Правила интегрирования, таблица неопределенных интегралов, некоторые дополнительные интегралы и неберущиеся интегралы

Правила интегрирования:

1) $\int kudx = k\int udx$, где $k - const$
– постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;

2) $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$ – интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждой функции в отдельности;

3) $\int udv = uv - \int vdu$ – правило интегрирования по частям.

Таблица неопределенных интегралов:

По просьбам учащихся: $\int 0dx = C$, где $C - const$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$, где $C - const$, в частности: $\int dx = \int x^0 dx = x + C$ Самая ходовая формула, с помощью которой интегрируются многие *(но не все!)* корни, например: $\sqrt[3]{x^5}$, $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$, $\frac{1}{x^5}$. Для этого их нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$ *(как именно – см. Приложение* ***Школьные формулы****).*
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$ *(случай* $n = -1$*)*
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$, в частности: $\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin xdx = -\cos x + C$
$\int \cos xdx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\quad(a\neq 0)$$, в частности: $$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$$ «высокий логарифм»

Примечание: *часто данную формулу можно встретить немного в другом виде, например:* $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$*, но первый вариант, на мой взгляд, удобнее.*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C\quad(A\neq 0)$$ «длинный логарифм»

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$$, в частности: $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

Интегралы от гиперболических функций:

$$\int shxdx=chx+C\qquad\int chxdx=shx+C\qquad\int\frac{dx}{ch^2x}=thx+C\qquad\int\frac{dx}{sh^2x}=-cthx+C,$$

В ходе решение дифференциальных уравнений бывает удобно выразить данные функции по их определению – через экспоненты: $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Некоторые дополнительные интегралы, которые не являются самостоятельными, но могут быть использованы в решении *(если нет времени или диффур очень сложный)*. Также привожу ссылки, где есть подробное решение этих интегралов:

$$\int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C\quad(A\neq 0)$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C\quad(a>0)$$

http://mathprofi.ru/slozhnye_integraly.html

$\int\ln(x+a)dx=(x+a)(\ln(x+a)-1)+C$, http://mathprofi.ru/integrirovanie_po_chastyam.html

$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$, $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$, http://mathprofi.ru/slozhnye_integraly.html

Основные неберущиеся интегралы:

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона;

$\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;

$\int \frac{e^x dx}{x}$ – интегральная экспонента;

$\int \frac{\sin x dx}{x}$ – интегральный синус;

$\int \frac{\cos x dx}{x}$ – интегральный косинус.

Появление этих или родственных им интегралов в ходе решения дифференциального уравнения **с высокой вероятностью** означает, что в условии задачи допущена опечатка. Менее вероятная причина – это ваша собственная ошибка или задумка автора.

Следует отметить, что в подобных случаях общее решение или общий интеграл (если это вообще возможно) вполне допустимо записать прямо с интегралом, например:

$y = \int e^{2x^2}dx + x^2 + C$

что, кстати, не мешает проверить решение, ибо $\left(\int e^{2x^2}dx\right)' = e^{2x^2}$