Резюме к главе 2

В главе 2 главе введены линейные операции с матрицами, операции умножения и транспонирования матриц, описаны свойства этих операций. Для квадратной матрицы введено понятие обратной матрицы, сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Рассмотрены способы вычисления обратной матрицы. В конце главы введено понятие ранга матрицы и рассмотрены способы его вычисления.

Вопросы и задачи для самоконтроля к гл. 2, раздел 1

1. Какие две матрицы называются равными? Равны ли матрицы A и B, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$?
2. Дайте определение действия сложения матриц. Можно ли сложить две матрицы с размерами 2×3 и 3×2?
3. Даны матрицы $A_{k\times l}$ и $B_{m\times n}$. При каких соотношениях между числами k,l,m,n операции сложения и умножения определены для данных матриц одновременно?
4. Матрица A имеет размерность 3×4. Какой размерности должна быть матрица B, чтобы было определено произведение: а) AB? б) BA? в) B^2A? г) AB^2?
5. Дана матрица A. В каком случае справедливо равенство $A^T=A$?
6. Докажите, что всегда определены произведения AA^T и A^TA.
7. Известно, что для матрицы A выполняется равенство: $(1\ \ 2\ \ 3)\,A=(0\ \ 1)$. Каковы размеры матрицы A?
8. Дайте понятие единичной матрицы. Какая из матриц:
9. а) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ является единичной?
10. Известно, что $\det A_{5\times 5}=3$. Чему равен: а) $\det 2A$; б) $\det A^T$; в) $\det A^{-1}$?
11. Найдите $\det(ABC)$, если A, B, C – квадратные матрицы одного порядка, при этом одна из них вырожденная.
12. Докажите, что если $A^2=A$, то матрица $B=2A-E$ удовлетворяет условию $B^2=E$.
13. Какими должны быть матрицы A, B, C, чтобы было определено выражение: а) $(AB)C$; б) $(A+B)C$; в) $A(B+C)$; г) $A^2(BC)$; д) $(A^2+2B)C$?
14. Пусть A и B – две квадратные матрицы. Докажите, что сумма элементов, находящихся на главной диагонали, для матриц AB и BA одна и та же.
15. Какая матрица всегда имеет обратную? Сколько обратных матриц она имеет? Как найти обратную матрицу?
16. Используя обратную матрицу, найдите матрицу X из уравнения $AX=B$,

если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

17. Решите в матричном виде уравнение $AXC + D = F$, где A, C, D, F – данные матрицы (какая у них должна быть размерность?), X – искомая матрица.

18. Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к гл. 2, раздел 1

1. Неравны, ибо не равны их соответствующие элементы. **2.** Нельзя, ибо они имеют неодинаковый размер. **3.** $k=l=m=n$. **4.** а) $4\times k$, б) $k\times 3$, где k – любое натуральное число; в) B – квадратная матрица 3-го порядка; г) B – квадратная матрица 4-го порядка. **5.** Матрица A должна быть квадратной и симметричной относительно главной диагонали. **7.** **М**атрица A имеет размер 3×2. **9.** в). **10.** а) 96; б) 3; в) 1/3. **11.** 0. **13.** а) Матрицы должны иметь размеры: A – $k\times m$, B – $m\times n$, C – $n\times p$, где k, m, n, p – любые действительные числа; б) матрицы A и B должны иметь одинаковый размер $k\times m$, а матрица C – размер $m\times n$, где k, m, n – любые действительные числа; в) матрица A может иметь размер $k\times m$, а матрицы B и C должны иметь одинаковый размер $m\times n$, а, где k, m, n – любые действительные числа; г) матрица A – квадратная k-го порядка, матрица B должна иметь размер $k\times m$, а матрица C – размер $m\times n$, где k, m, n – любые действительные числа; д) матрицы A, B – квадратные k-порядка, матрица C должна иметь размер $k\times m$, где k, m – любые действительные числа. **16.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}16 & -32\\ -6 & 13\end{pmatrix}$. **17.** $X=A^{-1}(F-D)C^{-1}$, A, C, D, F – квадратные матрицы одного порядка. **18.** 2.