§5. Дифференциалы высших порядков

Определение. ***Функция*** w ***нескольких переменных называется*** n ***раз дифференцируемой, если дифференцируема она сама и все ее частные производные до*** $(n-1)$***-го порядка включительно.***

Следствие. Так как из дифференцируемости функции следует ее непрерывность, то из определения n раз дифференцируемой функции вытекает непрерывность ее самой и всех ее частных производных до $(n-1)$-го порядка, в том числе и смешанных, значения которых в силу теоремы о равенстве смешанных производных не будут зависеть от порядка дифференцирования. Что касается частных производных n-го порядка, то их существование и конечность гарантируются дифференцируемостью производных $(n-1)$-го порядка, а непрерывность уже может и не иметь места.

Пусть $w = f(x, y)$ – функция независимых переменных x и y, n раз дифференцируемая. Ее полный дифференциал имеет вид

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \, ,$$

причем здесь $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, т. е. произвольные числа, никак не зависящие от x и y. Поэтому можем изменять x и y, оставив dx и dy постоянными. В этом случае dw является дифференцируемой функций двух переменных x и y; тогда $d^2 w = d(dw)$ называется *полным дифференциалом второго порядка* функции w.

Аналогично, $d^3 w = d(d^2 w)$ называется *полным дифференциалом третьего порядка* функции w и т. д. Вообще полный дифференциал n-го порядка есть дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^n w = d(d^{n-1} w)$, при этом помним, что дифференциалы независимых переменных считаются постоянными. Уславливаются, что при каждой операции дифференцирования они остаются одними и теми же.

Найдем явные выражения для введенных дифференциалов:

$$d^2 w = d(dw) = d\left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dy \, ,$$

т. е.

$$d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy^2 \, . \tag{5.1}$$

Далее,

$$d^3w = d(d^2w) = d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy^2\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}dx + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}dy\right)dx^2 + 2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}dx + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}dy\right)dxdy + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}dx + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}dy\right)dy^2,$$

т. е.

$$d^3w = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}dy^3. \tag{5.2}$$

Формулы (5.1) и (5.2) напоминают соответствующие разложения для квадрата и куба суммы двух величин. Методом математической индукции можно доказать, что это сходство сохраняется и для дифференциала n-го порядка, т. е.

$$d^n w = \frac{\partial^n w}{\partial x^n}dx^n + C_n^1\frac{\partial^n w}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + C_n^2\frac{\partial^n w}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots + \frac{\partial^n w}{\partial y^n}dy^n. \tag{5.3}$$

Для формулы (5.3) удобна следующая символическая запись:

$$d^n w = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n w.$$

Замечание. В случае функции $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от m переменных понятие полного дифференциала второго, третьего и т. д. порядков вводится совершенно аналогично предыдущему. При этом имеет место следующая символическая формула:

$$d^n w = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n w.$$

Найдем теперь полный дифференциал второго порядка сложной функции $w = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. При этом будем предполагать, что все три функции f, φ и ψ дифференцируемы несколько раз. По свойству инвариантности полного дифференциала первого порядка

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Тогда

$$d^2w = d(dw) = d\left(\frac{\partial w}{\partial w}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right).$$

Вычисляя теперь дифференциал второго порядка, получим формулу, отличную от формулы (5.1), так как в этом случае мы не можем рассматривать du и dv как константы, ибо эти величины будут, вообще говоря, зависеть от x и y. Будем иметь:

$$d^2w = d\left(\frac{\partial w}{\partial u}du\right) + d\left(\frac{\partial w}{\partial v}dv\right) = d\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)du + \frac{\partial w}{\partial u}d^2u + d\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)dv + \frac{\partial w}{\partial v}d^2v =$$

$$=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dv\right)du+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}du+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv\right)dv+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

т. е.

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v.$$

Если бы промежуточные переменные u и v были независимыми переменными, то в силу формулы (5.1) мы имели бы

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2;$$

как видим, добавилось выражение

$$\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

и формула для d^2w усложнилась. Еще большее усложнение получается для d^3w и т. д.

Замечание. Выше мы обнаружили, что для сложной функции свойство инвариантности, вообще говоря, не имеет места для дифференциалов второго и более высоких порядков. Однако имеется важный частный случай, когда для сложной функции свойство инвариантности имеет место для дифференциалов любого порядка. Это будет, если u и v – линейные функции независимых переменных: $u=kx+ly+m$, $v=k_1x+l_1y+m_1$. В самом деле, в этом случае $du=k\,dx+l\,dy$, $dv=k_1dx+l_1dv$, откуда $d^2u=0$ и $d^2v=0$ и

$$\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v\equiv 0.$$

В результате формулы для дифференциалов окажутся такого же вида, как если бы и u, и v были независимыми переменными.

Всё сказанное приложимо и к сложной функции $w=f(u_1,u_2,\dots,u_p)$ от p промежуточных переменных $u_1,u_2,\dots,u_p$, зависящих от независимых переменных $x_1,x_2,\dots,x_m$.