Формула Остроградского–Гаусса

Формула Остроградского–Гаусса связывает поверхностный интеграл II рода и тройной интеграл.

<u>Теорема Остроградского–Гаусса:</u>

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}^3$ – кусочно-гладкая, ограниченная, замкнутая, двухсторонняя поверхность, ограничивающая тело $\mathbb{T}$

Пусть $P(x,y,z)$; $Q(x,y,z)$; $R(x,y,z)$; $P'_x(x,y,z)$; $Q'_y(x,y,z)$; $R'_z(x,y,z)$ -

непрерывны $\forall(x,y,z) \in \mathbb{T} \cup \sigma$.

Тогда

$$\oiint\limits_{\sigma_{\text{внеш}}} P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dx\,dz + R(x,y,z)dx\,dy =$$

$$= \iiint\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

– формула Остроградского–Гаусса.

<u>Замечание</u>.

При смене стороны поверхности в формуле Остроградского –Гаусса перед тройным интегралом ставится знак « **-** «, т.е.

$$\oiint\limits_{\sigma_{\text{внутр}}} P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dx\,dz + R(x,y,z)dx\,dy =$$

$$= -\iiint\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

Формула Стокса

Формула Стокса является обобщением формулы Грина на $\mathbb{R}^3$ и связывает поверхностный интеграл II рода и криволинейный интеграл II рода.

Теорема Стокса:

Пусть σ ⊂ $\mathbb{R}^3$; σ – кусочно-гладкая, двухсторонняя, однозначно проецируемая на плоскость XOY, ограниченная поверхность, имеющая границу Г

Пусть σ: $z = f(x, y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{D}_{xy} = \text{Пр}_{xy}\sigma$

Пусть Г: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\ \ \forall t \in [a, b] \\ z = \lambda(t) \end{cases}$

Пусть функции $\varphi(t), \psi(t), \lambda(t) \in \mathrm{C}^1([a, b])$

Пусть функции $P(x, y, z);\ Q(x, y, z);\ R(x, y, z) \in \mathrm{C}^1(\sigma)$

Тогда

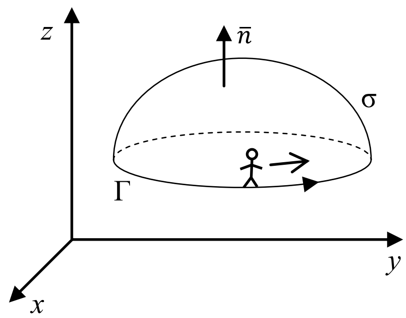
$$\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \begin{vmatrix} dy\,dz & dx\,dz & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \oint\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

где контур Г обходится так, что наблюдатель, у которого направление от ног к голове совпадает с направлением нормали $\bar{n}$, обходит Г так, что σ остаётся слева (правило правого винта)

– формула Стокса



СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Определение

Множество $B \subset R^3$, для которого выполняется равенство, что $f(M) = C\ (C = const)$, называется *поверхностью уровня* или *эквипотенциальной поверхностью*.

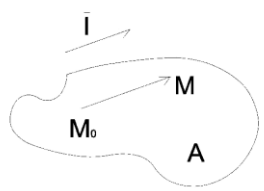
Множество $B \subset R^2$, для которого выполняется равенство, что $f(M) = C\ (C = const)$, называется *линией уровня* или *эквипотенциальной линией*

Производня по напрвлению

Определение (производная скалярного поля в направлении)

Пусть $f(M)$ – скалярное поле для всякой точки $M \in A$.

Пусть $M_0 \in A$ и $\bar{l} \uparrow\uparrow \overline{M_0M}$.



Производной скалярного поля $f(M)$ *в точке* M_0 в направлении $\bar{l}$ называется

$$\lim_{\left|\overline{M_0M}\right| \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\left|\overline{M_0M}\right|}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}}$

Замечание:

Если $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} > 0 \Rightarrow f(M) > f(M_0) \Rightarrow$ скалярное поле $f(M)$ при переходе через точку M_0 возрастает.

Если $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} < 0 \Rightarrow f(M) < f(M_0) \Rightarrow$ скалярное поле $f(M)$ при переходе через точку M_0 убывает.

Теорема (о вычислении производной по направлению в ПДСК).

Пусть скалярное поле $f(x,y,z)$ определено $\forall\,(x,y,z)\in A\subset R^3$

и дифференцируемо в точке $(x_0,y_0,z_0)\in A$.

Пусть $\bar{l}$ – направление на множестве A.

Пусть $\angle\alpha=\left(\bar{l};\hat{\bar{i}}\right)$, $\angle\beta=\left(\bar{l};\hat{\bar{j}}\right)$, $\angle\gamma=\left(\bar{l};\hat{\bar{k}}\right)$.

Тогда

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\bar{l}}=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\beta+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\gamma. \qquad (1)$$

Градиент скалярного поля

Определение 1

Градиентом скалярного поля $f(M)$ *в точке* M_0 называется **вектор,** направленный из точки M_0 в сторону наибольшего возрастания скалярного поля и имеющий длину, равную производной от скалярного поля $f(M)$, вычисленной по этому направлению.

Обозначение: $grad f(M_0)$

Замечание:

Градиент скалярного поля указывает **направление наибольшего изменения скалярного поля.** Наибольшая скорость изменения скалярного поля равно модулю градиента.

Определение 2

Градиентом скалярного поля $f(M)$ *в точке* M_0 называется **вектор**, имеющий координаты $\{f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\}$, т.е.

$$grad\, f(M_0) = \{f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\} = f'_x(M_0)\cdot\bar{i} + f'_y(M_0)\cdot\bar{j} + f'_z(M_0)\cdot\bar{k} \qquad (2)$$

Связь градиента и производной по направлению

1) $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} = grad f(M_0)\cdot\overline{l_0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} = grad f(M_0)\cdot\frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$,

где $\overline{l_0} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \{cos\alpha; cos\beta, cos\gamma\}$

2) $\max\left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}}\right| = |grad\, f(M_0)| \Leftrightarrow grad\, f(M_0)$ коллинеарен $\bar{l}$;

3) $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} = 0 \Leftrightarrow grad\, f(M_0)$ перпендикулярен $\bar{l}$;

4) Во всех остальных случаях взаимного расположения $grad\, f(M_0)$ и $\bar{l}$:

$$0 < \left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}}\right| < |grad\, f(M_0)|$$

Свойства градиента скалярного поля

1) $grad\, f(M)$ в точке M_0 перпендикулярен поверхности уровня скалярного поля $f(M)$, проходящей через точку M_0.

2) $grad\, f(M_0) = \bar{0} \;\Leftrightarrow\; f(M_0) = const$;

3) $grad\left(\alpha\cdot f(M)\right) = \alpha\cdot grad\, f(M)$.

4) $grad\left(f(M) \pm g(M)\right) = grad\, f(M) \pm grad\, g(M)$

5) $grad\left(f(M)\cdot g(M)\right)=g(M)\cdot grad\, f(M)+f(M)\cdot grad\, g(M)$