Поверхностные интегралы I рода.

(ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ)

Основные формулы

Пусть дана функция $f(x, y, z)$, непрерывная на некоторой гладкой

поверхности σ и рассмотрим поверхностный интегра 1 рода

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma \tag{4.17}$$

<u>Замечание1</u> *:*

Поверхностный интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейных интегралов первого типа.

<u>Замечание 2</u>*:* (о физическом смысле поверхностного интеграла первого рода)

Если $f(x, y, z) > 0$ и функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как поверхностную плотность массы материальной поверхности σ , то интеграл (4.17) определяет ***массу*** этой поверхности.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$$

Предположим, что поверхность σ однозначно проектируется на какую-либо координатную плоскость.

1)Пусть поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Оxy,

поверхность σ задана уравнением $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и область $S = \text{Пр}_{xy}\sigma$

Тогда элемент поверхности

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|cos\gamma(M)|},$$

где $\gamma(M)$ **-** угол между нормалью $\vec{n}$ к поверхности в точке M(x, y, z) и осью Oz.

Так как

$$cos\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

то

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \qquad (4.18)$$

и интеграл (4.17) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S} \frac{f\big(x,y,z(x,y)\big)}{|cos\gamma|}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

Таким образом

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (4.19)$$

2) Пусть поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Oyz и

поверхность σ задана уравнением $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S_1} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz \qquad (4.20)$$

где S_1 проекция поверхности σ на плоскость Oyz.

3) Пусть поверхность σ однозначно проектируется на плоскость Oxz и поверхность σ задана уравнением $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S_2} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\ \ dxdz, \qquad (4.21)$$

где S_2 проекция поверхности σ на плоскость Oxz.