

УДК 530.1(075.8)

ББК 22.3

Л39

Леденев А. Н. **Физика**. В 5 кн. Кн. 4. **Колебания и волны. Оптика**. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с. — ISBN 5-9221-0464-0.

Основу настоящего курса физики составляют лекции, читаемые автором слушателям Института криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. В этой книге излагается материал разделов курса физики «Колебания и волны» и «Оптика». Подробно рассматриваются колебательные процессы в электрических цепях: гармонические, затухающие и вынужденные электрические колебания, переменный ток. Излагаются основы методов расчета цепей переменного тока. Математический аппарат, используемый для описания волновых процессов, излагается на примере упругих волн. Затем анализируются характеристики и свойства электромагнитных волн и дипольного излучения. Разделы книги, посвященные оптике, включают четыре основные темы — интерференцию, дифракцию, поляризацию и взаимодействие света с веществом (дисперсию). Дается краткое, но достаточно строгое изложение учебного материала в виде системы физических понятий, определений, законов и теорем.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Информатика и вычислительная техника».

Рецензенты:

кафедра физики Московского института радиоэлектроники и автоматики;
проф. А.Н. Сафронов (Научно-исследовательский институт ядерной физики
МГУ им. М.В. Ломоносова)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава I. Электрические колебания	9
§ 1. Гармонические колебания	9
§ 2. Затухающие колебания	14
§ 3. Вынужденные колебания. Резонанс	18
§ 4. Векторная диаграмма напряжений	24
§ 5. Связь добротности с формой резонансных кривых	26
§ 6. Переменный ток	29
§ 7. Вынужденные колебания в параллельном контуре	36
§ 8. Метод комплексных амплитуд	40
Задачи	46
Глава II. Упругие волны	50
§ 9. Волновое уравнение и его решения	50
§ 10. Скорость и энергия упругих волн в твердой среде	57
§ 11. Перенос энергии упругой волной	61
§ 12. Стоячая волна	64
§ 13. Характеристики звука. Эффект Доплера для звуковых волн	67
Задачи	70
Глава III. Электромагнитные волны	71
§ 14. Векторное волновое уравнение для электромагнитного поля	71
§ 15. Плоская электромагнитная волна и ее свойства	73
§ 16. Энергия электромагнитных волн	78
§ 17. Импульс и давление электромагнитного поля	80
§ 18. Дипольное излучение	82
Задачи	86
Глава IV. Введение в оптику	88
§ 19. Свойства световой волны. Законы отражения и преломления	88
§ 20. Формулы Френеля. Закон Брюстера	93

§ 21. Фотометрические величины и единицы	100
§ 22. Законы геометрической оптики. Принцип Ферма	104
§ 23. Увеличение оптических приборов, вооружающих глаз	107
Задачи	112
Глава V. Интерференция света	113
§ 24. Интерференция световых волн от двух когерентных источников	113
§ 25. Интерференция двух плоских волн	121
§ 26. Временная когерентность	123
§ 27. Фурье-спектр световой волны	130
§ 28. Пространственная когерентность	133
§ 29. Интерференция в тонких пластинках	138
§ 30. Интерференционный опыт с бипризмой Френеля	141
Задачи	143
Глава VI. Дифракция света	145
§ 31. Принцип Гюйгенса–Френеля. Зоны Френеля	145
§ 32. Дифракция Френеля от круглого отверстия и диска	152
§ 33. Дифракция Френеля от щели	155
§ 34. Дифракция Фраунгофера от щели	159
§ 35. Количественный критерий вида дифракции	162
§ 36. Многолучевая интерференция	166
§ 37. Дифракционная решетка	169
§ 38. Дифракционная решетка как спектральный прибор	172
§ 39. Разрешающая сила объектива и оптимальное увеличение зрительной трубы	179
Задачи	183
Глава VII. Поляризация света	186
§ 40. Поляризованный и естественный свет. Закон Малюса	186
§ 41. Поляризация света при отражении и преломлении	193
§ 42. Двойное лучепреломление	196
§ 43. Вращение плоскости поляризации	202
Задачи	203
Глава VIII. Дисперсия света	205
§ 44. Дисперсия света. Групповая скорость	205
§ 45. Элементарная теория дисперсии	211
§ 46. Поглощение и рассеяние света	215
Задачи	217
Ответы к задачам	218

П р и л о ж е н и я

I. Основные определения и формулы	222
Электрические колебания	222
Гармонические колебания	223
Затухающие колебания	223
Вынужденные колебания	225
Упругие волны	227
Электромагнитные волны	230
Свойства световой волны	233
Фотометрия	236
Интерференция света	237
Когерентность	238
Дифракция света	241
Поляризация света	244
Дисперсия света	246
II. Производные единицы СИ электрических, магнитных и световых величин	248
III. Постоянные некоторых веществ	250
Предметный указатель	252

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основу настоящего курса физики составляют лекции, читаемые автором слушателям Института криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. В данной книге излагается материал разделов курса «Колебания и волны» и «Оптика». Подробно рассматриваются колебательные процессы в электрических цепях: гармонические, затухающие и вынужденные электрические колебания, переменный ток. Излагаются основы методов расчета цепей переменного тока: методы векторных диаграмм и комплексных амплитуд.

Главные физические понятия и определения учения о волнах, применяемый для описания волновых процессов математический аппарат излагаются на примере упругих волн. На этой основе анализируются характеристики и свойства электромагнитных волн и дипольного излучения.

Главы книги, посвященные оптике, включают четыре основные раздела — интерференцию, дифракцию, поляризацию и взаимодействие света с веществом (дисперсию). С точки зрения математического аппарата основные результаты волновой оптики получены методами функций действительной переменной. При этом широко используется метод векторных диаграмм, что позволяет избежать привлечения комплексных чисел, добиться наглядности и доступности изложения.

В книге имеется приложение, в которое включены только определения физических понятий, формулировки законов и соответствующие математические формулы излагаемых разделов курса физики. Структура приложения отражает логику содержания основного текста книги. Оно полезно как при первом чтении книги, так и в процессе ее повторения.

Разделы курса физики, составляющие содержание данной книги, являются важной составной частью профессионального образования специалистов в области вычислительной техники и радиотехники.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Гармонические колебания

Классификация колебаний. *Электрические колебания* представляют собой движение электрических зарядов, которое повторяется через определенные или почти определенные промежутки времени. Так, если к обкладкам заряженного конденсатора подключить катушку индуктивности, начнется периодически повторяющееся перетекание зарядов с одной обкладки на другую и обратно.

Колебательным контуром называется электрическая цепь, обладающая емкостью и индуктивностью, то есть цепь, имеющая в своем составе помимо прочих элементов конденсатор и катушку индуктивности (или несколько конденсаторов и катушек). Наличие емкости и индуктивности является необходимым условием возникновения собственных электрических колебаний в цепи. Следует заметить, что любой проводник и любая электрическая цепь, не предназначенные специально для создания и поддержания электрических колебаний, обладают некоторой емкостью и некоторой индуктивностью.

Периодом колебаний T называется промежуток времени, через который движение электрических зарядов повторяется.

В процессе электрических колебаний изменяются величина заряда на обкладках конденсатора, сила тока в цепи, напряжения на различных элементах колебательного контура. *Амплитудой колебаний* называется величина наибольшего отклонения соответствующего физического параметра (заряда, тока, напряжения) от своего равновесного значения.

Свободными называются колебания физической системы (электрической или механической) около положения устойчивого равновесия после того, как система была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе. Состояние устойчивого равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии системы.

Для электрической цепи в качестве потенциальной энергии можно рассматривать энергию заряженного конденсатора. Энергия конденсатора минимальна, если заряд на его обкладках равен нулю. Зарядив конденсатор, мы выводим систему из состояния равновесия. Если обкладки конденсатора соединить с концами катушки индуктивности, то возникнут свободные электрические колебания — заряд будет перетекать с одной обкладки на другую и этот процесс будет повторяться.

Если омическое сопротивление колебательного контура пренебрежимо мало, то свободные колебания являются *гармоническими*. Это

означает, что изменение во времени величин заряда, тока, напряжений на различных элементах контура происходит по гармоническому закону (описывается функцией синуса или косинуса).

Частота гармонических колебаний ω_0 в контуре, омическое сопротивление которого равно нулю, называется *собственной частотой* контура.

Колебания в контуре при наличии в нем омического сопротивления называются *затухающими*. В процессе колебаний в таком контуре электрическая энергия — энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля катушки индуктивности — будет постепенно превращаться в тепло, выделяемое на омическом сопротивлении. Примеры электрических цепей, в которых возможны свободные гармонические и свободные затухающие колебания, представлены на рисунках 1 а и 1 б соответственно.

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в электрической цепи в результате внешнего воздействия и происходящие в такт с изменениями этого воздействия.

Примером внешнего воздействия служит поданное на вход контура переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$ (рис. 2).

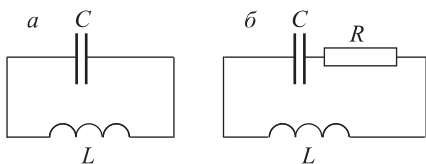


Рис. 1

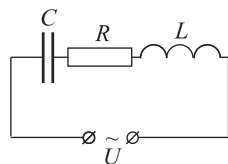


Рис. 2

Условие квазистационарности тока. Для описания колебаний в электрических цепях можно воспользоваться законом Ома, который, строго говоря, хотя и справедлив только для цепей постоянного тока, однако, если токи и напряжения в цепи изменяются не слишком быстро, то для мгновенных значений тока и напряжения закон Ома остается в силе.

Напомним, что ток называется *квазистационарным* при условии, что во всех поперечных сечениях проводников, соединенных между собой последовательно и составляющих электрическую цепь, мгновенное значение силы тока приблизительно одинаково в один и тот же момент времени. Воспользуемся законом Ома для описания этих токов.

Пусть по некоторой цепи течет изменяющийся во времени ток. Условие квазистационарности будет выполнено, если за время распространения по цепи электромагнитного возмущения сила тока успевает измениться незначительно. Электромагнитным возмущением является, например, скачкообразное изменение напряженности электрического поля во всех участках цепи. Скорость распространения возмущения по

порядку величины равна скорости распространения электромагнитных волн в вакууме c .

Оценим частоту ν переменного тока, для которого выполнено условие квазистационарности. Промежуток времени, в течение которого сила переменного тока успевает существенно измениться, приблизительно равен периоду колебаний T тока. Если l — длина цепи, c — скорость распространения электромагнитного возмущения (скорость света в вакууме), то время τ передачи возмущения по цепи равно

$$\tau = \frac{l}{c}.$$

Условие квазистационарности тока:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T.$$

Частота ν переменного тока при этом должна удовлетворять условию:

$$\nu = \frac{1}{T} \ll \frac{c}{l}.$$

Для цепи длиной $l \approx 3$ м и скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с условие квазистационарности выполняется, если частота ν переменного тока удовлетворяет условию:

$$\nu \ll 10^8 \text{ Гц}.$$

Уравнение гармонических колебаний и его решения. Рассмотрим колебательный контур, в состав которого входит конденсатор емкости C , катушка индуктивности L , при этом сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало ($R = 0$). Пусть в некоторый момент времени по контуру течет ток силой I , на обкладках конденсатора сосредоточен заряд q , потенциалы обкладок равны φ_1 и φ_2 (рис. 3).

Запишем закон Ома для участка контура, расположенного между точками с потенциалами φ_1 и φ_2 и содержащего катушку индуктивности:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt},$$

где величина $-L \frac{dI}{dt}$ представляет собой ЭДС самоиндукции.

Учтем, что $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$, $R = 0$, сила тока I связана с величиной заряда конденсатора q следующим соотношением:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Тогда получим

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0,$$

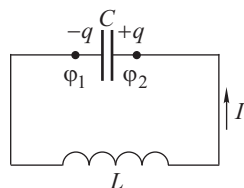


Рис. 3

или

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.1)$$

где введены обозначения $\ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота контура.

Уравнение (1.1) представляет собой *уравнение гармонических колебаний*, общее решение которого имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \delta). \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что заряд на обкладках конденсатора меняется с течением времени по гармоническому закону. Величина q_m — это амплитуда колебаний заряда, $(\omega_0 t + \delta)$ — фаза колебаний, δ — начальная фаза, ω_0 — циклическая частота колебаний (она равна собственной частоте контура). Напомним, что единицей циклической частоты в системе СИ является обратная секунда ($[\omega_0] = \text{с}^{-1}$).

Период колебаний заряда связан с циклической частотой следующим соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Период измеряется в *секундах* ($[T] = \text{с}$).

Частота колебаний ν равна величине, обратной периоду:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

и измеряется в *обратных секундах* или *герцах* ($[\nu] = \text{с}^{-1} = \text{Гц}$).

Сила тока в контуре в произвольный момент времени равна

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) = q_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_m \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $I_m = q_m \omega_0$ — амплитуда колебаний тока.

Частота свободных гармонических колебаний определяется параметрами контура — его индуктивностью L и емкостью C . Амплитуда колебаний q_m и начальная фаза δ от параметров контура не зависят, а определяются так называемыми начальными условиями, а именно, величиной q_0 заряда конденсатора и силой тока I_0 в начальный момент времени.

Выразим величины q_0 и I_0 в момент времени $t = 0$ с помощью формул (1.2) и (1.3):

$$\begin{aligned} q_0 &= q_m \cos \delta, \\ I_0 &= -q_m \omega_0 \sin \delta. \end{aligned}$$

Из этих двух соотношений найдем

$$q_m = \sqrt{q_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega_0^2}},$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{I_0}{q_0 \omega_0}.$$

График зависимости от времени t заряда конденсатора q при гармонических колебаниях представлен на рис. 4.

Установим связь между фазами колебаний тока в цепи и напряжения на конденсаторе при гармонических колебаниях. Напряжение на конденсаторе равно

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \delta). \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.4) и (1.3), видим, что при гармонических колебаниях ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

Разность потенциалов на концах катушки индуктивности равна по величине и противоположна по знаку (при выбранном направлении обхода контура) разности потенциалов на обкладках конденсатора, то есть напряжение на катушке равно:

$$U_L = -U_C = -\frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \delta + \pi). \quad (1.5)$$

Сравнивая (1.5) с (1.3), видим, что колебания напряжения на катушке опережают по фазе колебания тока в цепи на величину $\pi/2$.

Энергия гармонических колебаний. Энергия W гармонических колебаний равна сумме энергии конденсатора $\frac{q^2}{2C}$ и энергии тока (магнитного поля) в катушке $LI^2/2$:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{Lq_m^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \delta) =$$

$$= \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{Lq_m^2}{2LC} \sin^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_m^2}{2C} = \text{const}, \quad (1.6)$$

где в преобразованиях было учтено, что $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Из полученного выражения (1.6) видно, что полная энергия гармонических колебаний W не зависит от времени и равна максимальному значению энергии конденсатора $\frac{q_m^2}{2C}$. Величина W равна также макси-

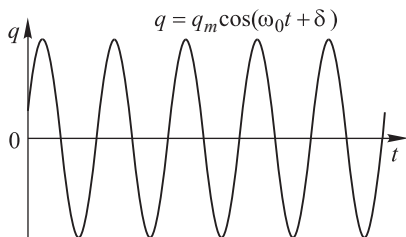


Рис. 4

мальному значению энергии тока в катушке $LI_m^2/2$, где $I_m = q_m\omega_0$. Действительно, имеет место равенство

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2} = \frac{Lq_m^2 \cdot 1/(LC)}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = W.$$

§ 2. Затухающие колебания

Всякий реально существующий колебательный контур обладает омическим сопротивлением. Вследствие этого энергия электрических колебаний постепенно переходит в тепло, свободные колебания затухают. Рассмотрим контур, обладающий емкостью C , индуктивностью L и омическим сопротивлением R , в котором происходят затухающие колебания (рис. 5).

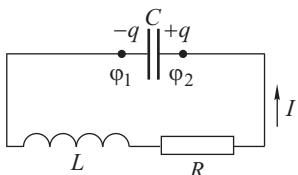


Рис. 5

Пусть в некоторый момент времени заряд конденсатора равен q , потенциалы обкладок φ_1 и φ_2 , сила тока равна I . В соответствии с законом Ома для участка цепи, расположенного между точками контура с потенциалами φ_1 и φ_2 и содержащего катушку индуктивности L и сопротивление R , можно написать:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt},$$

где слагаемое $-L \frac{dI}{dt}$ представляет собой величину ЭДС самоиндукции, действующей в контуре.

Учитывая, что $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$ и $I = \frac{dq}{dt}$, получим уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0,$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.1)$$

где величина $\beta = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ — квадрат собственной частоты контура.

Из теории дифференциальных уравнений следует, что в зависимости от соотношения между параметрами β и ω_0 существуют три типа решений уравнения (2.1).

1. Если $\beta < \omega_0$, то зависимость от времени t заряда q на обкладках конденсатора имеет следующий вид:

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) = a(t) \cos(\omega t + \delta), \quad (2.2)$$

где величина $a(t) = q_{m0} e^{-\beta t}$ называется *амплитудой затухающих колебаний*, q_{m0} — *начальной амплитудой*. В отличие от гармонических

колебаний, амплитуда затухающих колебаний зависит от времени — она уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону.

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (2.3)$$

она не совпадает с собственной частотой контура ω_0 .

Периодом затухающих колебаний по определению называется величина, равная:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.4)$$

Циклическая частота ω определяется параметрами R , L и C колебательного контура. Начальная амплитуда q_{m0} и начальная фаза колебаний δ от параметров R , L и C не зависят, а определяются начальными условиями, эти константы можно вычислить, зная, например, заряд конденсатора и силу тока в цепи в момент времени $t = 0$.

График функции (2.2), описывающей затухающие колебания, представлен на рис. 6.

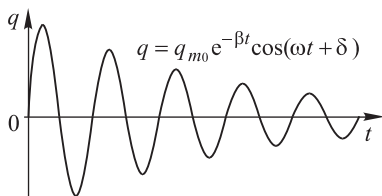


Рис. 6

Вычислим напряжение на конденсаторе U_C и силу тока I в цепи при затухающих колебаниях:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \delta) - \omega \sin(\omega t + \delta)] = \\ &= q_{m0} e^{-\beta t} \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \delta) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \delta) \right] = \\ &= q_{m0} e^{-\beta t} \omega_0 [\cos \psi \cos(\omega t + \delta) - \sin \psi \sin(\omega t + \delta)] = \\ &= q_{m0} e^{-\beta t} \omega_0 \cos(\omega t + \delta + \psi), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\operatorname{tg} \psi = -\omega/\beta$. Поскольку $\cos \psi < 0$, а $\sin \psi > 0$, значение угла ψ заключено в пределах от $\pi/2$ до π . Следовательно, при наличии затухания сила тока I опережает по фазе напряжение на конденсаторе U_C более, чем на $\pi/2$ (при гармонических колебаниях опережение составляет ровно $\pi/2$).

Величины, характеризующие затухание. Коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$ (R — омическое сопротивление контура, L — индуктивность катушки), согласно (2.2), определяет скорость уменьшения амплитуды колебаний $a(t)$.

По определению *время жизни колебаний* τ — это промежуток, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{a(t)}{a(t+\tau)} = e.$$

Подставив выражение для амплитуды $a(t)$, получим

$$\frac{a(t)}{a(t+\tau)} = \frac{q_{m0}e^{-\beta(t)}}{q_{m0}e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e.$$

Отсюда следует:

$$\beta\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Логарифмическим декрементом затухания λ называется натуральный логарифм отношения амплитуд затухающего колебания в моменты времени, разделенные промежутком в один период T :

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \ln \frac{q_{m0}e^{-\beta t}}{q_{m0}e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Пусть N_e — количество колебаний за промежуток времени, в течение которого их амплитуда уменьшается в e раз. Поскольку время одного колебания — это период T , а промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз, составляет τ , параметр N_e равен

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}.$$

Добротностью Q электрического колебательного контура называется умноженное на число π количество колебаний за время, в течение которого их амплитуда уменьшается в e раз:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Энергия W затухающих колебаний складывается из энергии заряженного конденсатора $\frac{q^2}{2C}$ и энергии тока в катушке $\frac{LI^2}{2}$, при этом каждое из двух указанных слагаемых пропорционально квадрату амплитуды затухающих колебаний $a(t)^2 = q_{m0}^2 e^{-2\beta t}$ (см. формулы (2.2) и (2.6)). Приближенно зависимость энергии затухающих колебаний от времени можно представить в следующем виде:

$$W \approx W_0 e^{-2\beta t}, \quad (2.7)$$

где W_0 — энергия колебаний в момент времени $t = 0$.

Прологарифмируем уравнение (2.7) и найдем дифференциалы от обеих частей получившегося уравнения:

$$\frac{dW}{W} = -2\beta dt. \quad (2.8)$$

Пусть затухание является слабым, так что убыль $|\Delta W_T|$ энергии колебаний за время одного периода T малá. Тогда приравнявая друг другу модули обеих частей уравнения (2.8) и заменив дифференциалы конечными приращениями ($|dW|$ на $|\Delta W_T|$, dt на T), получим

$$\frac{|\Delta W_T|}{W} = 2\beta T,$$

или:

$$\frac{W}{|\Delta W_T|} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\beta T} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) означает, что с точностью до коэффициента 2π добротность контура Q равна отношению энергии затухающих колебаний W к величине убыли этой энергии $|\Delta W_T|$ за один период T . Таким образом, добротность позволяет грубо оценить число периодов колебаний, в течение которых практически вся энергия колебаний превращается в теплоту.

Наконец, рассмотрим два других решения уравнения (2.1), которые описывают аperiодическое (не колебательное) приближение системы к равновесию после того, как она была выведена из равновесного состояния.

2. Если коэффициент затухания β превышает собственную частоту контура ω_0 , то есть $\beta > \omega_0$, то решение уравнения (2.1) имеет вид

$$q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.10)$$

где $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий. Параметры λ_1 и λ_2 являются отрицательными числами, а функция $q(t)$ представляет собой сумму убывающих экспонент. При этом величина q заряда конденсатора с течением времени быстро приближается к нулю (см. например, график зависимости q от t , представленный на рис. 7).

3. Если выполнено условие $\beta = \omega_0$, то решение уравнения затухающих колебаний (2.1) имеет вид

$$q(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}, \quad (2.11)$$

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, значения которых можно определить из начальных условий. Если $\beta = \omega_0$, то поведение колебательного контура называют *критическим режимом*, а параметр β — критическим значением коэффициента затухания, $\beta_{кр}$. Критическому режиму соответствует так называемое *критическое сопротивление* контура $R_{кр}$, которое находится из соотношения:

$$\beta_{кр} = \omega_0, \\ \frac{R_{кр}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

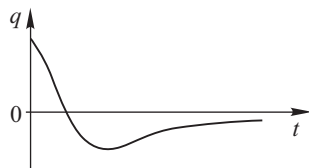


Рис. 7

Отсюда получаем

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В критическом режиме приближение колебательной системы к положению равновесия имеет характер аperiodического процесса и не является колебанием.

§ 3. Вынужденные колебания. Резонанс

Подадим на вход колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных катушки индуктивности L , конденсатора емкости C и омического сопротивления R (по-

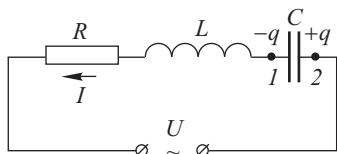


Рис. 8

следовательный колебательный контур) переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$ (рис. 8). В контуре возникнут вынужденные колебания, которые будут происходить в такт с изменением внешнего воздействия, частота вынужденных колебаний будет совпадать с частотой ω внешнего приложенного

напряжения. Наша задача состоит в том, чтобы с помощью закона Ома получить уравнение вынужденных колебаний в последовательном контуре и найти его решения.

Уравнение вынужденных колебаний и его решения. Запишем закон Ома для участка цепи между точками 1 и 2, содержащего катушку L , омическое сопротивление R и клеммы, на которые подается внешнее напряжение U . Поданное на клеммы цепи напряжение $U = U_m \cos \omega t$ следует рассматривать как действующую в контуре ЭДС. Кроме того, в катушке индуктивности за счет изменения силы тока I возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с-и}}$. Закон Ома для рассматриваемого участка цепи 1–2 имеет вид

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{\text{с-и}} + U,$$

где φ_1, φ_2 — значения потенциалов в точках 1 и 2 цепи, равные потенциалам обкладок конденсатора.

Силу тока I и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ можно выразить через заряд конденсатора q :

$$I = \frac{dq}{dt},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}.$$

ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_{\text{с-и}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Подставим выражения для разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с-и}}$, а также зависимость от времени внешнего напряжения U в выражение закона Ома для участка цепи 1–2:

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (3.1)$$

Учтем связь между силой тока I и зарядом конденсатора q : $I = dq/dt$ и, выполнив преобразования, получим из (3.1) *уравнение вынужденных колебаний*:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

Это уравнение можно представить в следующей форме:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t, \quad (3.2)$$

где \dot{q} и \ddot{q} — первая и вторая производные по времени величины заряда q конденсатора, $\beta = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота контура.

Как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$q = q_{m0}e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \delta) + q_m \cos(\omega t - \psi).$$

Здесь первое слагаемое представляет собой затухающее колебание с частотой $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, начальной амплитудой q_{m0} и начальной фазой δ (q_{m0} и δ можно определить из начальных условий). Второе слагаемое — это вынужденное колебание с циклической частотой ω , равной частоте приложенного напряжения, и амплитудой q_m . Вынужденное колебание заряда q отстает по фазе от колебания приложенного напряжения U на величину ψ . Амплитуда вынужденного колебания q_m равна

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.3)$$

Разность фаз колебаний заряда q и внешнего напряжения U определяется выражением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.4)$$

По истечении достаточно продолжительного времени амплитуда затухающего колебания $q_{m0}e^{-\beta t}$ станет малой по сравнению с амплитудой q_m вынужденного колебания, так что слагаемым, соответствующим затухающему колебанию, в решении уравнения вынужденных колебаний можно пренебречь. В этих условиях решение уравнения (3.2) имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (3.5)$$

где величины q_m и ψ определяются формулами (3.3) и (3.4).

Приведенные здесь выражения для q_m и $\operatorname{tg} \psi$ (3.3) и (3.4) аналогичны формулам для амплитуды колебаний координаты тела и тангенса разности фаз колебаний внешней силы и координаты тела при вынужденных механических колебаниях, см. кн. 1 «Механика», § 46, настоящего курса.

Обычно на практике с помощью амперметра и вольтметра измеряют силу тока и напряжение в различных участках цепи, а не величину заряда конденсатора. Получим выражения для силы тока I и напряжений на конденсаторе U_C , катушке U_L и сопротивлении U_R . Кроме того, при описании вынужденных колебаний чаще используют параметр φ — разность фаз колебаний приложенного напряжения U и тока I в контуре, а не величину ψ , равную разности фаз колебаний приложенного напряжения U и заряда q конденсатора.

Сила тока. Найдем силу тока I в контуре, дифференцируя по времени выражение (3.5) для заряда q :

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.6)$$

где $I_m = q_m \omega$ — амплитуда тока, $\varphi = \psi - \pi/2$ — разность фаз колебаний поданного на вход колебательного контура внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ и тока I в контуре.

Амплитуда тока в контуре, выраженная через собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания β , равна

$$I_m = \frac{(U_m / L) \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) получена путем умножения правой части равенства (3.3) на ω .

Выражение для амплитуды тока I_m в контуре через параметры цепи R , L и C имеет вид

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) получена подстановкой в формулу (3.7) выражений $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$.

Разность фаз φ внешнего напряжения и тока определяется через параметр ψ , заданный выражением (3.4)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \psi = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Таким образом, тангенс разности фаз φ колебаний поданного на вход контура напряжения $U = U_m \cos \omega t$ и силы тока в контуре

$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (3.9)$$

Напряжение на конденсаторе. Вычислим напряжение на конденсаторе U_C , используя величину заряда q в соответствии с формулой (3.5):

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.10)$$

где $U_{Cm} = \frac{q_m}{C}$ — амплитуда напряжения на конденсаторе.

Амплитуда напряжения на конденсаторе U_{Cm} , выраженная через собственную частоту контура ω_0 и коэффициент затухания β , равна

$$U_{Cm} = \frac{U_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) получена делением на величину C правой части выражения (3.3) для q_m с учетом равенства $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$.

Выражение для амплитуды напряжения на конденсаторе U_{Cm} через параметры цепи R , L и C получается подстановкой выражений $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$ в формулу (3.11) и имеет вид

$$U_{Cm} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (3.12)$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе U_{Cm} может быть выражена через амплитуду тока, равную $I_m = q_m \omega$:

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (3.13)$$

Колебания напряжения на конденсаторе (3.10) отстают по фазе от колебаний тока в контуре (3.6) на величину $\pi/2$.

Напряжение на катушке индуктивности. Определим напряжение U_L на концах катушки индуктивности, включенной в цепь последовательного колебательного контура (см. рис. 8).

Поскольку катушка индуктивности в рассматриваемом последовательном колебательном контуре является идеальной, то есть ее омическое сопротивление равно нулю, напряжение U_L на катушке равно действующей в ней ЭДС самоиндукции, взятой с противоположным знаком. Действительно, из закона Ома для неоднородного участка цепи, коим в рассматриваемом случае является катушка индуктивности, следует:

$$I \cdot 0 = \varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} + \mathcal{E}_{\text{с-и}},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} U_L = \varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} &= -\mathcal{E}_{\text{с-и}} = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t - \varphi)] = \\ &= -I_m \omega L \sin(\omega t - \varphi) = I_m \omega L \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где U_{Lm} — амплитуда колебаний напряжения на катушке (амплитуда напряжения).

Амплитуда напряжения на катушке, выраженная через амплитуду тока I_m , равна

$$U_{Lm} = I_m \omega L. \quad (3.15)$$

Как следует из (3.15) с учетом (3.7), амплитуда напряжения на катушке, выраженная через собственную частоту контура ω_0 и коэффициент затухания β , имеет вид

$$U_{Lm} = \frac{U_m \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (3.16)$$

Амплитуда напряжения на катушке, выраженная через параметры цепи R , L и C , получается подстановкой выражений $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$ в формулу (3.16) или путем умножения (3.8) на ωL и имеет следующий вид:

$$U_{Lm} = \frac{U_m \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (3.17)$$

Колебания напряжения на катушке (3.14) опережают колебания тока в цепи (3.6) на величину $\pi/2$.

Напряжение на сопротивлении R . Падение напряжения U_R на участке колебательного контура, содержащего сопротивление R , равно, согласно закону Ома, произведению силы тока (3.6) на сопротивление R :

$$U_R = I_m R \cos(\omega t - \varphi). \quad (3.18)$$

Амплитуда напряжения на сопротивлении, выраженная через амплитуду тока, равна

$$U_{Rm} = I_m R. \quad (3.19)$$

Колебания напряжения на сопротивлении (3.18) совпадают по фазе с колебаниями тока (3.6).

Амплитудные и фазовые резонансные кривые. Явление резонанса. Амплитудными резонансными кривыми называют графики зависимости от частоты ω амплитуды тока I_m и амплитуды напряжения на конденсаторе U_{Cm} . Фазовая резонансная кривая — это

график зависимости от частоты ω разности фаз φ между колебаниями внешнего напряжения U и тока I в колебательном контуре.

Зависимость амплитуды U_{Cm} напряжения на конденсаторе от частоты ω , поданного на вход колебательного контура напряжения $U = U_m \cos \omega t$, описывается выражением (3.11). График этой зависимости представлен на рис. 9. Этот график называется *амплитудной резонансной кривой напряжения*. При определенной частоте внешнего напряжения U , которую мы обозначили через ω_{\max} , амплитуда напряжения на конденсаторе достигает наибольшего значения. Положение максимума функции $U_{Cm}(\omega)$, то есть значение ω_{\max} , легко найти, приравняв к нулю производную по ω выражения $[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]$, стоящего под знаком радикала в знаменателе (3.11):

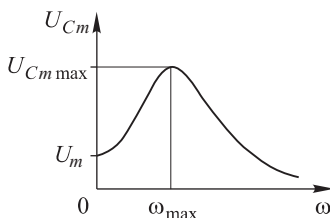


Рис. 9

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (3.20)$$

Как видно из (3.20), частота ω_{\max} отличается от собственной частоты контура ω_0 , однако это отличие не велико в условиях слабого затухания, когда $\beta \ll \omega_0$.

Из формулы (3.11) видно, что если частота внешнего напряжения ω стремиться к нулю, амплитуда напряжения на конденсаторе становится равной амплитуде внешнего напряжения:

$$U_{Cm}(\omega = 0) = U_m.$$

Зависимость амплитуды тока I_m от частоты ω поданного на вход колебательного контура напряжения $U = U_m \cos \omega t$ описывается выражениями (3.7) и (3.8) и представлена на рис. 10. Этот график называется

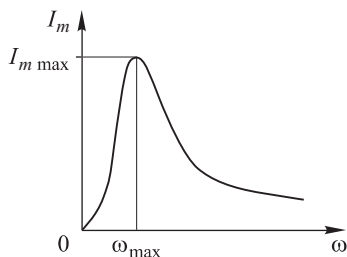


Рис. 10

амплитудной резонансной кривой тока. При определенной частоте внешнего напряжения U , которую мы снова обозначили через ω_{\max} , амплитуда тока в контуре достигает наибольшего значения. Значение частоты ω_{\max} можно найти, приравняв к нулю производную по переменной ω подкоренного выражения $R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2$, стоящего в знаменателе правой части равенства (3.8). В результате найдем, что амплитуда тока в цепи является максимальной, если частота внешнего напряжения ω совпадает с соб-

ственной частотой контура ω_0 .

ственной частотой контура ω_0 :

$$\omega_{\max} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.21)$$

Значение амплитуды тока при $\omega = \omega_{\max}$ равно

$$I_{m \max} = \frac{U_m}{R}. \quad (3.22)$$

Резонансом называется явление, когда при некоторой определенной частоте ω внешнего переменного напряжения U амплитуда тока I_m в колебательном контуре достигает максимального значения. Соответствующая частота ω называется резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$.

Согласно данному определению и с учетом соотношения (3.21) явление резонанса в последовательном колебательном контуре возникает при частоте внешнего напряжения, равной

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_{\max} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Амплитуда тока при резонансе вычисляется по формуле (3.22).

Зависимость от частоты ω тангенса разности фаз φ между внешним напряжением U и током I в контуре описывается выражением (3.9).

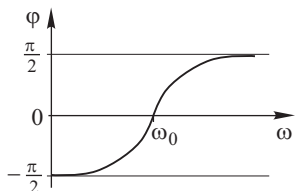


Рис. 11

График зависимости $\varphi(\omega)$, который называется *фазовой резонансной кривой*, представлен на рис. 11. Из (3.9) следует, что в условиях резонанса, когда $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = 0$, разность фаз колебаний внешнего напряжения U и тока I в контуре равна нулю: $\varphi = 0$. Принято говорить, что *в условиях резонанса колебательный контур обладает только активным сопротивлением*.

Таким образом, важной чертой явления резонанса в колебательном контуре является следующая: при резонансе разность фаз φ колебаний поданного на вход контура напряжения U и силы тока I в контуре равна нулю.

§ 4. Векторная диаграмма напряжений

Запишем закон Ома (3.1) для последовательного колебательного контура (см. рис. 8) в следующей форме:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t,$$

или иначе:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t, \quad (4.1)$$

где $U_R = IR$ — падение напряжения на активном сопротивлении кон-

тура, $U_C = \frac{q}{C}$ — напряжение на конденсаторе, $U_L = L \frac{dI}{dt}$ — напряжение на катушке. Равенство (4.1) означает, что в каждый рассматриваемый момент времени сумма напряжений на отдельных элементах контура равна внешнему приложенному напряжению U . Подставив в (4.1) выражения для U_R , U_C и U_L из формул (3.18), (3.10) с учетом (3.13), (3.14) с учетом (3.15), получим

$$I_m R \cos(\omega t - \varphi) + \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + I_m \omega L \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos \omega t. \quad (4.2)$$

Первое слагаемое в левой части полученного уравнения — это колебание напряжения U_R на сопротивлении R , второе слагаемое — колебание напряжения U_C на конденсаторе, третье слагаемое — колебание напряжения U_L на катушке индуктивности. Правая часть уравнения (4.2) представляет собой колебание поданного на вход контура внешнего напряжения U .

Наглядную геометрическую интерпретацию равенств (4.1) и (4.2) позволяет получить метод векторных диаграмм (рис. 12). Каждому колебанию в левой части (4.2) можно поставить в соответствие вектор, длина которого пропорциональна амплитуде колебания; угол между любыми двумя векторами равен разности фаз соответствующих колебаний.

Колебание тока в контуре описывается выражением (3.6): $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. Отложим вектор колебания тока длины I_m вдоль горизонтальной оси, которая называется *осью тока*. Вектор длины $U_{Rm} = I_m R$ колебания напряжения U_R на активном сопротивлении сонаправлен с вектором колебания тока, так как фазы этих колебаний совпадают. Колебание напряжения U_C на конденсаторе отстает по фазе на $\pi/2$ от колебания тока. Следовательно, вектор длины $U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}$ колебания напряжения на конденсаторе повернут на угол $\pi/2$ по часовой стрелке по отношению к горизонтальной оси тока. Колебание напряжения U_L на катушке опережает по фазе на $\pi/2$ колебание тока. Вектор длины $U_{Lm} = I_m \omega L$ колебания напряжения на катушке индуктивности повернут на угол $\pi/2$ против часовой стрелки по отношению к горизонтальной оси тока. Сумма векторов колебаний U_R , U_C и U_L равна вектору колебаний внешнего напряжения U , длина которого равна амплитуде U_m .

Сдвиг по фазе φ между колебаниями внешнего напряжения U и тока I имеет наглядную интерпретацию на диаграмме. Он равен углу

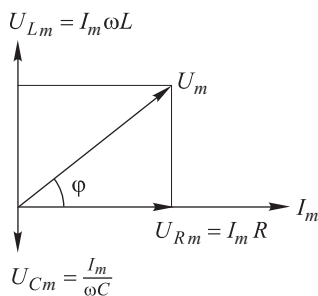


Рис. 12

между осью тока и вектором колебания внешнего напряжения U . Из диаграммы следует, что тангенс угла φ равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_m \omega L - I_m / \omega C}{I_m R} = \frac{\omega L - 1 / \omega C}{R}.$$

Это выражение совпадает с полученной выше формулой (3.9).

Векторная диаграмма колебаний в условиях резонанса представлена на рис. 13. При резонансе, когда $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, амплитуды напряжений на конденсаторе U_{Cm} и на катушке индуктивности U_{Lm} , вычисляемые по формулам (3.13) и (3.15), равны друг другу:

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad U_{Lm} = I_m \omega_0 L = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Соответственно векторы колебаний напряжения на конденсаторе и напряжения на катушке индуктивности, угол между которыми равен π , имеют одинаковую длину: $U_{Cm} = U_{Lm}$. Сумма указанных векторов равна нулю. В этих условиях внешнее напряжение U равно падению напряжения U_R на сопротивлении R , а векторы колебаний внешнего напряжения U и напряжения U_R на сопротивлении R , длины которых U_m и U_{Rm} , совпадают друг с другом (см. рис. 13). Разность фаз колебаний внешнего напряжения U и тока I в контуре равна нулю, $\varphi = 0$.

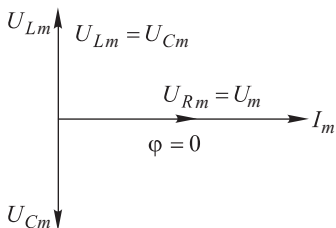


Рис. 13

Таким образом, при резонансе в последовательном контуре колебания напряжения на конденсаторе и на катушке индуктивности имеют одинаковую амплитуду и противоположны по фазе (разность фаз равна π). Соответствующие векторы колебаний равны по длине и противоположны по направлению. В связи с этим явление резонанса в последовательном контуре называют *резонансом напряжений*.

§ 5. Связь добротности с формой резонансных кривых

Предположим, что величина коэффициента затухания β последовательного колебательного контура (см. рис. 8) мала:

$$\beta \ll \omega_0. \quad (5.1)$$

Выясним, как в этих условиях величина добротности контура Q связана с формой амплитудной резонансной кривой. Рассмотрим график зависимости амплитуды напряжения U_{Cm} на конденсаторе, включенном в последовательный колебательный контур, от частоты ω напряжения, поданного на вход контура (см. рис. 9).

Относительная высота максимума амплитудной резонансной кривой. Если выполнено условие $\beta \ll \omega_0$, то частота ω_{\max} , при которой функция $U_{Cm}(\omega)$ достигает наибольшего значения, приблизительно равна собственной частоте контура ω_0 :

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0.$$

В соответствии с (3.11) значение функции $U_{Cm}(\omega)$ в точке максимума при $\omega = \omega_{\max} \approx \omega_0$, равно

$$U_{Cm \max} = U_{Cm}(\omega_0) = \frac{U_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \Big|_{\omega=\omega_0} = U_m \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Согласно (3.11) при стремлении к нулю частоты ω колебаний внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ величина $U_{Cm}(\omega)$ становится равной амплитуде внешнего напряжения U_m :

$$U_{Cm}(\omega = 0) = U_m.$$

Вычислим отношение значений функции $U_{Cm}(\omega)$ в двух точках — в точке максимума при $\omega \approx \omega_0$ и в точке $\omega = 0$:

$$\frac{U_{Cm}(\omega_0)}{U_{Cm}(0)} \approx \frac{U_m \omega_0}{U_m 2\beta} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (5.2)$$

Добротность контура при условии $\beta \ll \omega_0$ приблизительно равна

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega'}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}, \quad (5.3)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0$ — частота затухающих колебаний.

Сравнивая выражения (5.2) и (5.3), найдем

$$\frac{U_{Cm}(\omega_0)}{U_{Cm}(0)} \approx Q. \quad (5.4)$$

Из полученного равенства следует, что добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе $U_{Cm}(\omega)$ в условиях резонанса ($\omega = \omega_{\max} \approx \omega_0$) превышает величину напряжения на конденсаторе при $\omega \approx 0$ (см. рис. 9). Добротность контура Q характеризует относительную высоту максимума амплитудной резонансной кривой.

Если частота ω внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ близка к нулю, $\omega \approx 0$, то на вход колебательного контура подается практически постоянное напряжение величины U_m . Такое же напряжение возникает при этом и на обкладках конденсатора: $U_{Cm}(0) = U_m$. Если же частота ω внешнего напряжения становится близкой к резонансной $\omega \approx \omega_0$, то напряжение на конденсаторе $U_{Cm}(\omega_0)$, согласно (5.4), возрастает приблизительно в Q раз. Таким образом, добротность Q позволяет оценить, во сколько раз за счет явления резонанса в колебательном

контуре можно увеличить амплитуду поданного на вход контура напряжения U_m .

Ширина амплитудной резонансной кривой. Оценим ширину $\Delta\omega$ амплитудной резонансной кривой. Пусть $\Delta\omega$ — это диапазон частот колебаний внешнего напряжения U , границам которого соответствуют значения напряжения на конденсаторе $U_{Cm}(\omega)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше резонансного. Иначе говоря, $\Delta\omega$ — ширина амплитудной резонансной кривой на такой ее высоте, где значения функции $U_{Cm}(\omega)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше ее максимального значения $U_{Cm \max}$ (рис. 14).

Частота ω , при которой амплитуда напряжения на конденсаторе в $\sqrt{2}$ раз меньше максимального резонансного значения, должна удовлетворять условию

$$U_{Cm}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{Cm \max}. \quad (5.5)$$

Используя формулу (3.11) и учитывая, что при резонансе $\omega = \omega_{\text{рез}} = \omega_{\text{max}} \approx \omega_0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{U_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \Big|_{\omega=\omega_0}, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 &= 8\beta^2 \omega_0^2, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= 4\beta^2 (2\omega_0^2 - \omega^2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Сделаем предположение о том, что резонансная кривая является достаточно узкой. Это означает, что величина $|\omega_0 - \omega|$ мала по сравнению с ω_0 :

$$|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0, \quad (5.7)$$

а величина $|\omega_0^2 - \omega^2|$ мала по сравнению с ω_0^2 :

$$|\omega_0^2 - \omega^2| \ll \omega_0^2. \quad (5.8)$$

При определении ширины резонансной кривой разность частот в левой части неравенства (5.7) и разность квадратов частот в ле-

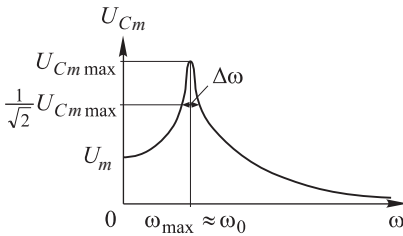


Рис. 14

вой части неравенства (5.8) берется по модулю, поскольку удовлетворяющая уравнению (5.4) частота ω может быть больше или меньше ω_0 (рис. 14).

С учетом (5.8) сомножитель в правой части (5.6) можно представить в виде: $(2\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0^2 + \omega_0^2 - \omega^2) \approx \omega_0^2$, а само равенство (5.6) преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= 4\beta^2 (2\omega_0^2 - \omega^2) \approx 4\beta^2 \omega_0^2, \\ [(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)]^2 &\approx 4\beta^2 \omega_0^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Снова принимая во внимание, что частоты ω и ω_0 близки друг к другу (см. (5.7)), проведем замену:

$$\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0. \quad (5.10)$$

Введем обозначение

$$|\omega_0 - \omega| = \frac{\Delta\omega}{2}, \quad (5.11)$$

подставим (5.10) и (5.11) в равенство (5.9):

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 (2\omega_0)^2 \approx 4\beta^2 \omega_0^2.$$

Отсюда окончательно получим

$$\Delta\omega \approx 2\beta. \quad (5.12)$$

Следовательно, ширина резонансной кривой $\Delta\omega$ приблизительно равна удвоенному коэффициенту затухания β колебательного контура. Чем меньше коэффициент затухания β , тем уже резонансная кривая.

При выводе соотношения (5.12) неоднократно использовалось предположение о том, что резонансная кривая является узкой (см. неравенства (5.7) и (5.8)). Сделанное предположение является оправданным. Действительно, проведенное в настоящем параграфе исследование формы амплитудной резонансной кривой выполнялось в условиях слабого затухания: $\beta \ll \omega_0$ (см. (5.1)). В результате оказалось, что ширина резонансной кривой $\Delta\omega$ по порядку величины равна коэффициенту затухания β : $\Delta\omega \approx 2\beta$ (см. (5.12)). Тогда из (5.1) и (5.12) следует:

$$\Delta\omega \approx 2\beta \ll \omega_0,$$

что совпадает с (5.7), то есть резонансная кривая является достаточно узкой.

В заключение отметим, что отношение резонансной частоты ω_0 к ширине резонансной кривой $\Delta\omega$ приблизительно равно добротности контура Q :

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \approx Q. \quad (5.13)$$

При выводе (5.13) использованы соотношения (5.12) и (5.3).

§ 6. Переменный ток

Переменный ток представляет собой вызванные внешним переменным напряжением вынужденные электрические колебания в цепи, обладающей индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением. Рассматривая переменный ток, удобно использовать понятия индуктивного, емкостного, реактивного и полного сопротивлений электрической цепи или участка цепи. Перечисленные понятия определяются таким образом, чтобы для амплитуды переменного тока I_m на рассматриваемом участке цепи и амплитудного значения переменного

напряжения U_m на концах этого участка выполнялось соотношение, по форме совпадающее с законом Ома. Например, так называемое *полное сопротивление* Z цепи (*импеданс*) — это величина, удовлетворяющая равенству

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad (6.1)$$

где I_m — амплитуда тока в цепи, U_m — амплитуда поданного на вход цепи напряжения.

Равенства, подобные (6.1), в соответствии с определением должны выполняться для индуктивного X_L , емкостного X_C , и реактивного X сопротивлений, если рассматриваемый участок электрической цепи или вся цепь обладает только соответствующим сопротивлением.

Напомним, что если в состав цепи входят последовательно соединенные конденсатор емкости C , катушка индуктивности L и омическое сопротивление R и на вход цепи подано внешнее переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$, то возникнут вынужденные электрические колебания. При этом сила тока в цепи будет изменяться со временем по закону

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Зависимость от циклической частоты ω амплитуды тока I_m описывается выражением

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (6.2)$$

Разность фаз φ между колебаниями внешнего напряжения U и тока I определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (6.3)$$

Чтобы дать определение индуктивного, емкостного, реактивного и полного сопротивлений участка цепи, рассмотрим закономерности протекания переменного тока в простейших цепях.

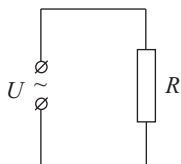


Рис. 15

Переменный ток в цепи, обладающей только активным сопротивлением. Если на вход цепи (рис. 15), обладающей сопротивлением R , подано напряжение $U = U_m \cos \omega t$, и выполнены условия квазистационарности тока, то для вычисления силы тока, можно воспользоваться законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t. \quad (6.4)$$

Из (6.4) следует, что амплитуда тока I_m связана с амплитудой напряжения U_m и сопротивлением R соотношением:

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (6.5)$$

Фазовый сдвиг φ между током и напряжением равен нулю. Векторная диаграмма колебаний тока и напряжения имеет вид, представленный на рис. 16.

Таким образом, при протекании переменного тока в цепи при отсутствии катушек индуктивности и конденсаторов закон Ома выполняется как для мгновенных (6.4), так и для амплитудных

(6.5) значений тока и напряжения. Сопротивление R в цепи переменного тока называется *активным сопротивлением*.

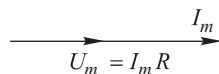


Рис. 16

Переменный ток в цепи, содержащей только катушку индуктивности. Если переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$ подано на вход цепи, в состав которой входит только катушка индуктивности L , не обладающая активным сопротивлением (рис. 17), то амплитуду тока можно вычислить по формуле (6.2), полагая в ней $R = 0$ и $1/C = 0$. Последнее равенство означает, что эффективная емкость цепи, в составе которой отсутствуют конденсаторы и в которой не накапливаются электрические заряды, бесконечно велика. Итак, амплитуда тока в рассматриваемой идеальной катушке равна

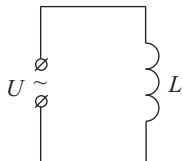


Рис. 17

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (6.6)$$

При $R = 0$ и $1/C = 0$ из (6.3) следует, что $\operatorname{tg} \varphi = +\infty$ и $\varphi = \pi/2$, то есть колебания напряжения на катушке опережают колебания текущего в ней тока на величину $\pi/2$. Соответствующая векторная диаграмма представлена на рис. 18.

Соотношение (6.6), связывающее амплитуду тока и амплитуду внешнего напряжения, формально можно рассматривать как закон Ома для участка цепи, содержащего только идеальную катушку индуктивности. В соответствии с этим вводится понятие индуктивного сопротивления катушки.

Индуктивное сопротивление X_L равно

$$X_L = \omega L, \quad (6.7)$$

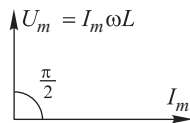


Рис. 18

где L — индуктивность катушки, ω — циклическая частота переменного тока. Единица индуктивного сопротивления *ом* (Ом). Действительно, как следует из определения (6.7):

$$[X_L] = \frac{\Gamma_{\text{н}}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} \frac{\text{В}}{\text{А} \cdot \text{с}^{-1}} = \text{Ом}.$$

Переменный ток в цепи, содержащей только конденсатор. Пусть переменный ток течет по цепи, в составе которой имеется только конденсатор емкости C (рис. 19). На вход подается переменное

напряжение $U = U_m \cos \omega t$. Полагая в формуле (6.2) $R = 0$ и $L = 0$, найдем амплитуду тока I_m :

$$I_m = U_m \omega C. \quad (6.8)$$

Используя (6.3) при условии $R = 0$ и $L = 0$, определим фазовый сдвиг φ между током и напряжением: $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$, $\varphi = -\pi/2$. Следова-

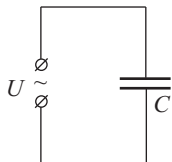


Рис. 19

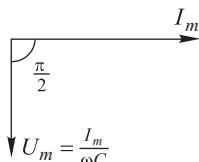


Рис. 20

тельно, колебания тока в цепи, содержащей только конденсатор, опережают по фазе колебания напряжения на конденсаторе на величину $\pi/2$. Соответствующая векторная диаграмма представлена на рис. 20.

Рассматривая (6.8) формально как закон Ома для амплитудных значений тока и напряжения, можно определить емкостное сопротивление конденсатора.

Емкостное сопротивление X_C равно

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (6.9)$$

Единица емкостного сопротивления ом (Ом). Действительно, в соответствии с определением (6.9)

$$[X_C] = \frac{1}{c^{-1} \cdot \Phi} = \frac{1}{c^{-1} \cdot \text{Кл/В}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}.$$

Переменный ток в цепи, содержащей индуктивность и емкость.

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением ($R = 0$). На вход цепи подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$ (рис. 21). При $R = 0$ амплитуда переменного тока I_m , вычисленная по формуле (6.2), равна

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|}. \quad (6.10)$$

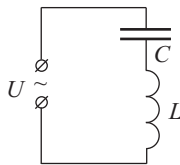


Рис. 21

Разность фаз φ между колебаниями внешнего напряжения и тока определяется соотношением (6.3) и зависит от циклической частоты ω , а именно: если $\omega > 1/\sqrt{LC}$, то $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ и $\varphi = \pi/2$; если $\omega < 1/\sqrt{LC}$, то $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$ и $\varphi = -\pi/2$. Таким образом, при достаточно больших значениях частоты ω колебательный контур по своей фазовой характеристике похож на катушку индуктивности: приложенное напряжение опережает ток на величину $\pi/2$. При низких частотах колебательный контур по своей фазовой характеристике похож на конденсатор: ток в контуре опережает внешнее напряжение на величину $\pi/2$. На рис. 22 приведен

пример векторной диаграммы колебаний в контуре при относительно большой частоте ω : $\omega > 1/\sqrt{LC}$.

Рассматривая соотношение (6.10) как закон Ома, связывающий амплитуды тока и напряжения, можно ввести понятие реактивного сопротивления цепи X .

Реактивным сопротивлением цепи, содержащей конденсатор и катушку индуктивности, называется величина

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (6.11)$$

Единицей реактивного сопротивления являются ом (Ом).

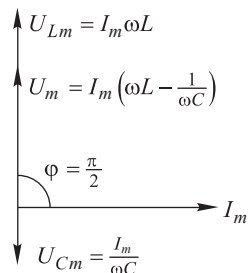


Рис. 22

Полное сопротивление цепи (импеданс). Если на вход последовательного контура, содержащего индуктивность L , емкость C и активное сопротивление R (рис. 23), подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$, амплитуда колебаний тока в цепи, согласно (6.2), равна

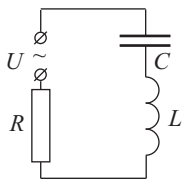


Рис. 23

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}, \quad (6.12)$$

где величина Z — так называемое *полное сопротивление цепи*.

По определению, *полным сопротивлением цепи (импедансом)* называется величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (6.13)$$

где X — реактивное сопротивление.

Если известны полное сопротивление Z цепи и амплитуда внешнего напряжения U_m , соотношение (6.12) позволяет найти амплитуду переменного тока I_m . Разность фаз φ между поданным на вход цепи напряжением и током определяется соотношением (6.3). Пример векторной диаграммы колебаний в последовательном контуре показан на рис. 12.

Мощность переменного тока. Рассмотрим цепь переменного тока, которая представляет собой последовательный колебательный контур (рис. 23). На вход цепи подано напряжение $U = U_m \cos \omega t$, мгновенное значение силы тока равно $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, где φ — разность фаз колебаний напряжения и тока. Мгновенная мощность тока, которую обозначим через P_t , равна произведению мгновенных значений силы тока и напряжения:

$$\begin{aligned} P_t &= IU = I_m \cos(\omega t - \varphi) U_m \cos \omega t = \\ &= \frac{1}{2} I_m U_m \cos(2\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi. \end{aligned}$$

Практический интерес представляет не мгновенное, а среднее за достаточно большой промежуток времени значение мощности тока. В полученном выражении для мгновенной мощности тока P_t от времени зависит только первое слагаемое. Среднее по времени значение мощности тока P равно

$$\begin{aligned} P &= \left\langle \frac{1}{2} I_m U_m \cos (2\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2} I_m U_m \cos (2\omega t - \varphi) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} I_m U_m \left\langle \cos (2\omega t - \varphi) \right\rangle + \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi. \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что среднее за период $T = \pi/\omega$ (а также за большой по сравнению с периодом промежуток времени) значение функции $\cos (2\omega t - \varphi)$ равно нулю.

Итак, среднее по времени значение мощности переменного тока равно

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi, \quad (6.14)$$

где I_m и U_m — амплитуды тока и напряжения, φ — разность фаз между колебаниями напряжения на входе цепи и текущего по ней тока.

Используя выражение (3.9) для тангенса разности фаз φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R},$$

вычислим $\cos \varphi$:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (X/R)^2}}, \quad (6.15) \end{aligned}$$

где X — реактивное сопротивление цепи.

Из (6.15) следует, что чем больше реактивное сопротивление X по сравнению с активным сопротивлением R , тем меньше величина $\cos \varphi$ и, следовательно, меньше поступающая в цепь мощность тока P (см. (6.14)). Отсюда следует практически важный вывод: чтобы увеличить эффективность передачи электроэнергии от источника к потребителю по проводам на большие расстояния, необходимо стремиться к относительному уменьшению реактивного сопротивления X линий электропередачи.

Учитывая, что произведение $U_m \cos \varphi$ равно амплитуде напряжения на активном сопротивлении R , а именно: $U_m \cos \varphi = U_{Rm} = I_m R$ (см. векторную диаграмму на рис. 12), выражение (6.14) для мощности

переменного тока можно представить в следующей форме:

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = \frac{1}{2} I_m^2 R. \quad (6.16)$$

Действующим (эффективным) значением силы тока $I_{\text{эф}}$ называется величина, равная

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (6.17)$$

Мощность переменного тока, выраженная через величину $I_{\text{эф}}$, равна

$$P = I_{\text{эф}}^2 R. \quad (6.18)$$

Равенство (6.18) формально совпадает с выражением для мощности P постоянного тока силой $I_{\text{эф}}$ на участке цепи, сопротивление которого равно R . Из сравнения (6.16) и (6.18) следует, что действующее значение силы тока $I_{\text{эф}}$ равно силе такого постоянного тока, мощность которого равна мощности переменного тока, причем постоянный ток должен течь по проводнику с сопротивлением R , равным омическому сопротивлению цепи переменного тока.

В электротехнике в общем случае произвольного периодически зависящего от времени тока силой $I = I(t)$, текущего по цепи с сопротивлением R , действующее или эффективное значение силы тока $I_{\text{эф}}$ определяется из соотношения

$$I_{\text{эф}}^2 R = (I(t)^2)_{\text{ср}} R = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)^2 R dt, \quad (6.19)$$

или

$$I_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)^2 dt$$

где T — период колебаний тока. Соотношение (6.19) подразумевает равенство мощности постоянного тока силой $I_{\text{эф}}$ и средней мощности переменного тока силой $I(t)$. В случае синусоидального тока из (6.19) вытекает определенное выше формулой (6.17) действующее значение силы тока.

Действующим (эффективным) значением напряжения в рассматриваемом случае синусоидального внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ называется величина, равная:

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (6.20)$$

С учетом определений (6.17) и (6.20) действующих значений силы тока и напряжения среднюю мощность переменного тока (6.16) можно выразить формулой:

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi. \quad (6.21)$$

В электротехнике в общем случае произвольного периодически зависящего от времени напряжения $U = U(t)$, поданного на вход элек-

трической цепи с сопротивлением R , эффективное значение напряжения $U_{\text{эф}}$ определяется из соотношения

$$\frac{U_{\text{эф}}^2}{R} = \frac{(U(t)^2)_{\text{ср}}}{R} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U(t)^2}{R} dt, \quad (6.22)$$

или

$$U_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)^2 dt.$$

где T — период колебаний напряжения. Соотношение (6.22) подразумевает равенство на участке цепи с сопротивлением R мощности постоянного тока, выраженного через напряжение $U_{\text{эф}}$, и средней мощности переменного тока, вычисляемой через напряжение $U(t)$. В случае синусоидального напряжения из (6.22) вытекает определенное выше формулой (6.20) эффективное значение напряжения.

§ 7. Вынужденные колебания в параллельном контуре

Рассмотрим вынужденные колебания в так называемом *параллельном колебательном контуре*, одна из возможных схем которого представлена на рис. 24. В этой схеме конденсатор емкости C подключен параллельно с последовательно соединенными между собой катушкой индуктивности L и активным сопротивлением R . На вход контура подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$. Обозначим силу тока в подводящих проводах через I_0 ; силу тока на участке цепи, содержащем конденсатор, через I_1 ; силу тока на участке цепи, содержащем катушку индуктивности, через I_2 . Найдем, чему равны амплитуды и фазы токов I_0, I_1, I_2 и полное сопротивление рассматриваемой цепи.

Применим к каждому из двух параллельно включенных участков рассматриваемой цепи — участку, в состав которого входит только конденсатор C и по которому течет ток силой I_1 , и участку, в состав которого входят катушка индуктивности L и сопротивление R и по которому течет ток силой I_2 , — формулы (6.2) и (6.3), позволяющие вычислить амплитуду тока и разность фаз колебаний внешнего напряжения и тока.

Участок, содержащий катушку индуктивности L и сопротивление R , можно рассматривать как последовательный контур, в котором отсутствует конденсатор (электроемкость бесконечно велика,

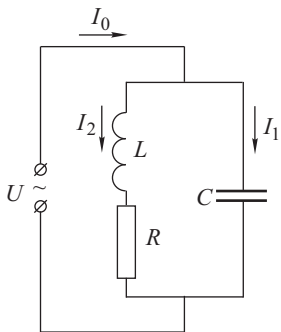


Рис. 24

$1/C_{\text{уч}} = 0$), на вход которого подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$. С учетом (6.2) и (6.3) получаем:

$$I_2 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad (7.1)$$

Причем ток I_2 отстает по фазе от внешнего напряжения на величину φ , определяемую равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (7.2)$$

Участок, содержащий только конденсатор C , можно рассматривать как последовательный контур, активное сопротивление и индуктивность которого равны нулю, на вход которого подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$. С учетом (6.2) и (6.3) для этого участка получаем

$$I_1 = U_m \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.3)$$

Здесь учтено, что разность фаз φ между поданным на вход участка напряжением U и током I_1 в соответствии с (6.3) составляет величину $(-\pi/2)$, то есть колебания тока I_1 опережают по фазе колебания внешнего напряжения U на $\pi/2$.

Ток I_0 в подводящих проводах равен сумме токов I_1 и I_2 , определяемых по формулам (7.1) и (7.3). Для вычисления I_0 сложим колебания (7.1) и (7.3) с помощью векторной диаграммы токов (рис. 25).

По горизонтальной оси отложим вектор длины U_m колебания внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$, которое одинаково для обоих рассматриваемых участков. Поскольку ток I_1 опережает по фазе на $\pi/2$ напряжение U (см. (7.3)), вектор колебания тока I_1 , имеющий длину $I_{m1} = U_m \omega C$, повернут на угол $\pi/2$ против часовой стрелки относительно вектора U_m . Поскольку ток I_2 отстает по фазе от напряжения U на величину φ , определяемую выражением

(7.2), вектор колебания тока I_2 , имеющий длину $I_{m2} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$,

повернут на угол φ по часовой стрелке относительно вектора U_m . Из диаграммы следует, что вектор колебания тока I_0 в подводящих проводах составляет с вектором колебания внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ некоторый угол φ_0 , численно равный разности фаз колебаний тока I_0 и напряжения U .

Резонанс в параллельном колебательном контуре представляет собой явление, когда при некоторой определенной частоте $\omega_{\text{рез}}$ поданного на вход контура напряжения $U = U_m \cos \omega t$ разность фаз φ_0

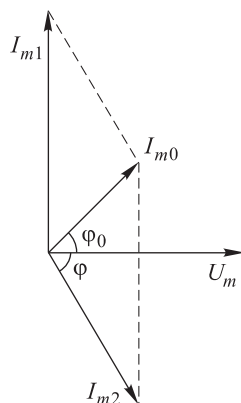


Рис. 25

колебаний напряжения U и тока I_0 в подводящих проводах равна нулю. Таким образом, в условиях резонанса контур обладает только активным сопротивлением.

Резонанс в параллельном контуре характеризуется следующими особенностями. В условиях резонанса амплитуда тока $I_{\text{рез}0}$ в подводящих проводах принимает наименьшее значение по сравнению с амплитудой этого тока I_0 при любых значениях частоты ω , отличных от резонансной. Соответственно, полное сопротивление параллельного контура в условиях резонанса $Z_{\text{рез}}$ максимально. Указанные особенности будут проиллюстрированы ниже на примере резонанса в идеальном параллельном контуре, то есть при условии $R = 0$.

