# §4. Уравнения $n$-го порядка, однородные относительно искомой функции и ее производных

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

где $F$ – однородная функция $k$-го измерения относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$, т. е. функция $F$ такая, что

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \tag{4.2}$$

Покажем, что порядок этого уравнения всегда можно понизить на единицу. Для этого сделаем замену искомой функции, положив

$$y'_x = yz. \tag{4.3}$$

Из (4.3) находим

$$y''_{x^2} = y'z + y\frac{dz}{dx} = y\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right).$$

Вычислим далее

$$y'''_{x^3} = y'\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + y\left(2z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right) = y\left(z^3 + 3z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

и т. д. Наконец, находим

$$y^{(n)}_{x^n} = y\omega\left(z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right).$$

Подставляя найденные выражения производных в уравнение (4.1), придем к уравнению

$$F\left(x, y, yz, y\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right), y\left(z^3 + 3z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right), \dots, y\omega\left(z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)\right) = 0,$$

которое в силу условия (4.2) может быть записано в виде

$$y^k F\left(x, 1, z, z^2 + \frac{dz}{dx}, z^3 + 3z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \omega\left(z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)\right) = 0,$$

откуда приходим к уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$F\left(x, 1, z, z^2 + \frac{dz}{dx}, z^3 + 3z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \omega\left(z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)\right) = 0. \tag{4.4}$$

Если $z = z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ – общее решение уравнения (4.4), то из уравнения

$$\frac{y'}{y} = z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

найдем общий интеграл исходного уравнения (4.1) в виде

$$\ln y = \int z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\, dx + C_n .$$

***Замечание.*** Для уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{4.5}$$

где $F$ – однородная функция $k$-го измерения относительно $y, y', y''$, изложенный метод понижения порядка приводит к уравнению первого порядка относительно новой переменной $z = \dfrac{y'_x}{y}$ следующего вида:

$$F\left(x, y, yz, y\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right)\right) \equiv y^k F\left(x, 1, z, z^2 + \frac{dz}{dx}\right) = 0 .$$

Сокращая на $y^k$, получим

$$F\left(x, 1, z, z^2 + \frac{dz}{dx}\right) = 0 . \tag{4.6}$$

Это уравнение первого порядка относительно функции $z$. Если его общее решение найдено в виде $z = z(x, C_1)$, то решение уравнения (4.5) может быть найдено через квадратуру:

$$\frac{y'}{y} = z(x, C_1) \quad \Rightarrow \quad \ln y = \int z(x, C_1)\, dx + \ln C_2 ,$$

откуда

$$y = C_2 \exp\left(\int z(x, C_1)\, dx\right). \tag{4.7}$$

В формуле (4.7) содержится и решение $y \equiv 0$, получающееся из общего решения (4.7) при $C_2 = 0$, поэтому деление на $y^k$, сделанное ранее, не привело к потере решения.

***Пример.*** Найти общее решение уравнения

$$xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0 \tag{4.8}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 2 . \tag{4.9}$$

▶ Уравнение (4.8) относится к рассматриваемому типу, его левая часть представляет собой однородную функцию второго порядка ($k = 2$) относительно $y$, $y'$ и $y''$.

Полагая $y' = yz$, будем иметь $y'' = y\left(z^2 + \dfrac{dz}{dx}\right)$. Тогда уравнение (4.8) примет вид

$$xy^2\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) - xy^2z^2 - y^2z = 0 \quad \text{или} \quad x\frac{dz}{dx} - z = 0 .$$

Из последнего равенство, разделяя переменные, получим

$$\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln z - \ln x = \ln(2C_1) \quad \Rightarrow \quad z = 2C_1 x .$$

Заменяя в последнем равенстве $z$ на $y'/y$, будем иметь

$$\frac{y'}{y} = 2C_1 x, \tag{4.10}$$

откуда

$$\frac{dy}{y} = 2C_1 x\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = C_1 x^2 + \ln C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = C_2 e^{C_1 x^2} \tag{4.11}$$

– общее решение уравнения (4.8).

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (4.9). Из (4.10) в силу условий (4.9) следует $C_1 = 1$, а тогда в силу первого условия в (4.9) из (4.11) будем иметь:

$$1 = C_2 e, \text{ откуда } C_2 = \frac{1}{e}.$$

Таким образом, частным решением, удовлетворяющим начальным условиям (4.9), будет функция

$$y = e^{x^2 - 1}.$$