§2. Уравнение n-го порядка, не содержащее искомой функции и её нескольких последовательных производных

Здесь речь будет идти об уравнении вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Вводя новую искомую функцию $z = z(x)$ по формуле

$$z = y^{(k)}, \tag{2.2}$$

будем иметь $z' = y^{(k+1)}$, $z = y^{(k)}$, … , $z^{(n-k)} = y^{(n)}$. Тогда уравнение (2.1) примет вид:

$$F(x, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{2.3}$$

Таким образом, порядок уравнения понизился на k единиц.

Предположим, что уравнение (2.3) таково, что мы можем найти его общее решение

$$z = z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}). \tag{2.4}$$

Заменяя функцию z ее значением из подстановки (2.2), получим

$$y^{(k)} = z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}). \tag{2.5}$$

Интегрируя функцию (2.5) последовательно k раз, получим общее решение

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{2.6}$$

Пример. Для уравнения

$$y''' + \frac{2}{x} y'' = 5x^2. \tag{2.7}$$

Решить задачу Коши с начальными данными:

$$y\big|_{x=1} = 0, \quad y'\big|_{x=1} = 1, \quad y''\big|_{x=1} = 2. \tag{2.8}$$

▶ Уравнение (2.7) не содержит y и y'. Полагая $z = y''$, получим дифференциальное уравнение

$$z' + \frac{2}{x} z = 5x^2, \tag{2.9}$$

т. е. порядок уравнения понизился на две единицы. Решая линейное дифференциальное уравнение (2.9) первого порядка известным способом (см. §5, гл. 1) будем иметь:

$$z = uv \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad u'v + uv' + \frac{2}{x} uv = 5x^2 \quad \Rightarrow$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x} v\right) = 5x^2. \tag{2.10}$$

Упрощая уравнение (2.10), выберем функцию v так, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln v = -2\ln x \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{x^2}\,. \tag{2.11}$$

При функции v, определяемой по формуле (2.11), уравнение (2.10) принимает вид

$$y'\frac{1}{x^2} = 5x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 5x^4 dx \quad \Rightarrow$$

$$u = x^5 + C_1\,. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует

$$z = (x^5 + C_1)\frac{1}{x^2}\,,$$

откуда

$$y'' = x^3 + \frac{C_1}{x^2}\,. \tag{2.13}$$

Из (2.13) находим

$$y' = \int\left(x^3 + \frac{C_1}{x^2}\right)dx = \frac{x^4}{4} - C_1\frac{1}{x} + C_2\,,$$

откуда

$$y = \int\left(\frac{x^4}{4} - C_1 \ln x + C_2 x + C_3\right)dx \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^5}{20} - C_1 \ln x + C_2 x + C_3 \tag{2.14}$$

– общее решение уравнения (2.7).

Знание общего решения (2.14) дает возможность решить задачу Коши с начальными данными (2.8):

$$y''\big|_{x=1} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1;$$

$$y'\big|_{x=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{4} - C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{7}{4};$$

$$y\big|_{x=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{20} + \frac{7}{4} + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -\frac{9}{5}\,.$$

Следовательно,

$$y = \frac{x^5}{20} - \ln x + \frac{7}{4}x - \frac{9}{5}$$

– решение задачи Коши с начальными данными (2.8). ◀