§1. Определение определенного интеграла, его физический и геомет-рический смысл. Необходимое и достаточные условия интегрируемости.

1°. Определение определенного интеграла.

Рассматривается функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$.

1) Промежуток $[a, b]$ разбивается на n произвольных частичных промежутков точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$. При этом $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (рис. 1.1д).

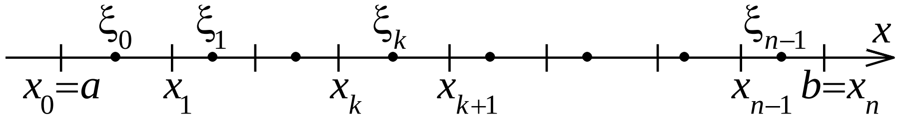

Рис. 1.1д. Разбиение промежутка $[a, b]$ на частичные промежутки $[x_k, x_{k+1}]$ с точками ξ_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

2) В каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается произвольная точка ξ_k ($x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$).

3) Значение функции $f(\xi_k)$ в точке ξ_k умножается на длину $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ k-го частичного промежутка, т. е. вычисляется произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$.

4) Составляется сумма всех этих произведений $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$,

называемая *интегральной суммой* или *суммой Римана*.

5) Величина $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k$ называется *рангом дробления* промежутка $[a, b]$ на части. При $\lambda \to 0$ длина каждого частичного промежутка стремится к нулю. Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы σ_n, причем не зависящий ни от способов дробления промежутка $[a, b]$ на частичные, ни от способов выбора точек ξ_k, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k . \tag{1.1}$$

Предельное равенство (1.1) понимается следующим образом. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что как только $\lambda < \delta$ (т. е. промежуток $[a, b]$ разбит на части с длинами $\Delta x_k < \delta$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$), неравенство

$$\left| \sigma_n - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

выполняется при любом выборе точек ξ_k, $k=0,1,\ldots,n-1$. На этот новый вид предела распространяются многие известные теоремы о пределах.

Переменная x под знаком интеграла называется *переменной интегрирования (интеграции)*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, числа a, b – *пределами интеграла (нижним и верхним)*, произведение $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением.*

Функция, для которой существует определенный интеграл по заданному промежутку, называется *интегрируемой* по этому промежутку.

Оказывается, что не всякая функция является интегрируемой.

Пример 1.1. Функция Дирихле (немецкий математик, 1805–1859)

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x-\text{рациональное число;}\\ 0, & \text{если } x-\text{иррациональное число.}\end{cases}$$

Рассмотрим произвольный промежуток $[a, b]$. Разобьем его на n произвольных частей так, как указано в определении определенного интеграла. Выберем в каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ произвольную точку ξ_k $(k=0,1,\ldots,n-1)$ и составим интегральную сумму для функции Дирихле и промежутка $[a, b]$ двумя способами:

$\sigma'_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Здесь все точки ξ_k – рациональные, поэтому $f(\xi_k)=1$ и $\sigma'_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=b-a$; $\sigma''_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Здесь все точки ξ_k – иррациональные, поэтому $f(\xi_k)=0$ и $\sigma''_n=0$.

Предел постоянной величины равен ей самой, поэтому при $\lambda\to 0$ $\lim\sigma_n=b-a$, $\lim\sigma''_n=0$. Это означает, что предел интегральной суммы зависит от способа выбора точек ξ_k, следовательно $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для функции Дирихле не существует.

2°. Необходимое условие интегрируемости

Укажем необходимое и несколько достаточных (без доказательства) условий интегрируемости функций. Сформулируем их в виде теорем. Они указывают классы интегрируемых функций.

Теорема 1.1 (необходимое условие интегрируемости). ***Если функция интегрируема по промежутку*** $[a, b]$***, то она необходимо ограничена на этом промежутке.***

3°. Достаточные условия интегрируемости. Классы интегрируемых функций.

