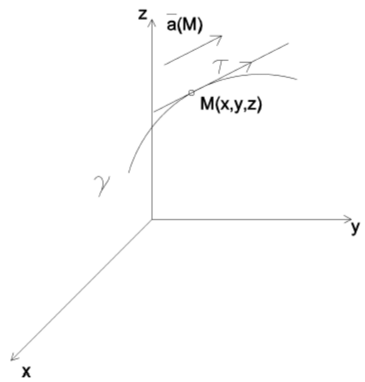
Векторные поля

Векторные линии

<u>Определение</u> (векторная линия)

Пусть $\overline{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.

Векторной линией векторного поля $\overline{a}(M)$, проходящей через точку M, называется линия, в каждой точке которой векторное поле коллинеарно направляющему вектору касательной, проведенной к этой линии в точке M.



Векторные линии векторного поля $\overline{a}(M)$, являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

Потоком векторного поля

Потоком векторного поля $\bar{a}(M)$ через поверхность σ в направлении нормали называется число, равное

$$\Pi_\sigma \bar{a}(M) = \iint_\sigma \bar{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma$$

Если $\bar{a}(M) = P(x,y,z) \cdot \bar{i} + Q(x,y,z) \cdot \bar{j} + R(x,y,z) \cdot \bar{k}$ и $\overline{n_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

Тогда

$$\Pi_\sigma \bar{a}(M) = \iint_\sigma [P(x,y,z) \cdot \cos\alpha + Q(x,y,z) \cdot \cos\beta + R(x,y,z) \cdot \cos\gamma] d\sigma =$$

$$\iint_\sigma P(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dxdz + R(x,y,z) dxdy$$

Основные свойства потока векторного поля

1) При смене направления нормали к поверхности σ поток векторного поля меняет знак на противоположный;

2) $\Pi_\sigma \left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot \overline{a_2}(M)\right) = \lambda_1 \cdot \Pi_\sigma \left(\overline{a_1}(M)\right) \pm \lambda_2 \cdot \Pi_\sigma \left(\overline{a_2}(M)\right)$;

3) Пусть $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$ $\left(\mu(\sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0\right)$ $\Rightarrow$ $\Pi_\sigma \bar{a}(M) = \Pi_{\sigma_1} \bar{a}(M) + \Pi_{\sigma_2} \bar{a}(M)$.

Способы вычисления потока векторного поля через незамкнутую поверхность

1) $\sigma:\ z = f(x,y)\ \forall\,(x,y)\in D_{xy} = Пp_{xy}\sigma \subset R^2$.

Тогда

$$П_\sigma \bar{a}(M) = \iint_\sigma \bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \left[|\cos\gamma| d\sigma = dxdy\right] = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{\bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)} dxdy$$

$$\overline{n_0} = \pm\frac{grad\left(z - f(x,y)\right)}{\left|grad\left(z - f(x,y)\right)\right|} = \pm\frac{-f'_x(x,y)\cdot\bar{i} - f'_y(x,y)\cdot\bar{j} + 1\cdot\bar{k}}{\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}},$$

где «+», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\bar{k}\right)$ – острый и «–», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\bar{k}\right)$ – тупой.

2) $\sigma:\ y = \varphi(x,z)\ \forall\,(x,z)\in D_{xz} = Пp_{xz}\sigma \subset R^2$.

Тогда $П_\sigma \bar{a}(M) = \iint_\sigma \bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \left[|\cos\beta| d\sigma = dxdz\right] = \iint_{D_{xz}} \left.\frac{\bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)}{|\cos\beta|}\right|_{y=\varphi(x,z)} dxdz$

$$\overline{n_0} = \pm\frac{grad\left(y - \varphi(x,z)\right)}{\left|grad\left(y - \varphi(x,z)\right)\right|} = \pm\frac{-\varphi'_x(x,z)\cdot\bar{i} + 1\cdot\bar{j} - \varphi'_z(x,z)\cdot\bar{k}}{\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x,z)\right)^2 + \left(\varphi'_z(x,z)\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x,z)\right)^2 + \left(\varphi'_z(x,z)\right)^2}},$$

где знак «+», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\bar{j}\right)$ – острый и знак «–», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\bar{j}\right)$ – тупой.

3) $\sigma: \; x=\psi(y,z) \; \forall \, (y,z) \in D_{yz} = \Pi p_{yz}\sigma \subset R^2$.

Тогда $\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \iint\limits_\sigma \overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \left[|\cos\alpha|d\sigma = dydz\right] = \iint\limits_{D_{yz}} \left.\dfrac{\overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)}{|\cos\alpha|}\right|_{z=\psi(y,z)} dydz$

$$\overline{n_0} = \pm\frac{grad\left(x-\psi(y,z)\right)}{\left|grad\left(x-\psi(y,z)\right)\right|} = \pm\frac{1\cdot\overline{i} - \psi'_y(y,z)\cdot\overline{j} - \psi'_z(y,z)\cdot\overline{k}}{\sqrt{1+\left(\psi'_y(y,z)\right)^2+\left(\psi'_z(y,z)\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\psi'_y(y,z)\right)^2+\left(\psi'_z(y,z)\right)^2}},$$

где знак «+», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\overline{i}\right)$ – острыйи и знак «–», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\overline{i}\right)$ – тупой.

Вычисление потока векторного поля через замкнутую поверхность

Пусть $\overline{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть σ – двухсторонняя кусочно-гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая тело T: $\sigma \subset A$.

Тогда

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \oiint\limits_\sigma \overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma,$$

где $\overline{n_0}$ – единичный вектор нормали, в направлении которого вычисляется поток векторного поля.

По теореме Остроградского-Гаусса поток векторного поля равен:

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \oiint\limits_{\sigma_{внеш}} \overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

Замечание

1)Если $\Pi_\sigma \bar{v}(M) > 0$, то говорят, что внутри поверхности σ имеется источник векторного поля.

2)Если $\Pi_\sigma \bar{v}(M) < 0$, то говорят, что внутри поверхности σ имеется сток векторного поля.

3)Если внутри поверхности σ нет ни источников, ни стоков векторного поля, то $\Pi_\sigma \bar{v}(M) = 0$. Обратное утверждение не является верным.