§4. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

В §2 рассмотрено тело, названное цилиндрическим брусом. Оно ограничено плоскостью *Oxy*, цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси *Oz* и сверху поверхностью (*S*): $z = f(x, y)$ (рис. 4.1). Пусть основание тела есть область *D*, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми с уравнениями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x \in [a, b]$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $a < b$ (область 1-го типа, рис. 4.2а). Объём данного тела определяется равенством (2.1).

Рассечём рассматриваемое тело плоскостями, параллельными плоскости *Oyz*, *a* и *b* – абсциссы крайних сечений. Площадь сечения *ABCE* тела плоскостью *P*, проведённой на расстоянии *x* от *Oyz* (рис. 4.1), зависит от *x*. Обозначим её через *S*(*x*). Для объёма *V* данного тела имеем:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (4.1)$$

Найдём выражение для функции $S(x)$ – площади фигуры *ABCE*. Она равна площади трапеции *A′B′C′E′*– проекции *ABCE* на плоскость *Oyz* (рис. 4.1). Трапеция *A′B′C′E′* ограничена кривой $z = f(x, y) = \psi(y)$, прямыми $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$ и осью *Oy* (*x* фиксировано для выбранного

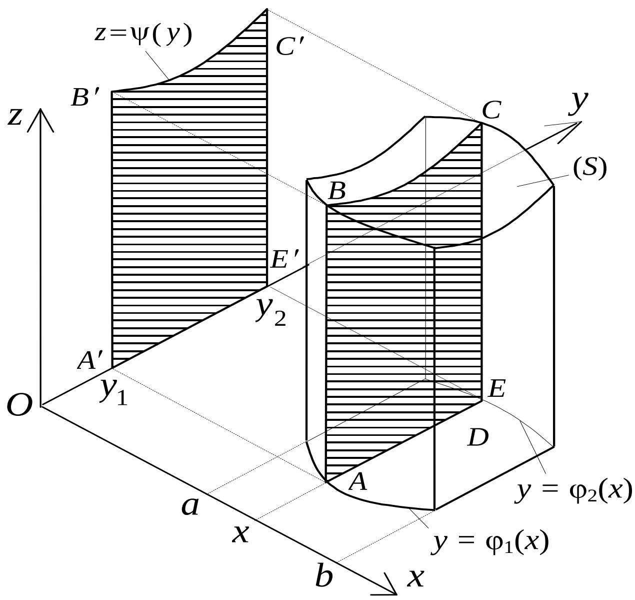


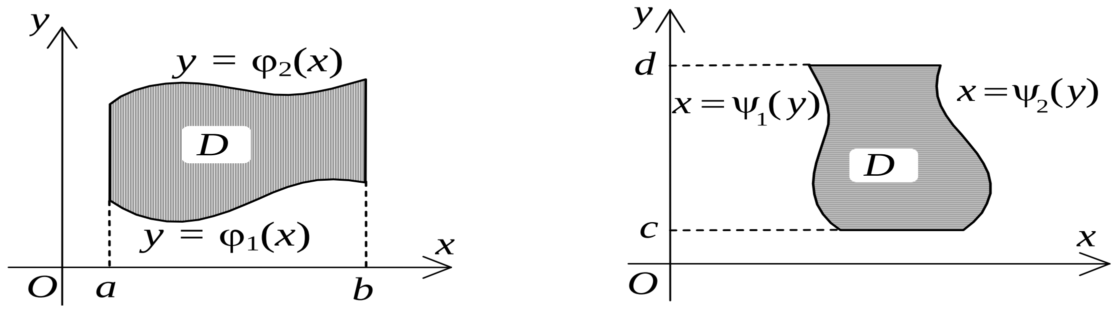
Рис. 4.1. К вычислению двойного интеграла в прямоугольных координатах

сечения). Но тогда $S_{A'B'C'E'} = S(x) = \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ и в силу (4.1):

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (4.2)$$

Итак, для объёма данного тела получено выражение в виде *повторного интеграла*, в котором интегрирование выполняется сначала по *y* (при фиксированном *x*), а затем полученный результат интегрируется по *x*. Сравнение (2.1) и (4.2) для области *D* (области 1-го типа, рис. 4.2а) приводит к равенству:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (4.3)$$



А) область 1-го типа Б) область 2-го типа

Рис. 4.2. Типы стандартных областей

Можно доказать, что формула (4.3) остаётся справедливой и в общем случае, когда значения функции $f(x,y)$ могут иметь любой знак в области D.