Теорема 1.2. ***Если функция непрерывна на замкнутом промежутке*** $[a, b]$***, то она интегрируема по этому промежутку.***

Теорема 1.3. ***Если определенная и ограниченная на замкнутом промежутке*** $[a, b]$ ***функция непрерывна на нем, за исключением, быть может, конечного числа точек, то она интегрируема по этому промежутку.***

Доказательство теорем 1.2. и 1.3. можно найти, например, в [1,7]

Указанные два класса функций в теоремах 1.2 и 1.3 практически исчерпывают все функции, встречающиеся в приложениях. В дальнейшем будет предполагаться, что рассматриваются только эти классы функций, поэтому вопросы интегрируемости функций обсуждаться не будут.

4°. Физический смысл интеграла.

Укажем несколько вариантов физической интерпретации интеграла.

1) Задача о пути.

Путь, пройденный материальной точкой со скоростью $v(t)$ за время от момента T_1 до момента T_2, равен определенному интегралу от скорости по промежутку времени движения:

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\, dt\,. \tag{1.2}$$

К этой формуле приводят следующие рассуждения. Если бы скорость движения материальной точка была постоянной за время движения, то ее путь был бы равен произведению скорости v на время движения $(T_2 - T_1)$: $s = v(T_2 - T_1)$. Если же скорость не является постоянной, то последняя формула не годится, и путь s в этом случае находят с помощью предельного процесса, который лежит в основе определения определенного интеграла. Промежуток времени $[T_1, T_2]$ делится на n произвольных частей моментами $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_2$. В каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ выбирается произвольный момент ξ_k и вычисляется значение скорости $v(\xi_k)$. Все частичные промежутки предполагаются достаточно малыми, так что скорость $v(t)$ в пределах каждого меняется незначительно. Ее можно приближенно считать в пределах каждого k-го промежутка постоянной и совпадающей с $v(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда путь, пройденный материальной точкой за время от момента t_k до момента t_{k+1} с постоянной скоростью $v(\xi_k)$, будет равен $v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) = v(\xi_k)\Delta t_k$, а весь путь за промежуток времени $[T_1, T_2]$ будет равен сумме путей, пройденных за каждый частичный временной промежуток: $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\,\Delta t_k$. Величина пути s_n при таком воображаемом движении приближенно равна истинному пути s: $s \approx s_n$. Это приближенное равенство будет тем более точным, чем мельче дробление промежутка $[T_1, T_2]$ на части. По-прежнему обозначим $\lambda = \max_k \Delta t_k$. По определению полагают

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t_k = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt.$$

Получили формулу (1.2).

2) Задача о массе стержня.

Масса m прямолинейного стержня, расположенного в пределах промежутка $[a, b]$ оси Ox и имеющего линейную плотность распределения массы $\rho(x)$, равна определенному интегралу от плотности по промежутку, занимаемому стержнем:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{1.3}$$

К формуле (1.3) приходят с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись в задаче о пути. Промежуток $[a, b]$ делится на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается произвольная точка ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (рис. 1.1д). В точках ξ_k вычисляется значение линейной плотности $\rho(\xi_k)$. Предполагается, что дробление промежутка $[a, b]$ на части настолько мелкое, что в пределах каждого частичного промежутка плотность $\rho(x)$ меняется незначительно. Ее можно считать постоянной и равной $\rho(\xi_k)$ в пределах k-го частичного промежутка. Тогда масса части стержня, расположенной в пределах частичного промежутка $[x_k, x_{k+1}]$, будет приближенно равна $\rho(\xi_k)\,\Delta x_k$, а масса всего стержня m приближенно равна сумме масс всех частей: $m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k)\,\Delta x_k$. Это равенство тем более точное, чем мельче дробление, т. е. чем меньше ранг дробления $\lambda = \max_k \Delta x_k$.

По определению полагают $m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \rho(x)\,dx$. Пришли к формуле (1.3).

3) Задача о работе переменной силы, действующей вдоль прямолинейного пути.

