Энергия гравитационной дифференциации Земли.

В этом параграфе, как пример использования определенного интеграла, будет рассмотрен процесс так называемой гравитационной дифференциации Земли. Первоначально при своём образовании 5,5 – 4,5 миллиарда лет назад Земля была однородной. Со временем под влиянием гравитационных сил более тяжёлые элементы (прежде всего – железо) концентрируются вблизи центра планеты, а более лёгкие – вблизи поверхности. Это приводит к выделению энергии в виде тепла. Именно это тепло приводит к конвекции расплавленного вещества мантии Земли, которая, в свою очередь, приводит к дрейфу континентов и периодическим перестройкам глобальной карты Земли.

Задача 1. Вычислить гравитационную энергию шара радиуса R, в котором плотность ρ зависит только от текущего радиуса r: $\rho = \rho(r)$.

Решение. Известно, что сферически симметричный шар притягивает так же, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре (это доказывается посредством использования теоремы Гаусса). Будем удалять массу от шара бесконечно тонкими слоями. В момент, когда удаляется масса, лежащая между r и $r + dr$, параметры будут следующими:

Удаляемая масса: $dm = 4\pi r^2 dr\rho(r)$;

Притягивающая масса:

$$M(r) = 4\pi\int_0^r r^2\rho(r)dr$$

Энергия притяжения:

$$dE = -G\frac{M(r)dm}{r} = -16\pi^2 G\rho(r)rdr\int_0^r r^2\rho(r)dr$$

(1)

где $G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2) – гравитационная постоянная. Полная энергия получается интегрированием (1) по r от 0 до R:

$$E = -16\pi^2 G\int_0^R r\rho(r)\left(\int_0^r r^2\rho(r)dr\right)dr$$

(2)

<u>Задача 2</u>. Пусть шар радиуса R изначально был однородным с плотностью ρ. Далее он расслоился на внутреннюю часть радиуса R_1 и плотностью ρ_1 (при этом $\rho_1 > \rho$) и окружающую её внешнюю часть плотностью ρ_2 (общий радиус не изменился и по прежнему равен R). Вычислить высвободившуюся энергию.

Решение. Вначале рассмотрим однородный шар:

$$E = -16\pi^2 G\rho^2 \int_0^R r\left(\int_0^r r^2 dr\right)dr = -16\pi^2 G\rho^2 \int_0^R \frac{r^4}{3} dr = -16\pi^2 G\rho^2 \frac{R^5}{15} \quad (3)$$

Теперь рассмотрим двухслойный шар:

$$E = -16\pi^2 G\left(\rho_1^2 \int_0^{R_1} r\left(\int_0^r r^2 dr\right)dr + \rho_2 \int_{R_1}^{R} r\left\{\rho_1 \int_0^{R_1} r^2 dr + \rho_2 \int_{R_1}^{r} r^2 dr\right\}dr\right) =$$

$$= -\frac{16\pi^2 G}{3}\left\{\rho_1^2 \frac{R_1^5}{5} + (\rho_1 - \rho_2)\rho_2 \frac{R_1^3\left(R^2 - R_1^2\right)}{2} + \rho_2^2 \frac{R^5 - R_1^5}{5}\right\}$$

(4)

Разность выражений (3) и (4) и даст нам искомую энергию.

Оценим, какая энергия выделилась за время существования Земли. Внешний радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, радиус ядра (полученный посредством анализа акустических волн, проходящих через земной шар) $R_1 = 3{,}5 \cdot 10^6$ м. Средняя плотность вещества Земли (вычисляемая по общей массе Земли) $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Средняя плотность вещества мантии (извергаемой вулканами) $\rho_2 = 4{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3. Земной корой, толщина которой 50 – 80 км, мы пренебрегаем. Отсюда легко рассчитать плотность земного ядра:

$$\rho_1 = \frac{\rho R^3 - \rho_1\left(R^3 - R_1^3\right)}{R_1^3} = 1{,}1 \cdot 10^4 \, кг/м^3$$

Теперь у нас имеются все необходимые цифры. Подставляя их в (3) получим начальную гравитационную энергию Земли $E_н = -2{,}28 \cdot 10^{32}$ Дж. Подставляя те же цифры в формулу (4) получим конечную (нынешнюю) гравитационную энергию $E_к = -2{,}48 \cdot 10^{32}$ Дж. Итого выделившаяся за всю историю Земли энергия гравитационной дифференциации ΔE = $2{,}0 \cdot 10^{31}$ Дж (что примерно в триллион раз больше, чем суммарная мощность всех ядерных и термоядерных боеголовок, накопленных человечеством). Исходя из этих цифр, можно рассчитать средний тепловой поток из недр Земли на поверхность. Считая возраст Земли T = 5 млрд. лет = $1{,}6 \cdot 10^{17}$ с, получим средний тепловой поток из недр Земли $Q = \Delta E/T = 1{,}3 \cdot 10^{14}$ Вт. Любопытно сравнить эту цифру с нынешним тепловым потоком, который измеряется непосредственно по геотермальному градиенту (возрастанию температуры с продвижением вглубь земной коры). Поток составляет на континентах (где кора значительно толще за счёт мощного гранитного слоя) $q_к = 3 \cdot 10^{-2}$ Вт/м^2; в коре океанов (где гранитный слой отсутствует) $q_о = 9 \cdot 10^{-2}$ Вт/м^2. Если учесть, что суммарная площадь континентов и океанов составляют $S_к = 1{,}5 \cdot 10^{14}$ м^2 и $S_о = 3{,}6 \cdot 10^{14}$ м^2, то получим нынешний поток $Q_н = q_к S_к + q_о S_о = 3{,}7 \cdot 10^{13}$ Вт. Таким образом, нынешний поток в 3,5 раза меньше среднего. Это неудивительно – в начале своей истории Земля была много горячее, и поток был во много раз выше нынешнего. Можно даже попробовать оценить во сколько раз. Для этого необходимо знать характер зависимости теплового потока от времени. Разумно предположить, что эта зависимость носит экспоненциальный характер – так всегда бывает при остывании тела. Нам потребуется величина, называемая логарифмическим средним.

Задача 3. Найти среднее значение $M(f)$ функции $f(x) = k \cdot \exp(lx)$ на интервале $[a,\ b]$, если известны только значения этой функции на концах интервала $f(a) = A$, $f(b) = B$.

Решение. Вычисляем интеграл:

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b k\exp(lx)dx = \frac{k\exp(lb) - k\exp(la)}{l(b-a)} = \frac{B-A}{\ln(B/A)}$$

(5)

Величина (5) называется средним логарифмическим чисел A и B. Если мы примем нынешний теплопоток за единицу $A = 1$, то получим $B - 1 = 3{,}5\ln B$. Это уравнение решается численно: $B \approx 8{,}5$. Таким образом, в начале истории Земли теплопоток из недр был где то в 8 – 9 раз больше нынешнего.