Резюме

$\lim x_k = a$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такое, что при всех $k > k_\varepsilon$ справедливо $|x_k - a| < \varepsilon$.

Если $\lim x_k = a$, а ρ – некоторое число, $\rho > a$ ($\rho < a$), то существует $k_\rho \in \mathbf{N}$ такое, что при всех $k > k_\rho$ справедливо $\rho > x_k$ ($\rho < x_k$).

Пусть $\lim x_k = a$ и $\lim y_k = b$. Если при всех $k \in \mathbf{N}$ $x_k \le y_k$, то и $a \le b$.

Пусть при всех $k \in \mathbf{N}$ $x_k \le y_k \le z_k$. Если $\lim x_k = \lim z_k = a$, то $\{y_k\}$ сходится, причем $\lim y_k = a$.

Пусть $\lim x_k = a$, $\lim y_k = b$. Тогда $\lim(x_k + y_k) = a + b$; $\lim(x_k y_k) = ab$. Если $y_k \ne 0$ и $b \ne 0$, то $\lim \dfrac{x_k}{y_k} = \dfrac{a}{b}$.

Последовательность $\{\alpha_k\}$ называют бесконечно малой, если $\alpha_k \to 0$.

Последовательность $\{\alpha_k\}$ называют бесконечно большой, если $\alpha_k \to +\infty$, $-\infty$ или ∞.

Пусть $\alpha_k \ne 0$, а $\beta_k = \dfrac{1}{\alpha_k}$. Если $\alpha_k \to 0$, то $\beta_k \to \infty$; если $\alpha_k \to \infty$, то $\beta_k \to 0$.

Если монотонная последовательность ограничена, она сходится.

$\lim\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k = e$, $e = 2{,}718281828459045\ldots$.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Что называют абсолютной величиной вещественного числа x? Перечислите свойства абсолютной величины.

2. Пусть x и y – вещественные числа, точки на числовой оси. Каково геометрическое истолкование числа $|x - y|$?

3. Найти множество X вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - 2| < 3$.

4. Опишите этапы доказательства истинности утверждения $A(n)$ методом математической индукции. Используя этот метод, докажите, что при всяком натуральном n справедливо равенство: $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

5. Запишите формулу «бином Ньютона». Найдите коэффициент при x^3 многочлена $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$.

6. Сформулируйте определение предела последовательности чисел. Опираясь на него, покажите, что число 0 является пределом последовательности $\left\{q^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, где $|q|<1$.

7. Перечислите основные теоремы о сходящихся последовательностях (пункт 2.3).

8. Пусть $\{x_k\}$ – последовательность, a – число, $\alpha_k = x_k - a$.

*) Если $x_k \to a$, что можно утверждать о поведении $\{\alpha_k\}$?

**) Если $\alpha_k \to 0$, что можно утверждать о поведении $\{x_k\}$?

9. Сформулируйте теорему о сумме, произведении и частном сходящихся последовательностей.

10. Пусть $\{x_k\}$ – бесконечно большая последовательность. Что можно утверждать о последовательности $\{y_k\}$, где $y_k = \frac{1}{x_k}$?

11. Пусть $x_k \to 0$, причем $x_k \neq 0$. Что можно утверждать о последовательности $\{y_k\}$, где $y_k = \frac{1}{x_k}$?

12. Найти $\lim x_k$, если он существует:

а) $x_k = \frac{2k+1}{k}$; б) $x_k = \sin\frac{\pi k}{2}$; в) $x_k = \frac{\sin k}{k}$; г) $x_k = \frac{n^2}{n+1}$.

13. Какие последовательности называют монотонными? строго монотонными? Приведите примеры.

14. Пусть последовательность $\{x_k\}$

а) монотонно не убывает и ограничена снизу;

б) монотонно не убывает и ограничена сверху;

в) монотонно не возрастает и ограничена снизу;

б) монотонно не возрастает и ограничена сверху.

В каких из этих четырех случаев можно гарантировать, что последовательность сходится?

Ответы на контрольные вопросы к главе 1

2. $|x-y|$ есть расстояние между точками x и y.

3. $(-1; 2)\cup(2; 5)$.

5. $\frac{27}{64}$.

12. а) 2; б) не существует; в) 0; г) $+\infty$.

14. б) и в).