ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел 3 Аналитическая геометрия

Кривые второго порядка

30.10.2017

Общее уравнение кривой второго порядка

Уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F=0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, является уравнением кривой второго порядка (КВП).

Примеры

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

уравнение окружности

$$xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

уравнение гиперболы

Эллипс

Эллипс – кривая второго порядка, уравнение которой в подходящей системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

каноническое уравнение эллипса

$a>b>0$

a – большая полуось

b – малая полуось

Исследование формы эллипса

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

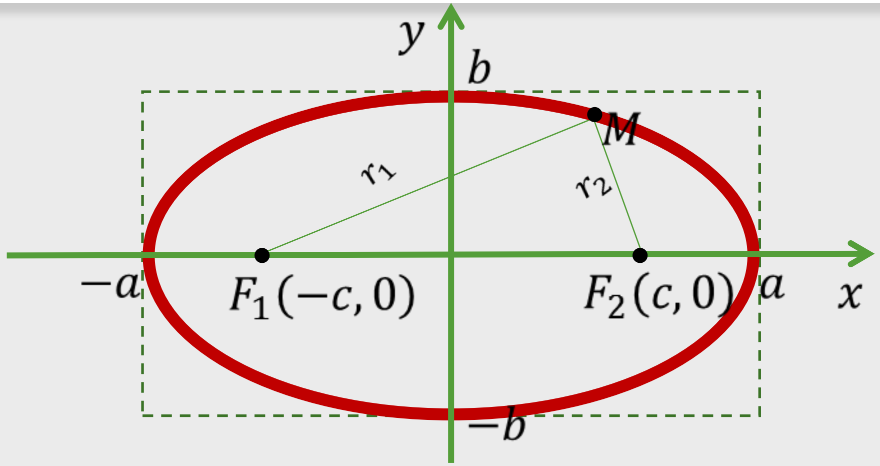
$$\begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases}$$

эллипс – ограниченная кривая

$$M(x, y) \in \Gamma \Rightarrow \begin{cases} M_1(-x, y) \in \Gamma \\ M_2(x, -y) \in \Gamma \\ M_3(-x, -y) \in \Gamma \end{cases}$$

эллипс – симметричная кривая относительно осей координат и относительно начала координат

Исследование формы эллипса



$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

F_1, F_2 — фокусы эллипса (левый и правый)

Теорема

Геометрическое свойство эллипса

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

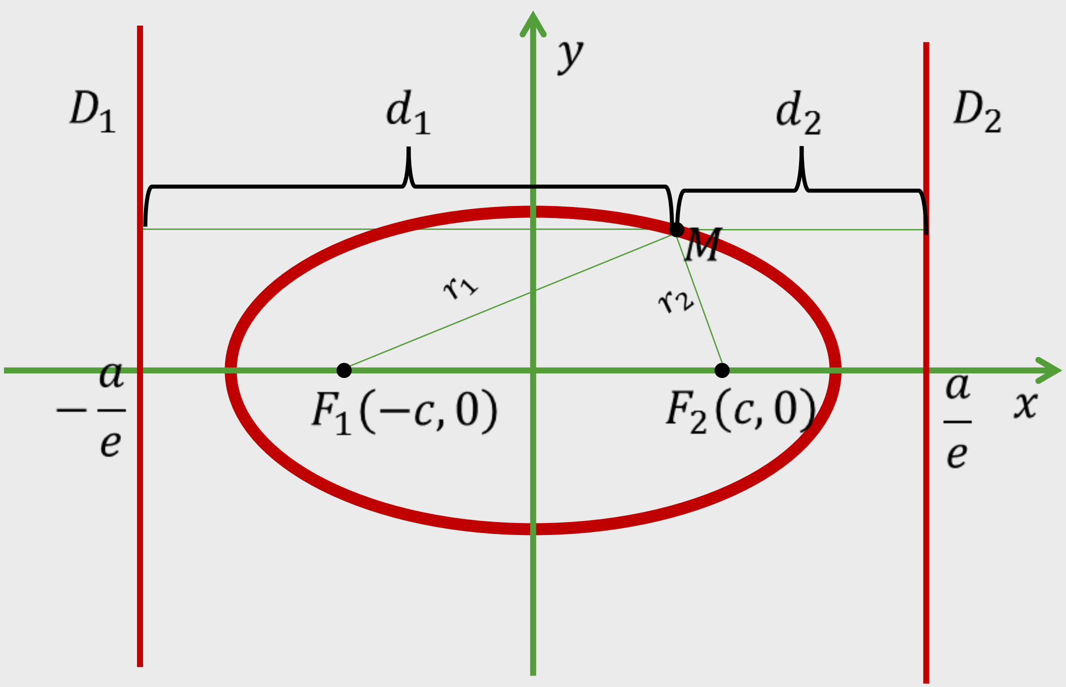
$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow |MF_1| + |MF_2| = 2a$$

