§2. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

На комплексной плоскости наряду с прямоугольной декартовой системой координат введём также полярную систему координат, поместив полюс в начало декартовой системы и направив полярную ось по оси Ox. Пусть точка $z=(x,y)$ имеет полярные координаты (r,φ). Число r, равное длине вектора $\overrightarrow{Oz}$, называется *модулем* числа z и обозначается символом $|z|$. Число φ, т.е. полярный угол точки, изображающей число z, называется *аргументом* числа z и обозначается $\arg z$ (рис. 2.1).

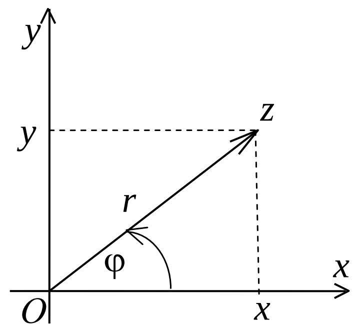


Рис. 2.1. К понятию модуля и аргумента комплексного числа

Модуль комплексного числа всегда неотрицателен и определяется однозначно, аргумент определён с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, кроме числа $z=0$, за аргумент которого можно взять любое вещественное число. Для модуля и аргумента числа $z=(x,y)$ справедливы следующие равенства:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,, \tag{2.1}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r}\,. \tag{2.2}$$

Значение аргумента $\varphi: 0\le\varphi<2\pi$ (или $\varphi: -\pi<\varphi\le\pi$) называют *главным значением* аргумента.

Пример 2.1. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-3+i\sqrt{3}$.

► Имеем: $r=|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$. Для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ в силу (2.2) имеем: $\cos\varphi=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$, отсюда $\varphi=\arg z=\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$.◄

Замечание 2.1. Расстояние между точками комплексной плоскости z_1 и z_2 равно $|z_1-z_2|$ – модулю разности чисел z_1 и z_2 (рис. 1.2).

Замечание 2.2. Для любых комплексных z_1 и z_2 справедливо неравенство:

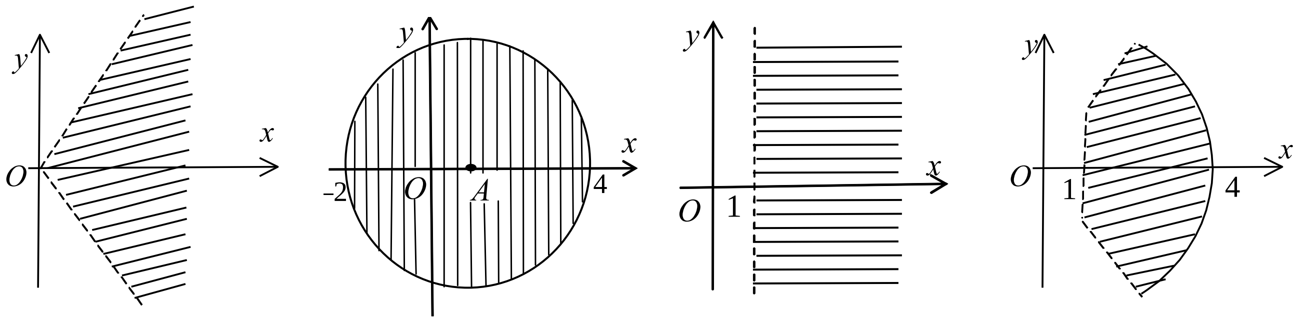
$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$$

Оно называется *неравенством треугольника*, ибо на него можно смотреть как на неравенство, связывающее длины сторон треугольника, лежащего на комплексной плоскости, вершины которого есть точки O, z_1 и z_2+z_1 (рис. 1.2).

Пример 2.2. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} -\pi/3 < \varphi < \pi/3 \quad (\varphi = \arg z); \\ |z-1| \le 3; \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$$

►Множество, описываемое первым неравенством, есть часть комплексной плоскости, покрываемая лучами, исходящими из точки *O* и имеющими всевозможные углы наклона к оси *Ox* из промежутка (–π/3; π/3) (рис. 2.2а).



а) б) в) г)

Рис. 2.2. К примеру 2.2

Левая часть второго неравенства есть расстояние между точками комплексной плоскости, изображающими числа $z = x + iy$ и 1. Это расстояние не должно быть больше 3, поэтому описываемое множество есть часть комплексной плоскости, находящаяся внутри круга радиуса 3 и центром в точке $A(1,\ 0)$ (рис. 2.2б). Множество, описываемое третьим неравенством, состоит из тех точек комплексной плоскости, абсциссы которых больше 1 (рис. 2.2в). Итак, искомое множество состоит из тех и только тех точек плоскости, которые принадлежат одновременно трём построенным областям (рис. 2.3г).◄

Пусть $z = (x, y) = x + iy$ – отличное от нуля комплексное число, $\varphi = \arg z$, $r = |z|$. Учитывая равенство (2.2), можем записать:

$$z = x + iy = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* числа *z*; здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ (одно из значений аргумента *z*, любое), при этом имеется в виду, что задано именно φ, а не $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Пример 2.3. Комплексное число $z = -3 + i\sqrt{3}$ представить в тригонометрической форме.

► В примере 2.1 были найдены модуль и аргумент данного числа: $r = \sqrt{3}$, $\varphi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Взяв в качестве $\arg z$, например, число $\frac{5}{6}\pi$, получим пред-ставление числа *z* в тригонометрической форме: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$. ◄