§8. Элементарные функции

Перечисленные ниже функции называют основными элементарными функциями; они наиболее употребительны в приложениях математики.

1°. $y=C$ – const. для $\forall x \in X$, где X – промежуток числовой прямой, её график при $C\neq 0$ представляет собой отрезок прямой, параллельной оси абсцисс.

2°. Показательная функция $y=a^x$, $a\neq 1$, $a>0$. Основные свойства этой функции известны из школьного курса математики: а) $D(y)=\boldsymbol{R}$, $E(y)=(0,+\infty)$; б) при $a>1$ показательная функция возрастает, при $0<a<1$ она убывает. На рис. 8.1 изображены графики $y=a^x$ при $a>1$ и $0<a<1$.

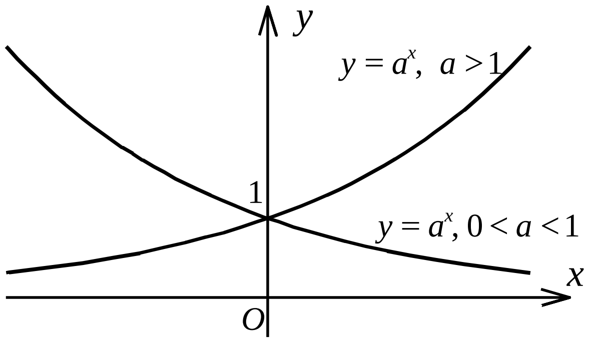


Рис. 8.1. Графики показательной функции

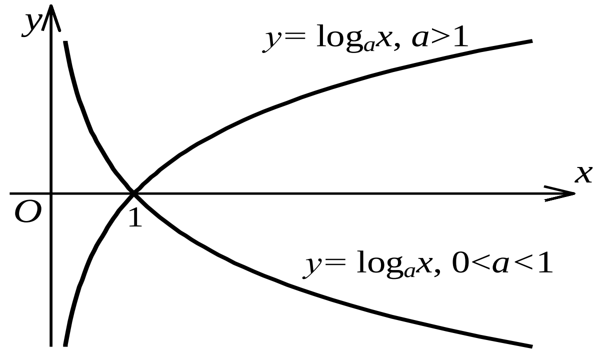


Рис. 8.2. Графики логарифмической функции

3°. Логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a\neq 1$, $a>0$. Эта функция является обратной по отношению к показательной функции, поэтому, в силу теоремы 7.1, основные её свойства следуют из свойств функции $y=a^x$: а) $D(y)=(0,+\infty)$, $E(y)=\boldsymbol{R}$; б) при $a>1$ логарифмическая функция возрастает, при $0<a<1$ она убывает; в) график функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции $y=a^x$ относительно прямой $y=x$. На рис. 8.2 изображены графики $y=\log_a x$ при $a>1$ и $0<a<1$.

4°. Степенная функция $y=x^a$, $a\in\boldsymbol{R}$, $a\neq 0$. При $x>0$ эту функцию рассмотрим как суперпозицию показательной и логарифмической функций: $x^a=10^{a\lg x}$, $\lg x=\log_{10}x$. Функции 10^x и $\lg x$ возрастают на $(0,+\infty)$; тогда и $y=x^a$, $a\neq 0$, строго монотонна на $(0,+\infty)$, а именно, возрастает при $a>0$ и убывает при $a<0$. При $a>0$ эта функция определена в точке 0: $y(0)=0$. При некоторых значениях a (например, при $a\in\boldsymbol{N}$) она определена на всей числовой оси. На рис. 8.3 изображены графики степенной функции при $a=3$, 1/3 и
–1/3.

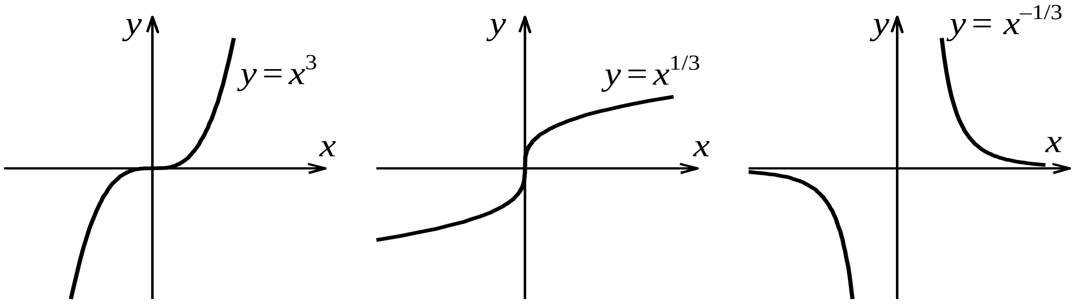


Рис. 8.3. Графики степенной функции при различных значениях a

5°. Тригонометрические функции $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \mathrm{tg} x,\ \ y = \mathrm{ctg} x.$

Эти функции подробно рассмотрены в школьном курсе математики. Их графики приведены на рис. 8.4 – 8.5.