r_1, r_2 — фокальные радиусы эллипса

Эксцентриситет и директрисы эллипса

$e = \dfrac{c}{a}$ эксцентриситет эллипса $0 < e < 1$ /для эллипса/

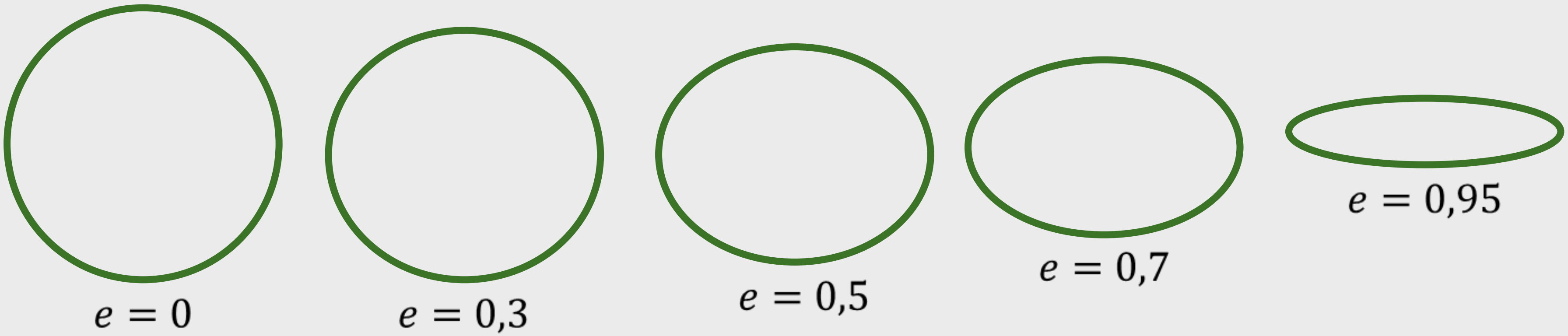
Директрисы – вертикальные прямые $x = d, x = -d$, где $d = a/e$.



Теорема

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$$

Зависимость формы эллипса от его эксцентриситета



Гипербола

Гипербола – кривая второго порядка, уравнение которой в подходящей системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

каноническое уравнение гиперболы

a – вещественная полуось

b – мнимая полуось

Исследование формы гиперболы

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

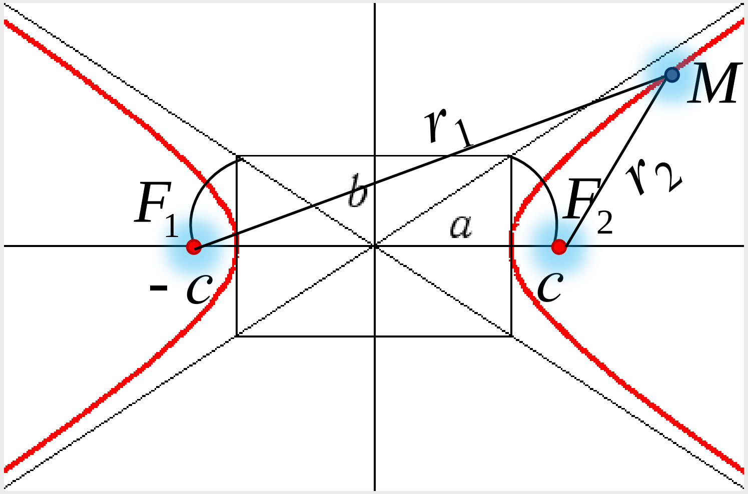
$x \notin (-a, a), |x| \geq a$ ⇒ гипербола – неограниченная кривая

$$M(x, y) \in \Gamma \Rightarrow \begin{cases} M_1(-x, y) \in \Gamma \\ M_2(x, -y) \in \Gamma \\ M_3(-x, -y) \in \Gamma \end{cases}$$

⇒ гипербола – симметричная кривая относительно осей координат и относительно начала координат

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ являются асимптотами гиперболы

Исследование формы гиперболы



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

F_1, F_2 — фокусы гиперболы (левый и правый)