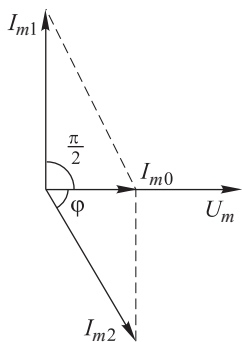


Рис. 26

Найдем резонансную частоту контура, показанного на рис. 24. При резонансе угол φ_0 между векторами колебаний тока I_0 и напряжения U по определению равен нулю. Соответствующая векторная диаграмма представлена на рис. 26. Из рисунка видно, что в условиях резонанса угол φ (разность фаз колебаний напряжения U и тока I_2) удовлетворяет условию

$$\sin \varphi = \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{U_m \omega C}{U_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \omega C \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}. \quad (7.4)$$

С другой стороны, величину $\sin \varphi$ можно выразить через величину $\operatorname{tg} \varphi$, определяемую выражением (7.2):

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (7.5)$$

Приравняв правые части равенств (7.4) и (7.5):

$$\omega C \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Решив полученное уравнение относительно ω , найдем резонансную частоту параллельного контура:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (7.6)$$

Если активное сопротивление R достаточно мало ($R \ll L/C$), то, как следует из (7.6), резонансная частота параллельного контура приблизительно равна

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то есть совпадает с собственной частотой ω_0 последовательного колебательного контура.

Из векторной диаграммы на рис. 26 следует, что амплитуда тока I_{m0} в подводящих проводах в условиях резонанса равна

$$I_{m0} = I_{m2} \cos \varphi. \quad (7.7)$$

Выразим $\cos \varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$ с помощью выражения (7.2):

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Подставив в равенство (7.7) сначала полученное выражение для $\cos \varphi$ и амплитуду тока $I_{m2} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ из (7.1), а затем значение резонансной частоты $\omega_{\text{рез}}$ из (7.6), получим

$$\begin{aligned} I_{m0 \text{ рез}} &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \\ I_{m0 \text{ рез}} &= \frac{U_m R}{R^2 + \omega_{\text{рез}}^2 L^2} = \frac{U_m R C}{L}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Равенство (7.8) позволяет вычислить величину тока в подводящих проводах параллельного контура в условиях резонанса.

Рассматривая формально равенство (7.8) как закон Ома, связывающий между собой амплитуды тока в подводящих проводах $I_{m0 \text{ рез}}$ и приложенного к контуру напряжения U_m , найдем полное сопротивление параллельного контура при резонансе:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{U_m}{I_{m0}} = \frac{L}{RC}. \quad (7.9)$$

Как указывалось выше, в условиях резонанса в параллельном контуре разность фаз колебаний внешнего напряжения U и тока I_0 в подводящих проводах равна нулю: $\varphi_0 = 0$ (см. рисунки 25 и 26), то есть контур обладает только активным сопротивлением. Теперь величина этого сопротивления $Z_{\text{рез}}$ найдена, оно вычисляется с помощью формулы (7.9). Интересно отметить, что полное сопротивление $Z_{\text{рез}}$, которое представляет собой чисто активное сопротивление, не равно омическому сопротивлению R контура.

Резонанс в идеальном параллельном контуре. Рассмотрим резонанс в идеальном параллельном контуре, то есть в контуре, активное сопротивление которого равно нулю: $R = 0$.

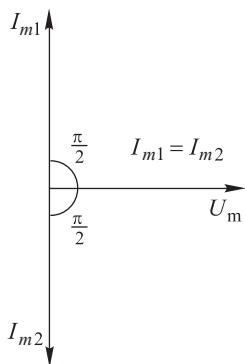
В этом случае в соответствии с (7.6) резонансная частота равна:

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Амплитуды токов I_{m1} и I_{m2} равны между собой (ср. амплитуды токов в формулах (7.1) и (7.3) при $R = 0$ и $\omega = \omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$):

$$\begin{aligned} I_{m2} &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}, \\ I_{m1} &= U_m \omega C = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}, \\ I_{m1} &= I_{m2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

В соответствии с (7.2) при условии $R = 0$ имеем: $\text{tg } \varphi = \infty$, $\varphi = \pi/2$, то есть колебания тока I_2 отстают по фазе от колебания внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ на величину $\pi/2$. С учетом этого обстоятельства, как следует из (7.1) и (7.3), разность фаз колебаний токов I_1 и I_2 равна π .



Таким образом показано, что в условиях резонанса в идеальном параллельном контуре колебания токов I_1 и I_2 , текущих по параллельным участкам, равны друг другу по амплитуде (см. (7.10)) и происходят в противофазе. Векторы соответствующих колебаний равны друг другу по модулю и противоположны по направлению (рис. 27). В связи с изложенным явление резонанса в параллельном контуре называют *резонансом токов*.

Рис. 27

Как следует из формулы (7.8) при $R = 0$, в условиях резонанса сила тока I_0 в подводящих проводах идеального параллельного контура становится равной нулю. При этом полное сопротивление контура $Z_{\text{рез}}$ стремится к бесконечности (см. (7.9)).

§ 8. Метод комплексных амплитуд

Пусть некоторая физическая величина, например, поданное на вход колебательного контура напряжение U , изменяется с течением времени по гармоническому закону, то есть представляет собой гармоническое колебание:

$$U = U_m \cos(\omega t + \alpha),$$

где U_m — амплитуда колебания, ω — циклическая частота, α — начальная фаза.

Каждое гармоническое колебание может быть представлено в комплексной форме. Это означает что вещественной гармонической функции U ставится в соответствие комплексная функция времени следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_m [\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= U_m e^{i(\omega t + \alpha)} = U_m e^{i\alpha} e^{i\omega t} = \bar{U}_m e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где величина $\overline{U}_m = U_m e^{i\alpha}$ называется *комплексной амплитудой колебания* (в данном случае это комплексная амплитуда напряжения).

Если комплексная функция \overline{U} известна, то напряжение U можно вычислить как вещественную часть этой функции:

$$U = \operatorname{Re} \overline{U}.$$

Комплексная амплитуда физической изменяющейся по гармоническому закону величины обладает следующими свойствами.

1. Модуль комплексной амплитуды равен вещественной амплитуде колебания физической величины:

$$\operatorname{mod} \overline{U}_m = \operatorname{mod} (U_m e^{i\alpha}) = U_m.$$

2. Аргумент комплексной амплитуды равен начальной фазе соответствующего колебания:

$$\arg \overline{U}_m = \arg (U_m e^{i\alpha}) = \alpha.$$

Рассмотрим произвольный участок цепи переменного тока, в состав которого могут входить конденсаторы, катушки индуктивности, резисторы в любой комбинации. Пусть напряжение на концах участка равно

$$U = U_m \cos(\omega t + \alpha),$$

а зависимость от времени силы тока, текущего по участку, описывается функцией

$$I = I_m \cos(\omega t + \beta).$$

Представим колебания напряжения и тока в комплексной форме:

$$\overline{U} = \overline{U}_m e^{i\omega t},$$

где $\overline{U}_m = U_m e^{i\alpha}$ — комплексная амплитуда напряжения;

$$I = \overline{I}_m e^{i\omega t},$$

где $\overline{I}_m = I_m e^{i\beta}$ — комплексная амплитуда тока.

Комплексным сопротивлением \overline{Z} участка цепи переменного тока называется величина, равная отношению комплексных амплитуд напряжения и тока на этом участке:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_m}{\overline{I}_m}. \quad (8.2)$$

Комплексное сопротивление обладает следующими свойствами.

1. Модуль комплексного сопротивления \overline{Z} представляет собой полное сопротивление Z участка цепи, которое равно отношению амплитуд напряжения и тока на участке (определение полного сопротивления см. в § 6):

$$Z = \operatorname{mod} \overline{Z} = \operatorname{mod} \frac{U_m e^{i\alpha}}{I_m e^{i\beta}} = \operatorname{mod} \frac{U_m}{I_m} e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{U_m}{I_m}.$$

2. Аргумент комплексного сопротивления φ равен разности фаз α и β колебаний напряжения и тока на участке:

$$\varphi = \arg \bar{Z} = \arg \frac{U_m}{I_m} e^{i(\alpha-\beta)} = \alpha - \beta.$$

Величина φ показывает, на сколько колебания тока отстают по фазе от колебаний приложенного к концам участка напряжения.

Определим величину комплексного сопротивления для трех элементов цепи переменного тока — конденсатора емкости C , катушки индуктивности L и сопротивления R .

Комплексное сопротивление конденсатора. Пусть к концам участка цепи, содержащего только конденсатор емкости C , приложено напряжение: $U = U_m \cos \omega t$. Амплитуда тока с учетом величины емкостного сопротивления $X_C = \frac{1}{\omega C}$ (6.9) равна: $I_m = \frac{U_m}{X_C} = U_m \omega C$. Ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$. Поэтому сила тока на участке описывается выражением: $I = U_m \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$. Комплексные амплитуды напряжения и тока равны: $\bar{U}_m = U_m$; $\bar{I}_m = U_m \omega C e^{i\pi/2}$. Вычислим комплексное сопротивление участка:

$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{U}_m}{\bar{I}_m} = \frac{U_m}{U_m \omega C e^{i\pi/2}} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} = -\frac{i}{\omega C}.$$

Комплексное сопротивление конденсатора емкости C , через который течет переменный ток с циклической частотой ω , равно

$$\bar{Z}_C = -\frac{i}{\omega C}. \quad (8.3)$$

Комплексное сопротивление катушки индуктивности. Пусть к концам участка цепи, содержащего только катушку индуктивности L , приложено переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$. Амплитуда тока с учетом величины индуктивного сопротивления катушки $X_L = \omega L$ (6.9) равна: $I_m = \frac{U_m}{X_L} = \frac{U_m}{\omega L}$. Ток отстает по фазе от напряжения на катушке на величину $\pi/2$. Поэтому сила тока описывается выражением: $I = I_m \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$. Комплексные амплитуды напряжения и тока равны: $\bar{U}_m = U_m$; $\bar{I}_m = \frac{U_m}{\omega L} e^{-i\pi/2}$. Вычислим комплексное сопротивление участка:

$$\bar{Z}_L = \frac{\bar{U}_m}{\bar{I}_m} = \frac{U_m}{U_m \omega L e^{-i\pi/2}} = \omega L e^{i\pi/2} = i\omega L.$$

Комплексное сопротивление катушки индуктивности L , по которой течет переменный ток с циклической частотой ω , равно:

$$\bar{Z}_L = i\omega L. \quad (8.4)$$

Комплексное сопротивление участка цепи, не содержащего индуктивности и емкости. Пусть участок цепи переменного тока содержит только сопротивление R . По участку течет ток $I = I_m \cos \omega t$; к концам участка приложено напряжение $U = U_m \cos \omega t$. Фазы колебаний тока и напряжения совпадают. Комплексные амплитуды тока и напряжения равны вещественным амплитудам I_m и U_m тока и напряжения соответственно. Комплексное сопротивление такого участка равно:

$$\bar{Z}_R = \frac{\bar{U}_m}{\bar{I}_m} = \frac{U_m}{I_m} = R. \quad (8.5)$$

Комплексное сопротивление участка совпадает с активным сопротивлением R .

Расчет комплексных сопротивлений сложных цепей. Вновь обратимся к вещественным параметрам электрических цепей — сопротивлению R , напряжению U и силе тока I . Сопротивление R однородного участка цепи определяется через закон Ома: величина R равна отношению приложенного к концам участка напряжения U и силы тока I в цепи:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (8.6)$$

Используя закон Ома можно доказать, что при последовательном соединении проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их сопротивления складываются, так что величина эквивалентного сопротивления цепи равна сумме сопротивлений каждого из проводников: $R_{\text{экв}} = R_1 + R_2$; при параллельном соединении проводников складываются величины, обратные сопротивлениям, так что эквивалентное сопротивление участка, содержащего параллельно включенные сопротивления R_1 и R_2 , находится из соотношения:

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Определение комплексного сопротивления \bar{Z} участка цепи переменного тока (см. (8.2)) по форме совпадает с законом Ома (8.6) для однородного участка цепи постоянного тока. Поэтому можно утверждать, что комплексные сопротивления цепей переменного тока подчиняются закону Ома, в уравнение которого входят комплексные амплитуды напряжения и тока. Следовательно, правила расчета эквивалентных сопротивлений в цепях постоянного тока, которые выводятся с помощью закона Ома, применимы и для расчета цепей переменного тока.

Если два участка цепи с комплексными сопротивлениями \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 включены параллельно (рис. 28), то для вычисления эквивалентного комплексного сопротивления \bar{Z} нужно сложить величины, обратные комплексным сопротивлениям каждого участка:

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}. \quad (8.7)$$

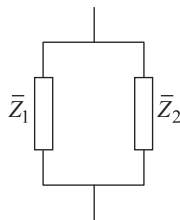


Рис. 28

Если участки цепи с комплексными сопротивлениями \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 включены последовательно (рис. 29), то эквивалентное комплексное сопротивление цепи равно сумме комплексных сопротивлений каждого из участков:



$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2. \quad (8.8)$$

Рис. 29

Таким образом, смысл введения комплексных сопротивлений состоит в следующем. При расчете комплексного сопротивления сложной цепи переменного тока, содержащей катушки индуктивности, конденсаторы, сопротивления, можно пользоваться простыми приемами вычисления эквивалентных сопротивлений, разработанными для цепей постоянного тока. Зная комплексное сопротивление \bar{Z} сложной цепи, можно вычислить: а) полное сопротивление z этой цепи ($z = \text{mod } \bar{Z}$); б) разность фаз φ между током в цепи и приложенным напряжением ($\varphi = \arg \bar{Z}$).

Пример 1. В качестве примера рассчитаем комплексное сопротивление последовательного колебательного контура, в состав которого входят конденсатор емкости C , катушка индуктивности L и сопротивление R (см. рис. 8). На вход контура подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$. Так как элементы соединены последовательно, комплексное сопротивление цепи равно сумме комплексных сопротивлений каждого элемента:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_C + \bar{Z}_L + \bar{Z}_R = -\frac{i}{\omega C} + i\omega L + R = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (8.9)$$

Полное сопротивление контура равно модулю комплексного сопротивления:

$$Z = \text{mod } \bar{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (8.10)$$

Фазовый сдвиг φ между колебаниями приложенного напряжения и тока в цепи вычисляется как аргумент комплексного сопротивления:

$$\varphi = \arg \bar{Z} = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (8.11)$$

Величины полного сопротивления Z последовательного контура и разности фаз φ между током и напряжением, вычисленные двумя способами — методом комплексных сопротивлений (8.11), (8.11) и методом векторных диаграмм (3.8), (3.9) — совпадают между собой.

Найдем резонансную частоту последовательного контура. В условиях резонанса сдвиг по фазе между током в цепи и внешним напряжением равен нулю, то есть цепь представляет собой чисто активное сопротивление. Это означает, что мнимая часть комплексного сопротивления \bar{Z} в выражении (8.6) должна быть равна нулю:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Из этого равенства определяется резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

величина которой также совпадает с ранее найденным значением (3.21).

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим параллельный колебательный контур, на вход которого подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$ (рис. 30). Цепь содержит в своем составе два участка, включенных параллельно друг другу. Один участок представляет собой конденсатор емкости C , комплексное сопротивление этого участка равно

$$\bar{Z}_1 = -\frac{i}{\omega C}.$$

Второй участок содержит последовательно соединенные катушку индуктивности L и сопротивление R . Комплексное сопротивление второго участка равно

$$\bar{Z}_2 = i\omega L + R.$$

Комплексное сопротивление контура \bar{Z} равно эквивалентному сопротивлению двух параллельно включенных участков цепи с сопротивлениями \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 :

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{-(i/\omega C)(R + i\omega L)}{-i/\omega C + R + i\omega L} = \\ &= \frac{-(i/\omega C)(R + i\omega L)}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{-(i/\omega C)(R + i\omega L)[R - i(\omega L - 1/\omega C)]}{[R + i(\omega L - 1/\omega C)][R - i(\omega L - 1/\omega C)]} = \\ &= \frac{R/(\omega^2 C^2) - (i/\omega C)(R^2 + \omega^2 L^2 - L/C)}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Найдем резонансную частоту параллельного контура. В условиях резонанса контур представляет собой чисто активное сопротивление. Следовательно, мнимая часть комплексного сопротивления (8.12) при резонансе должна быть равна нулю: $\text{Im } \bar{z} = 0$. Для этого достаточно выполнения равенства:

$$R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{L}{C} = 0, \quad (8.13)$$

из которого легко определить значение резонансной частоты:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (8.14)$$

Оно совпадает с полученной ранее методом векторных диаграмм величиной (7.6).

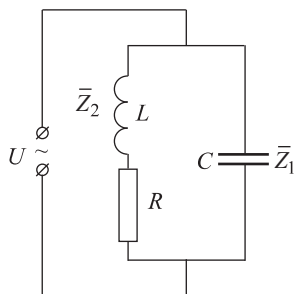


Рис. 30

Полное сопротивление контура при резонансе $Z_{\text{рез}}$ равно действительной части выражения (8.12), при этом выполняется условие (8.13). Найдем $Z_{\text{рез}}$, используя в процессе вычислений равенства (8.13) и (8.14):

$$\begin{aligned} Z_{\text{рез}} = \operatorname{Re} \bar{Z} &= \frac{R/\omega^2 C^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \\ &= \frac{R}{\omega^2 C^2 (R^2 + \omega^2 L^2 - L/C - L/C + 1/\omega^2 C^2)} = \\ &= \frac{R}{1 - \omega^2 LC} = \frac{R}{1 - (1/LC - R^2/L^2)LC} = \frac{L}{RC}. \end{aligned}$$

Полученное резонансное сопротивление совпадает с ранее найденной величиной (см. (7.9)).

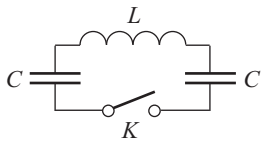
Вычислив модуль правой части выражения (8.12), можно найти значение полного сопротивления цепи Z не только при резонансе, но и при любом значении частоты ω . Аргумент правой части выражения (8.12) равен разности фаз φ между колебаниями внешнего напряжения и полного тока в подводящих проводах параллельного контура.

Рассмотренные примеры иллюстрируют эффективность метода комплексных амплитуд и комплексных сопротивлений при расчете цепей переменного тока.

Задачи

1.1. В контуре, состоящем из конденсатора емкости C и катушки с индуктивностью L , совершаются свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда напряжения на конденсаторе равна U_m . Найти связь между током I в контуре и напряжением U на конденсаторе.

1.2. В контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением, происходят колебания с энергией W . Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в η раз. Какую работу совершили при этом против электрических сил?



К задаче 1.3

1.3. Электрическая цепь имеет пренебрежимо малое активное сопротивление (см. рисунок). Левый конденсатор зарядили до напряжения U_0 и затем — в момент $t = 0$ — замкнули ключ K . Найти зависимость от времени t напряжений на обоих конденсаторах.

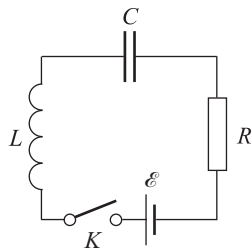
1.4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C . Сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало. Катушка находится в постоянном магнитном поле, так что суммарный магнитный поток, пронизывающий все витки катушки, равен Φ . В момент $t = 0$ магнитное поле выключили. Считая время выключения очень малым по сравнению с периодом

собственных колебаний контура, найти ток в контуре как функцию времени t .

1.5. Катушка индуктивности L соединяет верхние концы двух вертикальных медных шин, отстоящих друг от друга на расстоянии l . Вдоль шин падает без начальной скорости горизонтальный проводник-перемычка массы m (без нарушения контакта с шинами). Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости шин. Найти закон движения проводника $x(t)$. Сопротивление всех проводников пренебрежимо мало.

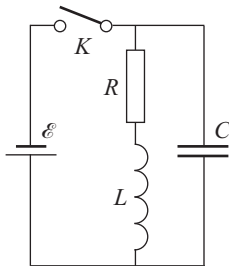
1.6. В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются незатухающие колебания силы тока $I = I_m \cos \omega t$, где $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Катушкой индуктивности служит длинная проволочная цилиндрическая спираль. Как изменятся частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент времени $t = 0$ очень быстро (в течение времени, малого по сравнению с периодом колебаний) растянуть спираль до удвоенной длины? Объяснить, почему при этом меняется энергия колебаний.

1.7. К колебательному контуру, который состоит из катушки индуктивности L , конденсатора емкости C , сопротивления R и характеризуется малым затуханием (см. рисунок), в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС \mathcal{E} с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Определить зависимость от времени напряжения U на конденсаторе. На какое минимальное напряжение должен быть рассчитан конденсатор?



К задаче 1.7

1.8. После размыкания ключа в контуре, содержащем катушку индуктивности, конденсатор, омическое сопротивление и источник тока, возникают медленно затухающие колебания, максимальная амплитуда напряжения которых в $n = 100$ раз превосходит напряжение источника. Найти собственную частоту контура ω_0 , если уменьшение амплитуды колебаний в e раз происходит за время $\tau = 0,1$ с.

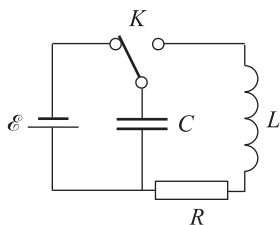


К задаче 1.8

1.9. Найти добротность контура с конденсатором емкости $C = 2,0$ мкФ и катушкой индуктивности $L = 5,0$ мГн, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 1,0$ В необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle = = 0,10$ Вт. Затухание считать малым.

1.10. Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой, емкость конденсатора C , его активное сопротивление R , индуктивность катушки L . Сопротивление катушки и проводов пренебрежимо мало. Найти: а) частоту затухающих колебаний такого контура; б) его добротность.

1.11. В последовательном колебательном контуре с малым затуханием, содержащем катушку индуктивности, конденсатор, омическое сопротивление, одновременно увеличивают емкость конденсатора и индуктивность катушки в одно и то же число раз n . Увеличение



К задаче 1.12

производится в произвольный момент в течение времени, малого по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти соотношение между амплитудами тока в контуре I_1 и I_2 до и после изменения его параметров.

1.12. Конденсатор емкостью $C = 0,1$ мкФ, подключенный к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 1$ кВ, в момент времени $t = 0$ замыкается с помощью ключа K на катушку индуктивности $L = 100$ мГн и сопротивление

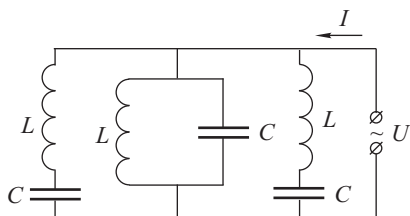
равное критическому для образовавшегося контура (см. рисунок). Определить время, за которое ток достигнет максимального значения, и вычислить это значение.

1.13. Цепь из последовательно соединенных конденсатора емкости C , сопротивления R и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением подключена к генератору синусоидального напряжения, частоту которого можно менять при постоянной амплитуде. Найти частоту, при которой максимальна амплитуда напряжения на катушке.

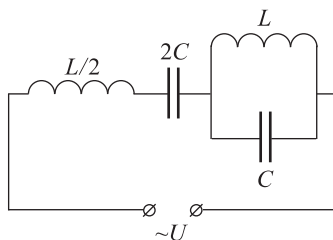
1.14. Найти добротность колебательного контура, в который последовательно включен источник переменной ЭДС, если при резонансе напряжение на конденсаторе в n раз превышает напряжение на источнике.

1.15. Цепь переменного тока, состоящая из последовательно соединенных катушки и конденсатора, подключена к источнику переменной ЭДС, причем индуктивность катушки подобрана так, что ток в цепи максимален. Найти добротность системы, если известно, что при увеличении индуктивности в n раз ток в цепи уменьшается в η раз.

1.16. Для схемы, изображенной на рисунке, определить частоты подаваемого на вход переменного напряжения, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока I относительно напряжения U в зависимости от частоты источника.



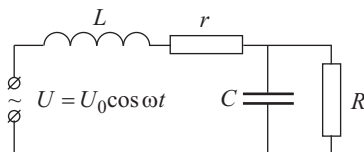
К задаче 1.16



К задаче 1.17

1.17. Для схемы, изображенной на рисунке, определить частоты подаваемого на вход переменного напряжения, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока I относительно напряжения U в зависимости от частоты источника.

1.18. В цепи переменного тока, показанной на рисунке, определить: 1) сдвиг фазы между напряжением на конденсаторе и током через сопротивление R ; 2) сдвиг фазы между током через конденсатор и током через сопротивление R ; 3) сдвиг фазы между напряжением на сопротивлении R и напряжением U , подаваемым на вход цепи.



К задаче 1.18

ГЛАВА II

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

§ 9. Волновое уравнение и его решения

Атомы и молекулы всякого вещества — жидкого, твердого, газообразного — находятся в состоянии непрерывного хаотического теплового движения. Характер теплового движения зависит от агрегатного состояния вещества. Так, тепловое движение частиц твердой среды представляет собой колебания вблизи положений равновесия. Молекулы жидкости большую часть времени находятся вблизи того или иного равновесного положения, совершая тепловые колебания, но время от времени скачкообразно перемещаются из одного равновесного положения в другое. Молекулы газа, средние расстояния между которыми велики, участвуют в поступательном движении, перемещаясь по всему заполненному газом объему, беспорядочно меняя направление движения в результате столкновений друг с другом и со стенками сосуда. Во всех случаях общей особенностью теплового движения частиц вещества является его хаотичность, которая подразумевает, что не существует выделенного (преимущественного) направления движения частиц, при этом движения различных частиц никак не согласованы между собой.

Существуют различные способы вызвать согласованное колебательное движение частиц вещества. Именно так обстоит дело при распространении звука в твердой, жидкой или газообразной среде. Например, колебания упругой мембраны громкоговорителя или голосовых связок человека порождают согласованное колебательное движение расположенных рядом с источником звука молекул воздуха. Возникают сменяющие друг друга состояния сжатия и разрежения газовой среды, которые передаются в другие области заполненного воздухом объема. Говорят, что в воздухе распространяется звуковая волна.

Ниже в этой главе мы будем полагать следующее. Мельчайшие структурные единицы вещества (атомы, молекулы, ионы и т. д.) расположены настолько близко друг к другу, что среду можно считать сплошной, непрерывной, а именно: в любом элементарном объеме содержится огромное количество структурных единиц вещества (так называемый *физически бесконечно малый объем*), а в любой произвольно выбранной точке заполненного веществом пространства обязательно имеется частица вещества (не заполненные веществом промежутки отсутствуют). Среда является упругой: она оказывает сопротивление растяжению и сжатию, и возможно сдвигу — относительному переме-

щению граничащих друг с другом частей среды вдоль поверхности их соприкосновения.

Волной называется процесс распространения в пространстве колебаний частиц упругой среды. При этом частицы не перемещаются по всему заполненному упругой средой объему, а движутся около своих положений равновесия.

Волна называется *продольной*, если направление колебаний частиц среды совпадает с направлением распространения волны. Волна называется *поперечной*, если частицы колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. В жидкой и газообразной средах способны распространяться только продольные волны, в твердой среде — как продольные, так и поперечные волны.

Волновым фронтом называется поверхность, отделяющая область пространства, вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания частиц среды еще не возникли. Волновой фронт — это геометрическое место точек, до которых в процессе распространения волны колебания доходят в один и тот же момент времени t .

Волновой поверхностью называется поверхность, которая проходит через положения равновесия частиц среды, колеблющихся в одинаковой фазе.

Имеются следующие различия между волновым фронтом и волновой поверхностью. Волновой фронт перемещается в пространстве, а волновая поверхность остается неподвижной. Распространяющаяся в пространстве волна в каждый момент времени имеет единственный волновой фронт, а волновых поверхностей у каждой волны бесконечное множество. Волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

Волна называется *плоской*, если ее волновые поверхности представляют собой плоскости; *сферической* или *цилиндрической* — если волновые поверхности имеют сферическую или цилиндрическую форму соответственно. На рис. 31 изображены волновые поверхности

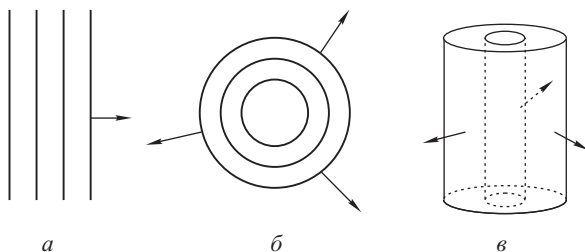


Рис. 31

плоской (а), сферической (б) и цилиндрической (в) волн; стрелками указаны направления распространения волны.

Пусть \mathbf{V} — скорость движения волнового фронта (скорость волны), \mathbf{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности (показывает направление распространения волны), ω — циклическая частота, ν — частота колебаний частиц упругой среды, в которой распространяется волна, $T = 1/\nu$ — период колебаний частиц.

Длиной волны λ называется расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T частиц среды:

$$\lambda = VT,$$

где V — модуль скорости волны.

Волновым числом k называется величина, равная отношению циклической частоты ω к скорости волны V :

$$k = \frac{\omega}{V}.$$

Другое выражение для волнового числа k , которое получается при учете соотношения $V = \lambda/T$:

$$k = \frac{\omega T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Волновым вектором \mathbf{k} называется вектор, определяемый выражением:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{V} \mathbf{n}.$$

Модуль волнового вектора \mathbf{k} равен волновому числу k , а направление совпадает с направлением нормали к волновой поверхности (с единичным вектором \mathbf{n}).

Уравнение плоской волны. Обозначим буквой ξ величину смещения из положения равновесия частицы упругой среды, совершающей колебания в процессе распространения волны; буквы x , y и z обозначают пространственные координаты точки, которая является положением равновесия этой частицы (рис. 32).

Уравнением волны называется функция, описывающая зависимость величины смещения ξ колеблющейся частицы от координат x , y , z частицы и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

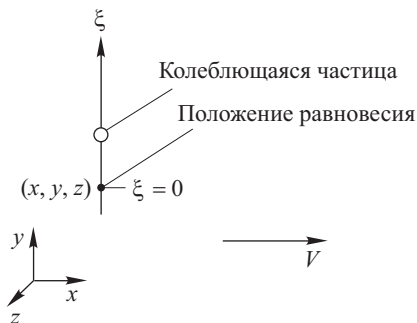


Рис. 32

Направление смещения колеблющейся частицы, то есть направление, вдоль которого изменяется величина ξ , может совпадать с направлением распространения волны (продольная волна) или быть перпендикулярным этому смещению (поперечная волна).

Если частицы среды, расположенные в плоскости $x = \text{const}$, колеблются одинаково, то есть в каждый момент времени величина смещения ξ всех частиц указанной плоскости одна и та же, то ξ является функцией только координаты x и не зависит от y, z :

$$\xi = \xi(x, t).$$

Плоскости $x = \text{const}$ представляют собой волновые поверхности, то есть рассматриваемая волна является плоской и распространяется вдоль оси x .

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Пусть колебания всех частиц, положения равновесия которых находятся в плоскости $x = 0$, описываются гармонической функцией с амплитудой a , циклической частотой ω , начальной фазой α :

$$\xi(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Если волна распространяется со скоростью V в положительном направлении оси x , то колебания частиц в плоскости $x = \text{const}$ при любом значении $x > 0$ будут отставать по времени от колебаний частиц в плоскости $x = 0$ на величину $\tau = x/V$:

$$\xi(x, t) = a \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{V}x + \alpha\right) = a \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Полученное уравнение представляет собой *уравнение плоской гармонической волны*, распространяющейся в положительном направлении оси x :

$$\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (9.1)$$

Здесь a — амплитуда волны, ω — циклическая частота, $k = \omega/V$ — волновое число, $\omega t - kx + \alpha$ — фаза волны, α — начальная фаза (определяется выбором начала отсчета координаты x и времени t).

Фазовой скоростью волны V_ϕ называется скорость перемещения в пространстве поверхности постоянной фазы волны.

Фазовую скорость плоской гармонической волны (9.1) можно определить, записав условие постоянства ее фазы:

$$\omega t - kx + \alpha = \text{const}.$$

Это равенство представляет собой уравнение плоскости в пространстве, скорость перемещения которой и является фазовой скоростью волны V_ϕ :

$$V_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = V.$$

Как следует из полученного равенства, в случае гармонической волны фазовая скорость V_ϕ совпадает с введенной ранее скоростью V распространения в пространстве колебаний частиц упругой среды.

Плоская волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси x , описывается уравнением:

$$\xi = a \cos (\omega t + kx + \alpha).$$

На рис. 33 представлены графики зависимости функции ξ (9.1) от времени t и от координаты x . Период функции ξ по переменной t равен периоду гармонических колебаний частиц упругой среды, а период функции ξ по переменной x представляет собой длину волны λ .

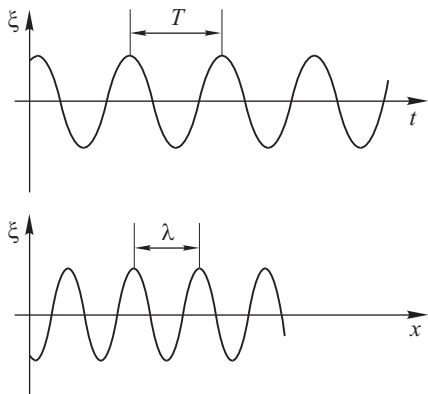


Рис. 33

Уравнение сферической волны. Пусть в однородной и изотропной среде точечный источник порождает сферическую волну, распространяющуюся в пространстве со скоростью V . Если фаза колебаний источника равна $\omega t + \alpha$, то фаза колебаний частиц среды, расположенных на волновой поверхности радиуса r , будет

равна $\omega(t - r/V) + \alpha$. Временная задержка $\tau = r/V$ равна промежутку времени, затрачиваемому волной на прохождение расстояния r от источника до рассматриваемой волновой поверхности.

Уравнение сферической волны имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a_0}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{V} \right) + \alpha \right] = \frac{a_0}{r} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{V} r + \alpha \right) = \\ &= \frac{a_0}{r} \cos (\omega t - kr + \alpha), \quad (9.2) \end{aligned}$$

где a_0/r — амплитуда сферической волны, которая убывает обратно пропорционально расстоянию r до источника, a_0 — числовой коэффициент. Приведенная здесь зависимость амплитуды сферической волны от расстояния r будет обоснована ниже.

Уравнение цилиндрической волны. Цилиндрическую волну можно создать, разместив на прямой линии бесконечно большое число одинаковых колеблющихся в одинаковой фазе точечных источников сферических волн. Складываясь между собой, сферические волны создадут в пространстве цилиндрическую волну. Если волна распространяется со скоростью V , то колебания частиц среды, расположенных на расстоянии r от линии расположения источников, будут отставать по времени на величину $\tau = r/V$ от колебаний самих

источников. С учетом этого уравнение цилиндрической волны имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a_0}{\sqrt{r}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{V} \right) + \alpha \right] = \frac{a_0}{\sqrt{r}} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{V} r + \alpha \right) = \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{r}} \cos (\omega t - kr + \alpha). \quad (9.3)\end{aligned}$$

Зависимость амплитуды цилиндрической волны a_0/\sqrt{r} от расстояния r будет обоснована ниже.

Уравнения плоской, сферической и цилиндрической волн в поглощающей среде. Уравнения волн (9.1)–(9.3) были получены в предположении, что частицы упругой среды совершают гармонические колебания. Если в процессе движения частицы испытывают на себе действие сил трения (сопротивления среды), то колебания будут затухающими. При этом энергия колебаний превращается во внутреннюю энергию вещества среды (энергию теплового движения). Такая среда называется поглощающей. Все реально существующие среды в большей или меньшей степени поглощают энергию распространяющихся в них волн. Рассматривая затухающие колебания, мы указывали, что амплитуда затухающих колебаний экспоненциально уменьшается с течением времени (см. в кн. 1 «Механика», § 44). Аналогично амплитуда волны в поглощающей среде экспоненциально уменьшается с расстоянием, пройденным волной. Уравнения плоской, сферической и цилиндрической волн в поглощающей среде представлены формулами (9.4), (9.4), (9.6) соответственно:

$$\xi = ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (9.4)$$

$$\xi = \frac{a_0}{r} e^{-\gamma r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (9.5)$$

$$\xi = \frac{a_0}{\sqrt{r}} e^{-\gamma r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (9.6)$$

где γ — так называемый коэффициент затухания.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении.

Рассмотрим плоскую волну. Пусть волновой вектор \mathbf{k} , перпендикулярный к волновой поверхности и определяющий направление распространения волны в пространстве, составляет с осями x , y , z декартовой прямоугольной системы координат соответственно углы α , β , γ . Колебание частиц, расположенных на волновой поверхности, проходящей через начало координат (рис. 34), описывается гармонической функцией:

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \alpha).$$

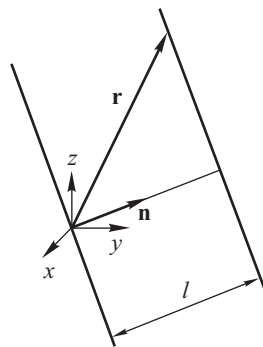


Рис. 34

Колебания частиц, положения равновесия которых принадлежат другой волновой поверхности, отстоящей на расстояние l от первой, запаздывают по времени на величину $\tau = l/V$, где V — скорость распространения волны, и описываются функцией

$$\xi = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{l}{V} \right) + \alpha \right] = a \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{V} l + \alpha \right) = a \cos (\omega t - kl + \alpha).$$

Поскольку расстояние l можно представить в виде $l = \mathbf{r}\mathbf{n}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор произвольной точки рассматриваемой волновой поверхности, расстояние от которой до начала координат равно l , \mathbf{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности, то уравнение волны принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos (\omega t - k\mathbf{r}\mathbf{n} + \alpha) = a \cos (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = \\ &= a \cos (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha), \end{aligned} \quad (9.7)$$

где k_x, k_y, k_z — проекции на координатные оси волнового вектора \mathbf{k} .

Итак, уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении, заданном единичным вектором \mathbf{n} или волновым вектором \mathbf{k} , имеет вид (9.7).

Уравнение волны в комплексной форме. Прибавив к правой части равенства $\xi = a \cos (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$ выражение $i \sin (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$, получим комплексную форму уравнения волны:

$$\bar{\xi} = a [\cos (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) + i \sin (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)] = a e^{i\alpha} e^{i(\omega t - k\mathbf{r})} = \bar{a} e^{i(\omega t - k\mathbf{r})}. \quad (9.8)$$

В этой записи $\bar{a} = a e^{i\alpha}$ — так называемая *комплексная амплитуда волны*. Модуль комплексной амплитуды равен амплитуде a волны, аргумент — начальной фазе α .

Чтобы перейти от комплексной формы уравнения волны к обычной, нужно взять действительную часть:

$$\xi = \operatorname{Re} \bar{\xi}.$$

Волновое уравнение. Волновым уравнением называется дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение распространяющейся в пространстве волны (плоской, сферической и т. д.). Получим волновое уравнение путем дифференцирования одного из его решений, а именно, уравнения плоской волны (9.7), распространяющейся в произвольном направлении:

$$\xi = a \cos (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = a \cos (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha).$$

Вычислим вторую производную смещения ξ по времени:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi, \quad (9.9)$$

а также вторые производные ξ по координатам x , y и z :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi.$$

Сложив последние три равенства, получим

$$\Delta \xi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi, \quad (9.10)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Выразив ξ из правых частей равенств (9.9) и (9.10) и приравняв друг другу полученные выражения, найдем

$$-\frac{1}{k^2} \Delta \xi = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что $k = \frac{\omega}{V}$, где V — фазовая скорость волны, получим *волновое уравнение*:

$$\Delta \xi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (9.11)$$

Уравнение плоской волны (9.7), исходя из которого было выведено волновое уравнение (9.11), является не единственным решением волнового уравнения. Можно показать, что всякая функция вида

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha),$$

также является решением волнового уравнения (9.11).

Заметим, что получив тем или иным способом волновое уравнение вида (9.11), можно найти фазовую скорость волны, не решая самого уравнения, а именно: в этом уравнении коэффициент при второй производной по времени смещения ξ частицы представляет собой квадрат величины, обратной фазовой скорости волны V .

§ 10. Скорость и энергия упругих волн в твердой среде

Скорость упругих волн. Пусть продольная плоская волна распространяется в однородной упругой среде в направлении оси x . Например, волна может распространяться в длинном однородном стержне цилиндрической формы из упругого материала в направлении его оси симметрии (рис. 35). Мысленно выделим в стержне малый фрагмент. Обозначим через S площадь поперечного сечения стержня. Координаты двух торцевых поверхностей выделенного фрагмента в положении равновесия (в отсутствие волны) равны x и $x + \Delta x$. Величины сме-

щений из положений равновесия торцевых поверхностей фрагмента в некоторый произвольный момент времени t в процессе распространения волны равны ξ и $\xi + \Delta\xi$. В результате деформации материала стержня к торцевым поверхностям рассматриваемого фрагмента в этот момент времени будут приложены силы упругости F_1 и F_2 , которые в соответствии с законом Гука равны

$$F_1 = ES \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi},$$

$$F_2 = ES \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi},$$

где E — модуль Юнга, $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi}$ и $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi}$ — величины относительной деформации среды в сечениях стержня с координатами $(x + \Delta x + \xi + \Delta\xi)$ и $(x + \xi)$.



Рис. 35

В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения рассматриваемого фрагмента стержня имеет вид

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_1 - F_2, \quad (10.1)$$

где ρ — плотность материала стержня, $\rho S \Delta x$ — масса рассматриваемого фрагмента стержня, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ — ускорение фрагмента.

Вычислим равнодействующую сил, приложенных к фрагменту стержня, разложив

функции F_1 и F_2 в ряд Тейлора и сохранив только первые два члена разложения (малым параметром, по которому раскладывается функция F_1 , служит величина $\Delta x + \xi + \Delta\xi$, малым параметром разложения функции F_2 служит величина ξ):

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= ES \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi+\Delta x+\Delta\xi} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi} \right] \approx \\ &\approx ES \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x (\Delta x + \xi + \Delta\xi) - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x \xi \right] = \\ &= ES \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x (\Delta x + \Delta\xi) \approx ES \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x \Delta x. \end{aligned}$$

Последнее приближенное равенство записано с учетом того обстоятельства, что разность смещений $\Delta\xi$ торцевых поверхностей цилиндрического фрагмента много меньше длины Δx самого фрагмента: $\Delta\xi \ll \Delta x$.

Подставив полученное выражение для $F_1 - F_2$ в уравнение движения фрагмента (10.1), получим

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x,$$

или:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (10.2)$$

Выражение (10.2) представляет собой волновое уравнение и описывает распространение плоской волны вдоль оси x . Из него находим скорость упругой продольной волны в твердой среде:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (10.3)$$

где E — модуль Юнга, ρ — плотность среды. Подобное выражение легко получить и для поперечной волны. В него вместо модуля Юнга E войдет модуль сдвига G .

Энергия упругих волн. Для вычисления энергии упругой волны выделим в среде, где распространяется волна, малый объем Δv , масса которого составит величину $\rho \Delta v$, где ρ — плотность вещества среды. Пусть плоская продольная волна распространяется вдоль оси x и описывается уравнением:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Благодаря волне объем Δv приобретет скорость $\partial \xi / \partial t = -\omega a \sin(\omega t - kx + \alpha)$. Кинетическая энергия вещества среды в объеме Δv равна

$$\Delta W_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \rho \Delta v \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho \Delta v}{2} a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (10.4)$$

Потенциальная энергия деформированного объема Δv равна

$$\Delta W_{\text{пот}} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta v, \quad (10.5)$$

где E — модуль Юнга, $\partial \xi / \partial x$ — относительная деформация элементарного объема упругой среды. (Выражение (10.5) аналогично выражению для потенциальной энергии деформированной пружины $\kappa (\Delta l)^2 / 2$, где κ — жесткость пружины, Δl — величина деформации).

Учитывая связь (10.3) модуля Юнга E со скоростью распространения V упругой волны и заменяя $V = \omega / k$, где ω — циклическая частота, k — волновое число, выразим величину E :

$$E = \rho V^2 = \rho \frac{\omega^2}{k^2}. \quad (10.6)$$

Подставив (10.6) в (10.5), получим выражение для потенциальной энергии деформированного объема Δv :

$$\begin{aligned}\Delta W_{\text{пот}} &= \frac{\rho \Delta v}{2} \frac{\omega^2}{k^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\rho \Delta v}{2} \frac{\omega^2}{k^2} k^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) = \\ &= \frac{\rho \Delta v}{2} \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha).\end{aligned}\quad (10.7)$$

Полная энергия объема Δv среды, вовлеченного в волновой процесс, равна сумме кинетической (10.5) и потенциальной (10.7) энергии:

$$\Delta W = \Delta W_{\text{кин}} + \Delta W_{\text{пот}} = \rho \Delta v \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha).$$

Объемная плотность энергии упругой волны составит величину

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta v} = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha).\quad (10.8)$$

На практике больший интерес представляет не мгновенное (10.8), а среднее по времени значение объемной плотности энергии. Учитывая, что среднее за период колебаний значение функции $\sin^2(\omega t - kx + \alpha)$ равно 1/2, получим

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2,\quad (10.9)$$

где угловые скобки означают усреднение за время одного периода колебаний или за большой промежуток времени, включающий огромное количество периодов.

Энергия упругой волны, как следует из (10.8) и (10.9), пропорциональна квадрату амплитуды волны a .

Колебания плотности среды. Пусть в однородной упругой среде (цилиндрическом стержне) распространяется плоская волна $\xi = a \cos(\omega t - kx)$. Координатная ось x параллельна оси симметрии стержня. Определим, как зависит от времени t и от координаты x плотность материала, из которого изготовлен стержень.

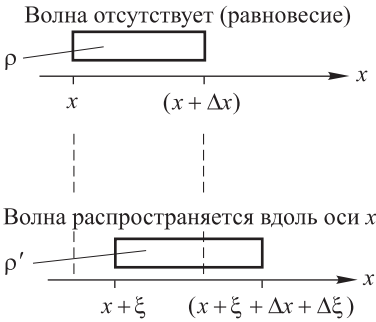


Рис. 36

Выделим мысленно в стержне фрагмент очень малой длины Δx , торцевые поверхности которого перпендикулярны оси стержня и имеют в положении равновесия координаты x и $x + \Delta x$ (рис. 36). В произвольный момент времени t в процессе распространения волны координаты торцевых поверхностей будут равны $(x + \xi)$ и $(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)$. Масса

выделенного фрагмента стержня остается неизменной в любой момент времени. Если обозначить через ρ плотность материала стержня в отсутствие волны, $\rho'(x, t)$ — плотность материала фрагмента стержня

в рассматриваемый момент времени t (объем фрагмента настолько мал, что плотность ρ' можно считать одинаковой в любой точке фрагмента), S — площадь поперечного сечения стержня, то условие постоянства массы фрагмента можно записать в следующем виде:

$$\rho S \Delta x = \rho' S (\Delta x + \Delta \xi), \quad (10.10)$$

где Δx — длина фрагмента в отсутствие волны, $(\Delta x + \Delta \xi)$ — длина фрагмента в момент t в процессе распространения волны.

Из равенства (10.21) определим плотность ρ' среды в произвольный момент времени t :

$$\rho'(x, t) = \frac{\rho}{1 + \Delta \xi / \Delta x} \approx \frac{\rho}{1 + \partial \xi / \partial x}. \quad (10.11)$$

Производная по координате x смещения $\xi = a \cos(\omega t - kx)$ равна

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ka \sin(\omega t - kx).$$

Подставив это выражение в (10.11), найдем зависимость плотности среды ρ' от координаты x и времени t :

$$\rho'(x, t) = \frac{\rho}{1 + ka \sin(\omega t - kx)}. \quad (10.12)$$

Функция $\sin(\omega t - kx)$ в знаменателе выражения (10.12) периодически меняет знак и испытывает колебания около нулевого значения как в зависимости от времени t при фиксированном x , так и в зависимости от координаты x в фиксированный момент времени t . Соответственно плотность среды ρ' также периодически изменяется, испытывая колебания вокруг своего среднего значения ρ — плотности среды в состоянии равновесия в отсутствие волны (рис. 37). Выражение (10.12) представляет собой волну плотности, распространяющуюся в одномерной упругой среде.

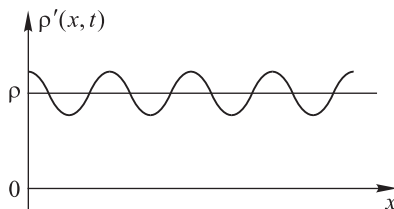


Рис. 37

§ 11. Перенос энергии упругой волной

Пусть в пространстве распространяется упругая волна и задана некоторая поверхность S . Частицы упругой среды, вовлеченные в волновой процесс, обладают дополнительной (по сравнению с энергией теплового движения) энергией, обусловленной их упорядоченным согласованным колебательным движением. Таким образом, энергия упругой волны — это энергия согласованного колебательного движения частиц среды. Величина объемной плотности энергии волны w была вычислена выше (см. формулы (10.8) и (10.9)). В процессе своего

распространения волна переносит энергию из областей пространства, вовлеченных в волновой процесс, в области, где колебания частиц среды еще не возникли. Таким образом, имеет место процесс переноса энергии. Для количественного описания этого процесса вводятся понятия потока энергии, вектора плотности потока энергии и интенсивности волны.

Потоком энергии Φ называется количество энергии, переносимой волной за единицу времени через заданную поверхность S :

$$\Phi = \frac{dW_S}{dt}, \quad (11.1)$$

где dW_S — количество энергии, перенесенной волной через поверхность S за промежуток времени dt .

Единица потока энергии — *ватт* (Вт), 1 Вт = 1 Дж/с.

Вектор плотности потока энергии \mathbf{j} определим как произведение объемной плотности энергии волны w , скорости распространения волны V и единичного вектора \mathbf{n} в направлении распространения волны:

$$\mathbf{j} = wV\mathbf{n}. \quad (11.2)$$

Единица плотности потока энергии — *ватт на метр в квадрате* (Вт/м²).

Общие представления о потоке энергии в пространстве были введены Н. А. Умовым (1846–1915). Вектор плотности потока энергии без конкретизации ее физической природы называется *вектором Умова*.

Установим связь между вектором \mathbf{j} и потоком Φ . Для этого рассчитаем величину $d\Phi$ потока энергии через произвольным образом ориентированную в пространстве элементарную площадку dS (элементарный участок поверхности площади dS). Пусть угол между вектором $d\mathbf{S}$ элементарной площадки и вектором \mathbf{n} , определяющим направление

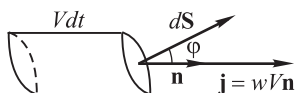


Рис. 38

распространения в пространстве упругой волны, равен φ (рис. 38). За промежуток времени dt через элементарную площадку dS волна перенесет энергию dW , заключенную в объеме наклонного цилиндра, основанием которого служит площадка dS , а образующая цилиндрической поверхности параллельна направлению распространения волны и имеет длину Vdt . (Величина Vdt равна расстоянию, на которое успевает распространяться волна за промежуток времени dt .) Объем рассматриваемого косоугольного цилиндра равен $VdtdS \cos \varphi$ (см. рис. 38). Итак, энергия dW может быть представлена в виде

$$dW = wVdtdS \cos \varphi = wV\mathbf{n}d\mathbf{S}dt = \mathbf{j}d\mathbf{S}dt,$$

где произведение $dS \cos \varphi$ представлено в виде скалярного произведения: $dS \cos \varphi = \mathbf{n}d\mathbf{S}$, а величина $wV\mathbf{n}$ согласно определению (11.2) представляет собой вектор плотности потока энергии \mathbf{j} .

С учетом полученного соотношения поток энергии $d\Phi$ через элементарную площадку dS равен

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (11.3)$$

Если площадка dS располагается перпендикулярно направлению распространения волны, то есть $\varphi = 0$, то из (11.3) получаем

$$d\Phi = j dS,$$

где j — модуль вектора плотности потока энергии \mathbf{j} . В этом случае выполняется скалярное равенство

$$j = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (11.4)$$

Формула (11.4) иллюстрирует физический смысл понятия плотности потока энергии: модуль вектора плотности потока энергии j равен потоку энергии, переносимому волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Формула (11.3) позволяет вычислить поток энергии через произвольную поверхность S , если известен вектор \mathbf{j} в каждой точке этой поверхности:

$$\Phi = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (11.5)$$

Здесь интеграл вычисляется по поверхности S .

Интенсивностью волны I называется величина, равная модулю среднего по времени вектора плотности потока энергии:

$$I = \langle |\mathbf{j}| \rangle, \quad (11.6)$$

где угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по времени.

Преобразуем выражение (11.6), учитывая при усреднении вектора \mathbf{j} , что скорость распространения волны V и направление распространения (вектор \mathbf{n}) от времени не зависят:

$$I = \langle w V \mathbf{n} \rangle = \langle w \rangle V \mathbf{n} = \langle w \rangle V = \langle j \rangle, \quad (11.7)$$

где $j = |w V \mathbf{n}| = w V$.

Выражение (11.7) означает, что интенсивность волны I равна произведению средней по времени объемной плотности энергии волны $\langle w \rangle$ и скорости волны V или, иначе, среднему по времени значению модуля плотности потока энергии j .

В качестве примера, вычислим интенсивность упругой волны. Согласно (10.9) средняя объемная плотность энергии упругой волны равна:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2,$$

где ρ — плотность среды, a — амплитуда, ω — циклическая частота волны.

Интенсивность упругой волны равна

$$I = \langle w \rangle V = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 V. \quad (11.8)$$

Интенсивность I волны пропорциональна квадрату ее амплитуды a .

Амплитуда сферической и цилиндрической волн. Пусть сферическая волна распространяется в непоглощающей среде. Поскольку энергия волны никуда не исчезает (в частности, не превращается в тепловую энергию), поток энергии через любую замкнутую сферическую поверхность с центром в точке расположения источника волны должен быть постоянным. Это же относится и к среднему по времени потоку энергии, который можно вычислить, умножив интенсивность I волны на площадь S указанной сферической поверхности:

$$\langle \Phi \rangle = IS = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 V \cdot 4\pi r^2 = \text{const.}$$

Здесь использовано выражение (11.8) для интенсивности I упругой волны. Из полученного равенства найдем амплитуду a сферической волны:

$$a = \frac{1}{\omega r} \sqrt{\frac{\langle \Phi \rangle}{2\pi \rho V}} = \frac{a_0}{r},$$

где через a_0 обозначен числовой коэффициент, зависящий, в частности, от мощности источника.

Таким образом, амплитуда a сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию r до источника.

Аналогично, при распространении цилиндрической волны в непоглощающей среде средний по времени поток энергии через произвольную цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты l , совпадающую с одной из волновых поверхностей, должен быть постоянным:

$$\langle \Phi \rangle = IS = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 V \cdot 2\pi r l = \text{const.}$$

Отсюда следует, что амплитуда цилиндрической волны обратно пропорциональна квадратному корню из величины r — расстояния до источника волны:

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\langle \Phi \rangle}{\rho V \pi r l}} = \frac{a_0}{\sqrt{r}},$$

a_0 — числовой коэффициент.

§ 12. Стоячая волна

Стоячая волна образуется при наложении двух плоских волн одинаковой частоты и амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу. Две бегущие в противоположных направлениях волны символи-

чески изображены на рис. 39. Уравнение волны, распространяющейся в положительном направлении координатной оси x , имеет вид

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (12.1)$$

Уравнение волны, распространяющейся в противоположном направлении:

$$\xi_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2). \quad (12.2)$$

При наложении двух волн любая частица среды одновременно участвует в двух колебательных движениях, описываемых уравнениями (12.1) и (12.2). Результирующее смещение частицы из положения равновесия ξ равно сумме смещений ξ_1 и ξ_2 , вызванных каждой из бегущих волн. Уравнение волны, образующейся в результате наложения двух плоских волн, то есть уравнение стоячей волны, найдем, сложив уравнения (12.1) и (12.2):

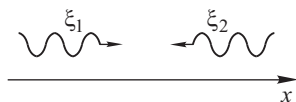


Рис. 39

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = a[\cos(\omega t - kx + \alpha_1) + \cos(\omega t + kx + \alpha_2)] = \\ &= 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (12.3)$$

В аргументах косинусов в выражении (12.3) легко избавиться от слагаемых, зависящих от начальных фаз α_1 и α_2 . Для этого необходимо изменить начало отсчета координаты x и момент начала отсчета времени t . Выполним замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2k}, \\ t &= t' - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\omega}. \end{aligned}$$

Уравнение результирующей волны в новых переменных x' и t' имеет вид

$$\xi = 2a \cos kx' \cos \omega t'.$$

Тем самым показано, что уравнение стоячей волны всегда может быть приведено к виду

$$\xi = 2a \cos kx \cos \omega t, \quad (12.4)$$

где a — амплитуда каждой из складываемых бегущих волн.

Из (12.4) видно, что частицы упругой среды совершают гармонические колебания с циклической частотой ω , амплитуда которых $|2a \cos kx|$ зависит от координаты x положения равновесия колеблющейся частицы.

Пучности стоячей волны — это точки пространства, которые являются положениями равновесия частиц среды, совершающих колебания с максимальной амплитудой.

Максимальное значение амплитуды $|2a \cos kx|$ достигается при условии:

$$|\cos kx| = 1,$$

из которого можно определить положение пучностей в пространстве:

$$x_{\text{пуч}} = \pm \frac{n\pi}{k} = \pm n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.5)$$

где λ — длина волны.

Как следует из (12.5), геометрическое место пучностей стоячей волны — это плоскости, перпендикулярные к оси x и расположенные на расстояниях друг от друга в полдлины волны.

Узлы стоячей волны — это точки пространства, которые являются положениями равновесия частиц упругой среды с нулевой амплитудой колебаний. Амплитуда колебаний $|2a \cos kx|$ обращается в нуль при выполнении условия

$$|\cos kx| = 0,$$

из которого определяется положение узлов в пространстве:

$$x_{\text{узел}} = \pm \frac{(2n+1)\pi}{k} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

Как и в случае пучностей, геометрическое место узлов стоячей волны — это плоскости, перпендикулярные к оси x и расположенные на расстоянии в полдлины волны друг от друга.

Пусть в упругой среде имеется стоячая волна. На рис. 40 представлены графики зависимости смещения ξ частицы среды от координаты x ее равновесного положения в моменты времени, разделенные промежутками в четверть периода T колебаний. В момент времени $t = 0$ смещение ξ всех частиц (с любыми значениями x) максимально и по модулю равно амплитуде колебаний соответствующей частицы. Через четверть периода все частицы среды оказываются в положениях равновесия, так что $\xi = 0$ для любого x . Еще через четверть периода смещение ξ всех частиц вновь оказывается максимальным, но частицы смещены в направлении, противоположном первоначальному. Затем процесс многократно повторяется. Частицы, расположенные в узлах стоячей волны, вообще не смещаются; частицы, равновесные положения которых совпадают с пучностями стоячей

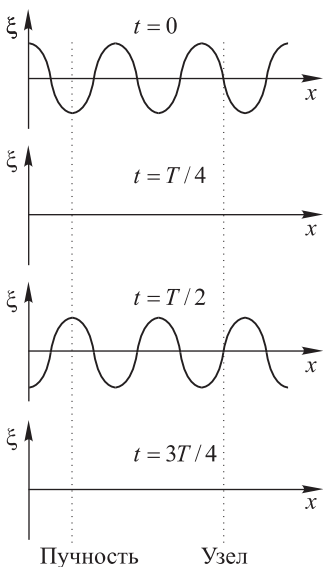


Рис. 40

волны, испытывают наибольшие по сравнению с другими частицами отклонения от положений равновесия.

Зависимость скорости ξ частиц среды от координаты x и времени t называется *волной скорости* и описывается выражением:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos kx \sin \omega t.$$

Зависимость относительной деформации среды от координаты x и времени t называется *волной деформации* и описывается выражением:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -2ka \sin kx \cos \omega t.$$

Можно показать, что за период колебаний дважды происходит превращение энергии стоячей волны из полностью потенциальной, сосредоточенной в основном вблизи узлов волны, в полностью кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны. В результате энергия переходит от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии, переносимой стоячей волной, в любом перпендикулярном к оси x сечении волны равен нулю.

§ 13. Характеристики звука. Эффект Доплера для звуковых волн

Звуковыми волнами (звуком) называются упругие волны, частоты которых лежат в диапазоне от 16 до 20 000 Гц. Именно такие упругие волны, достигнув человеческого уха, вызывают ощущение звука. Всякий реально существующий звук представляет собой суперпозицию (наложение) гармонических колебаний различных частот.

Акустическим спектром называется набор частот колебаний, составляющих звуковую волну.

Звук со сплошным акустическим спектром, то есть спектром, в котором присутствуют все частоты некоторого конечного диапазона, называется *шумом*. Звук с линейчатым акустическим спектром, то есть спектром, набор частот которого является дискретным, называется *тональным*.

Высота тонального звука определяется основной *наименьшей* частотой присутствующих в данном звуке колебаний.

Тембр (окраска) тонального звука зависит от относительной интенсивности обертонов (побочных частот колебаний).

Интенсивность звука, как любой упругой волны, представляет собой модуль среднего по времени вектора плотности потока энергии, переносимой звуковой волной. Напомним, что интенсивность упругой волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний частиц среды.

Порогом слышимости называется минимальная интенсивность звуковой волны, вызывающей звуковое ощущение. Порог слышимости

зависит от частоты. В наиболее чувствительной для человеческого уха области частот от 1000 до 4000 Гц порог слышимости составляет 10^{-12} Вт/м².

Порогом болевого ощущения называется интенсивность волны, при которой упругая волна перестает восприниматься как звук и вызывает в ухе ощущение боли. Порог болевого ощущения составляет 1–10 Вт/м².

Уровнем громкости звука L называется логарифм отношения интенсивности I звука к некоторой интенсивности I_0 , принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}.$$

В качестве I_0 обычно принимают порог слышимости: $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м². Поэтому уровень громкости L порога слышимости равен нулю.

Единицей уровня громкости является *бел* (Б). Один бел соответствует интенсивности, в десять раз превышающей порог слышимости. Обычно используют единицу уровня громкости, в десять раз меньшую — *децибел* (дБ):

$$L \text{ [дБ]} = 10L(\text{Б}) = 10 \lg \frac{I}{I_0}.$$

Приблизительно тиканью часов соответствует уровень громкости 20 дБ, человеческой речи — 60 дБ, шуму мотора самолета — 120 дБ.

Приведем без вывода формулу для скорости звука в газе:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где γ — адиабатическая постоянная газа, R — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура газа, M — молярная масса.

Для воздуха при 0 °С скорость звука примерно составляет 330 м/с (при расчете принимается $\gamma = 1,4$; $M = 0,029$ кг/моль; $R = 8,31$ Дж/(моль · К)). По порядку величины скорость звука в газе совпадает со средней $V_{\text{ср}}$ или среднеквадратичной $V_{\text{кв}}$ скоростью теплового движения газовых молекул. Так, для среднеквадратичной скорости имеем

$$V_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \sim \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = V.$$

Эффект Доплера для звуковых волн. Пусть в газе или жидкости находится источник и приемник звуковых волн, движущиеся в одном направлении вдоль некоторой прямой со скоростями $V_{\text{ист}}$ и $V_{\text{пр}}$ соответственно (рис. 41). Частота волн, испускаемых источником, равна ν_0 . Частота волн, регистрируемых приемником, может отличаться от ν_0 вследствие движения как источника, так и приемника.



Рис. 41

Эффект Доплера состоит в изменении частоты звуковых волн, регистрируемых приемником, вследствие движения источника и приемника.

Вначале определим длину звуковой волны, испускаемой движущимся источником в направлении, противоположном направлению его движения. За промежуток времени $\Delta t = 1$ с источник переместится из своего исходного положения на расстояние, численно равное $V_{\text{ист}}$. Фронт волны, порожденной источником в момент времени $t = 0$, за тот же промежуток $\Delta t = 1$ с пройдет расстояние, равное скорости распространения волны V (рис. 42). В течение 1 с источник совершит ν_0 колебаний, следовательно, на пространственном промежутке длиной $V + V_{\text{ист}}$ уложится ровно ν_0 полных длин волн. Искомая длина волны равна расстоянию между источником и фронтом ($V_{\text{ист}} + V$), деленному на частоту источника ν_0 :

$$\lambda = \frac{V_{\text{ист}} + V}{\nu_0}.$$

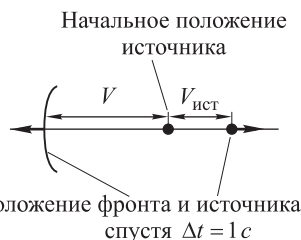


Рис. 42

Теперь определим частоту звуковой волны, регистрируемую приемником. Для этого рассмотрим движение приемника в течение промежутка времени $\Delta t = 1$ с, начиная с некоторого произвольного момента времени t_0 . За промежуток времени $\Delta t = 1$ с приемник переместится на расстояние, численно равное $V_{\text{пр}}$ (рис. 43). В конце рассматриваемого промежутка времени $\Delta t = 1$ с до приемника дойдет фронт волны, располагавшийся в момент времени t_0 на расстоянии V от того места, где в момент времени $t_0 + \Delta t$ находится приемник. Таким образом, за время $\Delta t = 1$ с приемник зарегистрирует полное число длин волн, уместившихся на расстоянии, равном $V_{\text{пр}} + V$. Это число равно регистрируемой частоте звука:

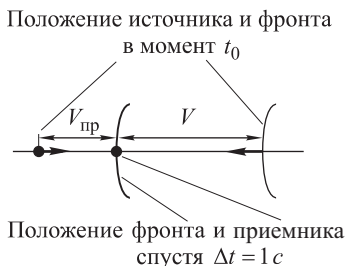


Рис. 43

$$\nu = \frac{V_{\text{пр}} + V}{\lambda} = \frac{V_{\text{пр}} + V}{V_{\text{ист}} + V} \nu_0. \quad (13.1)$$

Полученная формула (13.1) представляет собой математическое выражение эффекта Доплера. Если скорости приемника и источника совпадают ($V_{\text{пр}} = V_{\text{ист}}$), то регистрируемая частота ν равна частоте источника ν_0 . Если приемник «догоняет» источник ($V_{\text{пр}} > V_{\text{ист}}$), то регистрируемая частота больше частоты источника, $\nu > \nu_0$; если приемник отстает от источника ($V_{\text{пр}} < V_{\text{ист}}$), то регистрируемая частота уменьшается по сравнению с ν_0 , $\nu < \nu_0$. Формулы, ана-

логичные (13.1), можно получить для случаев движения источника и приемника навстречу друг другу или их движения в противоположных направлениях.

