**Биномиальный ряд (разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$).**
(Пример 6.5)

▶ Заметим сразу, что степенную функцию приходится брать в виде $(1+x)^m$, так как функция $x^m$ не удовлетворяет, за исключением случая, когда $m$ – целое положительное, необходимому условию наличия производных любого порядка; действительно, при $x=0$ или сама эта функция, или ее производные, начиная с некоторого порядка, обращаются в бесконечность.

Составим для функции $f(x)=(1+x)^m$ ($m$ – любое, вещественное, не равное нулю) ряд Маклорена. Для этого находим:

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1};\quad f''(x)=m(m-1)\cdot(1+x)^{m-2};\quad \ldots;$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\cdot(1+x)^{m-n};\quad \ldots,$$

откуда

$$f(0)=1;\quad f'(0)=m;\quad f''(0)=m(m-1);\quad \ldots;\quad f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)];\quad \ldots.$$

Ряд Маклорена для функции $f(x)=(1+x)^m$ будет, следовательно, таким:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots. \tag{6.9}$$

Заметим, что при целом положительном $m$ ряд (6.9) обрывается на $(m+1)$-ом члене, превращаясь в известный из элементарной математики "бином Ньютона". Если же число $m$ – нецелое, или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда (6.9) в нуль не обратится, и нам придется иметь дело с бесконечным рядом. Этот ряд называется *биномиальным*, а его коэффициенты – *биномиальными коэффициентами*. По внешнему виду они напоминают обычные биномиальные коэффициенты, рассматриваемые в элементарной математике.

Найдем радиус сходимости ряда (6.9). Для этого составляем ряд из модулей членов ряда (6.9) и применяем к полученному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]|\cdot(n+1)!\cdot|x|^n}{|m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](m-n)|\cdot n!\cdot|x|^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|m-n|}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left|\frac{m}{n}-1\right|}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left|\frac{m}{n}-1\right|}\cdot\frac{1}{|x|}=\frac{1}{|x|}\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (6.9) сходится, и притом абсолютно, если $|x|<1$, и расходится, если $|x|>1$. Значит, радиус сходимости ряда (6.9) равен 1 ($R=1$). Сумму ряда (6.9) обозначим теперь через $s(x)$, $x\in(-1,1)$. Нам нужно теперь проверить, что ряд (6.9) сходится к $f(x)$, т.е. что $s(x)=f(x)$, $x\in(-1,1)$.

Мы знаем, что в интервале сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно. Следовательно, для любого $x\in(-1,1)$ будем иметь

$$s'(x)=m+\frac{m(m-1)}{1!}x+\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots=$$

$$=m\left[1+\frac{(m-1)}{1!}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots\right]. \qquad (6.14)$$

Умножим обе части равенства (6.9-1) на $(1+x)$ и приведем подобные члены. (Эта операция законна, так как для $x\in(-1,1)$ ряд (6.9-1) сходится абсолютно.)

Получим

$$(1+x)s'(x)=m\left[1+\left(\frac{m-1}{1!}+1\right)\cdot x+\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2!}+\frac{m-1}{1!}\right)\cdot x^2+\ldots\right.$$

$$+\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)]}{(n-2)!}\right)\cdot x^{n-1}+$$

$$\left.+\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{n!}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}\right)\cdot x^n+\ldots\right]=$$

$$=m\underbrace{\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots\right]}_{=s(x)}.$$

Таким образом, для любого $x\in(-1,1)$ имеем:

$$(1+x)s'(x)=s(x)\cdot m\,. \qquad (6.9\text{-}2)$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{s(x)}{f(x)}\quad\left(=\frac{s(x)}{(1+x)^m}\right),\quad x\in(-1,1),$$

и найдем производную этого отношения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{f(x)}\right)=\frac{s'(x)\cdot(1+x)^m-s(x)\cdot m(1+x)^{m-1}}{(1+x)^{2m}}=\frac{(1+x)s'(x)-s(x)\cdot m}{(1+x)^{m+1}}.$$

В силу (6.9-2) числитель последней дроби равен нулю для любого $x\in(-1,1)$, так что $\frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{f(x)}\right)=0$, $x\in(-1,1)$. Но тогда $\frac{s(x)}{f(x)}=C$ (const), $x\in(-1,1)$, откуда

$$s(x) = C \cdot f(x), \quad x \in (-1, 1). \tag{6.9-3}$$

Из выражения (6.9) для $s(x)$ замечаем, что $s(0) = 1$. Это условие используем для определения постоянной *C*.

Для этого положим в обеих частях равенства (6.9-3) $x = 0$. Получим:

$$s(0) = C \cdot f(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Таким образом, окончательно получаем $s(x) = f(x)$, $x \in (-1, 1)$, т.е.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in (-1, 1). \tag{6.9-4}$$

Разложение (6.9-4) установлено нами для $x \in (-1, 1)$. Что касается концов промежутка: $x = \pm 1$, то мы приведем результаты без доказательства.

Эти результаты таковы:

1) если $m > 0$, то разложение (6.9-4) справедливо для $x \in [-1, 1]$;

2) если $-1 < m < 0$, то разложение (6.9-4) справедливо для $x \in (-1, 1]$;

3) если $m \le -1$, то разложение (6.9-4) справедливо для $x \in (-1, 1)$.