§4. Парабола и её свойства

Определение 4.1. *Параболой* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$y^2 = 2px,\ p > 0.$$

Равенство (4.1) называется *каноническим уравнением* параболы.

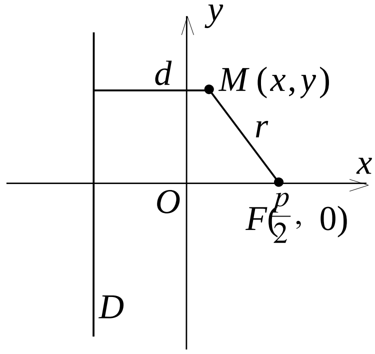

Рис. 4.1. Фокус и директриса параболы

Свойства параболы

1. Парабола – *осесимметричная кривая.* В самом деле, если точка $M(x, y)$ принадлежит параболе, то ей принадлежит также и точка $M(x,-y)$. А это означает, что ось Ox является *осью симметрии* параболы (или *осью параболы*). Других осей симметрии и центра симметрии парабола не имеет.

2. Парабола вся расположена в правой полуплоскости и является неограниченной кривой. В самом деле, из уравнения (4.1) следует, что абсцисса x любой точки параболы $M(x, y)$ должна быть неотрицательна. Для расстояния OM точки M до начала координат с учетом (4.1) имеем

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2px}. \qquad (4.2)$$

(Из (4.2) следует, что при неограниченном увеличении x *(* $x \to +\infty$*) расстояние* OM *также неограниченно увеличивается и может стать сколь угодно большим. А это и означает, что парабола – неограниченная кривая. Как следует из уравнения (4.1), начало координат* $O(0, 0)$ *принадлежит параболе. Эта точка называется* вершиной *параболы.)*

*** 3.** *Фокус и директриса параболы.* Точка $F(p/2, 0)$, находящаяся на оси параболы называется её *фокусом*, а расстояние r произвольной точки $M(x, y)$ параболы до этой точки – *фокальным радиусом* точки M (рис. 4.1).

Пусть $r = FM$ (рис. 4.1). Имеем

$$r = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Раскроем скобки в подкоренном выражении, заменим, в силу (4.1), y^2 на $2px$ и перегруппируем слагаемые:

$$r = \sqrt{x^2 - px + p^2/4 + 2px} = \sqrt{(x + p/2)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Таким образом, приходим к соотношению:

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad (4.3)$$

Правая часть последнего равенства совпадает с выражением для расстояния d точки M до прямой $D\colon x = -\frac{p}{2}$, так как $d = x + \frac{p}{2}$ (рис. 4.1). Эта прямая называется *директрисой* параболы. Итак, расстояния любой точки параболы до директрисы и до фокуса равны между собой.

4. *Параметр параболы. Построение параболы.* Число p из уравнения (4.1) называется *параметром* параболы. Он равен фокальному радиусу точки параболы, расположенной на перпендикуляре, восставленном из её фокуса к оси Ox (при $x = \dfrac{p}{2}$ из (4.3) имеем $r = p$). Это свойство вместе с предыдущими позволяет построить параболу (рис. 4.2).

5. *Каноническая система координат. Каноническое уравнение параболы.* Парабола определяется уравнением (4.1), если система координат выбрана специальным образом: ось Ox проходит через фокус параболы перпендикулярно её директрисе в направлении от директрисы к фокусу, а ось Oy – через вершину параболы. Такая система координат называется *канонической* по отношению к данной параболе, а её уравнение в этой системе (т.е. уравнение (4.1)) – называется *каноническим уравнением* параболы. При выборе другой прямоугольной системы координат парабола будет иметь другое уравнение и может содержать члены с произведением координат.

