§2. Определители второго и третьего порядков

1°. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Понятие определителя 2-го порядка. Метод Гаусса не даёт явных формул, выражающих решение системы линейных уравнений через элементы её расширенной матрицы. Проблема отыскания таких формул приводит к понятию определителя. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где x, y – неизвестные, а $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – известные величины.

Исключим из этих уравнений сначала неизвестную y, а потом x. Для этого умножим все члены первого уравнения системы (2.1) на b_2, а второе – на $(-b_1)$ и сложим: $(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$. Затем первое уравнение умножим на $(-a_2)$, а второе – на a_1 и сложим: $(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$. Получили новую систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1), \\ (a_1b_2-a_2b_1)y=(a_1c_2-a_2c_1). \end{cases} \qquad (2.2)$$

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система (2.2) (и вместе с ней система (2.1)) имеет единственное решение, выражаемое формулами:

$$\begin{cases} x_0=(c_1b_2-c_2b_1)/(a_1b_2-a_2b_1), \\ y_0=(a_1c_2-a_2c_1)/(a_1b_2-a_2b_1). \end{cases} \qquad (2.3)$$

Это утверждение называется* теоремой Крамера *(1704 – 1752, швейцарский математик) для системы двух уравнений с двумя неизвестными, а формулы (2.3) –* формулами Крамера*. Далее эта теорема будет сформулирована в общем виде для системы из* n *линейных уравнений с* n *неизвестными.

При $a_1b_2-a_2b_1=0$ система (2.2) и, следовательно, система (2.1) может быть совместной и неопределённой (при условии $c_1b_2-c_2b_1=a_1c_2-a_2c_1=0$) или несовместной (при условии $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$ или $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$).

Очевидно, что при решении системы (2.1) особую роль играют разности $a_1b_2-a_2b_1$, $c_1b_2-c_2b_1$, $a_1c_2-a_2c_1$, построенные из элементов расширенной матрицы этой системы. Эти разности называются определителями 2-го порядка.

Определение 2.1. ***Пусть дана квадратная матрица 2-го порядка*** $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$**.** **Определителем 2-го порядка*, соответствующим матрице* А *(или определителем матрицы* А*), называется число* $a_1b_2-a_2b_1$*, которое принято обозначать одним из символов:*** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\det A$, $|A|$, Δ. ***Таким образом, по определению***

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 ***называются*** **элементами** ***определителя; числа*** a_1, b_2 ***образуют*** **главную диагональ** ***определителя, а*** $b_1, a_2 -$ **побочную диагональ.** ***Из формулы (2.4) следует правило:***

определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях.

Например, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = -11.$

Используя определение 2.1, формулы (2.3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_0 = \Delta_x / \Delta, \\ y_0 = \Delta_y / \Delta, \end{cases} \qquad \textit{(2.3a)}$$

где Δ – определитель матрицы* А *системы (2.1), $\Delta_x, \Delta_y -$ ***определители матриц, полученных путем замены 1-го и 2-го столбца* А *на столбец свободных членов.***

Пример 2.1. ***С помощью теоремы Крамера решить систему уравнений*** $\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

► $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ***– матрица этой системы,*** $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***– столбец свободных членов. Вычислим все нужные определители:***

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Теперь по формулам (2.3а) находим решение системы: $x = 1, \ \ y = 1.$◄

2°. Свойства определителей 2-го порядка.

Свойство 1. ***Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.***

Свойство 2. ***Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у которых элементами этой строки являются упомянутые слагаемые, а элементы остальных строк те же. Например,***

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1' + b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. ***Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя. Например,***

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. ***При замене строк столбцами определитель не изменяется:***

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.1. ***Операция замены строк столбцами называется*** **транспонированием.** ***Благодаря свойству 4, все свойства определителя, справедливые для его строк, будут справедливы и для его столбцов.***

Свойство 5. ***При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Например,***

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. ***Определитель не изменяется при элементарных преобразованиях второго типа над строками (столбцами) соответствующей матрицы. Например,***

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.2. Все перечисленные свойства определителей 2-го порядка доказываются с помощью определения 2.1. Докажем, например, свойство 2.

$$\blacktriangleright \begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1' + b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1' + a_1'')b_2 - (b_1' + b_1'')a_2 = (a_1'b_2 - b_1'a_2) + (a_1''b_2 - b_1''a_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \blacktriangleleft$$

3°. Определитель 3-го порядка и его свойства. ***К понятию определителя 3-го порядка, также как и в случае определителя 2-го порядка, приводит процесс отыскания формул, выражающих решение системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными через её коэффициенты и свободные члены.***

Определение 2.2. ***Пусть дана квадратная матрица 3-го порядка***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Определителем 3-го порядка, ***соответствующим матрице*** **А** ***(или определителем матрицы*** **А*****) называется число***

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$,

которое обозначается одним из следующих символов:

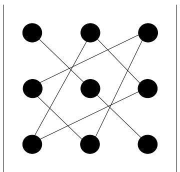
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \det A, |A|, \ \Delta_3, \ \Delta.$$

Таким образом, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (2.6)$$

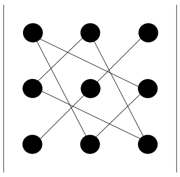
Элементы матрицы **А** ***из (2.5) называются также*** **элементами** $\det A$. ***Элементы*** a_{11}, a_{22}, a_{33} ***образуют*** **главную диагональ** ***этого определителя, а элементы*** a_{13}, a_{22}, a_{31} – ***его*** **побочную диагональ.**

Правило Саррюса. ***Определитель 3-го порядка равен сумме произведений его элементов, расположенных на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали, минус сумма произведений элементов, расположенных на побочной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны***



\+

Рис. 2.1а



–

Рис. 2.1б

побочной диагонали (рис. 2.1а, б).