Задачи

2.1. Плоская гармоническая волна с частотой ω распространяется с со скоростью V в направлении, составляющем углы α , β , γ с осями x , y , z . Найти разность фаз колебаний в точках среды с координатами x_1 , y_1 , z_1 и x_2 , y_2 , z_2 .

2.2. Плоская гармоническая волна с частотой ω распространяется так, что некоторая фаза колебаний перемещается вдоль осей x , y , z со скоростями соответственно V_1 , V_2 , V_3 . Найти волновой вектор \mathbf{k} , если орты координатных осей \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} заданы.

2.3. Показать, что любая дифференцируемая функция вида $f(t + \alpha x)$, где α — постоянная, является решением волнового уравнения. Каков физический смысл постоянной α ?

2.4. В однородной упругой среде распространяется плоская волна $\xi = a \cos(\omega t - kx)$. Изобразить для момента $t = 0$:

- а) графики зависимостей от x величин ξ , $\partial \xi / \partial t$ и $\partial \xi / \partial x$;
- б) направление скорости частиц среды в точках, где $\xi = 0$, если волна продольная, поперечная;
- в) примерный график распределения плотности среды $\rho(x)$ для продольной волны.

2.5. Звуковая волна распространяется со скоростью V в положительном направлении оси x . В ту же сторону движутся наблюдатели со скоростями V_1 и V_2 . Найти отношение частот ω_2 / ω_1 , которые зафиксируют наблюдатели.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 14. Векторное волновое уравнение для электромагнитного поля

Электромагнитная волна представляет собой процесс распространения в пространстве взаимно порождающих друг друга переменных электрического и магнитного полей.

Движущиеся заряды создают в пространстве вокруг себя магнитное поле (закон Био и Савара). Если движение зарядов является ускоренным, в частности, колебательным, то магнитное поле в каждой точке пространства зависит от времени и, следовательно, порождает вихревое электрическое поле (закон электромагнитной индукции Фарадея). Переменное электрическое поле, в свою очередь, приводит к возникновению магнитного поля (открытие Максвелла) и весь описанный процесс многократно повторяется. В результате в пространстве распространяется электромагнитная волна. Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла.

Покажем, что из уравнений Максвелла можно вывести волновое уравнение, которое описывает распространение в пространстве электромагнитной волны. Исходя из волнового уравнения, определим фазовую скорость электромагнитных волн.

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho,\end{aligned}$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции, \mathbf{D} — вектор электрической индукции, \mathbf{j} — плотность электрического тока (тока проводимости), ρ — объемная плотность сторонних электрических зарядов.

Пусть среда, в которой распространяется электромагнитная волна, является однородной и изотропной, электрически нейтральной ($\rho = 0$), непроводящей ($\mathbf{j} = 0$ в силу того, что $\lambda = 0$, где λ — удельная электрическая проводимость), кроме того, диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ среды постоянны, и справедливы следующие соотношения: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$. Тогда система уравнений

Максвелла будет иметь следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (14.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (14.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (14.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (14.4)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (14.1). Ротор левой части:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = [\nabla[\nabla \mathbf{E}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ — оператор набла ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты координатных осей x, y, z), $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; при вычислении ротора двойное векторное произведение раскрыто по известному правилу и в соответствии с уравнением (14.4) учтено, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla, \mathbf{E}) = 0$.

Ротор правой части уравнения (14.1) вычисляется с учетом уравнения (14.3):

$$-\mu_0 \mu \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Приравняв полученные выражения, найдем

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (14.5)$$

Равенство (14.5) представляет собой волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} (электрической составляющей электромагнитной волны). Волновое уравнение для вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} (магнитной составляющей волны) получается аналогично с помощью применения операции ротора к обеим частям уравнения (14.3) с учетом уравнений (14.1) и (14.2):

$$\Delta \mathbf{H} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (14.6)$$

Множитель при второй производной по времени векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в уравнениях (14.5) и (14.6) равен квадрату величины, обратной фазовой скорости волны (см. пояснения к формуле (9.11)):

$$\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu = \frac{1}{V^2}.$$

Отсюда фазовая скорость электромагнитной волны равна

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}.$$

Здесь введены следующие обозначения: $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — фазовая скорость электромагнитной волны в вакууме (действительно, в вакууме, где $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, волновое уравнение имеет вид $\Delta E = \varepsilon_0\mu_0\partial^2 E/\partial t^2$, следовательно, фазовая скорость равна $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$); $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — величина, которая называется *абсолютным показателем преломления среды*. Величина n показывает, во сколько раз фазовая скорость электромагнитной волны в среде меньше ее скорости в вакууме.

§ 15. Плоская электромагнитная волна и ее свойства

Покажем, что из уравнений Максвелла вытекает существование в пространстве плоских электромагнитных волн, обладающих следующими свойствами.

Свойство 1. Электромагнитная волна является поперечной: векторы **E** и **H** в волне перпендикулярны к направлению ее распространения.

Свойство 2. Векторы **E**, **H** и **k** (**k** — волновой вектор) электромагнитной волны взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку (рис. 44).

Свойство 3. В любой момент времени модули электрической составляющей **E** и магнитной составляющей **H** волны связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} E = \sqrt{\mu_0\mu} H. \quad (15.1)$$

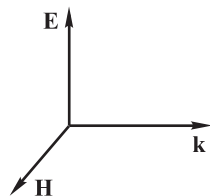


Рис. 44

Ниже будет показано, что в плоской гармонической электромагнитной волне, распространяющейся вдоль одной из координатных осей, например, вдоль оси x , изменение векторов **E** и **H** во времени и в пространстве описывается уравнениями:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (15.2)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (15.3)$$

где ω — циклическая частота волны, k — волновое число ($k = \omega/V$), α — начальная фаза волны в точке с координатой $x = 0$.

Для доказательства свойств 1–3 предположим, что электромагнитное поле существует в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси x . Тогда векторы **E** и **H** электромагнитного поля зависят только от координаты x , и не зависят от y и z :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x).$$

При этом производные по координатам y, z всех компонент E_x, E_y, E_z вектора **E** и всех компонент H_x, H_y, H_z вектора **H** равны нулю, например, $\partial E_x/\partial y = 0$, $\partial H_z/\partial z = 0$ и т. д. Используем это обстоятельство для «упрощения» оператора набла $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты координатных осей x, y, z соответственно. Будем считать,

что оператор содержит только одну компоненту, а именно $\partial/\partial x$, при этом остальные его компоненты, а именно, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, равны нулю или просто не существуют. (Во избежание недоразумений еще раз подчеркнем, что в действительности равен нулю результат действия компонент $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ оператора набла на любые компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в плоской волне, распространяющейся вдоль оси x). Итак, оператор набла в применении к плоской волне, распространяющейся вдоль оси x , можно представить в форме:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}. \quad (15.4)$$

Подставим в уравнения Максвелла (14.1)–(14.4) векторы напряженности электрического и магнитного полей в виде $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$, $\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$. Воспользовавшись оператором набла в форме (15.4), представим в указанных уравнениях роторы $\text{rot } \mathbf{E} = [\nabla, \mathbf{E}]$ и $\text{rot } \mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{H}]$ в виде определителей, дивергенцию векторов — в виде скалярных произведений $\text{div } \mathbf{E} = (\nabla, \mathbf{E})$, $\text{div } \mathbf{H} = (\nabla, \mathbf{H})$. После этого уравнения (14.1)–(14.4) будут выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu_0 \mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{k} \right), \quad (14.1')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}, H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} \right) = 0, \quad (14.2')$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \mathbf{k} \right), \quad (14.3')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}, E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \right) = 0, \quad (14.4')$$

Вычислив определители и перемножив соответствующие компоненты векторов в скалярных произведениях, получим систему из восьми уравнений:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad (15.5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (15.6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (15.7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (15.8)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (15.10)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (15.11)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (15.12)$$

Поперечность электромагнитной волны. Из уравнений (15.5) и (15.8) следует, что компонента H_x магнитного поля не зависит от координаты x и от времени t , то есть $H_x = \text{const}$. Из уравнений (15.9) и (15.12) следует, что компонента E_x электрического поля не зависит от x и от t , то есть $E_x = \text{const}$. Поскольку E_x и H_x не меняются с течением времени и одинаковы во всех точках пространства, поля E_x и H_x являются *статическими*. Электромагнитная волна представляет собой колебательный процесс и не должна содержать статических электрического и магнитного полей. Следовательно, $H_x = 0$ и $E_x = 0$. Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся вдоль оси x , могут быть отличны от нуля только следующие компоненты поля: E_y , E_z , H_y , H_z , а составляющие электрического и магнитного поля, параллельные направлению распространения волны отсутствуют. Это означает, что плоская электромагнитная волна является поперечной.

Взаимная перпендикулярность векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} в электромагнитной волне. Не использованные пока четыре уравнения системы (15.5)–(15.12), а именно уравнения (15.6), (15.7), (15.10) и (15.11) содержат четыре переменные величины E_y , E_z , H_y , H_z и могут быть представлены в виде двух *независимых* систем уравнений (I) и (II), каждая из которых содержит только две переменные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Системы (I) и (II) описывают электромагнитные волны, которые возникают и существуют независимо одна от другой. Для изучения свойств волны достаточно ограничиться решением одной из систем. Рассмотрим систему (II).

Дифференцируя первое уравнение системы (II) по переменной x и подставляя величину $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ из второго уравнения, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \\ &= -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (15.13)$$

Уравнение (15.13) — это волновое уравнение для компоненты E_y электромагнитного поля.

Дифференцируя второе уравнение системы (II) по переменной x с учетом выражения для $\partial E_y / \partial x$ из первого уравнения этой же системы, получим волновое уравнение для компоненты H_z электромагнитного поля:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (15.14)$$

Уравнения (15.13) и (15.14) представляют собой частные случаи векторных волновых уравнений (14.5) и (14.6). Из сравнения (15.13) с (15.14) видно, что компоненты поля E_y и H_z удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению. Электромагнитное поле, которое является решением этих уравнений, представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x со скоростью $V = c / \sqrt{\varepsilon \mu}$, где $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — скорость электромагнитной волны в вакууме; волновой вектор \mathbf{k} волны коллинеарен оси x .

Электрическую и магнитную составляющие рассматриваемой волны можно представить в виде $\mathbf{E} = E_y \boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{H} = H_z \boldsymbol{\kappa}$, где $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ — орты координатных осей y и z . Таким образом, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения волны (волновому вектору \mathbf{k}). Тем самым взаимная перпендикулярность векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} доказана.

Аналогично показывается, взаимно перпендикулярными являются векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} в плоской электромагнитной волне, которая является решением системы (I). В этом случае $\mathbf{E} = E_z \boldsymbol{\kappa}$, $\mathbf{H} = H_y \boldsymbol{\gamma}$, вектор \mathbf{k} коллинеарен оси x .

Соотношение между модулями электрической \mathbf{E} и магнитной \mathbf{H} составляющих волны. Решениями волновых уравнений (15.13) и (15.14) являются, в частности, гармонические функции:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad (15.15)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2), \quad (15.16)$$

где ω — циклическая частота, $k = \omega / V$ — волновое число, V — фазовая скорость, α_1 и α_2 — начальные фазы волны в точках с координатой $x = 0$. Функции (15.15) и (15.16) описывают плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Найдем соотношение между величинами E_y и H_z . С этой целью подставим выражения E_y и H_z из (15.15) и (15.16) в первое уравнение системы (II), в результате получим

$$k E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0 \mu \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (15.17)$$

Для того чтобы уравнение (15.17) удовлетворялось при любых значениях t и x , должно выполняться условие $\alpha_1 = \alpha_2$, которое означает равенство фаз гармонических колебаний компонент поля E_y и H_z , заданных уравнениями (15.15) и (15.16). Следовательно, фазы колебаний электрической составляющей $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}$ и магнитной составляющей $\mathbf{H} = H_z \mathbf{z}$ плоской электромагнитной волны совпадают друг с другом.

Подставив в (15.17) волновое число k в виде:

$$k = \frac{\omega}{V} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu},$$

найдем соотношение между амплитудами E_m и H_m электрической и магнитной составляющей волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_m = \sqrt{\mu_0 \mu} H_m. \quad (15.18)$$

Очевидно, что аналогичное соотношение выполняется и для модулей E и H в любой момент времени (см. (15.1)).

Правовинтовая система векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} . Как показано выше, фаза гармонических колебаний компонент поля E_y и H_z , заданных уравнениями (15.15) и (15.16), одинаковая. Это означает, что в рассматриваемой плоской электромагнитной волне векторы $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}$, $\mathbf{H} = H_z \mathbf{z}$ и волновой вектор \mathbf{k} образуют правую тройку. Действительно, вектор \mathbf{k} направлен к положительному концу оси x , а векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} либо одновременно направлены к положительным концам координатных осей y и z , либо одновременно направлены к отрицательным концам координатных осей y и z . В противном случае, если, например, одновременно $E_y > 0$ и $H_z < 0$, колебания (15.15) и (15.16) противоположны по фазе, что противоречит доказанному выше утверждению.

Докажем теперь правовинтовое соотношение между векторами \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} в плоской волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси x . Вместо функций (15.15) и (15.16), которые описывают плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x , возьмем в качестве решения волновых уравнений (15.13) и (15.14) функции:

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx + \alpha_1), \quad (15.19)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t + kx + \alpha_2), \quad (15.20)$$

которые соответствуют плоской волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси x . Подставив E_y и H_z из (15.19) и (15.20) в первое уравнение системы (II), получим

$$-k E_m \sin(\omega t + kx + \alpha_1) = \mu_0 \mu \omega H_m \sin(\omega t + kx + \alpha_2),$$

или:

$$k E_m \sin(\omega t + kx + \alpha_1 + \pi) = \mu_0 \mu \omega H_m \sin(\omega t + kx + \alpha_2). \quad (15.21)$$

Для того чтобы уравнение (15.21) удовлетворялось при любых значениях t и x , должно выполняться условие $\alpha_1 + \pi = \alpha_2$. Отсюда сле-

дует, что фазы колебаний компонент поля E_y и H_z , заданные уравнениями (15.19) и (15.20), отличаются на π : $E_y = E_m \cos(\omega t + kx + \alpha_1)$, $H_z = H_m \cos(\omega t + kx + \alpha_1 + \pi)$. Это означает, что снова векторы $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}$, $\mathbf{H} = H_z \mathbf{z}$ и волновой вектор \mathbf{k} образуют правую тройку. Действительно, вектор \mathbf{k} теперь направлен к отрицательному концу оси x , при этом либо одновременно вектор \mathbf{E} направлен к положительному концу оси y , а вектор \mathbf{H} — к отрицательному концу оси z , либо одновременно вектор \mathbf{E} направлен к отрицательному концу оси y , а вектор \mathbf{H} — к положительному концу оси z . Соотношение (15.1), связывающее модули электрической и магнитной составляющей волны, остается справедливым.

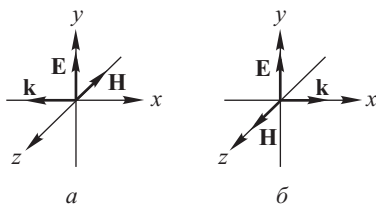


Рис. 45

Взаимное расположение векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} в плоской электромагнитной волне, бегущей в отрицательном направлении оси x показано на рис. 45 а, а в волне, бегущей в положительном направлении оси x — на рис. 45 б. Правовинтовое соотношение векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} является *внутренним свойством* бегущей электромагнитной волны, не зависящим от выбора системы координат.

Наглядное представление о структуре поля в электромагнитной волне можно получить, изобразив графики зависимости E_y и H_z от координаты x в некоторый фиксированный момент времени t (рис. 46). Если время t фиксировано, то E_y и H_z в (15.16) и (15.17) являются периодическими функциями координаты x с периодом, равным длине λ электромагнитной волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi V}{\omega} = VT,$$

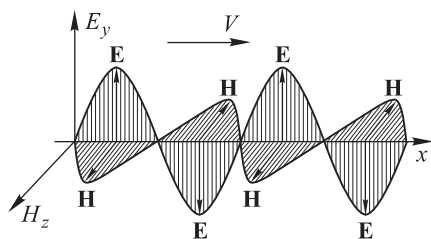


Рис. 46

где $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний электромагнитного поля в волне (ср. с определением длины упругой волны, данным в § 9).

§ 16. Энергия электромагнитных волн

Пусть электромагнитная волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$). Энергия волны складывается из энергии электрического и магнитного полей, соответственно, объемная плотность энергии представляется в виде суммы двух слагаемых (см. в кн. 3 «Электромагнетизм», § 15, 33):

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Учтем соотношение (15.1) между модулями магнитной и электрической составляющей волны: $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$. Тогда получим

$$w = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E \sqrt{\varepsilon_0} E}{2} + \frac{\sqrt{\mu_0} H \sqrt{\mu_0} H}{2} = \\ = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E \sqrt{\mu_0} H}{2} + \frac{\sqrt{\mu_0} H \sqrt{\varepsilon_0} E}{2} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \frac{EH}{c}.$$

Итак, объемная плотность энергии электромагнитной волны равна:

$$w = \frac{EH}{c}, \quad (16.1)$$

где E и H — модули векторов напряженности электрического и магнитного полей, c — скорость электромагнитных волн в вакууме.

Вектор плотности потока энергии, переносимой электромагнитной волной, или иначе *вектор Пойнтинга* (1852–1914), как и соответствующий вектор для упругой волны, равен произведению объемной плотности энергии волны w , скорости ее распространения c (для вакуума) и единичного вектора \mathbf{n} нормали к волновой поверхности (\mathbf{n} определяет направление распространения волны):

$$\mathbf{S} = w c \mathbf{n}.$$

В случае электромагнитной волны вектор плотности потока энергии принято обозначать буквой \mathbf{S} . Учитывая данное определение \mathbf{S} и выражение для объемной плотности энергии w (16.1), можно записать векторное равенство:

$$\mathbf{S} = EH \mathbf{n} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]. \quad (16.2)$$

Справедливость второго равенства в (16.2) легко обосновать. С учетом взаимной перпендикулярности векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне ясно, что модули векторов $[\mathbf{E} \mathbf{H}]$ и $EH \mathbf{n}$ равны друг другу. Кроме того, тройка векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{n} (\mathbf{n} сонаправлен с вектором \mathbf{k}), также как тройка векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и $[\mathbf{E} \mathbf{H}]$, образуют правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов $EH \mathbf{n}$ и $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$ совпадают (рис. 47). Поскольку векторы $EH \mathbf{n}$ и $[\mathbf{E} \mathbf{H}]$ равны по модулю и совпадают по направлению, они равны друг другу.

В соответствии с определением, интенсивность I электромагнитной волны равна модулю среднего во времени значения вектора плотности потока энергии:

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle EH \mathbf{n} \rangle|.$$

Если направление распространения волны с течением времени не изменяется, то есть вектор \mathbf{n} постоянный, то $\langle EH \mathbf{n} \rangle = \langle EH \rangle \mathbf{n}$. Тогда $I = |\langle EH \rangle \mathbf{n}|$. Величина EH и ее среднее по времени значение $\langle EH \rangle$ не

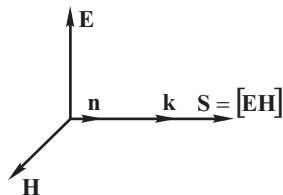


Рис. 47

отрицательны, а модуль вектора \mathbf{n} равен единице. Поэтому выражение для интенсивности электромагнитной волны принимает вид

$$I = \langle EH \rangle. \quad (16.3)$$

Подставив вместо E и H величины E_y и H_z из (15.15) и (15.16) и заменив $H_m = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E_m$ с учетом (15.1), получим

$$\begin{aligned} I &= \langle E_m H_m \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = \\ &= E_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m \langle \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \langle \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Среднее за период колебаний значение квадрата косинуса равно $1/2$, а величина $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ представляет собой скорость электромагнитной волны в вакууме. Поэтому интенсивность волны равна

$$I = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} c. \quad (16.4)$$

Интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды E_m колебаний вектора напряженности электрического поля в волне.

§ 17. Импульс и давление электромагнитного поля

Вычислим импульс электромагнитного поля косвенным способом, используя явление поглощения электромагнитных волн веществом. Пусть плоская электромагнитная волна падает нормально на плоскую поверхность слабо проводящего вещества с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Электрическое поле \mathbf{E} волны возбудит в веществе электрический ток, плотность \mathbf{j} которого равна:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E},$$

где λ — удельная электрическая проводимость вещества.

Магнитное поле \mathbf{H} волны будет действовать с силой Ампера \mathbf{F}_A на текущий в веществе электрический ток. Действие этой силы будет испытывать и образец вещества (тело), в котором течет ток. Рассчитаем величину импульса $d\mathbf{K}$, переданного волной за промежуток времени dt тонкому поверхностному слою вещества толщины dl и площадью dS , на который падает электромагнитная волна (рис. 48).

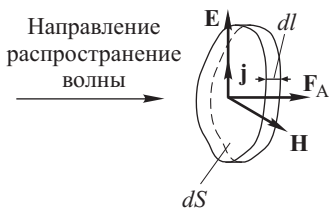


Рис. 48

Бесконечно малое приращение импульса $d\mathbf{K}$ вещества, заключенного в объеме $dSdl$, равно импульсу действующей на этот объем силы Ампера, а именно: $d\mathbf{K} = \mathbf{F}_A dt = [\mathbf{j} \mathbf{B}] dSdl dt = \mu_0 [\mathbf{j} \mathbf{H}] dSdl dt$. Запишем это равен-

ство в скалярном виде, учитывая, что угол между векторами \mathbf{j} и \mathbf{H} прямой:

$$dK = \mu_0 j H dS dl dt. \quad (17.1)$$

В соответствии с законом Джоуля–Ленца в локальной форме (см. кн. 3 «Электромагнетизм», § 19) в объеме вещества $dSdl$ за промежуток времени dt выделяется количество теплоты dW , равное

$$dW = j E dS dl dt. \quad (17.2)$$

Вычислим отношение dK/dW , поделив (17.1) на (17.2):

$$\frac{dK}{dW} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Учитывая, что для полей E и H в электромагнитной волне выполняется соотношение

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E,$$

получим

$$\frac{dK}{dW} = \frac{\mu_0}{E} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

Поскольку источником полученного веществом импульса dK и выделившейся теплоты dW является электромагнитная волна, отношение dK к dW должно быть равно отношению импульса электромагнитного поля к энергии этого поля в самой волне:

$$\frac{dK}{dW} = \frac{K_{\text{ед.об}}}{w} = \frac{1}{c}, \quad (17.3)$$

где $K_{\text{ед.об}}$ — импульс единицы объема электромагнитной волны, w — энергия единицы объема волны, которая согласно (16.1) равна $w = EH/c$. Из (17.3) получаем выражение для импульса единицы объема электромагнитной волны:

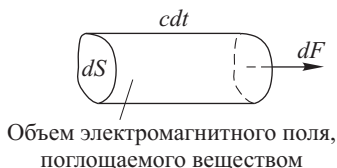
$$K_{\text{ед.об}} = \frac{w}{c} = \frac{EH}{c^2}, \quad (17.4)$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{K}_{\text{ед.об}} = \frac{[\mathbf{E} \mathbf{H}]}{c^2}.$$

Рассчитаем давление, оказываемое электромагнитным полем на поверхность вещества. Пусть падающая по нормали к поверхности некоторого тела электромагнитная волна полностью поглощается веществом. За промежуток времени dt через участок поверхности площадью dS телу будет передан импульс, равный импульсу поглощенного электромагнитного поля волны. За время dt поверхности вещества достигнет поле, находившееся на расстоянии cdt от поверхности, объем поглощенного электромагнитного поля составит величину $cdtdS$ (рис. 49). Импульс силы dF , действующей со стороны электромагнитного по-

ля на поверхности вещества, равен приращению импульса тела и, следовательно, импульсу поглощенного веществом электромагнитного поля:



$$dFdt = K_{\text{ед.об}} cdt dS = \frac{w}{c} cdt dS = wdt dS.$$

Отсюда находим величину давления $p = dF/dS$, оказываемого электромагнитной волной на поверхность тела:

Рис. 49

$$p = \frac{dF}{dS} = w. \quad (17.5)$$

Давление p в рассматриваемом случае полного поглощения электромагнитной волны поверхностью вещества равно объемной плотности энергии волны w .

§ 18. Дипольное излучение

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является электрический диполь, дипольный момент которого быстро меняется во времени (колеблется). Если в системе двух зарядов $+q$ и $-q$ один заряд покоится, а другой движется, то дипольный момент $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ (здесь \mathbf{l} — вектор, проведенный от заряда $-q$ к заряду $+q$) является функцией времени $\mathbf{p}(t) = q\mathbf{l}(t)$. Необходимым условием возникновения электромагнитного излучения является существование отличной от нуля второй производной по времени дипольного момента: $\ddot{\mathbf{p}}(t) = q\ddot{\mathbf{l}}(t) \neq 0$. Действительно, электромагнитная волна представляет собой систему взаимно порождающих друг друга *переменных* (изменяющихся с течением времени) электрического и магнитного полей, которые возникают в результате ускоренного движения электрических зарядов, при этом $\dot{\mathbf{l}}(t) \neq 0$ и $\ddot{\mathbf{p}}(t) = q\ddot{\mathbf{l}}(t) \neq 0$.

Пусть дипольный момент находящегося в вакууме диполя изменяется со временем по гармоническому закону:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t,$$

где \mathbf{p}_0 — постоянный вектор, направленный вдоль оси диполя, ω — циклическая частота колебаний. Длина волны λ дипольного излучения зависит от частоты ω :

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega},$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний.

Свойства электромагнитного излучения, порождаемого в пространстве колеблющимся диполем, существенно зависят от расстояния r до диполя. На расстояниях r , много меньших длины волны λ , дипольное излучение в каждый момент времени практически совпадает с электростатическим полем диполя (см. в кн. 3 «Электромагнетизм» § 11).

Если $r \sim \lambda$, картина электромагнитного поля усложняется: необходимо учитывать, в частности, магнитное поле элементарного тока, которым по существу является колеблющийся диполь, и рассчитывать это поле в соответствии с законом Био и Савара (см. там же, § 23). Области пространства, расположенные от диполя на расстояниях r , много больших длины волны λ , называются *волновой зоной диполя*. Рассмотрим дипольное излучение в волновой зоне.

Пусть точечный колеблющийся диполь (размеры диполя малы по сравнению с длиной волны излучения λ) находится в начале сферической системы координат, а дипольный момент \mathbf{p} и его вторая производная по времени $\ddot{\mathbf{p}}$ коллинеарны полярной оси z , то есть ось диполя совпадает с осью z , колебания заряда диполя происходят вдоль этой оси (рис. 50).

Если электромагнитная волна распространяется в вакууме или в однородной изотропной среде, волновой фронт и волновые поверхности в волновой зоне будут сферическими с центром в точке расположения диполя.

В каждой точке сферической волновой поверхности (положение этой точки задано проведенным к ней из начала координат радиусом-вектором \mathbf{r}) вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} направлен по касательной к «меридиану» (сечению сферической волновой поверхности плоскостью, проходящей через ось z); вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} направлен по касательной к «параллели» (сечению сферической волновой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси z); волновой вектор \mathbf{k} излучаемой диполем электромагнитной волны направлен вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} (рис. 50). Мгновенная картина силовых линий электромагнитного поля, порождаемого диполем, симметрична относительно оси z .

Обозначим через \mathbf{n} — единичный вектор, совпадающий по направлению с радиусом-вектором \mathbf{r} . Величина и направление полей \mathbf{E} и \mathbf{H} дипольного излучения определяются следующими формулами, которые вытекают из уравнений Максвелла и приводятся без вывода:

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{4\pi c} \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c), \mathbf{n}]}{r}, \quad (18.1)$$

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[[\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c), \mathbf{n}] \mathbf{n}]}{r}, \quad (18.2)$$

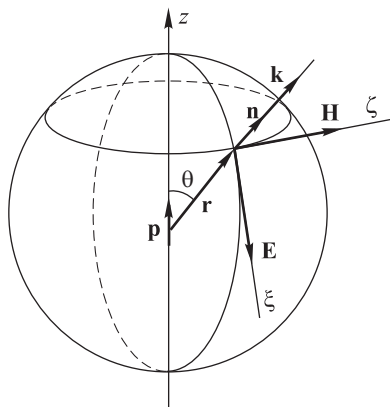


Рис. 50

где выражение $\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)$ означает, что вторая производная дипольного момента времени вычисляется в момент времени $(t - r/c)$. Здесь величина r/c — временная задержка, обусловленная конечностью скорости c распространения электромагнитной волны в пространстве.

Поместим в точку наблюдения, положение которой на сферической волновой поверхности задано радиусом-вектором \mathbf{r} , начало вспомогательной прямоугольной системы координат с осями ξ и ζ , направленными по касательной к меридиану и параллели соответственно. Как следует из формул (18.1) и (18.2), проекции на оси ζ и ξ векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} равны:

$$H_\zeta = \frac{1}{4\pi c} \frac{\ddot{p}_z \sin \theta}{r}, \quad (18.3)$$

$$E_\xi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}_z \sin \theta}{r}. \quad (18.4)$$

Здесь θ — полярный угол между координатной осью z (осью диполя) и радиусом-вектором \mathbf{r} , \ddot{p}_z — проекция на ось z второй производной дипольного момента по времени.

Рассмотрим пример, когда дипольное излучение вызвано гармоническими колебаниями диполя вдоль оси z , так что дипольный момент изменяется со временем по закону $p_z = p_0 \cos \omega t$. В этом случае проекции H_ζ и E_ξ имеют вид

$$H_\zeta = \frac{1}{4\pi c} \frac{\ddot{p}_z \sin \theta}{r} = \frac{-\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi c r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = H_m \cos(\omega t - kr),$$

$$E_\xi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}_z \sin \theta}{r} = \frac{-\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = E_m \cos(\omega t - kr),$$

где обозначены через H_m — амплитуда колебаний напряженности магнитного поля, E_m — амплитуда колебаний напряженности электрического поля, $k = \omega/c$ — волновое число. Амплитуды H_m и E_m зависят от полярного угла θ и расстояния r от диполя до точки наблюдения:

$$H_m \sim \frac{\sin \theta}{r}; \quad (18.5)$$

$$E_m \sim \frac{\sin \theta}{r}. \quad (18.6)$$

Диаграмма направленности дипольного излучения. Пусть точка наблюдения излучаемой диполем электромагнитной волны находится в волновой зоне и ее положение в ней задано полярным углом θ , азимутальным углом φ и расстоянием r до начала координат (здесь находится колеблющийся диполь). Поскольку мгновенная картина силовых линий электромагнитного поля, излучаемого диполем, симметрична относительно оси z , вдоль которой происходят колебания диполя, характеристики излучения не зависят от азимутального угла φ .

Диаграмма направленности дипольного излучения представляет собой графическую иллюстрацию зависимости интенсивности излучения от его направления. В силу упомянутой выше симметрии силовых линий электромагнитного поля диаграмма направленности имеет один и тот же вид в любой проходящей через координатную ось z плоскости. Обозначим одну из таких плоскостей через a . Для того чтобы построить диаграмму направленности в плоскости a , необходимо выполнить следующие действия. Определить интенсивность дипольного излучения во всех точках меридиана, образующегося в сечении сферической волновой поверхности некоторого радиуса r плоскостью a ; при этом интенсивность будет зависеть только от полярного угла θ , а радиус r выбранной волновой поверхности является постоянным параметром: $I = I(\theta, r)$. Затем отложить из начала координат во всех направлениях, соответствующих различным углам θ , отрезки с длиной, пропорциональной вычисленной для этого направления интенсивности излучения $I(\theta, r)$, и соединить концы отрезков линией. Полученная линия называется диаграммой направленности дипольного излучения (рис. 51).

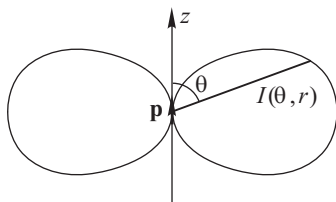


Рис. 51

Найдем зависимость интенсивности I дипольного излучения от полярного угла θ . В соответствии с формулой (16.3) интенсивность электромагнитной волны равна среднему по времени значению модуля вектора плотности потока энергии:

$$I = \langle EH \rangle.$$

Подставив в это выражение E_ξ и H_ζ из (18.3) и (18.4), получим

$$I = \langle EH \rangle = \langle E_\xi H_\zeta \rangle = \frac{\langle \dot{p}_z^2 \rangle}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = I_{\max} \sin^2 \theta, \quad (18.7)$$

где I_{\max} — числовой коэффициент, равный максимальному значению интенсивности излучения. Из формулы (18.7) следует, что в направлении оси z (направление колебаний диполя) при $\theta = 0$ интенсивность излучения равна нулю. Интенсивность $I = I_{\max}$ соответствует направлению $\theta = \pi/2$, то есть максимальной интенсивностью обладает излучение в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к оси z (так называемая экваториальная плоскость излучения диполя). Для остальных направлений интенсивность имеет значения, промежуточные между нулем и I_{\max} .

Мощность дипольного излучения. *Мощностью дипольного излучения* называется энергия, излучаемая диполем по всем направлениям за единицу времени. Мощность дипольного излучения равна потоку энергии, переносимой излучаемой электромагнитной волной

через любую замкнутую поверхность, внутри которой находится излучатель. Рассмотрим сферическую волновую поверхность радиуса r , расположенную в волновой зоне диполя. Площадь dF произвольного элементарного участка поверхности, положение которого на сфере радиуса r задано полярным углом θ и азимутальным углом φ , равна

$$dF = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

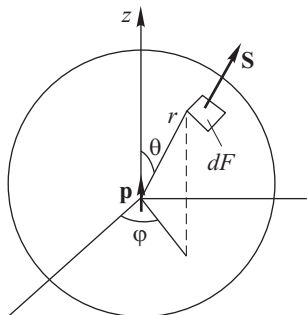


Рис. 52

Вектор плотности потока энергии дипольного излучения $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ перпендикулярен к рассматриваемой сферической поверхности (рис. 52). Поток энергии $d\Phi$, переносимой волной через площадку dF , равен произведению модуля вектора \mathbf{S} на площадь dF :

$$d\Phi = S dF = E H r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Подставив в это выражение E_ξ и H_ζ из (18.3) и (18.4) и интегрируя по поверхности сферы, найдем мощность дипольного излучения P :

$$\begin{aligned} P &= \oint S dF = \oint E H dF = \oint E_\xi H_\zeta dF = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}_z^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}_z^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2\ddot{\mathbf{p}}_z^2}{3c^3}. \quad (18.8) \end{aligned}$$

Если дипольный момент \mathbf{p} изменяется во времени по гармоническому закону $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$, то его вторая производная по времени $\ddot{\mathbf{p}}$ пропорциональна квадрату циклической частоты ω колебаний диполя, а мощность P — четвертой степени частоты ω^4 .

Задачи

3.1. Плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью $\lambda = 10$ мСм/м и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

3.2. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, частота которой $\nu = 100$ МГц и амплитуда электрической составляющей $E_m = 50$ мВ/м. Найти средние за период колебаний значения:

а) модуля плотности тока смещения;

б) плотности потока энергии.

3.3. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна частоты ω , для которой среднее значение плотности потока энергии равно $\langle S \rangle$. Найти амплитудное значение тока смещения в этой волне.

3.4. В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны, одна вдоль оси x , другая вдоль оси y :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - ky),$$

где вектор \mathbf{E}_0 направлен параллельно оси z . Найти среднее значение плотности потока энергии в точках плоскости $y = x$.

3.5. В вакууме вдоль оси x установилась стоячая электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти проекцию на ось x вектора Пойнтинга $S_x(x, t)$ и ее среднее за период колебаний значение.

3.6. Найти мощность излучения нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m , движущейся по круговой орбите радиуса R в поле неподвижного точечного заряда q .

3.7. Нерелятивистская заряженная частица движется в поперечном однородном магнитном поле с индукцией B . Найти закон убывания (за счет излучения) кинетической энергии частицы во времени. Через какое время ее кинетическая энергия уменьшится в e раз? Вычислить это время для электрона и протона.

3.8. В направлении максимального излучения на расстоянии $r_0 = 10$ м от элементарного диполя (волновая зона) амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 6$ В/м. Найти среднее значение плотности потока энергии на расстоянии $r = 20$ м от диполя в направлении, составляющем угол $\theta = 30^\circ$ с его осью.

3.9. Электромагнитная волна, излучаемая элементарным диполем, распространяется в вакууме так, что в волновой зоне на луче, перпендикулярном к оси диполя, на расстоянии r от него, среднее значение плотности потока энергии равно S_0 . Найти среднюю мощность излучения диполя.

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИКУ

§ 19. Свойства световой волны. Законы отражения и преломления

Свет представляет собой электромагнитные волны с частотами в диапазоне $(0,39-0,75) \cdot 10^{15}$ Гц, что соответствует длинам волн приблизительно от 400 до 760 нм. Фазовая скорость света V в прозрачной среде всегда меньше скорости света c в вакууме.

Абсолютный показатель преломления n среды равен отношению скорости света в вакууме c к фазовой скорости световой волны в данной среде:

$$n = \frac{c}{V}.$$

Как показано в § 14, фазовая скорость электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ равна $V = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Отсюда следует, что $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Для большинства прозрачных сред $\mu \approx 1$, поэтому при изучении оптических явлений будем полагать $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Световым вектором называется вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} световой волны. Физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое действия света обусловлены колебаниями именно электрической составляющей \mathbf{E} электромагнитной волны.

В § 15 показано, что имеет место следующее соотношение между амплитудами векторов напряженности электрического и магнитного поля в плоской электромагнитной волне: $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} E_m = \sqrt{\mu_0\mu} H_m$. Учитывая, что в прозрачных средах $\mu \approx 1$ и $n = \sqrt{\varepsilon}$, получим

$$H_m = E_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0}} = n E_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \quad (19.1)$$

Интенсивность света, которая по определению равна модулю среднего по времени вектора плотности потока энергии электромагнитной волны, может быть представлена в виде (см. формулу (16.3), а также (15.2) и (15.3) при $\alpha = 0$):

$$I = \langle EH \rangle = E_m H_m \langle \cos^2(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} n E_m^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad (19.2)$$

где учтено, что среднее за период значение квадрата косинуса равно 1/2 и использовано выражение (19.1) для амплитуды напряженности магнитного поля H_m волны.

Световым лучом называется направление в пространстве, вдоль которого распространяется световая энергия. В геометрической оптике за луч принимается линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны, т. е. с усредненным по времени вектором плотности потока энергии $\langle \mathbf{S} \rangle$. В однородных средах лучи представляют собой прямые линии. Если среда неоднородная (показатель преломления n меняется при переходе от одной точки среды к другой), то световые лучи искривляются. В изотропных средах направление $\langle \mathbf{S} \rangle$ совпадает с волновым вектором \mathbf{k} и с нормалью к волновой поверхности. В анизотропных средах нормаль к волновой поверхности, вообще говоря, не совпадает с направлением вектора $\langle \mathbf{S} \rangle$.

Поляризованным называется свет, в котором направления колебаний светового вектора упорядочены каким-либо образом. *Плоскополяризованным* или *линейно поляризованным* называется свет, в котором колебания светового вектора происходят в одной плоскости, проходящей через луч (рис. 53 а). В *естественном* свете колебания светового вектора происходят во всевозможных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис. 53 б). Направления колебаний быстро и беспорядочно сменяют друг друга — все направления равновероятны. Естественный свет испускают бытовые лампы накаливания, газоразрядные лампы, большинство других естественных и искусственных источников. Свет называется *поляризованным по кругу*, если конец вектора \mathbf{E} описывает окружности; *поляризованным по эллипсу*, если его конец описывает эллипс (рис. 53 в).

Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых отдельными атомами. Каждый атом излучает электромагнитную волну не непрерывно, а «порциями». Акт излучения становится

возможным только после того, как получив достаточную энергию атом перейдет из основного в так называемое возбужденное состояние. Собственно процесс излучения атомом электромагнитной волны длится приблизительно $\tau \sim 10^{-8}$ с, после чего атом снова оказывается в основном состоянии. Акты возбуждения и испускания электромагнитной волны чередуются.

Волновым цугом называется электромагнитная волна, испускаемая атомом за один акт излучения. Зная скорость света c и длительность

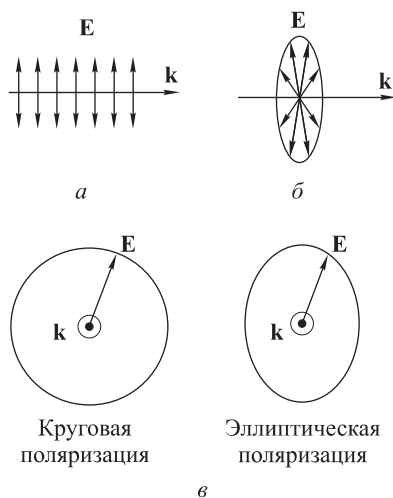


Рис. 53

процесса излучения τ , можно оценить длину l волнового цуга:

$$l \sim c\tau \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 10^{-8} \text{ с} = 3 \text{ м.}$$

Плоскость колебаний светового вектора в каждом цуге фиксирована, но для разных цугов она ориентирована случайным образом. Испускаемая телом световая волна складывается из огромного количества волновых цугов. Поэтому в естественном свете присутствуют колебания светового вектора всевозможных направлений.

Законы отражения и преломления света. Рассмотрим световую волну, которая падает на поверхность раздела двух однородных изотропных диэлектрических сред с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 54). *Плоскостью падения* называется плоскость, проходящая через падающий луч и нормаль к поверхности раздела, восстановленную в точке падения луча. *Угол падения* θ_1 — это угол между падающим лучом и указанной нормалью; *угол отражения* θ'_1 — это угол между отраженным лучом и нормалью; *угол преломления* θ_2 — это угол между преломленным лучом и нормалью.

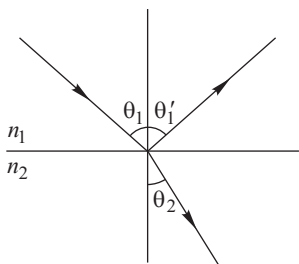


Рис. 54

Сформулируем законы отражения и преломления света. Падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости, проходящей через нормаль к поверхности раздела, восстановленной в точке падения луча. Угол падения равен углу отражения ($\theta_1 = \theta'_1$). Угол падения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны соотношением:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Обоснуем эти утверждения в частном случае, когда падающий на поверхность раздела сред свет представляет собой плоскую гармоническую монохроматическую волну (такая волна характеризуется фиксированным значением циклической частоты ω), а колебания световых векторов \mathbf{E} , \mathbf{E}' , \mathbf{E}'' соответственно в падающей, отраженной и преломленной волнах происходят в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения (рис. 55). Пусть в некоторой точке A плоской поверхности раздела сред колебания светового вектора в падающей волне описываются выражением: $E = E_m \cos \omega t$. В отраженной и преломленной волнах, вообще говоря, может измениться как частота колебаний, так и их фаза: $E' = E'_m \cos(\omega' t + \alpha')$, $E'' = E''_m \cos(\omega'' t + \alpha'')$. В соответствии с граничными условиями для тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля (см. в кн. 3 «Электродинамика», § 10) должно выполняться соотношение:

$$E + E' = E'', \quad (19.3)$$

или:

$$E_m \cos \omega t + E'_m \cos (\omega' t + \alpha') = E''_m \cos (\omega'' t + \alpha''). \quad (19.4)$$

Сложим гармонические колебания E и E' в левой части полученного выражения с помощью векторной диаграммы, показанной на рис. 56

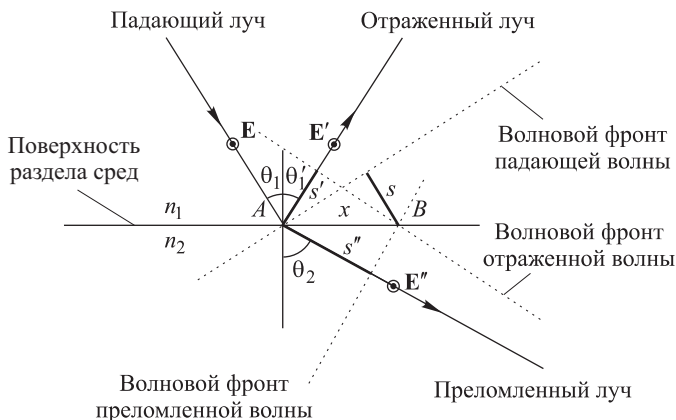


Рис. 55

(метод сложения гармонических колебаний с помощью векторных диаграмм см. в кн. 1 «Механика», § 45.) Используя теорему косинусов легко получить, что результирующий вектор $E_{\text{рез}}$ имеет длину:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E^2 + E'^2 + 2EE' \cos [(\omega' - \omega)t + \alpha']}. \quad (19.5)$$

Величина $E_{\text{рез}}$, вообще говоря, изменяется с течением времени.

Для того чтобы при сложении двух гармонических колебаний E и E' снова получилось гармоническое колебание, величина $E_{\text{рез}}$ должна быть постоянной, а полученный при сложении вектор должен вращаться с постоянной угловой скоростью вокруг своего начала. Как следует из (19.5) и рис. 56, оба требования удовлетворяются при условии $\omega = \omega'$, то есть частота колебаний светового вектора в падающей и отраженной волне одинаковая. Сложив описанным способом колебания E и E' в выражении (19.5), получим:

$$E_{\text{рез}} \cos (\omega t + \alpha_{\text{рез}}) = E''_m \cos (\omega'' t + \alpha''). \quad (19.6)$$

Здесь $E_{\text{рез}}$ вычисляется по формуле (19.5) при условии $\omega = \omega'$, а начальная фаза $\alpha_{\text{рез}}$ легко может быть найдена из векторной диаграммы (рис. 56).

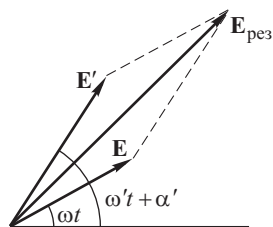


Рис. 56

Равенство гармонических колебаний в (19.6) при любых значениях t возможно только при выполнении условия: $\omega = \omega''$. Учитывая все вышеизложенное, можно утверждать, что циклическая частота падающей, отраженной и преломленной волн одинакова: $\omega = \omega' = \omega''$.

Граничное условие (19.3) для тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля должно выполняться в любой точке поверхности раздела сред. Запишем его, например, для точки B поверхности раздела, расположенной на некотором расстоянии x от точки A :

$$E_m \cos(\omega t - ks) + E'_m \cos(\omega' t - k' s' + \alpha') = E''_m \cos(\omega'' t - k'' s'' + \alpha''), \quad (19.7)$$

где s , s' и s'' — расстояния, которые пройдут волновые фронты соответственно падающей, отраженной и преломленной волн при их перемещении из положения, когда все три фронта пересекли точку A , в положение, когда все указанные фронты пересекут точку B (выделенные жирными линиями отрезки s , s' и s'' на рис. 55); k , k' и k'' — волновые числа падающей, отраженной и преломленной волн. Из рис. 55 следует:

$$s = x \sin \theta_1, \quad s' = x \sin \theta'_1, \quad s'' = x \sin \theta_2.$$

Если выполнено граничное условие (19.4) в точке A , то граничное условие (19.7) в произвольной точке B поверхности раздела будет выполняться, если фазы колебаний векторов \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' при перемещении фронтов соответствующих волн из точки A в точку B изменятся на одинаковую для всех волн величину:

$$ks = k's' = k''s'',$$

или:

$$ks \sin \theta_1 = k'x \sin \theta'_1 = k''x \sin \theta_2. \quad (19.8)$$

Поскольку волновые числа k и k' падающей и отраженной волн одинаковы: $k = k' = \omega/V_1 = \omega n_1/c$, где V_1 — фазовая скорость падающей и отраженной волн в среде с показателем преломления n_1 , то из первого равенства (19.8) следует:

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \sin \theta'_1, \\ \theta_1 &= \theta'_1. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Равенство (19.9) означает, что угол падения света равен углу его отражения.

Волновое число k'' преломленной волны равно: $k'' = \omega/V_2 = \omega n_2/c$, где V_2 — фазовая скорость волны в среде с показателем преломления n_2 . С учетом этого из второго равенства (19.8) получим

$$\begin{aligned} k'x \sin \theta'_1 &= k''x \sin \theta_2, \\ \frac{\omega n_1}{c} x \sin \theta'_1 &= \frac{\omega n_2}{c} x \sin \theta_2, \\ n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (19.10)$$

Законы отражения (19.9) и преломления (19.10) доказаны.

Явление полного внутреннего отражения. Рассмотрим световую волну, которая переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 , причем $n_1 > n_2$ (рис. 57). При указанном соотношении абсолютных показателей преломления принято говорить, что первая среда является оптически более плотной, чем вторая.

Предельным углом полного внутреннего отражения $\theta_{\text{пред}}$ называется такой угол падения, для которого угол преломления равен 90° . В этом случае закон преломления имеет вид

$$n_1 \sin \theta_{\text{пред}} = n_2 \sin 90^\circ = n_2.$$

Отсюда находим:

$$\sin \theta_{\text{пред}} = n_2/n_1.$$

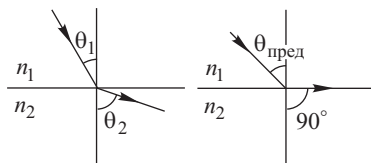


Рис. 57

При углах падения, превышающих предельный угол, световая волна проникает во вторую среду лишь на расстояния порядка длины волны λ и возвращается в первую среду. В этом случае преломленный луч во второй среде не распространяется. Это явление называется *полным внутренним отражением*. Явление полного внутреннего отражения можно наблюдать только при переходе света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду.

§ 20. Формулы Френеля. Закон Брюстера

Формулы Френеля. Снова обозначим через n_1 и n_2 абсолютные показатели преломления двух однородных изотропных прозрачных диэлектрических сред, имеющих плоскую поверхность раздела. Плоская световая волна переходит из первой среды во вторую, при этом углы падения и отражения равны θ_1 , а угол преломления θ_2 . Установим соотношения между амплитудами колебаний светового вектора в падающей, отраженной и преломленной волнах.

Ниже будет показано, что как естественный, так и поляризованный свет может быть представлен как наложение (суперпозиция) световых волн, поляризованный в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Учитывая это обстоятельство, достаточно рассмотреть закономерности отражения и преломления света на поверхности раздела диэлектриков только для двух типов волн: 1) волна, в которой колебания светового вектора происходят в плоскости падения; 2) волна, в которой направление колебаний светового вектора перпендикулярно плоскости падения.

Случай 1 (плоскость колебаний светового вектора совпадает с плоскостью падения). На рис. 58 изображены в некоторый момент

времени векторы напряженности электрического поля \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' и магнитного поля \mathbf{H} , \mathbf{H}' и \mathbf{H}'' в падающей, отраженной и преломленной волнах соответственно. Будем считать, что вектор \mathbf{E} задан, и выразим через него векторы \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' . С этой целью запишем граничные условия для тангенциальных компонент векторов напряженности электрического и магнитного поля на поверхности

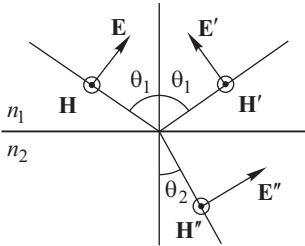


Рис. 58

раздела сред (см. в кн. 3 «Электромагнетизм», § 10 и 30). Тангенциальные компоненты суммарного электрического и суммарного магнитного поля по разные стороны границы раздела диэлектриков должны быть одинаковыми:

$$\begin{aligned} E_{\tau} + E'_{\tau} &= E''_{\tau}, \\ H + H' &= H''. \end{aligned} \quad (I)$$

Поскольку векторы \mathbf{H} , \mathbf{H}' и \mathbf{H}'' в рассматриваемом случае параллельны поверхности раздела диэлектриков, их тангенциальные компоненты H_{τ} , H'_{τ} , H''_{τ} равны модулям H , H' , H'' соответствующих векторов, что и отражено во втором уравнении системы (I).

Подставим в первое уравнение системы (I) вытекающие из чертежа на рис. 58 соотношения:

$$E_{\tau} = E \cos \theta_1, \quad E'_{\tau} = -E' \cos \theta_1, \quad E''_{\tau} = E'' \cos \theta_2,$$

где E , E' и E'' — модули векторов \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' соответственно.

Учитывая связь (19.1) между амплитудами электрической и магнитной составляющей электромагнитной волны, подставим во второе уравнение системы (I) следующие выражения:

$$H = n_1 E \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad H' = n_1 E' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad H'' = n_2 E'' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

Воспользовавшись законом преломления света (19.10), заменим показатель преломления n_2 через: $n_2 = n_1 \sin \theta_1 / \sin \theta_2$.

В результате выполненных подстановок и преобразований системы (I) получим

$$\begin{aligned} E \cos \theta_1 - E' \cos \theta_1 &= E'' \cos \theta_2, \\ E \sin \theta_2 + E' \sin \theta_2 &= E'' \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Отсюда найдем соотношения между модулями векторов E , E' , E'' :

$$E' = E \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (20.1)$$

$$E'' = E \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (20.2)$$

Соотношения (20.1) и (20.2) устанавливают связь между модулями E , E' , E'' (а также амплитудами) световых векторов в падающей, отраженной и преломленной волнах на границе раздела диэлектриков.

Случай 2 (плоскость колебаний светового вектора перпендикулярна к плоскости падения). Пусть векторы напряженности электрического поля в падающей, отраженной и преломленной волнах \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' перпендикулярны к плоскости падения (рис. 59).

Граничные условия для тангенциальных компонент векторов напряженности электрического и магнитного поля на поверхности раздела диэлектриков имеют вид

$$\begin{aligned} E + E' &= E'', \\ H_\tau + H'_\tau &= H''_\tau. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Поскольку в рассматриваемом случае векторы \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' параллельны поверхности раздела диэлектриков, их тангенциальные компоненты E_τ , E'_τ и E''_τ совпадают с модулями E , E' и E'' соответствующих векторов, что учтено при записи первого уравнения системы (II).

Подставим во второе уравнение системы (II) соотношения:

$$H_\tau = H \cos \theta_1, \quad H'_\tau = -H' \cos \theta_1, \quad H''_\tau = H'' \cos \theta_2,$$

которые вытекают из чертежа рис. 59.

После замены напряженности магнитного поля через напряженность электрического поля:

$$H = n_1 E \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad H' = n_1 E' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad H'' = n_2 E'' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}};$$

и подстановки показателя преломления n_2

$$n_2 = n_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2},$$

система (II) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} E + E' &= E'', \\ E \sin \theta_2 \cos \theta_1 - E' \sin \theta_2 \cos \theta_1 &= E'' \sin \theta_1 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Выразив отсюда E' и E'' через E , найдем соотношения между модулями (а также и амплитудами) световых векторов в падающей,

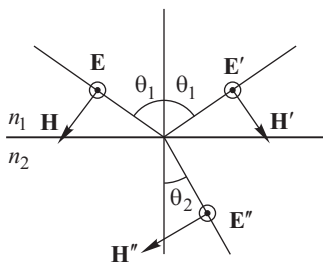


Рис. 59

отраженной и преломленной волнах на поверхности раздела диэлектриков:

$$E' = -E \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (20.3)$$

$$E'' = E \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (20.4)$$

Соотношения (20.1)–(20.4) называются *формулами Френеля* (1788–1827).

Формулы Френеля не только устанавливают связь между модулями световых векторов в падающей, отраженной и преломленной волнах на границе двух сред, но и содержат информацию о фазовых соотношениях этих волн.

Рассмотрим в качестве примера формулу (20.1). Пусть световая волна, вектор **E** в которой лежит в плоскости падения, переходит из оптически менее плотной среды с показателем n_1 в оптически более плотную среду с показателем n_2 ($n_1 < n_2$), причем падение света на поверхность раздела почти нормальное. В этих условиях углы θ_1 и θ_2 малы, так что выполняются приближенные соотношения: $\operatorname{tg} \theta_{1,2} \approx \sin \theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$. Равенство (20.1) будет иметь вид

$$E' = E \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \approx E \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}.$$

В приближении малых углов из закона преломления $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ получим

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2.$$

Исключая углы θ_1 и θ_2 , найдем

$$E' \approx E \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \quad (20.5)$$

Если модуль светового вектора падающей волны E — наперед заданная положительная величина, то, как следует из равенства (20.5) с учетом соотношения $n_2 - n_1 > 0$, модуль светового вектора отраженной волны E' — также положительная величина. Таким образом, определенные с помощью формул Френеля знаки величин E и E' не противоречат исходному предположению о том, как направлены векторы **E** и **E'** (иначе говоря, направления изображенных на рис. 58 векторов **E** и **E'** были выбраны правильно).

Как видно из рис. 58, при стремлении угла падения θ_1 к нулю векторы **E** и **E'** направлены навстречу друг другу, что означает скачкообразное изменение фазы электромагнитной волны на величину π при ее отражении.

Итак, из формул Френеля, в частности, следует: *при отражении света под малыми углами от оптически более плотной среды фаза волны скачком меняется на величину π* . Это утверждение будет использоваться в дальнейшем.

Проанализируем теперь случай почти нормального падения на границу раздела двух диэлектриков световой волны, в которой направление колебаний светового вектора перпендикулярно плоскости падения. С этой целью воспользуемся формулой (20.3). Пусть имеет место соотношение $n_1 < n_2$. Учитывая, что углы θ_1 и θ_2 малы, из (20.3) с учетом закона преломления $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ получим

$$E' = -E \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \approx -E \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \approx -E \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \quad (20.6)$$

Если модуль светового вектора падающей волны E — наперед заданная положительная величина, то из равенства (20.6) при условии $n_2 - n_1 > 0$ следует, что величина E' , которая была введена в рассмотрение как модуль светового вектора отраженной волны, оказывается величиной отрицательной. Однако модуль вектора не может быть отрицательным. Полученное противоречие свидетельствует о том, что первоначальное предположение о том, как направлены векторы \mathbf{E} и \mathbf{E}' (см. рис. 59), было неверным. Для устранения противоречия следует изменить направление вектора \mathbf{E}' на противоположное. При этом световые векторы \mathbf{E} и \mathbf{E}' оказываются направленными навстречу друг другу, что снова (как и в предыдущем примере) означает скачкообразное изменение фазы волны на величину π при отражении. Таким образом, для двух видов падающей на границу раздела сред световой волны (плоскость колебаний светового вектора параллельна или перпендикулярна плоскости падения) анализ фазовых характеристик падающей и отраженной волн с помощью формул Френеля привел к одному и тому же результату — выводу о скачкообразном изменении фазы волны при отражении света от оптически более плотной среды. Этот результат вполне ожидаемый, так как при почти нормальном падении света на поверхность раздела двух сред рассмотренные два случая расположения плоскости колебаний светового вектора относительно плоскости падения с физической точки зрения становятся по существу неразличимыми.

Закон Брюстера. Пусть световая волна проходит через плоскую поверхность раздела из одной среды с абсолютным показателем преломления n_1 в другую среду с абсолютным показателем преломления n_2 .

Углом Брюстера (1781–1868) называется такой угол падения, для которого выполняется соотношение:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (20.7)$$

Угол Брюстера обладает следующим свойством: *при падении света на поверхность раздела двух сред под углом Брюстера угол между отраженным и преломленным лучами прямой* (рис. 60).

Для доказательства утверждения проведем тождественные преобразования и воспользуемся определением (20.7):

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = \frac{\sin \theta_{\text{Бр}}}{\cos \theta_{\text{Бр}}} = \frac{\sin \theta_{\text{Бр}}}{\sin(\pi/2 - \theta_{\text{Бр}})} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (20.8)$$

Учтем закон преломления света:

$$\frac{\sin \theta_{\text{Бр}}}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (20.9)$$

Из уравнений (20.8) и (20.9) находим

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{\text{Бр}} = \theta_2.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{Бр}} + \theta_2 &= \frac{\pi}{2}, \\ \pi - (\theta_{\text{Бр}} + \theta_2) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Последнее равенство означает, что угол между отраженным и преломленным лучами прямой (см. рис. 60).

Закон Брюстера состоит в следующем. Если угол падения неполяризованного света на плоскую поверхность раздела двух диэлектриков равен углу Брюстера, то отраженная световая волна является плоско поляризованной: плоскость колебаний светового вектора в ней перпендикулярна плоскости падения.

Если угол падения отличен от нуля и не равен углу Брюстера, отраженный свет частично поляризован.

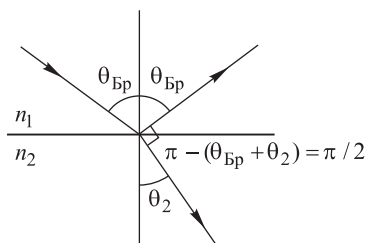


Рис. 60

Всякую световую волну, в частности, свет, падающий на границу двух диэлектриков, можно представить как наложение двух волн, в одной из которых плоскость колебаний светового вектора параллельна, в другой — перпендикулярна к плоскости падения. Применим формулу Френеля (20.1) к волне, в которой

световой вектор *параллелен* плоскости падения, учитывая при этом, что при падении под углом Брюстера выполняется соотношение (20.10) для углов падения $\theta_{\text{Бр}}$ и преломления θ_2 :

$$E' = E \frac{\operatorname{tg}(\theta_{\text{Бр}} - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_{\text{Бр}} + \theta_2)} = E \frac{\operatorname{tg}(\theta_{\text{Бр}} - \theta_2)}{\operatorname{tg} \pi/2} = 0. \quad (20.11)$$

Из (20.11) следует, что амплитуда светового вектора \mathbf{E}' в отраженной волне равна нулю, иначе говоря, отраженной волны в этом случае просто не существует, свет, преломляясь, полностью переходит во вторую среду.

Полученный результат (20.11) означает, в частности, что при падении под углом Брюстера параллельного пучка естественного света на границу двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластинки) в отраженном свете будут отсутствовать электромагнитные волны, в которых плоскость колебаний светового вектора параллельна плоскости падения. Отраженный свет окажется полностью поляризованным, причем вектор \mathbf{E}' перпендикулярен к плоскости падения. Рисунок 61, на котором колебания светового вектора в плоскости падения отмечены стрелками, а в перпендикулярном к этой плоскости направлении — точками в кружках, иллюстрирует явление поляризации света при отражении.

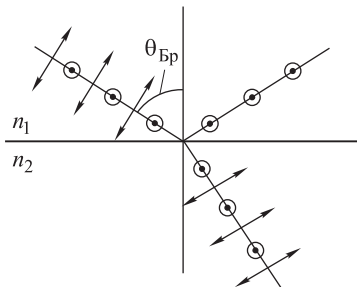


Рис. 61

Коэффициенты отражения и пропускания световой волны.

Пусть свет падает на границу двух диэлектриков.

Коэффициентом отражения ρ называется отношение интенсивности I' отраженного света к интенсивности I падающего:

$$\rho = \frac{I'}{I}.$$

Коэффициентом пропускания τ называется отношение интенсивности I'' преломленного к интенсивности I падающего света:

$$\tau = \frac{I''}{I}.$$

Как следует из формул Френеля, коэффициенты отражения ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} света, в котором вектор напряженности электрического поля параллелен и перпендикулярен плоскости падения соответственно, будут различными. То же относится и к коэффициентам пропускания. Вычислим коэффициенты отражения ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} для указанных двух типов падающего на границу диэлектриков света.

Согласно соотношению (19.2) интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора. Используя формулы Френеля (20.1) и (20.3), получим

$$\rho_{\parallel} = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{E_{\parallel}'^2}{E_{\parallel}^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (20.12)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{E_{\perp}'^2}{E_{\perp}^2} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (20.13)$$

Примерный вид графиков зависимости ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} от угла падения θ_1 представлен на рис. 62 а для случая $n_1 < n_2$ и на рис. 62 б для случая $n_1 > n_2$.

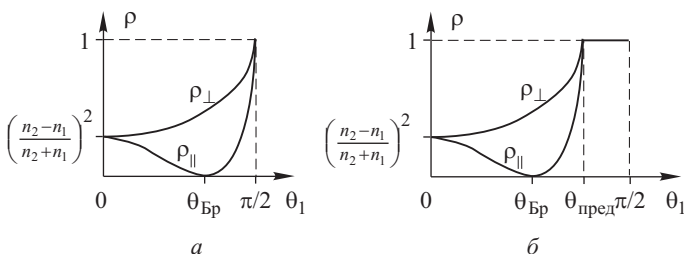


Рис. 62

С помощью формул Френеля можно доказать, что сумма коэффициентов отражения и пропускания света равна единице:

$$\rho + \tau = 1.$$

Это соотношение является следствием закона сохранения энергии в применении к световой волне.

