§ 4. Дивергенция векторного поля

Дивергенция (расходимость) векторного поля даёт информацию о распределении и интенсивности источников и стоков векторного поля.

Определение (дивергенция векторного поля)

Пусть $\bar{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть σ – гладкая, двухсторонняя, ориентированная в сторону внешней нормали замкнутая поверхность, ограничивающая тело T: $\sigma \subset A$.

Дивергенцией векторного поля $\bar{a}(M)$ называется:

$$\lim_{\substack{diam T \to 0 \\ (\mu T \to 0)}} \frac{\Pi_\sigma \bar{a}(M)}{\mu T} = div\,\bar{a}(M)$$

Замечания:

1) Приведенное выше определение дивергенции векторного поля является инвариантным относительно задания СК;

2) Точки M, в которых $div\,\bar{a}(M) > 0$, называются *источниками векторного поля*.

Точки M, в которых $div\,\bar{a}(M) < 0$, называются *стоками векторного поля*.

$\left| div\,\bar{a}(M) \right|$ даёт интенсивность источника/стока в точке M.

Теорема (о вычислении дивергенции векторного поля в ПДСК)

Пусть в R^3 задана ПДСК.

Пусть $\bar{a}(M)$ – векторное поле. $\bar{a}(M) = P(x,y,z)\cdot\bar{i} + Q(x,y,z)\cdot\bar{j} + R(x,y,z)\cdot\bar{k}$

$\forall(\cdot)\ M(x,y,z) \in A \subset R^3$

Пусть $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z); P'_x(x,y,z); Q'_y(x,y,z); R'_z(x,y,z)$ непрерывны $\forall(\cdot)\ M(x,y,z) \in A \subset R^3$.

Тогда $div\,\bar{a}(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Доказательство:

Пусть σ – гладкая, двусторонняя, ориентированная в сторону внешней нормали, замкнутая поверхность, ограничивающая тело T: $\sigma \subset A$.

Пусть точка M лежит внутри σ, т.е. точка $M \in T$.

Рассмотрим поток векторного поля:

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \oint\!\!\!\oint_{\sigma_{внеш}} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \iiint_T \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \left[\frac{\partial P(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_1)}{\partial z} \right] \cdot \mu T$$ (по теореме о среднем значении тройного интеграла)

$$\lim_{diam T \to 0} \frac{\Pi_\sigma \overline{a}(M)}{\mu T} = \lim_{diam T \to 0} \left[\frac{\partial P(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_1)}{\partial z} \right] = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

Замечания:

1) Равенство $div\, \overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ в некоторой литературе используется как определение дивергенции векторного поля;

2) Пусть выполнены условия теоремы Остроградского-Гаусса.

$\oint\!\!\!\oint_{\sigma_{внеш}} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \iiint_T div\, \overline{a}(M) \cdot \mu T$ – векторная форма записи теоремы Остроградского-Гаусса.

3) Дивергенция – скалярная характеристика векторного поля.

Свойства дивергенции векторного поля

1) $div\left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot \overline{a_2}(M)\right) = \lambda_1 \cdot div\, \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot div\, \overline{a_2}(M)$,

где $\lambda_1, \lambda_2 = const$

Доказательство:

а) $div\left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M)\right) = \frac{\partial(\lambda_1 \cdot P_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda_1 \cdot Q_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda_1 \cdot R_1)}{\partial z} = \lambda_1 \cdot \left[\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \right] = \lambda_1 \cdot div\, \overline{a_1}(M)$

б)

$$div\left(\overline{a_1}(M) \pm \overline{a_2}(M)\right) = \frac{\partial(P_1 \pm P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1 \pm Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial(R_1 \pm R_2)}{\partial z} = \left[\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \right] \pm \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \right] =$$

$$= div\, \overline{a_1}(M) \pm div\, \overline{a_2}(M)$$

Из пунктов а) и б) следует, что

$$div\left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot \overline{a_2}(M)\right) = \lambda_1 \cdot div\, \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot div\, \overline{a_2}(M)\,.$$

2) $div\left(\varphi(M) \cdot \overline{a}(M)\right) = \overline{a}(M) \cdot grad\, \varphi(M) + \varphi(M) \cdot div\, \overline{a}(M) \quad \forall(\cdot)\, M \in A \subset R^3$

<u>Доказательство:</u>

$$div\left(\varphi(M) \cdot \overline{a}(M)\right) = \left[\overline{a}(M) = P(x,y,z) \cdot \overline{i} + Q(x,y,z) \cdot \overline{j} + R(x,y,z) \cdot \overline{k}\right] =$$

$$= \frac{\partial\left(\varphi(M) \cdot P(M)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varphi(M) \cdot Q(M)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varphi(M) \cdot R(M)\right)}{\partial z} = P(M)\frac{\partial \varphi(M)}{\partial x} + Q(M)\frac{\partial \varphi(M)}{\partial y} + R(M)\frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} +$$

$$\varphi(M) \cdot \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}\right) = \overline{a}(M) \cdot grad\, \varphi(M) + \varphi(M) \cdot div\, \overline{a}(M)$$

Пример:

$$\overline{a}(M) = (x^2 + y) \cdot \overline{i} + (y^2 + z) \cdot \overline{j} + (z^2 + x) \cdot \overline{k}$$

Определить, что находится в точке $M_0(1;-2;3)$: источник или сток.

$div\, \overline{a}(M) = (2x + 2x + 2z)\big|_{M_0} = 2 - 4 + 6 = 4 > 0$ – источник.