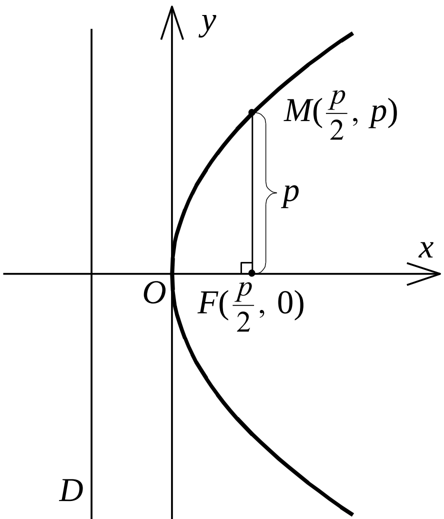

Рис. 4.2. Построение параболы, параметр

Пример 4.1. Найти параметр, координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 8x$. Изобразить эту параболу на чертеже.

►Сравнив данное уравнение с (4.1), имеем $8 = 2p$, откуда $p = 4$. Точка $F(2,0)$ – фокус параболы, а $x = -2$ – уравнение её директрисы D. Построим на чертеже точки $M_1(2,-4)$ и $M_2(2,4)$. Теперь проведём параболу через эти точки и её вершину – начало координат (рис. 4.3).◄

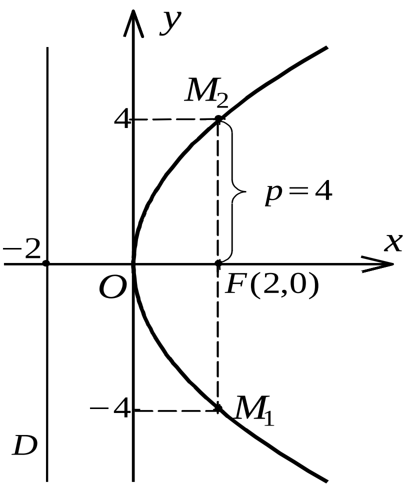

Рис. 4.3. К примеру 4.1

Пример 4.2. Найти координаты фокуса параболы $y^2 - 2y = 4x + 3$ и построить эту кривую.

►В левой части данного уравнения выделим полный квадрат: $(y-1)^2 = 4(x+1)$. Перейдя к новым прямоугольным координатам x', y' по формулам: $x' = x+1, y' = y-1$, получим уравнение: $y'^2 = 4x'$. В системе координат $O'x'y'$ оно является каноническим уравнением параболы вида (4.1). Имеем $4 = 2p$, откуда $p = 2$. В новой системе координат фокус параболы имеет координаты (1, 0), а его старые координаты можно найти из формул перехода: $F(0,\ 1)$. Вершина параболы находится в точке O', следовательно, в системе Oxy она имеет координаты: (–1, 1). Далее строим параболу, используя свойство параметра (рис. 4.4).◄

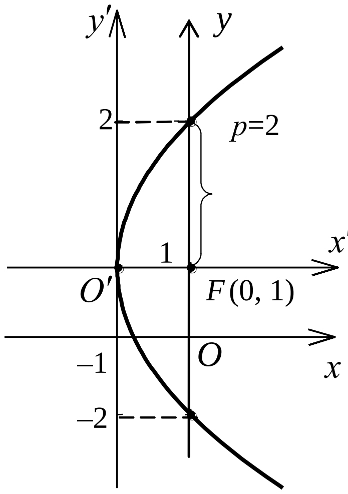

Рис. 4.4. К примеру 4.2

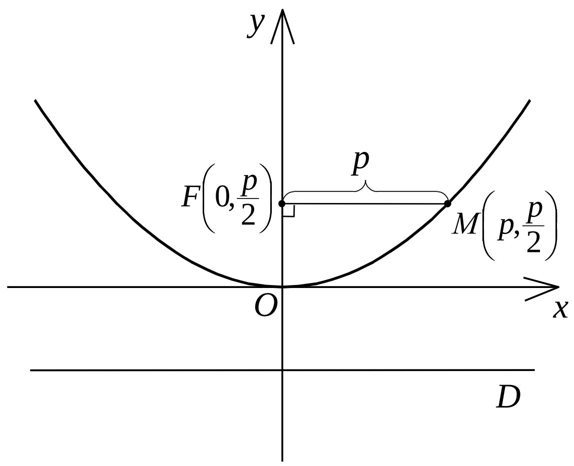

Рис. 4.5. Парабола, определяемая уравнением $x^2 = 2py,\ p > 0$

Замечание 4.1. *Наряду с параболой, определяемой уравнением (4.1), рассмотрим параболу, задаваемую следующим уравнением:*

