§4. Достаточные условия существования экстремума.

С помощью теоремы 3.1 можно найти критические точки данной функции (или точки, подозрительные на экстремум). Однако, не в каждой критической точке функция имеет экстремум (замечание 3.2). Вопрос о наличии экстремума в критических точках решается путём применения достаточных условий, или достаточных признаков существования экстремума.

1°. Достаточный признак существования экстремума, связанный с первой производной.

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этой окрестности за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум (при изменении знака $f'(x)$ с плюса на минус – максимум, с минуса на плюс – минимум).

►Рассмотрим $\forall x \in U(x_0)$. Для функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(x < x_0)$ или на отрезке $[x_0, x]$ $(x > x_0)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа, поэтому для неё справедлива формула (3.3) из главы 2, имеющая здесь вид:

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \qquad (4.1)$$

где c – некоторое число, заключённое между x_0 и x. Пусть $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, в этом случае $f'(c)$ и $x - x_0$ имеют разные знаки для $\forall x \in U(x_0)$. Действительно, $f'(c) > 0$ и $x - x_0 < 0$ при $x < x_0$, $f'(c) < 0$ и $x - x_0 > 0$ при $x > x_0$. Итак, в окрестности $U(x_0)$ приращение функции $\Delta f(x_0) < 0$ в силу (4.1), следовательно, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (замечание 1.1, глава 2). Случай изменения знака $f'(x)$ с минуса на плюс рассматривается аналогично. ◄

Пример 4.1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = (2 - x)e^x + 2$.

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x) = ((2-x)e^x + 2)' = (1-x)e^x$, $x = 1$– единственная критическая точка, $f'(1) = 0$. Она делит ось Ox на два интервала: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Знак $f'(x)$ на них приведён в таблице 4.1.

Таблица 4.1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	2+$e \approx 4.7$ гладкий максимум	↘

В силу теоремы 2.1 на первом из указанных интервалов $f(x)$ возрастает, а на втором – убывает (направление стрелок в таблице 4.1 указывает характер изменения функции). В точке $x = 1$ функция имеет гладкий максимум (теорема 4.1), $f(1) = 2 + e \approx 4.7$ (рис. 5.6).◄

Пример 4.2. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x)=\begin{cases}2/(1+x^2), & x<0,\\ -2/(1+x^2), & x>0\end{cases}$ (пример 7.6 главы 1), не существует $f'(0)$ (пример 3.3 главы 2), $x=0$ – единственная критическая точка $f(x)$. Она делит ось Ox на два интервала: $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, знак $f'(x)$ на этих промежутках приведён в таблице 4.2, стрелками показан характер поведения функции на указанных интервалах, установленный с помощью теоремы 2.1. В точке $x=0$ функция имеет угловой максимум (теорема 4.1), $f(0)=\pi/2$, $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=-1$. В §7, после дополнительных исследований, таблица 4.2 используется при построении графика этой функции.◄

Таблица 4.2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\not\exists$	$-$
$f(x)$	↗	$\pi/2$ угловой максимум	↘

2º. Достаточный признак существования экстремума, связанный с второй производной. Если в стационарной точке функция имеет вторую производную, то вопрос о существовании экстремума в ней может быть решён с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.2. Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$ (т.е. $f'(x_0)=0$) и $f(x)$ имеет в данной точке вторую производную. Тогда:

а) если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума $f(x)$;

б) если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума $f(x)$.

Пример 4.3. Исследовать на существование экстремумов функцию

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+5.$$

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x)=x^3-x^2-4x+4=$ $=(x-1)(x^2-4)$, $x=1$ и $x=\pm2$ – стационарные точки $f(x)$, $f'(1)=f'(\pm2)=0$. Имеем $f''(x)=3x^2-2x-4$, $f''(-2)=12>0$, $f''(1)=-3<0$, $f''(2)=4>0$. В силу теоремы 4.2, приходим к выводу: $x=\pm2$ – точки минимума $f(x)$, а $x=1$ – точка максимума. Вычислив значения функции в этих точках: $f(-2)=-13/3$, $f(2)=19/3$, $f(1)=83/12$, можно построить достаточно обоснованный эскиз графика $f(x)$ (рис. 4.1).◄

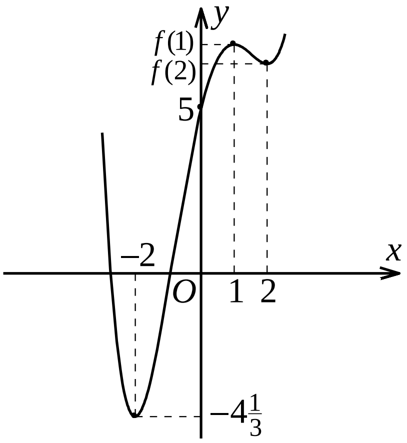

Рис. 4.1. График функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+5.$

Замечание 4.1. Теорема 4.1, вообще говоря, более универсальна, чем теорема 4.2, она применима для любой критической точки, в окрестности которой установлен знак первой производной. Теорема 4.2 неприменима, вопервых, в тех критических точках, где первая производная не существует или равна бесконечности, во-вторых, в стационарных точках, в которых вторая производная равна нулю, не существует или является бесконечной.