

Измерение информации

Вариант 3

Задача 1. Вовочка задумал трёхзначное натуральное число. Сколько информации о нём содержится в сообщении «Задуманное число является палиндромом (т.е. симметрично)»?

Задача 2. В электричке – 9 вагонов. В одном из них – кондуктор. В третьем вагоне, в котором едет Вовочка, кондуктора нет, а Вовочка хочет знать, в каком именно вагоне сейчас кондуктор. Сколько информации получит Вовочка в ответ на вопрос «Кондуктор впереди?»?

В задачах будем пользоваться формулами:

$$\begin{aligned} H &= \log_2 N && \text{(Энтропия, «формула Хартли»)} \\ I &= H_1 - H_2 && \text{(Количество информации в сообщении)} \\ H &= \sum_{i=1}^N P_i \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P_i} \right) && \text{(«Формула Шеннона»)} \end{aligned}$$

1

Задуманное число находится в промежутке от 100 до 999 (включительно), количество возможных вариантов $N = 900$, теперь можно узнать энтропию $H = \log_2 900 \approx 9.81$.

После того, как мы узнаём, что число является палиндромом, становится понятно, что Вовочка задумал не XYZ, а XYX. Зная это можно сказать, что т.к. последняя цифра всегда равна первой, её можно просто опустить, оставив XY. Посчитаем снова: $N = 90$; $H_1 = \log_2 90 \approx 6.64$. Осталось посчитать количество информации в сообщении $I = 9.81 - 6.64 = 3.17$

Ответ: $I = 3.17$ бита

2

Вагонов у нас 9, а в вагоне №3 кондуктора нет, следовательно он в одном из 8 (N). Энтропия данном случае $H = \log_2 8 = 3$. Если Вовочка получает утвердительный ответ на свой вопрос, то $N = 6$, а $H_1 = \log_2 6 \approx 2.58$. Отсюда $I_1 = 3 - 2.58 = 0.42$.

При отрицательном ответе количество возможных вариантов сокращается до 2 (N), значит $H_2 = \log_2 2 = 1$, и $I_2 = 3 - 1 = 2$

Посчитаем теперь по среднее количество информации в ответе на вопрос по формуле Шеннона: $6/8 * \log_2 8/6 + 2/8 * \log_2 8/2 \approx 1,12$

Ответ: $I = 1,12$ бит (при «да» $I_1 = 0.42$ бита; при «нет» $I_2 = 2$ бита)