§1. Крамеровские системы линейных алгебраических уравнений

1°. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

С введением понятия матриц и операций над ними (см. §1 – 2 главы 2) появляется возможность записать систему (1.1) более компактно, а именно, в виде так называемого матричного уравнения. Рассмотрим следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A – это *матрица коэффициентов системы* (1.1) (см. §1, гл. 1), матрица X называется *столбцом неизвестных*, а матрица B – *столбцом свободных членов*. Вычислим произведение матриц A и X:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Элементами столбца из правой части (1.2) являются левые части уравнений системы (1.1). Используя определение равенства двух матриц (определение 1.1 главы 2), перепишем эту систему в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменяя в последнем соотношении его левую часть в силу (1.2) на AX, а правую – на B, приходим к соотношению

$$AX = B. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) называется *матричным уравнением*, соответствующим системе (1.1). *Решением* матричного уравнения (1.3) называется такой столбец X, который при подстановке в это уравнение обращает его в матричное тождество. Решение матричного уравнения (1.3) эквивалентно решению системы (1.1).

Так, системе $\begin{cases} x-3y+2z=-1, \\ 2x+4y-z=5 \end{cases}$ можно поставить в соответствие следующее матричное уравнение: $AX=B$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2°. Теорема Крамера. Крамеровские системы. Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Система (1.4) называется *квадратной*. Матрица A этой системы – квадратная матрица n-го порядка,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A называется *главным определителем* системы и обозначается Δ. Таким образом, $\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Наряду с главным определителем системы Δ рассмотрим так называемые *вспомогательные определители* Δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, которые получаются из главного путём замены его i-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; i=1, \ldots, n.$$

Теорема 1.1 (*теорема Крамера*). Если главный определитель Δ системы (1.4) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, определяемое равенствами

$$x_i=\Delta_i/\Delta, \; i=1,2,\ldots,n. \tag{1.5}$$

Равенства (1.5) называются *формулами Крамера*, а система (1.4) при $\Delta\neq 0$ называется *крамеровской системой*.

► Рассмотрим матрицу A системы (1.4), столбец X из неизвестных и столбец B из свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

и сопоставим системе (1.4) матричное уравнение:

$$AX = B. \tag{1.6}$$

Так как $\Delta = \det A \neq 0$, то существует единственная обратная матрица A^{-1} (теорема 4.2 глава 2). Умножим слева обе части равенства (1.6) на A^{-1}, получим: $A^{-1}AX = A^{-1}B$ или $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Последнее равенство можно переписать в виде: $EX = A^{-1}B$, ибо $A^{-1}A = E$ (определение обратной матрицы, E – единичная матрица n-го порядка). Поскольку $EX = X$, имеем

$$X = A^{-1}B. \tag{1.7}$$

Столбец X из (1.7) – решение матричного уравнения (1.6). В самом деле, после его подстановки в (1.6) имеем: $AA^{-1}B = B \Rightarrow (AA^{-1})B = B$. Так как $A^{-1}A = E$ и $EB = B$, то приходим к матричному тождеству $B = B$, а это и означает, что данный столбец – решение (1.6). Покажем, что это решение единственно. Пусть X_1 – некоторое решение уравнения (1.6), $AX_1 = B$. Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1}: $A^{-1}AX_1 = A^{-1}B$. Проведя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, для X_1 получаем равенство: $X_1 = A^{-1}B$. В силу (1.7) имеем: $X_1 = X$.

Элементы столбца $A^{-1}B$ составляют решение системы (1.4), поэтому для обоснования равенств (1.5) надо доказать, что они равны Δ_i/Δ, $i = 1,2,\dots,n$. Используя для A^{-1} равенство (4.1) из главы 2, имеем:

$$A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраические дополнения к элементам a_{ik} матрицы A, $i,k = 1,2,\dots,n$. Выполнив умножение матриц в правой части последнего равенства и заменив обозначение $\det A$ на Δ, получим:

$$A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Элементы столбца из правой части (1.8) являются разложениями вспомогательных определителей Δ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, по элементам их i-ых столбцов (свойство 7 определителей n–го порядка или теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца, глава 1, §3). Поэтому (1.8) можно переписать так:

$$A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix}.$$

Используя понятие операции умножения матрицы на число, понятие равенства матриц и равенство (1.7), получим соотношения:

$$\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = \Delta_n/\Delta, \end{cases}$$

которые и являются формулами (1.5) – формулами Крамера.

Таким образом, доказано существование решения системы (1.4), определяемого формулами (1.5). Единственность такого решения следует из доказанной выше единственности решения матричного уравнения (1.6), соответствующего данной системе. ◄

Пример 1.1. Используя формулы Крамера, решить систему

$$\begin{cases} x + 2z = 8, \\ -x + 3y = -5, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

►Для отыскания решения системы по формулам (1.5) вычислим главный определитель системы Δ и вспомогательные определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$, получающиеся из Δ путём замены его первого, второго и третьего столбцов соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 + 2(-5 - 12) = -10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2(-4 + 5) + (-5 + 8) = 5,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 8(-1 - 3) = -15.$$

Теперь находим решение системы по формулам (1.5):

$x = \Delta_x/\Delta = 2, \; y = \Delta_y/\Delta = -1, \; z = \Delta_z/\Delta = 3$. ◄

Замечание 1.1. Равенство (1.7) позволяет получить решение крамеровской системы в матричной форме. При этом предварительно надо перейти от системы к соответствующему матричному уравнению. Такой способ решения называют *методом обратной матрицы*

Пример 1.2. Используя матричную форму записи, решить систему уравнений из примера 1.1.

►Через A обозначим матрицу системы , через B – столбец свободных членов, а через X – столбец из неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемой системе соответствует уравнение (1.6), где матрицы A и B имеют указанный смысл. Матрица A имеет обратную (см. пример 4.2 главы 2),

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

С помощью равенства (1.7) найдём решение системы:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\cdot 8+2\cdot(-5)+(-6)\cdot 4 \\ 1\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+(-2)\cdot 4 \\ -4\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+3\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система имеет единственное решение x=2, $y=-1, z=3$. ◄

Замечание 1.2. Систему уравнений с квадратной неособенной матрицей (крамеровскую систему) можно решать тремя способами: методом Гаусса, по формулам Крамера (1.5), а также методом обратной матрицы по формуле (1.7) (см. примеры 1.8 главы 1, примеры 1.1 и 1.2 настоящего параграфа).