Замечание 4.1. Если в предыдущих рассуждениях поменять роли переменных x и y, то для области D, определяемой неравенствами $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$ (область 2-го типа, рис. 4.2б), получим формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (4.4)$$

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (2y-x)\,dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y = x$, $y = x^2$.

►Область D (рис. 4.3), определяемая неравенствами: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$, является областью 1-го типа, следовательно, по формуле (4.3) имеем:

$$\iint\limits_D (2y-x)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (2y-x)\,dy = \int\limits_0^1 (y^2 - xy)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.◄$$

Замечание 4.2. Если область будет более сложного вида, чем рассмотренные выше, то её следует разбить на такие части, по которым функция $f(x,y)$ может быть проинтегрирована при помощи полученных выше формул, а затем воспользоваться аддитивностью двойного интеграла по отношению к области интегрирования. Например, для вычисления $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$ в случае об-

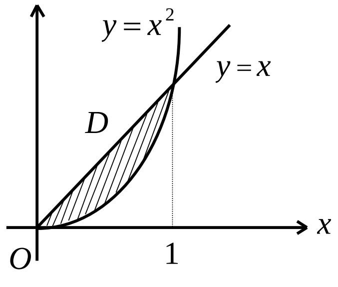


Рис. 4.3. К примеру 4.1

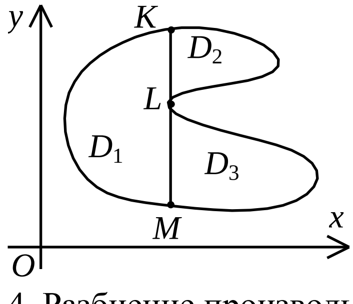


Рис. 4.4. Разбиение произвольной области на области 1-го типа

области D, изображенной на рис. 4.4, достаточно область D разбить на три части D_1, D_2, и D_3, вычислить $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS$, $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS$ и $\iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dS$ по формуле (4.3) и полученные результаты сложить:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dS .$$

Пример 4.2. Изменить порядок интегрирования в следующем выражении:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy .$$

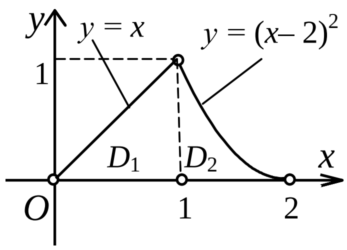


Рис. 4.5. К примеру 4.2

►Данное выражение есть сумма двух повторных интегралов: $I=I_1+I_2$. Первый из них взят по области D_1: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$; второй – по области D_2: $1 \le x \le 2, 0 \le y \le (x-2)^2$ (рис. 4.5).

Рассмотрим область $D = D_1 \cup D_2$, ордината любой её точки заключена в пределах от 0 до 1 (рис. 4.5). Чтобы найти пределы по координате x, из уравнения параболы $y = (x-2)^2$ найдём x как функцию y: $x = 2 \pm \sqrt{y}$, уравнение $x = 2 - \sqrt{y}$ задаёт левую ветвь параболы, а уравнение $x = 2 + \sqrt{y}$ – её правую ветвь. Для координат точек области D имеем неравенства: $0 \le y \le 1, y \le x \le 2 - \sqrt{y}$. Из формулы (4.4) следует: $I = \int_0^1 dy \int_y^{2-\sqrt{y}} f(x,y)dx$.◄