§4. Вычисление длины дуги кривой

Наряду с задачей вычисления площадей плоских фигур и объемов тел, одной из важнейших геометрических задач, решаемых методами интегрального исчисления, является задача нахождения длины дуги кривой. Логическая ситуация и здесь имеет уже привычные нам черты: как в случае площади и объема, мы должны определить общее понятие длины дуги кривой и одновременно создать аппарат для практического вычисления длин этих дуг.

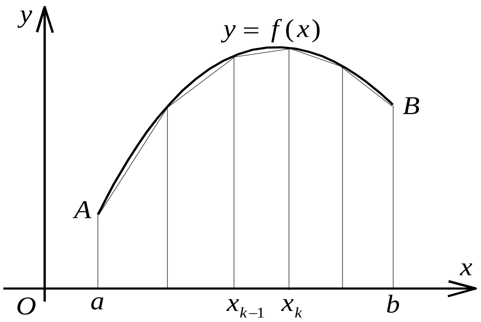

Рис. 4.1д. Дуга AB кривой и вписанная в дугу ломаная линия

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Пусть данная кривая служит графиком функции $y = f(x)$ и мы хотим найти длину L дуги AB этой плоской кривой (рис. 4.1д). Мы подойдем к решению поставленной задачи методом, который является прямым переносом на общий случай тех приемов, с помощью которых элементарная геометрия определяет и вычисляет длины окружностей и их дуг.

Начнем с произвольного разбиения отрезка $[a, b]$ посредством точек деления $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$ на n частей. В каждой точке деления мы восставим перпендикуляр к оси Ox, продолжая его до встречи с кривой $y = f(x)$. Дуга AB этой кривой разбивается, таким образом, на n частей. Каждые две соседние точки деления дуги AB соединим хордой. Совокупность этих хорд образует ломаную линию, вписанную в дугу AB. Длина этой ломаной может быть вычислена.

Если мы будем делать разбиение все более и более мелким, уменьшая наибольшую из длин звеньев вписанной в дугу AB ломаной, то построенная ломаная, как это представляется очевидным, будет все теснее примыкать к дуге AB. Поэтому естественно определить длину дуги AB как предел длин таких ломаных при безграничном измельчении разбиения. При этом необходимо, конечно, чтобы этот предел существовал и чтобы он не зависел от способа предпринятых разбиений. Этим определением решается первая часть поставленной задачи.

Чтобы на базе этого определения создать аппарат для вычисления величины L, надо, прежде всего, найти аналитическое выражение для длины L_n построенной ломаной, вписанной в дугу AB. Так как две соседние точки деления дуги AB имеют координаты $\left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$ и $\left(x_k, f(x_k)\right)$, то соединяющее их k-е звено ломаной имеет длину $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]^2}$, и, следовательно, длина всей ломаной равна

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]^2} .$$

Допустим теперь, что функция $f(x)$ имеет на промежутке $[a,b]$ непрерывную производную $f'(x)$ и, следовательно, дуга AB гладкая. Тогда по теореме Лагранжа мы будем иметь

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}), k=1,2,\ldots,n,$$

где $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$. Поэтому, полагая $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, получим

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+f_x'^2(\xi_k)}\Delta x_k. \tag{4.1д}$$

Поскольку функция $\sqrt{1+f_x'^2(x)}$ непрерывна на $[a,b]$, что следует из непрерывности $f'(x)$, то правая часть (4.1д) является интегральной суммой для интеграла

$$\int_a^b\sqrt{1+f_x'^2(x)}\,dx, \tag{4.2д}$$

и поэтому при $\lambda=\max\limits_k\Delta x_k\to 0$ $(n\to\infty)$ сумма L_n имеет своим пределом интеграл (4.2д). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. Длина L дуги гладкой кривой $y=f(x)$, содержащейся между точками с абсциссами $x=a$ и $x=b$, равна

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}. \tag{4.1}$$

При использовании формулы (4.1) надо заменить y функцией $f(x)$, входящей в уравнение $y=f(x)$.

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. До сих пор мы предполагали, что кривая задается уравнением вида $y=f(x)$. Если та же кривая задана параметрически уравнениями вида $x=x(t)$, $y=y(t)$, то, введя параметр t в качестве новой переменной интегрирования в интеграл (4.1), будем иметь

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2}\,x_t'\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt,$$

причем возрастанию t от t_0 до t_1 соответствует возрастание x от a до b. Для простоты предполагаем, что $x_t'\neq 0$ на промежутке $[t_0,t_1]$, хотя окончательная формула свободна от этого предположения. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции, то длина L дуги кривой равна

$$\boxed{L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt}, \tag{4.5}$$

где t_0 и t_1 – значения параметра t, соответствующие концам дуги $(t_0<t_1)$.

3°. Длина дуги кривой в полярных координатах. Пусть требуется найти длину дуги кривой $r = f(\varphi)$, отвечающего в полярных координатах промежутку $\alpha \le \varphi \le \beta$. Если перейти к декартовым координатам при помощи формул

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{4.3д}$$

то соотношения (4.3д), где под r мы понимаем $f(\varphi)$, представят собой параметрические уравнения нашей кривой, причем роль параметра играет угол φ.

В таком случае

$$x'_\varphi = r'_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi, y'_\varphi = r'_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi,$$

откуда $x'^2_\varphi + y'^2_\varphi = r^2 + r'^2_\varphi$. Значит, по формуле (4.5) будет $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\,d\varphi$.

Длина L дуги гладкой кривой $r = f(\varphi)$, отвечающей промежутку $\alpha \le \varphi \le \beta$, определяется по формуле

$$\boxed{L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\,d\varphi}. \tag{4.6}$$

4°. Длина дуги пространственной кривой. Измерение длин дуг пространственных кривых строится аналогично всему изложенному для плоских кривых. Здесь также для длины дуги получается формула, аналогичная (4.5).

Для длины дуги пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, имеет место формула:

$$L = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\,dt, \tag{4.8}$$

где t_0 и t_1 – значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_0 < t_1$).