§6. Базис и координаты вектора.
Прямоугольная декартова система координат

Понятия вектора и линейных операций над векторами алгебраизируют геометрические высказывания, т.е. заменяют геометрические утверждения векторными равенствами. Используя результаты предыдущих параграфов, приведём теперь действия с векторами к действиям с числами, т.е. арифметизируем векторно-алгебраические соотношения. Для этого введём понятия базиса на данном множестве векторов.

Определение 6.1. Базисом данного множества векторов называется любой упорядоченный набор из n его линейно независимых векторов, где n равно максимально возможному числу линейно независимых векторов этого множества.

Введение базиса на множестве векторов служит основой для построения системы координат на прямой, плоскости и в пространстве.

1°. Базис множества векторов, параллельных данной прямой. Пусть дана прямая l и множество V_1 векторов, параллельных l, V_1 – это множество коллинеарных векторов. Любая пара векторов из V_1 по теореме 5.1 линейно зависима, а любой ненулевой вектор $\vec{a}$ из V_1 линейно независим (замечание 4.1), поэтому максимально возможное число линейно независимых векторов в V_1 равно 1.

Определение 6.2. Любой вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ из V_1 называется *базисом* в V_1 и на данной прямой l.

Для любого вектора $\vec{b}$ из V_1 в силу свойства коллинеарных векторов (теорема 3.1) справедливо равенство

$$\vec{b} = x\vec{a}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \tag{6.1}$$

которое называется *разложением* вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}$, а число x – координатой вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{a}$. Выбор базиса в V_1 вводит взаимно однозначное соответствие между векторами из V_1 и вещественными числами.

Выбор базиса $\vec{a}$ на прямой l задает на ней направление и превращает её в ось $\vec{l}$. Пусть $\vec{a} = \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$, вектор $\vec{e}$ называется *ортом* данной оси. Тогда $\vec{b} = x\vec{e}$, а $x = \pm|\vec{b}|$, как это следует из определения 3.1. Знак «+» соответствует сонаправленности векторов $\vec{b}$ и $\vec{e}$, а «–» – противонаправленности. Число x в этом случае называется *координатой* вектора $\vec{b}$ на оси $\vec{l}$.

2°. Базис множества векторов, параллельных данной плоскости. Пусть дана плоскость и множество V_2 векторов, ей параллельных, V_2 – множество компланарных векторов. Любая тройка векторов из V_2 линейно зависима по теореме 5.3, а любая пара неколлинеарных векторов из V_2 линейно независима по следствию из теоремы 5.1. Поэтому максимальное возможное число линейно независимых векторов в V_2 равно 2.

Определение 6.3. Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ из множества V_2 векторов, параллельных данной плоскости, называется *базисом* в V_2 и на данной плоскости.

Любой вектор $\vec{a}$ из V_2 по теореме 5.2 можно представить единственным образом в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad x, y \in \boldsymbol{R}. \tag{6.2}$$

Числа x и y называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в данном базисе ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$), а равенство (6.2) называется *разложением* вектора $\vec{a}$ по данному базису. Выбор базиса в V_2 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из V_2 и упорядоченными парами (x, y) вещественных чисел. Так, для вектора $\vec{a}$ из примера 5.2 числа $\sqrt{3}$, 2/3 – его координаты в базисе ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$).

Пример 6.1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. При каких значениях параметра α векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ образуют базис в множестве V_2?

►***Найдём значения параметра α, при которых векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ линейно независимы и, следовательно, неколлинеарны. Приравняем нуль-вектору линейную комбинацию данных векторов: $\lambda_1(\vec{a}+2\vec{b})+\lambda_2(3\vec{a}+\alpha\vec{b})=\vec{0}$. Перегруппируем члены в левой части этого равенства: $(\lambda_1+3\lambda_2)\vec{a}+(2\lambda_1+\alpha\lambda_2)\vec{b}=\vec{0}$. Линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равная нуль-вектору, может быть только тривиальной, так как эти векторы неколлинеарны и, следовательно, линейно независимы (следствие из теоремы 5.1). Поэтому для λ_1 и λ_2 получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2=0,\\ 2\lambda_1+\alpha\lambda_2=0.\end{cases}$ Теперь задача формулируется так: найти значения параметра α, для которых нулевое решение этой системы единственно. В силу теоремы Крамера это условие выполняется только в том случае, если главный определитель Δ системы отличен от нуля. Поскольку Δ= α–6, то приходим к выводу, что нужные значения параметра α определяются неравенством: α ≠ 6.***◄

3°. Базис множества всех векторов пространства. Любые четыре вектора из V_3 линейно зависимы по теореме 5.5, а три некомпланарных вектора из V_3 линейно независимы по следствию из теоремы 5.3. Поэтому максимальное возможное число линейно независимых векторов в V_3 равно 3.