Работа A переменной силы $F(x)$, действующей вдоль пути и перемещающей материальную точку в пределах отрезка $[a, b]$ оси Ox, равна определенному интегралу от силы по отрезку пути:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) обосновывается аналогично двум предыдущим с помощью аналогичных эвристических рассуждений. Промежуток $[a, b]$ разбивается на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается произвольная точка ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (рис. 1.1д). Работа силы $F(x)$ на k-м частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ приближенно равна $F(\xi_k)\Delta x_k$, а вся работа A приближенно равна сумме работ на отдельных участках пути: $A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$. Это равенство тем более точное, чем меньше ранг дробления $\lambda = \max_k \Delta x_k$. По определению полагают

$$A = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx.$$

5°. Геометрический смысл интеграла.

Рассмотрим плоскую фигуру, называемую криволинейной трапецией. Это фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.1).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции и опирающейся на отрезок $[a, b]$, равна определенному интегралу от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (1.5)$$

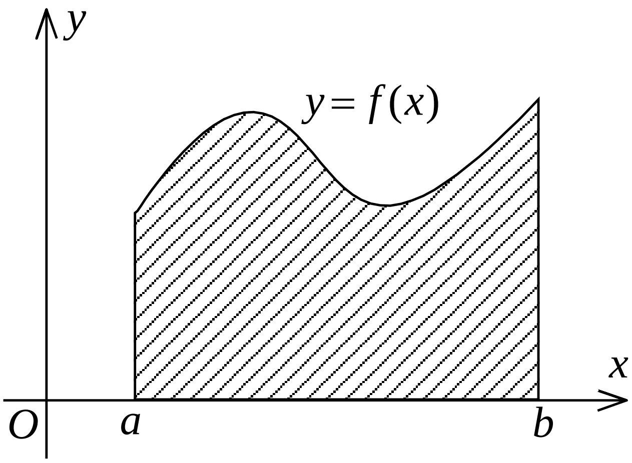

Рис. 1.1. Криволинейная трапеция

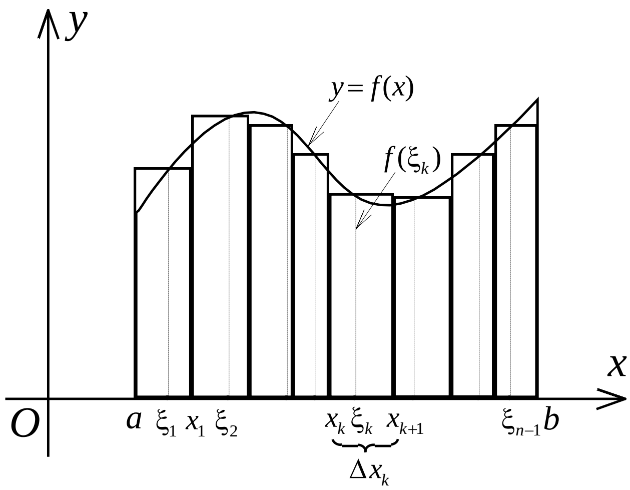

Рис. 1.2 Криволинейная трапеция и ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, с площадью, приближенно равной площади криволинейной трапеции

Эвристические рассуждения, приводящие к формуле (1.5), опираются на интуитивные представления о площади плоской фигуры, полученные в средней школе. Они аналогичны тем, которые применялись в физических задачах о пути, массе, работе. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частичных промежутков точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Далее на каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, как на основании, построим прямоугольник с высотой $f(\xi_k)$ и площадью $f(\xi_k)\Delta x_k$. Получим ступенчатую фигуру (рис. 1.2), площадь которой равна сумме площадей составляющих ее прямоугольников: $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Площадь ступенчатой фигуры приближенно равна площади криволинейной трапеции: $S \approx s_n$. Это равенство тем более точно, чем мельче дробление промежутка $[a, b]$ на части. Пусть $\lambda = \max_k \Delta x_k$. Полагают

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пришли к формуле (1.5).

Пример. $\int_a^b dx = b - a$.

$$\blacktriangleright \int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0}(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) = \lim_{\lambda \to 0}(x_n - x_0) = b - a. \blacktriangleleft$$

Этот интеграл выражает площадь прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой 1.