§1. Рациональные алгебраические дроби. Основные понятия

В этом и следующем параграфах рассматриваются только вещественные многочлены, их коэффициенты – вещественные числа. Вещественный многочлен $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k x^{n-k}$, $p_k \in \boldsymbol{R}$, при вещественных x принимает вещественные значения. В предыдущем параграфе показано, что такой многочлен может иметь попарно сопряжённые комплексные корни с ненулевыми мнимыми частями.

Определение 1.1. Отношение $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ алгебраических многочленов $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ степени m и n соответственно называют *рациональной функцией*.

Если степень знаменателя $n \geq 1$, то рациональную функцию называют *рациональной алгебраической дробью*, или, короче, *рациональной дробью*. В противном случае, т.е. при $n=0$, рациональная функция представляет собой многочлен (ибо $P_0(x) \equiv p_0$, где $p_0 \in \boldsymbol{R}$).

Далее рассматриваются рациональные дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $n \geq 1$. В качестве области определения X такой функции выступает вся числовая ось, за вычетом конечного множества точек – вещественных корней знаменателя $P_n(x)$.

Рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называют *правильной*, если $m < n$, и *неправильной* в противном случае, т. е. при $m \geq n$. Неправильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, поделив “уголком” многочлен $Q_m(x)$ на многочлен $P_n(x)$ (в общем случае с остатком), можно представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=T_{m-n}(x)+\frac{S_l(x)}{P_n(x)}.$$

Здесь $T_{m-n}(x)$ и $S_l(x)$ – алгебраические многочлены, причем степень l многочлена $S_l(x)$ меньше n.

Элементарными (*простейшими*) рациональными дробями называют рациональные дроби следующих четырех видов:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}, \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k},$$

где A, B, C, a, b, c – вещественные числа, причем $\dfrac{b^2}{4}-c<0$, так что трехчлен x^2+bx+c имеет мнимые корни; k – натуральное число, $k \geq 2$.