§1. Числовая последовательность. Классификация последовательностей

Определение 1.1. Если любому натуральному числу 1, 2, … , n, ... поставлено в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных чисел $x_1, x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$ называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами последовательности*, x_n – *n-ым членом последовательности* или её *общим членом*.

Заметим, что x_n есть $f(n)$ – функция номера члена последовательности. Последовательность обозначается символом $\{x_n\}$, иногда $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Из элементарной алгебры известны две последовательности – *арифметическая* и *геометрическая прогрессии*, общие члены которых соответственно задаются равенствами: $x_n = a_1 + d(n-1)$ и $x_n = a_1 q^{n-1}$, при этом a_1 называется *первым членом, d – разностью* арифметической прогрессии, а *q* – *знаменателем* геометрической прогрессии.

Классификация числовых последовательностей

Определение 1.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если неравенство $x_n \le x_{n+1} (x_n \ge x_{n+1})$ выполняется для $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$. Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Определение 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists M > 0 :\ |x_n| \le M$ для $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Замечание 1.1. Из определения 1.3 следует ограниченность последовательности $\{x_n\}$ в случае, если для $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $M_1 < x_n < M_2$, где M_1, M_2 – некоторые действительные числа. В самом деле, в этом случае число M из определения 1.3 можно выбрать так: $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$. Так, последовательность $x_n = n/(n+1)$ ограничена, поскольку неравенство $0 < n/(n+1) < 1$ выполняется для $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Пример 1.1. Показать, что последовательность $x_n = (3n-1)/(2n+3)$ является возрастающей и ограниченной.

►Определим знак разности $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+3} - \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3n+2}{2n+5} - \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{11}{(2n+5)(2n+3)} > 0 \text{ для } \forall n \in N,$$

поэтому неравенство $x_{n+1} > x_n$ верно для $\forall n \in N$ и, следовательно, данная последовательность возрастающая (определение 1.2). Отсюда следует, что любой член последовательности не меньше

$x_1 : x_n \geq x_1 = 2/5$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. В то же время $x_n = \dfrac{3n-1}{2n+3} < \dfrac{3n}{2n+3} < \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Итак,

неравенство $\dfrac{2}{5} \leq x_n < \dfrac{3}{2}$ справедливо для $\forall n \in \boldsymbol{N}$, а это и означает, что данная последовательность

ограничена (замечание 1.1)◄

Пример 1.2. Является ли последовательность $x_n = (-1)^{n-1}(n+1)/n$ монотонной? ограниченной?

► $x_1=2$, $x_2= -3/2$, $x_3=4/3$, $x_4= -5/4, \ldots$. Эта последовательность не монотонная, ибо ни одно из неравенств $x_n \leq x_{n+1}$ и $x_n \geq x_{n+1}$ не выполняется для $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Первое из них не выполняется для $n=1, 3, \ldots$, т.е. для всех нечётных n, а второе – для всех чётных n. Данная последовательность ограниченная, так как $x_n = (-1)^{n-1}(1+1/n)$ и поэтому $|x_n| \leq 2$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$.◄

Пример 1.3. Найти наибольший член последовательности $x_n = 11 + 10n - n^2$.

► $x_n = 11 - (n^2 - 10n) = 11 - (n^2 - 10n + 25) + 25 = 36 - (n-5)^2 \leq 36$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$, причём равенство достигается только при $n = 5$, поэтому заключаем, что наибольшим членом последовательности является $x_5 = 36$.◄