Теорема

Геометрическое свойство гиперболы

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

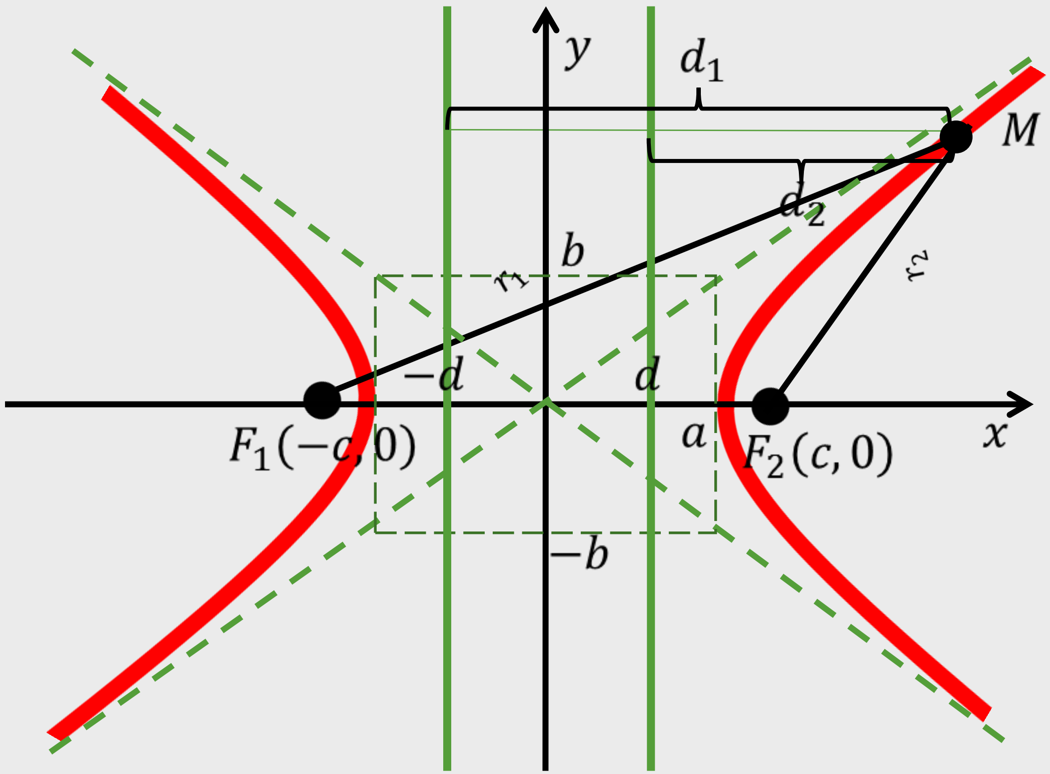
$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a$$

r_1, r_2 — фокальные радиусы гиперболы

Эксцентриситет и директрисы гиперболы

$e = \dfrac{c}{a}$ эксцентриситет гиперболы $\quad e > 1$ /для гиперболы/

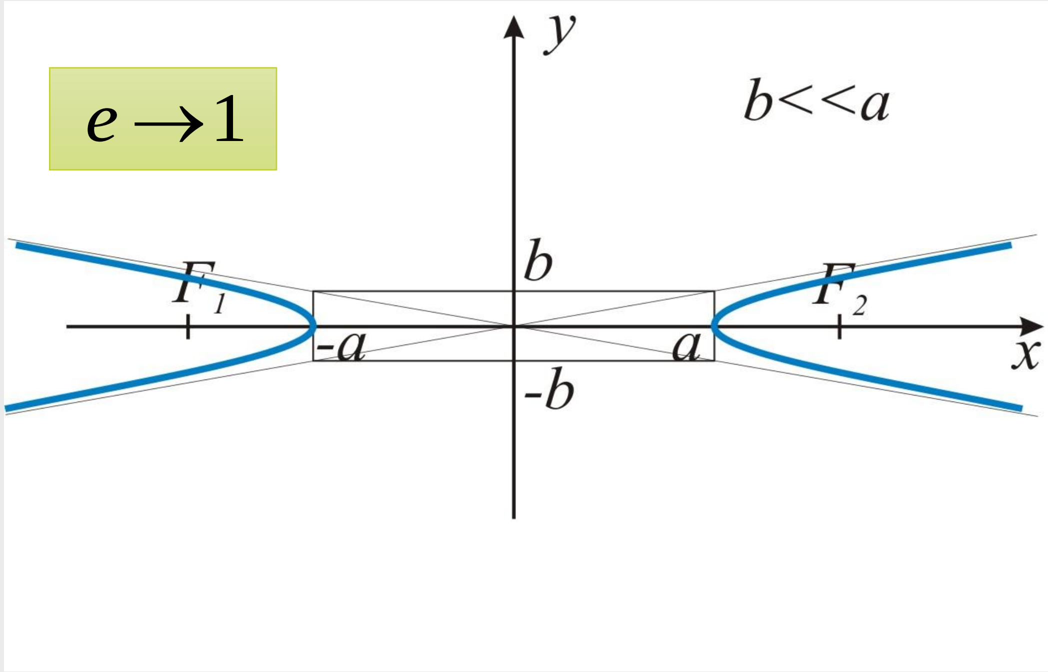
Директрисы – вертикальные прямые $x = d$, $x = -d$, где $d = a/e$.

