§3. Различные виды уравнений прямой на плоскости

В §2 было показано, что любая прямая на плоскости в произвольной прямоугольной декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (2.1), которое называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Ниже будет показано, что прямую можно задать и другими уравнениями.

1°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат *Oxy* и прямую *L*, определяемую уравнением 2.1. Пусть в этом уравнении $B \neq 0$. При этом условии прямая *L* не параллельна оси *Oy*, а упомянутое уравнение приводится к виду

$$y = kx + b, \qquad (3.1)$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$.

Коэффициент b из уравнения (3.1) называется *начальной ординатой* прямой *L*. Он равен ординате точки пересечения этой прямой с осью *Oy* ($y = b$ при $x = 0$). Для геометрической интерпретации коэффициента k введём понятие угла наклона данной прямой к оси *Ox*.

Определение 3.1. *Углом наклона* φ прямой *L* к оси *Ox* называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг точки пересечения *Ox* и *L* в направлении против часовой стрелки до совмещения *Ox* с *L* (рис. 3.1).

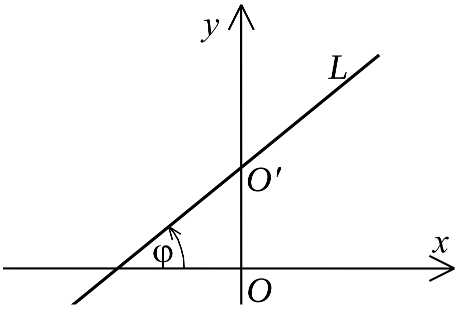

Рис. 3.1. Угол наклона прямой к оси *Ox*

Угол φ принимает значения из промежутка $[0, \pi)$, при этом $\varphi = 0$, если прямая *L* и ось *Ox* параллельны или совпадают.

Рассмотрим новую прямоугольную декарто-ву систему координат $O'x'y'$, которая получает-ся из данной при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO'}$, где $O'(0, b)$ – точка пересечения прямой *L* и оси *Oy* (рис. 3.2). Имеем:

$$x' = x, \; y' = y - b. \qquad (3.2)$$

Угол наклона *L* к оси $O'x'$ также равен φ, ибо оси *Ox* и $O'x'$ параллельны (рис. 3.2). Пусть *M* – произвольная точка *L*, отличная от точки O', *x*, *y* – её координаты в системе *Oxy*, а x', y' – в системе $O'x'y'$. Из элементарной триго-нометрии известно: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y'}{x'}$ или $\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \dfrac{y'}{x'}$ в зависимости от расположения точки *M* на прямой *L*. Поскольку $\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg}\varphi$, то при любом расположении точки *M* на *L* имеем: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y'}{x'}$ или $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y - b}{x}$ (использованы равенства (3.2)). Из уравнения (3.1) следует $k = \dfrac{y - b}{x}$, поэтому $k = \operatorname{tg}\varphi$.

Итак, приходим к выводу, что коэффици-ент k из правой части уравнения (3.1) равен тангенсу угла наклона φ прямой *L* к оси *Ox*. Он

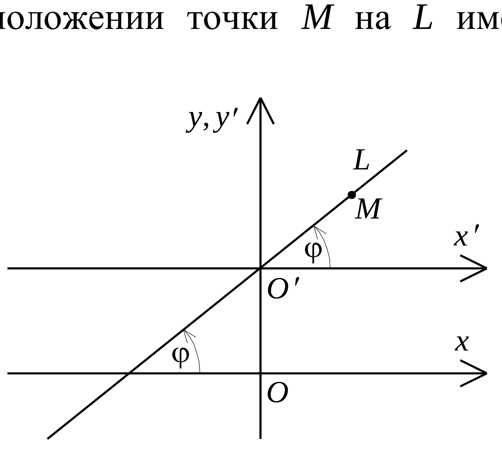

Рис. 3.2. К геометрическому смыслу коэффициента *k* в уравнении (3.1)

называется *угловым коэффициентом* этой прямой, а уравнение (3.1) – *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Замечание 3.1. Уравнением с угловым коэффициентом не может быть задана прямая, параллельная оси Oy, так как она определяется уравнением вида (2.1) при $B=0$ и, следовательно, не имеет углового коэффициента.
Уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (3.3)$$

при всевозможных значениях k вместе с уравнением

$$x-x_0=0 \qquad (3.4)$$

задаёт все прямые пучка с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Если известны координаты двух точек $M_0\,(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ прямой L, то её угловой коэффициент k определяется из равенства

$$k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \qquad (3.5)$$

которое можно получить из (3.3), подставив туда координаты точки M_1.

Пример 3.1. Найти угол между осью Ox и прямой $L:\sqrt{3}x+y-2=0$.

