение 1.1. ***Общим решением уравнения (1.3) в области*** D ***называется решение***

$$y = y(x, C), \tag{1.6}$$

содержащее произвольную постоянную C, ***если для всякой точки*** $(x_0, y_0) \in D$ ***уравнение*** $y_0 = y(x_0, C)$ ***однозначно разрешимо относительно*** C.

Общее решение уравнения (1.3), записанное в виде, не разрешенном относительно искомой функции y

$$\psi(x, y, C) = 0,$$

называется *общим интегралом* этого уравнения.

Определение 1.2. ***Решение, получающееся из общего решения дифференциального уравнения при фиксированном числовом значении произвольной постоянной*** C, ***называется частным решением этого уравнения.***

Определение 1.3. ***Решение дифференциального уравнения называется особым решением, если оно не может быть получено из формулы общего решения (1.6) при конкретном числовом значении произвольной постоянной C.***

В точках, лежащих на интегральной кривой особого решения, нарушается единственность решения задачи Коши.

Об интегрировании дифференциальных уравнений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения*. Существует ряд приемов интегрирования дифференциальных уравнений специального вида, для которых удается выразить все решения в элементарных функциях. Именно с таким уравнением мы имели дело в рассмотренном выше примере.

Если уравнение не интегрируется в элементарных функциях, но все его решения выражаются через неопределенные интегралы от элементарных функций, то говорят, что это уравнение проинтегрировано *в квадратурах*. *Квадратурой* называется операция взятия неопределенного интеграла. Например, все решения уравнения

$$y' = e^{-x^2} \qquad (1.7)$$

даются формулой

$$y = \int e^{-x^2} dx + C.$$

Здесь (и в дальнейшем) первый в правой части равенства член есть какая-нибудь первообразная для функции e^{-x^2}, а C – произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (1.7) проинтегрировано в квадратурах.

Если уравнение удается проинтегрировать в элементарных функциях или в квадратурах, то говорят, что оно *интегрируемо в конечном виде*. В конечном виде интегрируется лишь небольшое число типов дифференциальных уравнений первого порядка. Ниже в этой главе будут рассмотрены важнейшие из них.