Криволинейные интегралы II рода.

Примеры.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L x^2dx + xy^2dy$$,

где *L* - отрезок прямой от точки *A* (0, 1) до точки *B* (1, 2).

Решение

Уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *B,* имеет вид

$$y = x + 1$$,

поэтому на отрезке AB dy = dx.

Подставляя в подынтегральную функцию вместо *y* его выражение через

и замечая, что при перемещении от A к B и $0 \le x \le 1$, по формуле (2.4) получаем

$$\int_L x^2dx + xy^2dy = \int_0^1 x^2dx + x(x+1)^2dx = \int_0^1 \left[x^2 + x(x+1)^2\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + 3x^2 + x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{4}$$

Ответ: $\frac{7}{4}$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$$,

где *L* - ломаная ABC (рис 4.7.), причем A(1,1), B(3,1), (3,5).

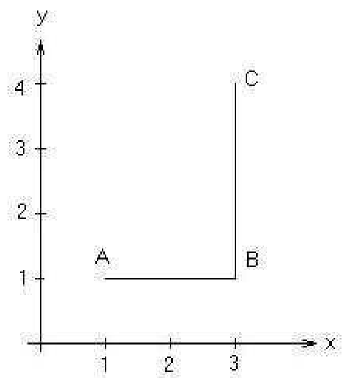


рис. 4.7

Решение:
Так как контур интегрирования *L* состоит из отрезков АВ и ВС, то

$$\int_L (x^3+y)dx+(x+y^3dy=\int_{AB}(x^3+y)dx+(x+y^3dy+\int_{BC}(x^3+y)dx+(x+y^3dy$$

АВ: $y=1, dy=0,\ 1\le x\le 3$

ВС: $x=3, dx=0,\ 1\le y\le 5$

Тогда получаем:

$$\int_L (x^3+y)dx+(x+y^3)dy=\int_1^3(x^3+1)dx+(x+1)0+\int_1^5(3^3+y)0+(3+y^3)dy=$$

$$=\int_1^3(x^3+1)dx+\int_1^5(3+y^3)dy=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^3+\left(3y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5=190.$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L x^2dx+\frac{dy}{y^2},$$

где L - дуга кривой $x=\frac{1}{y}$ от точки A(1,1) до точки B (4,1/4).

Решение:
Линия *L* задана уравнением вида $x=x(y),\ \ c\le y\le d$. В этом случае целесообразно

применить формулу (2.5)

Поскольку в данном примере *c*=1, *d*=1/4, $dx=-\frac{dy}{y^2}$, то

$$\int_L x^2dx+\frac{dy}{y^2}=\int_1^{1/4}\left[\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{y^2}\right]dy=\int_1^{1/4}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^4}\right)dy=$$

$$=\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{3y^3}\right)\Bigg|_1^{1/4}=18.$$

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L ydx + xdy$$,

где L - дуга астроиды

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$$

от точки $M_1(t_1)$ до точки $M_2(t_2)$, для которых $t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{4}$ (рис. 4.8)

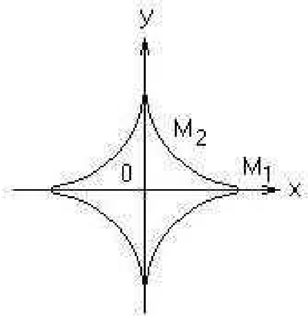


рис. 4.8

Решение:

Применим формулу (2.3), так как плоская кривая здесь задана параметрическими уравнениями.

Из уравнений линии находим

$$dx = -3a\cos^2 t\sin t,\ dy = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Следовательно,

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\pi/4}\left[a\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right) + a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t\right]dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/4}\left(\cos^4 t\sin^2 t - \cos^2 t\sin^4 t\right)dt = 3a^2\int_0^{\pi/4}\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/4}\sin^2 2t\, d(\sin 2t) = \frac{3a^2}{8}\left.\frac{\sin^3 2t}{3}\right|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{8}.$$

Примеи5. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L \frac{\left(y^3 - x^2\right)dx + \left(x^3 + y^2\right)dy}{x^2 + y^2},$$

где L - дуга окружности

$$x = R\cos\ t,\ y = R\sin t\ (0 \le t \le \pi/2),$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра *t.*

Решение:

Замечая, что

$$dx = -R\sin t dt,\ dy = R\cos\ t dt,\ t_1 = 0,\ t_2 = \pi/2.,$$

по формуле (2.3) находим

$$\int_L \frac{\left(y^3 - x^2\right)dx + \left(x^3 + y^2\right)dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(R^3\sin^3 t - R^2\cos^2 t)(-R\sin t dt) + (R^3\cos^3 t + R^2\sin^2 t)R\cos\ t dt}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(R^4\cos^4 t + R^3\sin^2 t\cos t + R^3\sin t\cos^2 t - R^4\sin^4 t)}{R^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (R^2\cos^4 t + R\sin^2 t\cos t + R\sin t\cos^2 t - R^2\sin^4 t) =$$

$$= R^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t dt - R\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t dt + R\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 t dt - R^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t dt =$$

$$= R\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\pi/2} - R\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}R.$$

Замечание. Здесь принято во внимание, что

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 t dt = \frac{3}{16}\pi,\quad \int_0^{\pi/2}\sin^4 t dt = \frac{3}{16}\pi.$$

Пример **6.** Вычислить криволинейный интеграл второго типа

$$\int\limits_L y^2dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$$
,

где L - отрезок прямой в пространстве от точки A(1,0,2) до точки B(3,1,4).

