§1. Методика применения определенного интеграла к решению практических задач

Набросаем общую схему применения определённого интеграла, иллюстрируя её примерами механических и физических задач.

Пусть требуется определить некоторую постоянную величину Q, связанную с промежутком $[a, b]$. Эту величину мы будем предполагать аддитивной, т. е. такой, что разложение отрезка $[a, b]$ точкой c $(a < c < b)$ на части $[a, c]$ и $[c, b]$ влечет за собой разложение на соответствующие части величины Q, причем значение величины Q, соответствующее всему отрезку $[a, b]$, равно сумме ее значений, соответствующих отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$.

Переходя к решению задачи по определению величины Q, разложим отрезок $[a, b]$ при помощи точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1.1}$$

на n частей

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, b], \tag{1.2}$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина k-го частичного промежутка, $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k$ – ранг дробления (1.1). В соответствии с разложением (1.2) промежутка $[a, b]$ величина Q разложится на n слагаемых $\Delta Q_1,\ \Delta Q_2,\ \ldots,\ \Delta Q_n$:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_k\,. \tag{1.3}$$

Допустим теперь, что существует такая функция $q(x)$, что «элементарное» слагаемое ΔQ_k, соответствующее промежутку $[x_{k-1}, x_k]$ длины Δx_k, приближенно может быть записано в виде

$$\Delta Q_k \approx q(x_k^*)\Delta x_k, \tag{1.4}$$

где x_k^* лежит между x_{k-1} и x_k, причем ошибка равенства (1.4) при бесконечно малом ранге дробления λ будет бесконечно малой, порядка высшего, чем Δx_k, т. е.

$$\Delta Q_k = q(x_k^*)\Delta x_k + o(\Delta x_k). \tag{1.5}$$

В этом случае для Q получается приближенное выражение

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} q(x_k^*)\Delta x_k\,, \tag{1.6}$$

тем более точное, чем меньше λ. Стало быть, точное значение Q будет служить пределом суммы (1.6) при $\lambda \to 0$, или, что то же самое,

$$\boxed{Q=\int_a^b q(x)\,dx}. \qquad (1.7)$$

На практике это рассуждение облекают в более краткую форму, говоря, что если элемент ΔQ величины Q, отвечающий элементарному отрезку $[x, x+\Delta x]$ представим в виде

$$\Delta Q = q(x)\Delta x + o(\Delta x), \qquad (1.8)$$

т. е.

$$dQ = q(x)\,dx, \qquad (1.9)$$

то равенство (1.7) верно. Таким образом, всё дело сводится к установлению равенства (1.9), затем остается лишь «просуммировать» эти элементы, что приводит к формуле (1.7).