► Обозначим искомый угол через φ. Преобразуем уравнение L к виду (3.1): $y=-\sqrt{3}x+2$, отсюда $k=\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}$, и $\varphi=2\pi/3$. ◄

Пример 3.2. Луч света проходит через точку $A(6,2)$ и, отразившись от оси Ox в точке B, проходит через точку $C(-4,3)$. Найти абсциссу точки B.

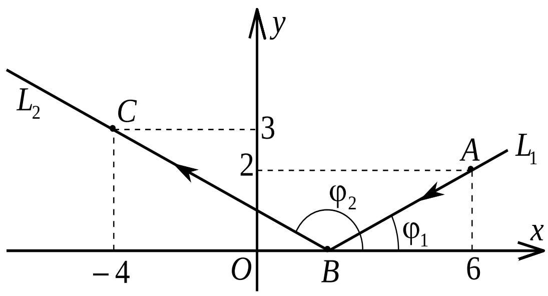

Рис. 3.3. К примеру 3.2

►Как известно из физики, угол падения равен углу отражения. Для угловых коэффициентов k_1 и k_2 прямых L_1 и L_2 (рис. 3.3) справедливо равенство:

$$k_2=-k_1, \qquad (3.6)$$

поскольку $\varphi_2=\pi-\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2=-\operatorname{tg}\varphi_1$. Для k_1 и k_2 из (3.5) имеем: $k_1=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{2}{6-x_B}$, $k_2=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\dfrac{3}{-4-x_B}$, x_B – абсцисса точки B (рис. 3.3), отсюда с учетом (3.6) получаем $\dfrac{2}{6-x_B}=\dfrac{3}{4+x_B}\Rightarrow x_B=2$. ◄

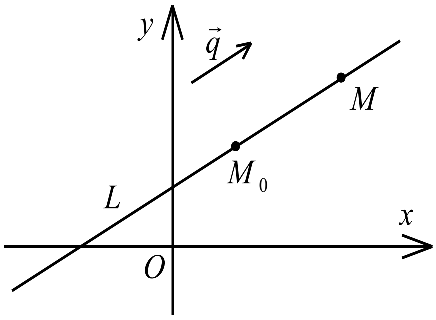

Рис. 3.4. К заданию прямой на плоскости каноническим уравнением

2°. Каноническое уравнение прямой на плоскости. Уравнение

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \qquad (3.7)$$

называется *каноническим уравнением* прямой на плоскости. Оно определяет прямую L, проходя-щую через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l,m)$, называемому её *направляющим вектором* (рис. 3.4, точка $M(x,y)$ – текущая точка прямой).

Если заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащие данной прямой, то её уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \qquad (3.8)$$

ибо за направляющий вектор $\vec{q}$ здесь можно принять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\,(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Уравнение (3.8) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки.*

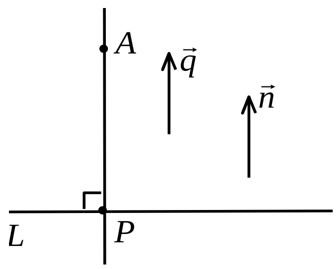

Рис. 3.5. К примеру 3.3

Пример 3.3. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2,-1)$ на прямую $L: 3x - 2y + 5 = 0$.

► За направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра AP примем $\vec{n}$ – вектор нормали к прямой L (рис. 3.5): $\vec{q} = \vec{n} = (3,-2)$. Уравнение AP имеет вид $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2}$. ◄

Пример 3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2,-1)$ и $B(1, 3)$.

►Подставим координаты точек A и B в уравнение (3.8), получим: $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4}$ ◄

3°. Параметрические уравнения прямой. Приравняем каждое из равных отношений в (3.7) параметру *t*:

$$\frac{x - x_0}{l} = t, \quad \frac{y - y_0}{m} = t. \qquad (3.9)$$

Выражая *x* и *y* из равенств (3.9), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \end{cases} t \in \boldsymbol{R}, \qquad (3.10)$$

которая называется *параметрическими уравнениями* прямой на плоскости.

Система (3.10) допускает механическую интерпретацию, а именно, она определяет координаты точки, движущейся равномерно по данной прямой, причём числа l и m являются координатами вектора скорости, а параметр t трактуется как время, прошедшее с начала движения.

Пример 3.5. Точка движется по прямой из положения (1, 0) с постоянной скоростью $\vec{v} = (2, 3)$. Написать уравнение траектории движения.

► Из системы (3.10) получаем параметрические уравнения траектории: $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t, \end{cases} t \geq 0$, где за параметр t принято время. Исключение из этих уравнений параметра t приводит к каноническому уравнению траектории: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$. И, наконец, после очевидных преобразований получим уравнение траектории в виде общего уравнения прямой: $3x - 2y - 3 = 0$. ◄