Определение 6.4. Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ из множества V_3 всех векторов пространства называется *базисом* в V_3 и в пространстве.

Любой вектор $\vec{a}$ из V_3 согласно теореме 5.4 можно единственным образом представить в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad x, y, z \in \boldsymbol{R}. \tag{6.3}$$

Числа x, y, z называют *координатами* вектора $\vec{a}$ в данном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а равенство (6.3) называется *разложением* вектора $\vec{a}$ по данному базису. Выбор базиса в V_3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из V_3 и упорядоченными тройками (x, y, z) вещественных чисел. Для вектора $\vec{a}$ из примера 5.3 числа 3/4, 1/4, 1/2– его координаты в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Обобщая вышесказанное, заключаем, что на пути арифметизации векторно-алгебраических соотношений сделан важный шаг – установлено взаимно однозначное соответствие между векторами из множеств V_1, V_2, V_3 и упорядоченными наборами действительных чисел. Для достижения поставленной цели осталось установить правила выполнения линейных операций с векторами, заданными разложениями в некотором базисе.

Правило 6.1. При сложении векторов, заданных разложениями в некотором базисе, складываются их соответствующие координаты.

►Пусть, для определённости, даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из V_3, а также $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – базис в V_3. Имеем

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \tag{6.4}$$

$$\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3, \tag{6.5}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – координаты $\vec{a}$, а β_1,β_2,β_3 – координаты $\vec{b}$ в выбранном базисе. Используя свойства линейных операций с векторами (§§2 и 3), сумму $\vec{a}+\vec{b}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\vec{a}+\vec{b} = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) + (\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3) = = (\alpha_1+\beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2+\beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3+\beta_3)\vec{e}_3,$$

что и требовалось доказать.◄

Правило 6.2. При умножении вектора, заданного разложением в некотором базисе, на действительное число λ все его координаты умножаются на это число.

►Пусть, для определённости, дан вектор $\vec{a}$ из V_3, $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – базис в V_3. Имеем

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3,$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ координаты $\vec{a}$ в выбранном базисе. Используя свойства линейных операций с векторами (§§2 и 3), произведение $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число λ можно преобразовать так:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3,$$

что и требовалось доказать.◄

Свойство координат коллинеарных векторов. Соответственные координаты коллинеарных векторов в любом базисе пропорциональны.

►Действительно, пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из V_3, а также $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – базис в V_3, причем $\vec{a}\|\vec{b}$. Для этих векторов имеем разложения (6.4), (6.5). Согласно теореме 3.1 для $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо соотношение: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где λ – некоторое действительное число. Используя правило 2 и единственность разложения вектора в данном базисе, получаем равенства $\beta_1 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, $\beta_3 = \lambda\alpha_3$, что и означает пропорциональность координат.◄

Поставленная в начале параграфа задача решена – линейные операции с векторами сведены к арифметическим операциям (сложению и умножению) над действительными числами.

4°. Прямоугольный базис. Прямоугольная декартова система координат. Особую роль в аналитической геометрии играет так называемый прямоугольный базис, в котором векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения: $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются ортами прямоугольного базиса. С прямоугольным базисом связано понятие о прямоугольной декартовой системе координат.

Определение 6.5. *Прямоугольной декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность некоторой точки O и прямоугольного базиса. Точка O называется *началом координат*; прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало в направлении ортов базиса, называются *координатными осями – абсцисс*, *ординат* и *аппликат* соответственно (рис. 6.1). Плоскости, проходящие через какие-либо две координатные оси, называются *координатными плоскостями* Oxy, Oyz и Oxz. *Прямоугольными координатами произвольной точки* M пространства называются координаты её радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном прямоугольном базисе (рис. 6.1). Их пишут в скобках после обозначения точки, например, $M(x, y, z)$, при этом x называется *абсциссой*, y – *ординатой*, а z – *аппликатой* точки M.