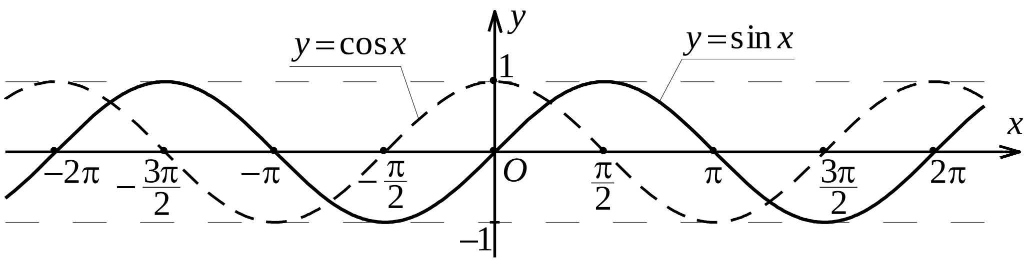


Рис. 8.4. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

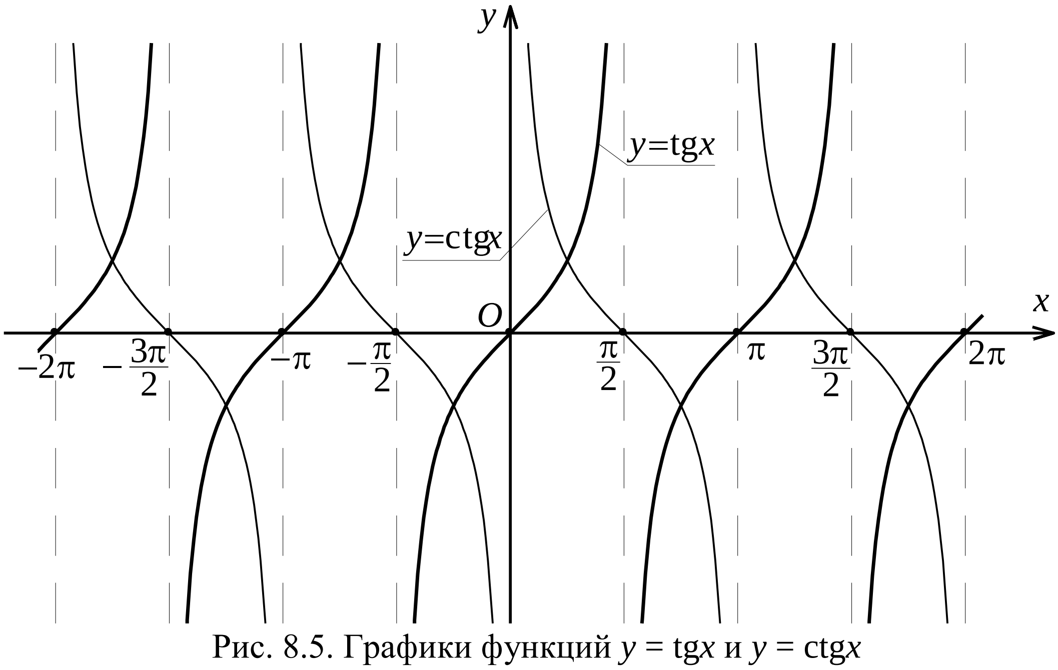


Рис. 8.5. Графики функций y = tg$x$ и y = ctg$x$

6°. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$.

Рис. 8.6. График функции y = arcsin$x$

1). Функция $y = \arcsin x$. По определению $y = \arcsin x$ – это угол (или дуга) из промежутка [–π/2, π/2], синус которого равен x. Таким образом, $y = \arcsin x$ – функция, обратная функции $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2,\ \pi/2]$, поэтому основные ее свойства можно вывести из свойств функции $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2,\ \pi/2]$, и теоремы 7.1:

а). $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

б). $y = \arcsin x$ возрастает на $D(y)$ от $-\pi/2$ до $\pi/2$;

в). $y = \arcsin x$ – нечётная функция:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \text{ при } \forall x \in [-1, 1];$$

г). график функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.6);

д). $\sin(\arcsin x)=x$ при $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(\sin x) = x$ при $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

2). Функция $y = \arccos x$. По определению $y = \arccos x$ – это угол (или дуга) из промежутка $[0, \pi]$, косинус которого равен x. Итак, $y = \arccos x$ – функция, обратная функции $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, поэтому основные её свойства можно вывести из свойств функции $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, и теоремы 7.1:

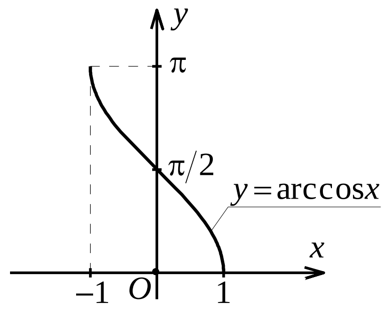


Рис. 8.7. График функции $y = \arccos x$

а). $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [0, \pi]$;

б). $y = \arccos x$ убывает на $D(y)$ от π до 0;

в). функция $y = \arccos x$ не обладает свойствами чётности или нечётности:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

г). график функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.7);

д). $\cos(\arccos x)=x$ при $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(\cos x) = x$ при $\forall x \in [0, \pi]$.