Решение:

Оставим уравнения прямой, проходящей через точки A и B :

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2} \quad (= t).$$

Из параметрических уравнений прямой

$$x = 1 + 2t,\ y = t,\ z = 2 + 2t$$

получаем

$$dx = 2dt,\ dy = dt,\ dz = 2t.$$

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр *t* меняется от

0 до 1, т.е. пределы интегрирования в формуле (2.2), которой здесь нужно пользоваться, соответственно $t_1 = 0,\ t_2 = 1$.

По формуле (2.2) находим:

$$\int\limits_L y^2dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 t^2 2dt + \left[(1+2t)^2 + (2+2t)\right]dt + \left[(1+2t) + t + (2+2t)^2\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[2t^2 + \left(1 + 4t + 4t^2 + 2 + 2t\right) + 2(1 + 3t + 4 + 8t + 4t^2)\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (14t^2 + 28t + 13)dt = \left(\frac{14t^3}{3} + 14t^2 + 13t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{95}{3}.$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L (y^2+z^2)dx + yzdy + xdz,$$

где *L* - дуга винтовой линии

$$x=t,\ y=2\cos t,\ z=2\sin t\left(0\le t\le \pi/2\right).$$

Решение:

Поскольку

$$dx=dt, dy=-2\sin tdt, z=2\cos tdt,$$

то по формуле (2.2) получим:

$$\int_L (y^2+z^2)dx + yzdy + xdz =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(4\sin^4 t+4\cos^2 t\right)dt-4\sin t\cos t(-2\sin tdt)+2t\cos tdt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(2t\cos t+8\sin^2 t\cos t+4\right)dt=2\int_0^{\pi/2}t\cos tdt+8\int_0^{\pi/2}\sin^2 td(\sin t)+$$

$$+4\int_0^{\pi/2}dt=2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi+\frac{2}{3}.$$

Замечание. Интеграл

$$2\int_0^{\pi/2}t\cos tdt$$

вычислен с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi/2}t\cos tdt=\int_0^{\pi/2}td(\sin t)=t\sin t\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin tdt=t\sin t\Big|_0^{\pi/2}+\cos t\Big|_0^{\pi/2}.$$

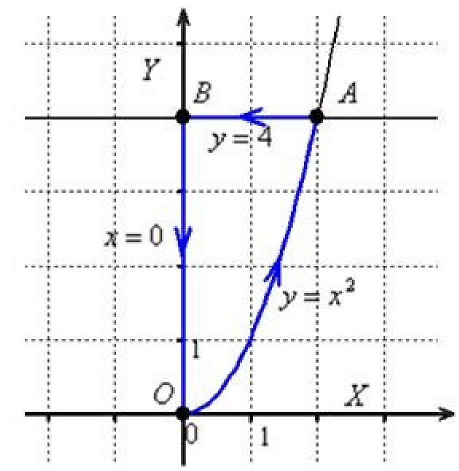
Пример 8.Вычислить интеграл двумя способами

$$\oint_C (2x+y)dx+3xdy$$

по контуру *C*, ограниченному линиями

$$y=x^2, y=4, x=0.$$

Интегрировать против часовой стрелки. Выполнить чертёж.



Первый способ.

В силу *свойства аддитивности*, криволинейный интеграл по контуру *OABO* можно представить в виде суммы трёх интегралов:

$$\oint\limits_{OABO}(2x+y)dx+3xdy=\int\limits_{OA}(2x+y)dx+3xdy+\int\limits_{AB}(2x+y)dx+3xdy+\int\limits_{BO}(2x+y)dx+3xdy$$

1) OA: $y=x^2$; $dy=2xdx$; $0\le x\le 2$

Тогда получаем

$$\int\limits_{OA}(2x+y)dx+3xdy=\int\limits_0^2\left((2x+x^2)dx+3x\cdot 2xdx\right)=\int\limits_0^2(2x+x^2+6x^2)dx=\int\limits_0^2(2x+7x^2)dx=$$

$$=\left(x^2+\frac{7}{3}x^3\right)\Big|_0^2=4+\frac{56}{3}-0-0=\frac{68}{3}$$

2) AB: $y=4$; $dy=0$; x меняется от2 до 0 *(см. чертёж)*.

