## §4. Производные сложной функции. Формулы для вычисления дифференциалов

Рассмотрим сложную функцию $w = f(u,v)$, где $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$. Будем предполагать, что функции $\varphi$ и $\psi$ дифференцируемы в точке $(x,y)$, а функция $f$ дифференцируема в соответствующий точке $(u,v)$.

Пусть $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ – частные приращения функций $u = \varphi(x,y)$ и $v = \psi(x,y)$, вызванные приращением $\Delta x$ переменной $x$; так как функция $w = f(u,v)$ дифференцируема в точке $(u,v)$, то для этих $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ имеем

$$\Delta_x w = f'_u(u,v)\Delta_x u + f'_v(u,v)\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x v \to 0$. Но функции $u$ и $v$ дифференцируемы и, следовательно, непрерывны, т. е. $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из последнего равенства получаем:

$$\frac{\Delta_x w}{\Delta x} = f'_u(u,v)\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v(u,v)\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x};$$

переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'_u(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + f'_v(u,v)\frac{\partial v}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.1}$$

Аналогично получаем формулу

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.2}$$

Найдем теперь дифференциал сложной функции $w$. По определению (3.4) полного дифференциала функции $w$ имеем

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy; \tag{4.3}$$

подставляя сюда (4.1) и (4.2), получаем

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Итак,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv. \tag{4.4}$$

Сравнивая равенства (4.3) и (4.4), видим, что дифференциал сложной функции $w$ выражается через промежуточные переменные $u$ и $v$ точно так же, как если бы промежуточные переменные были независимыми переменными $x$ и $y$. Имеем, как и в случае функции одной переменной, инвариантность формы (4.3) дифференциала.

Это свойство позволяет обобщить правило получения дифференциалов суммы, произведения и частного на случай функций многих переменных:

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = v\,du + u\,dv, \quad d\,\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Действительно, используя только что доказанное свойство инвариантности полного дифференциала, можем написать, например,

$$d\,\frac{u}{v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)du + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)dv = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

***Замечание.*** Мы ввели понятие полного дифференциала для функции двух переменных. Совершенно аналогично оно вводится и для функций любого числа переменных. Например, если $w = f(x, y, z, t)$, то

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial t}dt.$$

***Пример 4.1.*** $w = \dfrac{xy}{zt}$. Найти полный дифференциал этой функции.

▶ $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{zt}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{zt}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2 t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{xy}{zt^2}.$$

Тогда

$$dw = \frac{y}{zt}dx + \frac{x}{zt}dy - \frac{xy}{z^2 t}dz - \frac{xy}{zt^2}dt. \blacktriangleleft$$