3). Функция $y = \operatorname{arctg} x$. По определению $y = \operatorname{arctg} x$ – это угол (или дуга) из промежутка $(-\pi/2,\ \pi/2)$, тангенс которого равен x. Таким образом, $y = \operatorname{arctg} x$ – функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, поэтому её основные свойства можно вывести из свойств этой функции и теоремы 7.1:

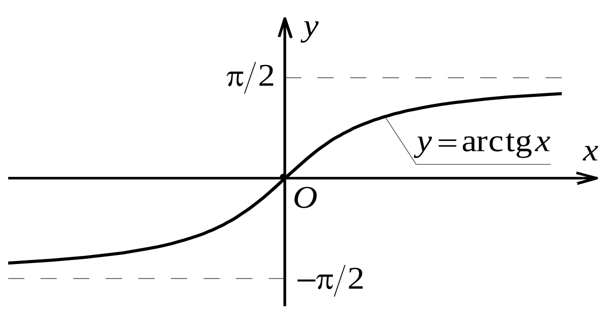
а). $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (-\pi/2, \pi/2)$;

б). функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на $D(y)$;

в). $y = \operatorname{arctg} x$ – нечётная функция: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ при $\forall x \in \boldsymbol{R}$;

г). график функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.8);

д). $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ при $\forall x \in \boldsymbol{R}$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$.



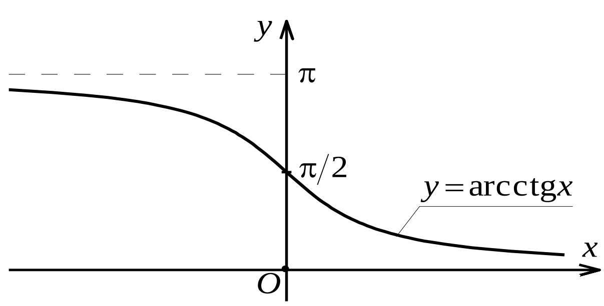


Рис. 8.8. График функции $y = \mathrm{arctg}x$ Рис. 8.9. График функции $y = \mathrm{arcctg}x$

4). Функция $y = \mathrm{arcctg}x$. По определению $y = \mathrm{arcctg}x$ – это угол (или дуга) из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен x. Таким образом, $y = \mathrm{arcctg}x$ – функция, обратная функции $y = \mathrm{ctg}x$, $x \in (0, \pi)$, поэтому основные ее свойства можно вывести из свойств этой функции и теоремы 7.1:

а). $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (0, \pi)$;

б). функция $y = \mathrm{arcctg}x$ убывает на $D(y)$;

в). функция $y = \mathrm{arcctg}x$ не обладает свойствами чётности или нечётности, $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x$;

г). график функции $y = \mathrm{arcctg}x$ симметричен графику функции $y = \mathrm{ctg}x$, $x \in (0, \pi)$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.9);

д). $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x) = x$ при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x) = x$ при $\forall x \in (0, \pi)$.

Определение 8.1. Функция, которая может быть задана одним аналитическим выражением с помощью конечного числа суперпозиций и арифметических операций над основными элементарными функциями, называется *элементарной функцией*.

Элементарная функция называется *алгебраической*, если её можно задать с помощью конечного числа алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональным показателем). Все другие элементарные функции называются *трансцентдентными*. Так, например, $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 2}{\sqrt{x+5} + x^{2/5}}$ – алгебраическая функция, а $y = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{e^x - 1} + \ln\cos(3x+1)}{\sin\frac{1}{x} + \mathrm{ctg}\sqrt[3]{2x-5}}$ – элементарная трансцентдентная функция.

Частным случаем алгебраической функции является так называемая *рациональная функция* $R(x)$, представляемая в виде отношения двух многочленов: $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$. Если степень знаменателя $n \geq 1$, то рациональную функцию называют *рациональной алгебраической дробью*. В противном случае, т.е. при $n = 0$ рациональная функция представляет собой многочлен (ибо $P_0(x) \equiv p_0$, где $p_0 \in \boldsymbol{R}$).

Пример 8.1. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{1/2}(4 - x^2)}$.

