## §1. Частные производные

Ограничимся рассмотрением функций от двух переменных, однако все результаты с очевидными изменениями переносятся на случай функций любого числа переменных.

Пусть функция $w = f(x, y)$ задана в открытой области . Если изменять $x$, оставляя значение $y$ постоянным, то $w$ будет функцией от одной переменной $x$, и можно поставить вопрос о вычислении производной по $x$ от этой функции в фиксированной точке $x$. Придадим значению $x$ приращение $\Delta x$, тогда функция $w$ получит приращение $\Delta_x w = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, которое называют *частным приращением* (по $x$) функции $w$. По определению производной она представляет собой предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется *частной производной* по $x$ функции $w = f(x, y)$ и обозначается $f'_x(x, y)$ или $\frac{\partial w}{\partial x}$, т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная функции $w = f(x, y)$ по $y$:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Вычисление частных производных практически не представляет ничего нового по сравнению с вычислением обыкновенных производных и осуществляется по тем же правилам и формулам: при вычислении $\frac{\partial w}{\partial x}$ нужно считать $y$ постоянным, а при вычислении $\frac{\partial w}{\partial y}$ постоянным следует считать $x$.

***Пример 1.1.*** $w = x^y$. Найти частные производные в любой точке $(x, y)$.

$$\blacktriangleright\ \frac{\partial w}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x^y \ln x.\ \blacktriangleleft$$

***Замечание.*** Для функции $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от $m$ переменных понятие частных производных вводится аналогично случаю функции двух переменных. Частная производная от такой функции по какой-либо из переменных есть обычная производная по этой переменной той функции, которая получается, когда все остальные переменные фиксированы (принимают постоянные значения).

***Пример 1.2.*** $w = xy^2z^3t^4$. Найти частные производные в любой точке $(x, y, z, t)$.

▶ $\dfrac{\partial w}{\partial x} = y^2 z^3 t^4, \quad \dfrac{\partial w}{\partial y} = 2xyz^3 t^4, \quad \dfrac{\partial w}{\partial z} = 3xy^2 z^2 t^4, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = 4xy^2 z^3 t^3$ . ◀