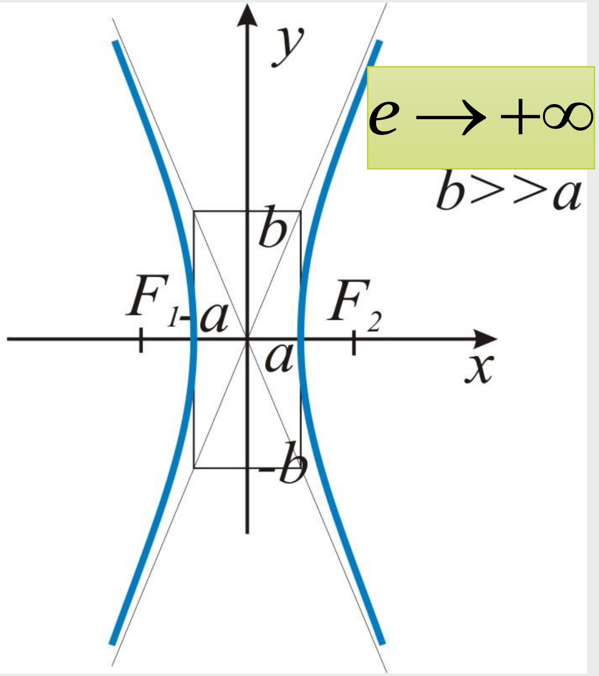


Теорема

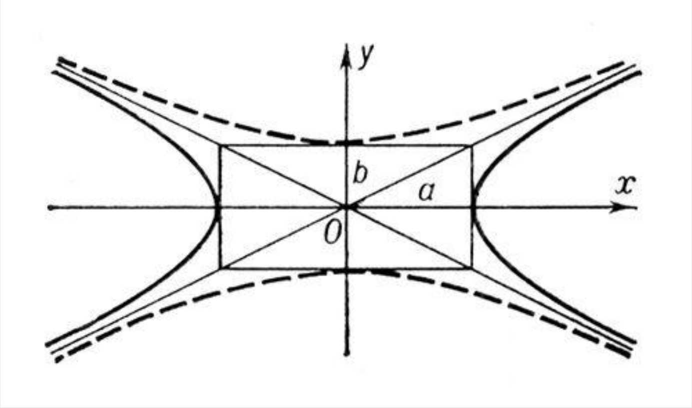
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$$

Зависимость формы гиперболы от ее эксцентриситета





Сопряженные гиперболы



$$\Gamma_1: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{———————}$$

$$\Gamma_2: \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \text{– – – – – –}$$

Парабола

Парабола – кривая второго порядка, уравнение которой в подходящей системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px$$

