Соленоидальные векторные поля

Определение (соленоидальное поле)

Векторное поле $\overline{a}\,(M)$ для любой точки M, принадлежащей области $A \subset R^3$, называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля в точке M равна нулю для любой точки $M \in A$, т.е. $div\ \overline{a}\,(M)=0\ \forall(\cdot)\, M \in A$.

Свойства соленоидальных полей

1) $div\ \overline{a}\,(M)=0 \Rightarrow$ поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю, т.е. $\Pi_\sigma \overline{a}\,(M)=0$;

2) $div\ \overline{a}\,(M)=0 \Rightarrow$ существует некоторое поле $\overline{b}\,(M)$, такое что его ротор равен $\overline{a}\,(M)$ для любой точки $M \in A$, т.е.

$$\overline{a}\,(M)= rot\,\overline{b}\,(M)\ \forall(\cdot)\, M \in A .$$

Вектор $\overline{b}$ называется *векторным потенциалом* соленоидального векторного поля $\overline{a}(M)$.

3) Пусть $\overline{a}\,(M)$ - произвольное векторное поле.

Тогда $rot\,\overline{a}\,(M)$ - есть соленоидальное поле, то есть

$$div\, rot\,\overline{a}\,(M)=0 .$$

Доказательство 3 свойства:

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$.

$$rot\,\overline{a}\,(M)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{P_1}\cdot \bar{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{Q_1}\cdot \bar{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{R_1}\cdot \bar{k} = \{P_1(M); Q_1(M); R_1(M)\}$$

Тогда $div\, rot\,\overline{a}\,(M)=\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}=\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}+\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}=0$. ч.т.д.

Замечание 1:

Свойства 1) и 2) в литературе могут быть использованы как определение соленоидального поля;

Замечание 2:

Векторный потенциал определяется неоднозначно (это следует из свойства 2)

Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Теорема.

Пусть $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} -$ произвольное векторное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть функции $P(M); Q(M); R(M) -$ имеют непрерывные частные производные $\forall\, M \in A$.

Тогда

$$\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M), \qquad (**)$$

где $\overline{a_1}(M) -$ потенциальное поле, $\overline{a_2}(M) -$ соленоидальное поле $\forall\, M \in A$.

Доказательство:

Пусть $\overline{a_1}(M) -$ потенциальное поле $\Rightarrow$ $\overline{a_1}(M) = gradf(M)\ \forall\, M \in A$.

огда $\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M)$.

Из определения соленоидального векторного поля имеем $div\overline{a_2}(M) = 0$,

т.е.

$$div\big(\bar{a}(M) - gradf(M)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad div\bar{a}(M) - divgradf(M) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$div\bar{a}(M) = divgradf(M) \qquad (*)$$

Уравнение (*) - это неоднородное уравнение в частных производных второго порядка, которое называется уравнением Пуассона. Это уравнение имеет бесконечное множество решений.

Пусть $f(M)$ − решение (*).

Тогда

$$\overline{a_1}(M) = gradf(M) \, \forall \, M \in A \text{ и}$$

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M).$$

ч.т.д.

Замечание:

Представление векторного поля $\bar{a}(M)$ в виде (**) не единственно.

Гармонические векторные поля

Определение (гармонического поля)

Векторное поле $\bar{a}(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$, называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным, и соленоидальным.

$$\begin{cases} \bar{a}(M) = gradf(M) \\ div\bar{a}(M) = 0 \end{cases}, \quad \forall \, M \in A.$$

Замечание:

1) Для гармонического поля справедливо равенство:

$$divgradf(M) = 0.$$

2) Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

§ 8. Дифференциальные операции 1 и 2 порядков. Операторы Гамильтона (набла) и Лапласа.

Дифференциальные операции 1 порядка.

Оператор Гамильтона (набла).

Дифференциальные операции 1 порядка это:

1) $grad\, f(M)$
2) $div\, \overline{a}\ (M)$
3) $rot\, \overline{a}\, (M)$

Многие операции векторного анализ могут быть записаны в сокрщенной и удобной для расчетов форме с помощью символического операрора Гамильтона (набла)

Определение (оператора Гамильтона)

Символ

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \right)$$

называется *символическим вектором* или *оператором Гамильтона (набла).*

Используя оператор Гамильтона, дифференциальные операции 1 порядка

$gradf$; $div\overline{a}$ и $rot\overline{a}$ можно записать так:

1) Пусть $f(M)-$ скалярное поле.
Тогда

$$\nabla f(M) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \right) f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{k} \right) = grad\, f(M),$$ т.е.

$\nabla f(M) = grad\, f(M)$ **- для скалярного поля**

2) Пусть $\overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$ $-$ векторное поле .

Тогда

$$\nabla \cdot \overline{a}(M) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\left(P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} = div\,\overline{a}(M), \text{ т.е.}$$

$\nabla \cdot \overline{a}(M) = div\,\overline{a}(M)$ - **для векторного поля**

3) Пусть $\overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$ $-$ векторное поле.