►$D(y)$: $\log_{1/2}(4-x^2) \geq 0$ или, в силу свойств логарифмической функции, $D(y)$: $0 < 4 - x^2 \leq 1$. Последнее неравенство равносильно системе из двух неравенств: $0 < 4 - x^2 \wedge 4 - x^2 \leq 1$. Для первого из них имеем: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Решение второго выполним по аналогии: $4 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$

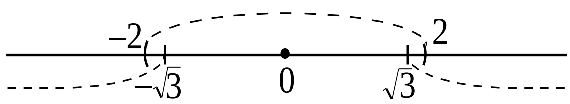


Рис. 8.10. К примеру 8.1

$\Leftrightarrow x\le-\sqrt{3} \vee x\ge\sqrt{3}$. Пересечение найденных решений приводит к равенству: $D(y)=(-2,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2)$ (рис. 8.10).◄

Пример 8.2. Является ли функция $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ чётной? нечётной?

► $D(y)=\boldsymbol{R}$, $y(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{-(-x)})=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-y(x)$ при $\forall x\in\boldsymbol{R}$, поэтому данная функция нечётная.◄

Пример 8.3. Найти $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\max\limits_{x\in X} f(x)$, $\min\limits_{x\in X} f(x)$, если $f(x)=\mathrm{arctg}|x|$ и $X=\boldsymbol{R}$.

►Данная функция является чётной, следовательно, ограничимся рассмотрением только неотрицательных значений x, при этом $0\le\mathrm{arctg}|x|<\pi/2$. Поэтому $\inf\limits_{x\in X} f(x)=\min\limits_{x\in X} f(x)=0$, $\sup\limits_{x\in X} f(x)=\pi/2$, а $\max\limits_{x\in X} f(x)$ не существует.◄

Пример 8.4. Дана функция $y=1-3|\sin 5x|$. Найти её период и $E(y)$.

►$D(y)=\boldsymbol{R}$. Период функции $y=|\sin x|$ равен π (пример 7.1), поэтому

$1-3|\sin 5x|=1-3|\sin(5x+\pi)|$ и $1-3|\sin 5x|=1-3|\sin 5(x+\pi/5)|$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$

и период данной функции $T=\pi/5$. Для отыскания $E(y)$ рассмотрим неравенство $0\le|\sin 5x|\le 1$, вытекающее из свойств функции синус и справедливое при $\forall x\in\boldsymbol{R}$. Умножим все его члены на (–3), при этом знак неравенства изменится на противоположный: $0\ge-3|\sin 5x|\ge-3$. Прибавив теперь ко всем членам неравенства по 1, получим: $1\ge1-3|\sin 5x|\ge-2$. Из последнего неравенства следует, что $E(y)=[-2, 1]$.◄

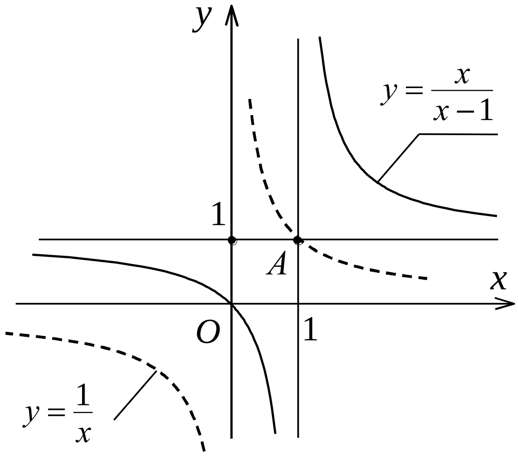


Рис. 8.11. К примеру 8.5.
График функции $f(x)=1/(x-1)$

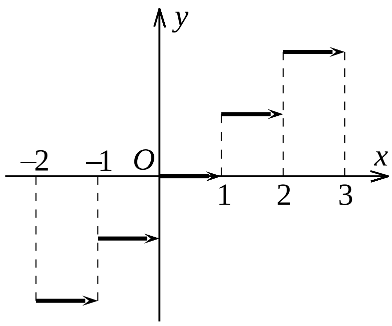


Рис. 8.12. К примеру 8.6.
График функции $y=[x]$

Пример 8.5. Построить график функции $y=\dfrac{x}{x-1}$.

►Имеем $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$, следовательно, $y=1+\dfrac{1}{x-1}$. График данной функции построим путём параллельного переноса центра симметрии

$O(0,\ 0)$ графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ в точку $A(1,1)$. На рисунке 8.11 график функции $y=\dfrac{1}{x}$ изображён пунктирной линией.◄

Пример 8.6. Построить график функции $y=[x]$, $x\in \boldsymbol{R}$ – целой части числа x.

► $y=k$, $x\in [k,\ k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, график данной функции является объединением тех частей прямых $y=k$, абсциссы точек которых удовлетворяют неравенству $k\le x<k+1$(рис. 8.12).◄