§ 5. Линейный интеграл векторного поля. Циркуляция векторного поля.

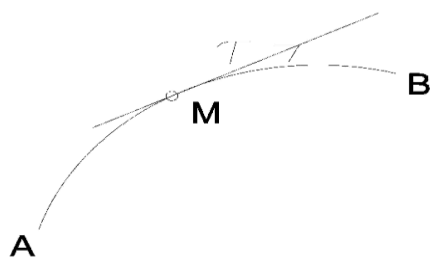
Линейный интеграл векторного поля

<u>Определение</u> (линейный интеграл)

Пусть $\overline{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть Γ_{AB} – простая, спрямляемая, ориентированная кривая: $\Gamma_{AB} \subset A$.

Тогда $\int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau_0} dl$ - *линейный интеграл векторного поля*, где $\overline{\tau_0}$ - единичный вектор направляющего вектора $\overline{\tau}$ касательной, проведённой к Γ_{AB} в точке M, направление которого совпадает с ориентацией кривой Γ_{AB}. См. рисунок ниже



<u>Замечания</u> (другие формы записи линейного интеграла)

1) $$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau_0} dl = \int\limits_{\Gamma_{AB}} Пр_{\overline{\tau_0}} \overline{a}(M) \cdot dl = \int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a}(M)_{\overline{\tau_0}} dl$$

2) Пусть Γ_{AB} задана так

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \lambda(t) \end{array}\right\} \forall\, t \in [t_1; t_2] : t_1 \to (\cdot)A;\ \ t_2 \to (\cdot)B$$

Пусть $\overline{r}(M)$ – радиус-вектор любой точки M, принадлежащей кривой Γ_{AB}.

$$\overline{r}(M) = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} = \varphi(t) \cdot \overline{i} + \psi(t) \cdot \overline{j} + \lambda(t) \cdot \overline{k}$$

$$d\overline{r} = \varphi'(t)dt \cdot \overline{i} + \psi'(t)dt \cdot \overline{j} + \lambda'(t)dt \cdot \overline{k}$$

$d\overline{r}$ коллинеарен $\overline{\tau}$.

$$\left|d\bar{r}\right| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\lambda'(t))^2}\,dt = dl$$

$$\overline{\tau_0} dl = d\bar{r}$$

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M) \cdot \overline{\tau_0}(M) = \int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}$$

3) Пусть $\bar{a}(M) = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$.

Точка $M \in \Gamma_{AB}$: $\bar{r}(M) = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$

$$d\bar{r}(M) = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$$

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Свойства линейных интегралов

1) $$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot \overline{a_2}(M)\right) \cdot d\bar{r} = \lambda_1 \cdot \int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a_1}(M) \cdot d\bar{r} \pm \lambda_2 \cdot \int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a_2}(M) \cdot d\bar{r}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 = const$

2) Пусть $\Gamma_{AB} = \Gamma_{AC} \vee \Gamma_{CB}$

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = \int\limits_{\Gamma_{AC}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} + \int\limits_{\Gamma_{CB}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}$$

3) $$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = -\int\limits_{\Gamma_{BA}} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}$$

Доказательства свойств линейных интегралов вытекают из свойств криволинейных интегралов II рода.

<u>Замечание</u> (о физическом смысле линейного интеграла)

Если поле $\bar{a}(M)$ рассматривать как силовое, то $\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{F}(M) d\bar{r}$ представляет собой работу по перемещению материальной точки силой F вдоль кривой Γ_{AB}.

Циркуляция векторного поля

<u>**Определение**</u> (циркуляция векторного поля)

Циркуляцией векторного поля $\bar{a}(M)$ *для любой точки* M, принадлежащей области A, в свою очередь являющейся частью R^3, называется линейный интеграл по замкнутому контуру Γ.

Обозначение: $circul_{Г}\bar{a}(M)$ *или* $Ц_{Г}\bar{a}(M)$.