## §1. Основные понятия и определения

Линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка имеет следующий общий вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{1.1}$$

где $p_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) – коэффициенты линейного уравнения, $q(x)$ – свободный член.

Если $q(x) \not\equiv 0$, линейное уравнение называют *неоднородным*.

Из общей теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения $n$-го порядка следует существование единственного решения линейного уравнения (1.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

если в промежутке $[a, b]$, содержащем точку $x_0$, коэффициенты и свободный член уравнения (1.1) являются непрерывными функциями. Дополнительно можно доказать, что решение $y(x)$ поставленной задачи Коши (1.2) непрерывно вместе с производными до порядка $n$ включительно во всем промежутке $[a, b]$, а не только в окрестности точки $x_0$. (См. Н.М. Матвеев, «Методы…», с. 294)

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (1.1) принимает вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

и называется *однородным уравнением*, соответствующим неоднородному уравнению (1.1).

Введем линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x).$$

С помощью этого оператора уравнение (1.1) может быть записано так:

$$L[y] = q(x).$$

**Свойства линейного дифференциального оператора.**

1. Линейный дифференциальный оператор, примененный к сумме функций, равен сумме результатов применения этого же оператора к каждой функции в отдельности, т. е.

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2].$$

▶ Действительно,

$$L[y_1 + y_2] = \frac{d^n}{dx^n}(y_1 + y_2) + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(y_1 + y_2) + \ldots + p_n(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= \underbrace{\frac{d^n y_1}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,y_1}_{L[y_1]} + \underbrace{\frac{d^n y_2}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,y_2}_{L[y_2]} = L[y_1] + L[y_2]. \;◀$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак линейного дифференциального оператора, т. е. $L[Cy] = CL[y]$, где $C = \text{const}$.

▶ Действительно,

$$L[Cy] = \frac{d^n}{dx^n}(Cy) + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(Cy) + \ldots + p_n(x)(Cy) = C\left[\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,y\right] = CL[y]$$

. ◀

3. Линейный дифференциальный оператор от линейной комбинации функций равен той же линейной комбинации операторов от этих функций, т. е.

$$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_my_m] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \ldots + C_mL[y_m],$$

где $C_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Это свойство вытекает непосредственно из первых двух.

***Замечание.*** Для линейного дифференциального уравнения справедливо свойство инвариантности: линейное уравнение (1.1) остается линейным при любом преобразовании $x = \varphi(t)$ независимой переменной и при линейном преобразовании $y = u(x)\,z + v(x)$ искомой функции. Здесь $\varphi$ и $u, v$ – произвольные непрерывные, $n$ раз дифференцируемые функции.

Справедливость сформулированного утверждения доказывается непосредственно с помощью вычисления соответствующих производных и подстановки их в левую часть уравнения (1.1).