каноническое уравнение параболы

p – параметр параболы

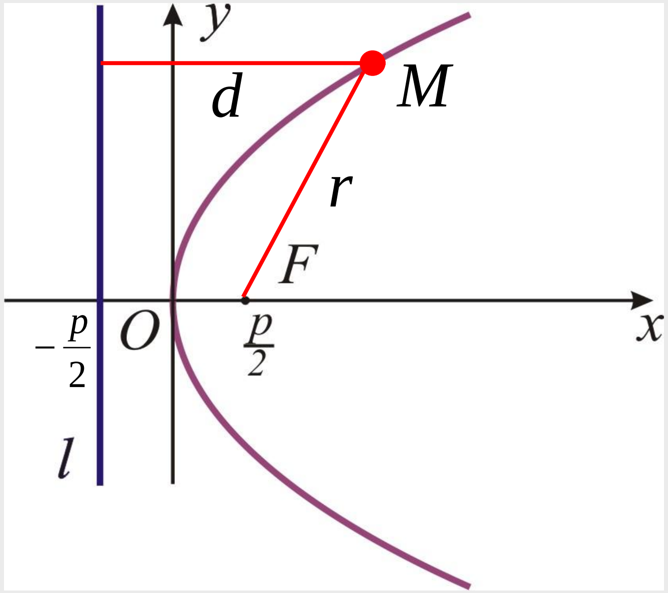
Исследование формы параболы

$$\Gamma: \quad y^2 = 2px$$

$x \geq 0,\ y \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$ ⇒ парабола – неограниченная кривая, расположенная в первой и четвертой четвертях

$M(x, y) \in \Gamma \Rightarrow M_1(x, -y) \in \Gamma$ ⇒ парабола – симметричная кривая относительно оси абсцисс

Исследование формы параболы



F — фокус параболы

Прямая $l: x = -\frac{p}{2}$ директриса параболы

Теорема

Геометрическое свойство параболы

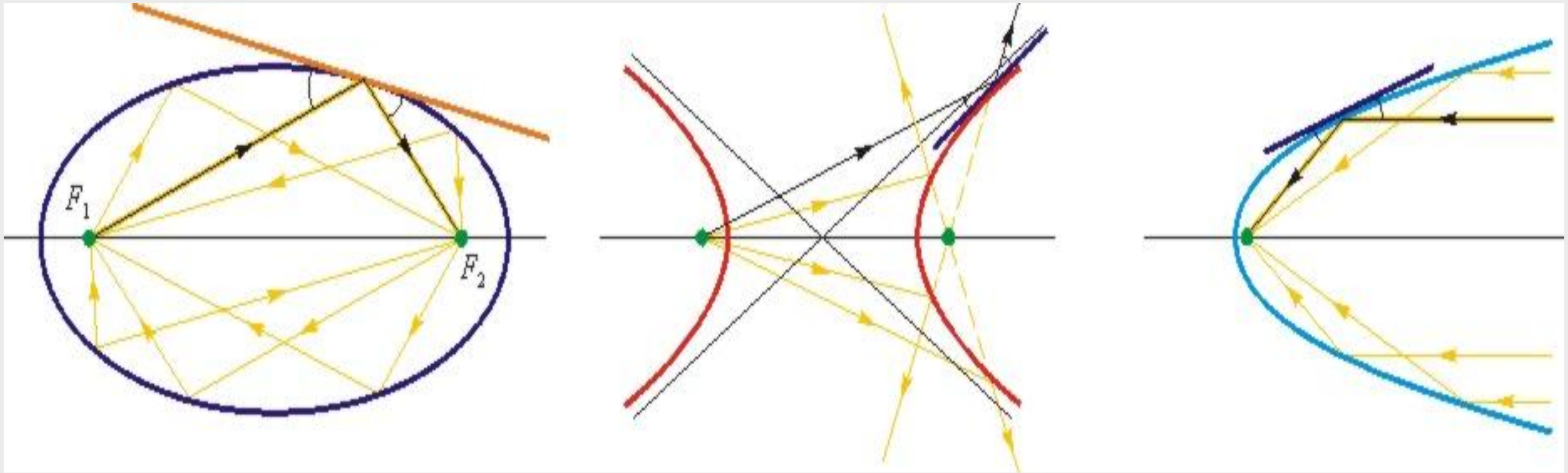
$$\Gamma: \quad y^2 = 2px$$

$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow r = d$$

r — фокальный радиус параболы

$e = 1$ – эксцентриситет параболы

Оптические свойства КВП



- Если в один из фокусов эллиптического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись, соберутся в другом фокусе.
- В результате отражения в гиперболическом зеркале не лучи, исходящие из фокуса, а их продолжения соберутся в другом фокусе: они создадут иллюзию, что источник света находится в другом фокусе.
- Параболическое зеркало собирает в одной точке параллельные лучи; в частности, лучи, параллельные оптической оси, собираются в фокусе параболы.

Вырожденные кривые второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$ пустое множество (мнимый эллипс)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$ точка

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$ пара пересекающихся прямых (вырожденная гипербола)

$$\frac{x^2}{a^2}=1$$ пара параллельных прямых (вырожденная парабола)

$$\frac{x^2}{a^2}=-1$$ пустое множество

$$\frac{x^2}{a^2}=0$$ координатная ось

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Спасибо за внимание!