Дифференциальные операции 2 порядка.

Оператор Лапласа.

К дифференциальным операциям 2 порядка относятся операции

$$div,\ grad \text{ и } rot,$$

применённые к дифференциальным операциям 1 порядка.

Это

$$div\ grad\ f(M) = \nabla\left(\nabla\ f(M)\right)$$

$$rot\ grad\ f(M) = \nabla \times \nabla\ f(M)$$

$$grad\ div\ \overline{a}(M) = \nabla\left(\nabla\ \overline{a}(M)\right)$$

$$div\ rot\ \overline{a}(M) = \nabla\left(\nabla \times \overline{a}(M)\right)$$

$$rot\ rot\ \overline{a}(M) = \nabla \times \left(\nabla \times \overline{a}(M)\right).$$

Дифференциальные операции 2 порядка, еще можно представить в виде таблицы:

$\cancel{grad\ grad\ f(M)}$	$grad\ div\ \overline{a}(M)$	$\cancel{grad\ rot\ \overline{a}(M)}$
$div\ grad\ f(M)$	$\cancel{div\ div\ \overline{a}(M)}$	$div\ rot\ \overline{a}(M)$
$rot\ grad\ f(M)$	$\cancel{rot\ div\ \overline{a}(M)}$	$rot\ rot\ \overline{a}(M)$

Определение (оператора Лапласа)

Оператор

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

- называется оператором Лапласа. Этот оператор играт важную роль в математической физике.

Используя оператор Лапласа, дифференциальные операции 2 порядка можно записать так:

1) Если $f(M) -$ скалярное поле:

$$\Delta f(M) = \nabla\nabla f(M) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \right)$$
$$\cdot \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \cdot \bar{k} \right) = \left(\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} \right).$$

Таким образом

$$\Delta f(M) = \nabla\nabla f(M) = div\ grad\ f(M)$$

или в кординатной форме

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}.$$

Замечание:

Если для скалярного поля $f(M)$ выполняется условие $\Delta f(M) = 0$, то такое поле называтся *Лапласовым или гармоническим*

2) Если $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} -$ векторное поле:

$$\Delta\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \left(P(M) \cdot \bar{i} + Q(M) \cdot \bar{j} + R(M) \cdot \bar{k}\right) = \left(\Delta P(M) \cdot \bar{i} + \Delta Q(M) \cdot \bar{j} + \Delta R(M) \cdot \bar{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) \cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) \cdot \bar{k}$$

Таким образом

$$\overline{\Delta a}(M) = \Delta P(M)\bar{\imath} + \Delta Q(M)\bar{\jmath} + \Delta R(M)\bar{k}$$

или в координатной форме

$$\overline{\Delta a}(M) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k} .$$

Свойства оператора Лапласа.

1) $\Delta\bar{c} = 0,$ где $\bar{c} -$ постоянный вектор.

2) $\Delta(\bar{c} \cdot f(M)) = \bar{c} \cdot \Delta f(M),$ где $\bar{c} -$ постоянный вектор.

3)$\Delta\big(C \cdot \bar{a}(M)\big) = C \cdot \Delta\bar{a}(M), C = const.$

4)$\Delta\big(\bar{a}_1(M) + \bar{a}_2(M)\big) = \Delta\bar{a}_1(M) + \Delta\bar{a}_2(M).$

5) $\Delta\big(\nabla f(M)\big) = \nabla(\Delta f(M),$

6) $\Delta\big(div\bar{a}(M)\big) = div\big(\Delta\bar{a}(M)\big),$

7) $\Delta\big(rot\bar{a}(M)\big) = rot(\Delta\bar{a}(M))$

Замечение.

Свойства 3) и 4) означают, что оператор Лапласа - это линейный оператор, преобразующий одну векторную величину в другую векторную величину.

Свойства 5) – 7) означают, что оператор Лапласа перестановочен с градиенторм, дивергенцией и ротором.

Справедливы так же следующие равенства для дифференциальных

операций второго порядка:

1) $rotgradf(M) = \nabla \times (\nabla f(M) = (\nabla \times \nabla) f(M) = [\text{т.к. } \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}] = \bar{0}$, т.е.

$$rotgradf(M) = \bar{0}$$

или

$$\nabla \times (\nabla f(M) = \bar{0}\,.$$

2) $graddiv\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla \bar{a}(M)\big) = \frac{\partial}{\partial x} div\bar{a}(M)\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} div\bar{a}(M)\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} div\bar{a}(M)\bar{k} =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Т.е

$$\nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) = graddiv\bar{a}(M)$$

или

$$\nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

3) $divrot\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla \times \bar{a}(M)\big) = 0,$

т.к. смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю.

4) $rotrot\bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = \begin{bmatrix} \bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b}\bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{a}\bar{b} \\ \text{двойное векторное произведение} \end{bmatrix} =$

$= \nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) - (\nabla\nabla)\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M),$ т. е.

$$rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M)) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)\,.$$

Учитывая полученные результаты, для дифференциальных операций 2 порядка можно составить таблицу

	$\overline{a}\,(M)$	$f(M)$	
	$grad\ f(M)$	$div\,\overline{a}\ (M)$	$rot\,\overline{a}\ (M)$
$grad\ f(M)$	---	$grad\ div\,\overline{a}(M) =$ $\nabla\left(\nabla\,\overline{a}(M)\right)$	---
$div\,\overline{a}\ (M)$	$div\ grad\ f(M) =$ $\nabla\left(\nabla\ f(M)\right) = \Delta f(M)$	---	$div\,rot\,\overline{a}(M) =$ $\nabla\left(\nabla\times\overline{a}(M)\right) = 0$
$rot\,\overline{a}\ (M)$	$rot\ grad\ f(M) =$ $\nabla\times\nabla\ f(M) = \overline{0}$	---	$rot\,rot\,\overline{a}(M) = \nabla\times\left(\nabla\times\overline{a}(M)\right) =$ $grad\ div\,\overline{a}(M) - \Delta\overline{a}(M) =$ $\nabla\nabla\overline{a}(M) - \Delta\overline{a}(M)$