§ 21. Фотометрические величины и единицы

Световой поток. Во всякой реально существующей световой волне присутствует излучение с различными длинами волн λ , принадлежащими более или менее широкому интервалу $\Delta\lambda$. Поток энергии, переносимой световой волной, вообще говоря, неравномерно распределен по длинам волн. Так, в солнечном свете максимум переносимой энергии приходится на зеленую область спектра, в бытовых лампах накаливания — на красную область, а также на невидимый глазом инфракрасный диапазон.

Полный поток энергии Φ_{Σ} , переносимой световой волной, можно представить в следующем виде:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda,$$

где $\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_{\Sigma}}{d\lambda}$ — функция распределения потока энергии излучения по длинам волн, $d\Phi_{\Sigma}$ — поток энергии, приходящийся на бесконечно малый интервал длин волн $d\lambda$.

Действие света на глаз (зрительное ощущение) зависит от длины волны излучения. Из опыта известно, что наибольшее зрительное ощущение вызывает зеленый свет ($\lambda \approx 555$ нм). При увеличении или уменьшении длины волны чувствительность глаза к свету

падает. Электромагнитные волны ультрафиолетового ($\lambda < 400$ нм) и инфракрасного ($\lambda > 760$ нм) диапазона вообще не вызывают зрительного ощущения. Для характеристики чувствительности человеческого глаза к излучению различных длин волн вводится экспериментально определяемая функция относительной спектральной чувствительности глаза $V(\lambda)$.

Функция относительной спектральной чувствительности $V(\lambda)$ представляет собой зависимость зрительного ощущения глаза от длины волны излучения при неизменном потоке энергии, попадающем в глаз. Значение $V(\lambda)$ принято равным единице при $\lambda = 555$ нм, что соответствует максимальной чувствительности глаза; $V(\lambda)$ — безразмерная величина. Примерный график функции $V(\lambda)$ представлен на рис. 63.

Воспринимаемая глазом интенсивность света зависит от двух факторов — от интенсивности электромагнитной волны и, соответственно, потока энергии, попадающей в глаз, и от чувствительности глаза к излучению данной длины волны. Для

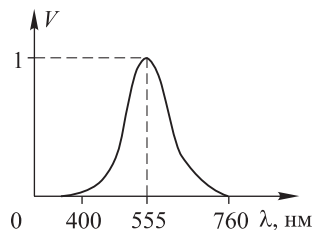


Рис. 63

характеристики света с учетом его способности вызывать то или иное зрительное ощущение вводится понятие светового потока.

Световым потоком Φ называется поток энергии световой волны, оцениваемый по зрительному ощущению. Количественное определение светового потока дается с использованием функции распределения потока энергии излучения по длинам волн $\varphi(\lambda)$ и функции относительной спектральной чувствительности глаза $V(\lambda)$, а именно:

$$\Phi = \int_0^{\infty} V(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Единица светового потока — *люмен* (лм). Световой поток в один люмен (1 лм) испускает точечный источник излучения с силой света в одну *канделу* (1 кд) в телесный угол в один *стерадиан* (1 ср); определение силы света и единицы силы света канделы дается ниже.

Опытным путем установлено, что световому потоку 1 лм соответствует поток энергии приблизительно 0,0015 Вт, при условии, что длина волны излучения составляет 555 нм.

Сила света. Сила света — это фотометрическая величина, которая используется для характеристики точечного источника света.

Точечным будем называть источник света, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до места наблюдения (регистрации) светового излучения.

Сила света I равна световому потоку, испускаемому точечным источником в единичный телесный угол в заданном направлении:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

где $d\Phi$ — световой поток, испускаемый в элементарный телесный угол $d\Omega$ (см. рис. 64).

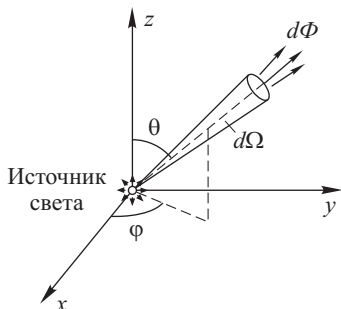


Рис. 64

Элементарный телесный угол $d\Omega$ в сферических координатах выражается формулой:

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где θ — полярный угол, φ — азимутальный угол (рис. 64). Телесный угол измеряется в стерadianах.

Поток энергии, испускаемой источником, вообще говоря, зависит от направления: $d\Phi = d\Phi(\theta, \varphi)$. Следовательно, сила света I также зависит от направления излучения: $I = I(\theta, \varphi)$. Если

же сила света не зависит от направления излучения, то источник называется *изотропным*.

Единица силы света — *кандела* (кд) — является основной единицей системы СИ. Одна кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила излучения которого в этом направлении равна $1/683$ Вт/ср.

Освещенность. Рассмотрим поверхность, на которую падает световая волна.

Освещенностью E называется величина, равная полному падающему на освещаемую поверхность световому потоку, отнесенному к единице площади поверхности:

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS},$$

где $d\Phi_{\text{пад}}$ — световой поток, падающий на элементарный участок площади dS освещаемой поверхности (рис. 65).

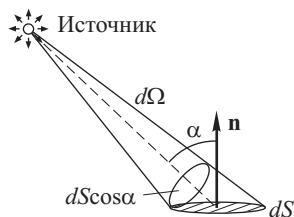


Рис. 65

Единица освещенности — *люкс* (лк).

Один люкс соответствует освещенности одного квадратного метра площади поверхности равномерно распределенным световым потоком в один *люмен*:

$$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм}/\text{м}^2.$$

Пример. Вычислим освещенность элементарной площадки площадью dS , расположенной на расстоянии r от точечного источника с силой света I . Пусть угол между нормалью \mathbf{n} к площадке и направлением на источник света равен α (рис. 65). На площадку падает световой поток $d\Phi_{\text{пад}}$, испускаемый точечным источником в телесный угол $d\Omega$, который можно вычислить по формуле:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}.$$

В соответствии с определением освещенность площадки равна:

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS} = \frac{Id\Omega}{dS} = \frac{IdS \cos \alpha}{dSr^2} = \frac{I \cos \alpha}{r^2}.$$

Освещенность максимальна, если площадка расположена перпендикулярно к направлению на источник ($\alpha = 0$), и равна нулю, если свет падает по касательной к поверхности площадки ($\alpha = \pi/2$).

Яркость. Фотометрическая величина, называемая яркостью, служит характеристикой протяженного источника света.

Яркостью L называется величина, равная световому потоку, испускаемому участком поверхности единичной площади протяженного источника света в единичный телесный угол в заданном направлении. Математически строгое определение яркости L следующее:

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega \Delta S \cos \theta}.$$

Здесь ΔS — площадь малого участка поверхности протяженного источника света, $d\Omega$ — элементарный телесный угол, направление которого составляет угол θ с нормалью \mathbf{n} к поверхности источника, $d\Phi$ — световой поток, испускаемый участком поверхности площади ΔS в телесный угол $d\Omega$ (рис. 66). Площадка ΔS , которая фигурирует в определении яркости, должна быть настолько малой, чтобы при наблюдении излучения (то есть в месте регистрации светового потока $d\Phi$) ее можно было считать точечным источником.

Вообще говоря, яркость L зависит от направления излучения: $L = L(\theta, \varphi)$, где θ — полярный, φ — азимутальный углы.

Ламбертовским (косинусным) излучателем называется источник, яркость L которого одинакова по всем направлениям ($L = \text{const}$). Световой поток $d\Phi$, посылаемый элементом ΔS поверхности ламбертовского источника в телесный угол $d\Omega$, пропорционален $\cos \theta$:

$$d\Phi = L d\Omega \Delta S \cos \theta.$$

Единица яркости — *кандела на квадратный метр* (кд/м²).

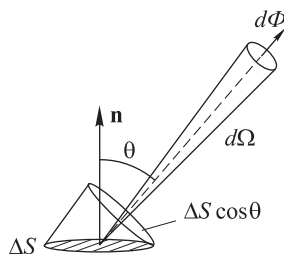


Рис. 66

Светимость. Фотометрическая величина, называемая светимостью, является характеристикой протяженного источника света.

Светимость M источника равна световому потоку, испускаемому единицей площади поверхности источника по всем направлениям в телесный угол 2π стерадиан. Количественное определение светимости M таково:

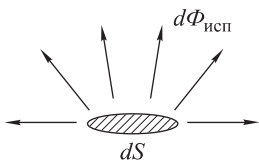


Рис. 67

$$M = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS},$$

где $d\Phi_{\text{исп}}$ — световой поток, испускаемый элементом поверхности источника площади dS по всем направлениям в телесный угол 2π стерадиан (рис. 67).

Единица светимости — люмен на квадратный метр (лм/м²).

Пример. Вычислим светимость M ламбертовского излучателя, яркость которого равна L .

Световой поток $d\Phi$, посылаемый участком поверхности ΔS излучателя в элементарный телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, равен

$$d\Phi = L d\Omega \Delta S \cos \theta = L \sin \theta d\theta d\varphi \Delta S \cos \theta.$$

Здесь θ и φ — сферические координаты (полярный и азимутальный углы), определяющие направление излучения (положение в пространстве элементарного телесного угла $d\Omega$); полярный угол θ является углом между нормалью к излучающей поверхности и направлением излучения.

Световой поток Φ , излучаемый по всем направлениям в телесный угол 2π стерадиан, вычисляется интегрированием по углу θ в пределах от нуля до $\pi/2$ и по углу φ в пределах от нуля до 2π :

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} L \Delta S \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \pi L \Delta S.$$

Отсюда светимость ламбертовского источника

$$M = \frac{\Phi}{\Delta S} = \pi L.$$

§ 22. Законы геометрической оптики. Принцип Ферма

Геометрической (лучевой) оптикой называется раздел оптики, в котором не принимается во внимание волновая природа света. Законы геометрической оптики выполняются, если длина световой волны пренебрежимо мала по сравнению с характерными размерами неоднородностей среды, в которой распространяется свет. Основные законы геометрической оптики могут быть сформулированы следующим образом.

1. В однородной среде свет распространяется прямолинейно (световые лучи представляют собой прямые линии).

2. Световые лучи, пересекаясь, не возмущают друг друга; в частности, не изменяется направление распространения лучей.

3. При пересечении границы раздела двух сред падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости (плоскости падения); угол падения равен углу отражения.

4. Угол падения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны законом преломления $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред.

В основе геометрической оптики лежит *принцип Ферма*: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время или оптическая длина пути которого минимальна.

Определим понятие оптической длины пути и покажем, что условия минимальности времени прохождения и минимальности оптической длины пути эквивалентны. Пусть свет распространяется в однородной среде с абсолютным показателем преломления n от точки 1 к точке 2, расстояние между которыми равно s (рис. 68 а).

Оптической длиной пути называется величина:

$$L = ns.$$

Если показатель преломления n меняется при переходе от одной точки среды к другой (среда неоднородная), то свет будет распространяться, вообще говоря, по некоторой кривой линии (рис. 68 б). В этом случае оптическая длина пути света определяется через интеграл вдоль кривой:

$$L = \int_1^2 n(s) ds.$$

Время распространения света из точки 1 в точку 2 равно

$$t = \int_1^2 \frac{ds}{V} = \int_1^2 \frac{nds}{c} = \frac{L}{c}, \quad (22.1)$$

где $V = c/n$ — фазовая скорость света в среде с абсолютным показателем преломления n , c — скорость света в вакууме, L — оптическая длина пути.

Из соотношения (22.1) видно, что минимальному времени распространения света из точки 1 в точку 2 соответствует минимальная оптическая длина пути L и наоборот.

На основе принципа Ферма можно доказать законы отражения и преломления света.

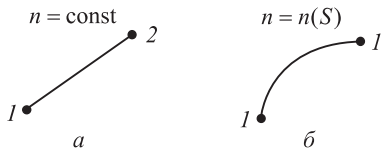


Рис. 68

Пусть свет попадает из точки A в точку B пространства, отразившись от плоской границы MN двух сред в точке O (рис. 69). В соответствии с принципом Ферма точка O

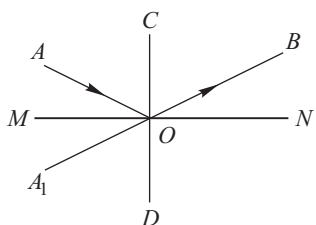


Рис. 69

должна быть расположена на границе сред так, что длина пути AOB минимальна. Рассмотрим точку A_1 , симметричную точке A относительно линии MN . Длины отрезков AO и A_1O одинаковы, длина пути AOB равна длине A_1OB . Если точки A_1 и B фиксированы, а положение точки O на прямой MN меняется, то длина пути A_1OB будет минимальной при условии, что точки A_1 , O и B лежат на одной

прямой. В этом случае углы $\angle A_1OD$ и $\angle COB$ равны как вертикальные (CD — перпендикуляр к границе MN). Угол A_1OD равен углу AOC по построению точки A_1 . Следовательно, $\angle AOC = \angle COB$, то есть угол падения луча равен углу его отражения. Закон отражения света доказан.

Пусть теперь свет распространяется из точки A среды с абсолютным показателем преломления n_1 в точку B среды с абсолютным показателем преломления n_2 (рис. 70). В соответствии с принципом Ферма точка O , в которой преломляется луч, должна быть расположена так, чтобы была минимальной оптическая длина пути $L_{AOB} = n_1s_1 + n_2s_2$, где s_1 — длина отрезка AO , s_2 — длина отрезка OB . Найдем минимум функции L_{AOB} :

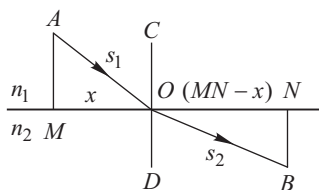


Рис. 70

$$L_{AOB} = n_1s_1 + n_2s_2 = n_1\sqrt{AM^2 + x^2} + n_2\sqrt{BN^2 + (MN - x)^2},$$

где AM и BN — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую MN — границу раздела сред; x — длина отрезка MO , $(MN - x)$ — длина отрезка ON . Продифференцируем L_{AOB} по переменной x и приравняем производную к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dL_{AOB}}{dx} &= 0, \\ n_1 \frac{x}{\sqrt{AM^2 + x^2}} - n_2 \frac{MN - x}{\sqrt{BN^2 + (MN - x)^2}} &= 0, \\ n_1 \cos \angle MOA - n_2 \cos \angle NOB &= 0, \end{aligned}$$

Прямая CD перпендикулярна к границе раздела двух сред и проходит через точку O , поэтому $\cos \angle MOA = \sin \angle AOC$, $\cos \angle NOB =$

$= \sin \angle DOB$. Отсюда:

$$n_1 \sin \angle AOC - n_2 \sin \angle DOB = 0.$$

Это соотношение представляет собой математическое выражение закона преломления.

§ 23. Увеличение оптических приборов, вооружающих глаз

Подробный анализ оптических систем методами геометрической оптики выходит за рамки данного учебного пособия. В этом параграфе приводятся краткие сведения о принципах работы некоторых оптических приборов в связи с последующим обсуждением понятия разрешающей способности (см. § 39).

Глаз как оптическая система. Глаз можно рассматривать как оптическую систему, состоящую из собирающей линзы (хрусталика) и экрана наблюдения (сетчатой оболочки или коротко сетчатки), на котором формируется изображение предметов (рис. 71). Зрачок глаза, ограничивая диаметр проходящего через хрусталик светового пучка, выполняет роль диафрагмы. На каком бы расстоянии a от глаза ни находился рассматриваемый предмет, расстояние b между хрусталиком и сетчаткой остается неизменным. Для того чтобы при изменении расстояния a между предметом и линзой (хрусталиком) изображение предмета располагалось на одном и том же фиксированном расстоянии b от линзы (на сетчатке), фокусное расстояние, которое мы обозначим как $f_{\text{хр}}$ (в данном случае речь идет о фокусном расстоянии хрусталика глаза), должно меняться. При выполнении указанного условия, как следует из формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{\text{хр}}},$$

фокусное расстояние хрусталика глаза является функцией расстояния a между предметом и глазом, тогда как значение расстояния b между хрусталиком и сетчаткой фиксировано:

$$f_{\text{хр}} = \frac{ab}{a+b}.$$

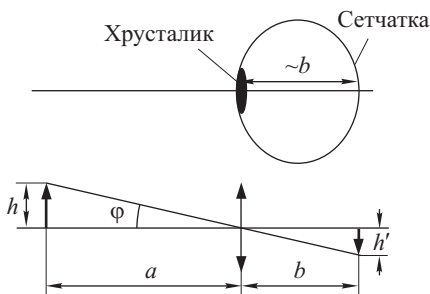


Рис. 71

Аккомодацией глаза называется процесс изменения фокусного расстояния хрусталика с целью получения четкого изображения рассматриваемого предмета на сетчатке. При аккомодации изменяется кривизна внешних поверхностей хрусталика благодаря усилиям глазных мышц.

Углом зрения называется угол, под которым виден предмет из оптического центра хрусталика (см. рис. 71, где угол зрения обозначен через φ).

Поскольку изображение предмета всегда формируется в плоскости, расположенной на фиксированном расстоянии B от линзы, для построения создаваемого линзой изображения любой точки предмета достаточно провести из этой точки один луч, проходящий через оптический центр линзы, до пересечения с указанной фиксированной плоскостью. Если предмет в виде отрезка прямой линии расположен перпендикулярно к главной оптической оси системы, а угол зрения равен φ , то размер h' изображения предмета на сетчатке равен:

$$h' = b \operatorname{tg} \varphi, \quad (23.1)$$

где B — расстояние от линзы (хрусталика) до экрана наблюдения (сетчатки).

Чем ближе предмет располагается к глазу, тем больше размер его изображения, и тем лучше видны мелкие детали предмета. Однако при этом в процессе аккомодации глаза сильнее должны искривляться преломляющие поверхности хрусталика, что приводит к утомлению.

Расстоянием наилучшего зрения называется расстояние между предметом и глазом, при котором достаточно хорошо различаются детали предмета, но не возникает чрезмерного напряжения и утомления глаза. Расстояние наилучшего зрения приблизительно составляет $D_0 \approx 25$ см.

Оптические приборы, вооружающие глаз, делятся на две группы: приборы для наблюдения мелких предметов (лупа, микроскоп) и приборы для наблюдения удаленных объектов (зрительная труба, бинокль и т. д.). Независимо от предназначения принцип действия всякого вооружающего глаз оптического прибора состоит в том, чтобы с его помощью увеличить угол зрения при рассматривании того или иного объекта, в результате чего увеличивается размер изображения предмета на сетчатке глаза, лучше различаются мелкие детали объекта наблюдения.

Увеличением оптического прибора Γ называется отношение линейных размеров изображения на сетчатке глаза при наблюдении предмета вооруженным и невооруженным глазом:

$$\Gamma = \frac{h'_{\text{вооруж}}}{h'_{\text{невооруж}}}. \quad (23.2)$$

С учетом соотношения (23.1) увеличение Γ оптического прибора равно отношению тангенсов углов зрения φ и φ_0 при рассматривании

предмета вооруженным и невооруженным глазом соответственно:

$$\Gamma = \frac{h'_{\text{вооруж}}}{h'_{\text{невооруж}}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0}. \quad (23.3)$$

Увеличение лупы. Лупа представляет собой короткофокусную собирающую линзу, которую помещают между предметом и глазом так, что предмет располагается вблизи переднего фокуса линзы. Мнимое изображение предмета удалено «на бесконечность». При рассматривании изображения глаз аккомодирован «на бесконечность», так что напряжение глазных мышц минимально.

В соответствии формулой (23.3) увеличение Γ лупы равно отношению тангенса угла зрения φ , под которым предмет виден через лупу, к тангенсу угла зрения φ_0 , под которым виден расположенный на расстоянии наилучшего зрения предмет при его рассматривании невооруженным глазом. Из чертежа на рис. 72 вытекают соотношения:

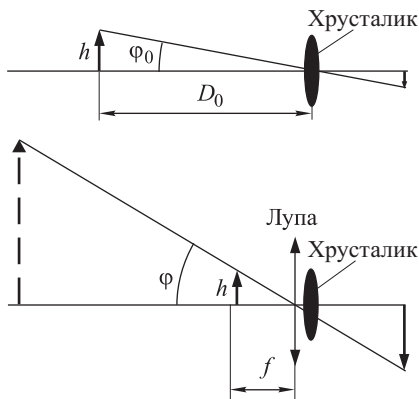


Рис. 72

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{h}{D_0},$$

где h — размер предмета, D_0 — расстояние наилучшего зрения;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{f},$$

где f — фокусное расстояние лупы. Увеличение лупы равно

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{D_0}{f}.$$

Обычно $f = 1 \div 10$ см. При значении $D_0 = 25$ см увеличение лупы находится в пределах $2,5 \div 25$.

Увеличение микроскопа. Световой микроскоп служит для рассматривания мелких предметов путем получения больших угловых увеличений. Он состоит из двух короткофокусных систем — объектива и окуляра.

Фокусные расстояния собирающих линз, выполняющих функции объектива и окуляра, обозначим через $f_{об}$ и $f_{ок}$ соответственно. Предмет размером h располагается вблизи переднего фокуса объектива, а создаваемое объективом изображение размером H находится вблизи переднего фокуса окуляра (рис. 73). Линейное увеличение объектива

(то есть отношение размера изображения H к размеру предмета h) приблизительно равно

$$\frac{H}{h} \approx \frac{f_{об} + \Delta}{f_{об}} \approx \frac{\Delta}{f_{об}},$$

где Δ — расстояние между фокусами объектива и окуляра, которое много больше самих фокусных расстояний $f_{об}$ и $f_{ок}$.

Отсюда следует

$$H \approx h \frac{\Delta}{f_{об}}. \quad (23.4)$$

Тангенс угла φ , под которым видно изображение предмета через окуляр, с учетом (23.4) равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{f_{ок}} \approx \frac{h \Delta}{f_{об} f_{ок}}. \quad (23.5)$$

Тангенс угла зрения φ_0 , под которым виден предмет невооруженным глазом, равен

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{h}{D_0}, \quad (23.6)$$

где D_0 — расстояние наилучшего зрения.

Увеличение микроскопа Γ найдем, поделив равенства (23.5) и (23.6) друг на друга:

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{D_0 \Delta}{f_{об} f_{ок}}. \quad (23.7)$$

Для типовых значений параметров микроскопа $f_{об} = 2,5$ мм, $f_{ок} = 15$ мм, $\Delta = 160$ мм, $D_0 = 250$ мм вычисленное по формуле (23.7) увеличение Γ приблизительно равно:

$$\Gamma = \frac{160 \cdot 250}{2,5 \cdot 15} \approx 1000.$$

Величина $\Gamma \sim 1000$ является предельно возможной для световых микроскопов. Как правило, увеличение хороших световых микроскопов составляет несколько сотен.

Увеличение зрительной трубы. *Зрительная труба* предназначена для рассматривания удаленных предметов. Рассмотрим один из типов зрительной трубы (труба Кеплера), которая состоит из двух собирающих линз — объектива и окуляра с фокусными расстояниями $f_{об}$ и $f_{ок}$ соответственно, при этом выполняется условие $f_{об} \gg f_{ок}$.

Из оптического центра объектива зрительной трубы и из оптического центра хрусталика невооруженного глаза удаленный предмет виден под одним и тем же углом зрения φ_0 . При рассматривании предмета в зрительную трубу изображение, формируемое объективом, располагается в задней фокальной плоскости объектива, которая приблизительно

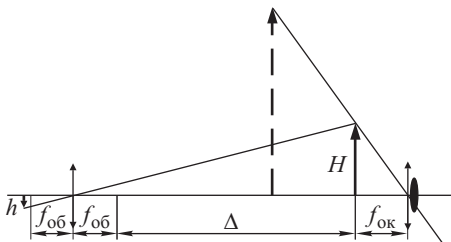


Рис. 73

совпадает с передней фокальной плоскостью окуляра (рис. 74). Поперечный размер H изображения, формируемого объективом, можно выразить через параметры $f_{об}$ и φ_0 :

$$H = f_{об} \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Тангенс угла φ , под которым видно изображение предмета через окуляр, равен:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{f_{ок}} = \frac{f_{об} \operatorname{tg} \varphi_0}{f_{ок}}.$$

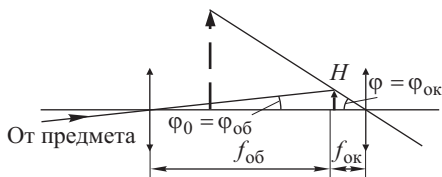


Рис. 74

Отсюда получим увеличение зрительной трубы, равное, согласно (23.3), отношению тангенсов углов φ и φ_0 :

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{f_{об}}{f_{ок}}. \quad (23.8)$$

Если углы φ_0 и φ не слишком велики, отношение тангенсов можно приближенно заменить отношением самих углов, выраженных в радианах:

$$\Gamma \approx \frac{\varphi}{\varphi_0}. \quad (23.9)$$

В этом случае величина Γ показывает, во сколько раз угол зрения φ при рассматривании предмета через зрительную трубу больше угла зрения φ_0 при рассматривании предмета невооруженным глазом.

Как отмечалось выше, из оптического центра объектива зрительной трубы и из оптического центра хрусталика невооруженного глаза *удаленный* предмет виден под одним и тем же углом φ_0 , который в связи с указанным обстоятельством можно обозначить как $\varphi_{об}$:

$$\varphi_0 = \varphi_{об}. \quad (23.10)$$

Таким образом, $\varphi_{об}$ — угол, под которым из оптического центра объектива виден удаленный предмет и видно локализованное в фокальной плоскости объектива изображение этого предмета.

Угол φ , под которым через окуляр зрительной трубы видно сформированное объективом изображение предмета, обозначим как $\varphi_{ок}$:

$$\varphi_{ок} = \varphi. \quad (23.11)$$

В новых обозначениях (23.10) и (23.11) увеличение зрительной трубы (23.9)

$$\Gamma \approx \frac{\varphi_{ок}}{\varphi_{об}}. \quad (23.12)$$

Здесь величина Γ показывает, во сколько раз угловой размер изображения предмета, расположенного в фокальной плоскости объектива, при рассматривании через окуляр больше, чем при его рассматривании из оптического центра объектива. Данная интерпретация увеличения будет использоваться в дальнейшем (см. § 39).

Увеличение простых зрительных труб и биноклей составляет величину $20 \div 50$.

Задачи

4.1. Найти среднюю освещенность облучаемой части непрозрачной сферы, если на нее падает параллельный световой поток, создающий в точке нормального падения освещенность E_0 .

4.2. Некоторая светящаяся поверхность подчиняется закону Ламберта. Ее яркость равна L . Найти:

а) световой поток, излучаемый элементом ΔS этой поверхности внутрь конуса, ось которого нормальна к данному элементу, если угол полураствора конуса равен θ ;

б) светимость такого источника.

4.3. На высоте $h = 1,0$ м над центром круглого стола радиуса $R = 1,0$ м подвешен точечный источник, сила света которого I так зависит от направления, что освещенность всех точек стола оказывается одинаковой. Найти вид функции $I(\theta)$, где θ — угол между направлением излучения и вертикалью, а также световой поток, падающий на стол, если $I(0) = I_0 = 100$ кд.

4.4. Ламбертовский источник имеет вид бесконечной плоскости. Его яркость равна L . Найти освещенность площадки, расположенной параллельно данному источнику.

4.5. Перед выпуклой поверхностью стеклянной выпукло-плоской линзы толщины $d = 9,0$ см находится предмет. Изображение этого предмета образуется на плоской поверхности линзы, которая служит экраном. Определить:

а) поперечное увеличение, если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 2,5$ см;

б) освещенность изображения, если яркость предмета $L = 7700$ кд/м² и диаметр входного отверстия выпуклой поверхности линзы $D = 5,0$ мм; потери света пренебрежимо малы.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

§ 24. Интерференция световых волн от двух когерентных источников

Условия наблюдения интерференции. Две гармонические световые волны называются *когерентными*, если они имеют одинаковую частоту и постоянную разность фаз (речь идет о разности фаз колебаний векторов напряженности электрического поля — светового вектора, возбуждаемых волнами в какой-либо точке пространства).

Интерференцией называется перераспределение интенсивности света в пространстве в результате наложения когерентных волн.

Условиями, достаточными для наблюдения интерференции, являются следующие: 1) складываемые световые волны когерентны; 2) направления колебаний световых векторов в волнах параллельны.

Как будет показано ниже, волны от физически различных источников света не являются когерентными, поэтому при их наложении возникновение интерференционной картины невозможно. Интерференция возникает только при наложении в некоторой области пространства световых волн, полученных в результате деления на две части световой волны от одного источника. Рассматривая в настоящем параграфе интерференцию света от когерентных источников (источников когерентных волн), мы имеем ввиду идеализированную физическую модель, в рамках которой такие источники существуют.

Зависимость интенсивности света от разности фаз и оптической разности хода интерферирующих волн. Рассмотрим два одинаковых точечных источника света S_1 и S_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга в среде с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$ и излучающих волны с одинаковыми амплитудой, циклической частотой ω и фазой ωt (рис. 75). Волны, излучаемые этими источниками, будут когерентными. Нас будет интересовать интенсивность света в некоторой точке пространства P (точке наблюдения), расположенной на удалении r_1 и r_2 от источников S_1 и S_2 соответственно. Расстояния между каждым источником и точкой наблюдения велико по сравнению с расстоянием между источниками:

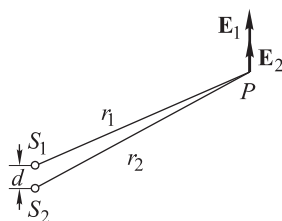


Рис. 75

$$r_1 \gg d, \quad r_2 \gg d. \quad (24.1)$$

В точке P колебания светового вектора \mathbf{E}_1 волны, испускаемой источником S_1 , описывается выражением:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1 \cos(\omega t - kr_1),$$

при этом $A_1 = |\mathbf{A}_1|$ — амплитуда светового вектора, ω — циклическая частота волны, k — волновое число.

Колебания светового вектора \mathbf{E}_2 волны, испускаемой источником S_2 , в той же точке P описывается выражением:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega t - kr_2),$$

$A_2 = |\mathbf{A}_2|$ — амплитуда светового вектора.

Пусть векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 параллельны друг другу. (Если, например, S_1 и S_2 — дипольные излучатели, колебания которых происходят в направлении, перпендикулярном к плоскости рис. 75, то плоскость, в которой расположены точки S_1 , S_2 и P , — экваториальная плоскость дипольного излучения (см. § 18), так что векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в точке P перпендикулярны к плоскости рисунка и параллельны друг другу.)

Сложим колебания \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 с помощью векторной диаграммы (рис. 76). Амплитуда A светового вектора результирующего колебания в точке P равна:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta, \quad (24.2)$$

где $\delta = k(r_2 - r_1)$ — разность фаз волн от двух источников, пришедших в точку наблюдения P . Если обозначить через $\Delta = r_2 - r_1$ так называемую *оптическую разность хода* световых лучей, пришедших в точку наблюдения от источников S_2 и S_1 (то есть разность оптических длин пути указанных лучей), то равенство (24.2) можно представить в следующем виде:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k\Delta. \quad (24.3)$$

Отметим, что в оптике отставание по фазе одного колебания от другого (в частности, колебания \mathbf{E}_2 от колебания \mathbf{E}_1 на величину δ) на векторной диаграмме принято отображать поворотом вектора запаздывающего колебания относительно вектора опережающего колебания *против часовой стрелки* на угол, равный разности фаз колебаний. Так, вектор колебания \mathbf{E}_1 повернут относительно вектора колебания \mathbf{E}_2 на угол δ против часовой стрелки (рис. 76). Аналогично, колебание $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega t - kr_2)$ светового вектора волны от источника S_2 в точке наблюдения P отстает по фазе на величину kr_2 от колебаний светового вектора этой же волны в точке, где расположен источник S_2 (здесь фаза волны равна ωt и совпадает с фазой самого источника). Соответственно, на диаграмме рис. 76 вектор колебания \mathbf{E}_1 повернут на угол kr_2 против часовой стрелки по отношению к оси колебаний

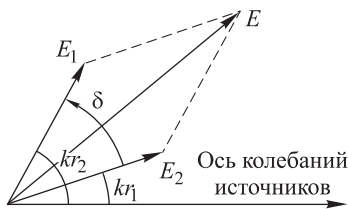


Рис. 76

ческую разность хода световых лучей, пришедших в точку наблюдения от источников S_2 и S_1 (то есть разность оптических длин пути указанных лучей), то равенство (24.2) можно представить в следующем виде:

источников. Напротив, в теории электрических цепей колебанию, отстающему по фазе от некоторого другого колебания, соответствует на диаграмме поворот вектора запаздывающего колебания относительно вектора опережающего колебания *по часовой стрелке* на угол, равный величине запаздывания (см., например, векторную диаграмму рис. 20, § 6, на которой графически отображено запаздывание на величину $\pi/2$ колебания напряжения на конденсаторе U_C от колебания тока I , текущего через конденсатор.)

Интенсивности I_1 и I_2 света, пришедшего в точку наблюдения P от первого и второго источника, пропорциональны квадратам амплитуды A_1 и A_2 соответствующих световых векторов:

$$I_1 = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} A_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} A_2^2. \quad (24.4)$$

Интенсивности I_1 и I_2 — это такие интенсивности, которые наблюдались бы в точке P при условии, что каждый из источников S_1 или S_2 излучает свет в отсутствие другого источника.

Интенсивность I световой волны в точке P при наличии обоих источников связана с найденной выше амплитудой A этой волны, аналогичным соотношением:

$$I = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} A^2. \quad (24.5)$$

Во всех трех формулах n — абсолютный показатель преломления среды, в которой распространяются световые волны; в рассматриваемом конкретном случае $n = \sqrt{\varepsilon\mu} = 1$.

Подставив в (24.2) и (24.3) амплитуды A_1 , A_2 , A , выраженные через соответствующие интенсивности I_1 , I_2 , I из соотношений (24.4) и (24.5), получим

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k\Delta. \quad (24.6)$$

Порождаемые источниками S_1 и S_2 волны имеют одинаковую амплитуду, которая по мере удаления волны от источника уменьшается (в случае сферических волн — обратно пропорционально расстоянию r до источника). В силу того что расстояния r_1 и r_2 велики по сравнению с расстоянием d между источниками, и следовательно, по сравнению с разностью хода $\Delta = r_2 - r_1$ лучей, пришедших в точку P от источников S_2 и S_1 , амплитуды волн A_1 и A_2 в точке P можно считать приблизительно одинаковыми. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A_0, \\ I_1 &= I_2 = I_0. \end{aligned}$$

Как следует из (24.6), в этом случае интенсивность результирующей волны в точке наблюдения будет равна

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = I_0(1 + \cos k\Delta). \quad (24.7)$$

Итак, равенства (24.6) и (24.7) показывают, как зависит интенсивность света в некоторой точке области пространства, где имеет место наложение когерентных волн, от разности фаз волн δ и от оптической разности хода Δ лучей, пришедших в точку наблюдения от когерентных источников.

В зависимости от значения δ (или Δ) величина $\cos \delta$ в (24.7) может принимать значения от -1 до $+1$. Соответственно интенсивность света I , вычисленная по формуле (24.7), будет изменяться в пределах от нуля до $4I_0$. Поскольку в разных точках пространства параметр δ имеет различные значения, не одинаковой в них будет и интенсивность света I .

Таким образом, в результате наложения когерентных волн происходит перераспределение интенсивности света в пространстве: при переходе от одной точки к другой интенсивность меняется. Наблюдается интерференция волн. Если бы имело место наложение не когерентных волн, интенсивность света во всех точках в пространстве была бы одинаковой и равной сумме интенсивностей света от каждого из источников ($I_1 + I_2$ в случае различных источников, $2I_0$ в случае одинаковых источников).

Условия максимума интенсивности. Для того чтобы в точке наблюдения P интенсивность света I была максимальной (при этом говорят, что в точке P наблюдается интерференционный максимум), разность фаз δ интерферирующих волн должна удовлетворять условию:

$$\delta = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.8)$$

В этом случае в (24.7) $\cos \delta = 1$, интенсивность $I = 4I_0$.

Число m в выражении (24.8) называется *порядком интерференционного максимума* или иначе *порядком интерференции*.

Условие максимума интенсивности, записанное через оптическую разность хода Δ интерферирующих лучей, имеет вид

$$\begin{aligned} k\Delta &= 2m\pi, \\ \frac{2\pi}{\lambda}\Delta &= 2m\pi. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\Delta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.9)$$

Равенство (24.9) означает, что оптическая разность хода Δ лучей в точке максимума равна целому числу длин волн.

Найдем направление в пространстве прямой, проведенной от источников в точку P интерференционного максимума. Указанная прямая определяет *направление на интерференционный максимум*. Пусть θ — угол между прямой S_1P или S_2P и перпендикуляром к линии источников S_1S_2 (рис. 77). Поскольку лучи S_1P и S_2P можно считать практически параллельными друг другу, что является следствием усло-

вия (24.1), оптическая разность хода Δ этих лучей приблизительно равна:

$$\Delta = d \sin \theta,$$

где d — расстояние между источниками.

Подставив Δ в (24.9), получим

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.10)$$

Выражение (24.10) определяет угол θ между перпендикуляром к линии источников $S_1 S_2$ и направлением на интерференционный максимум интенсивности.

Определим условия интерференционного минимума. Минимальное значение интенсивности света при наложении когерентных волн $I = 0$ имеет место, если в выражении (24.7) $\cos \delta = -1$ и, соответственно:

$$\delta = (2m + 1)\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

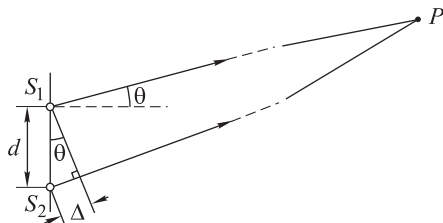


Рис. 77

Условие минимума, выраженное через оптическую разность хода Δ интерферирующих лучей, таково:

$$\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Интерференция света от двух щелей. Пусть в среде с $\varepsilon = \mu = 1$ свет от источника в виде длинной светящейся нити падает на две узкие длинные щели S_1 и S_2 в непрозрачном экране, благодаря которым первичная световая волна, порожаемая источником, делится на две части. Щели можно рассматривать в качестве эффективных источников когерентных цилиндрических волн (рис. 78а). За экраном со щелями на большом удалении от него располагается экран для наблюдения интерференционной картины. Схематическое изображение опыта по наблюдению интерференции от двух щелей представлено на рис. 78б, плоскость рисунка перпендикулярна к направлению светящейся нити. Введены следующие обозначения: d — расстояние между щелями, l — расстояние от экрана со щелями до экрана наблюдения, x — координата точки наблюдения P (координатная ось x перпендикулярна к направлению щелей), θ — угол между нормалью к плоскости щелей и направлением на точку наблюдения, r_1 и r_2 — оптическая длина пути соответственно луча 1, идущего от щели S_1 , и луча 2, идущего от щели S_2 , в точку наблюдения. Полагаем, что выполняется условие $d \ll l$, то есть экран наблюдения удален от щелей на большое расстояние. Ввиду удаленности точки наблюдения от источников света лучи 1 и 2 можно считать параллельными друг другу.

Оптическая разность хода лучей 1 и 2 равна

$$\Delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx \frac{dx}{l}.$$

Найдем с помощью выражения (24.7) интенсивность света I в точке наблюдения P :

$$I = 2I_0[1 + \cos(k\Delta)] = 2I_0\left(1 + \cos \frac{kdx}{l}\right) = 4I_0 \cos^2 \frac{kdx}{2l}. \quad (24.11)$$

График функции $I(x)$ (24.11) представлен на рис. 79. Интенсивность света I на экране наблюдения в зависимости от координаты x

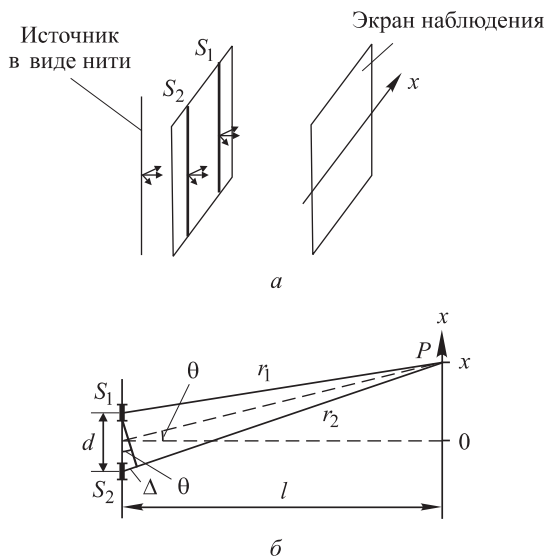


Рис. 78

описывается законом квадрата косинуса и изменяется в пределах от нуля до $4I_0$, где I_0 — интенсивность света от одной щели (приблизительно такая интенсивность света в любой точке экрана наблюдения имела бы место, если бы экран освещался одной из щелей S_1 или S_2 в отсутствие второй).

Таким образом, наблюдается чередование светлых и темных полос, называемых *интерференционными полосами*. Светлые полосы соответствуют большей, темные — меньшей интенсивности света в интерференционной картине.

Шириной интерференционной полосы называется расстояние между двумя соседними минимумами интенсивности.

Расстоянием между интерференционными полосами называется расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности.

В рассматриваемом примере интерференции света от двух щелей ширина полосы равна расстоянию между полосами.

Положения на экране интерференционных максимумов найдем из условия (24.10) равенства целому числу длин волн оптической разности хода лучей 1 и 2:

$$d \sin \theta = \frac{dx}{l} = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь m — порядок интерференции, который в данном случае называется также *порядковым номером интерференционной полосы*. Максимум нулевого порядка и соответствующая интерференционная полоса располагаются на экране наблюдения в центре интерференционной картины (симметрично относительно источников света — щелей). С увеличением номера m соответствующая полоса смещается к периферии интерференционной картины.

Отсюда следует:

$$x_m = \frac{m\lambda l}{d}, \quad (24.12)$$

где x_m — координата x интерференционного максимума интенсивности света.

Ширина интерференционной полосы и расстояние между полосами равны

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d}. \quad (24.13)$$

Влияние немонохроматичности света на интерференционную картину. При наблюдении интерференции света от двух щелей в соответствии с (24.12) и (24.13) положения интерференционных максимумов x_m (кроме центрального максимума нулевого порядка) и ширина интерференционной полосы Δx зависят от длины волны света λ . С увеличением длины волны максимум смещается от центра интерференционной картины к ее периферии, а ширина полосы возрастает. На рис. 80 показаны интерференционные картины в свете с двумя различными фиксированными длинами волн λ_1 и λ_2 , причем $\lambda_2 > \lambda_1$.

Смещение друг относительно друга максимумов одного и того же порядка m света с длинами волн λ_1 и λ_2 , равное величине $x_m(\lambda_2) - x_m(\lambda_1)$, тем больше, чем больше номер максимума. Действительно, пользуясь формулой (24.12), найдем

$$x_m(\lambda_2) - x_m(\lambda_1) = m l \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d}, \quad (24.14)$$

то есть указанное смещение прямо пропорционально числу m .

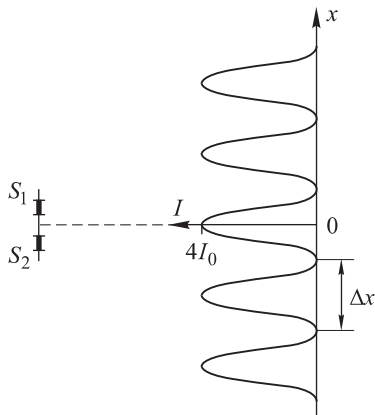


Рис. 79

Если свет, которым освещаются щели не монохроматический, т. е. имеется излучение с различными длинами волн, то интерференционные картины, возникающие для каждой компоненты света с фиксированной длиной волны, будут накладываться одна на другую. На-

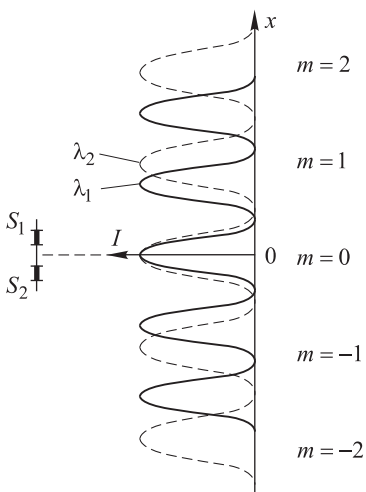


Рис. 80

пример, интерференционный максимум интенсивности, соответствующий излучению с длиной волны λ_1 , может оказаться в том месте экрана наблюдения, где располагается интерференционный минимум интенсивности излучения с длиной волны λ_2 , и т.п. Следовательно, по причине немонохроматичности света интерференционная картина нарушается или, как принято говорить, размывается.

Поскольку в соответствии с (24.14) смещение друг относительно друга интерференционных максимумов одного и того же порядка m излучения различной длины волны возрастает с ростом m , степень размытости интерференционной картины на периферии (где значения m велики) больше, чем в ее центре

($m = 0, 1, 2, \dots$). Существует некоторый порядок интерференции $m_{\text{пред}}$, называемый *предельным*, начиная с которого интерференция вообще перестает наблюдаться: светлые и темные полосы практически отсутствуют, освещенность экрана становится приблизительно равномерной. Полоса с номером $m_{\text{пред}}$ (а также симметричная ей относительно центра интерференционной картины полоса с номером $-m_{\text{пред}}$) отделяет область экрана, где интерференция не наблюдается, от области, в которой интерференционные полосы еще различимы. Оценим число различимых полос и тем самым оценим предельный порядок интерференции.

Пусть в свете, используемом для освещения щелей в рассматриваемом интерференционном опыте, присутствует излучение со всеми длинами волн из интервала от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Будем полагать, что наблюдение интерференции становится невозможным (интерференционная картина полностью размывается) в той области экрана, где максимум m -го порядка света с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ совпадает с максимумом $(m+1)$ -го порядка света с длиной волны λ . Это условие означает, что смещение друг относительно друга интерференционных картин излучения с наименьшей и наибольшей из всех имеющихся длин волн составляет величину порядка ширины интерференционной полосы.

Направление в пространстве от источников света (щелей) на максимум m -го порядка излучения с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ определяется

углом $\theta_{\lambda+\Delta\lambda}$ (см. рис. 78 б), который в соответствии с (24.10) удовлетворяет условию

$$d \sin \theta_{\lambda+\Delta\lambda} = m(\lambda + \Delta\lambda). \quad (24.15)$$

Аналогично, направление в пространстве от источников света на максимум $(m+1)$ -го порядка излучения с длиной волны λ определяется углом θ_λ , который удовлетворяет условию

$$d \sin \theta_\lambda = (m+1)\lambda. \quad (24.16)$$

Если максимумы m -го и $(m+1)$ -го порядка на экране наблюдения совпадают друг с другом, то равны определяющие направление на эти максимумы углы:

$$\theta_{\lambda+\Delta\lambda} = \theta_\lambda. \quad (24.17)$$

Из (24.15)–(24.17) получим

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda,$$

Отсюда найдем предельный порядок интерференции:

$$m_{\text{пред}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (24.18)$$

Итак, формула (24.18) позволяет оценить максимальное число наблюдаемых интерференционных полос, возникающих при интерференции света с шириной спектрального интервала $\Delta\lambda$.

§ 25. Интерференция двух плоских волн

Пусть в среде с $\varepsilon = \mu = 1$ распространяются под небольшим углом φ друг к другу две плоские монохроматические волны одинаковой частоты и интенсивности. Интерференционная картина наблюдается на плоском экране, расположенном почти нормально к направлению распространения обеих волн. Для определения параметров интерференционной картины, таких как ширина интерференционной полосы, расстояние между полосами и пр., достаточно знать длину волны λ и угол φ между направлениями распространения волн. Определим, например, расстояние Δx между двумя интерференционными максимумами, которое равно ширине интерференционной полосы.

Рассмотрим точку A экрана, в которой наблюдается интерференционный максимум интенсивности (рис. 81).

Это означает, что оптическая разность хода интерферирующих в этой точке лучей 1 и 2 равна некоторому целому числу длин волн m . Будем

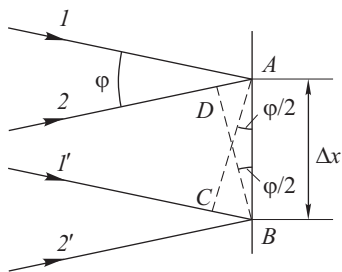


Рис. 81

считать (без ограничения общности дальнейших выводов), что $m = 0$ и выполняется условие:

$$L_1 - L_2 = m\lambda = 0, \quad (25.1)$$

где L_1 — оптическая длина пути луча 1 , L_2 — то же для луча 2 .

Определим оптическую разность хода лучей $1'$ и $2'$, интерферирующих в точке B экрана. Обозначим через Δx расстояние между точками A и B . Прямая AC , перпендикулярная к лучам 1 и $1'$, определяет положение волнового фронта первой волны в тот момент, когда фронт достигает точки A . Оптическая длина пути L'_1 луча $1'$, падающего на экран в точке B , превышает оптическую длину пути L_1 луча 1 , падающего на экран в точке A , на длину отрезка CB , которую обозначим через Δ :

$$L'_1 = L_1 + \Delta. \quad (25.2)$$

Из прямоугольного треугольника ABC найдем Δ :

$$CB = \Delta = (\Delta x) \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (25.3)$$

Аналогично, прямая BD , перпендикулярная к лучам 2 и $2'$, определяет положение волнового фронта второй волны в тот момент, когда фронт достигает точки B . Оптическая длина пути L_2 луча 2 , падающего на экран в точке A , превышает оптическую длину пути L'_2 луча $2'$, падающего на экран в точке B , на длину отрезка AD , который также равен Δ :

$$L_2 = L'_2 + \Delta,$$

или:

$$L'_2 = L_2 - \Delta. \quad (25.4)$$

(Действительно, из прямоугольного треугольника BDA следует: $DA = \Delta = (\Delta x) \sin (\varphi/2)$).

Оптическая разность хода лучей $1'$ и $2'$ в точке B экрана с учетом равенств (25.1)–(25.4) равна

$$L'_1 - L'_2 = L_1 - L_2 + 2\Delta = 2\Delta = 2\Delta x \cdot \sin (\varphi/2) \approx \Delta x \cdot \varphi, \quad (25.5)$$

где воспользовались свойством малых углов и положили $\sin (\varphi/2) \approx \varphi/2$.

Если в точке B наблюдается интерференционный максимум интенсивности, и при этом иных максимумов на отрезке между точками A и B нет, то порядок максимума в точке B на единицу отличается от порядка максимума в точке A (напомним, что $m = 0$ для точки A). Соответственно оптическая разность хода лучей $1'$ и $2'$ в точке B равна λ :

$$L'_1 - L'_2 = \lambda.$$

С учетом (25.5) получим

$$(\Delta x)\varphi = \lambda.$$

Отсюда найдем расстояние Δx между соседними максимумами интенсивности в точках A и B , которое равно ширине интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi}, \quad (25.6)$$

где λ — длина световой волны, φ — угол между направлениями распространения интерферирующих волн.

Отметим, что полученная выше формула (24.13) для ширины интерференционной полосы в опыте с двумя щелями, по существу совпадает с формулой (25.6). Действительно, как видно из рис. 78 б, в формуле (24.13) отношение величины d , расстояния между щелями, к величине l , расстоянию от экрана со щелями до экрана наблюдения, приблизительно равно углу φ , под которым сходятся у экрана наблюдения интерферирующие волны, испускаемые источниками S_1 и S_2 . Если обозначить $d/l = \varphi$, то формула (24.13) переходит в формулу (25.6).

§ 26. Временная когерентность

Понятие когерентности. Критерий когерентности волн. Две световые волны являются *когерентными*, если они характеризуются одинаковой частотой и постоянной в каждой точке пространства разностью фаз. Расширим понятие когерентности таким образом, чтобы оно было применимо для описания не только гармонических волн, но и естественного света, который в каждый момент времени представляет собой суперпозицию гармонических волн с различными частотами, амплитудами и начальными фазами.

Когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов.

Примем следующий критерий когерентности световых волн: две световые волны являются когерентными, если при их наложении возникает интерференционная картина (происходит пространственное перераспределение интенсивности света).

Пусть в некоторой точке пространства складываются волны, зависимость от времени световых векторов E_1 и E_2 которых описывается функциями:

$$E_1 = A_1(t) \cos [\omega t + \alpha_1(t)], \quad (26.1)$$

$$E_2 = A_2(t) \cos [\omega t + \alpha_2(t)]. \quad (26.2)$$

Функции (26.1) и (26.2) можно считать гармоническими, но с изменяющимися во времени амплитудами $A_1(t)$ и $A_2(t)$ и начальными фазами $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$. Обозначим через τ характерное время, в течение которого параметры A_1 , A_2 , α_1 и α_2 успевают существенно измениться.

Ниже будет показано, что уравнение естественной световой волны можно представить в виде гармонической функции с зависящими от времени амплитудой и начальной фазой подобно уравнениям (26.1)

или (26.2), причем характерное время τ изменения амплитуды и начальной фазы по порядку величины совпадает со средней длительностью волнового цуга. Так, для монохроматического естественного света τ составляет величину $\sim 10^{-8}$ с; τ намного порядков превышает период колебаний T электромагнитного поля в световой волне ($T \sim 10^{-15}$ с).

Рассмотрим функции (26.1) и (26.2) в течение промежутка времени Δt , малого по сравнению с характерным временем τ изменения амплитуд $A_1(t)$ и $A_2(t)$ и начальных фаз $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$: $\Delta t \ll \tau$. В течение времени Δt амплитуды и начальные фазы можно считать постоянными величинами, колебания $E_1(t)$ и $E_2(t)$ рассматривать как гармонические и воспользоваться формулой (24.6), позволяющей вычислить интенсивность света в некоторой точке наблюдения при сложении в этой точке гармонических волн:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (26.3)$$

где I_1 и I_2 — интенсивности каждой из складываемых волн в отдельности (то есть в отсутствие другой волны), $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ — разность фаз складываемых колебаний. В течение следующего промежутка времени $\Delta t'$, малого по сравнению с τ , значения параметров A_1 , A_2 , α_1 и α_2 в (26.1) и (26.2) вновь можно считать постоянными, но отличающимися от тех, что были раньше, а интенсивность I волны, которая является результатом сложения волн (26.1) и (26.2), — рассчитать по формуле (26.3) с иными значениями параметров I_1 , I_2 и δ , соответствующими новым значениям A_1 , A_2 , α_1 и α_2 . Приведенные рассуждения показывают, что при сложении в какой-либо точке пространства световых волн вида (26.1), (26.2) интенсивность света в этой точке является функцией времени: $I = I(t)$, описывается выражением (26.3), в котором интенсивности I_1 , I_2 и разность фаз δ зависят от времени. Описываемая выражением (26.3) величина $I(t)$ по существу представляет собой мгновенную интенсивность света.

Слагаемое $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$ в (26.3) называется *интерференционным членом*.

При наблюдении интерференции визуально или с помощью какого-либо прибора регистрируется не мгновенное, а усредненное по времени значение интенсивности света:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \langle \cos \delta \rangle, \quad (26.4)$$

причем усреднение осуществляется в течение времени срабатывания прибора или человеческого глаза, которые много-много больше введенного выше характерного времени τ . Опираясь на выражение (26.4), критерий когерентности волн можно сформулировать следующим образом.

Если складываемые волны не когерентны, то при их наложении в пространстве интерференция не наблюдается, перераспределения интенсивности света не происходит, так что интенсивность света в

каждой точке пространства равна сумме интенсивностей складываемых волн:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle. \quad (26.5)$$

Сравнивая (26.5) с (26.4), приходим к выводу, что в рассматриваемом случае среднее значение интерференционного члена равно нулю:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \langle \cos \delta \rangle &= 0, \\ \langle \cos \delta \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Если волны когерентны, то при их наложении в пространстве возникает интерференция, а именно: интенсивность света в каждой точке описывается выражением (26.4), в котором среднее значение интерференционного члена отлично от нуля:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \langle \cos \delta \rangle &\neq 0, \\ \langle \cos \delta \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, *критерием когерентности волн (необходимым и достаточным условием когерентности) служит отличие от нуля среднего по времени значения интерференционного члена, рассчитываемого в каждой точке пространства, где имеет место наложение рассматриваемых волн:*

$$\langle \cos \delta \rangle \neq 0. \quad (26.6)$$

Здесь $\delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$ — разность фаз складываемых колебаний.

Множитель $2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}$ опускаем, поскольку $\langle I_1 \rangle \neq 0$ и $\langle I_2 \rangle \neq 0$; в противном случае одна или обе волны просто не существуют.

Характеристики естественного света. Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых многими атомами. Отдельные атомы излучают волновые цуги длительностью $\tau \sim 10^{-8}$ с, пространственной протяженностью $l_{\text{цуг}} \sim c\tau \approx 3$ м, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме (см. § 19). Каждый цуг волн можно рассматривать как часть («обрывок») гармонической волны ограниченной длительности и протяженности, которая характеризуется определенной частотой, амплитудой, начальной фазой, плоскостью колебаний светового вектора и т. д. Перечисленные характеристики каждого нового цуга, за исключением, возможно, частоты, никак не связаны с соответствующими параметрами предыдущего цуга. В испускаемой светящимся телом естественной световой волне излучение одной группы атомов через время порядка $\tau \sim 10^{-8}$ с сменяется излучением другой группы, происходит непрерывное хаотическое изменение состава цугов, из которых складывается результирующая волна.

Будем полагать, что испускаемая телом естественная световая волна является монохроматической, то есть все составляющие ее цуги характеризуются одинаковой частотой. Естественный свет как результат сложения огромного числа отдельных «гармонических» волновых

цугов является гармонической волной, однако амплитуда и фаза ее с течением времени претерпевают случайные изменения.

Уравнение естественной световой волны можно записать в следующем виде:

$$E(t) = A(t) \cos[\omega t + \alpha(t)], \quad (26.7)$$

где через $E(t)$ обозначена проекция светового вектора на некоторое фиксированное направление (направление колебаний), $A(t)$ и $\alpha(t)$ — зависящие от времени амплитуда и начальная фаза волны. Характерное время изменения амплитуды и начальной фазы порядка средней длительности волнового цуга τ .

В дальнейших рассуждениях будем использовать следующую упрощенную модель: естественный свет представляет собой гармоническую монохроматическую волну, амплитуда и фаза которой остаются неизменными в течение промежутка времени τ , равного длительности волнового цуга. По истечении этого времени амплитуда и фаза волны

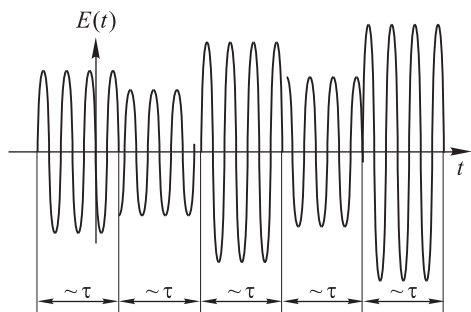


Рис. 82

претерпевают скачкообразное изменение и вновь остаются неизменными в течение следующего промежутка времени τ и т. д. Таким образом, естественная волна — последовательность сменяющих друг друга гармонических колебаний определенной амплитуды и начальной фазы с длительностью каждого колебания τ . На рис. 82 показан график зависимости от времени светового вектора

естественной волны. Отличие реально существующей волны от описанной модели состоит в том, что изменение амплитуды и фазы происходит не скачкообразно, а постепенно и непрерывно по мере обновления состава волновых цугов.

Временем когерентности $\tau_{\text{ког}}$ световой волны называется промежуток времени, в течение которого случайные изменения начальной фазы волны $\alpha(t)$ достигают величины порядка π . Смысл понятия времени когерентности состоит в том, что за это время волна «забывает» свою первоначальную фазу и становится некогерентной по отношению к самой себе.

В рассматриваемой модели естественной световой волны время когерентности приблизительно равно длительности волнового цуга τ :

$$\tau_{\text{ког}} \approx \tau.$$

Таким образом, время когерентности монохроматической естественной волны порядка $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-8}$ с.

Длиной когерентности световой волны называется расстояние, на которое перемещается волна за время, равное $\tau_{\text{ког}}$:

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}.$$

Длина когерентности приблизительно равна длине волнового цуга:

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}} = c\tau = l_{\text{цуг}} \sim 3 \text{ м.}$$

Таким образом, всякая естественная световая волна характеризуется двумя параметрами когерентности: $\tau_{\text{ког}}$ и $l_{\text{ког}}$, от конкретных значений которых зависит возможность наблюдения интерференции в этой волне.

Сложение естественных волн от двух источников. Рассмотрим два источника естественного света S_1 и S_2 , находящихся в среде с $\varepsilon = \mu = 1$, и точку наблюдения P , расстояния от которой до источников равно r_1 и r_2 (рис. 83). В рамках рассматриваемой модели естественной световой волны, пришедшие в точку наблюдения от первого и второго источников, описываются уравнениями:

$$E_1 = A_1(t) \cos [\omega t - kr_1 + \alpha_1(t)],$$

$$E_2 = A_2(t) \cos [\omega t - kr_2 + \alpha_2(t)],$$

где E_1 и E_2 — световые векторы, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ — случайным образом изменяющиеся с течением времени амплитуды и фазы.

Разность фаз δ колебаний световых векторов E_1 и E_2 в точке наблюдения P равна:

$$\delta(t) = k(r_2 - r_1) + \alpha_1(t) - \alpha_2(t).$$

Величина $\delta(t)$, как и $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, случайным образом изменяется с течением времени, так что среднее по времени значение косинуса этой величины равно нулю: $\langle \cos \delta(t) \rangle = 0$. (Здесь имеется ввиду усреднение в течение времени срабатывания регистрирующего свет прибора или глаза, которое значительно превышает время когерентности τ естественного света). Таким образом, согласно критерию (26.6), складываемые в точке наблюдения волны не когерентны, возникновение интерференционной картины невозможно.

Сложение волн, полученных делением естественного света от одного источника. Среда, в которой распространяются световые волны, имеет параметры $\varepsilon = \mu = 1$. Пусть пришедшие в точку наблюдения P волны 1 и 2 получены делением на две части волны от одного источника S естественного света, который будем считать монохроматическим (рис. 84). На рис. 84 представлена одна из возможных оптических схем деления световой волны, испускаемой одним источни-

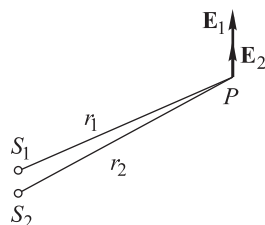


Рис. 83

ком, на части и последующего наложения образующихся волн. С этой целью используются зеркала Z_1 и Z_2 . В точке P оптическая длина пути светового луча первой волны — луча 1 — равна s_1 , оптическая длина пути светового луча второй волны — луча 2 — равна s_2 . Пусть для определенности $s_2 > s_1$. Оптическая разность хода лучей 1 и 2 равна: $\Delta = s_2 - s_1$. Через E_1 и E_2 на рис. 84 обозначены световые векторы первой и второй волн в точке наблюдения P . Рассмотрим два различных случая.

Рис. 84

Случай 1. Оптическая разность хода Δ не превышает длины когерентности световой волны: $\Delta \leq l_{\text{ког}}$.

Всякий волновой цуг испускаемой источником S естественной волны делится с помощью рассматриваемой оптической схемы на две части, которые будем называть цугом 1 и цугом 2 (рис. 85). Поскольку скорости перемещения цугов 1 и 2 в пространстве одинаковы, в тот момент времени, когда цуг 1 окажется вблизи точки P , цуг 2 будет находиться от него на расстоянии $\Delta = s_2 - s_1$. (Расстоянием между цугами можно считать расстояние между их волновыми фронтами.) Так как Δ меньше длины когерентности, равной протяженности цуга $l_{\text{цуг}}$: $\Delta \leq l_{\text{ког}} \sim l_{\text{цуг}}$, то в рассматриваемый момент времени в точке P цуги 1 и 2 частично перекрываются, накладываются друг на друга (см. рис. 85).

Аналогичная ситуация реализуется для всех цугов испускаемой источником S естественной световой волны: каждый цуг делится с помощью оптической системы на две части, которые пройдя разные пути s_1 и s_2 , накладываются друг на друга в точке наблюдения P .

Амплитуды и начальные фазы цугов 1 и 2 одинаковы, так как эти цуги представляют собой две части одной и той же гармонической волны — исходного цуга, который был поделен с помощью оптической схемы. Это же относится и к результирующим световым волнам 1 и 2 , наложение которых осуществляется в области пространства вблизи точки P . Световые векторы E_1 и E_2 результирующих волн в точке P можно представить в виде

$$E_1 = A(t) \cos[\omega t - ks_1 + \alpha(t)],$$

$$E_2 = A(t) \cos[\omega t - ks_2 + \alpha(t)],$$

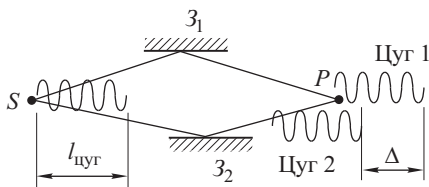


Рис. 85

где $A(t)$ и $\alpha(t)$ — одинаковые для обеих волн амплитуда и начальная фаза.

