§3. Понятие вещественного числа.
Множество вещественных чисел *R* и его свойства

Будем пользоваться общепринятыми обозначениями:

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3,\ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел, т. е. чисел вида p/q, где $q \in \boldsymbol{N}$, а $p \in \boldsymbol{Z}$; множество $\boldsymbol{Q}$ можно рассматривать также как совокупность всевозможных конечных или бесконечных периодических десятичных дробей.

Можно показать, что множество $\boldsymbol{Q}$ – счётное множество.

Бесконечные десятичные непериодические дроби не принадлежат множеству $\boldsymbol{Q}$. Эти числа называются *иррациональными*. Рациональные и иррациональные числа называют *вещественными* или *действительными* числами; совокупность всех вещественных чисел обычно обозначают через $\boldsymbol{R}$.

Основные свойства множества *R*

1 . *Упорядоченность*. Пусть $x_1,\ x_2$ – вещественные числа; справедливо одно и только одно из следующих утверждений: $x_1 < x_2$, $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$.

2 . *Плотность*. Пусть x_1, x_2 – вещественные числа, причем $x_1 < x_2$. Всегда существует вещественное число x, лежащее между $x_1,\ x_2$: $x_1 < x < x_2$.

3 . *Неограниченность*. Для любого положительного числа A существует вещественное число x, большее, чем A: $A<x$. Для любого отрицательного числа A существует вещественное число x, меньшее A: $x <A$.

4 . *Непрерывность*. Пусть X, Y – множества из $\boldsymbol{R}$. Если неравенство $x \le y$ справедливо для $\forall x \in X,\ \forall y \in Y$, то существует хотя бы одно вещественное число c: $x \le c \le y$.

Замечание 3.1. Множество $\boldsymbol{Q}$ обладает свойством плотности, но не обладает свойством непрерывности. Пусть X, Y – множества всех рациональных чисел, меньших и больших $\sqrt{2}$ соответственно. Очевидно, неравенство $x \le y$ выполняется для $\forall x \in X,\ \forall y \in Y$, а неравенство $x \le c \le y$ – только при $c = \sqrt{2}$, которое, как известно, не является рациональным числом.

5 . *Множество* $\boldsymbol{R}$ *несчётно*.

6 . *Геометрическая интерпретация множества R*. Геометрически вещественные числа интерпретируются как точки так называемой *числовой прямой*, представляющей из себя направленную прямую, на которой выбран масштаб и начало отсчёта (рис. 3.1). При этом вещественному числу *x* ставится в соответствие единственная точка *M* числовой прямой, для которой число *x* является координатой, и, обратно, каждой точке *M* числовой прямой – единственное вещественное число *x* – координата точки *M*. Началу отсчёта соответствует число 0.

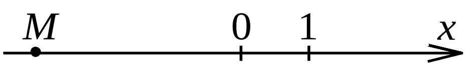

Рис. 3.1. Числовая прямая