Выбранное определение прямоугольных координат точки пространства устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками вещественных чисел (x, y, z).

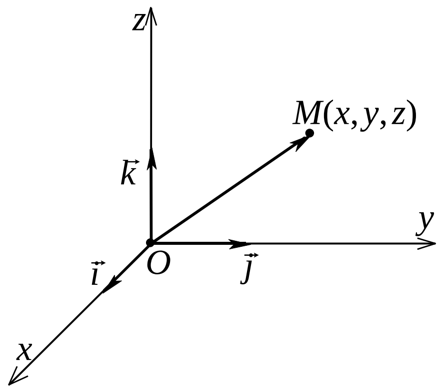

Рис. 6.1. Прямоугольный базис и прямоугольная декартова система

Пример 6.2. Дана точка $M(2, 3, 5)$. Найти координаты точек, симметричных M относительно: а) каждой из координатных плоскостей; б) каждой из координатных осей; в) начала координат.

►Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат и изобразим точку M на чертеже (рис. 6.2).

а) Точка M_1 симметрична точке M относительно плоскости $x = 0$, $M_1(-2, 3, 5)$; точка M_2 симметрична точке M относительно плоскости

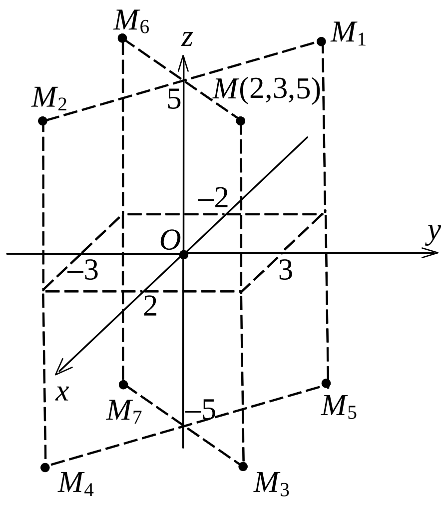

Рис. 6.2. К примеру 6.2

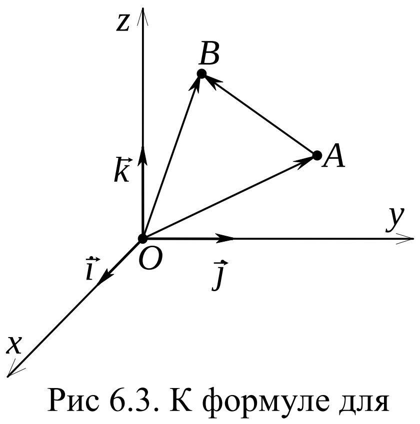

Рис 6.3. К формуле для координат вектора $\overrightarrow{AB}$ в прямоугольной декартовой системе координат

$y = 0$, $M_2(2,\ -3,\ 5)$; точка M_3 симметрична точке M относительно плоскости $z = 0$, $M_3(2, 3, -5)$, рис. 6.2.

б) Точка M_4 симметрична точке M относительно оси Ox, $M_4(2, -3, -5)$; точка M_5 симметрична точке M относительно оси Oy, $M_5(-2, 3, -5)$; точка M_6 симметрична точке M относительно оси Oz, $M_6(-2, -3, 5)$, рис. 6.2.

в) Точка M_7 симметрична точке M относительно начала координат, $M_7(-2, -3, -5)$, рис. 6.2.◄

Найдём зависимость между координатами вектора в прямоугольном базисе и координатами его начальной и конечной точек A и B. Пусть заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Очевидно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 6.3). Так как $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то в силу правила 6.1, рассмотренного выше, имеем

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \qquad (6.6)$$

Таким образом, приходим к выводу:

для того, чтобы получить координаты вектора в прямоугольном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, надо из прямоугольных координат конца этого вектора вычесть соответствующие прямоугольные координаты его начала.

Замечание 6.1. Координаты вектора в прямоугольном базисе часто пишут в скобках после обозначения вектора. Например, $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.