Пример 2.2. **Вычислить по правилу Саррюса определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

► $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1)+4\cdot 2\cdot 2+3\cdot(-1)\cdot 5-3\cdot 0\cdot 4-$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot 2-1\cdot 2\cdot 5=0+16-15-0-2-10=-11. \blacktriangleleft$$

Сгруппировав слагаемые в правой части (2.6), с учётом (2.4) имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Для исследования свойств определителя 3-го порядка введём новые понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы A.

Определение 2.3. *Минором* M_{ik} (дополнительным минором) элемента a_{ik} квадратной матрицы 3-го порядка из (2.5) называется определитель матрицы 2-го порядка, полученной из матрицы (2.5) путём вычёркивания её i-той строки и k-го столбца, на пересечении которых находится a_{ik}.

Например, $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Используя три последних равенства, (2.7) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \quad (2.8)$$

Определение 2.4. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} матрицы A называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \quad (2.9)$$

Например,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11},\ A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12},\ A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}.$$

Пример 2.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A_{32} и M_{23}.

►По определению 2.3 имеем $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1$, а в силу (2.9) и определения 2.4 приходим к соотношению: $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7$. ◄

Заменяя в (2.8) миноры на алгебраические дополнения, в соответствии с определением 2.4 и формулой (2.9) получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (2.10)$$

Каждое из равенств (2.7), (2.8), (2.10) называется разложением $\det A$ по элементам его первой строки.

Свойства определителя 3-го порядка

Первые шесть свойств определителя 3-го порядка аналогичны свойствам определителя 2-го порядка. Доказать эти свойства можно, вычислив по определению определители из обеих частей соответствующих равенств. Кроме этого сформулируем и докажем еще 2 свойства: 7 и 8.

Свойство 7. Определитель квадратной матрицы A третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Свойство 7 называют также *теоремой о разложении определителя по элементам строки или столбца.*

►Надо доказать справедливость следующих равенств:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, i = 1,2,3, \quad (2.11)$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \; j = 1,2,3. \quad (2.12)$$

При $i = 1$ равенство (2.11) следует из (2.10). Чтобы обосновать это равенство при $i = 2$, перепишем (2.6) в виде:

$$\det A = a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}). \quad (2.13)$$

Разности в скобках являются алгебраическими дополнениями элементов a_{21}, a_{22}, a_{23}, т.е. $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} = A_{21}$, $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = A_{22}$, $a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} = A_{23}$, поэтому (2.13) переписывается в виде:

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},$$

что и требовалось доказать. Для случая $i = 3$ равенство (2.11) обосновывается аналогично. Таким же образом может быть обосновано и равенство (2.12).◄

Свойство 8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя 3-го порядка на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 8, называемое также* теоремой аннулирования, *докажем, используя свойство 7.

►Надо доказать справедливость следующих равенств:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0, \; i = 1,2,3, \; k = 1,2,3, \; k \neq i. \quad (2.14)$$

$$a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + a_{3j}A_{3l} = 0, \; j = 1,2,3, \; l = 1,2,3, \; l \neq j,$$

Проведём обоснование равенства (2.14) при $i = 1$ и $k = 2$, т.е. докажем, что

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0. \quad (2.15)$$

Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Её определитель равен нулю, так он имеет две одинаковых строки, $\det B = 0$. Первая и третья строки матриц A и B совпадают, поэтому совпадают и алгебраические дополнения для элементов вторых строк $\det A$ и $\det B$, ибо эти алгебраические дополнения содержат только элементы одинаковых строк упомянутых матриц. Разложив $\det B$ по элементам второй строки (свойство 7), имеем:

$\det B = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$. Так как $\det B = 0$, то приходим к равенству (2.15). Все остальные случаи рассматриваются аналогично.◄

Применение свойств существенно упрощает вычисление определителя.

Пример 2.4. Используя свойства определителя, вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

►Используя свойство 6, выполним последовательно следующие преобразования.

1) Ко второй строке прибавим первую, а из третьей вычтем первую строку, умноженную на 4, определитель при этом не меняется:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 26 & -13 \end{vmatrix}.$$

2) Из второй строки вынесем общий множитель (–5), а из третьей вынесем множитель 13:

$$\Delta = -65 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку получился определитель с одинаковыми строками.◄

Пример 2.5. Используя разложение определителя по строке или столбцу, вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

►Выберем строку или столбец, где есть нули. Используя свойство 7, разложим данный определитель, например, по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(1-8) + 0 - 3(4+3) = 14 - 21 = -7.$$ ◄