Тогда получаем

$$\int\limits_{AB}(2x+y)dx+3xdy=\int\limits_2^0\left((2x+4)dx+3x\cdot 0\right)=\int\limits_2^0(2x+4)dx=(x^2+4x)\Big|_2^0=0+0-4-8=-12$$

3) BO: $x=0$; $dx=0$; y меняется от4 до 0

Тогда получаем

$$\int\limits_{BO}(2x+y)dx+3xdy=\int\limits_4^0\left((2\cdot 0+4)\cdot 0+3\cdot 0\cdot dy\right)=\int\limits_4^0 0dy=0$$

Таким образом, интеграл по контуру:

$$\oint\limits_{OABO}(2x+y)dx+3xdy=\frac{68}{3}-12+0=\frac{68}{3}-\frac{36}{3}=\frac{32}{3}$$

Второй способ .

Применим формулу Грина, которую обычно записывают для положительного направления обхода контура:

$$\oint_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где *D* – замкнутая область, ограниченная контуром *C*.

Сначала найдём частные производные:

$$P = 2x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (2x+y)'_y = 0 + 1 = 1$$

$$Q = 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (3x)'_x = 3$$

И, учитывая ,что

$$x^2 \le y \le 4, \quad 0 \le x \le 2,$$

получаем:

$$\oint_C (2x+y)dx + 3xdy = \iint_D (3-1)dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\int_0^2 dx \int_{x^2}^4 dy =$$

$$= 2\int_0^2 (y)\Big|_{x^2}^4 dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3} - (0-0)\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Как видите, решение сильно сократилось.

Пример 9

Вычислить

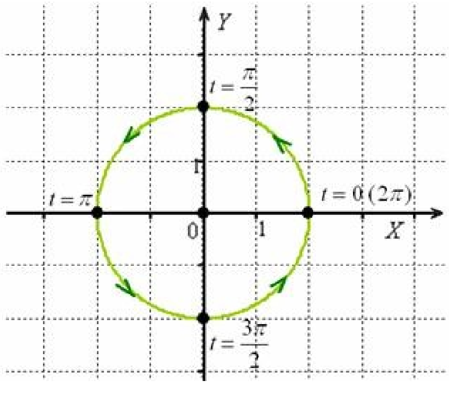
$$\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$$

по окружности

$$x^2 + y^2 = 4.$$

а) непосредственно, б) по формуле Грина.

Решение:



а)Представим уравнение окружности

$$x^2+y^2=2^2$$

в параметрической форме:

$$x=2\cos t,\ y=2\sin t\ ;\ \ 0\le t\le 2\pi.$$

Вычислим криволинейный интеграл непосредственно.

Найдём дифференциалы:

$$dx=d(2\cos t)=(2\cos t)'dt=-2\sin t dt$$
$$dy=d(2\sin t)=(2\sin t)'dt=2\cos t dt$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}
&(x+y)dx+(x-y)dy=\\
&=(2\cos t+2\sin t)\cdot(-2\sin t dt)+(2\cos t-2\sin t)\cdot 2\cos t dt=\\
&=4\left[(\cos t+\sin t)\cdot(-\sin t)+(\cos t-\sin t)\cdot\cos t\right]dt=\\
&=4(-\sin\cos t-\sin^2 t+\cos^2 t-\sin t\cos t)dt=\\
&=4(\cos^2 t-\sin^2 t-2\sin t\cos t)dt=\\
&=4(\cos 2t-\sin 2t)dt
\end{aligned}$$

Таким образом, криволинейный интеграл:

$$\oint_C(x+y)dx+(x-y)dy=4\int_0^{2\pi}(\cos 2t-\sin 2t)dt=4\left(\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=$$
$$=4\left(\frac{1}{2}\sin 4\pi+\frac{1}{2}\cos 4\pi-\frac{1}{2}\sin 0-\frac{1}{2}\cos 0\right)=4\left(0+\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}\right)=0$$

б) Вычислим интеграл по формуле Грина:

$$\oint_C P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ ,$$

где *D* – замкнутая область, ограниченная контуром *C*. В данном случае это круг радиуса 2.

Заметим, что

$$P=x+y\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial P}{\partial y}=0+1=1$$

$$Q=x-y\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=1-0=1$$

Тогда имеем:

$$\oint_C(x+y)dx+(x-y)dy=\iint_D(1-1)dxdy=0\ .$$

Пример 10.

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_C (x+y)dx + (x-y)dy$$

по окружности $x^2+y^2=4$ от точки A(2;0) до точки B(0;2)

Здесь

$$P = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 + 1 = 1$$

$$Q = x - y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 0 = 1$$

т.е.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Поэтому, для вычисления интеграла достаточно найти функцию $U(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по формуле (2.8):

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C,$$

где в качестве точки (x_0, y_0) можно взять точку любую точку из области определения функций *P(x,y)* , *Q(x,y),* в частности точку (0;0).

$$U(x,y) = \int\limits_0^x (x+0)dx + \int\limits_0^y (x-y)dy + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C,$$

$$\int\limits_C (x+y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{A(2;0)}^{B(0;2)} dU(x,y) = U(0;2) - U(2;0) = -2 - 2 = -4.$$