$$x^2 = 2py,\ p > 0. \qquad (4.4)$$

Осью симметрии такой параболы является ось Oy, её фокус находится в точке $F(0, p/2)$, а директриса D имеет уравнение D: $y = -\dfrac{p}{2}$ (рис. 4.5). В этой параболе читатель, очевидно, узнает график квадратной функции $y = ax^2$ ($a > 0$) из курса элементарной математики ($a = \dfrac{1}{2p}$).

Замечание 4.2. Ветви парабол, определяемых уравнениями (4.1) и (4.4) направлены вправо и вверх соответственно. Параболы с противоположным направлением ветвей определяются уравнениями:

$$y^2 = -2px,\ p > 0, \qquad (4.5)$$

$$x^2 = -2py,\ p > 0. \qquad (4.6)$$

Осью симметрии параболы, определяемой уравнением (4.5) является ось Ox, её фокус находится в точке $F(-p/2, 0)$, а директриса D имеет уравнение D: $x = p/2$ (рис. 4.6). Осью симметрии параболы, определяемой уравнением (4.6) является ось Oy, её фокус находится в точке $F(0, -p/2)$, а директриса D имеет уравнение D: $y = p/2$ (рис. 4.7).

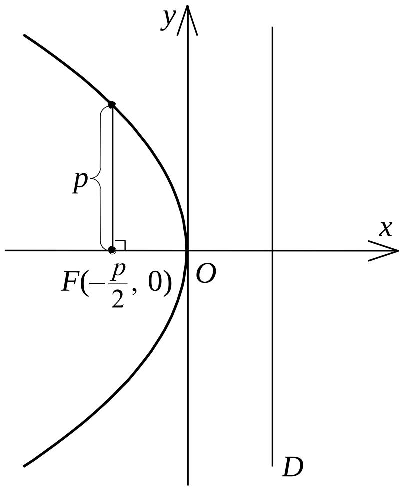

Рис. 4.6. Парабола, определяемая уравнением $y^2 = -2px,\ p > 0$

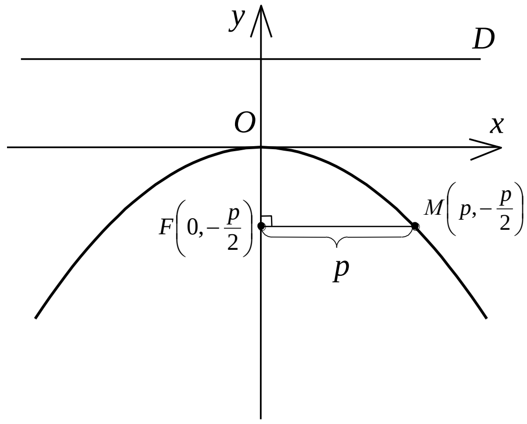

Рис. 4.7. Парабола, определяемая уравнением $x^2 = -2py,\ p > 0$

Пример 4.1. *Найти параметр, координаты фокуса и вершины, а также уравнение директрисы параболы* $x^2 - 2x = -4y - 3$.

►В левой части уравнения выделим полный квадрат: $(x-1)^2 = -4(y+1)$. Перейдя к новым координатам x', y' по формулам: $x' = x - 1, y' = y + 1$, получим уравнение: $x'^2 = -4y'$, которое в системе координат $O'x'y'$ имеет вид (4.6). Поскольку $4 = 2p$, то $p = 2$. Координаты фокуса параболы в новой системе координат есть (0, –1), а его старые координаты можно найти из формул перехода: F(1, –2). Вершина параболы находится в точке O', следовательно, в системе Oxy она имеет координаты: (1, –1). Уравнение директрисы D: $y = 0$.◄