§6. Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных

Пусть известно общее решение

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n ; \tag{6.1}$$

однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0 ; \tag{6.2}$$

требуется найти частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = q(x) . \tag{6.3}$$

Будем искать это решение в форме (6.1), считая однако коэффициенты C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) некоторыми, пока неизвестными функциями x, т. е.

$$\tilde{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i . \tag{6.4}$$

Теперь вместо одной неизвестной функции $\tilde{y}$ мы имеем n неизвестных коэффициентов $C_i(x)$, которые должны быть выбраны таким образом, чтобы функция $\tilde{y}$ удовлетворяла уравнению (6.3). Поэтому $(n-1)$ условие для нахождения $C_i(x)$ можно задать произвольно. Выберем их так, чтобы производные функции $\tilde{y}$ в (6.4) имели бы по возможности такой же вид, какой они имеют при постоянных C_i.

Продифференцируем равенство (6.4) по x:

$$\tilde{y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) \tag{6.5}$$

и положим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0 . \tag{6.6}$$

Тогда получим

$$\tilde{y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x) .$$

Дифференцируя (6.5) еще раз, получим, учитывая (6.6),

$$\tilde{y}'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x)$$

и положим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0 . \tag{6.7}$$

Продолжая эту операцию до $(n-1)$-й производной включительно, получим вместе с равенством (6.4) следующие n равенств:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y} &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i, \\ \tilde{y}' &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \tilde{y}^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Вычислим теперь $\tilde{y}^{(n)}$:

$$\tilde{y}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)\,. \tag{6.9}$$

Здесь мы уже не можем потребовать, чтобы $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = 0$, так как функции $C_i(x)$ уже подчинены следующим $(n-1)$ условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

а надо еще удовлетворить уравнению (6.3).

Подставим выражения (6.8) и (6.9) для $\tilde{y}, \tilde{y}', \ldots, \tilde{y}^{(n)}$ в уравнение (6.3):

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) L[y_i] = q(x)\,;$$

так как $L[y_i] \equiv 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x) L[y_i] = 0\,,$$

и мы получим недостающее n-е условие для $C_i(x)$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = q(x)\,. \tag{6.11}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных $C_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) получаем систему (6.10), (6.11) n дифференциальных уравнений первого порядка. Система (6.10), (6.11) – алгебраическая система линейных неоднородных уравнений относительно $C_i'(x)$. Составим определитель системы (6.10), (6.11):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x).$$

Это определитель Вронского, составленный из линейно независимых решений линейного однородного уравнения (6.2) и, следовательно, $W(x) \neq 0$. А тогда система однозначно разрешима относительно $C_i'(x)$.

Определив из системы (6.10), (6.11) все $C_i'(x) = \varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), интегрированием найдем

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx.$$

Тогда

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} \left[\int \varphi_i(x)\,dx \right] y_i.$$

Указанный способ решения неоднородного уравнения, принадлежащий Лагранжу, называется *методом вариации произвольных постоянных*.

Замечание. Для дифференциального уравнения второго порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$ будем иметь:

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{6.12}$$

где

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = q(x). \end{cases} \tag{6.13}$$

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

▶ Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$, характеристическое уравнение которого имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$, откуда $\lambda^2 = -1$ и $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тогда $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Решение $\tilde{y}$ ищем в виде

$$\tilde{y} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \tag{6.14}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подчинены условиям

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Из системы (6.15) находим $C_1'(x) = -\operatorname{tg} x$, $C_2'(x) = 1 \;\Rightarrow\; C_1(x) = \ln|\cos x|$, $C_2(x) = x$. Из (6.14) тогда следует $\tilde{y} = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$. ◀