Разность фаз δ складываемых колебаний E_1 и E_2 является постоянной, не зависящей от времени величиной. В точке P она равна: $\delta = k(s_2 - s_1)$. Соответственно среднее по времени значение интерференционного члена в области пространства вблизи точки P , вообще говоря, отлично от нуля:

$$\langle \cos \delta \rangle \neq 0.$$

Согласно критерию (26.6) складываемые волны когерентны, при их наложении возникнет интерференция.

Таким образом, наблюдение интерференции в естественном свете при наложении волн, полученных делением волны от одного источника, возможно при выполнении условия: $\Delta \leq l_{\text{ког}}$ — оптическая разность хода интерферирующих лучей не превышает длины когерентности естественной световой волны.

Случай 2. Пусть теперь оптическая разность хода $\Delta = s_2 - s_1$ лучей 1 и 2, пришедших в точку наблюдения P (см. рис. 84), больше длины когерентности $l_{\text{ког}}$ естественной световой волны: $\Delta > l_{\text{ког}}$. Рассмотрим цуги 1 и 2, полученные делением на две части какого-либо одного цуга естественной волны, испускаемой источником S .

В тот момент, когда цуг 1 окажется вблизи точки P , цуг 2 находится от него на расстоянии Δ , превышающем длину когерентности $l_{\text{ког}}$ и протяженность цуга $l_{\text{цуг}}$: $\Delta > l_{\text{ког}} \sim \sim l_{\text{цуг}}$ (рис. 86). Цуги 1 и 2 вблизи точки наблюдения P не перекрываются. Следовательно, волновые цуги, кото-

рые накладываются друг на друга в точке P , имеют различные амплитуды и начальные фазы. Это же относится и к пришедшим в точку P результирующим волнам 1 и 2 (см. рис. 84), световые векторы которых E_1 и E_2 представляются в виде:

$$E_1 = A_1(t) \cos [\omega t - ks_1 + \alpha_1(t)],$$

$$E_2 = A_2(t) \cos [\omega t - ks_2 + \alpha_2(t)].$$

Разность фаз δ складываемых колебаний равна:

$$\delta(t) = k(s_2 - s_1) + \alpha_1(t) - \alpha_2(t).$$

Величина δ , как и начальные фазы $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, случайным образом зависит от времени. Среднее по времени значение косинуса случайной функции времени $\delta(t)$ равно нулю:

$$\langle \cos \delta(t) \rangle = 0.$$

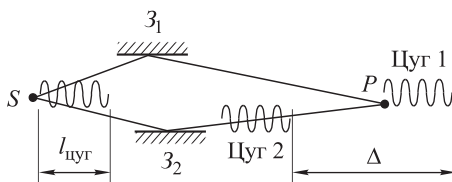


Рис. 86

Согласно критерию (26.6) складываемые в области пространства вблизи точки P волны не когерентны, возникновение и наблюдение интерференционной картины здесь невозможно.

Таким образом, если в области пространства, где осуществляется наложение световых волн, полученных делением на две части естественной световой волны от одного источника, оптическая разность хода Δ превышает длину когерентности $l_{\text{ког}}$ естественной световой волны: $\Delta > l_{\text{ког}}$, то интерференция не возникает, поскольку складываемые волны не когерентны.

Связь предельного порядка интерференции (числа различных интерференционных полос) с длиной и временем когерентности. Порядок интерференционного максимума m равен числу целых длин волн, укладывающихся на оптической разности хода Δ интерферирующих лучей:

$$m = \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Наибольшее возможное значение оптической разности хода Δ , при котором еще имеет место интерференция, равно длине когерентности $l_{\text{ког}}$ естественной световой волны. Следовательно, предельный порядок интерференции $m_{\text{пред}}$ или иначе число различных интерференционных полос равно:

$$m_{\text{пред}} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{c\tau_{\text{ког}}}{\lambda}. \quad (26.8)$$

Сформулируем итоги данного параграфа. Так как световые волны, испускаемые физически различными источниками естественного света, не когерентны; интерференция таких волн невозможна. Интерференцию в естественном свете возникает только в результате деления волны от одного источника на две части и последующего наложения образовавшихся волн в некоторой области пространства посредством той или иной оптической схемы.

Всякая естественная световая волна характеризуется параметрами когерентности — временем когерентности $\tau_{\text{ког}}$ и длиной когерентности $l_{\text{ког}}$. Для наблюдения интерференции в естественном свете необходимо, чтобы оптическая разность хода Δ интерферирующих лучей не превышала длины когерентности $l_{\text{ког}}$:

$$\Delta < l_{\text{ког}}. \quad (26.9)$$

Предельный порядок интерференции в естественном свете зависит от длины и времени когерентности и определяется формулой (26.8).

§ 27. Фурье-спектр световой волны

Фурье-спектр волнового цуга. Всякий цуг волн с частотой ω_0 длительностью τ можно представить как суперпозицию гармонических

волн с различными частотами, в основном принадлежащими интервалу $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega \cdot \tau \approx 2\pi; \quad (27.1)$$

середина интервала $\Delta\omega$ совпадает с частотой ω_0 .

Следовательно, и естественная световая волна, которая представляет совокупность волновых цугов частоты ω_0 , не может быть строго монохроматической, а характеризуется набором частот из указанного интервала $\Delta\omega$ (см. (27.1)).

Доказательства этих утверждений основывается на теореме Фурье, согласно которой всякую ограниченную функцию времени $F(t)$ можно представить в виде суммы (интеграла) бесконечного числа гармонических функций (составляющих) вида $A(\omega)e^{i\omega t}$, где ω — частота, $A(\omega)$ — амплитуда:

$$F(t) = \int A(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Зависимость амплитуды A гармонической составляющей от ее частоты ω определяется по формуле:

$$A(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi,$$

где ξ — вспомогательная переменная интегрирования.

Применим теорему Фурье для вычисления амплитуды $A(\omega)$ гармонических составляющих волнового цуга, зависимость светового вектора которого от времени показана на рис. 87. Волновой цуг длительности τ и частоты ω_0 можно представить в комплексной форме в виде функции времени $F(t)$:

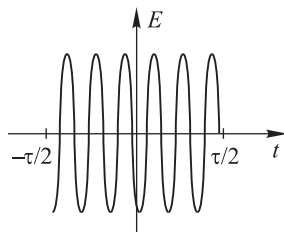


Рис. 87

$$F(t) = \begin{cases} A_0 e^{i\omega_0 t} & \text{при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq +\frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } +\frac{\tau}{2} < t < -\frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Найдем амплитуду гармонических составляющих $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi = 2\pi \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A_0 e^{i\omega_0\xi} e^{-i\omega\xi}d\xi = \\ &= 2\pi A_0 \left. \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\xi}}{i(\omega_0 - \omega)} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = 2\pi A_0 \tau \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\tau/2]}{(\omega_0 - \omega)\tau/2}. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Как известно (см. § 19), интенсивность I гармонической волны пропорциональна квадрату ее амплитуды A . С учетом (27.2) зависимость

от частоты ω интенсивности I гармонических составляющих волнового цуга имеет вид

$$I(\omega) = I_0 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)\tau/2]}{[(\omega_0 - \omega)\tau/2]^2}, \quad (27.3)$$

где I_0 — интенсивность составляющей с частотой, равной частоте цуга $\omega = \omega_0$.

График зависимости $I(\omega)$, который представляет собой так называемый *фурье-спектр волнового цуга*, показан на рис. 88. Из формулы (27.3) и графика

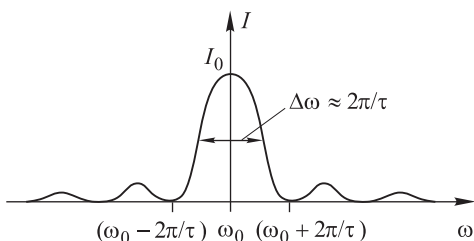


Рис. 88

видно, что интенсивность гармонических составляющих с частотами из интервала $\Delta\omega = 2\pi/\tau$, середина которого находится в точке ω_0 , значительно превосходит интенсивность остальных составляющих. С этим обстоятельством связано утверждение, что частоты гармонических

составляющих волнового цуга в основном принадлежат указанному интервалу.

Связь ширины спектрального интервала естественной световой волны с длиной и временем когерентности. Рассмотрим естественную световую волну, состоящую из большого числа отдельных волновых цугов средней длительности τ . Пусть частота всех волновых цугов одинаковая. Как показано выше, даже если все атомы светящегося тела излучают электромагнитные волны (цуги) определенной фиксированной частоты ω_0 , результирующая волна, как и каждый цуг, не является строго монохроматической — в ней присутствует излучение с различными частотами из интервала $\Delta\omega$, определяемого условием (27.1): $\Delta\omega \cdot \tau \approx 2\pi$. Оценим ширину $\Delta\nu$ частотного интервала естественной волны, если длительность цуга составляет $\tau \sim 10^{-8}$ с:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{\tau} \approx 10^8 \text{ Гц.}$$

Частота ν электромагнитных волн видимого диапазона порядка $\sim 0,5 \cdot 10^{15}$ Гц. Относительная ширина спектрального интервала рассматриваемой естественной волны очень мала:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-7},$$

так что волну с очень хорошей точностью можно считать монохроматической. Напомним, что время когерентности такой волны $\tau_{\text{ког}}$ порядка длительности цуга τ .

Пусть теперь волновые пучи, излучаемые атомами светящегося тела, имеют различные частоты из некоторого интервала $\Delta\omega$, а не фиксированную частоту ω_0 , как в рассмотренном выше случае. Соотношение (27.1), основанное на теореме Фурье, остается в силе, однако под временем τ теперь следует понимать не среднюю длительность волнового пуча, а время когерентности испускаемой светящимся телом естественной волны:

$$\Delta\omega \cdot \tau_{\text{ког}} \approx 2\pi,$$

или, переходя от циклической частоты ω к частоте ν :

$$\Delta\nu \cdot \tau_{\text{ког}} \approx 1. \quad (27.4)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае (когда спектральный интервал $\Delta\omega$ намного шире, чем в естественной монохроматической волне) время когерентности гораздо меньше длительности пуча τ :

$$\tau_{\text{ког}} \ll \tau \sim 10^{-8} \text{ с},$$

соответственно длина когерентности гораздо меньше протяженности пуча $l_{\text{пуч}}$:

$$l_{\text{ког}} \ll l_{\text{пуч}} \sim 3 \text{ м}.$$

Для любой световой волны экспериментально значительно проще измерить ширину ее спектрального интервала $\Delta\nu$, чем непосредственно определить каким-либо способом время когерентности $\tau_{\text{ког}}$. Зная величину $\Delta\nu$, можно вычислить как время, так и длину когерентности по следующим формулам (см. (27.4)):

$$\tau_{\text{ког}} \approx \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (27.5)$$

$$l_{\text{ког}} \approx c\tau_{\text{ког}} \approx \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{c}{\Delta(c/\lambda)} \approx \frac{\lambda^2}{|\Delta\lambda|}, \quad (27.6)$$

где λ — средняя длина естественной световой волны, $\Delta\lambda$ — ширина спектрального интервала этой волны.

Предельный порядок интерференции $m_{\text{пред}}$ в естественном свете с шириной спектрального интервала $\Delta\lambda$, с учетом формул (27.6) и (26.8), равен:

$$m_{\text{пред}} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} \approx \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|}. \quad (27.7)$$

§ 28. Пространственная когерентность

До сих пор рассматривая интерференцию, мы считали источник или источники световых волн точечными. Учтем теперь конечные размеры источников света и определим, при каких условиях наблюдение интерференции в свете от такого протяженного источника возможно. Как и выше, свет распространяется в среде, где $\varepsilon = \mu = 1$.

Пусть свет от протяженного источника AB падает на непрозрачный экран с двумя узкими щелями, за которыми расположен экран наблюдения интерференционной картины (рис. 89). Заданы следующие

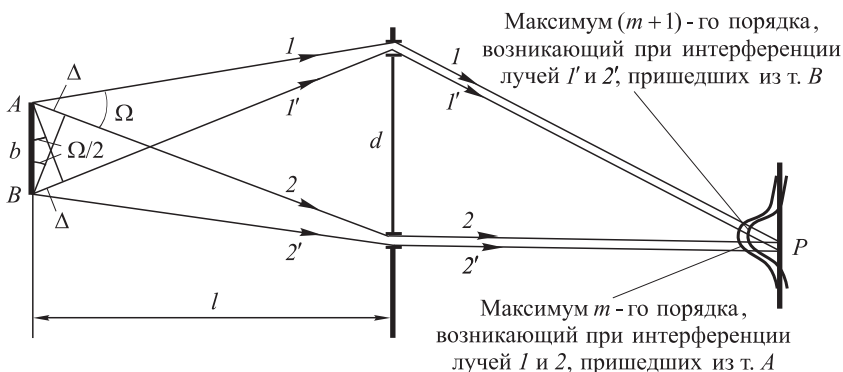


Рис. 89

параметры: b — линейный размер источника (расстояние между точками A и B), l — расстояние от источника до экрана со щелями, d — расстояние между щелями, плоский угол $\Omega = d/l$ — так называемая *апертура интерференции* (угловой размер оптической системы, которая используется для деления на две части естественной световой волны в интерференционном опыте). Везде в дальнейшем предполагается: $d \ll l$, $b \ll l$; кроме того, выполнены условия временной когерентности интерферирующих волн — оптическая разность хода много меньше длины когерентности. Поставим задачу определить линейный размер b источника света, при котором в описанных условиях возможно наблюдение интерференции.

Каждый элементарный участок поверхности светящегося тела AB можно рассматривать в качестве точечного источника света, который порождает на экране наблюдения свою интерференционную картину. Интерференционные картины от разных элементарных участков поверхности светящегося тела AB смещены друг относительно друга. Пусть смещение друг относительно друга интерференционных картин, порожденных двумя крайними участками поверхности источника света — точками A и B — составляет величину, примерно равную ширине интерференционной полосы. В этом случае интерференционные максимумы от всех промежуточных по отношению к A и B точек поверхности источника будут заполнять пространство между двумя соседними максимумами в интерференционной картине от точки A ; картина окажется настолько размытой, что освещенность экрана наблюдения станет практически равномерной (рис. 90). Так, если максимум m -го порядка в картине, порожденной волнами из точки A , совпадает с максимумом $(m + 1)$ -го порядка в картине, порожденной

волнами из точки B , что соответствует относительному смещению интерференционных картин от этих двух точек на расстояние, равное ширине интерференционной полосы, то максимум m -го порядка от некоторой промежуточной точки A' будет располагаться посередине между максимумами m -го и $(m+1)$ -го порядка интерференционной картины от точки A (рис. 90).

Итак, критерием размывания интерференционной картины (невозможности ее наблюдения) является смещение друг относительно друга

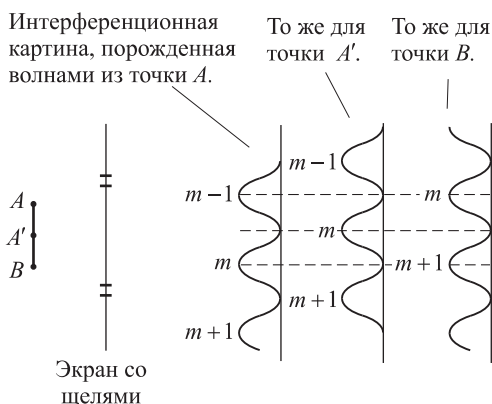


Рис. 90

интерференционных картин, порожденных волнами от крайних точек поверхности светящегося тела, на расстояние, равное ширине интерференционной полосы. Пользуясь этим критерием, определим наибольший допустимый размер b источника света.

Пусть в точку P экрана наблюдения (см. рис. 89) приходят лучи 1 и 2 из точки A источника, оптическая разность хода которых равна:

$$L_1 - L_2 = m\lambda, \quad (28.1)$$

что соответствует интерференционному максимуму m -го порядка в точке P .

В ту же точку P приходят лучи 1' и 2' из точки B источника, оптическая разность хода которых равна

$$L'_1 - L'_2 = (m+1)\lambda, \quad (28.2)$$

что соответствует максимуму $(m+1)$ -го порядка в точке P .

Условия (28.1) и (28.2) подразумевают, что в одной и той же точке экрана расположены максимумы m -го и $(m+1)$ -го порядка интерференционных картин, порожденных волнами двух точечных источников A и B — крайних точек протяженного источника света. Равенства (28.1) и (28.2) выражают собой критерий размывания интерференционной картины.

Из рис. 89 следует:

$$L'_1 = L_1 + \Delta, \quad L'_2 = L_2 - \Delta, \quad \Delta \approx b \sin(\Omega/2) \approx b\Omega/2.$$

Отсюда

$$L'_1 - L'_2 = L_1 - L_2 + 2\Delta \approx L_1 - L_2 + b\Omega.$$

Используя формулы (28.1) и (28.2), получим

$$(m+1)\lambda \approx m\lambda + b\Omega.$$

Отсюда

$$b \approx \frac{\lambda}{\Omega}. \quad (28.3)$$

Равенство (28.3) определяет по порядку величины предельный линейный размер b протяженного источника света, достижение и превышение которого приводит к невозможности наблюдения интерференции в свете от этого источника. Для наблюдения интерференции необходимо выполнение условия:

$$b < \frac{\lambda}{\Omega}, \quad (28.4)$$

где λ — длина волны, Ω — апертура интерференции.

Полученные результаты можно интерпретировать, пользуясь иной терминологией. Все точки поверхности протяженного источника света (точнее, физически бесконечно малые участки его поверхности), которые расположенные друг от друга на расстоянии, не превышающем величину λ/Ω , излучают когерентные волны; при наложении этих волн возникает и наблюдается интерференционная картина. Точки поверхности источника, расположенные на расстоянии, превышающем величину λ/Ω , являются источниками некогерентных волн; возникновение интерференции в этих волнах невозможно. Таким образом, расстояние

$b \sim \lambda/\Omega$ можно называть линейным размером области когерентности на поверхности протяженного источника света.

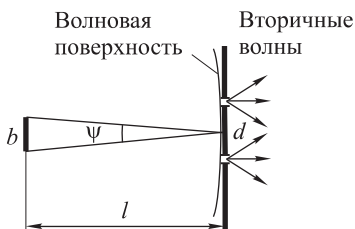


Рис. 91

Радиус когерентности световой волны. Пусть теперь задан угловой размер протяженного источника света $\psi = b/l$, где b — линейный размер поверхности источника, l — расстояние между источником и экраном с узкими

щелями (рис. 91). Выясним, при каких значениях расстояния d между щелями, которые служат для деления испускаемой светящимся телом естественной световой волны на две, возможно наблюдение интерференции.

Как установлено выше (см. (28.4)), интерференция наблюдается, если размер источника b и апертура интерференции $\Omega = d/l$ связаны соотношением:

$$b < \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\lambda l}{d}.$$

Отсюда определим допустимые значения d :

$$d < \frac{\lambda l}{b} = \frac{\lambda}{\psi}. \quad (28.5)$$

Если угловой размер ψ протяженного источника света задан, то наблюдение интерференции в свете этого источника возможно лишь при выполнении условия (28.5), то есть когда расстояние d между щелями не слишком велико.

Волновая поверхность состоящей из множества отдельных волновых цугов естественной световой волны — это некоторая усредненная волновая поверхность всех составляющих волну цугов; фаза результирующей волны при переходе от одной точки указанной поверхности к другой меняется случайным образом. Напомним, что фаза колебаний электромагнитного поля во всех точках волновой поверхности гармонической волны одинакова. В связи с указанным отличием естественной и гармонической волн волновую поверхность естественной волны более точно следует называть псевдоволновой поверхностью. В рассматриваемом интерференционном опыте (рис. 91) плоскость экрана, в котором расположены щели, совпадает с одной из псевдоволновых поверхностей естественной световой волны, испускаемой протяженным источником.

Щели «вырезают» на псевдоволновой поверхности участки, которые служат источниками так называемых *вторичных волн* (см. принцип Гюйгенса–Френеля, гл. VI). Если щели расположены не слишком далеко друг от друга (выполнено условие (28.5)), то суперпозиция вторичных волн в области пространства, где расположен экран наблюдения, приводит к возникновению интерференции; в этом случае вторичные волны можно считать когерентными. Если расстояние между щелями велико (условие (28.5) не выполняется, так что $d > \lambda/\psi$), интерференция вторичных волн не возникает; в этом случае вторичные волны не когерентны.

Радиусом когерентности естественной световой волны называется линейный размер участка псевдоволновой поверхности, все точки которого могут служить источниками вторичных когерентных волн. Радиус когерентности равен расстоянию, при перемещении на которое вдоль псевдоволновой поверхности случайные изменения фазы естественной световой волны достигают величины порядка π .

Учитывая определение и полученные выше результаты (см. (28.5)), радиус когерентности $r_{\text{ког}}$ естественной световой волны равен:

$$r_{\text{ког}} \sim d_{\text{max}} = \frac{\lambda}{\psi}. \quad (28.6)$$

Пример. Угловой размер Солнца равен $\psi \approx 0,01$ рад. Радиус когерентности для солнечного света с длиной волны $\lambda = 550$ нм составляет величину $r_{\text{ког}} \sim \lambda/\psi \approx 0,05$ мм. На таком или меньшем расстоянии должны располагаться в непрозрачном экране щели или отверстия, чтобы оказалось возможным наблюдать интерференцию в солнечном свете.

Все пространство, занимаемое естественной световой волной, можно разбить на области, в каждой из которых волна приблизительно сохраняет когерентность. Такая область определяется следующими размерами — глубиной в направлении распространения волны порядка длины когерентности $l_{\text{ког}}$ (см. (27.6)) и участком псевдоволновой поверхности с линейными размерами порядка радиуса когерентности $r_{\text{ког}}$ (см. (28.6)).

§ 29. Интерференция в тонких пластинках

Рассмотрим некоторые оптические схемы, с помощью которых осуществляется наблюдение интерференции.

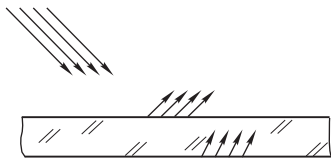


Рис. 92

Пусть световая волна, которая распространяется в вакууме или воздушной среде, падает на тонкую стеклянную пластинку и отражается частично от ее внешней, частично от внутренней поверхности (рис. 92). Выясним условия, при которых возможно возникновение и наблюдение интерференции в отраженных лучах.

Оптическая разность хода интерферирующих лучей. На рис. 93 показан ход интерферирующих лучей 1 и 2. Луч 1 преломляется в точке A внешней поверхности пластинки и, отразившись в точке B ее внутренней поверхности, выходит из стекла в точке C . Луч 2 отражается от внешней поверхности пластинки в точке C и интерферирует с лучом 1.

Толщина пластинки равна b ; абсолютный показатель преломления материала, из которого изготовлена пластинка (стекла), равен n ; θ_1 — угол падения лучей 1 и 2 на внешнюю поверхность пластинки, θ_2 — угол преломления луча 1, θ_1 и θ_2 связаны законом преломления: $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$. Отрезок прямой AD перпендикулярен лучам 1 и 2 и определяет положение волнового фронта падающей волны в тот момент, когда

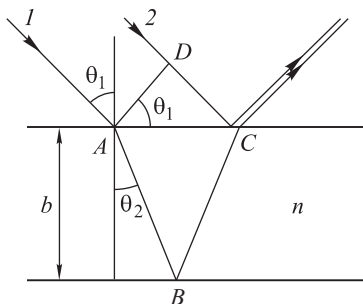


Рис. 93

фронт достигает точки A . Оптическая разность хода Δ лучей 1 и 2 в точке C равна:

$$\begin{aligned}\Delta &= n(AB + BC) - DC = 2nAB - AC \sin \theta_1 = \\ &= 2n \frac{b}{\cos \theta_2} - 2b \operatorname{tg} \theta_2 \sin \theta_1 = \frac{2nb}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} - 2b \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = \\ &= \frac{2nb}{\sqrt{1 - (\sin^2 \theta_1)/n^2}} - 2b \frac{\sin^2 \theta_1/n}{\sqrt{1 - (\sin^2 \theta_1)/n^2}} = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}.\end{aligned}$$

При отражении от поверхности стекла световой волны, падающей на эту поверхность из воздуха или вакуума, фаза волны скачком меняется на величину π (см. § 20). Скачку фазы π соответствует дополнительная оптическая длина пути $\lambda/2$. С учетом скачка фазы при отражении волны от поверхности стекла эффективная оптическая разность хода $\Delta_{\text{эф}}$ лучей 1 и 2 в точке C равна:

$$\Delta_{\text{эф}} = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\lambda}{2}, \quad (29.1)$$

где λ — длина световой волны в вакууме.

Как видно из (29.1), оптическая разность хода $\Delta_{\text{эф}}$ зависит от двух параметров — толщины пластинки b и угла падения θ_1 . Соответственно в тонких пластинках возможно наблюдение интерференционных картин двух типов — так называемые *полосы равного наклона* и *полосы равной толщины*.

Полосы равного наклона. Полосы равного наклона возникают и наблюдаются при выполнении следующих условий.

1. Тонкая прозрачная пластинка или пленка является плоскопараллельной, то есть имеет постоянную толщину b :

$$b = \text{const.}$$

2. Пластинка освещается рассеянным светом: световые лучи падают на поверхность пластинки под разными углами, $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$.

3. Интерференционная картина наблюдается либо на экране в фокальной плоскости линзы, расположенной вблизи пластинки, либо (в отсутствие линзы) непосредственно глазом, смотрящим на пластинку и аккомодированным на бесконечность (рис. 94).

Наблюдение интерференции непосредственно вблизи поверхности пластинки в рассматриваемом опыте невозможно по следующей причине. Благодаря рассеянному освещению в каждую точку внешней поверхности пластинки приходят и затем отражаются от нее лучи со всеми возможными значениями угла падения θ_1 . Соответственно в одной и той же области пространства (вблизи рассматриваемой точки внешней поверхности пластинки) интерферируют пары лучей со всеми возможными значениями оптической разности хода $\Delta_{\text{эф}}$. Интенсивность света вблизи любой точки поверхности пластинки одинаковая.

Если поместить вблизи пластинки линзу, все отраженные параллельные друг другу лучи, которые характеризуются одинаковым значением угла падения θ_1 и, согласно (29.1), одинаковой оптической разностью хода $\Delta_{\text{эф}}$, собираются в одной и той же точке фокальной

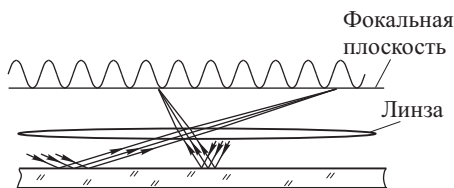


Рис. 94

плоскости линзы. Каждой точке фокальной плоскости соответствует определенное значение оптической разности хода $\Delta_{\text{эф}}$ интерферирующих лучей, собранных линзой в эту точку, и, следовательно, определенное значение интенсивности света. Интерференционные максимумы

и минимумы наблюдаются в фокальной плоскости линзы в виде чередующихся светлых и темных колец, расположенных симметрично относительно главной оптической оси линзы.

При рассматривании пластинки аккомодированным на бесконечность глазом роль линзы выполняет хрусталик, а роль экрана наблюдения — сетчатая оболочка.

Полосы равной толщины. Полосы равной толщины возникают и наблюдается при выполнении следующих условий.

1. Толщина b пластинки меняется от точки к точке, например, стеклянная пластинка имеет форму клина (рис. 95).

2. Пластика освещается параллельным пучком света, так что углы падения θ_1 всех лучей одинаковы.

3. Интерференционные полосы наблюдаются непосредственно на поверхности пластинки или вблизи этой поверхности (в окружающем пластинку пространстве).

Так как в данном случае углы падения всех лучей на поверхность пластинки одинаковы ($\theta_1 = \text{const}$), оптическая разность хода интерферирующих лучей $\Delta_{\text{эф}}$ зависит только от одного параметра — толщины b пластинки. Этот параметр изменяется при переходе от одной точки поверхности пластинки к другой. Каждой точке поверхности соответствует свое определенное значение толщины пластинки b и оптической разности хода $\Delta_{\text{эф}}$ интерферирующих вблизи этой точки лучей, а следовательно, и различная интенсивность света в интерференционной картине. Интерференционная картина наблюдается непосредственно вблизи поверхности стекла, при этом максимумы и минимумы интенсивности имеют вид чередующихся темных и светлых

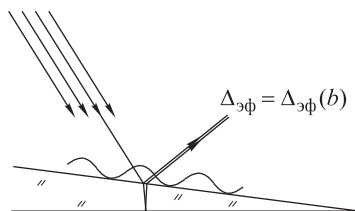


Рис. 95

полос, каждая из которых соответствует фиксированной толщине стекла и располагается вдоль участка пластинки постоянной толщины.

Полосы равной толщины иногда наблюдаются невооруженным глазом при освещении прозрачной пластинки или пленки не направленным, а рассеянным светом. Это происходит благодаря тому, что обладающий малой апертурой глаз способен выделять из рассеянного света пучки параллельных лучей, в которых и наблюдаются полосы равной толщины.

Ограничение толщины пластинки, обусловленное параметрами когерентности света. По порядку величины во всех интерференционных опытах с тонкими пластинками (пленками) оптическая разность хода лучей Δ равна удвоенной толщине пластинки $2b$, умноженной на абсолютный показатель преломления n материала пластинки:

$$\Delta \sim 2bn. \quad (29.2)$$

Для того чтобы интерференция была возможна, оптическая разность хода интерферирующих лучей не должна превышать длины когерентности света, освещающего пластинку (см. (26.9)):

$$\Delta \leq l_{\text{ког}}. \quad (29.3)$$

Из (29.2) и (29.3) получаем условие возникновения интерференции в тонких пластинках:

$$2bn \leq l_{\text{ког}}. \quad (29.4)$$

Оценим максимально допустимую толщину стеклянной пластинки. Если длина световой волны $\lambda = 550$ нм, а ширина спектрального интервала $\Delta\lambda = 2$ нм, длина когерентности света, согласно (27.6), равна:

$$l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \sim 0,1 \text{ мм}.$$

В соответствии с (29.4) при $n = 1,5$ толщина пластинки не должна превышать величину $\sim 0,03$ мм.

Примерами из повседневной жизни, в которых наблюдается интерференция в тонких пластинках или пленках, служат окрашенные полосы на поверхности нефтяных и масляных пятен и мыльных пузырей, а также цвета побежалости на поверхности закаленного металла.

§ 30. Интерференционный опыт с бипризмой Френеля

Рассмотрим пример интерференционной схемы, в которой для создания двух пучков когерентного света, при наложении которых возникает интерференция, используется преломление света.

Источник света S расположен на расстоянии a от бипризмы Френеля с малым преломляющим углом θ , изготовленной из материала с абсолютным показателем преломления n (рис. 96). Экран для наблюдения

интерференционной картины находится на расстоянии b от бипризмы. Длина световой волны равна λ . Условия временной и пространственной когерентности интерферирующих волн будем считать выполненными. Определим ширину Δx интерференционной полосы и число полос, возникающих на экране.

Методами геометрической оптики легко показать, что призма с малым преломляющим углом θ отклоняет падающие на нее лучи от первоначального направления распространения на угол δ , равный:

$$\delta = (n - 1)\theta. \quad (30.1)$$

Верхняя часть бипризмы, преломляя идущие к ней от источника S лучи, поворачивает их на угол δ по часовой стрелке, а нижняя часть призмы — на такой же угол δ против часовой стрелки (рис. 96). Линии продолжения

преломленных верхней половиной бипризмы лучей пересекаются в точке S' , которую можно рассматривать как эффективный источник света. Лучи, преломленные нижней частью бипризмы, пересекаются в точке S'' , которая служит вторым эффективным источником света.

Расстояние между эффективными источниками, которое мы обозначим как $S'S''$, равно:

$$S'S'' \approx 2a \operatorname{tg} \delta \approx 2a\delta = 2a(n - 1)\theta.$$

В интерференционном опыте с бипризмой Френеля расстояние $S'S''$ много меньше суммы расстояний a и b , поэтому угол φ между направлениями распространения интерферирующих волн можно считать малым.

Малый угол φ , под которым видны источники S' и S'' от экрана наблюдения интерференции, приблизительно равен (рис. 97):

$$\varphi \approx \frac{S'S''}{a + b} \approx \frac{2a(n - 1)\theta}{a + b}.$$

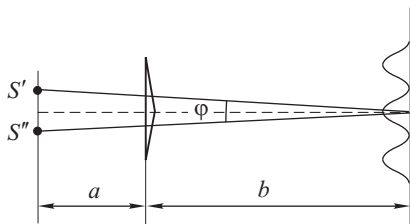


Рис. 97

Согласно (25.6) ширина интерференционной полосы Δx при интерференции плоских волн определяется длиной световой волны λ и углом φ между направлениями распространения интерферирующих лучей. Воспользовавшись формулой (25.6) и полученным выражением

для угла φ , найдем ширину интерференционной полосы в опыте с бипризмой Френеля:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta}.$$

Как видно из рис. 97, ширина L той области экрана наблюдения, в которой перекрываются идущие от эффективных источников S' и S'' световые пучки (ширина области перекрывания), равна

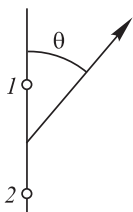
$$L \approx 2b \operatorname{tg} \delta \approx 2b\delta = 2b(n-1)\theta.$$

Максимальное число N возникающих в рассматриваемом опыте интерференционных полос равно отношению ширины L области перекрывания к ширине полосы Δx :

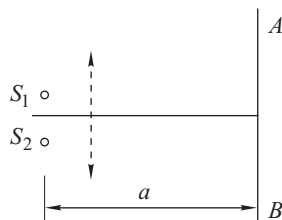
$$N = \frac{L}{\Delta x} = \frac{4ab(n-1)^2\theta^2}{\lambda(a+b)}.$$

Задачи

5.1. Система состоит из двух точечных когерентных излучателей 1 и 2, которые расположены в некоторой плоскости так, что их дипольные моменты перпендикулярны к этой плоскости. Расстояние между излучателями d , длина волны излучения λ . Колебания излучателя 2 отстают по фазе на α ($\alpha < \pi$) от колебаний излучателя 1. Найти углы θ , в которых интенсивность излучения максимальна.



К задаче 5.1



К задаче 5.2

5.2. От двух когерентных источников света S_1 и S_2 получена система интерференционных полос на экране AB ,

удаленном от источников на расстояние $a = 2$ м. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 25$ см? Рассмотреть два случая: а) расстояние от источников до линзы равно $2F$; б) источники находятся в фокальной плоскости линзы.

5.3. На тонкую пленку ($n = 1,33$) падает параллельный пучок белого света. Угол падения $\theta_1 = 52^\circ$. При какой толщине пленки зеркально отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в желтый цвет ($\lambda = 0,6$ мкм)?

5.4. Свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности

клина $\Delta x = 0,21$ мм. Найти: а) угол между гранями клина; б) степень монохроматичности света ($\Delta\lambda/\lambda$), если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $l \approx 1,5$ см от вершины клина.

5.5. Наблюдаются полосы равной толщины в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Клин освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см в направлении, перпендикулярном к поверхности клина. Оценить максимальное число интерференционных полос N на клине, которое может видеть глаз в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза $d = 5$ мм. Оценить степень монохроматичности света ($\Delta\lambda/\lambda$), необходимую для того, чтобы такое максимальное число полос могло наблюдаться.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

§ 31. Принцип Гюйгенса–Френеля. Зоны Френеля

Дифракцией называют явления, которые сопровождают распространение света в среде с резкими неоднородностями и не подчиняются законам геометрической оптики.

Приведем пример. На пути света от точечного источника к экрану наблюдения расположен небольшой непрозрачный предмет, например, диск (рис. 98). На экране в центре области геометрической тени наблюдается максимум освещенности (светлое пятно), соответствующий относительному максимуму интенсивности I световой волны. Вопреки законам геометрической оптики свет, огибая препятствие, проникает в область геометрической тени.

Для наблюдения дифракционных явлений необходимо, чтобы длина световой волны λ была сравнима по величине с характерным размером препятствий (неоднородностей среды).

Физическая сущность явлений интерференции и дифракции одинакова и заключается в пространственном перераспределении интенсивности света в результате наложения когерентных волн. Различия этих явлений можно сформулировать следующем образом. Интерференция возникает при наложении волн от двух или нескольких дискретно расположенных в пространстве точечных источников света (речь идет, например, о двух эффективных источниках света, формируемых с помощью бипризмы Френеля). Дифракционные явления — это результат наложения световых волн от бесконечного множества эффективных точечных источников, распределенных в пространстве непрерывно. Примеры дифракционных явлений будут рассмотрены ниже. Существенный вклад в объяснение дифракции внесли Гюйгенс (1629–1695) и Френель (1788–1827).

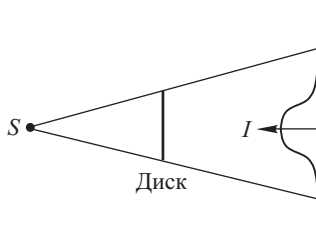


Рис. 98

Принцип Гюйгенса–Френеля. Рассмотрим одну из волновых поверхностей S световой волны (рис. 99). Поверхность S задает положение в пространстве волнового фронта, которое тот занимал в некоторый момент времени t_0 . Мысленно разделим всю поверхность S на элементарные участки и рассмотрим один из них, площадь которого обозначим через dS .

Принцип Гюйгенса–Френеля состоит в следующем: каждый элементарный участок dS волновой поверхности S распространяющейся в пространстве световой волны можно рассматривать в качестве точечного источника *вторичной волны* (в однородной и изотропной среде вторичная волна — сферическая). В любой точке пространства, которую волна достигает позднее, чем поверхность S , колебание электромагнитного поля представляет собой суперпозицию колебаний, порожденных вторичными волнами всех элементов волновой поверхности S . В частности, в любой момент времени $t > t_0$ волновой фронт можно получить, построив огибающую вторичных волн. На рис. 99 волновые фронты в моменты времени t_0 и t обозначены как $S(t_0)$ и $S(t)$.

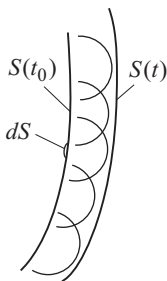


Рис. 99

В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля элементарный участок dS волновой поверхности S излучает вторичную сферическую волну, световой вектор dE которой в произвольной точке P пространства, расположенной на расстоянии r от элемента dS (рис. 100), можно представить в следующем виде ¹⁾:

$$dE = K \frac{a dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (31.1)$$

В этом выражении $(\omega t + \alpha)$ — фаза колебания в месте расположения элемента dS , k — волновое число. Числовой множитель a зависит от амплитуды световой волны в том месте, где находится элемент dS . Коэффициент K зависит от угла φ между нормалью \mathbf{n} к площадке dS и направлением от элемента dS к точке P ; значению $\varphi = 0$ соответствует $K = 1$, значению $\varphi = \pi/2$ соответствует $K = 0$. Амплитуда сферической вторичной волны (31.1) убывает с расстоянием r от источника по закону $1/r$ (см. § 10). Приведенное здесь выражение для амплитуды вторичной волны (31.1) было дано Кирхгофом (1824–1887).

Световой вектор E результирующего колебания в точке P представляет собой сумму (интеграл) световых векторов dE вторичных волн, пришедших от всех элементарных участков dS поверхности S :

$$E = \int_S K \frac{a dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (31.2)$$

Интеграл (31.2) называется *интегралом Кирхгофа–Френеля*.

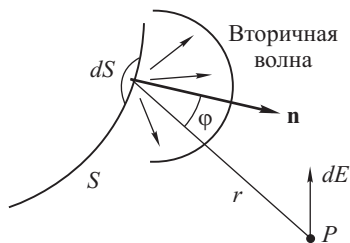


Рис. 100

¹⁾ Здесь и ниже в данной главе для краткости будем называть световым вектором проекцию светового вектора на некоторое заданное направление.

Зоны Френеля. Пусть S — некоторая волновая поверхность сферической или плоской световой волны, P — точка наблюдения (рис. 101). Длина световой волны равна λ .

Зоной Френеля называется участок волновой поверхности, разность расстояний от краев которого до точки наблюдения равна половине длины волны:

$$r_{\text{внешн}} - r_{\text{внутр}} = \frac{\lambda}{2},$$

где $r_{\text{внешн}}$ и $r_{\text{внутр}}$ — соответственно расстояния от внешнего и внутреннего краев зоны до точки наблюдения P .

Зоны Френеля сферической и плоской волновых поверхностей имеют форму колец (см. рис. 101). Параметр b , указанный на рисунке, —

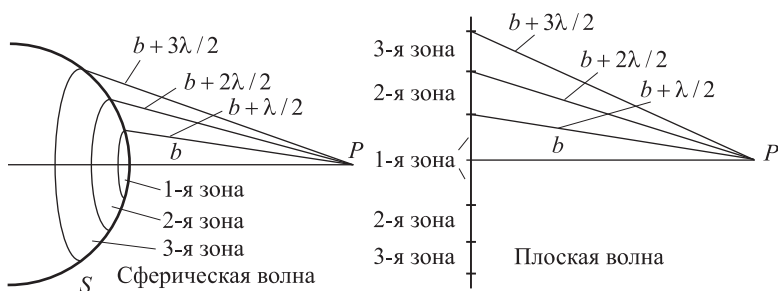


Рис. 101

кратчайшее расстояние от волновой поверхности S до точки наблюдения P . Как следует из определения, форма и размеры зон Френеля определяются *взаимным расположением* волновой поверхности и точки наблюдения.

Радиус зоны Френеля. Зоны Френеля нумеруются в порядке возрастания радиуса соответствующего кольца. *Радиусом зоны Френеля* называется расстояние от прямой, перпендикулярной к волновой поверхности и проходящей через точку наблюдения P , до внешнего края зоны. Таким образом, радиус зоны Френеля — это внешний радиус соответствующего кольца на волновой поверхности. Вычислим радиус r_m m -й зоны Френеля на плоской волновой поверхности (m — порядковый номер зоны).

В соответствии с определением расстояние $r_{\text{внешн}}$ от внешнего края m -й зоны до точки наблюдения P равно:

$$r_{\text{внешн}} = b + m \frac{\lambda}{2},$$

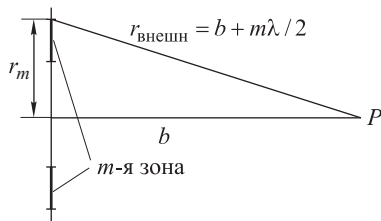


Рис. 102

где b — кратчайшее расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения (рис. 102). Из прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной $r_{\text{внешн}}$, и катетом b найдем второй катет r_m :

$$r_m = \sqrt{r_{\text{внешн}}^2 - b^2} = \sqrt{\left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} = \sqrt{mb\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}}.$$

Поскольку длина световой волны λ мала по сравнению с макроскопическим расстоянием b , величиной $m^2\lambda^2/4$ можно пренебречь по сравнению с $mb\lambda$ под знаком квадратного корня. Окончательно для радиуса m -й зоны Френеля получим

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}. \quad (31.3)$$

Можно показать, что радиус m -й зоны Френеля на сферической волновой поверхности равен

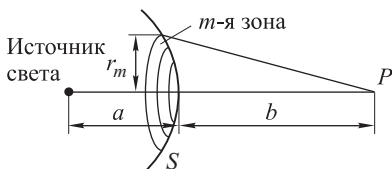


Рис. 103

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}, \quad (31.4)$$

где a — расстояние от источника сферической волны до волновой поверхности S , b — расстояние от волновой поверхности S до точки наблюдения P (рис. 103).

Метод графического сложения амплитуд светового вектора.

Сферическая световая волна, распространяясь в пространстве, достигает точки наблюдения P . Рассмотрим одну из волновых поверхностей — поверхность S — и рассчитаем амплитуду светового вектора в точке P как векторную сумму амплитуд вторичных волн, испускаемых поверхностью S (рис. 104). Для этого мысленно разобьем поверхность S на очень узкие кольцевые зоны, по своей форме подобные зонам Френеля, но гораздо меньшей площади. Будем называть такие зоны элементарными, а радиусом элементарной зоны — величину, определяемую аналогично радиусу зоны Френеля. Пронумеруем элементарные зоны в порядке возрастания их радиуса. Расстояние от всех точек одной и той же элементарной зоны до точки наблюдения P можно считать приблизительно одинаковым. Обозначим через r_i расстояние от внешнего края i -й элементарной зоны до точки P и будем называть величину r_i расстоянием от i -й зоны до точки наблюдения P .

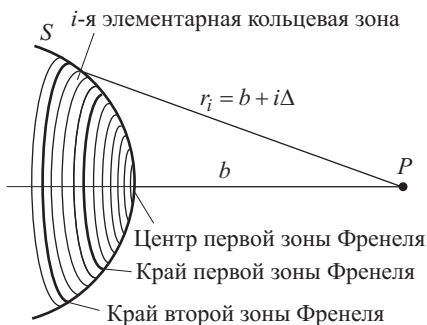


Рис. 104

Выберем ширину каждой элементарной зоны такой, чтобы разность расстояний от любых двух соседних элементарных зон до точки P была одинаковой; обозначим ее символом Δ :

$$r_{i+1} - r_i = \Delta.$$

Элементарные зоны должны быть построены настолько узкими, чтобы разность расстояний от краев элементарной зоны до точки наблюдения была много меньше длины волны:

$$\Delta \ll \lambda.$$

Если кратчайшее расстояние от волновой поверхности S до точки P равно b , то расстояние от i -й элементарной зоны до точки P можно выразить через величины b , Δ и номер зоны i :

$$r_i = b + i\Delta.$$

Пусть фаза колебаний светового вектора на волновой поверхности S равна ωt . Поскольку расстояния от всех точек i -й элементарной зоны до точки P приблизительно одинаковы и равны r_i , то вторичные волны, испускаемые этими точками, придут в точку P с одинаковой фазой, равной:

$$\omega t - kr_i = \omega t - kb - ik\Delta = \omega t - kb - i\delta,$$

где введено обозначение $k\Delta = \delta$ — разность фаз вторичных волн, пришедших в точку P от двух соседних элементарных зон.

Обозначим через ΔE_i колебание в точке P суммарного светового вектора всех вторичных волн, излучаемых i -й элементарной зоной, и для краткости будем называть ΔE_i колебанием, возбуждаемым i -й зоной:

$$\Delta E_i = \Delta A_i \cos(\omega t - kb - i\delta), \quad (31.5)$$

где ΔA_i — амплитуда колебания ΔE_i .

Выпишем выражения ΔE_i для нескольких значений i :

$$\Delta E_1 = \Delta A_1 \cos(\omega t - kb - \delta),$$

$$\Delta E_2 = \Delta A_2 \cos(\omega t - kb - 2\delta),$$

$$\Delta E_3 = \Delta A_3 \cos(\omega t - kb - 3\delta),$$

и т. д.

С увеличением номера зоны i увеличивается расстояние r_i от этой зоны до точки наблюдения P и, следовательно, уменьшаются амплитуда всех вторичных волн, пришедших в точку P из i -й зоны, и амплитуда ΔA_i порожденного ими суммарного колебания светового вектора. Разность фаз колебаний ΔE_{i+1} и ΔE_i , возбуждаемых в точке P соседними элементарными зонами с номерами $(i+1)$ и i , равна δ и одинакова для любых двух соседних зон.

Результирующий световой вектор E в точке P равен сумме световых векторов, возбуждаемых всеми элементарными зонами, на которые разделена волновая поверхность S :

$$E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots + \Delta E_i + \dots = \sum \Delta E_i,$$

где суммирование выполняется по всем элементарным зонам.

Для сложения гармонических колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм, сопоставив каждому колебанию ΔE_i (31.5) вектор на плоскости, длина которого равна

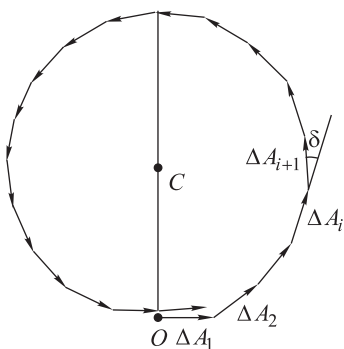


Рис. 105

на амплитуде колебания ΔA_i . Начало вектора каждого следующего колебания ΔE_{i+1} совместим с концом вектора предыдущего колебания ΔE_i . Так как колебание ΔE_{i+1} отстает по фазе на величину δ от колебания ΔE_i , вектор колебания ΔE_{i+1} повернут на угол δ против часовой стрелки по отношению к вектору колебания ΔE_i . Кроме того, как отмечалось выше, длина ΔA_i складываемых векторов с увеличением номера i постепенно уменьшается. Сумма векторов колебаний $\Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots + \Delta E_i + \dots$ представляется в виде спира

ралеобразной ломаной линии, закручивающейся к некоторой точке C (рис. 105).

При устремлении к нулю ширины элементарных зон, на которые разбита волновая поверхность, будет стремиться к нулю величина амплитуды ΔA_i каждого из суммируемых колебаний и длина соответствующего вектора. В результате спираль будет иметь форму гладкой кривой (рис. 106).

Напомним, что результирующий световой вектор E в точке наблюдения P в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля представляет собой сумму световых векторов вторичных волн, излучаемых всеми элементарными участками рассматриваемой волновой поверхности S . Поэтому амплитуда A_0 результирующего светового вектора E в точке P равна длине вектора (OC), соединяющего начало и конец построенной спирали:

$$|\vec{OC}| = A_0.$$

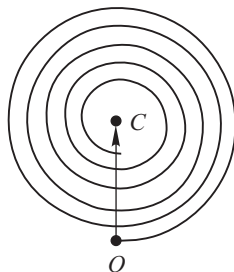


Рис. 106

Диаметр внешнего витка спирали приблизительно равен $2A_0$.

Определим взаимное соответствие участков векторной диаграммы (спирали) и зон Френеля волновой поверхности.

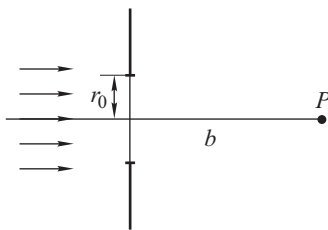
Вектор колебания $\Delta E_{2. \text{з. Фр}}$ повернут на диаграмме на 180° по отношению к вектору $\Delta E_{1. \text{з. Фр}}$ и располагается в конце первого витка спирали. Следовательно, второй зоне Френеля соответствует вся левая половина первого витка спирали (рис. 107).

Аналогичные рассуждения можно провести для всех зон Френеля, на которые разделена волновая поверхность. Поскольку разность расстояний от внешнего и внутреннего краев каждой зоны Френеля до точки наблюдения равна половине длины волны, разность фаз колебаний светового вектора вторичных волн, пришедших в точку наблюдения от внешнего и внутреннего краев каждой зоны, составляет величину π . Следовательно, векторы соответствующих колебаний повернуты друг относительно друга на угол 180° , и каждой зоне Френеля на диаграмме соответствует в точности половина того или иного витка спирали.

§ 32. Дифракция Френеля от круглого отверстия и диска

Пусть плоская световая волна падает на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 (рис. 108). Расстояние от центра отверстия до точки наблюдения P , расположенной на прямой, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через центр отверстия, равно b . Длина волны — λ . Определим интенсивность света в точке наблюдения.

С этой целью найдем число зон Френеля, которые благодаря отверстию остаются открытыми на волновой поверхности падающей волны, если наблюдать за ней из точки P . Приравняем радиус отверстия r_0 и выражение для радиуса m -й зоны Френеля (см. (31.3)):



$$r_0 = \sqrt{mb\lambda}.$$

Отсюда число открытых зон m равно

$$m = \frac{r_0^2}{b\lambda}. \quad (32.1)$$

Рис. 108

Значение m , вычисленное по формуле (32.1), может оказаться нецелым. В этом случае одна из зон Френеля открыта не полностью.

Значение m зависит от параметра b , то есть от места расположения точки наблюдения относительно экрана с отверстием. Если радиус отверстия r_0 остается неизменным, при изменении положения точки наблюдения P число открытых зон меняется.

Интенсивность света в точке наблюдения P приближенно можно определить с помощью векторной диаграммы колебаний светового вектора.

Пусть $m = 1$, и экран с отверстием оставляет открытой только первую зону Френеля. Тогда на векторной диаграмме, построенной для точки P , имеется лишь участок, соответствующий первой зоне — правая половина первого витка спирали (рис. 109). Амплитуда A светового вектора в точке наблюдения P равна длине отрезка прямой, соединяющей начало и конец этого участка, и составляет приблизительно величину $A = 2A_0$, где A_0 — амплитуда светового вектора в точке P в отсутствие экрана с отверстием, то есть при полностью открытой волновой поверхности, которая служит источником вторичных волн, порождающих в точке P световое колебание. Интенсивность света, пропорциональная квадрату амплитуды светового вектора, составит в точке P величину:

$$I = 4I_0,$$

где I_0 — интенсивность света в отсутствие экрана, равная интенсивности падающей волны.

Если $m = 2$, отверстие оставляет на волновой поверхности открытыми первую и вторую зоны Френеля. Векторная диаграмма содержит только один виток спирали, соответствующий двум первым зонам (рис. 110). Начало и конец первого витка практически совпадают.

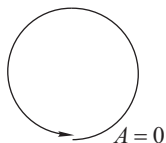


Рис. 110

Поэтому в точке P амплитуда A светового вектора и, соответственно, интенсивность света I равны нулю.

Если открыто четное число зон Френеля (m — четное), то векторная диаграмма содержит целое число витков спирали, интенсивность света в точке наблюдения будет близка к нулю. Если открыто нечетное число зон Френеля (m — нечетное), то векторная диаграмма содержит полуцелое число витков спирали, и интенсивность света I в точке наблюдения превышает интенсивность исходной световой волны I_0 примерно в четыре раза. Эти утверждения справедливы при не слишком больших значениях m , когда диаметры всех m витков спирали приблизительно одинаковы и равны $2A_0$.

Значительно большее усиление света в точке наблюдения P можно осуществить с помощью *амплитудной зонной пластинки* — стеклянной пластинки, на поверхность которой нанесено непрозрачное покрытие в виде колец, закрывающих только четные (либо только нечетные) зоны Френеля. Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга. Если перекрыть все четные (или все нечетные) зоны, такого ослабления не будет, и интенсивность света в точке P резко возрастет. Зонная пластинка действует на проходящий через нее свет подобно собирающей линзе.

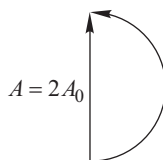


Рис. 109

Еще большего эффекта усиления света можно достичь, не перекрывая четные (или нечетные) зоны, а изменяя фазу их колебаний на π . Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным и нечетным зонам, отличается ровно на такую величину, что соответствующая этой величине оптическая длина пути составляет половину длины световой волны $\lambda/2$ (если абсолютный показатель преломления стекла, из которого изготовлена пластинка равен n , то толщина стекла в области четных и нечетных зон Френеля должна отличаться на величину h , удовлетворяющую условию $nh = \lambda/2$). Тогда вторичные волны от четных и нечетных зон Френеля будут приходить в точку наблюдения не в противофазе, а в одинаковой фазе. Такая пластинка называется *фазовой зонной пластинкой*. По сравнению с амплитудной зонной пластинкой фазовая дает дополнительное увеличение амплитуды светового вектора в два раза, а интенсивности света — в четыре раза.

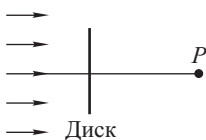


Рис. 111

Если на пути световой волны поместить непрозрачный диск, то в любой точке наблюдения P на прямой, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, то есть в области геометрической тени, интенсивность света будет

отлична от нуля (рис. 111).

Пусть, например, радиус диска равен радиусу первой зоны Френеля. Тогда на векторной диаграмме колебаний светового вектора, построенной для точки P , отсутствует участок, соответствующий первой зоне Френеля, — правая часть первого витка спирали (рис. 112 б). При этом вектор результирующего колебания в точке P — вектор, соединяющий начало и конец оставшейся части спирали — отличен от нуля. Его длина приблизительно равна A_0 — амплитуде колебаний светового вектора в точке наблюдения при всех полностью открытых зонах Френеля (рис. 112 а).

Во всех случаях, когда диск закрывает t зон Френеля, на векторной диаграмме отсутствуют t полувитков спирали, начиная с первого. Если t не слишком велико, радиус оставшегося на диаграмме внешнего витка спирали, численно равный амплитуде колебания светового вектора в точке наблюдения, незначительно отличается от соответствующей величины при полностью от-

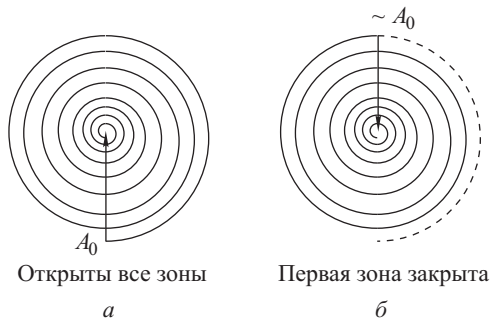


Рис. 112

крытой волновой поверхности. При этом интенсивность света в точке P почти не отличается от интенсивности падающей волны.

§ 33. Дифракция Френеля от щели

Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ падает по нормали на плоский непрозрачный экран, в котором имеется длинная щель с прямолинейными параллельными друг другу краями. Точка наблюдения P расположена за экраном напротив середины щели (рис. 113). Поскольку щель длинная (расстояние от щели до точки P мало по сравнению с длиной щели), световые колебания в любой плоскости, перпендикулярной к плоскости щели, будут одинаковыми.

Для определения интенсивности света в точке наблюдения P удобно разбить волновую поверхность падающей волны на зоны Френеля, и воспользоваться векторной диаграммой колебаний светового вектора.

Рассмотрим волновую поверхность S , совпадающую с плоскостью щели, и точку наблюдения P , расположенную на расстоянии b от волновой поверхности. В случае дифракции плоской волны на одномерных структурах, в частности, на щели, зоны Френеля представляют собой полосы с прямолинейными краями, параллельными краям щели; разность расстояний от внешнего и внутреннего краев зоны до точки наблюдения равна половине длины световой волны:

$$r_{\text{внешн}} - r_{\text{внутр}} = \frac{\lambda}{2}.$$

Зоны расположены симметрично относительно параллельной краям щели плоскости, которой принадлежит перпендикуляр PQ к волновой поверхности, опущенный из точки наблюдения P в точку Q этой поверхности (рис. 113). На рис. 114 рассматриваемая плоскость симметрии отображается прямой PQ (в дальнейшем для краткости будем называть указанную плоскость симметрии плоскостью PQ). Порядковые номера зон Френеля, расположенных по разные стороны плоскости PQ , обозначим как m и m' . Расстояние r_m от плоскости PQ до внешнего края m -й зоны Френеля равно:

$$r_m \approx \sqrt{mb\lambda}. \quad (33.1)$$

Формула (33.1) получена аналогично выражению (31.3) для радиуса зоны Френеля на плоской поверхности из рассмотрения прямоугольно-

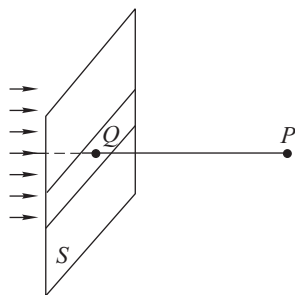


Рис. 113

го треугольника, в котором катеты имеют длину r_m и b , а гипотенуза равна $r_{\text{внешн}} = b + m\lambda/2$ (рис. 114).

Для построения векторной диаграммы колебаний светового вектора в точке наблюдения P необходимо разбить волновую поверхность S на очень узкие полосы (элементарные зоны), края которых параллельны краям щели, а ширина много меньше ширины зоны Френеля (рис. 115).

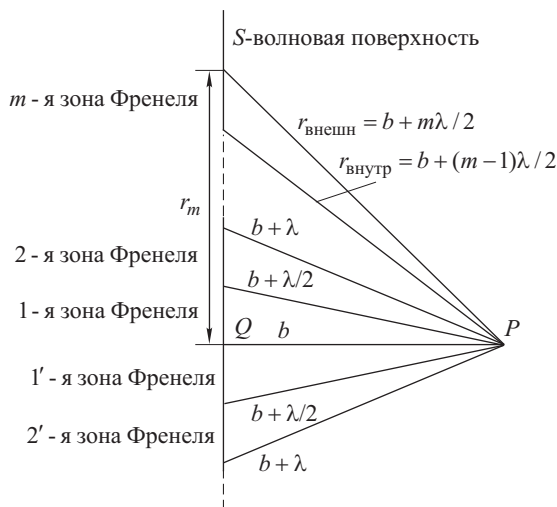


Рис. 114

Зоны с одинаковыми номерами i и i' расположены симметрично относительно плоскости PQ , порядковые номера i или i' увеличиваются по мере удаления соответствующей зоны от плоскости симметрии PQ в обе стороны.

Обозначим через r_i — расстояние от внешнего края i -й элементарной зоны до точки наблюдения P . Разность расстояний от любых двух соседних элементарных зон до точки P равна Δ :

$$r_{i+1} - r_i = \Delta.$$

Ширина элементарных зон должна выбираться такой, чтобы выполнялось условие: $\Delta \ll \lambda$.

Расстояние от элементарной зоны с номером i до точки наблюдения P можно представить в виде

$$r_i = b + i\Delta.$$

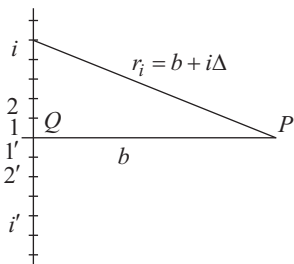


Рис. 115

Каждая элементарная зона излучает цилиндрические вторичные волны, которые приходят в точку наблюдения P с одинаковой фазой и порождают здесь колебания светового вектора ΔE_i , который для краткости будем называть световым вектором i -й элементарной зоны):

$$\begin{aligned}\Delta E_i &= \Delta A_i \cos(\omega t - kr_i) = \Delta A_i \cos(\omega t - kb - ki\Delta) = \\ &= \Delta A_i \cos(\omega t - kb - i\delta).\end{aligned}$$

Разность фаз колебаний световых векторов любых двух соседних зон одинакова и равна $\delta = k\Delta$.

Результирующее колебание светового вектора в точке P равно сумме колебаний всех элементарных зон:

$$E = \sum \Delta E_i + \sum \Delta E'_i,$$

где слагаемые ΔE_i и $\Delta E'_i$ представляют собой колебания, порожденные симметрично расположенными относительно плоскости PQ элементарными зонами с номерами i и i' .

На диаграмме вектор каждого следующего колебания ΔE_{i+1} повернут на угол δ против часовой стрелки по отношению к вектору предыдущего колебания ΔE_i , поскольку ΔE_{i+1} отстает по фазе от ΔE_i на величину δ . При построении диаграммы начало вектора колебания ΔE_{i+1} совмещается в концом вектора колебания ΔE_i , так что все векторы выстраиваются в цепочку. Амплитуды складываемых колебаний ΔA_i постепенно уменьшаются с увеличением порядкового номера i по мере увеличения расстояния от i -й элементарной зоны до точки наблюдения P . Векторная диаграмма представляет собой ломаную линию в форме спирали, состоящую из двух симметричных частей (двух завитков спирали), соответствующих симметрично расположенным относительно плоскости PQ элементарным зонам (рис. 116). При стремлении ширины элементарных зон к нулю амплитуды ΔA_i также стремятся к нулю, и ломаная линия превращается в гладкую кривую, называемую *спиралью Корню* (рис. 117). Завитки спирали закручиваются к точкам, обозначаемым F_1 и F_2 .

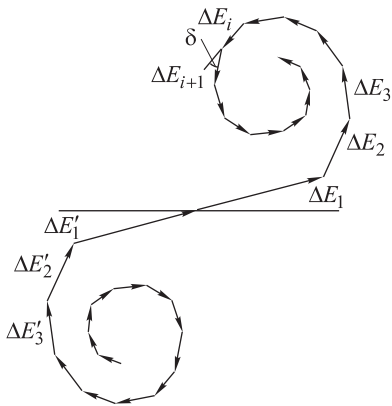


Рис. 116

Соответствие участков спирали зонам Френеля волновой поверхности можно установить, исходя из определения зоны Френеля. Разность расстояний от краев зоны до точки наблюдения P равна половине

длины волны $\lambda/2$. Разность фаз колебаний светового вектора в точке P , порожденных вторичными волнами двух элементарных зон, одна из которых расположена вблизи внешнего, а другая — вблизи внутреннего края зоны Френеля, равна π . Следовательно, на диаграмме векторы указанных колебаний развернуты друг относительно друга на угол 180° , а каждой зоне Френеля соответствует половина одного из витков спирали (см. рис. 117). Например, участок OA спирали

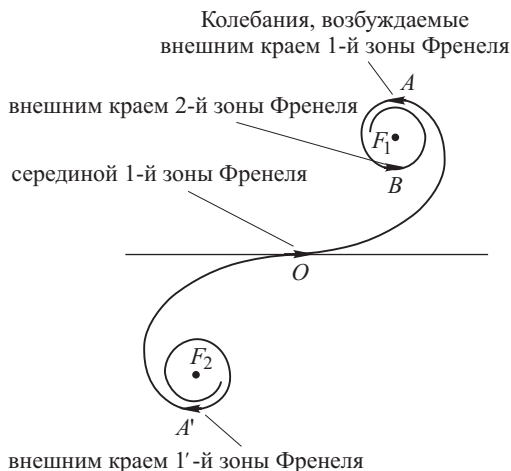


Рис. 117

представляет собой векторную диаграмму колебаний, порожденных 1-й зоной Френеля, участок AB — 2-й зоной Френеля, участок OA' — 1'-й зоной Френеля и т. д.