Тогда

$$\nabla \times \overline{a}(M) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix} = rot\,\overline{a}(M), \text{ т.е.}$$

$\nabla \times \overline{a}(M) = rot\,\overline{a}(M) -$ **для векторного поля**

Свойства оператора Гамильтона

1) $\nabla c = \overline{0}$, где c – const

2) $\nabla \overline{c} = 0$, где $\overline{c}$ - постоянный вектор

3) $\nabla \times \overline{c} = \overline{0}$, где $\overline{c}$ - постоянный вектор

4) $\nabla\left(\lambda_1\overline{a} \pm \lambda_2\overline{b}\right) = \lambda_1\nabla\overline{a} \pm \lambda_2\nabla\overline{b}$

5) $\nabla \times \left(\lambda_1\overline{a} \pm \lambda_2\overline{b}\right) = \lambda_1\nabla \times \overline{a} \pm \lambda_2\nabla \overline{\times b}$

Дифференциальные операции 2 порядка.

Оператор Лапласа.

К дифференциальным операциям 2 порядка относятся операции *div*, *grad* и *rot*, применённые к дифференциальным операциям 1 порядка:

$$div\ grad\ f(M) = \nabla\left(\nabla\ f(M)\right)$$

$$rot\ grad\ f(M) = \nabla \times \nabla\ f(M)$$

$$grad\ div\ \overline{a}(M) = \nabla\left(\nabla\ \overline{a}(M)\right)$$

$$div\ rot\ \overline{a}(M) = \nabla\left(\nabla \times \overline{a}(M)\right)$$

$$rot\ rot\ \overline{a}(M) = \nabla \times \left(\nabla \times \overline{a}(M)\right)$$

Дифференциальные операции 2 порядка, еще можно представить в виде таблицы:

$\cancel{grad\ grad\ f(M)}$	$grad\ div\ \overline{a}(M)$	$\cancel{grad\ rot\ \overline{a}(M)}$
$div\ grad\ f(M)$	$\cancel{div\ div\ \overline{a}(M)}$	$div\ rot\ \overline{a}(M)$
$rot\ grad\ f(M)$	$\cancel{rot\ div\ \overline{a}(M)}$	$rot\ rot\ \overline{a}(M)$

<u>Определение</u> (оператора Лапласа)

Символ $\Delta = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ -

называется *оператором Лапласа*.

Используя оператор Лапласа, дифференциальные операции 2 порядка можно записать так:

1) $f(M) -$ скалярное поле:

$$\Delta f(M) = \nabla \cdot \nabla f(M) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z}\bar{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}\,, \qquad \text{т. е.}$$

$$\Delta f(M) = \nabla\nabla f(M) = div\ grad\ f(M)$$

Если для скалярного поля $f(M)$ выполняется условие $\Delta f(M) = 0$, то такое поле называтся *Лапласовым или гармоническим*

2) $\bar{a}(M) -$ векторное поле:

$$\Delta\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \left(P(M)\cdot\bar{i} + Q(M)\cdot\bar{j} + R(M)\cdot\bar{k}\right) = \left(\Delta P(M)\cdot\bar{i} + \Delta Q(M)\cdot\bar{j} + \Delta R(M)\cdot\bar{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\cdot\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\cdot\bar{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\cdot\bar{k}$$

Справедливы так же следующие равенства для дифференциальных операций второго порядка:

1) $rotgradf(M) = \nabla \times (\nabla f(M) = (\nabla \times \nabla) f(M) = [\text{т. к. } \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}] = \bar{0}$,

т.е. $\qquad rotgradf(M) = \bar{0} \qquad$ или $\qquad \nabla \times (\nabla f(M) = \bar{0}$

2) $graddiv\bar{a}(M) = \nabla\left(\nabla\bar{a}(M)\right) = \frac{\partial}{\partial x} div\bar{a}(M)\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} div\bar{a}(M)\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} div\bar{a}(M)\bar{k} =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

3) $divrot\bar{a}(M) = \nabla\left(\nabla \times \bar{a}(M)\right) = 0,$ т.к. смешанное произведение трехвекторов, из которых два одинаковые, равно нулю.

4) $rotrot\bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = \begin{bmatrix} \bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b}\bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{a}\bar{b} \\ \text{двойное векторное произведение} \end{bmatrix} =$

$$= \nabla\left(\nabla\bar{a}(M)\right) - (\nabla\nabla)\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M),$$

т. е. $rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$$

Замечание:

Для дифференциальных операций 2 порядка можно составить таблицу

	$\bar{a}\,(M)$	$f(M)$	
	$grad\ f(M)$	$div\,\bar{a}\ (M)$	$rot\,\bar{a}\ (M)$
$grad\ f(M)$	---	$grad\ div\,\bar{a}(M) = \nabla\left(\nabla\,\bar{a}(M)\right)$	---
$div\,\bar{a}\ (M)$	$div\ grad\ f(M) = \nabla\left(\nabla\ f(M)\right) = \Delta f(M)$	---	$div\,rot\,\bar{a}(M) = \nabla\left(\nabla \times \bar{a}(M)\right) = 0$
$rot\,\bar{a}\ (M)$	$rot\ grad\ f(M) = \nabla \times \nabla\ f(M) = \bar{0}$	---	$rot\,rot\,\bar{a}(M) = \nabla \times \left(\nabla \times \bar{a}(M)\right) = grad\ div\,\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M) = \nabla\nabla\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$