§3. Уравнение n-го порядка, не содержащее независимой переменной

Если уравнение не содержит независимой переменной x, т. е. имеет вид

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

то порядок этого уравнения всегда можно понизить на единицу. Для этого сделаем замену искомой функции, положив $\boxed{y' = z}$ и приняв y за новую независимую переменную, т. е. будем считать, что z есть функция от y: $z = z(y)$.

Выразим производные от y по x через производные от z по y. Применяя правило дифференцирования сложных функций, получим для производных от y по x выражения:

$$y''_{x^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z.$$

Вторая производная от y по x выразилась через производную первого порядка от z по y. Это создает перспективу понижения порядка данного уравнения (3.1) на единицу.

Вычислим y'''_{x^3}:

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy} z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) z$$

и т. д. Наконец, выразим $y^{(n)}_{x^n}$ как функцию z и ее производных до порядка $n-1$ включительно:

$$y^{(n)}_{x^n} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right).$$

Подставляя найденные выражения производных от y по x через производные от z по y в уравнение (3.1), придем к уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dx} z, \ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0. \tag{3.2}$$

Если это преобразованное уравнение проинтегрировано и

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \tag{3.3}$$

– общее решение уравнение (3.2), то нахождение общего интеграла уравнения (3.1) сводится к решению уравнения

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

т. е. к квадратуре

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y''(1+y)-y'^2=0. \qquad (3.4)$$

Это уравнение не содержит независимой переменной x и, следовательно, относится к рассматриваемому типу. Найдем общее решение уравнения.

▶ Полагая $y'=z$, имеем $y''=\dfrac{dz}{dy}z$. Поэтому уравнение (3.4) примет вид

$$\frac{dz}{dy}z(1+y)-z^2=0 \quad \text{или} \quad (1+y)\,dz-z\,dy=0.$$

Из последнего равенства, разделяя переменные и выполняя интегрирование, найдем $\ln z-\ln(1+y)=\ln C_1$, откуда

$$z=C_1(1+y).$$

Заменяя z на y', имеем $y'=C_1(1+y)$. Отсюда следует

$$\frac{dy}{1+y}=C_1dx.$$

Интегрируя, получим

$$\ln(1+y)=C_1x+\ln C_2 \quad \Rightarrow \quad 1+y=C_2e^{C_1x} \quad \Rightarrow \quad y=C_2e^{C_1x}-1$$

– общее решение уравнения (3.4). ◀