Если экран со щелью отсутствует, то есть световая волна не встречает на своем пути препятствий, то амплитуда светового вектора в точке P равна сумме амплитуд колебаний, порождаемых всеми элементарными зонами волновой поверхности S .

В этом случае амплитуду результирующего светового вектора в точке P можно определить, соединив отрезком прямой точки F_2 и F_1 — начало и конец спирали Корню. Амплитуда колебания равна длине отрезка F_2F_1 .

Для определения амплитуды светового вектора и интенсивности света в точке P при наличии щели необходимо на диаграмме соединить вектором начало и конец участка спирали, соответствующего открытым зонам Френеля. Если, например, размеры щели таковы, что открыто по одной зоне Френеля по обе стороны от плоскости симметрии PQ (см. рис. 114), на спирали Корню вектор результирующего колебания в точке P можно получить, соединив между собой точки A' и A (рис. 117).

§ 34. Дифракция Фраунгофера от щели

Пусть на большом удалении друг от друга располагаются источник монохроматического света, непрозрачный экран с длинной узкой щелью и экран наблюдения (рис. 118).

Если лучи, идущие от источника к препятствию (краям щели) и от препятствия к произвольной точке на экране наблюдения, образуют пучки почти параллельных лучей, то возникающая на экране дифракционная картина называется *дифракцией Фраунгофера* (1787–1826). Дифракция Фраунгофера — это дифракция в параллельных лучах. Если же описанные световые лучи нельзя считать параллельными, то наблюдается дифракция Френеля. Количественный критерий различных видов дифракции будет рассмотрен ниже.

Будем полагать, что вследствие удаленности точечного источника света лучи 1 и 2, идущие к щели, можно считать параллельными, а падающую на препятствие световую волну плоской (см. рис. 118). Волновая поверхность падающей волны параллельна плоскости щели и экрану наблюдения.



Рис. 118

Любые два луча, идущие от поверхности щели в произвольную точку P на экране наблюдения, также можно считать параллельными благодаря большому расстоянию между щелью и экраном. Пусть ширина щели равна b . Определим распределение интенсивности света вдоль экрана наблюдения — дифракцию от щели.

Заметим, что поскольку щель длинная, картина, наблюдаемая в любой плоскости, перпендикулярной к плоскости щели, будет одинакова. Поэтому достаточно исследовать характер распределения интенсивности световой волны вдоль экрана наблюдения в одной такой плоскости, например, в плоскости рис. 119.

Положение точки наблюдения P на экране задается углом φ между нормалью к плоскости щели и направлением QP от середины щели к точке P ; за положительное направление отсчета угла φ примем поворот отрезка QP по часовой стрелке.

Направим координатную ось y перпендикулярно краям щели и примем за начало отсчета y середину щели — точку Q . Тогда координаты краев щели равны $-b/2$ и $b/2$. Мысленно разделим поверхность щели на узкие элементарные полосы шириной dy , края которых параллельны краям щели. Каждая такая полоса характеризуется координатой y и расстоянием r до точки наблюдения P . Обозначим через r_0 длину отрезка QP от середины щели до точки наблюдения. Тогда в силу параллельности всех лучей, идущих от щели к точке наблюдения,

расстояние r от элементарной полосы с координатой y до точки P приблизительно равно (см. рис. 119):

$$r \approx r_0 + y \sin \varphi.$$

Все вторичные волны, излучаемые одной элементарной полосой, приходят в точку наблюдения, имея одинаковую фазу, и возбуждают в

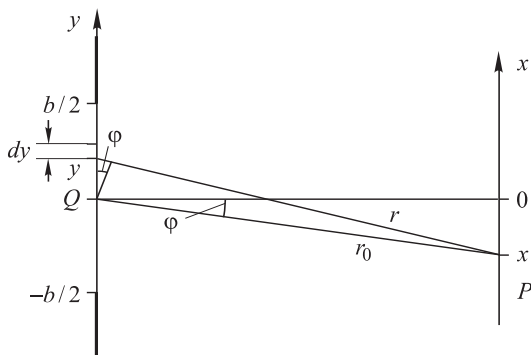


Рис. 119

этой точке колебание светового вектора dE , которое можно представить в следующем виде:

$$dE = a dy \cos(\omega t - kr) = a dy \cos(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi), \quad (34.1)$$

где $a dy$ — амплитуда колебания. Выражение (34.1) предполагает, что фаза колебаний светового вектора на волновой поверхности, совпадающей с плоскостью щели, равна ωt . В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля амплитуда $a dy$ колебания светового вектора dE вторичной волны в точке наблюдения P пропорциональна площади излучающего участка волновой поверхности.

В рассматриваемом случае амплитуда колебания dE пропорциональна площади, а, следовательно, и ширине dy элементарной полосы, которая служит источником вторичных волн; пропорциональность dy и отражена в формуле (34.1).

Поскольку расстояние от любой точки щели до точки наблюдения P значительно больше *разности* расстояний до точки P от любых двух точек поверхности щели, амплитуды $a dy$ вторичных волн, излучаемых всеми элементарными полосами поверхности щели, в точке P можно считать приблизительно одинаковыми. Поэтому величина a в выражении (34.1) не зависит от координаты y элементарной полосы.

Результирующее колебание E светового вектора в точке наблюдения P представляет собой сумму колебаний, порожденных всеми элементарными полосами, на которые мысленно разделена щель. Ре-

зультулирующее колебание E найдем интегрированием выражения (34.1) по координате y в пределах от $-b/2$ до $b/2$, то есть интегрированием по поверхности щели S :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\text{по } S} dE = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} a dy \cos(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) = \\
 &= -\frac{a}{k \sin \varphi} \sin(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \\
 &= -\frac{a}{k \sin \varphi} \left[\sin\left(\omega t - kr_0 - \frac{kb \sin \varphi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - kr_0 + \frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= ab \frac{\sin[(kb \sin \varphi)/2]}{(kb \sin \varphi)/2} \cos(\omega t - kr_0).
 \end{aligned}$$

Интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора. Поэтому интенсивность I в точке наблюдения P с учетом полученного выражения равна:

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2[(kb \sin \varphi)/2]}{[(kb \sin \varphi)/2]^2}, \quad (34.2)$$

где φ — угол, определяющий направление от середины щели на точку наблюдения, I_0 — интенсивность света в точке наблюдения, расположенной напротив середины щели ($\varphi = 0$).

Формула (34.2) является основной при описании дифракции Фраунгофера. С ее помощью можно определить направления на минимум или максимум интенсивности света в дифракционной картине, вычислить интенсивность в любой заданной точке экрана наблюдения. Если, например, положение точки наблюдения P на экране задано координатой x ($x = 0$ в точке экрана, расположенной напротив середины щели, см. рис. 119), а расстояние между щелью и экраном равно l , то зависимость интенсивности света от координаты x получается из формулы (34.2) заменой $\sin \varphi \approx x/l$ при условии $|x| \ll l$.

График зависимости (34.2) интенсивности I света от угла наблюдения φ (точнее, от $\sin \varphi$) представлен на рис. 120.

Из графика видно, что основная часть энергии световой волны, прошедшей через щель, сосредоточена в области центрального дифракционного максимума.

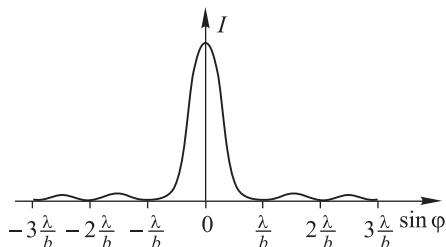


Рис. 120

Направления на минимумы интенсивности света в дифракционной картине определяются из условия равенства нулю числителя дроби (34.2), а именно:

$$\sin \frac{kb \sin \varphi_{\min}}{2} = 0,$$

$$\frac{kb \sin \varphi_{\min}}{2} = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Направления на минимумы интенсивности, которые являются ближайшими к центру дифракционной картины, соответствуют значениям $m = \pm 1$ и находятся из равенств:

$$b \sin \varphi_{\min} = \pm \lambda, \quad (34.3)$$

$$\sin \varphi_{\min} = \pm \frac{\lambda}{b}. \quad (34.4)$$

Угол φ_{\min} , удовлетворяющий равенствам (34.3) или (34.4), называется *угловой полушириной центрального дифракционного максимума*. Для малых углов, когда длина волны λ значительно меньше размера щели b ($\lambda \ll b$), угловая полуширина центрального дифракционного максимума, которую мы обозначим через $\delta\varphi$, приблизительно равна:

$$\delta\varphi \approx \sin \varphi_{\min} = \frac{\lambda}{b}. \quad (34.5)$$

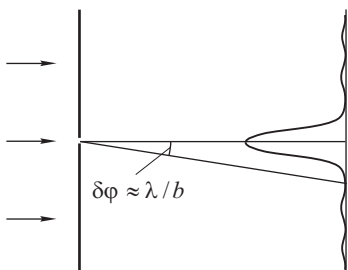


Рис. 121

Рисунок 121 дает наглядное представление о том, что представляет собой угловая полуширина центрального максимума (34.5) в дифракционной картине Фраунгофера. Показаны примерный вид распределения интенсивности света вдоль экрана наблюдения в соответствии с формулой (34.2) и на-

правление на первый дифракционный минимум интенсивности, расположенный рядом с центральным максимумом.

Как следует из полученных в настоящем параграфе результатов, благодаря дифракции невозможно существование строго параллельных световых пучков. Всякий пучок лучей с характерным поперечным размером b (например, b — диаметр диафрагмы, ограничивающей пучок) характеризуется *дифракционным уширением*, равным по порядку величины угловой полуширине центрального дифракционного максимума $\delta\varphi \sim \lambda/b$.

§ 35. Количественный критерий вида дифракции

Если известны длина световой волны λ , характерный размер b неоднородностей среды, в которой распространяется свет (например,

b — ширина щели в непрозрачном экране или размер непрозрачного предмета на пути распространения света и т. д.), l — расстояние от неоднородности среды до области наблюдения дифракционной картины, то представляет интерес найти такой параметр p , зависящий от λ , b и l , который позволял бы заранее предсказать вид дифракции, которую следует ожидать в данных условиях, — дифракцию Френеля или дифракцию Фраунгофера.

Пусть плоская световая волна падает на непрозрачный экран, в котором имеется длинная узкая щель ширины b . Дифракция наблюдается на экране, расположенном на расстоянии l от щели (рис. 122). Выясним, при каких условиях лучи AP и BP , идущие из двух крайних точек щели в точку P на экране наблюдения, можно считать практически параллельными (при этом будет наблюдаться дифракция Фраунгофера). С этой целью вычислим оптическую разность хода Δ лучей AP и BP .

Если длина отрезка BP равна r , то длину отрезка AP можно представить как $r + \Delta$. Угол между нормалью к плоскости щели и лучом BP равен φ . Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника ABP :

$$(AB)^2 + (BP)^2 - 2(AB)(BP) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = (AP)^2,$$

$$b^2 + r^2 + 2br \sin \varphi = (r + \Delta)^2.$$

После возведения в квадрат и приведения подобных членов получим

$$b^2 + 2br \sin \varphi = (2r + \Delta)\Delta. \quad (35.1)$$

При любом виде дифракции справедлива цепочка неравенств:

$$\Delta \leq b \ll l \leq r, \quad (35.2)$$

которые означают следующее. Оптическая разность хода Δ лучей AP и BP является максимальной, равной ширине щели b , если оба луча параллельны плоскости щели, во всех остальных случаях Δ не может превысить размер щели b : $\Delta \leq b$. Размер щели b в любом дифракционном опыте много меньше расстояния l от щели до экрана наблюдения, в противном случае (если не выполнено условие $b \ll l$) края щели удалены от точки наблюдения, расположенной напротив середины щели, настолько далеко, что их наличием вообще можно пренебречь. Наконец, неравенство $l \leq r$ очевидно из чертежа на рис. 122. Учитывая, что,

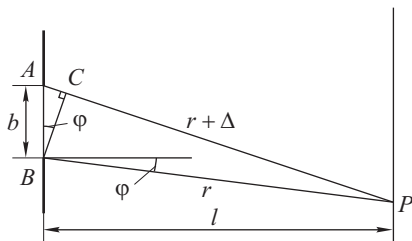


Рис. 122

согласно (35.2), $\Delta \ll r$, в множителе правой части уравнения (35.1) можно пренебречь величиной Δ по сравнению с $2r$. Тогда получим

$$b^2 + 2br \sin \varphi = 2r\Delta.$$

Отсюда найдем Δ :

$$\Delta = \frac{b^2}{2r} + b \sin \varphi. \quad (35.3)$$

Опустим из точки B перпендикуляр BC на луч AP (рис. 122). Лучи AP и BP можно считать параллельными, если выполняется приближенное равенство:

$$\Delta = AC \approx b \sin \varphi. \quad (35.4)$$

(Строгое равенство означало бы, что отрезок AB и выходящие из точек A и B два рассматриваемых луча пересекаются с экраном наблюдения не в одной P , в двух разных точках — P и P' , и что четырехугольник $ABPP'$ — параллелограмм.)

Следовательно, условие параллельности рассматриваемых лучей AP и BP состоит в том, что вклад величины $b^2/2r$ в оптическую разность хода Δ , вычисляемую по формуле (35.3), пренебрежимо мал. В этом случае справедливо соотношение (35.4). Однако сравнивать величину $b^2/2r$ со вторым слагаемым правой части (35.3) — величиной $b \sin \varphi$ — не имеет смысла, так как сама эта величина, зависящая от переменного параметра φ , может быть сколь угодно малой.

Если оптическая разность хода любых двух интерферирующих лучей, в том числе рассматриваемых лучей AP и BP , изменяется на величину порядка длины световой волны λ , а соответствующая разность фаз — на величину порядка π , то интенсивность результирующей световой волны претерпевает значительные изменения (см., например, формулу (24.7)).

Соответственно, для того чтобы вклад величины $b^2/2r$ в оптическую разность хода лучей AP и BP можно было считать пренебрежимо малым, необходимо выполнение условия:

$$\frac{b^2}{2r} \ll \lambda. \quad (35.5)$$

Поскольку $r > l$ и $\frac{b^2}{2r} < \frac{b^2}{l}$, то неравенство (35.5) заведомо выполняется при условии:

$$\frac{b^2}{l} \ll \lambda. \quad (35.6)$$

Неравенство (35.6) — искомый критерий параллельности лучей AP и BP , а значит, и любых других лучей, идущих от щели в точку P .

Волновым параметром p называется величина, равная:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b},$$

где λ — длина световой волны, b — характерный размер неоднородности среды, в которой распространяется волна (размер щели, отверстия, непрозрачной преграды на пути света и т. д.), l — расстояние от области локализации неоднородности среды до области наблюдения дифракции (например, расстояние от щели до экрана наблюдения).

Физический смысл волнового параметра p заключается в следующем. Поскольку величина $\sqrt{\lambda l}$ равна радиусу первой зоны Френеля для точки наблюдения, расположенной на расстоянии l от неоднородности среды, волновой параметр p показывает, во сколько раз размер зоны Френеля превышает характерный размер b неоднородностей среды, благодаря наличию которых возникает дифракция.

Основываясь на неравенстве (35.6), покажем, что значение волнового параметра p может служить количественным критерием вида дифракции.

Если выполняется условие:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b} \gg 1, \quad (35.7)$$

которое является следствием неравенства (35.6), то любые два луча, идущие от щели к точке наблюдения, можно считать параллельными. В этом случае наблюдается дифракция Фраунгофера.

Если выполняется условие:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b} \sim 1, \quad (35.8)$$

это означает, что ширина щели сравнима с радиусом первой зоны Френеля, и наблюдается дифракция Френеля.

Если выполняется условие:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b} \ll 1, \quad (35.9)$$

то, как можно показать, длина световой волны много меньше ширины щели, и становятся справедливыми законы геометрической оптики. Действительно, из (35.9) следует:

$$\lambda \ll \frac{b^2}{l}.$$

Поскольку размер щели b много меньше расстояния l от щели до экрана наблюдения, т.е. $b \ll l$, то длина волны λ удовлетворяет условию:

$$\lambda \ll b \frac{b}{l} \ll b.$$

Следовательно, если волновой параметр p удовлетворяет неравенству (35.9), то длина волны λ много меньше ширины щели b . В этом случае дифракция не возникает, а свет распространяется в пространстве, подчиняясь законам геометрической оптики.

§ 36. Многолучевая интерференция

Рассмотрим интерференцию волн, излучаемых несколькими точечными когерентными источниками света — *многолучевую интерференцию*.

Пусть в однородной изотропной среде с $\varepsilon = \mu = 1$ всего имеется N расположенных вдоль одной прямой когерентных источников света, колебания которых происходят с одинаковой фазой ωt , где ω — циклическая частота. Расстояние между соседними источниками равно d . Определим интенсивность излучения в точке наблюдения P , которая находится на большом удалении от источников, так что все лучи, идущие от источников в точку P , можно считать практически параллельными один другому. Амплитуды волн от всех источников в точке P также будем полагать приблизительно одинаковыми. Угол между нормалью к линии, вдоль которой расположены источники, и направление от любого источника на точку P обозначим через θ (рис. 123). Считаем положительным направление отсчета угла θ по часовой стрелке.

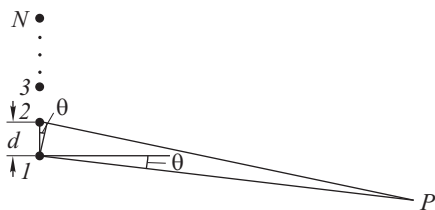


Рис. 123

Если расстояние от первого источника до точки P обозначить через r_1 , то расстояние до точки P от источника с порядковым номером $i \geq 1$ равно

$$r_i = r_1 + (i - 1)d \sin \theta,$$

где $d \sin \theta$ — оптическая разность хода лучей от двух соседних источников до точки P . Каждый источник с порядковым номером i порождает в точке P колебание светового вектора E_i , которое можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos(\omega t - kr_1), \\ E_2 &= A_1 \cos(\omega t - kr_1 - kd \sin \theta), \\ E_3 &= A_1 \cos(\omega t - kr_1 - 2kd \sin \theta), \\ &\dots \dots \dots \\ E_i &= A_1 \cos[\omega t - kr_1 - (i - 1)kd \sin \theta], \\ &\dots \dots \dots \\ E_N &= A_1 \cos[\omega t - kr_1 - (N - 1)kd \sin \theta], \end{aligned} \quad (36.1)$$

где A_1 — амплитуда колебания, возбужденного в точке P волной от одного источника и одинаковая для всех источников.

Результирующее колебание E светового вектора в точке P равно сумме всех колебаний (36.1):

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_i + \dots + E_N. \quad (36.2)$$

Для вычисления суммы (36.2) воспользуемся методом векторных диаграмм. Все складываемые колебания имеют одинаковую амплитуду A_1 ; разность фаз колебаний, порожденных двумя соседними источниками, составляет величину $kd \sin \theta$. Поэтому вектор каждого колебания имеет длину A_1 и повернут на угол $\delta = kd \sin \theta$ против часовой стрелки (как это принято в оптике) по отношению к вектору предыдущего колебания (рис. 124). Векторная диаграмма суммы колебаний (36.2) представляет собой часть правильного N -угольника, стороны которого — векторы складываемых колебаний. Длина стороны правильного N -угольника равна A_1 . Результирующее колебание E в точке P изображается на диаграмме вектором \vec{OB} , длина которого обозначена буквой A . Из простых геометрических соображений ясно, что амплитуда A результирующего колебания равна:

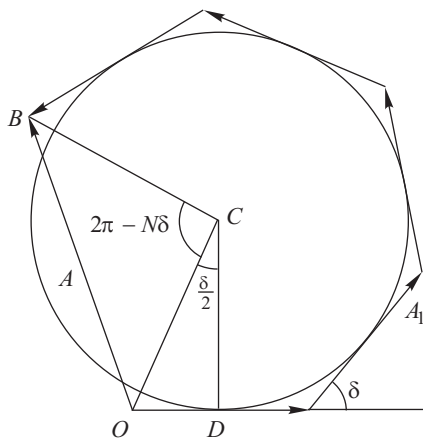


Рис. 124

$$A = |\vec{OB}| = 2(OC) \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = 2 \frac{OD}{\sin(\delta/2)} \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = \\ = 2 \frac{A_1}{2 \sin(\delta/2)} \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = A_1 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}. \quad (36.3)$$

Интенсивность света в точке P пропорциональна квадрату амплитуды A колебаний светового вектора (см. (19.2)) и представляется в виде

$$I = I_1 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = I_1 \frac{\sin^2[(Nkd \sin \theta)/2]}{\sin^2[(kd \sin \theta)/2]}, \quad (36.4)$$

где I_1 — интенсивность световой волны, пришедшей в точку P от каждого из N источников и пропорциональная квадрату амплитуды A_1 . Как следует из (36.4), результирующая интенсивность I света в той или иной точке P интерференционной картины зависит от угла θ , определяющего направление наблюдения. Отметим, что интенсивность I_1 света каждого из источников также может зависеть от направления излучения (то есть I_1 является функцией θ).

График зависимости $I(\sin \theta)$ (36.4) представлен на рис. 125. На нем имеются резко выраженные максимумы функции $I(\sin \theta)$ — так называемые *главные интерференционные максимумы интенсивности*, между которыми располагаются минимумы ($I = 0$) и промежуточные

максимумы. Положения главных максимумов определяются из условия равенства нулю знаменателя в выражении (36.4):

$$\sin \frac{kd \sin \theta}{2} = 0,$$

$$\frac{kd \sin \theta}{2} = m\pi,$$

или

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (36.5)$$

Целое число m называется *порядком главного интерференционного максимума*.

Итак, углы $\theta = \theta_{\max}$, определяющие направления на главные максимумы интенсивности в интерференционной картине от N когерентных источников света, должны удовлетворять условию:

$$\sin \theta_{\max} = m \frac{\lambda}{d},$$

где m — целое число.

Отметим, что условие (36.5) по форме совпадает с условием (24.10) наблюдения максимума интенсивности при интерференции волн от двух когерентных источников света, расположенных на расстоянии d

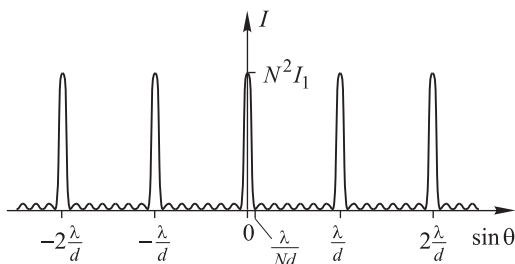


Рис. 125

друг от друга. Это совпадение не является случайным. Действительно, если при наложении волн от каждой пары расположенных рядом источников наблюдается возрастание интенсивности света (интерференционный максимум), то интенсивность результирующей волны от всех источников также максимальна.

Найдем значение интенсивности света в главном максимуме нулевого порядка ($m = 0$), который называется центральным максимумом. Направлению на центральный максимум соответствует угол $\theta_{\max} = 0$ и значение разности фаз складываемых колебаний, равное нулю $\delta = kd \sin \theta_{\max} = 0$. Зависимость интенсивности I от величины δ дает выражение (36.4). Вычислим искомую интенсивность центрального

максимума как предел функции $I(\delta)$ при стремлении δ к нулю:

$$I_{\max} = I_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \approx I_1 \frac{(N\delta/2)^2}{(\delta/2)^2} = N^2 I_1. \quad (36.6)$$

В силу периодичности функции $I(\sin \theta)$ интенсивность света в главном максимуме любого порядка m равна интенсивности света в центральном максимуме и находится по формуле (36.6). Интенсивность света в главном максимуме в N^2 раз превышает интенсивность света I_1 от одного отдельно взятого источника.

Оценим угловую полуширину $\delta\theta$ центрального максимума, то есть угловое расстояние между направлением на центральный максимум ($\theta_{\max} = 0$) и направлением на первый (ближайший к центральному максимуму) минимум интенсивности ($\theta = \theta_{\min}$):

$$\delta\theta = \theta_{\min} - \theta_{\max} = \theta_{\min}.$$

Положение указанного минимума определяется из условия обращения в ноль числителя в выражении (36.4):

$$\begin{aligned} \sin \frac{Nkd \sin \theta_{\min}}{2} &= 0, \\ \frac{Nkd \sin \theta_{\min}}{2} &= \pi, \\ \sin \theta_{\min} &= \frac{\lambda}{Nd}. \end{aligned}$$

При малых углах θ_{\min} синус приблизительно равен самому углу, выраженному в радианах. Поэтому угловая полуширина центрального максимума, обозначаемая через $\delta\theta$, равна

$$\delta\theta = \theta_{\min} \approx \sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{Nd}. \quad (36.7)$$

Угловая полуширина главных интерференционных максимумов порядка $m > 1$ приближенно может рассчитываться по формуле (36.7) для центрального максимума с $m = 1$.

§ 37. Дифракционная решетка

Дифракционная решетка представляет собой совокупность большого количества одинаковых, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга длинных щелей в непрозрачном экране. *Периодом решетки* называется расстояние между серединами соседних щелей (обозначается через d). Дифракция света, прошедшего через решетку, — это дифракция Фраунгофера.

На рис. 126 представлена одна из возможных схем проведения дифракционного опыта с использованием решетки. Плоская световая волна падает на решетку по нормали к ее поверхности. За решеткой на

большом удалении располагается экран для наблюдения дифракционной картины. Если расстояние между решеткой и экраном недостаточ-

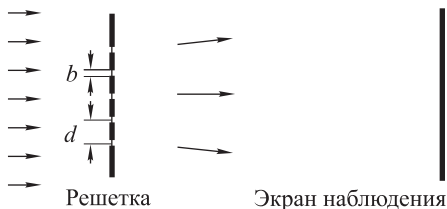


Рис. 126

но велико для наблюдения дифракции Фраунгофера, между решеткой и экраном помещают собирающую линзу, которая сводит на экране лучи, пересекающиеся в отсутствие линзы на бесконечности. Тем самым обеспечивают условия для возникновения дифракции Фраунгофера.

Пусть период решетки равен d , ширина каждой щели b , число щелей N . Определим угловое распределение интенсивности света после прохождения решетки. Решим задачу в два этапа.

Рассмотрим сначала одну отдельно расположенную в непрозрачном экране щель шириной b , на которую падает плоская световая волна (рис. 127). Обозначим через $I_1(\theta)$ интенсивность света, испускаемого поверхностью щели в направлении, составляющем угол θ с нормалью к поверхности щели. Согласно результатам § 34 (см. (34.2)) при наблюдении дифракции Фраунгофера от щели интенсивность света в направлении, определяемом углом θ , равна:

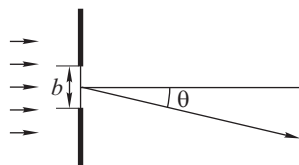


Рис. 127

$$I_1(\theta) = I_0 \frac{\sin^2[(kb \sin \theta)/2]}{[(kb \sin \theta)/2]^2}, \quad (37.1)$$

где I_0 — интенсивность света в направлении нормали к поверхности щели ($\theta = 0$).

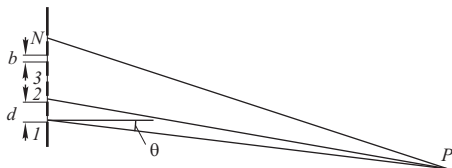


Рис. 128

Пусть теперь свет падает на решетку, состоящую из N одинаковых щелей. Щели можно рассматривать как N когерентных источников света, расположенных на расстоянии d друг от друга (рис. 128). В соответствии с

формулой (36.4) интенсивность $I(\theta)$ результирующей световой волны, возникающей в результате наложения волн от N источников, в направлении, составляющем угол θ с нормалью к линии расположения

источников, равна:

$$I(\theta) = I_1(\theta) \frac{\sin^2[(Nkd \sin \theta)/2]}{\sin^2[(kd \sin \theta)/2]}, \quad (37.2)$$

где I_1 — интенсивность света одного отдельно взятого источника в заданном направлении.

Подставив выражение для $I_1(\theta)$ из формулы (37.1) в (37.2), получим

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2[(kb \sin \theta)/2]}{[(kb \sin \theta)/2]^2} \frac{\sin^2[(Nkd \sin \theta)/2]}{\sin^2[(kd \sin \theta)/2]}. \quad (37.3)$$

Согласно полученной формуле (37.3) дифракционная картина, возникающая при прохождении света через решетку, представляет собой наложение двух картин: дифракции Фраунгофера от щели и интерференционной картины, возникающей при наложении волн от N когерентных источников (рис. 129).

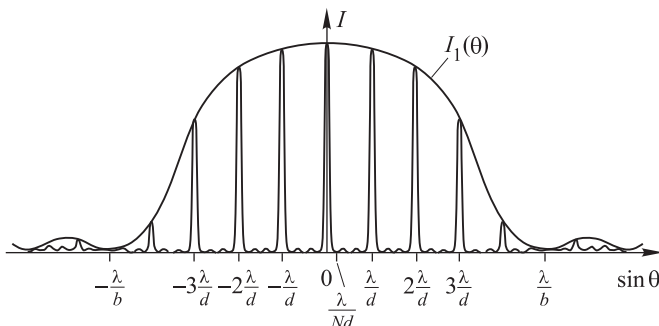


Рис. 129

Перечислим основные особенности дифракционной картины от решетки.

1. Углы θ , определяющие направления на главные интерференционные максимумы, удовлетворяют условию, аналогичному (36.5):

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (37.4)$$

где m — порядок максимума.

2. Угловая полуширина главного максимума в соответствии с (36.7) равна:

$$\delta\theta \approx \frac{\lambda}{Nd}. \quad (37.5)$$

3. Интенсивность света $I_{\max}(\theta)$ в главном максимуме решетки в N^2 раз превышает интенсивность $I_1(\theta)$ света, испускаемого одной отдельно расположенной щелью (см. (36.6)):

$$I_{\max}(\theta) = N^2 I_1(\theta). \quad (37.6)$$

4. Предельный (наибольший возможный) порядок главного максимума $m_{\text{пред}}$ в дифракционной картине зависит от геометрических параметров решетки.

Из выражения (37.4) найдем

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda}.$$

Поскольку синус угла не превышает единицы, предельный порядок равен

$$m_{\text{пред}} = \frac{d}{\lambda}. \quad (37.7)$$

Как следует из (37.7), $m_{\text{пред}}$ равно целому числу длин волн λ , укладывающихся на расстоянии d . Период решетки d равен наибольшей возможной оптической разности хода интерферирующих лучей, идущих от двух соседних щелей. При этом лучи распространяются вдоль поверхности решетки (угол, определяющий направление наблюдения, равен $\theta = \pi/2$).

§ 38. Дифракционная решетка как спектральный прибор

При нормальном падении света с длиной волны λ на дифракционную решетку положение в пространстве главных максимумов интенсивности в дифракционной картине определяется условием (37.4):

$$d \sin \theta = m\lambda,$$

где d — период решетки, m — порядок максимума, θ — угол между нормалью к поверхности решетки и направлением на максимум (см. (37.4) и рис. 130). Направление на главный максимум (угол θ) и положение максимума на экране наблюдения зависят от дли-

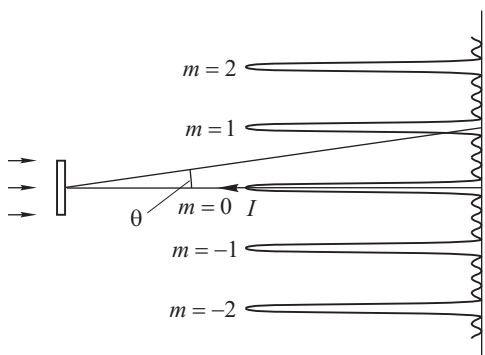


Рис. 130

ны световой волны λ : чем больше λ , тем больше угол θ и тем дальше от центра дифракционной картины располагается соответствующий максимум интенсивности. От длины световой волны не зависит положение только одного главного максимума — центрального ($m = 0$, $\theta = 0$).

Пусть в свете, падающем на решетку, присутствует излучение с двумя длинами волн λ_1 и λ_2 , причем $\lambda_2 > \lambda_1$. Дифракционная картина будет выглядеть, как показано на рис. 131. Поскольку углы θ ,

определяющие направления от решетки на главные максимумы одного и того же порядка m излучения с разными длинами волн λ_1 и λ_2 ,

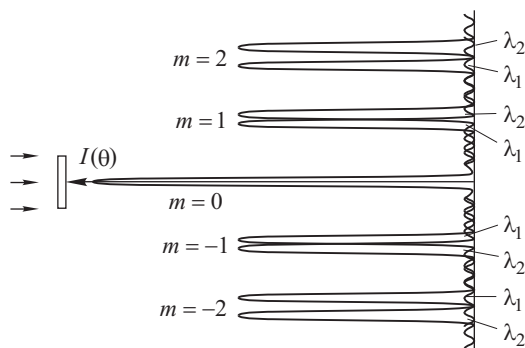


Рис. 131

различны, то и положения указанных максимумов на экране наблюдения не совпадают. Все имеющиеся максимумы, кроме центрального, раздвигаются.

Если пропускать через дифракционную решетку белый свет (в нем имеется излучение со всеми возможными длинами волн видимого диапазона), то каждый максимум m -го порядка в дифракционной картине будет представлять собой совокупность смещенных один относительно другого вдоль экрана наблюдения дифракционных максимумов этого же порядка, каждый из которых соответствует определенной длине волны излучения. Поскольку длина волны изменяется непрерывно, совокупность всех максимумов m -го порядка, соответствующих разным длинам волн, образует окрашенную в разные цвета — от фиолетового до красного — полосу, причем ее фиолетовый край располагается ближе к центру дифракционной картины, чем красный (рис. 132).

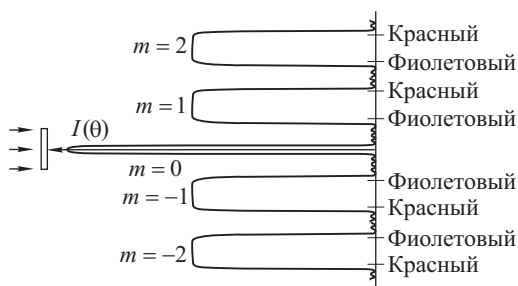


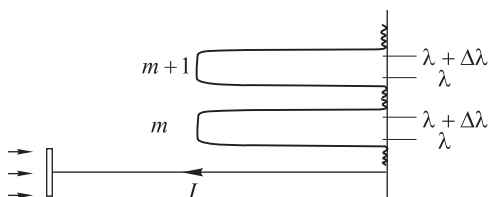
Рис. 132

Таким образом, пропускаемый через решетку белый свет раскладывается ею в спектр.

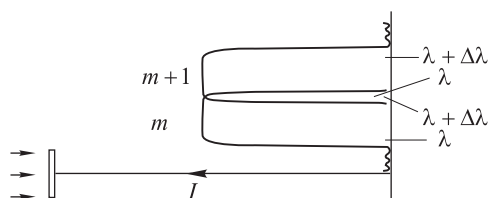
Благодаря этому свойству решетка может рассматриваться как спектральный прибор.

Дисперсионная область решетки. Дисперсионной областью спектрального прибора называется наибольший интервал $\Delta\lambda$ длин волн света, который с помощью данного прибора может быть разложен в спектр.

Ограничение ширины спектрального интервала $\Delta\lambda$ при использовании решетки в качестве спектрального прибора обусловлено следующим обстоятельством. Если интервал $\Delta\lambda$ слишком велик, то в дифракционной картине максимум m -го порядка излучения с наибольшей имеющейся длиной волны перекрывается с максимумом $(m + 1)$ -го порядка излучения с наименьшей длиной волны. В этих условиях наблюдение спектра становится невозможным. При этом говорят, что спектры m -го и $(m + 1)$ -го порядков не разрешаются. Перекрывание спектров соседних переходов при увеличении интервала $\Delta\lambda$ иллюстрируется рис. 133.



Спектры порядков m и $(m + 1)$ разрешены



Спектры порядков m и $(m + 1)$ перекрываются

Рис. 133

Обозначим наименьшую длину волны в падающем на решетку свете через λ , наибольшую — через $(\lambda + \Delta\lambda)$, тогда ширина спектрального интервала составит $\Delta\lambda$. Угол $\theta_{\lambda+\Delta\lambda}$, определяющий направление на максимум m -го порядка для света с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$, удовлетворяет условию (см. 37.4)):

$$d \sin \theta_{\lambda+\Delta\lambda} = m(\lambda + \Delta\lambda). \quad (38.1)$$

Аналогично, угол θ_λ , определяющий направление на максимум $(m + 1)$ -го порядка для света с длиной волны λ , удовлетворяет усло-

вию:

$$d \sin \theta_\lambda = (m + 1)\lambda. \quad (38.2)$$

Если рассматриваемые максимумы m -го и $(m + 1)$ -го порядков перекрываются, то углы $\theta_{\lambda + \Delta\lambda}$ и θ_λ равны друг другу. Следовательно, равны и правые части выражений (38.1) и (38.2):

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda.$$

Отсюда находим значение $\Delta\lambda$, при котором начинается перекрывание максимумов интенсивности соседних порядков в дифракционной картине:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (38.3)$$

Выражение (38.3) определяет дисперсионную область дифракционной решетки. Как видим, дисперсионная область зависит от порядка главного максимума m , который используется для получения спектра: с ростом m дисперсионная область уменьшается, то есть перекрывание спектров соседних порядков наступает раньше — при меньшей ширине спектрального интервала $\Delta\lambda$ пропускаемого через решетку света.

Зная ширину спектрального интервала $\Delta\lambda$ падающего на решетку света, с помощью (38.3) можно оценить порядок главного максимума m , наиболее удобный для наблюдения спектра. Пусть, например, белый свет содержит волны в диапазоне от 400 до 760 нм, то есть $\Delta\lambda = 360$ нм. Тогда порядок m главного максимума, который начинает перекрываться с соседним $(m + 1)$ -м максимумом, равен:

$$m \sim \frac{\lambda_{\text{средн}}}{\Delta\lambda} \approx \frac{600}{360} \sim 2.$$

Следовательно, разложение белого света в спектр с помощью дифракционной решетки возможно лишь в первом или, в крайнем случае, втором порядке главного максимума.

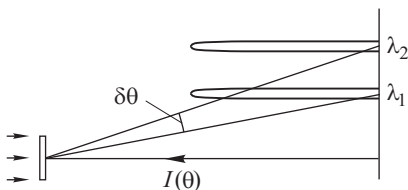
Угловая дисперсия решетки. В зависимости от природы источника света спектр электромагнитного излучения — набор характеризующих излучение частот или длин волн — может быть непрерывным или дискретным. Дискретный спектр, наблюдаемый с помощью дифракционной решетки, представляется в виде системы окрашенных (каждый в определенный цвет) главных максимумов интенсивности в дифракционной картине.

Спектральной линией будем называть излучение с определенной длиной волны, а также соответствующий этому излучению дифракционный максимум интенсивности света в виде окрашенный в определенный цвет полосы на экране наблюдения.

Например, на рис. 134 показаны две спектральные линии с длинами волн λ_1 и λ_2 , которые представляют собой главные дифракционные максимумы некоторого порядка m .

Угловым расстоянием между двумя спектральными линиями назовем угол $\delta\theta$ между направлениями на главные дифракционные максимумы интенсивности, соответствующие этим спектральным линиям (рис. 134).

Обозначим через $d\theta$ угловое расстояние между двумя спектральными линиями с близкими друг другу длинами волн λ_1 и λ_2 , а через $d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ — разность длин волн этих линий. Угловой дисперсией решетки называется величина, равная



$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}.$$

Рис. 134

Физический смысл угловой дисперсии состоит в следующем: величина D численно равна угло-

вому расстоянию между двумя спектральными линиями, длины волн которых отличаются на единицу.

Вычислим угловую дисперсию решетки. Направление θ на главный максимум интенсивности света с длиной волны λ определяется выражением (37.4):

$$d \cdot \sin \theta = m\lambda,$$

где d — период решетки.

Продифференцируем обе части этого равенства:

$$d \cdot \cos \theta \cdot d\theta = m d\lambda.$$

Отсюда получим

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}. \quad (38.4)$$

При разложении света в спектр с помощью решетки, как правило, используются максимумы не слишком высокого порядка m (см. выше обсуждение дисперсионной области), что соответствует малым углам θ . Поэтому $\cos \theta$ в (38.4) можно положить равным единице, так что угловая дисперсия решетки приблизительно равна:

$$D \approx \frac{m}{d}. \quad (38.5)$$

Оценим величину $\cos \theta$. Пусть, например, $m = 2$. Если длина волны света $\lambda = 550$ нм, а период решетки $d \sim 10^{-2}$ мм, что соответствует приблизительно $N = 100$ штрихам (щелям) на один миллиметр, то $\sin \theta = m\lambda/d \sim 10^{-4}$, а искомая величина $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \approx 1 - 0,5 \sin^2 \theta = 1 - 5 \cdot 10^{-9}$ с очень высокой точностью равна единице.

Разрешающая сила решетки. Разрешающей силой спектрального прибора, в частности, дифракционной решетки, называется величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}},$$

где $\delta\lambda_{\min}$ — наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно (разрешаются), λ — длина волны одной из линий или средняя длина волны.

Критерий разрешения Рэлея (1842–1919). Две спектральные линии воспринимаются раздельно (разрешаются), если расстояние между соответствующими этим линиям максимумами интенсивности света в дифракционной картине равно полуширине каждого максимума. (Развернутая формулировка критерия спектрального разрешения Рэлея такова: две спектральные линии с близкими длинами волн λ и λ' считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны.)

В приведенной выше краткой формулировке критерия разрешения под расстоянием между максимумами интенсивности и полушириной максимума следует понимать либо угловые, либо линейные величины. Угловое расстояние между максимумами интенсивности равно углу θ между направлениями от решетки на соответствующие дифракционные максимумы, локализованные на экране наблюдения. Угловая полуширина максимума — это угол θ между направлениями от решетки на максимум и ближайший к нему (первый) минимум интенсивности. Соответствующие линейные величины — это измеренные вдоль экрана наблюдения расстояние между максимумами и расстояние между максимумом и ближайшим к нему (первым) минимумом интенсивности. Необходимые пояснения и примеры содержатся на рис. 135.



Рис. 135

Рисунок 136, на котором показана зависимость интенсивности света от угла θ , определяющего направление наблюдения, или от линейной координаты точки наблюдения на экране, иллюстрирует критерий

Рэля. Если угловое расстояние $\delta\theta$ между максимумами интенсивности двух спектральных линий больше угловой полуширины каждого максимума $\delta\theta_{\text{гл. макс}}$, то распределение интенсивности света в пространстве и соответствующее распределение освещенности на экране наблюдения воспринимается как две отдельно расположенные линии (рис. 136 а).

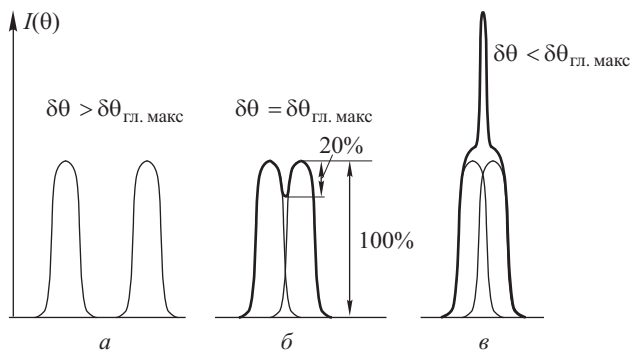


Рис. 136

Если $\delta\theta = \delta\theta_{\text{гл. макс}}$, то между двумя максимумами интенсивности имеется минимум, относительная глубина которого приблизительно составляет 20% (рис. 136 б). Согласно критерию Рэля спектральные линии в этом случае считаются разрешенными, то есть воспринимаются раздельно. Если $\delta\theta < \delta\theta_{\text{гл. макс}}$, то наблюдается один общий для двух линий максимум (рис. 136 в). В этом случае спектральные линии не разрешаются.

Вычислим разрешающую силу дифракционной решетки. Угловое расстояние $\delta\theta$ между двумя спектральными линиями, длины волн которых отличаются на $\delta\lambda$, равно

$$\delta\theta = D\delta\lambda = \frac{m}{d}\delta\lambda,$$

где $D = m/d$ — угловая дисперсия, m — порядок максимума, d — период решетки. Согласно (37.5) угловая полуширина главного максимума в дифракционной картине решетки равна

$$\delta\theta_{\text{гл. макс}} = \frac{\lambda}{Nd},$$

где N — число щелей в решетке (число штрихов на поверхности стекла, из которого изготовлена решетка).

Две линии являются разрешенными, если выполняется нестрогое неравенство (знак равенства соответствует критерию Рэля):

$$\delta\theta \geq \delta\theta_{\text{гл. макс}}, \quad (38.6)$$

$$\frac{m}{d}\delta\lambda \geq \frac{\lambda}{Nd}. \quad (38.7)$$

Отсюда условие разрешения двух спектральных линий решеткой:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \leq mN. \quad (38.8)$$

Минимальному значению $\delta\lambda_{\min}$, при котором линии еще являются, согласно критерию Рэля, разрешенными, соответствует знак равенства в (38.6)–(38.8). При этом угловое расстояние между максимумами интенсивности двух спектральных линий равно угловой полуширине каждого максимума: $\delta\theta = \delta\theta_{\text{гл. макс.}}$. Как следует из (38.8), разрешающая сила решетки равна:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = mN. \quad (38.9)$$

§ 39. Разрешающая сила объектива и оптимальное увеличение зрительной трубы

Разрешающая сила объектива. Пусть с помощью зрительной трубы с объективом диаметром D рассматривается удаленный предмет. Объектив и окуляр представляют собой собирающие линзы. От каждой точки предмета в объектив попадает почти параллельный пучок лучей, которые после преломления пересекаются в его фокальной плоскости, формируя изображение. Вследствие дифракции от отверстия, диаметр которого равен диаметру объектива D , изображение точки предмета не является точкой, а имеет вид пятнышка, которое представляет собой центральный максимум интенсивности света в дифракционной картине Фраунгофера (рис. 137) и имеет угловую полуширину, приблизительно равную (см. (34.5))

$$\delta\varphi_{\text{об}} \approx \frac{\lambda}{D}, \quad (39.1)$$

где λ — длина световой волны. (Точный расчет дифракции от круглого отверстия дает для угловой полуширины центрального дифракционного максимума $\delta\varphi_{\text{центр. макс}} = 1,22\lambda/D$, что по порядку совпадает с величиной, рассчитываемой по формуле (34.2).)

Большая часть всего светового потока ($\sim 84\%$), испускаемого точкой предмета и проходящего через объектив, попадает в область центрального дифракционного максимума (пятнышка), в связи с чем наличие побочных максимумов интенсивности можно не учитывать.

Рассмотрим изображения двух точек предмета, обозначенных как 1 и 2, угловое расстояние между которыми при наблюдении из оптического центра объектива равно $\delta\varphi$ (рис. 138). Изображение каждой

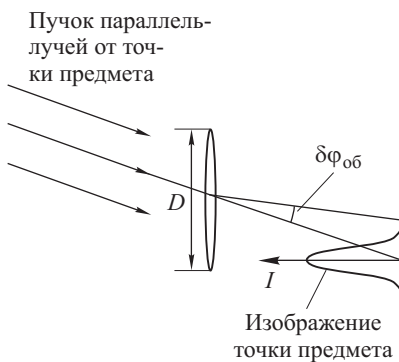


Рис. 137

точки имеет вид пятнышка с угловой полушириной, определяемой выражением (39.1): $\delta\varphi_{об} = \lambda/D$. Согласно критерию Рэлея два максимума

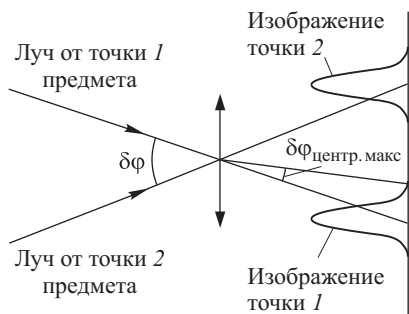


Рис. 138

интенсивности еще воспринимаются раздельно (разрешаются), если расстояние $\delta\varphi$ между ними равно полуширине каждого максимума. Рассматриваемые изображения точек 1 и 2 предмета разрешаются, если выполнено неравенство:

$$\delta\varphi \geq \delta\varphi_{об} \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (39.2)$$

Минимальное угловое расстояние $\delta\varphi$ между двумя точками предмета, при котором их изображения воспринимаются раздельно (выполняется критерий Рэлея), равно полуширине дифракционного максимума, а именно:

$$\delta\varphi = \delta\varphi_{мин} = \delta\varphi_{об} \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (39.3)$$

Дадим определение разрешающей силы объектива.

Пусть $\delta\varphi_{мин}$ — наименьшее угловое расстояние между двумя точками предмета, при котором изображения точек воспринимаются раздельно (разрешаются). *Разрешающей силой объектива* называется величина, равная

$$R = \frac{1}{\delta\varphi_{мин}}. \quad (39.4)$$

Подставив значение $\delta\varphi_{мин}$ из (39.3) в (39.4), найдем разрешающую силу объектива:

$$R_{об} = \frac{D}{\lambda},$$

где D — диаметр объектива, λ — длина световой волны.

Дифракционные явления необходимо учитывать и при анализе работы глаза как оптической системы (см. § 23). Изображение точки рассматриваемого глазом достаточно удаленного предмета, от которой по направлению к глазу идет пучок почти параллельных лучей, представляет собой пятнышко — центральный максимум интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера от зрачка глаза, выполняющего роль диафрагмы (напомним, что функцию собирающей линзы выполняет хрусталик глаза, а изображение формируется на сетчатке). Угловую полуширину пятнышка можно оценить по формуле (34.5):

$$\delta\varphi_{зр} \approx \frac{\lambda}{D_{зр}}, \quad (39.5)$$

где $D_{зр}$ — диаметр зрачка.

Вычисляемая по формуле (39.5) величина $\delta\varphi_{\text{зр}}$ представляет собой угол расхождения параллельного пучка лучей (или, иначе говоря, дифракционное уширение), которое возникает при прохождении пучка через оптическую систему глаза.

Оптимальное увеличение зрительной трубы. Определим оптимальное увеличение Γ_0 зрительной трубы.

Пусть удаленный предмет рассматривается глазом через зрительную трубу с диаметром объектива D . Изображение любой точки удаленного предмета в фокальной плоскости объектива имеет вид пятнышка, угловая полуширина которого $\delta\varphi_{\text{об}}$ определяется выражением (39.1) (рис. 139). Если увеличение зрительной трубы равно Γ , то

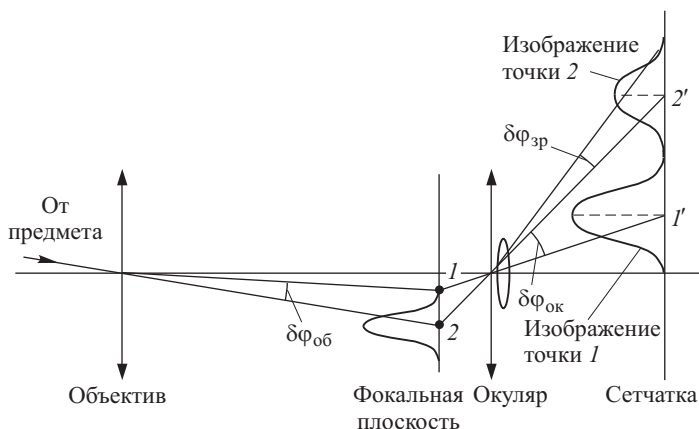


Рис. 139

при наблюдении этого пятнышка из оптического центра окуляра его угловая полуширина $\delta\varphi_{\text{ок}}$ приблизительно в Γ раз больше углового размера $\delta\varphi_{\text{об}}$ (см. формулу (23.12)):

$$\delta\varphi_{\text{ок}} = \Gamma \delta\varphi_{\text{об}} \approx \Gamma \frac{\lambda}{D}. \quad (39.6)$$

Вычисляемую по формуле (39.6) величину можно интерпретировать следующим образом: $\delta\varphi_{\text{ок}}$ представляет собой угол расхождения параллельного пучка лучей (или, иначе говоря, дифракционное уширение), которое возникает при прохождении пучка через оптическую систему зрительной трубы.

Поскольку задняя фокальная плоскость объектива совпадает с передней фокальной плоскостью окуляра, формируемое окуляром мнимое изображение пятнышка находится на бесконечно большом удалении от окуляра (см. § 23). Вследствие этого при рассматривании изображения пятнышка глазом через окуляр глаз должен быть аккомодирован на бесконечность; от каждой точки изображения пятнышка в окуляре

в глаз направляется почти параллельный пучок лучей. Изображение точки на сетчатке глаза имеет вид пятнышка с угловой полушириной $\delta\varphi_{\text{зр}}$, которая рассчитывается по формуле (39.5): $\delta\varphi_{\text{зр}} = \lambda/D_{\text{зр}}$

Для того чтобы увеличение зрительной трубы было оптимальным, дифракционные уширения параллельных пучков лучей при прохождении через зрительную трубу (см. (39.6)) и через оптическую систему глаза (см. (39.5)) должны быть приблизительно одинаковыми:

$$\begin{aligned}\delta\varphi_{\text{ок}} &\approx \delta\varphi_{\text{зр}}, \\ \Gamma \frac{\lambda}{D} &\approx \frac{\lambda}{D_{\text{зр}}}\end{aligned}\tag{39.7}$$

Отсюда оптимальное увеличение Γ_0 зрительной трубы равно

$$\Gamma_0 \approx \frac{D}{D_{\text{зр}}}.\tag{39.8}$$

Необходимость выполнения условия (39.7) обусловлена следующими соображениями.

Допустим равенство (39.7) не выполняется, но справедливо неравенство:

$$\delta\varphi_{\text{ок}} > \delta\varphi_{\text{зр}},\tag{39.9}$$

при этом увеличение Γ трубы превышает найденное оптимальное значение Γ_0 (39.8): $\Gamma > \Gamma_0$. Неравенство (39.9) подразумевает, что выполняется критерий разрешения Рэлея для любых двух точек *1* и *2* дифракционного пятнышка (см. рис. 139), одна из которых расположена у его края, а другая — посередине: при рассматривании пятнышка глазом через окуляр указанные две точки воспринимаются раздельно. В этом случае увеличение трубы настолько велико, что глаз способен регистрировать на сетчатке пространственное распределение интенсивности света в дифракционной картине Фраунгофера, в частности, отдельно воспринимать изображения точек *1* и *2* этой картины. Однако при этом дифракционная картина, отображаемая на сетчатке, не отражает структуру рассматриваемого с помощью зрительной трубы объекта, то есть не несет информации об объекте. Такое увеличение трубы является излишним.

Напротив, если справедливо неравенство:

$$\delta\varphi_{\text{ок}} < \delta\varphi_{\text{зр}},\tag{39.10}$$

и увеличение зрительной трубы меньше оптимального: $\Gamma < \Gamma_0$, то разрешающей силы оптической системы глаза оказывается недостаточно, чтобы различить детали изображения удаленного предмета, формируемого зрительной трубой. Например, изображения двух разрешаемых объективом точек предмета *1* и *2*, имеющих вид двух отдельно расположенных в его фокальной плоскости пятнышек, угловое расстояние между которыми при рассматривании через окуляр превышает $\delta\varphi_{\text{ок}}$, но меньше, чем $\delta\varphi_{\text{зр}}$, на сетчатке отображаются как одно пятнышко

с угловым размером, приблизительно равным $\delta\varphi_{\text{зр}}$ (рис. 140). Таким образом, при выполнении условия (39.10) возможно возникновение ситуации, когда две различные точки предмета, разрешаемые зрительной

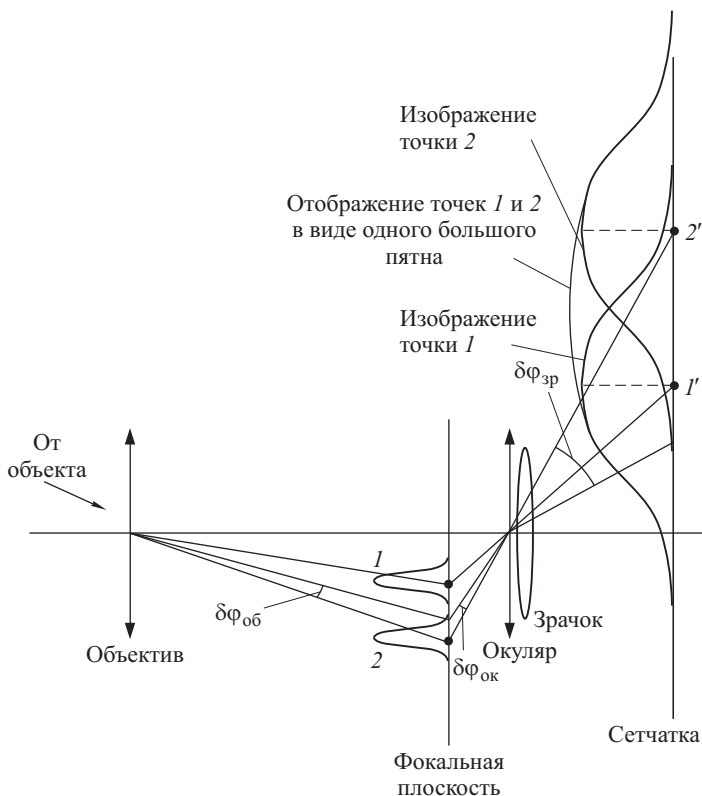


Рис. 140

трубой, сливаются на сетчатке глаза в одну точку, что не является оптимальным и делает необходимым повышение значения Γ .

Задачи

6.1. Плоская световая волна $\lambda = 640$ нм с интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие радиуса $r = 1,2$ мм. Найти интенсивность в центре дифракционной картины на экране, отстоящем на расстоянии $b = 1,5$ м от отверстия.

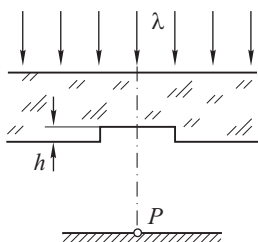
6.2. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие:

- а) равно первой зоне Френеля; внутренней половине первой зоны;
 б) сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)?

6.3. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения P первую зону Френеля. Какова стала интенсивность I света в точке P после того, как у диска удалили:

- а) половину (по диаметру);
 б) половину внешней половины первой зоны Френеля (по диаметру)?

6.4. Плоская световая волна с $\lambda = 0,6$ мкм падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана круглая выемка (см. рисунок). Для точки наблюдения P она представляет собой первые полторы зоны Френеля. Найти глубину h выемки, при которой интенсивность света в точке P будет:



К задаче 6.4

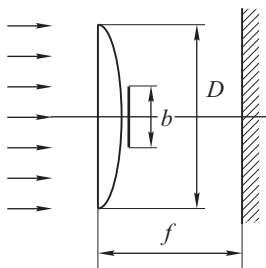
- а) максимальной;
 б) минимальной;
 в) равной интенсивности падающего света.

6.5. В параллельном пучке радиоизлучения, длина волны которого $\lambda = 3$ см, поставлен диск диаметром $D = 20$ см из диэлектрика с показателем преломления $n = 1,5$. Диск перпендикулярен направлению пучка. При какой толщине h диска и на каком расстоянии b от диска вдоль его оси будет наблюдаться максимальная интенсивность излучения? Отражением излучения от диска пренебречь.

6.6. Точечный источник монохроматического света расположен перед зонной пластинкой на расстоянии $a = 1,5$ м от нее. Изображение источника образуется на расстоянии $b = 1,0$ м от пластинки. Найти фокусное расстояние зонной пластинки.

6.7. Главное фокусное расстояние амплитудной плоской зонной пластинки равно F_0 . Найти ее остальные фокусные расстояния.

6.8. Цилиндрическая линза освещается параллельным пучком монохроматического света (см. рисунок). Во сколько раз изменится интенсивность в фокусе и ширина центрального максимума, если центр линзы перекрыть непрозрачной полоской, ширина которой вдвое меньше ширины линзы? Как изменится световой поток в центральном максимуме?



К задаче 6.8

6.9. Свет с длиной волны λ падает нормально на дифракционную решетку. Найти ее угловую дисперсию в зависимости от угла дифракции θ .

6.10. Показать, что при нормальном падении света на дифракционную решетку максимальная величина ее разрешающей способности не может превышать значения l/λ , где l — ширина решетки, λ — длина волны света.

6.11. При нормальном падении света на дифракционную решетку ширины 10 мм обнаружено, что компоненты желтой линии натрия (589,0 и 589,6 нм) оказываются разрешенными, начиная с пятого порядка спектра. Оценить период этой решетки.

6.12. Найти условие появления главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения θ_0). Какой вид принимает это условие, если период d решетки $d \gg \lambda$, а порядок m спектра $m \ll d/\lambda$, где λ — длина волны света?

6.13. Освещаемая щель находится в фокальной плоскости собирающего идеального объектива с фокусным расстоянием $F = 25$ см. За объективом расположена дифракционная решетка с периодом $d = 5,0$ мкм и числом штрихов $N = 1000$. При какой ширине b щели будет полностью использована разрешающая способность решетки вблизи $\lambda = 600$ нм?

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

§ 40. Поляризованный и естественный свет. Закон Малюса

Поляризованным называется свет, в котором колебания светового вектора каким-либо образом упорядочены (см. § 19). В *плоскополяризованном* (*линейно поляризованном*) свете колебания светового вектора осуществляются в одной определенной плоскости, проходящей через луч. В *эллиптически поляризованном* и *поляризованном по кругу* свете конец светового вектора описывает эллипс или окружность соответственно. Если направление вращения светового вектора и направление луча образуют правоинтовую систему, то поляризация называется *правой эллиптической*, в противном случае — *левой эллиптической*. В *естественном* свете колебания светового вектора осуществляются во всевозможных направлениях, перпендикулярных к лучу; направления колебаний быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Представления естественного и поляризованного света. При решении многих задач поляризованный и естественный свет удобно представлять в виде суперпозиции двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Утверждение 1. *Плоскополяризованный и эллиптически поляризованный свет можно представить в виде наложения (суперпозиции) двух когерентных электромагнитных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Это же относится и к свету, поляризованному по кругу, как частному случаю эллиптической поляризации.*

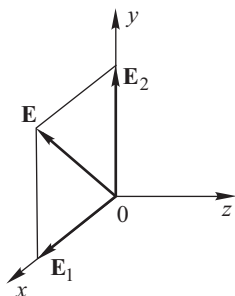


Рис. 141

Рассмотрим в некоторой произвольной точке пространства колебания световых векторов двух плоских поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях волн \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , распространяющихся вдоль оси z (рис. 141). Колебания вектора \mathbf{E}_1 происходят вдоль оси x :

$$E_{1x} = E_x = A_1 \cos(\omega t - kz), \quad (40.1)$$

а колебания вектора \mathbf{E}_2 — вдоль оси y :

$$E_{2y} = E_y = A_2 \cos(\omega t - kz + \delta), \quad (40.2)$$

где A_1 и A_2 — амплитуды колебаний, δ — не зависящая от времени (и одинаковая для всех точек пространства) разность фаз, ω — частота, k — волновое число. Рассматриваемые волны когерентны.

Световой вектор \mathbf{E} результирующей волны равен векторной сумме \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Проекции на оси x и y вектора \mathbf{E} равны соответственно E_x и E_y , их зависимость от времени описывается формулами (40.1) и (40.2). Определим вид траектории, которую описывает конец вектора \mathbf{E} в процессе колебаний. Для этого исключим из (40.1) и (40.2) время t . Сначала преобразуем (40.2):

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{A_2} &= \cos(\omega t - kz + \delta) = \cos(\omega t - kz) \cos \delta - \sin(\omega t - kz) \sin \delta = \\ &= \cos(\omega t - kz) \cos \delta \mp \sqrt{1 - \cos^2(\omega t - kz)} \sin \delta, \end{aligned}$$

и подставим в это равенство $\cos(\omega t - kz)$ из (40.1):

$$\frac{E_y}{A_2} = \frac{E_x}{A_1} \cos \delta \mp \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{A_1^2}} \sin \delta.$$

Выполним простые преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{A_2} - \frac{E_x}{A_1} \cos \delta &= \mp \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{A_1^2}} \sin \delta, \\ \left(\frac{E_y}{A_2} - \frac{E_x}{A_1} \cos \delta \right)^2 &= \left(\mp \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{A_1^2}} \sin \delta \right)^2, \\ \frac{E_y^2}{A_2^2} - 2 \frac{E_y}{A_2} \frac{E_x}{A_1} \cos \delta + \frac{E_x^2}{A_1^2} &= \sin^2 \delta. \end{aligned} \quad (40.3)$$

Равенство (40.3), которое в любой момент времени связывает между собой проекции E_x и E_y вектора \mathbf{E} , — это уравнение траектории конца вектора \mathbf{E} . Из вида (40.3) следует, что траектория представляет собой эллипс, оси которого, вообще говоря, не совпадают с осями координат x и y . Уравнение (40.3) не зависит от координаты z , следовательно, траектория конца вектора \mathbf{E} одинакова во всех точках пространства, где имеет место наложение рассматриваемых волн. Таким образом, при сложении двух когерентных волн (40.1) и (40.2), поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, возникает эллиптически поляризованная волна.

Положим $\delta = 0$ и из (40.3) получим

$$\frac{E_y^2}{A_2^2} - 2 \frac{E_y}{A_2} \frac{E_x}{A_1} + \frac{E_x^2}{A_1^2} = 0,$$

$$\left(\frac{E_y}{A_2} - \frac{E_x}{A_1}\right)^2 = 0,$$

$$E_y = \frac{A_2}{A_1} E_x. \quad (40.4)$$

Равенство (40.4) показывает, что в каждой точке пространства, где складываются колебания \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , траекторией конца вектора \mathbf{E} результирующего колебания является прямая (рис. 142 а).

Если положить $\delta = \pi$, то из (40.3) снова получим уравнение прямой:

$$\frac{E_y^2}{A_2^2} + 2\frac{E_y}{A_2} \frac{E_x}{A_1} + \frac{E_x^2}{A_1^2} = 0,$$

$$\left(\frac{E_y}{A_2} + \frac{E_x}{A_1}\right)^2 = 0,$$

$$E_y = -\frac{A_2}{A_1} E_x. \quad (40.5)$$

Прямая, описываемая уравнением (40.5), показана на рис. 142 б.

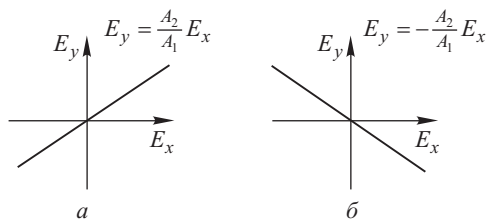


Рис. 142

Каждое из равенств (40.4) и (40.5) представляет собой уравнение плоскости в пространстве, положение которой не зависит от времени. Это плоскость колебаний вектора \mathbf{E} . Таким образом, если разность фаз δ поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях когерентных волн равна нулю или π , то при наложении этих волн возникает плоскополяризованная световая волна.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Естественную световую волну можно представить в виде наложения (суперпозиции) двух некогерентных волн одинаковой амплитуды, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях.*

Рассмотрим две плоские волны, световые векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 которых параллельны осям координат x и y соответственно. Колебание вектора \mathbf{E}_1 вдоль оси x описывается уравнением

$$E_{1x} = E_x = A \cos(\omega t - kz), \quad (40.6)$$

а вектора \mathbf{E}_2 вдоль оси y — уравнением

$$E_{2y} = E_y = A \cos[(\omega t - kz) + \delta(t)], \quad (40.7)$$

где A — одинаковая для обеих волн амплитуда; $\delta(t)$ — начальная фаза, изменение которой с течением времени имеет случайный характер. Волны (40.6) и (40.7) не когерентны. Световой вектор \mathbf{E} результирующей волны представим в виде суммы:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Угол φ между вектором \mathbf{E} и координатной осью y (рис. 143) определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{E_x}{E_y} = \frac{\cos(\omega t - kz)}{\cos[(\omega t - kz) + \delta(t)]}. \quad (40.8)$$

Как следует из (40.8), если разность фаз δ претерпевает случайные хаотические изменения, то и направление вектора \mathbf{E} , определяемое углом φ , будет испытывать скачкообразные неупорядоченные изменения. Такая зависимость от времени светового вектора \mathbf{E} характерна для естественного света. Следовательно, волна, которая представляет собой сумму двух поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях некогерентных волн одинаковой амплитуды, ведет себя подобно естественной световой волне.

Утверждение 2 доказано.

Степень поляризации. Поляризатором называется прибор, который свободно пропускает колебания светового вектора, параллельные одной определенной плоскости (она называется *плоскостью поляризатора*), и задерживает колебания, перпендикулярные к этой плоскости. Основным элементом поляризатора служит прозрачная пластинка, вырезанная из кристалла с особыми свойствами, например, турмалина. Турмалин сильно поглощает световые лучи, в которых электрический вектор перпендикулярен так называемой *кристаллографической (оптической) оси кристалла*.

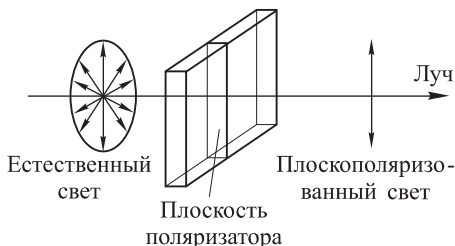


Рис. 144

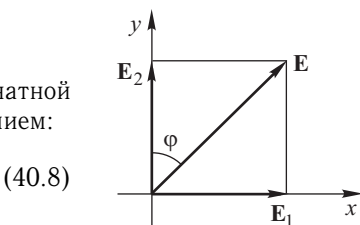


Рис. 143

Если же электрический вектор параллелен оси, то такие лучи проходят через турмалин почти без поглощения. Естественный свет после прохождения через поляризатор становится плоскополяризованным (рис. 144).

Частично поляризованным называется свет, в котором колебания светового

вектора одного определенного направления преобладают по амплитуде над колебаниями всех других направлений.

Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного света (рис. 145).

Проведем следующий опыт. Пусть частично поляризованный свет падает на поляризатор. Вращая прибор вокруг направления луча, будем регистрировать изменения интенсивности I прошедшего через поляризатор света. Если плоскость поляризатора параллельна плоскости преобладающего колебания частично поляризованной волны, то регистрируемая интенсивность является максимальной и обозначается I_{\max} (рис. 146 а). Если указанные плоскости перпендикулярны друг другу, интенсивность прошедшего света принимает наименьшее возможное значение, обозначаемое I_{\min} (рис. 146 б).

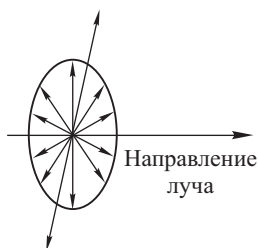


Рис. 145

Степень поляризации частично поляризованного света называется величина, равная

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (40.9)$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальное и минимальное значения интенсивности прошедшего через поляризатор света, регистрируемые в процессе вращения прибора вокруг направления луча.

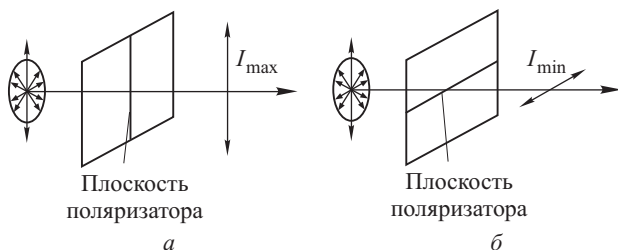


Рис. 146

Пример 1. Если на поляризатор падает плоскополяризованный свет, то минимальное значение интенсивности прошедшего через прибор света равно нулю $I_{\min} = 0$. Поэтому

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\max}} = 1,$$

то есть степень поляризации плоскополяризованного света равна единице.

2. Если на поляризатор падает естественный свет, то интенсивность прошедшего света не меняется при вращении прибора. Следовательно, $I_{\max} = I_{\min}$. В этом случае

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\max} - I_{\max}}{I_{\max} + I_{\max}} = 0,$$

то есть степень поляризации естественного света равна нулю.

Закон Малюса. Если на поляризатор падает плоскополяризованный свет интенсивности I_0 , интенсивность I прошедшего через поляризатор света связана с I_0 соотношением:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (40.10)$$

где φ — угол между плоскостью колебаний светового вектора в падающей волне и плоскостью поляризатора.

Соотношение (40.10) называется *законом Малюса* (1775–1812). Приведем его обоснование.

Пусть \mathbf{E}_0 — световой вектор падающей на поляризатор волны, плоскость колебаний которого составляет угол φ с плоскостью поляризатора (рис. 147). Колебание \mathbf{E}_0 в некоторой точке пространства перед поляризатором представим в виде:

$$E_0 = A_0 \cos \omega t.$$

Интенсивность I_0 пропорциональна квадрату амплитуды колебания A_0 :

$$I_0 = p A_0^2, \quad (40.11)$$

где p — коэффициент пропорциональности ($p = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, см. (19.2)).

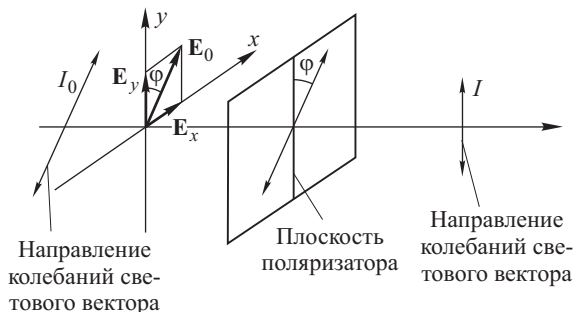


Рис. 147

Направим оси координат y и x соответственно параллельно и перпендикулярно плоскости поляризатора и разложим вектор \mathbf{E}_0 на составляющие \mathbf{E}_x и \mathbf{E}_y вдоль этих осей (см. доказанное выше утверждение 1):

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y.$$

Колебания векторов \mathbf{E}_x и \mathbf{E}_y описываются уравнениями:

$$E_y = A_0 \cos \varphi \cos \omega t, \quad (40.12)$$

$$E_x = A_0 \sin \varphi \cos \omega t.$$

Составляющая \mathbf{E}_x будет задержана поляризатором, а составляющая \mathbf{E}_y , параллельная плоскости поляризатора, свободно пройдет через

поляризатор. Интенсивность прошедшего света пропорциональна квадрату амплитуды колебаний его светового вектора и с учетом (40.12) и (40.11) равна

$$I = p(A_0 \cos \varphi)^2 = pA_0^2 \cos^2 \varphi = I_0 \cos^2 \varphi.$$

Что и требовалось доказать.

Прохождение естественного света через поляризатор. Если на поляризатор падает естественный свет интенсивности I_0 , то интенсивность прошедшей волны I вдвое меньше интенсивности падающего света (рис. 148):

$$I = \frac{1}{2} I_0. \quad (40.13)$$

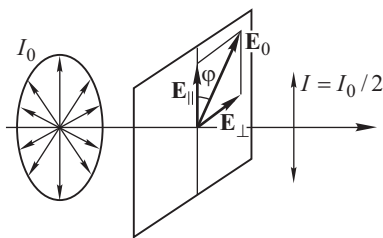


Рис. 148

Световой вектор \mathbf{E}_0 падающей на поляризатор волны можно разложить на две некогерентные составляющие одинаковой амплитуды (см. доказанное выше утверждение 2):

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp},$$

где \mathbf{E}_{\parallel} — составляющая, параллельная плоскости поляризатора, \mathbf{E}_{\perp} — составляющая, перпендикулярная этой плоскости. Колебания векторов \mathbf{E}_{\parallel} и \mathbf{E}_{\perp} описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= A \cos \omega t, \\ E_{\perp} &= A \cos [\omega t + \delta(t)], \end{aligned}$$

где $\delta(t)$ — начальная фаза, которая с течением времени претерпевает случайные хаотические изменения.

Амплитуды световых векторов \mathbf{E}_{\parallel} и \mathbf{E}_{\perp} , а следовательно, интенсивности соответствующих волн I_{\parallel} и I_{\perp} одинаковы: $I_{\parallel} = I_{\perp}$. Поскольку волны \mathbf{E}_{\parallel} и \mathbf{E}_{\perp} не когерентны, интенсивность падающей волны I_0 равна сумме интенсивностей: $I_0 = I_{\parallel} + I_{\perp}$. Отсюда находим

$$I_{\parallel} = I_{\perp} = \frac{1}{2} I_0. \quad (40.14)$$

Так как поляризатор задерживает составляющую \mathbf{E}_{\perp} и пропускает составляющую \mathbf{E}_{\parallel} , то интенсивность прошедшей волны $I = I_{\parallel}$ с учетом (40.14) равна половине интенсивности падающей волны, что и доказывает соотношение (40.13).

Соотношение (40.13) можно доказать иным способом. Пусть A_0 — среднее значение амплитуды колебаний светового вектора \mathbf{E}_0 в падающей естественной волне. Направление колебаний \mathbf{E}_0 , определяемое углом $\varphi(t)$ между вектором \mathbf{E}_0 и плоскостью пропускания поляризатора, испытывает скачкообразные неупорядоченные изменения. Поляризатор

пропускает только составляющую \mathbf{E}_{\parallel} вектора \mathbf{E} , амплитуда которой равна:

$$A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi(t). \quad (40.15)$$

Интенсивность $I = I_{\parallel}$ свободно проходящей через поляризатор волны пропорциональна квадрату ее амплитуды (40.15):

$$I = I_{\parallel} = pA_{\parallel}^2 = pA_0^2 \cos^2 \varphi(t) = I_0 \cos^2 \varphi(t),$$

где p — коэффициент пропорциональности (см. текст, следующий после выражения (40.11)), $I_0 = pA_0^2$ — интенсивность падающей волны. Среднее по времени значение $\cos^2 \varphi(t)$, аргумент которого — случайная функция времени t , равно $1/2$, поэтому

$$I = I_{\parallel} = \langle I_0 \cos^2 \varphi(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0.$$

§ 41. Поляризация света при отражении и преломлении

Пусть естественная световая волна падает на границу раздела двух диэлектриков с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 . Отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными: в отраженном луче преобладают колебания светового вектора, перпендикулярные плоскости падения; в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения. Степень поляризации зависит от угла падения.

Явление поляризации света при отражении и преломлении объясняется с помощью формул Френеля и полученных с использованием этих формул коэффициентов отражения и пропускания света.

Каждую из волн — падающую, отраженную и преломленную — можно представить в виде суперпозиции двух некогерентных волн: в одной колебания светового вектора происходят в направлении, параллельном плоскости падения, в другой — в направлении, перпендикулярном плоскости падения. Интенсивности этих составляющих в падающей волне обозначим через I_{\parallel} и I_{\perp} , в отраженной волне — I'_{\parallel} и I'_{\perp} , в преломленной волне — I''_{\parallel} и I''_{\perp} (рис. 149).

Интенсивность падающей на поверхность раздела диэлектриков естественной световой волны равна

$$I_0 = I_{\parallel} + I_{\perp},$$

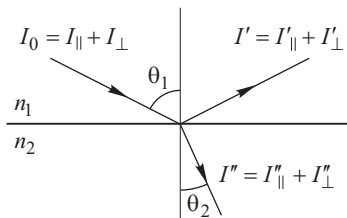


Рис. 149

при этом

$$I_{\parallel} = I_{\perp} = \frac{1}{2} I_0. \quad (41.1)$$

Коэффициенты отражения ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} для рассматриваемых волн вычисляются с помощью формул Френеля (§ 20):

$$\rho_{\parallel} = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (41.2)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (41.3)$$

Здесь θ_1 и θ_2 — углы падения и преломления, соответственно.

Как следует из анализа формул (41.2) и (41.3) и видно из представленных на рис. 61 (см. § 20) графиков зависимости ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} от θ_1 , имеет место соотношение:

$$\rho_{\parallel} < \rho_{\perp} \quad (41.4)$$

(для всех значений θ_1 , кроме $\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ при $n_1 < n_2$ и $\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \theta_{\text{пред}}$ при $n_1 > n_2$).

Применяя последовательно равенства (41.2), (41.1) и (41.3), с учетом (41.4) получим

$$I'_{\parallel} = \rho_{\parallel} I_{\parallel} = \rho_{\parallel} \frac{1}{2} I_0 < \rho_{\perp} \frac{1}{2} I_0 = \rho_{\perp} I_{\perp} = I'_{\perp}. \quad (41.5)$$

Соотношение (41.5) между I'_{\parallel} и I'_{\perp} показывает, что интенсивность I'_{\parallel} отраженной волны, в которой световой вектор параллелен плоскости падения, меньше интенсивности I'_{\perp} отраженной волны, в которой световой вектор перпендикулярен плоскости падения. Следовательно, в отраженном свете, который является суперпозицией рассматриваемых волн, колебания светового вектора, перпендикулярные плоскости падения, преобладают над колебаниями другого направления, то есть отраженный свет частично поляризован.

Имея ввиду сохранение энергии волны при переходе ее через границу двух сред, можно утверждать, что в преломленной волне имеет место обратное соотношение: интенсивность I''_{\parallel} преломленной волны, световой вектор которой параллелен плоскости падения, больше интенсивности I''_{\perp} преломленной волны, в которой световой вектор перпендикулярен плоскости падения. Преломленная волна, как и отраженная, частично поляризована, в ней преобладают световые колебания, параллельные плоскости падения.

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера ($\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$), то, как следует из (41.2) при условии $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, коэффициент отражения ρ_{\parallel} равен нулю. Это означает, что отраженная волна полностью поляризована, в ней колебания светового вектора перпендикулярны к плоскости падения (см. закон Брюстера, § 20).

Пример. Вычислим степень поляризации P преломленной волны, если угол падения естественного света на границу раздела сред равен углу Брюстера, $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$.

Напомним определение и свойства угла Брюстера: $\text{tg } \theta_{\text{Бр}} = n_2/n_1 = n$, где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред, n — относительный показатель преломления второй среды. Если угол падения θ_1 равен углу Брюстера $\theta_1 = \theta_{\text{Бр}}$, то отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу и имеет место соотношение $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$.

Для преломленного луча по определению степени поляризации P имеем:

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}, \quad (41.6)$$

где I_{max} и I_{min} — наибольшее и наименьшее значения интенсивности преломленного и затем прошедшего через поляризатор света, регистрируемые при вращении поляризатора вокруг направления луча (рис. 150). Поскольку преломленный свет представляет собой суперпозицию двух поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях некогерентных волн с интенсивностями I''_{\parallel} и I''_{\perp} и при этом $I''_{\parallel} > I''_{\perp}$, то наибольшее и наименьшее значения интенсивности равны:

$$I_{\text{max}} = I''_{\parallel}, \quad (41.7)$$

$$I_{\text{min}} = I''_{\perp}. \quad (41.8)$$

При падении под углом Брюстера волна, в которой световой вектор параллелен плоскости падения, полностью переходит во вторую среду ($\rho_{\parallel} = 0$), при этом интенсивность не изменяется:

$$I''_{\parallel} = I_{\parallel}.$$

Используя последнее равенство, а также (41.1), (41.7), получим для преломленной волны:

$$I_{\text{max}} = I''_{\parallel} = I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_0. \quad (41.9)$$

Интенсивность преломленной волны, в которой световой вектор перпендикулярен плоскости падения, равна

$$I''_{\perp} = \tau_{\perp} I_{\perp} = (1 - \rho_{\perp}) I_{\perp},$$

где $\tau_{\perp} = (1 - \rho_{\perp})$ — коэффициент пропускания. Используя последнее равенство, а также (41.1), (41.8), получим для преломленной волны:

$$I_{\text{min}} = I''_{\perp} = (1 - \rho_{\perp}) I_{\perp} = (1 - \rho_{\perp}) \cdot \frac{1}{2} I_0. \quad (41.10)$$

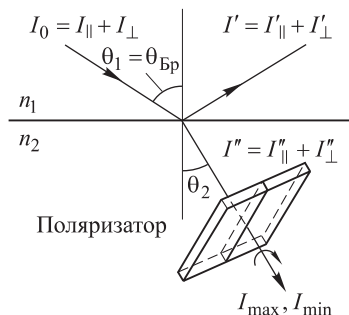


Рис. 150

Подставив I_{\max} и I_{\min} из (41.9) и (41.10) в формулу (41.6), выразим степень поляризации преломленного света через коэффициент отражения ρ_{\perp} :

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_0/2 - (1 - \rho_{\perp})I_0/2}{I_0/2 + (1 - \rho_{\perp})I_0/2} = \frac{\rho_{\perp}}{2 - \rho_{\perp}}. \quad (41.11)$$

Коэффициент отражения ρ_{\perp} при падении света под угла Брюстера находится из (41.3) с учетом соотношений $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ и $\operatorname{tg} \theta_1 = n$:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) = \sin^2\left(2\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 2\theta_1 = \\ &= \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1}\right)^2 = \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2}\right)^2. \end{aligned} \quad (41.12)$$

Подставив ρ_{\perp} из (41.12) в (41.11), окончательно найдем степень поляризации преломленного света:

$$P = \frac{(1 - n^2)^2}{1 + 6n^2 + n^4}.$$

§ 42. Двойное лучепреломление

При прохождении света через прозрачные кристаллы наблюдается явление *двойного лучепреломления*: упавший на кристалл луч разделяется внутри кристалла на два луча, распространяющихся, вообще говоря, с различными скоростями и в различных направлениях; соответствующие лучам волны полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. На рис. 151 разделившиеся внутри кристалла лучи обозначены через e и o . Как видно из рисунка, возникает кажущееся противоречие с законом преломления света: при нормальном падении луча на поверхность кристалла один из преломленных лучей отклоняется от нормали к поверхности.

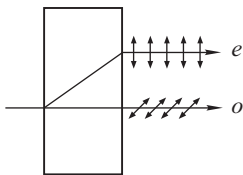


Рис. 151

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. Для находящегося в электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} изотропного кристалла связь между поляризованностью \mathbf{P} , электрической индукцией \mathbf{D} и напряженностью поля \mathbf{E} устанавливается соотношениями (см. в кн. 3 «Электромагнетизм», § 16, 17):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}, \quad (42.1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (42.2)$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость, $\varepsilon = 1 + \kappa$ — диэлектрическая проницаемость вещества. Соотношения (42.1) и (42.2) выполняются при произвольной ориентации вектора \mathbf{E} в кристалле (в этом заклю-

чается изотропность кристалла в отношении электрических свойств), причем векторы \mathbf{P} и \mathbf{D} сонаправлены с вектором \mathbf{E} .

В анизотропных кристаллах, помещенных в электрическое поле, векторы \mathbf{P} и \mathbf{D} , вообще говоря, не коллинеарны с вектором \mathbf{E} . Связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} следующая:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \mathbf{E}. \quad (42.3)$$

Здесь элементами матрицы размером 3×3 являются компоненты ε_{ij} так называемого *тензора диэлектрической проницаемости*. Всегда можно направить оси x, y, z декартовой прямоугольной системы координат таким образом, что матрица станет диагональной:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Такие направления координатных осей x, y, z в кристалле, для которых матрица тензора диэлектрической проницаемости является диагональной, называются *главными направлениями*.

Если вектор \mathbf{E} совпадает с одним из главных направлений, то векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} являются коллинеарными. Как следует из равенства (42.3) при условии, что матрица диагональная, для направленного вдоль оси x вектора \mathbf{E} ($\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, где \mathbf{i} — орт оси x) вектор \mathbf{D} представляется в виде $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_x E\mathbf{i} = \varepsilon_0 \varepsilon_x \mathbf{E}$, то есть \mathbf{D} и \mathbf{E} коллинеарны друг другу. Аналогично, если \mathbf{E} направлен вдоль оси y и $\mathbf{E} = E\mathbf{j}$, где \mathbf{j} — орт оси y , то $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_y E\mathbf{j} = \varepsilon_0 \varepsilon_y \mathbf{E}$; если \mathbf{E} направлен вдоль оси z и $\mathbf{E} = E\mathbf{k}$, где \mathbf{k} — орт оси z , то $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_z E\mathbf{k} = \varepsilon_0 \varepsilon_z \mathbf{E}$.

Трем компонентам $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ диагонального тензора диэлектрической проницаемости соответствуют три *главных показателя преломления* $n_x = \sqrt{\varepsilon_x}$, $n_y = \sqrt{\varepsilon_y}$, $n_z = \sqrt{\varepsilon_z}$. Фазовая скорость волны, в которой электрический вектор \mathbf{E} параллелен оси x , равна: $V_x = c/n_x$; если \mathbf{E} параллелен оси y , то фазовая скорость волны равна $V_y = c/n_y$; если \mathbf{E} параллелен оси z , то фазовая скорость волны равна $V_z = c/n_z$. Кристаллы, для которых все три главных показателя преломления различны, называются *двуосными* (например, слюда, гипс). Кристаллы, для которых $n_x = n_y$, но $n_x \neq n_z$, называются *одноосными* (например, кварц, исландский шпат, турмалин). В одноосных кристаллах ось z , которой соответствует отличный от двух других одинаковых главных показателей преломления n_x, n_y главный показатель преломления n_z , называется *оптической осью кристалла*.

Главный показатель преломления n_z обозначается символом n_e . Таким образом, n_e — показатель преломления для распространяющихся в кристалле волн, у которых колебания светового вектора \mathbf{E} происходят параллельно оптической оси.

Два других одинаковых главных показателя преломления $n_x = n_y$ обозначают символом n_o . Итак, n_o — показатель преломления для волн

в кристалле, у которых колебания светового вектора \mathbf{E} происходят в перпендикулярном к оптической оси направлении.

Положительными называют кристаллы, у которых $n_e > n_o$; *отрицательными* — кристаллы, у которых $n_e < n_o$. Для кварца $n_e - n_o \approx 0,01$, для исландского шпата $n_e - n_o \approx -0,2$.

Главной плоскостью или *главным сечением кристалла* называется плоскость, в которой лежит оптическая ось. Очевидно, что главных плоскостей бесконечно много. Часто главным сечением называют плоскость, в которой лежат оптическая ось и световой луч. Если вектор \mathbf{E} волны принадлежит главному сечению, волна называется *необыкновенной*, соответствующий луч также называется *необыкновенным* и обозначается буквой e ; волна, в которой колебания вектора \mathbf{E} происходят в направлении, перпендикулярном главному сечению, называется *обыкновенной*, обыкновенной волне соответствует так называемый *обыкновенный луч*, обозначаемый буквой o .

Пусть в точке O внутри кристалла находится точечный источник естественного света, через точку O проходит оптическая ось кристалла — ось z , и при этом плоскость чертежа является одним из главных сечений (рис. 152). В любом выходящем из точки O луче естественного света колебания вектора \mathbf{E} происходят во всевозможных направлениях, перпендикулярных к лучу. Используя представление естественной световой волны, как суперпозиции волн, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, всякий выходящий из точки O световой луч можно рассматривать как совокупность двух совпадающих по направлению распространения лучей — обыкновенного, в котором колебания вектора \mathbf{E} происходят в направлении, перпендикулярном главному сечению кристалла (изображены точками на рис. 152), и необыкновенного, в котором вектор \mathbf{E} лежит в главном сечении кристалла

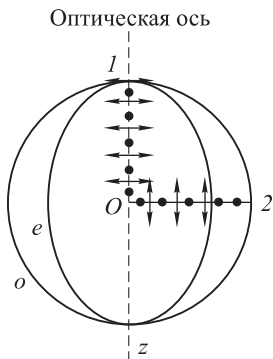


Рис. 152

(на рис. 152 направления колебаний вектора \mathbf{E} необыкновенных лучей изображены двусторонними стрелками).

Поскольку по определению в обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном главному сечению кристалла, то при любом направлении обыкновенного луча вектор \mathbf{E} образует с оптической осью прямой угол; скорость обыкновенной световой волны будет одинаковой для всех направлений ее распространения и равной $V_o = c/n_o$. Если изобразить скорости обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных из точки O по разным направлениям, геометрическое место концов этих отрезков образует сферическую поверхность. Следовательно, волновая поверхность порождаемых точечным источником света обыкновенных волн — сферическая.

Сечение сферической волновой поверхности плоскостью чертежа (см. рис. 152) — окружность, которая обозначена буквой *o*. Такая же как на рис. 152 картина для обыкновенных лучей наблюдается в любом главном сечении.

Колебания светового вектора в необыкновенном луче происходят в главном сечении кристалла. Для разных по направлению необыкновенных лучей направления колебаний вектора **Е** образуют с оптической осью разные углы. Так например, в идущем вдоль оптической оси необыкновенном луче, обозначенном *O1* на рис. 152, вектор **Е** перпендикулярен к оптической оси, поэтому скорость необыкновенной волны в указанном направлении совпадает со скоростью V_o обыкновенной волны. В перпендикулярном к оптической оси необыкновенном луче, обозначенном *O2* на том же рисунке, вектор **Е** оказывается параллельным оптической оси, поэтому скорость волны в указанном направлении равна $V_e = c/n_e$ и не совпадает со скоростью обыкновенной волны. В частности, для положительного кристалла $V_e < V_o$, что соответствует рис. 152. Для необыкновенных лучей других направлений, кроме *O1* и *O2*, фазовая скорость имеет промежуточные между V_o и V_e значения. Если изобразить скорость необыкновенного луча в виде отрезков, отложенных из точки *O* по разным направлениям, геометрическое место концов этих отрезков будет эллипсоидом вращения, ось которого совпадает с оптической осью кристалла. Следовательно, волновая поверхность порождаемых точечным источником света необыкновенных волн — эллипсоид. Сечение эллипсоида плоскостью чертежа (см. рис. 152) — эллипс, обозначенный буквой *e*. Такая же, как на рис. 152, картина для необыкновенных лучей наблюдается в любом главном сечении.

Поскольку скорости обыкновенного и необыкновенного лучей, распространяющихся из точки *O* вдоль оптической оси кристалла, одинаковы, в местах пересечения с оптической осью волновые поверхности необыкновенных и обыкновенных лучей — эллипсоид и сфера — соприкасаются.

Примеры двойного лучепреломления. Пример 1. Пусть на поверхность кристалла нормально падает естественная световая волна (рис. 153); оптическая ось кристалла лежит в плоскости чертежа, образуя угол с преломляющей поверхностью кристалла; таким образом, плоскость чертежа — это главное сечение кристалла. Падающий на кристалл естественный свет представим как совокупность волн, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: в одной волне световой вектор лежит в плоскости чертежа, так что внутри кристалла эта волна является необыкновенной и ей соответствуют необыкновенные лучи; в другой волне колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, так что внутри кристалла эта волна является обыкновенной, ей соответствуют обыкновенные лучи. Ход лучей в кристалле можно опреде-

лить с помощью принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка пространства, до которой дошло волновое движение (точка волнового фронта), служит центром вторичных волн; огибающая вторичных волн дает положение фронта волны в последующие моменты времени.

Рассмотрим две точки A и D совпадающего с преломляющей поверхностью кристалла волнового фронта падающей световой волны (рис. 153). Эти точки, как

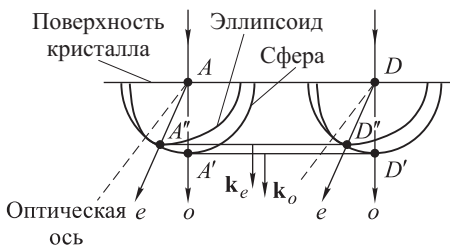


Рис. 153

и все другие точки волнового фронта, являются источниками вторичных волн в кристалле. Волновые поверхности обычных вторичных волн с центрами в точках A и D — сферические, их огибающая $A'D'$ представляет собой плоскость, параллельную поверхности кристалла. Вышедшие из точек A и D обыкновенные лучи, обозначаем буквой o , должны проходить соответственно через точки A' и D' касания указанной огибающей со сферической волновой поверхностью вторичных волн. Из чертежа следует, что преломленный обыкновенный луч перпендикулярен огибающей $A'D'$ и распространяется в направлении нормали к поверхности кристалла. Направление распространения обыкновенного луча o совпадает с перпендикулярным волновому фронту волновым вектором k_o преломленной обыкновенной волны.

Волновые поверхности вышедших из точек A и D необыкновенных вторичных волн — эллипсоиды вращения, оси которых являются оптическими осями кристалла. Огибающая эллипсоидов поверхность $A''D''$ представляет собой плоскость, параллельную поверхности кристалла. Вышедшие из точек A и D необыкновенные лучи e проходят через точки A'' и D'' касания указанной огибающей с волновой поверхностью соответствующих вторичных волн. Из рисунка видно, что преломленный необыкновенный луч отклоняется от нормали к поверхности кристалла. Направление распространения преломленного необыкновенного луча e не совпадает с волновым вектором k_e преломленной необыкновенной волны (вектор k_e перпендикулярен огибающей $A''D''$).

Напомним, что лучами называются линии, вдоль которых распространяется энергия световой волны. Как видно из рассмотренного примера с необыкновенным лучом, направление переноса энергии (направление необыкновенного луча) не обязательно совпадает с направлением волнового вектора k_e необыкновенной волны, который всегда перпендикулярен волновой поверхности.

Устраним кажущееся противоречие между явлением двойного лучепреломления и законом преломления света: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, где n_1 и n_2 — показатели преломления граничащих между собой сред, θ_1

и θ_2 — углы падения и преломления. Противоречие не возникает, если под θ_1 и θ_2 понимать углы между нормалью к поверхности раздела сред и волновыми векторами падающей и преломленной волн. При нормальном падении света на поверхность кристалла ($\theta_1 = 0$) волновые векторы преломленных волн, как обыкновенной \mathbf{k}_o , так и необыкновенной \mathbf{k}_e , остаются перпендикулярными преломляющей поверхности, то есть для обоих лучей — обыкновенного и необыкновенного — угол преломления необходимо считать равным нулю, $\theta_2 = 0$.

Пример 2. Пусть оптическая ось кристалла параллельна его преломляющей поверхности (рис. 154). На кристаллическую пластинку толщиной d , вырезанную параллельно оптической оси кристалла, нормально падает плоскополяризованная волна, которую можно

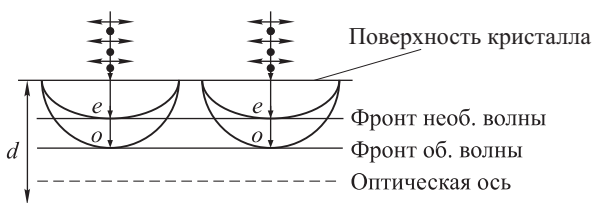


Рис. 154

представить как совокупность двух когерентных волн одинаковой фазы (синфазных), поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: направление колебаний светового вектора одной из волн лежит в плоскости чертежа (обозначено двусторонними стрелками) и принадлежит главному сечению кристалла, этой волне соответствует распространяющийся в кристалле необыкновенный луч; в другой волне направление колебаний светового вектора перпендикулярно плоскости чертежа (обозначено точками), второй волне соответствует распространяющийся в кристалле обыкновенный луч. Как видно из основанного на принципе Гюйгенса построения, обыкновенный и необыкновенный лучи идут по одному и тому же направлению, но распространяются с разной скоростью. Если в момент падения света на преломляющую поверхность кристалла поляризованные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях волны обладали одинаковой фазой, то при выходе из кристаллической пластинки между волнами, соответствующими необыкновенному и обыкновенному лучу, возникает разность фаз δ :

$$\delta = k(n_e - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d,$$

где d — пройденный волнами в кристалле путь (толщина кристаллической пластинки); n_e и n_o — показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей; $(n_e - n_o)d$ — оптическая разность хода необыкновенного и обыкновенного лучей; k — волновое число, λ_0 — длина волны в вакууме. В частности, если $\delta = \pi/2$, то на выходе из

кристалла получается эллиптически поляризованный свет; если $\delta = \pi$, то выходящий из кристалла свет остается плоскополяризованным, но положение плоскости поляризации изменяется, и т. д.

Вырезанная параллельно оптической оси кристалла пластинка, для которой выполняется условие:

$$\delta = 2m\pi + \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

или иначе:

$$(n_e - n_o)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4},$$

где d — толщина пластинки, λ_0 — длина световой волны в вакууме, m — целое число, называется *пластинкой в четверть волны*. С помощью такой пластинки, как уже упоминалось, из падающего на кристалл плоскополяризованного света получается эллиптически поляризованный свет.

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой выполняется условие:

$$\delta = 2m\pi + \pi,$$

или иначе:

$$(n_e - n_o)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2},$$

называется *пластинкой в полволны*. В результате прохождения плоскополяризованного света через пластинку в полволны свет остается плоскополяризованным, но положение плоскости поляризации изменяется.

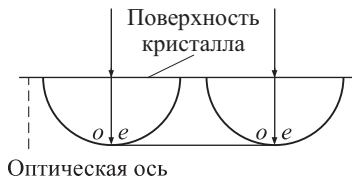


Рис. 155

Пример 3. Если оптическая ось кристалла перпендикулярна его поверхности, то при нормальном падении естественного или поляризованного света на преломляющую поверхность кристалла обыкновенный и необыкновенный лучи идут по одному

и тому же направлению с одинаковой скоростью, не разделяясь (рис. 155).

§ 43. Вращение плоскости поляризации

Если плоскополяризованный свет проходит через плоскопараллельный слой вещества, то в некоторых случаях плоскость поляризации света оказывается повернутой относительно своего исходного положения. Это явление называется *вращением плоскости поляризации* или *оптической активностью*. Если вещество при этом не находится во внешнем магнитном поле, то оптическая активность и вращение плоскости поляризации называются *естественными*. В противном случае говорят о *магнитном вращении плоскости поляризации* или *эффекте Фарадея*.

В опытах по вращению плоскости поляризации свет может распространяться, в частности, вдоль оптической оси одноосных кристаллов, когда кристалл ведет себя как изотропное тело, не давая эффекта двойного лучепреломления.

К числу оптически активных веществ принадлежат кристаллические тела (кварц), чистые жидкости (скипидар, никотин), растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водный раствор сахара).

Экспериментально установлено, что угол φ поворота плоскости поляризации пропорционален пути l , пройденному лучом в кристалле:

$$\varphi = \alpha l,$$

где коэффициент α называется *постоянной вращения*.

В растворах угол φ поворота плоскости поляризации пропорционален пути l света в растворе и концентрации активного вещества c :

$$\varphi = \alpha_{\text{уд}} cl,$$

где $\alpha_{\text{уд}}$ — *удельная постоянная вращения*.

Если луч, прошедший через оптически активный кристалл вдоль оптической оси, отразить зеркалом и заставить пройти через кристалл еще раз в обратном направлении, восстанавливается первоначальное положение плоскости поляризации.

Оптически неактивные вещества приобретают способность вращать плоскость поляризации под действием магнитного поля (*эффект Фарадея*). Эффект наблюдается только при распространении света вдоль направления намагниченности (вдоль направления магнитного поля). Угол φ поворота плоскости поляризации пропорционален пути l , пройденному светом в веществе, и напряженности магнитного поля H :

$$\varphi = V l H,$$

где коэффициент V называется *постоянной Верде*.

Если, отразив луч зеркалом, заставить его пройти через намагниченное вещество еще раз в обратном направлении, величина поворота плоскости поляризации удвоится.

Постоянная вращения α и постоянная Верде V зависят от длины волны света (дисперсия вращения).

Задачи

7.1. При падении естественного света на некоторый поляризатор проходит $\eta_1 = 30\%$ светового потока, а через два таких поляризатора — $\eta_2 = 13,5\%$. Найти угол φ между плоскостями пропускания этих поляризаторов.

7.2. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,25$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

7.3. На пути частично поляризованного света поместили поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\varphi = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3,0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

7.4. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла. Определить с помощью формул Френеля: а) коэффициент отражения; б) степень поляризации преломленного света.

7.5. Требуется изготовить параллельную оптической оси кварцевую пластинку, толщина которой не превышала бы 0,50 мм. Найти максимальную тощину этой пластинки, при которой линейно поляризованный свет с $\lambda = 589$ нм после прохождения ее:

- а) испытывает лишь поворот плоскости поляризации;
- б) станет поляризованным по кругу.

7.6. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, имеет толщину 0,25 мм и служит пластинкой в четверть волны для $\lambda = 0,53$ мкм. Для каких еще длин волн в области видимого спектра она будет также пластинкой в четверть волны? Считать, что для всех длин волн видимого спектра разность показателей преломления $n_e - n_o = 0,0090$.

7.7. Естественный монохроматический свет падает на систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Найти минимальную толщину пластинки, при которой эта система будет пропускать $\eta = 0,3$ светового потока, если постоянная вращения кварца $\alpha = 17$ угл. град./мм.

7.8. Некоторое вещество поместили в продольное магнитное поле соленоида, расположенного между двумя поляризаторами. Длина трубки с веществом $l = 30$ см. Найти постоянную Верде — коэффициент пропорциональности между углом вращения плоскости поляризации и произведением напряженности магнитного поля H и длины пути l светового луча, если при напряженности поля $H = 56,5$ кА/м угол поворота плоскости поляризации $\varphi_1 = +5^\circ 10'$ для одного направления поля и $\varphi_2 = -3^\circ 20'$ для противоположного направления поля.

ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

§ 44. Дисперсия света. Групповая скорость

Дисперсией света называются явления, в основе которых лежит зависимость абсолютного показателя преломления среды от длины световой волны (или от частоты).

Дисперсией вещества называется величина:

$$\frac{dn}{d\lambda_0},$$

где n — абсолютный показатель преломления вещества, λ_0 — длина световой волны в вакууме.

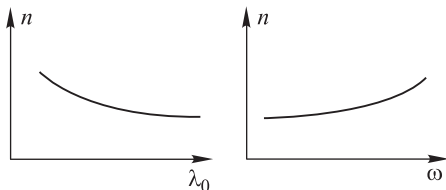


Рис. 156

Дисперсия называется *нормальной*, если $dn/d\lambda_0 < 0$, то есть функция $n(\lambda_0)$ является убывающей, а функция $n(\omega)$ — возрастающей (рис. 156). *Аномальная дисперсия* наблюдается, если $dn/d\lambda_0 > 0$, то есть функция $n(\lambda_0)$ — возрастающая, а функция $n(\omega)$ — убывающая (рис. 157, участок 1–2 графиков).

Нормальная дисперсия имеет место для прозрачных веществ. Если вещество окрашено и поглощает свет с длинами волн

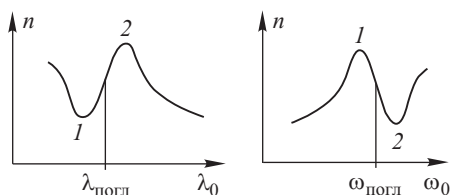


Рис. 157

вблизи $\lambda_{\text{погл}}$ и частотами вблизи $\omega_{\text{погл}}$ (так называемая *область поглощения*), то в этой области дисперсия является аномальной. Графики зависимости $n(\lambda_0)$ или $n(\omega)$, подобные представленным на рис. 157, характерны, например, для окрашенного в ярко-синий цвет красителя циани-

на, который характеризуется аномальной дисперсией в области длин волн от 520 до 640 нм (область поглощения).

Приведем два примера дисперсионных явлений.

Пример 1. *Разложение белого света в спектр с помощью стеклянной призмы.* Если через призму пропускать пучок параллельных лучей белого света, то после преломления он раскладывается в спектр, а именно: соответствующие разным длинам волн лучи отклоняются от первоначального направления распространения на разные

углы (рис. 158). Прозрачное стекло, из которого изготовлена призма, является практически не поглощающим свет материалом, который характеризуется нормальной дисперсией: чем больше длина волны, тем

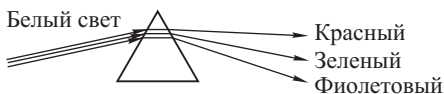


Рис. 158

меньше показатель преломления, и тем меньше отклонение преломленного луча. Наименьшее отклонение испытывают лучи красного света, наибольшее — фиолетового.

Пример 2. Распространение волновых пакетов в пространстве.

Волновым пакетом или иначе *группой волн* называется электромагнитная волна, которая имеет ограниченную длительность во времени τ и ограниченную пространственную протяженность Δx . Под длительностью τ имеется в виду время, в течение которого происходит излучение волны источником света, а под протяженностью Δx — расстояние, проходимое волной за время τ .

Рассмотрим волну, которая распространяется вдоль координатной оси x . Обозначим через $E(x, t)$ колебание светового вектора в волне. Зависимость $E(x, t)$ светового вектора от координаты x и от времени t будем называть уравнением волнового пакета. Примерный вид графиков зависимости $E(x, t)$ от координаты и времени показан на рис. 159.

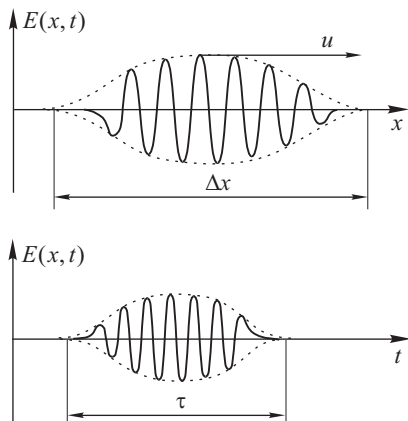


Рис. 159

Волновой пакет обладает следующими свойствами.

1. Уравнение волнового пакета можно представить в виде суперпозиции (интеграла) близких между собой по частоте гармонических волн $A(\omega) \cos(\omega t - kx + \alpha)$, а именно:

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A(\omega) \cos(\omega t - kx + \alpha) d\omega, \quad (44.1)$$

где ω — частота, $A(\omega)$ — амплитуда, $k(\omega)$ — волновое число, $\alpha(\omega)$ — начальная фаза соответствующей гармонической составляющей; ω_0 — так называемая *средняя частота* волнового пакета, то есть частота гармонической составляющей, которая имеет наибольшую амплитуду;

$\Delta\omega$ — частотный интервал, которому в основном принадлежат частоты гармонических волн, составляющих волновой пакет.

Возможность представления волнового пакета в виде (44.1) основана на теореме Фурье (см. § 27).

Как следует из теоремы Фурье, интервал частот $\Delta\omega$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta\omega \cdot \tau \approx 2\pi, \quad (44.2)$$

где τ — длительность пакета.

Необходимое условие существования волнового пакета состоит в том, что все составляющие его гармонические волны должны мало отличаться друг от друга по частоте. Количественно это требование можно записать в виде неравенства

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \quad (44.3)$$

то есть интервал частот $\Delta\omega$ составляющих пакет гармонических волн много меньше его средней частоты ω_0 .

Из (44.2) и (44.3) с учетом соотношения $\omega_0 = 2\pi/T$, где T — период колебаний электромагнитного поля в волне, получим

$$\frac{2\pi}{\tau} \ll \frac{2\pi}{T}, \quad \tau \gg T. \quad (44.4)$$

Условие (44.4) означает, что длительность пакета τ должна быть много больше периода колебаний электромагнитного поля.

2. *Групповой скоростью* называется скорость перемещения волнового пакета в пространстве. В качестве групповой скорости, которую обозначим через u , принимается скорость движения центральной точки пакета, которой соответствует наибольшая амплитуда светового вектора (рис. 159).

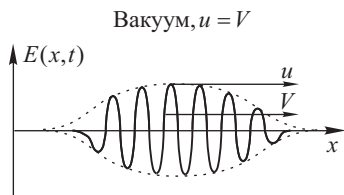
Во время перемещения волнового пакета в пространстве изменяется его форма, в частности, увеличивается протяженность Δx . В этом случае принято говорить, что пакет расплывается. Только при условии близости друг к другу гармонических составляющих пакета по частоте (см. (44.3)) расплывание происходит достаточно медленно, так что понятия «волновой пакет» и «групповая скорость» имеют реальное содержание.

3. Если электромагнитная волна в виде волнового пакета распространяется в вакууме или в среде, абсолютный показатель преломления n которой не зависит от длины световой волны (такая среда называется *недиспергирующей*), то фазовые скорости всех гармонических составляющих пакета одинаковы. В этих условиях групповая скорость пакета равна фазовой:

$$u = V.$$

При движении волнового пакета в среде, абсолютный показатель преломления которой n зависит от длины световой волны в вакууме

или частоты ω (*диспергирующая среда*), групповая скорость пакета u и фазовые скорости его гармонических составляющих не равны друг другу (рис. 160):



$$u \neq V.$$

Диспергирующая среда: $n = n(\lambda)$, $u \neq V$

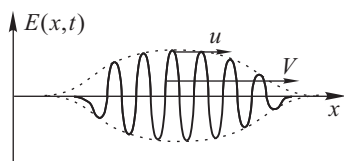


Рис. 160

Само по себе отличие групповой скорости от фазовой — дисперсионное явление. Для выяснения его причин необходимо подробнее рассмотреть понятие групповой скорости.

Групповая скорость. В качестве простейшей модели волнового пакета рассмотрим суперпозицию двух гармонических волн одинаковой амплитуды и мало отличающихся друг от друга по частоте ω и волновому числу k . Колебания световых векторов E_1 и E_2 этих волн представим в виде

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$E_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

где $\Delta\omega$ — разность частот, Δk — разность волновых чисел рассматриваемых волн. Будем полагать выполненными условия: $\Delta\omega \ll \omega$, $\Delta k \ll k$.

Колебание светового вектора E результирующей волны:

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= A \cos(\omega t - kx + \alpha) + A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x + \alpha] = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos\left(\omega t - kx + \frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \approx \\ &\approx 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (44.5)$$

Поскольку $\omega \gg \Delta\omega$ и $k \gg \Delta k$, результирующее колебание (44.5) можно рассматривать как гармоническую волну с быстро меняющейся фазой $(\omega t - kx)$ и медленно меняющейся с течением времени t и при изменении координаты x амплитудой $A_{\text{рез}}$:

$$A_{\text{рез}} = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right|. \quad (44.6)$$

График зависимости (44.5) от координаты x показан на рис. 161.

Волна (44.5) не удовлетворяет данному выше определению волнового пакета, поскольку имеет бесконечную длительность и бесконечную протяженность в пространстве. Однако рассматривая эту волну

в качестве модели, которая все же обладает некоторыми свойствами волнового пакета, можно уяснить смысл понятия групповой скорости.

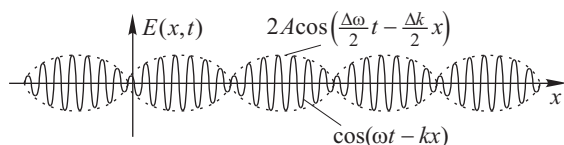


Рис. 161

Из определения групповой скорости вытекает, что это скорость перемещения в пространстве точки волнового пакета, которая характеризуется постоянной (максимальной) амплитудой светового вектора. Как следует из (44.5), в рассматриваемой модели скорости перемещения в пространстве всех точек результирующей волны с фиксированным значением амплитуды колебаний светового вектора одинаковы (независимо от того, является ли амплитуда в этой точке максимальной или нет).

Условие постоянства амплитуды $A_{\text{рез}}$ в некоторой точке световой волны (44.5), которая в момент времени t находится в точке пространства с координатой x , имеет вид

$$2A \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x \right) = \text{const},$$

что равносильно условию:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = \text{const}. \quad (44.7)$$

Как следует из (44.7), скорость перемещения в пространстве некоторой точки волны (44.5) с постоянной амплитудой светового вектора $A_{\text{рез}}$, то есть — групповая скорость волнового пакета, равна

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (44.8)$$

Таким образом, из рассмотрения простейшей модели — суперпозиции двух гармонических волн с близкими друг другу частотами и волновыми числами — следует, что групповая скорость u равна отношению приращения частоты $\Delta\omega$ к приращению волнового числа Δk (44.8). Можно показать, что в общем случае произвольного волнового пакета групповая скорость равна производной:

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (44.9)$$

Фазовая скорость гармонической волны равна отношению:

$$V = \frac{\omega}{k}. \quad (44.10)$$

Получим выражение для групповой скорости в другой, по сравнению с (44.9), форме. Для этого воспользуемся формулой (44.9) и соотношением $\omega = kV$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d(kV)}{dk} = V + k \frac{dV}{dk} = V + k \frac{dV}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = \\ &= V + k \frac{dV}{d\lambda} \frac{d(2\pi/k)}{dk} = V - \frac{2\pi}{k} \frac{dV}{d\lambda} = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$u = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \quad (44.11)$$

Здесь λ — длина световой волны в среде, где движется волновой пакет.

В среде с нормальной дисперсией с увеличением длины волны λ показатель преломления n уменьшается, а фазовая скорость волны V ($V = c/n$) увеличивается, так что $dV/d\lambda > 0$, и, согласно (44.11), групповая скорость u меньше фазовой скорости V . Если дисперсия среды аномальная, то есть $dn/d\lambda > 0$, то с увеличением длины волны λ показатель преломления n увеличивается, а фазовая скорость волны V ($V = c/n$) уменьшается, так что $dV/d\lambda < 0$, и групповая скорость u превышает фазовую V (см. (44.11)).

Существенное отличие фазовой скорости от групповой состоит в следующем. Поскольку волновой пакет представляет собой форму существования электромагнитного поля, особенностью которой является его ограниченная пространственная протяженность, то скорость перемещения в пространстве волнового пакета — групповая скорость u — это по существу скорость переноса энергии электромагнитного поля. Фазовая скорость V , согласно определению, равна скорости перемещения в пространстве поверхности, во всех точках которой фаза электромагнитной волны имеет фиксированное значение. Фазовая скорость, в отличие от групповой, характеризует движение не реально существующего физического объекта, а геометрического образа — поверхности постоянной фазы.

Для наглядного представления о групповой и фазовой скорости полезно иметь ввиду следующую аналогию. Представим себе, что растянувшись вдоль дороги, движется колонна солдат (волновой пакет). Замыкающий колонну солдат покидает строй и, опережая всех остальных, занимает место впереди колонны, далее продолжая движение вместе со всеми. После этого другой солдат, который теперь оказался замыкающим, также покидает строй и, обогнав колонну, пристраивается к ней спереди. Перестроение по описанной схеме многократно повторяется. В этом случае скорость движения колонны в целом (групповая скорость) оказывается больше скорости движения каждого отдельно взятого солдата в строю (фазовой скорости).

§ 45. Элементарная теория дисперсии

Цель данного параграфа состоит в том, чтобы с помощью простой модели взаимодействия света с веществом объяснить зависимость показателя преломления n среды от длины световой волны λ (в настоящем параграфе λ — длина световой волны в вакууме). Согласно представлениям классической физики движущаяся ускоренно заряженная частица должна излучать электромагнитную волну. Воспользуемся представлениями о том, что в веществе имеются связанные заряженные частицы (атомные ядра, ионы, электроны), на которые при их смещении из положений равновесия действует квазиупругая сила: это сила существующего в веществе электрического поля, которое представляет собой суперпозицию полей всех заряженных частиц. Будучи выведенными из положения равновесия, частицы совершают свободные колебания под действием квазиупругой силы, постепенно теряя энергию на излучение электромагнитных волн.

Если в веществе распространяется световая волна, заряженные частицы совершают колебания около своих положений равновесия под действием сил электромагнитного поля волны (вынужденные колебания). Поскольку масса атомного ядра в тысячи раз превышает массу электрона, смещением ядер под действием сил поля волны можно пренебречь по сравнению со смещением электронов и считать ядра неподвижными.

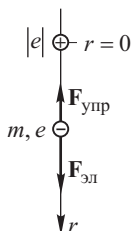
Действующая на электрон со стороны электромагнитного поля световой волны сила имеет две составляющие — электрическую $F_{\text{эл}} = |e|E$ и магнитную $F_{\text{магн}} = |e|V_{\text{эл}}B = |e|V_{\text{эл}}\mu_0 H$ (здесь $|e|$ — модуль заряда электрона, B — магнитная индукция, E и H — напряженность электрического и магнитного поля волны соответственно, $V_{\text{эл}}$ — скорость электрона). С учетом связи между E и H в электромагнитной волне (см. (15.1)), отношение модулей электрической и магнитной сил равно:

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{V_{\text{эл}}\mu_0 H}{E} = V_{\text{эл}}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{V_{\text{эл}}}{c},$$

где c — скорость света в вакууме. Из полученного соотношения видно, что если скорость электрона $V_{\text{эл}}$ мала по сравнению со скоростью света c , магнитной составляющей силы можно пренебречь по сравнению с электрической. Оценим среднюю скорость электрона, который совершает колебания под действием сил поля световой волны. Если электрон смещается на расстояние порядка размера атома l ($l \sim 10^{-10}$ м) за время одного периода колебаний поля световой волны T ($T = 1/\nu \sim \sim 10^{-15}$ с), то средняя скорость электрона равна $V_{\text{эл}} = l/T \sim 10^5$ м/с, что много меньше скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Таким образом, в дальнейших выкладках магнитную составляющую $F_{\text{магн}}$ силы поля световой волны учитывать не будем.

Совершая вынужденные колебания под действием сил поля световой волны, электрон сам должен служить источником электромагнит-

ных волн (вторичных волн), затрачивая на излучение свою энергию. Потери энергии на излучение вторичных волн можно учесть, вычислив работу действующей на электрон в процессе колебаний силы «трения». Однако чтобы упростить дальнейшие вычисления, действием силы трения будем пренебрегать.



С учетом сделанных предположений модель взаимодействия света с веществом сводится к следующему (рис. 162). На выведенный из положения равновесия электрон действуют силы:

1) квазиупругая сила, проекция которой на направление движения равна:

$$F_{\text{упр}} = -\gamma r,$$

Рис. 162

где r — координата электрона вдоль направления движения, которая характеризует его смещение из положения равновесия (координата r — алгебраическая величина, в положении равновесия $r = 0$), γ — коэффициент пропорциональности между силой и смещением r («коэффициент жесткости»);

2) сила электрического поля волны:

$$F_{\text{эл}} = eE = eE_m \cos(\omega t + \alpha),$$

где e — заряд электрона (e — отрицательная величина), $E = E_m \cos(\omega t + \alpha)$ — проекция светового вектора волны на направление колебаний электрона, ω — циклическая частота, α — начальная фаза.

Уравнение движения электрона под действием указанных сил имеет вид:

$$m\ddot{r} = -\gamma r + eE_m \cos(\omega t + \alpha),$$

или

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{eE_m}{m} \cos(\omega t + \alpha). \quad (45.1)$$

Здесь m — масса электрона, $\omega_0 = \sqrt{\gamma/m}$ — собственная частота колебаний.

Уравнение (45.1) представляет собой частный случай уравнения вынужденных колебаний $\ddot{r} + 2\beta\dot{r} + \omega_0^2 r = (eE_m/m) \cos(\omega t + \alpha)$, в котором коэффициент затухания β положен равным нулю. Запишем решение уравнения вынужденных колебаний (45.1) сначала в общем виде:

$$r = \frac{eE_m}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha - \psi). \quad (45.2)$$

Здесь ψ — разность фаз колебания силы поля световой волны $F_{\text{эл}}$ и колебания смещения r электрона:

$$\text{tg } \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (45.3)$$

Учтем, что при $\beta = 0$ имеет место равенство $\operatorname{tg} \psi = 0$, при этом возможны два случая: $\psi = 0$ или $\psi = \pi$.

Если собственная частота колебаний электрона ω_0 превышает частоту световой волны ω , то как следует из равенства (45.3) разность фаз $\psi = 0$. Действительно, поскольку в природе не существует идеальных колебательных систем с нулевым затуханием (систем, для которых выполняется строгое равенство $\beta = 0$), то для величин, входящих в соотношение (45.3), имеем: $\beta \approx 0$, $\beta > 0$, $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$, отсюда $\operatorname{tg} \psi \approx 0$, $\operatorname{tg} \psi > 0$ и $\psi \approx 0$. Итак, при $\omega_0 > \omega$ полагаем $\psi = 0$, так что решение (45.2) имеет вид

$$r = \frac{eE_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \alpha). \quad (45.4)$$

Аналогично устанавливается, что при условии $\omega_0 < \omega$ имеет место: $\operatorname{tg} \psi \approx 0$, $\operatorname{tg} \psi < 0$, $\psi = \pi$, так что решение уравнения вынужденных колебаний представляется в виде

$$r = -\frac{eE_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(\omega t + \alpha - \pi) = \frac{eE_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(\omega t + \alpha). \quad (45.5)$$

Из сравнения (45.4) и (45.5) следует, что при любом соотношении между ω_0 и ω зависимость от времени смещения электрона r из положения равновесия определяется единым выражением:

$$r = \frac{eE_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (45.6)$$

Вещество в целом является электрически нейтральным, суммарный заряд всех частиц равен нулю. Можно считать, в частности, что движение отрицательно заряженного электрона происходит вблизи неподвижного (см. выше) положительно заряженного атомного ядра с зарядом $|e|$ (рис. 162); положения равновесия этих заряженных частиц совпадают друг с другом и с началом координат (точка $r = 0$). Тогда дипольный момент рассматриваемой системы из двух частиц — совершающего колебания электрона и покоящегося ядра — равен:

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный к электрону из начала координат. Проекция вектора дипольного момента \mathbf{p} на направление движения электрона с учетом (45.6) равна

$$p = er = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (45.7)$$

Пусть каждый атом вещества представляет собой простейшую систему из двух частиц — положительного ядра и отрицательного электрона. Обозначим через N число атомов в единице объема вещества. Дипольный момент единицы объема вещества (или иначе поляризо-

ванность P) равен произведению дипольного момента p одного атома (45.7) на число атомов N в единице объема:

$$P = Np = \frac{Ne^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (45.8)$$

Поляризованность P связана с напряженностью электрического поля E в веществе соотношением:

$$P = \varepsilon_0 \kappa E, \quad (45.9)$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость (см. в кн. 3 «Электромагнетизм», § 16, формула (16.3)).

Диэлектрическая проницаемость вещества с учетом выраженной из (45.9) величины κ равна

$$\varepsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}. \quad (45.10)$$

Абсолютный показатель преломления n среды связан с диэлектрической проницаемостью соотношением: $n = \sqrt{\varepsilon}$ (см. начало § 19). Отсюда с учетом (45.10):

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}. \quad (45.11)$$

Подставив в (45.11) поляризованность P из (45.8), получим

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

или после извлечения корня

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}. \quad (45.12)$$

Равенство (45.12) устанавливает зависимость абсолютного показателя преломления среды n от частоты ω распространяющейся в этой среде световой волны.

Несмотря на то, что при выводе (45.12) была использована крайне простая модель взаимодействия света с веществом, это соотношение верно описывает наблюдаемую в опыте нормальную дисперсию вещества. Как видим из (45.12), с увеличением частоты ω световой волны абсолютный показатель преломления n возрастает (рис. 163 а).

Если в рассматриваемой модели взаимодействия света с веществом учесть потери энергии колеблющегося электрона на излучение вторичных электромагнитных волн (учет этого фактора предполагает, что при записи уравнения вынужденных колебаний электрона необходимо коэффициент затухания β считать отличным от нуля, см. (45.1) и нижеследующий текст), а также потери энергии световой волны на возбуждение колебаний атомов в целом, а не только электронов, можно найти зависимость $n(\omega)$, которая отражает и аномальную дисперсию

вещества. В этом случае график зависимости $n(\omega)$ выглядит так, как показано на рис. 163 б.

Если частота ω световой волны близка к собственной частоте колебаний ω_0 электронов вещества, то амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения. В частности, в рассматриваемой модели без учета затухания ($\beta = 0$) амплитуда стремится к бесконечности (см. (45.6)). Это явление в теории колебаний называется резонансом, и соответствует сильному поглощению света веществом. В области сильного поглощения при $\omega \approx \omega_0$ дисперсия вещества отрицательная (аномальная): $dn/d\omega < 0$ (см. рис. 163 б).

Как следует из формулы (45.12) (см. также рис. 163), при $\omega > \omega_0$ показатель преломления n становится меньше единицы. В этих условиях фазовая скорость световой волны $V = c/n$ превышает скорость

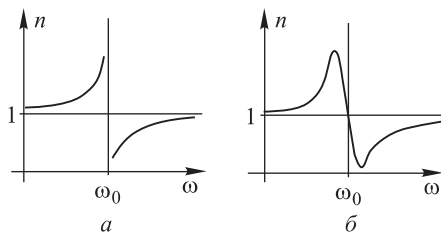


Рис. 163

света в вакууме c , которая является наибольшей возможной скоростью движения материальных объектов. В этом нет противоречия.

Как отмечалось выше, реальным физическим смыслом обладает не фазовая, а групповая скорость (скорость переноса энергии световой волны), которая никогда не превышает величину c .

Действительно, в области частот $\omega > \omega_0$, которым соответствует показатель преломления $n < 1$, то есть фазовая скорость $V = c/n > c$, и дисперсия при этом является нормальной, $dn/d\omega > 0$ (см. рис. 163 б), групповая скорость u должна быть меньше фазовой V (см. (44.11) и нижеследующий текст). В этом случае групповая скорость вполне может быть меньше скорости света в вакууме c , по крайней мере, это предположение не противоречит рассматриваемой теоретической модели.

Область частот $\omega > \omega_0$, которым соответствуют показатель преломления $n < 1$, фазовая скорость $V = c/n > c$, но при этом дисперсия аномальная, $dn/d\omega < 0$, представляет собой область сильного поглощения света веществом (см. рис. 163 б). При аномальной дисперсии, согласно (44.11), групповая скорость u должна превышать фазовую V . Но поскольку в условиях сильного поглощения волновой пакет быстро распадается, понятие групповой скорости теряет смысл, пользоваться им нельзя. В этом случае бессмысленными становятся и попытки сравнивать групповую скорость u со скоростью света в вакууме c .

§ 46. Поглощение и рассеяние света

При прохождении световой волны через вещество энергия волны затрачивается на поддержание вынужденных колебаний электронов.

Энергия колебаний частично переходит в энергию движения атомов в целом, то есть во внутреннюю энергию вещества, а частично вновь возвращается излучению в виде вторичных волн, порождаемых движущимися ускоренно электронами.

Поглощение света представляет собой процесс перехода энергии световой волны во внутреннюю энергию вещества.

Интенсивность света при прохождении через вещество убывает по экспоненциальному закону, который называется *законом Бугера* (1698–1758):

$$I = I_0 e^{-\kappa l}. \quad (46.1)$$

Здесь I_0 — интенсивность света на входе в поглощающий слой вещества; l — толщина этого слоя; κ — постоянная, зависящая от свойств поглощающего вещества и называемая *коэффициентом поглощения*. Закон Бугера (45.13) был установлен опытным путем.

Рассеянием света называется равномерное перераспределение интенсивности световой волны по всем направлениям в пространстве в результате ее взаимодействия с веществом. Механизм рассеяния состоит в следующем.

Под действием проходящего через вещество света электроны в атомах совершают вынужденные колебания. Колеблющиеся заряженные частицы порождают распространяющиеся по всем направлениям вторичные волны той же частоты, что и исходная световая волна. Вторичные волны когерентны, поэтому необходимо учитывать их интерференцию.

Если среда, в которой распространяется свет, является оптически однородной, вторичные волны полностью гасят друг друга по всем направлениям, кроме направления распространения первичной волны. При этом перераспределения света по различным направлениям — рассеяния света — не происходит. Если среда неоднородна, например, содержит микроскопические частицы пыли, дыма, мельчайшие капли жидкости и т. д., то излучаемые колеблющимися электронами вторичные волны создают дифракционную картину от неоднородностей среды с довольно равномерным распределением интенсивности света по всем направлениям. Таким образом, механизм рассеяния света — это дифракция вторичных волн на мельчайших неоднородностях среды.

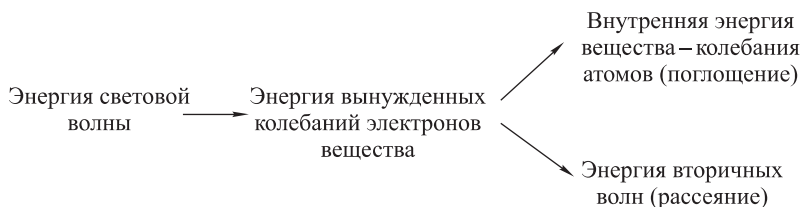


Рис. 164

На рис. 164 в виде схемы представлен процесс превращений энергии световой волны при ее взаимодействии с веществом.

Следствием рассеяния света является, в частности, голубой цвет неба в дневное время суток. Рассеянный свет — это вторичные волны, излучаемые колеблющимися под действием солнечной световой волны электронами. Солнечный свет является белым, в нем присутствует излучение всех длин волн видимого диапазона, причем максимум интенсивности приходится на зеленый цвет. Однако мощность дипольного излучения, то есть вторичных волн, испускаемых колеблющимися электронами, пропорциональна четвертой степени частоты колебаний (см. § 18). В соответствии с этим максимум интенсивности в спектре рассеянного солнечного света смещен в область высоких частот, в рассеянном солнечном свете преобладает голубой свет.

Задачи

8.1. Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0 . Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы, найти зависимость:

- а) диэлектрической проницаемости плазмы от частоты;
- б) фазовой скорости от длины волны λ в плазме.

8.2. В ряде случаев диэлектрическая проницаемость вещества оказывается величиной комплексной или отрицательной и показатель преломления — соответственно комплексным ($n' = n + i\kappa$) или чисто мнимым ($n' = i\kappa$). Написать для этих случаев уравнение плоской волны и выяснить физический смысл таких показателей преломления.

8.3. Найти зависимость между групповой u и фазовой V скоростями для следующих законов дисперсии:

- а) $V \propto 1/\sqrt{\lambda}$; б) $V \propto k$; в) $V \propto 1/\omega^2$.

Здесь λ , k и ω — длина волны, волновое число и циклическая частота.

8.4. В некоторой среде связь между групповой и фазовой скоростями электромагнитной волны имеет вид: $uV = c^2$, где c — скорость света в вакууме. Найти зависимость диэлектрической проницаемости этой среды от частоты волны.

8.5. Пучок естественного света интенсивности I_0 падает на систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми находится трубка с некоторым оптически неактивным раствором в продольном магнитном поле напряженности H . Длина трубки l , линейный показатель поглощения раствора κ , постоянная Верде (коэффициент пропорциональности между углом вращения плоскости поляризации и произведением напряженности магнитного поля H и длины l пути светового луча) равна V . Пренебрегая отражениями, найти интенсивность света, прошедшего через эту систему.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1.1. $U^2 + \frac{LI^2}{C} = U_m^2.$

1.2. $A = (\eta^2 - 1)W.$

1.3. $U = (1 \pm \cos \omega t) \frac{U_0}{2},$ где знак плюс для левого конденсатора, знак минус для правого; $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}.$

1.4. $I = \frac{\Phi}{L} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}.$

1.5. $x = (1 - \cos \omega t) \frac{g}{\omega^2},$ где $\omega = \frac{lB}{\sqrt{mL}}.$

1.6. Частота увеличится в $\sqrt{2}$ раз, амплитуда колебаний и энергия возрастут вдвое.

1.7. $U = E \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right],$ где $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}$ и $\delta = \frac{R}{2L};$ минимальное напряжение, на которое должен быть рассчитан конденсатор, не меньше $2E.$

1.8. $\omega_0 = 2n/\tau = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} (\approx 320 \text{ Гц}).$

1.9. $Q = \frac{U_m^2}{2 \langle P \rangle} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1,0 \cdot 10^2.$

1.10. а) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}};$ б) $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}.$

1.11. $I_2 = I_1/n.$

1.12. $t = \sqrt{LC} = 10^{-4} \text{ с};$ $I_{\max} = I_{\max} = \frac{E}{e} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,37 \text{ А},$ где e — основание натурального логарифма.

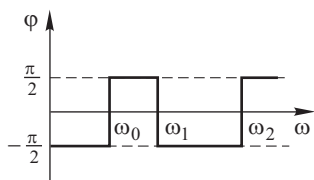
1.13. $\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}},$ где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \beta = \frac{R}{2L}.$

1.14. $Q = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$

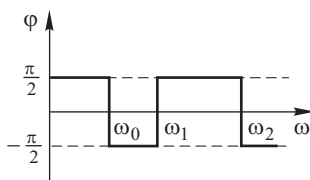
1.15. $Q = \sqrt{\frac{\eta^2 - 1}{(n-1)^2} - \frac{1}{4}}.$

1.16. Резонансу напряжений соответствует частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$ Резонансу токов соответствуют частоты $\omega_1 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{LC}}.$

У к а з а н и е: резонансу токов соответствует импеданс цепи $Z = \infty$, резонансу напряжений — $Z = 0$. Фазовая характеристика изображена на рисунке к задаче.



К задаче 1.16



К задаче 1.17

1.17. Импеданс цепи:

$$\bar{Z} = i \left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{2\omega C} + \frac{1}{1/(\omega L) - \omega C} \right).$$

Резонанс токов соответствует величине $Z = \infty$. Он произойдет на частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонанс напряжений соответствует величине $Z = 0$. Он произойдет на частотах $\omega_1 \approx \frac{0,52}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{1,93}{\sqrt{LC}}$. Фазовая характеристика изображена на рисунке к задаче.

1.18. 1) нуль; 2) ток отстает на $\pi/2$; 3) сдвиг фазы $\varphi = \arctg \frac{\omega(L + CrR)}{r + R(1 - \omega^2 CL)}$, напряжение на сопротивлении опережает напряжение на входе цепи.

2.1. $\Delta\varphi = \mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\omega}{V} |(x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \cos \beta + (z_1 - z_2) \cos \gamma|$.

2.2. $\mathbf{k} = \omega(\mathbf{u}/V_1 + \gamma/V_2 + \varkappa/V_3)$.

2.4. См. рис. к задаче 2.4.

2.5. $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V - V_2}{V - V_1}$.

3.1. $\frac{j}{j_{\text{см}}} = \frac{\lambda}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0} = 2$.

3.2. а) $\langle j_{\text{см}} \rangle = 4\varepsilon_0\nu E_m = 0,18 \text{ МА/М}^2$;

б) $\langle S \rangle = \varepsilon_0 c E_m^2 / 2 = 3,3 \text{ мкВт/М}^2$.

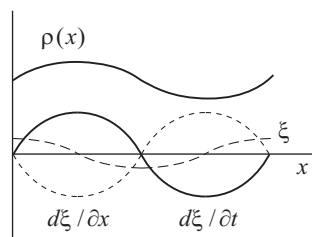
3.3. $j_{\text{см макс}} = \omega \sqrt{2\langle S \rangle \varepsilon_0 / c}$.

3.4. $\langle S \rangle = \sqrt{2} \varepsilon_0 c E_0^2$.

3.5. $S_x = \frac{\varepsilon_0 c E_m^2}{2} \sin 2ks \cdot \sin 2\omega t$; $\langle S_{xi} \rangle = 0$.

3.6. $P = \frac{2}{3c^3} \frac{(qe^2/mR^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^3}$.

3.7. $T = T_0 e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{e^4 B^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^3}$. Через $t_0 = 1/\alpha = 2,5 \text{ с}$ для электрона и $1,6 \cdot 10^{10} \text{ с} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ лет}$ для протона.



К задаче 2.4

$$3.8. \langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 E_m^2 \sin^2 \theta = 3 \text{ мВт/м}^2.$$

$$3.9. \langle P \rangle = (8\pi/3)r^2 S_0.$$

$$4.1. \langle E \rangle = E_0/2.$$

$$4.2. \text{ а) } \Phi = \pi L \Delta S \sin^2 \theta; \text{ б) } M = \pi L.$$

$$4.3. I = I_0 / \cos^3 \theta, \Phi = \pi I_0 R^2 / h^2 = 3 \cdot 10^8 \text{ лм}.$$

$$4.4. E = \pi L.$$

$$4.5. \text{ а) } \Gamma = 1 - d \frac{n-1}{nR} = -0,20; \text{ б) } E = \frac{\pi n^2}{4d^2} D^2 L = 42 \text{ лк}.$$

$$5.1. \cos \theta = (m - \alpha/2\pi)/d, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

5.2. а) ширина полос уменьшится в $\frac{a}{a-4f} = 2$ раза; б) ширина полос уменьшится в $\frac{a}{f} = 8$ раз.

$$5.3. b = \lambda(1+2m)/4\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} = 0,14(1+2m) \text{ мкм, где } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$5.4. \text{ а) } \theta = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = 3'; \text{ б) } \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta x}{l} = 0,014.$$

$$5.5. N = m_{\max} = \frac{4L^2}{d^2} \approx 10^4; \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \frac{1}{m_{\max}} \approx 10^{-4}.$$

$$6.1. I = 2I_0 \left[1 - \cos \frac{\pi r^2}{\lambda b} \right] \approx 2I_0.$$

$$6.2. \text{ а) } I \approx 4I_0, I \approx 2I_0; \text{ б) } I \approx I_0.$$

$$6.3. \text{ а) } I \approx 0; \text{ б) } I \approx I_0/2.$$

$$6.4. \text{ а) } h = \lambda \frac{m+3/8}{n-1} = 1,2(m+3/8) \text{ мкм; б) } h = 1,2(m+7/8) \text{ мкм; в) } h = 1,2m \text{ или } 1,2(m+3/4) \text{ мкм } (m = 0, 1, 2, \dots).$$

$$6.5. h = 3 + 6q \text{ [см]}, \text{ где } q = 0, 1, 2, \dots; b_m = D^2/(4m\lambda) = 33,3; 11,1; 6,65 \text{ (см); } \dots (m = 1, 3, 5, 7, \dots).$$

6.6. $F = ab/(a+b) = 0,6 \text{ м}$. Это значение соответствует главному фокусу, помимо которого существуют и другие.

6.7. Главный фокус есть точка, для которой начерченные на пластинке зоны совпадают с зонами Френеля. Если r — радиус первой начерченной на пластинке зоны, то главный фокус определяется выражением $F_0 = r^2/\lambda$, где λ — длина световой волны. Следующие фокусы получаются, когда в первой начерченной на пластинке зоне укладывается 3, 5, ..., $(2k+1)$ зон Френеля, то есть когда $r^2/F_k = (k+1)\lambda F_k$. Следовательно, фокусные расстояния F_k равны: $F_k = \pm F_0/(2k+1)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ Знаку «плюс» соответствуют действительные, а знаку «минус» — мнимые фокусы.

$$6.8. \frac{I}{I_0} = \left(\frac{D-b}{D} \right)^2 = \frac{1}{4}; \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi_0} = \frac{D}{2(D+b)} = \frac{2}{3}; \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{I}{I_0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi_0} = \frac{1}{6}.$$

$$6.9. \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\text{tg } \theta}{\lambda}.$$

$$6.11. d = 0,05 \text{ мм}.$$

6.12. $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda$; если $d \gg n\lambda$, то условие максимума принимает вид $d \cos \theta (\theta - \theta_0) \approx m\lambda$, то есть постоянная решетки как

бы уменьшилась по сравнению со случаем нормального падения и равна $d \cos \theta_0$, угол $(\theta - \theta_0)$, определяющий направление на главный максимум, отсчитывается от направления падающего света.

$$\mathbf{6.13.} \quad b \ll \frac{\lambda F}{Nd} = 30 \text{ мкм.}$$

$$\mathbf{7.1.} \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{\eta_2}}{\eta_1 \cdot \sqrt{2}} = 30^\circ.$$

$$\mathbf{7.2.} \quad \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{ест}}} = \frac{P}{1-P} = 0,3.$$

$$\mathbf{7.3.} \quad P = \frac{\eta - 1}{1 - \eta \cos 2\varphi} = 0,8.$$

$$\mathbf{7.4.} \quad \text{а) } \rho = \frac{(n_2 - 1)^2}{2(n^2 + 1)^2} = 0,074; \quad \text{б) } P = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{(1 + n^2)^2 - 4n^2}{(1 + n^2)^2 + 4n^2} = 0,080. \text{ Здесь } n - \text{показатель преломления стекла.}$$

$$\mathbf{7.5.} \quad \text{а) } 0,490 \text{ мм; б) } 0,475 \text{ мм.}$$

$$\mathbf{7.6.} \quad 0,69 \text{ и } 0,43 \text{ мкм.}$$

$$\mathbf{7.7.} \quad d_{\min} = \frac{1}{\alpha} \arcsin \sqrt{2\eta} = 3,0 \text{ мм.}$$

$$\mathbf{7.8.} \quad V = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2lH} = 0,015 \text{ угл. мин/А.}$$

$$\mathbf{8.1.} \quad \text{а) } \varepsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}; \quad \text{б) } V = c \sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m c^2} \lambda^2}.$$

8.2. Запишем уравнение волны в форме $A = A_0 \exp[i(\omega t - kx)]$, где $k = 2\pi/\lambda$. Если $n' = n + i\kappa$, то $k = (\pi/\lambda_0)n'$ и

$$A = A_0 \exp \frac{2\pi\kappa x}{\lambda_0} \exp \left(i \frac{\omega t - 2\pi n x}{\lambda_0} \right),$$

или в вещественной форме

$$A = A_0 \exp(\kappa x) \cos(\omega t - k'x),$$

то есть свет распространяется в виде плоской волны, амплитуда которой зависит от x . При $\kappa < 0$ амплитуда убывает (волна затухает за счет поглощения). Если $n' = i\kappa$, то $A = A_0 \exp(\kappa x) \cos \omega t$. Это стоячая волна с экспоненциально убывающей (при $\kappa < 0$) амплитудой. В этом случае свет испытывает полное внутреннее отражение в среде (без поглощения).

8.3. а) $u = 3V/2$; б) $u = 2V$; в) $u = V/3$. Здесь λ , k и ω — длина волны, волновое число и циклическая частота.

$$\mathbf{8.4.} \quad \varepsilon = 1 + A/\omega^2, \text{ где } A - \text{постоянная.}$$

$$\mathbf{8.5.} \quad I = (I_0/2) \exp(-\kappa l) \sin^2 \varphi, \text{ где } \varphi = V l H.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Основные определения и формулы

В сжатой форме представлены практически все результаты, полученные в основном тексте книги. Приложение предназначено для повторения основных физических понятий, определений и законов разделов курса физики «Колебания и волны», «Оптика».

Электрические колебания

Электрические колебания представляют собой движение электрических зарядов, которое повторяется или приблизительно повторяется через определенные промежутки времени.

Колебательным контуром называется электрическая цепь, обладающая емкостью и индуктивностью.

Период колебаний T — промежуток времени, через который движение электрических зарядов повторяется.

Амплитуда колебаний — величина наибольшего отклонения физического параметра электрической цепи (заряда конденсатора, силы тока, напряжения) от своего равновесного значения.

Свободными называются колебания физической системы (в частности, электрической) около положения устойчивого равновесия после того, как система была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе.

Если омическое сопротивление колебательного контура пренебрежимо мало, то свободные колебания являются *гармоническими*. Частота гармонических колебаний ω_0 в контуре, омическое сопротивление которого равно нулю, называется *собственной частотой* контура.

Затухающими называются колебания при наличии в контуре омического сопротивления.

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в электрической цепи в результате внешнего периодического воздействия и происходящие в такт с этим воздействием.

Ток в проводнике (в цепи, представляющей последовательное соединение проводников) называется *квазистационарным* при условии, что сила тока одинакова во всех поперечных сечениях проводника (цепи) в один и тот же момент времени. Условие квазистационарности тока в электрической цепи:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

где τ — время распространения по цепи электромагнитного возмущения, T — период электрических колебаний, l — длина цепи, c — скорость распространения электромагнитного возмущения вдоль цепи (скорость света в вакууме).

Гармонические колебания

Уравнение *гармонических колебаний* в идеальном контуре, содержащем катушку индуктивности L и конденсатор емкости C (омическое сопротивление контура равно нулю):

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где q — заряд конденсатора, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура.

Решение этого уравнения:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \delta),$$

где амплитуда q_m и начальная фаза δ определяются из начальных условий.

Зависимость от времени силы тока I :

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \cos(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}),$$

где $I_m = q_m \omega_0$ — амплитуда тока.

Зависимость от времени напряжения на конденсаторе U_C :

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Энергия гармонических колебаний

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const.}$$

Затухающие колебания

Уравнение *затухающих колебаний* в контуре, который содержит последовательно соединенные катушку индуктивности L и конденсатор емкости C и обладает омическим сопротивлением R :

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\beta = R/(2L)$ — коэффициент затухания.

Решения уравнения затухающих колебаний. 1. $\beta < \omega_0$ (затухающие колебания).

Зависимость от времени заряда q конденсатора:

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta),$$

где $a(t) = q_{m0}e^{-\beta t}$ — амплитуда затухающих колебаний, q_{m0} — начальная амплитуда.

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta).$$

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = q_{m0} e^{-\beta t} \omega_0 \cos(\omega t + \delta + \psi),$$

где $\operatorname{tg} \psi = -\omega/\beta$.

Величины, характеризующие затухание:

коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L};$$

время жизни колебаний τ , то есть время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\tau = \frac{1}{\beta};$$

логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T;$$

количество колебаний за промежуток времени, в течение которого их амплитуда уменьшается в e раз:

$$N_e = \frac{1}{\beta T};$$

добротность

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}.$$

С точностью до коэффициента 2π добротность Q контура равна отношению энергии затухающих колебаний W к величине убыли этой энергии $|\Delta W_T|$ за время одного периода колебаний:

$$\frac{W}{|\Delta W_T|} = \frac{Q}{2\pi}.$$

2. $\beta > \omega_0$ (апериодический процесс перехода системы в равновесное состояние):

$$q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий.

3. $\beta = \omega_0$ (апериодический процесс перехода системы в равновесное состояние, называемый также *критическим режимом*):

$$q(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t},$$

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, значения которых можно определить из начальных условий.

Критическое сопротивление контура:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Вынужденные колебания

Уравнение *вынужденных колебаний* в последовательном контуре, содержащем катушку индуктивности L , конденсатор емкости C и обладающем омическим сопротивлением R :

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t,$$

где \dot{q} и \ddot{q} — первая и вторая производная по времени заряда конденсатора q , $\beta = R/(2L)$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура, $U_m \cos \omega t$ — поданное на вход контура переменное напряжение (внешнее напряжение).

Общее решение уравнения вынужденных колебаний:

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \delta) + q_m \cos(\omega t - \psi),$$

где первое слагаемое — затухающее колебание с частотой $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, начальной амплитудой q_{m0} и начальной фазой δ ; второе слагаемое — вынужденное колебание с циклической частотой ω , равной частоте внешнего напряжения, и амплитудой q_m .

По истечении достаточного времени решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi),$$

где:

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Сила тока в контуре

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = \psi - \pi/2$ — разность фаз колебаний внешнего напряжения и тока,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R};$$

амплитуда тока

$$I_m = q_m \omega = \frac{(U_m/L)\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

где амплитуда напряжения равна

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C} = \frac{U_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Напряжение на катушке индуктивности

$$U_L = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

где амплитуда напряжения

$$U_{Lm} = I_m \omega L = \frac{U_m \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Напряжение на омическом сопротивлении

$$U_R = I_m R \cos(\omega t - \varphi),$$

где $I_m R = U_{Rm}$ — амплитуда напряжения.

Векторная диаграмма напряжений в последовательном контуре (рис. П.1):

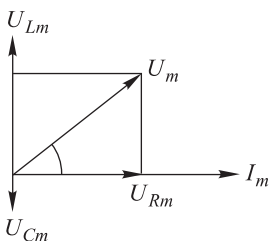


Рис. П.1

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t,$$

Резонанс в последовательном контуре имеет следующие особенности: при $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ амплитуда тока максимальна и равна $I_{m \max} = U_m/R$, разность фаз колебаний тока и поданного на вход контура напряжения $\varphi = 0$, колебания напряжения на катушке и конденсаторе одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.

Переменный ток представляет собой вызванные внешним переменным напряжением вынужденные электрические колебания в цепи, обладающей индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением.

Полное сопротивление цепи Z определяется равенством (закон Ома для амплитудных значений тока и напряжения):

$$I_m = \frac{U_m}{Z},$$

где I_m и U_m — соответственно амплитуда тока и амплитуда напряжения на концах цепи.

Индуктивное сопротивление цепи (сопротивление катушки индуктивности L)

$$X_L = \omega L.$$

Емкостное сопротивление X_C цепи (сопротивление конденсатора емкости C)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Активное сопротивление цепи равно омическому сопротивлению R .

Полное сопротивление цепи (импеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2},$$

где $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — реактивное сопротивление.

Мощность переменного тока

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = \frac{1}{2} I_m^2 R,$$

где I_m — амплитуда тока, U_m — амплитуда напряжения на концах цепи, φ — разность фаз колебаний напряжения и тока.

Упругие волны

Волной называется процесс распространения в пространстве колебаний частиц упругой среды.

Волна называется *продольной*, если направление колебаний частиц среды совпадает с направлением распространения волны; *поперечной*, если частицы колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Волновой фронт — поверхность, отделяющая область пространства, вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания частиц еще не возникли.

Волновая поверхность — поверхность, проходящая через положения равновесия частиц среды, фазы колебаний которых одинаковы.

Длина волны λ — расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T частиц среды:

$$\lambda = VT,$$

где V — скорость волны.

Волновое число — величина, равная отношению циклической частоты ω к скорости V волны:

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Волновой вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{V} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности.

Уравнение волны — зависимость величины смещения ξ колеблющейся частицы от координат x , y , z ее равновесного положения и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси x :

$$\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha),$$

где a — амплитуда волны, ω — циклическая частота, $k = \omega/V$ — волновое число, $\omega t - kx + \alpha$ — фаза волны, α — начальная фаза.

Фазовая скорость волны V_ϕ — скорость перемещения в пространстве поверхности постоянной фазы:

$$\omega t - kx + \alpha = \text{const},$$

$$V_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = V,$$

где V — введенная выше скорость волны.

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\xi = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha),$$

где a — амплитуда волны, ω — циклическая частота, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из начала координат к колеблющейся частице, k_x, k_y, k_z — проекции на координатные оси волнового вектора \mathbf{k} .

Уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha).$$

Уравнение цилиндрической волны:

$$\xi = \frac{a_0}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr + \alpha).$$

Уравнение волны в комплексной форме:

$$\bar{\xi} = \bar{a} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

где $\bar{a} = a e^{i\alpha}$ — комплексная амплитуда волны, модуль которой равен амплитуде волны a , аргумент — начальной фазе α .

Волновое уравнение:

$$\Delta \xi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, V — фазовая скорость волны. Всякая функция вида

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha),$$

является решением волнового уравнения.

Волновое уравнение для продольной упругой волны в твердой среде, распространяющейся вдоль оси x

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где ρ — плотность среды, E — модуль Юнга.

Скорость упругой продольной волны в твердой среде:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Энергия упругих волн. Мгновенное значение объемной плотности энергии волны:

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha);$$

среднее по времени (среднее за период колебания частиц среды) значение объемной плотности энергии:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2.$$

Поток энергии Φ численно равен энергии, переносимой волной за единицу времени через заданную поверхность S :

$$\Phi = \frac{dW_S}{dt},$$

где dW_S — количество энергии, перенесенной волной через поверхность S за промежуток времени dt .

Вектор плотности потока энергии

$$\mathbf{j} = wV\mathbf{n}.$$

где w — объемная плотность энергии волны, V — скорость распространения волны.

Связь между потоком и плотностью потока энергии, переносимой волной через элементарную площадку $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi = \mathbf{j}d\mathbf{S},$$

та же, что и для поверхности S конечных размеров:

$$\Phi = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Интенсивность волны I равна модулю среднего по времени вектора плотности потока энергии:

$$I = |\langle \mathbf{j} \rangle|.$$

Можно показать, что интенсивность равна

$$I = \langle w \rangle V,$$

где $\langle w \rangle$ — средняя по времени объемная плотность энергии волны, V — скорость волны.

Стоячая волна образуется при наложении бегущих навстречу друг другу волн: $\xi_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$ и $\xi_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2)$. Уравнение стоячей волны может быть приведено к виду

$$\xi = 2a \cos kx \cos \omega t,$$

где величина $|2a \cos kx|$ — зависящая от координаты x амплитуда колебаний.

Узлы стоячей волны (положения равновесия частиц среды, амплитуда колебаний которых равна нулю) имеют координаты:

$$x_{\text{узн}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пучности стоячей волны (положения равновесия частиц среды, амплитуда колебаний которых максимальна) имеют координаты:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Характеристики звуковых волн: высота, тембр, интенсивность, уровень громкости.

Уровень громкости

$$L = \lg \frac{I}{I_0},$$

где I_0 — интенсивность, соответствующая порогу слышимости; единица громкости — бел (Б) или децибел (дБ), 1 Б = 10 дБ.

Эффект Доплера для звуковых волн — зависимость регистрируемой приемником частоты звуковой волны от скорости движения источника звука и приемника.

Электромагнитные волны

Электромагнитная волна представляет собой процесс распространения в пространстве взаимно порождающих друг друга переменных электрического и магнитного полей.

Из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в электрически нейтральной (объемная плотность электрического заряда ρ равна нулю), непроводящей (плотность электрического тока \mathbf{j} равна нулю) однородной и изотропной среде (справедливы соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}$$

вытекают волновые уравнения для напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} &= \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \Delta \mathbf{H} &= \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Фазовая скорость электромагнитной волны равна

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ — скорость электромагнитной волны в вакууме; $\sqrt{\varepsilon \mu} = n$ — абсолютный показатель преломления среды.

Свойства электромагнитной волны. Электромагнитная волна является поперечной: векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны к направлению ее распространения. Векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} (\mathbf{k} — волновой вектор) электромагнитной волны взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку. Фазы колебаний векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} совпадают, а модули этих векторов связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

Плоская гармоническая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль координатной оси x , описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha),\end{aligned}$$

где ω — циклическая частота, k — волновое число, α — начальная фаза.

Объемная плотность энергии электромагнитной волны:

$$w = \frac{EH}{c},$$

где E и H — модули векторов напряженности электрического и магнитного поля волны, c — скорость электромагнитной волны в вакууме.

Вектор *плотности потока энергии* электромагнитной волны (*вектор Пойнтинга*):

$$\mathbf{S} = w\mathbf{cn} = [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

где w — объемная плотность энергии волны, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения волны, \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженность электрического и магнитного полей соответственно.

Интенсивность электромагнитной волны

$$I = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} c,$$

где E_m — амплитуда электрической составляющей волны.

Импульс единицы объема электромагнитной волны

$$K_{\text{ед.об}} = \frac{w}{c} = \frac{EH}{c^2}.$$

Давление волны, падающей нормально на поверхность с коэффициентом поглощения, равным единице:

$$p = w.$$

Дипольное излучение. Векторы напряженности магнитного \mathbf{H} и электрического \mathbf{E} поля в волновой зоне:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(t) &= \frac{1}{4\pi c} \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c), \mathbf{n}]}{r}, \\ \mathbf{E}(t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{[[\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c), \mathbf{n}]\mathbf{n}]}{r},\end{aligned}$$

где $\ddot{\mathbf{p}}$ — вторая производная по времени дипольного момента, r — расстояние от точечного диполя (источника) до точки наблюдения, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности.

Амплитуды H_m и E_m магнитной и электрической составляющей дипольного излучения зависят от полярного угла θ между направлением колебаний диполя и направлением на точку наблюдения, и от расстояния r между диполем и точкой наблюдения:

$$\begin{aligned}H_m &\sim \frac{\sin \theta}{r}, \\ E_m &\sim \frac{\sin \theta}{r}.\end{aligned}$$

Диаграмма направленности дипольного излучения (зависимость интенсивности I излучения от угла θ , определяющего направление излучения):

$$I = I_{\max} \sin^2 \theta,$$

где I_{\max} — максимальное значение интенсивности излучения, соответствующее углу $\theta = \pi/2$.

Мощность дипольного излучения:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}.$$

Свойства световой волны

Абсолютный показатель преломления среды n равен отношению скорости света в вакууме c к скорости света в среде V (фазовой скорости световой волны):

$$n = \frac{c}{V};$$

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon},$$

(в прозрачных средах $\mu \approx 1$).

Световой вектор — вектор напряженности электрического поля световой волны \mathbf{E} .

Соотношение между амплитудами электрической E_m и магнитной H_m составляющих световой волны:

$$H_m = nE_m \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}.$$

Интенсивность световой волны:

$$I = \frac{1}{2} n E_m^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}.$$

Световой луч — линия в пространстве, вдоль которой осуществляется перенос энергии волной.

Поляризованным называется свет, в котором направления колебаний светового вектора упорядочены каким-либо образом.

Плоскополяризованный или *линейно поляризованный* свет: колебания светового вектора происходят в одной плоскости, проходящей через луч.

Естественный свет: колебания светового вектора происходят во всевозможных направлениях, перпендикулярных к лучу, быстро и беспорядочно сменяя друг друга.

Поляризованный по кругу свет: конец вектора \mathbf{E} описывает окружность.

Эллиптически поляризованный свет: конец вектора \mathbf{E} описывает эллипс.

Волновой цуг — электромагнитная волна, испускаемая атомом за один акт излучения. Длительность цуга $\tau \sim 10^{-8}$ с, протяженность $l = c\tau \sim 3$ м.

Законы отражения и преломления света. В *плоскости падения* лежат падающий луч и нормаль к поверхности раздела двух сред, восстановленная в точке падения. *Угол падения* — угол между падающим лучом и нормалью; *угол отражения* — угол между отраженным лучом

и нормалью; *угол преломления* — угол между преломленным лучом и нормалью. Падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в плоскости падения.

Угол падения θ_1 равен углу отражения θ'_1 :

$$\theta_1 = \theta'_1.$$

Угол падения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны соотношением:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред.

Предельный угол $\theta_{\text{пред}}$ — такой угол падения, для которого угол преломления равен 90° :

$$\sin \theta_{\text{пред}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Формулы Френеля устанавливают соотношения между E , E' , E'' — амплитудами световых векторов падающей, отраженной и преломленной волн. Если вектор **E** падающей волны лежит в плоскости падения, то формулы имеют вид

$$E' = E \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$E'' = E \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)};$$

Если вектор **E** падающей волны перпендикулярен плоскости падения, то формулы имеют вид

$$E' = -E \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$E'' = E \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)};$$

здесь θ_1 — угол падения, θ_2 — угол преломления.

Как следует из формул Френеля, при отражении света под малыми углами от оптически более плотной среды фаза отраженной волны скачком меняется на величину π .

Угол Брюстера — такой угол падения луча, для которого выполняется соотношение:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред; при падении света на границу раздела двух сред под углом Брюстера угол между отраженным и преломленным лучами равен 90° .

Закон Брюстера. Если естественная световая волна падает на поверхность раздела двух сред под углом Брюстера, то отраженная волна является плоскополяризованной: направление колебаний светового вектора в отраженной волне перпендикулярно плоскости падения.

Коэффициент отражения — отношение интенсивностей I' и I соответственно отраженной и падающей на поверхность раздела двух сред волн:

$$\rho = \frac{I'}{I}.$$

Коэффициент пропускания τ — отношение интенсивностей I'' и I соответственно преломленной и падающей на поверхность раздела двух сред волн:

$$\tau = \frac{I''}{I};$$

$$\rho + \tau = 1.$$

Оптическая длина пути светового луча равна произведению абсолютного показателя преломления среды n на длину пути s луча:

$$L = ns.$$

Если n меняется от точки к точке среды (среда неоднородна), оптическая длина пути равна:

$$L = \int_1^2 n ds,$$

где интеграл вычисляется вдоль пути светового луча между точками 1 и 2.

Принцип Ферма: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время или оптическая длина пути которого минимальна.

Увеличение оптических приборов. Увеличением Γ вооружающего глаз оптического прибора называется отношение линейных размеров изображения предмета на сетчатке глаза при наблюдении предмета вооруженным и невооруженным глазом:

$$\Gamma = \frac{h'_{\text{вооруж}}}{h'_{\text{невооруж}}}.$$

Увеличение равно

$$\Gamma = \frac{h'_{\text{вооруж}}}{h'_{\text{невооруж}}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0},$$

где φ и φ_0 — углы зрения при рассматривании предмета вооруженным и невооруженным глазом соответственно.

Увеличение лупы

$$\Gamma = \frac{D_0}{f},$$

где D_0 — расстояние наилучшего зрения, f — фокусное расстояние лупы.

Увеличение микроскопа

$$\Gamma = \frac{D_0 \Delta}{f_{об} f_{ок}},$$

где D_0 — расстояние наилучшего зрения, Δ — расстояние между объективом и окуляром, $f_{об}$, $f_{ок}$ — фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно.

Увеличение зрительной трубы

$$\Gamma = \frac{f_{об}}{f_{ок}},$$

где $f_{об}$, $f_{ок}$ — фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно.

Фотометрия

Функция распределения потока энергии светового излучения по длинам волн:

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_\lambda}{d\lambda},$$

Φ_λ — поток энергии светового излучения, $d\Phi_\lambda$ — поток энергии, приходящийся на бесконечно малый интервал длин волн $d\lambda$.

Функция относительной спектральной чувствительности глаза $V(\lambda)$ — зависимость зрительного ощущения глаза от длины волны излучения при неизменном потоке энергии, попадающем в глаз; по определению $V(\lambda) = 1$ при $\lambda = 555$ нм, что соответствует максимальной чувствительности глаза.

Световой поток — поток энергии световой волны, оцениваемый по зрительному ощущению:

$$\Phi = \int_0^\infty V(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda;$$

единица светового потока *люмен* (лм).

Сила света — световой поток, испускаемый точечным источником в единичный телесный угол:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

где $d\Phi$ — световой поток, испускаемый в элементарный телесный угол $d\Omega$; единица силы света *кандела* (кд).

Освещенность — световой поток, приходящийся на единицу площади освещаемой поверхности:

$$E = \frac{d\Phi_{пад}}{dS},$$

где $d\Phi_{\text{пад}}$ — световой поток, падающий на элементарную площадку dS освещаемой поверхности; единица освещенности *люкс* (лк), $1 \text{ лк} = 1 \text{ лм/м}^2$.

Яркость L — световой поток, испускаемый единичным участком поверхности протяженного источника света в единичный телесный угол в заданном направлении:

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega \Delta S \cos \theta},$$

где ΔS — площадь малого участка поверхности протяженного источника, $d\Omega$ — элементарный телесный угол, $d\Phi$ — световой поток, испускаемый участком поверхности ΔS в телесный угол $d\Omega$; θ — угол между нормалью к площадке ΔS и направлением излучения; единица яркости — *кандела на квадратный метр* (кд/м²).

Светимость M протяженного источника равна световому потоку, испускаемому единицей площади поверхности источника по всем направлениям в телесный угол 2π стерадиан:

$$M = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS},$$

где $d\Phi_{\text{исп}}$ — световой поток, испускаемый элементом поверхности источника площадью dS по всем направлениям в телесный угол 2π стерадиан; светимость измеряется в *люменах на квадратный метр* (лм/м²).

Интерференция света

Интерференция — пространственное перераспределение интенсивности света в результате наложения когерентных волн.

Интенсивность света в некоторой точке наблюдения при наложении волн от двух когерентных колеблющихся в одинаковой фазе источников света равна

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

где I_1 , I_2 — интенсивность каждой из двух волн, δ — их разность фаз ($\delta = k\Delta$, где k — волновое число, Δ — оптическая разность хода интерферирующих лучей).

Условия наблюдения интерференционного максимума интенсивности света от двух когерентных источников, выраженное через разность фаз δ складываемых колебаний:

$$\delta = 2m\pi;$$

или через оптическую разность хода Δ интерферирующих лучей:

$$\Delta = m\lambda,$$

где λ — длина волны, или через расстояние d между источниками:

$$d \sin \theta = m\lambda,$$

где θ — угол между направлением на точку наблюдения и прямой, вдоль которой расположены источники; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — порядок интерференционного максимума.

Ширина интерференционной полосы — расстояние между двумя соседними минимумами интенсивности света в интерференционной картине.

Расстоянием между интерференционными полосами называется расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности.

Предельный порядок интерференции в некогерентном свете с шириной спектрального интервала $\Delta\lambda$ равен:

$$m_{\text{пред}} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Ширина интерференционной полосы при *интерференции двух плоских волн*

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi},$$

где λ — длина световой волны, φ — угол между направлениями распространения двух плоских когерентных волн.

Когерентность

Когерентность — согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов.

Качественный критерий когерентности волн: две световые волны когерентны, если при их наложении наблюдается интерференция — пространственное перераспределение интенсивности света.

Количественный критерий когерентности световых волн вида $E_1 = A_1(t) \cos[\omega t + \alpha_1(t)]$ и $E_2 = A_2(t) \cos[\omega t + \alpha_2(t)]$ (модель естественного света) — отличие от нуля среднего по времени интерференционного члена:

$$\langle \cos \delta \rangle \neq 0,$$

где $\delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$ — разность фаз складываемых колебаний.

Время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ световой волны — промежуток времени, в течение которого случайные изменения фазы волны достигают величины порядка π . Для монохроматической световой волны $\tau_{\text{ког}}$ равно средней длительности волнового цуга:

$$\tau_{\text{ког}} \approx \tau \sim 10^{-8} \text{ с}.$$

Длина когерентности $l_{\text{ког}}$ световой волны — расстояние, на которое распространяется волна за промежуток времени, равный времени когерентности. Для монохроматической волны $l_{\text{ког}}$ равна средней пространственной протяженности цуга:

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}} = c\tau \approx l_{\text{цуг}} \sim 3 \text{ м}.$$

Условия наблюдения интерференции в естественном свете.

При наложении световых волн вида $E_1 = A_1(t) \cos[\omega t + \alpha_1(t)]$ и $E_2 = A_2(t) \cos[\omega t + \alpha_2(t)]$, испускаемых двумя источниками естественного света, разность фаз складываемых колебаний $\delta = \alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ случайным образом зависит от времени, так что среднее значение интерференционного члена равно нулю: $\langle \cos \delta \rangle = 0$; такие волны не когерентны и при их наложении возникновение интерференции невозможно.

Если при наложении волн, полученных делением на две части естественной световой волны от одного источника, оптическая разность хода Δ интерферирующих лучей не превышает длины когерентности $l_{\text{ког}}$ естественной световой волны, то есть

$$\Delta \leq l_{\text{ког}},$$

то складываемые волны когерентны, и возникает интерференция; если же выполняется условие:

$$\Delta > l_{\text{ког}},$$

то складываемые волны не когерентны, и интерференция не наблюдается.

При наблюдении интерференции в естественном свете предельный порядок интерференции $m_{\text{пред}}$ (наибольшее возможное число различных интерференционных полос):

$$m_{\text{пред}} = \frac{\Delta_{\text{max}}}{\lambda} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{c\tau_{\text{ког}}}{\lambda}.$$

Фурье-спектр волнового цуга. Волновой цуг конечной длительности τ и частоты ω_0 представляет собой совокупность гармонических волн (гармонических составляющих) с частотами, в основном принадлежащими интервалу $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega\tau \approx 2\pi,$$

$$\Delta\nu\tau \approx 1,$$

где середина интервала $\Delta\omega$ совпадает с частотой цуга ω_0 .

Интенсивность I гармонической составляющей волнового цуга зависит от частоты ω :

$$I(\omega) = I_0 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)\tau/2]}{[(\omega_0 - \omega)\tau/2]^2},$$

где I_0 — интенсивность волны с частотой $\omega = \omega_0$. Зависимость $I(\omega)$ называется фурье-спектром волнового цуга.

Время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ естественной световой волны с шириной спектрального частотного интервала $\Delta\nu$ определяется соотношением

$$\Delta\nu\tau_{\text{ког}} \approx 1.$$

Длина когерентности естественной световой волны с шириной спектрального частотного интервала $\Delta\nu$ и соответствующего волнового интервала $\Delta\lambda$ равна

$$l_{\text{ког}} \approx c\tau_{\text{ког}} \approx \frac{c}{\Delta\nu} \approx \frac{\lambda^2}{|\Delta\lambda|},$$

где λ — некоторая средняя длина волны из интервала $\Delta\lambda$.

Предельный порядок интерференции в естественном свете с шириной частотного интервала $\Delta\nu$ равен

$$m_{\text{пред}} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} \approx \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|}.$$

Пространственная когерентность. Для наблюдения интерференции в естественном свете линейный размер b источника света должен удовлетворять условию:

$$b < \frac{\lambda}{\Omega},$$

где λ — длина волны, Ω — апертура интерференции (угловой размер оптической системы, используемой для разделения световой волны на две части).

Радиус когерентности естественной световой волны — это линейный размер участка псевдоволновой поверхности, все точки которого могут служить источниками вторичных когерентных волн. Радиус когерентности равен расстоянию, при перемещении на которое вдоль псевдоволновой поверхности случайные изменения фазы естественной световой волны достигают величины порядка π .

Радиус когерентности естественной световой волны равен

$$r_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\psi},$$

где ψ — угловой размер источника света.

Интерференция в *тонких пластинках*. Эффективная оптическая разность хода интерферирующих лучей равна

$$\Delta_{\text{эф}} = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \frac{\lambda}{2},$$

где λ — длина световой волны, b — толщина пластинки, θ — угол падения луча на пластинку, n — абсолютный показатель преломления материала пластинки.

Интерференционный опыт с *бипризмой Френеля*. Ширина Δx интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta},$$

где λ — длина световой волны, φ — угол между направлениями распространения интерферирующих волн, n — показатель преломления материала бипризмы, θ — преломляющий угол бипризмы, a и b —

расстояние от источника до бипризмы и от бипризмы до экрана наблюдения, соответственно.

Дифракция света

Дифракцией называются явления, сопровождающие распространение света в среде с резкими неоднородностями и не описываемые законами геометрической оптики.

Принцип Гюйгенса–Френеля. Каждый элементарный участок dS волновой поверхности S световой волны может рассматриваться в качестве точечного источника вторичных сферических волн. Световая волна в произвольной точке пространства представляет собой суперпозицию вторичных сферических волн, испускаемых всеми элементарными участками dS поверхности S :

$$E = \int_S K \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS$$

— интеграл Кирхгофа–Френеля. Здесь числовой множитель a зависит от значения амплитуды световой волны в том месте, где находится элемент dS ; коэффициент K — от направления наблюдения.

Зоной Френеля называется участок волновой поверхности, разность расстояний от внешнего и внутреннего краев которого до точки наблюдения равна половине длины волны:

$$r_{\text{внешн}} - r_{\text{внутр}} = \frac{\lambda}{2};$$

в точке наблюдения разность фаз вторичных волн, испускаемых внешним и внутренним краями зоны Френеля, равна π .

Радиус зоны Френеля с порядковым номером m на плоской волновой поверхности равен

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}.$$

Радиус зоны Френеля с порядковым номером m на сферической волновой поверхности равен

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}},$$

где a — расстояние от точечного источника до волновой поверхности, b — расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения.

Если круглое отверстие открывает четное число зон Френеля, то интенсивность света в точке наблюдения будет близка к нулю; если нечетное — интенсивность света в точке наблюдения превышает интенсивность исходной световой волны I_0 приблизительно в 4 раза.

Дифракция Фраунгофера — это дифракция в параллельных лучах. При наблюдении дифракции Фраунгофера от щели интенсивность све-

та равна:

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2(kb \sin \varphi/2)}{(kb \sin \varphi/2)^2},$$

где b — ширина щели, φ — угол между нормалью к плоскости щели и направлением на точку наблюдения, I_0 — интенсивность света в интерференционной картине при $\varphi = 0$, то есть в точке наблюдения, расположенной симметрично относительно краев щели.

Угловая полуширина $\delta\varphi$ центрального дифракционного максимума:

$$\delta\varphi \approx \frac{\lambda}{b}.$$

Волновой параметр

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b},$$

где λ — длина световой волны, b — размер щели, l — расстояние от щели до экрана наблюдения дифракционной картины.

Количественный критерий вида дифракции. Если выполняется неравенство:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b} \gg 1,$$

то наблюдается дифракция Фраунгофера; если выполняется условие:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b} \sim 1,$$

то наблюдается дифракция Френеля; если выполняется неравенство:

$$p = \frac{\sqrt{\lambda l}}{b} \ll 1,$$

то распространение света подчиняется законам геометрической оптики, дифракции нет.

Многолучевая интерференция. При интерференции световых волн от линейной цепочки расположенных на расстоянии d друг от друга N одинаковых, колеблющихся в одинаковой фазе источников интенсивность света в интерференционной картине в направлении, составляющем углом θ с нормалью к цепочке излучателей, равна

$$I = I_1 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = I_1 \frac{\sin^2[(Nkd \sin \theta)/2]}{\sin^2[(kd \sin \theta)/2]},$$

где I_1 — интенсивность света каждого из источников в том же направлении, k — волновое число, $\delta = kd \sin \theta$ — разность фаз интерферирующих волн от двух соседних источников.

Положение главных интерференционных максимумов при многолучевой интерференции определяется условием:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

угловая полуширина главного максимума равна:

$$\delta\theta_{\text{гл. макс}} \approx \frac{\lambda}{Nd};$$

интенсивность света в главном максимуме

$$I = N^2 I_1.$$

Дифракционная решетка, имеющая N расположенных на расстоянии d друг от друга щелей шириной b каждая, является линейной цепочкой N когерентных излучателей, при прохождении света через которую имеет место многолучевая интерференция испускаемых поверхностью щелей вторичных волн; угловое распределение интенсивности света каждого излучателя (щели) описывается законом дифракции Фраунгофера. *Угловое распределение интенсивности* прошедшего через решетку света при его нормальном падении на решетку следующее:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2[(kb \sin \theta)/2]}{[(kb \sin \theta)/2]^2} \frac{\sin^2[(Nkd \sin \theta)/2]}{\sin^2[(kd \sin \theta)/2]},$$

где I_0 — интенсивность вторичных волн, испускаемых поверхностью одной щели в направлении нормали к решетке, θ — угол между нормалью к решетке и направлением наблюдения, k — волновое число.

Положение главных максимумов в дифракционной картине от решетки определяется условием:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

угловая полуширина главного максимума:

$$\delta\theta_{\text{гл. макс}} \approx \frac{\lambda}{Nd};$$

интенсивность света в главном максимуме:

$$I = N^2 I_1,$$

где I_1 — интенсивность света от одной щели;

предельный порядок дифракционного максимума:

$$m_{\text{пред}} = \frac{d}{\lambda}.$$

Дисперсионная область спектрального прибора — это наибольший интервал длин волн $\Delta\lambda$ света, который может быть разложен в спектр. Дисперсионная область решетки

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m},$$

где m — порядок спектра.

Угловая дисперсия решетки

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \approx \frac{m}{d},$$

где угол θ определяет направление на главный дифракционный максимум излучения с длиной волны λ , m — порядок максимума, d — период решетки. Угловая дисперсия D равна угловому расстоянию между двумя дифракционными максимумами, соответствующими спектральным линиям с длинами волн, отличающимися на единицу.

Разрешающая сила спектрального прибора:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}},$$

где $\delta\lambda_{\min}$ — наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, которые воспринимаются в спектре раздельно (разрешаются), λ — средняя длина волны двух спектральных линий.

Критерий разрешения Рэля: две спектральные линии воспринимаются раздельно (разрешаются), если расстояние между соответствующими этим линиям максимумами интенсивности света равно полуширине каждого максимума или превышает эту величину.

Разрешающая сила решетки

$$R = mN,$$

где m — порядок спектра, N — число штрихов.

Разрешающая сила объектива

$$R = \frac{1}{\delta\varphi_{\min}},$$

где $\delta\varphi_{\min}$ — наименьшее угловое расстояние между двумя точками рассматриваемого через объектив предмета, изображения которых воспринимаются раздельно (разрешаются). Разрешающая сила объектива зрительной трубы

$$R = \frac{D}{\lambda},$$

где D — диаметр оправы объектива, λ — длина световой волны.

Поляризация света

Поляризованным называется свет, в котором колебания светового вектора упорядочены каким-либо образом. В *плоскополяризованном* свете колебания светового вектора осуществляются в одной определенной плоскости, проходящей через луч. В *эллиптически поляризованном* свете и свете, *поляризованном по кругу*, конец светового вектора описывает эллипс или окружность соответственно. В *естественном* свете колебания светового вектора осуществляются во всевозможных направлениях, перпендикулярных к лучу; направления колебаний быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Частично поляризованным называется естественный свет, в котором колебания светового вектора одного определенного направления преобладают по амплитуде над колебаниями всех других направлений.

Плоскополяризованный свет и эллиптически поляризованный свет может быть представлен в виде наложения (суперпозиции) двух когерентных волн E_x и E_y , поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \omega t, \\ E_y &= A_2 \cos (\omega t + \delta), \end{aligned}$$

где A_1 и A_2 — амплитуды, δ — постоянная разность фаз колебаний.

При сложении поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях когерентных волн, разность фаз δ которых равна нулю или π , возникает плоскополяризованная световая волна.

Естественную световую волну можно представить в виде наложения (суперпозиции) двух некогерентных волн E_x и E_y одинаковой амплитуды, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos \omega t, \\ E_y &= A \cos [\omega t + \delta(t)], \end{aligned}$$

где A — амплитуда; $\delta(t)$ — начальная фаза, которая случайным образом изменяется с течением времени.

Степенью поляризации частично поляризованного света называется величина, равная:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальное и минимальное значение интенсивности прошедшего через поляризатор света, наблюдаемое при вращении поляризатора вокруг направления светового луча.

Закон Малюса: если на поляризатор падает плоскополяризованный свет интенсивности I_0 , то интенсивность I прошедшего через поляризатор света связана с I_0 соотношением:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi,$$

где φ — угол между плоскостью колебаний светового вектора в падающей волне и плоскостью пропускания поляризатора.

Двойное лучепреломление. Пластинкой в четверть волны называется вырезанная параллельно оптической оси кристалла пластинка, для которой выполняется условие:

$$(n_e - n_o)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4},$$

где n_e и n_o — главные показатели преломления кристалла, d — толщина пластинки, λ_0 — длина световой волны в вакууме, m — целое число. При пропускании плоскополяризованного света через пластинку в четверть волны свет становится эллиптически поляризованным.

Пластишкой в полволны называется вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой выполняется условие:

$$(n_e - n_o)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Здесь обозначения такие же, как в предыдущей формуле. При пропускании плоскополяризованного света через пластинку в полволны плоскость поляризации поворачивается вокруг направления луча на угол, который можно рассчитать.

В *оптически активных* средах угол поворота плоскости поляризации световой волны равен

$$\varphi = \alpha l,$$

где l — длина пути светового луча в кристалле, α — *постоянная вращения*.

Угол поворота плоскости поляризации световой волны в растворе оптически активного вещества

$$\varphi = \alpha_{\text{уд}} cl,$$

где c — концентрация вещества, $\alpha_{\text{уд}}$ — *удельная постоянная вращения*.

При прохождении света через оптически неактивное вещество, помещенное в магнитное поле, угол поворота плоскости поляризации равен (*эффект Фарадея*)

$$\varphi = V l H,$$

где V — *постоянная Верде*, l — длина пути светового луча, H — напряженность магнитного поля.

Дисперсия света

Дисперсией света называются явления, в основе которых лежит зависимость показателя преломления n среды от длины световой волны λ_0 (циклической частоты ω).

Дисперсией вещества называется величина:

$$\frac{dn}{d\lambda_0},$$

где n — абсолютный показатель преломления вещества, λ_0 — длина световой волны в вакууме.

Дисперсия называется *нормальной*, если $dn/d\lambda_0 < 0$, *аномальной* — если $dn/d\lambda_0 > 0$. Аномальная дисперсия наблюдается в условиях сильного поглощения света веществом (в области длин волн поглощения).

Волновой пакет (группа волн) — это электромагнитная волна ограниченной длительности τ (время, в течение которого происходило излучение волны источником), и ограниченной пространственной

протяженности Δx (расстояние, на которое переместилась волна за время τ).

Групповой скоростью называется скорость перемещения волнового пакета в пространстве (скорость движения центральной точки пакета, которая характеризуется наибольшей амплитудой светового вектора).

Групповая скорость равна

$$u = \frac{d\omega}{dk},$$

или

$$u = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

где V — фазовая скорость, λ — длина световой волны в веществе.

Фазовая скорость волны равна:

$$V = \frac{\omega}{k},$$

где ω — циклическая частота, k — волновое число.

В недиспергирующей среде ($dn/d\lambda_0 = 0$) фазовая и групповая скорости равны друг другу. В среде, где имеет место дисперсия, $u \neq V$.

Поглощение света — это процесс перехода энергии световой волны во внутреннюю энергию вещества.

Рассеяние света представляет собой дифракцию вторичных волн на мельчайших неоднородностях среды.

II. Производные единицы СИ электрических, магнитных и световых величин

В Международной системе единиц (СИ), которая в нашей стране применяется в качестве предпочтительной, использовано 7 основных единиц: длины — метр, массы — килограмм, времени — секунда, силы тока — ампер, температуры — кельвин, количества вещества — моль, силы света — кандела. Их определения даны в кн. 1 «Механика» (приложение II) настоящего курса. Здесь уместно напомнить определение единицы силы света канделы (обозначение кд; символ, используемый для обозначения размерности, — J), а именно: кандела — единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $0,54 \cdot 10^{15}$ Гц (555 нм), сила излучения которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

Производные единицы СИ электрических и магнитных величин приведены в табл. П.1 (см. также в кн. 3 «Электромагнетизм», приложение II).

Таблица П.1

Производные единицы СИ электрических и магнитных величин

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м ²	
Электрический заряд	TI	кулон	Кл	1 Кл=1 А·с
Объемная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м ³	
Поляризованность, электрическая индукция	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м ²	
Электрический дипольный момент	LTi	кулон–метр	Кл·м	
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	1 В=1 Дж/Кл
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	

Продолжение таблицы П.1

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	1 Ф=1 Кл/В
Электрическая постоянная	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м	
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	1 Ом=1 В/А
Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом-метр	Ом·м	
Удельная электропроводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	1 Вб=1 Тл·м ² =1 В·с
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	1 Тл=1 Н/(А·м)
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	1 Гн=1 Вб/А
Магнитная постоянная	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	
Магнитный момент тока	L^2I	ампер-квадратный метр	А·м ²	
Намагниченность	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	

Производные единицы СИ световых величин приведены в таблице П. 2.

Таблица П.2

Производные единицы СИ световых величин

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
Световой поток	J	люмен	лм	
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	1 лк=1 лм/м ²
Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/м ²	
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м ²	
Поток энергии излучения	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	
Плотность потока энергии излучения	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м	

III. Постоянные некоторых веществ

Таблица П.3

Диэлектрические проницаемости

Диэлектрик	ϵ	Диэлектрик	ϵ
Вода	81	Полиэтилен	2,3
Воздух	1,00058	Слюда	7,5
Воск	7,8	Спирт	26
Керосин	2,0	Стекло	6,0
Парафин	2,0	Фарфор	6,0
Плексиглас	3,5	Эбонит	2,7

Таблица П.4

Удельные сопротивления проводников и изоляторов

Проводник	Удельное сопротивление при 20° С ρ , нОм·м	Температурный коэффициент сопротивления α , КК ⁻¹	Изолятор	Удельное сопротивление ρ , Ом·м
Алюминий	25	4,5	Бумага	10 ¹⁰
Вольфрам	50	4,8	Парафин	10 ¹⁵
Железо	90	6,5	Слюда	10 ¹³
Золото	20	4,0	Фарфор	10 ¹³
Медь	16	4,3	Шеллак	10 ¹⁴
Свинец	190	4,2	Эбонит	10 ¹⁴
Сероебро	15	4,1	Янтарь	10 ¹⁷

Таблица П.5

Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетик	$\mu - 1, 10^{-6}$	Диамагнетик	$\mu - 1, 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	-0,063
Воздух	0,38	Бензол	-7,5
Кислород	1,9	Вода	-9,0
Эбонит	14	Медь	-10,3
Алюминий	23	Стекло	-12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	-12,6
Платина	360	Кварц	-15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	-176

Таблица П.6

Показатели преломления

Газы	n	Жидкости	n	Твердые тела	n
Азот	1,00030	Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Воздух	1,00029	Вода	1,33	Кварц плавленый	1,46
Кислород	1,00027	Глицерин	1,47	Стекло обычное	1,50
		Сероуглерод	1,63		

Продолжение таблицы П.6

Показатели преломления для кристаллов с двойным лучепреломлением

Длина волны λ , нм	Цвет	Исландский шпат		Кварц	
		n_e	n_o	n_e	n_o
687	красный	1,484	1,653	1,550	1,541
656	оранжевый	1,485	1,655	1,551	1,542
589	желтый	1,486	1,658	1,553	1,544
527	зеленый	1,489	1,664	1,556	1,547
486	голубой	1,491	1,668	1,559	1,550
431	сине-фиолетовый	1,495	1,676	1,564	1,554
400	фиолетовый	1,498	1,683	1,568	1,558

Таблица П.7

Вращение плоскости поляризации

Естественное вращение в кварце		Магнитное вращение	
Длина волны λ , нм	Постоянная вращения α , град/мм	Жидкость	Постоянная Верде V , угл. мин/А
404,7	48,93	Бензол	2,59
435,9	41,54	Вода	0,016
491,6	31,98	Сероуглерод	0,053
589,5	21,72	Спирт этиловый	1,072
656,3	17,32		
670,8	16,54		

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютный показатель преломления среды 73, 88

Аккомодация глаза 108

Акустический спектр 67

Амплитуда волны 53

— — комплексная 56

— — сферической 64

— — цилиндрической 64

— вынужденного колебания 19

— затухающих колебаний 14

— колебаний 9

Апертура интерференции 134

Бел 68

Бипризма Френеля 141

Вектор волновой 52

— Пойнтинга 79

— световой 88

— Умова 62

Время жизни колебаний 16

Векторная диаграмма напряжений
25

— — токов 37

Волна

— вторичная 146

— монохроматическая 133

— плоская 51

— — гармоническая 53

— поперечная 51

— продольная 51

— стоячая 64

— сферическая 51

— цилиндрическая 51

— электромагнитная 71

Волновая зона диполя 83

— поверхность 71

Волновое уравнение 56

— число 52

Волновой вектор 52

Волновой пакет 206

— параметр 164

— фронт 51

— цуг 89

Волны вторичные 137

— звуковые 67

— когерентные 113, 123

Время когерентности 126, 130

Высота тонального звука 67

Главная плоскость кристалла 198

Главное сечение кристалла 198

Главные интерференционные максимумы 167

— показатели преломления 197

Громкость звука 67

Группа волн 206

Групповая скорость 207, 209

Давление электромагнитной волны
82

Двойное лучепреломление 196

Двуосные кристаллы 197

Действующее значение напряжения
35

— — силы тока 35

Децибел 68

Диаграмма направленности дипольного излучения 85

Дисперсионная область 173

Дисперсия аномальная 205

— вещества 205

— нормальная 205

— света 205

Дифракционная решетка 169

Дифракционное уширение 162

Дифракция 145

— в параллельных лучах 159

— от щели 159

— Фраунгофера 159, 165

- Дифракция Френеля 165
Длина волнового цуга 90
— волны 52
— когерентности 127, 130
Добротность колебательного контура 16, 27
- Закон Бугера** 216
— Брюстера 98
— Малюса 191
— отражения света 90
— преломления света 90
Законы геометрической оптики 104
Звук 67
— тональный 67
Зона Френеля 147
Зонная пластинка амплитудная 153
— — фазовая 154
Зрительная труба 110
- Излучатель косинусный** 103
— ламбертовский 103
Импеданс 30, 33
Импульс электромагнитной волны 81
Интеграл Кирхгофа–Френеля 146
Интенсивность волны 63
— звука 67
— света 88
— электромагнитной волны 80
Интерференционная полоса 118
— —, ширина 118
Интерференционный член 124
Интерференция 113
Источник точечный 101
- Кандела** 102
Квазистационарный электрический ток 10
Когерентность временная 123
—, время 126
—, длина 127
— пространственная 133
—, радиус 137
Когерентные волны 113, 123
Колебания электрические 9
— — вынужденные 10
— — гармонические 9
— — затухающие 10
- Колебания электрические свободные 9
Контур колебательный 9
— — параллельный 36
— — последовательный 18
Комплексная амплитуда колебания 41
Комплексное сопротивление 41
— — катушки индуктивности 43
— — конденсатора 42
Коэффициент затухания 15
— отражения 99
— поглощения 216
— пропускания 99
Критический режим 17
Критическое сопротивление 17
Критерий когерентности волн 125
— Рэлея 176, 179
- Ламбертовский излучатель** 103
Линейно поляризованный свет 89
Логарифмический декремент затухания 16
Лупа 109
Луч 89
— необыкновенный 198
— обыкновенный 198
Люкс 102
Люмен 101
- Многолучевая интерференция** 165
Мощность дипольного излучения 86
— переменного тока 34
- Одноосные кристаллы** 197
Оптика геометрическая 104
— лучевая 104
Оптическая длина пути 105
— ось кристалла 198
— разность хода 114
Освещенность 102
Относительная спектральная чувствительность глаза 101
- Переменный ток** 29
Период затухающих колебаний 15
— колебаний 9
Пластинка в полволны 202
— в четверть волны 202
Плоскополяризованный свет 89

- Плоскость падения 90
— поляризатора 189
Плотность потока энергии 62
— — — электромагнитной волны 79
Поглощение света 216
Показатель преломления 73, 88
Полное внутреннее отражение 93
— сопротивление цепи 30, 33
Полосы равного наклона 139
— равной толщины 140
Поляризатор 189
Поляризованный свет 89
Порог болевого ощущения 68
— слышимости 67
Порядок главного интерференцион-
ного максимума 168
— интерференции 116
— — предельный 120, 130
— интерференционного максимума
116
Постоянная Верде 203
— вращения плоскости поляризации
203
Поток энергии 62
Предельный угол полного внутрен-
него отражения 93
— порядок интерференции 133
Принцип Гюйгенса–Френеля 146
— Ферма 105
Пучности стоячей волны 65
- Радиус зоны Френеля** 147, 148
— когерентности 137
Разность фаз напряжения и тока 20
Разрешающая сила дифракционной
решетки 176, 179
— — объектива 180
Рассеяние света 216
Расстояние наилучшего зрения 108
Резонанс 24
Резонансная кривая, амплитудная
22, 23
Резонансная кривая, фазовая 22, 24
Резонанс в параллельном колеба-
тельном контуре 37
— напряжений 26
- Свет** 88
— естественный 89
Свет линейно поляризованный 89
— плоскополяризованный 89
— поляризованный 89
— — по кругу 89
— — — эллипсу 89
— — — , частично 189
Светимость 104
Световой вектор 88
— луч 89
— микроскоп 109
— поток 101
Сила света 102
Скорость волны 52
— — фазовая 53
— групповая 207, 209
— звука 68
— света 88
Собственная частота 10
Сопротивление активное 31
— емкостное 32
— индуктивное 31
— реактивное 33
Спектральная линия 175
Спираль Корню 157
Степень поляризации 190
Стоячая волна 64
- Тембр звука** 67
Тензор диэлектрической проницае-
мости 197
- Увеличение оптического прибора**
108
Угловая дисперсия решетки 176
— полуширина дифракционного
максимума 162
Угол Брюстера 97
— зрения 108
— отражения 90
— падения 90
— преломления 90
Узлы стоячей волны 66
Уравнение волновое 56
— волны 52
— — в комплексной форме 56
— — в поглощающей среде 55
— — плоской гармонической 53, 56
— — сферической 54
— — цилиндрической 55

Уравнение вынужденных колебаний
19

— гармонических колебаний 12

— затухающих колебаний 14

Уравнения Максвелла 71

Уровень громкости звука 68

Фазовая скорость 53

— — электромагнитной волны 72

Формулы Френеля 96

Фурье-спектр волнового цуга 132

Частота затухающих колебаний 15

Шум 67

Электромагнитная волна 71

Энергия гармонических колебаний
13

— затухающих колебаний 16

— упругой волны 60

— электромагнитной волны 79

Эффект Доплера 69

— Фарадея 203

Яркость 103