§1. Множества и операции над ними

Понятие *множества* – одно из основных в математике. Оно относится к так называемым первичным, классификационно неопределяемым понятиям. Термины «совокупность», «семейство», «система», «набор» и т. п. – синонимы слова «множество». Примерами множеств могут служить множество граждан, живущих в данном городе, множество натуральных чисел и т. д. Приведённые примеры показывают, что множество может содержать конечное или бесконечное число произвольных объектов.

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Множества обычно обозначаются большими буквами, а их элементы – малыми.

Если x – элемент множества X, то пишут: $x \in X$ (x принадлежит X). Запись $x \notin X$ следует читать так: «x не принадлежит X». Запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

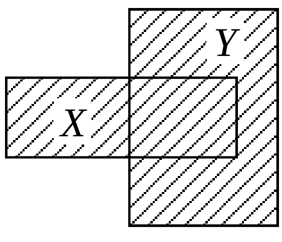
Пусть X и Y – два множества. Если всякий элемент множества X принадлежит и множеству Y, то X называют *подмножеством* множества, при этом записывают: $X \subset Y$. Множества X и Y, состоящие из одних и тех же элементов, называют равными и пишут $X = Y$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$. Очевидно, что $\varnothing \subset X$, X – любое множество.

Объединением множеств X и Y называют множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из данных множеств X или Y. Объединение множеств X и Y обозначают $X \bigcup Y$. *Пересечением* множеств X и Y называют множество, каждый элемент которого принадлежит одновременно и множеству X, и множеству Y. Пересечение множеств X и Y обозначают $X \bigcap Y$.

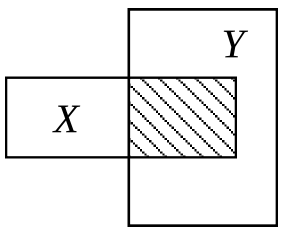
Разностью множеств X и Y называют множество, состоящее из тех элементов множества X, которые не принадлежат Y; обозначают разность множеств X и Y символом $X \setminus Y$.

На рис. 1.1 – 1.3 заштрихованные фигуры изображают объединение, пересечение и разность множеств X и Y, представленных прямоугольниками.



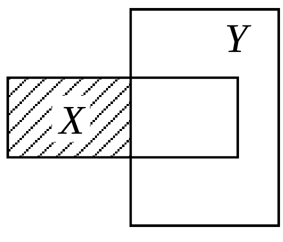
$X \bigcup Y$

Рис. 1.1. Объединение множеств X и Y



$X \bigcap Y$

Рис. 1.2. Пересечение множеств X и Y



$X \setminus Y$

Рис. 1.3. Разность множеств X и Y

Пример 1.1. Найти $X \bigcup Y$, $X \bigcap Y$ и $X \setminus Y$, если $X = \{2,4,5,7\}$, $Y = \{1,3,4,5,8\}$.

► $X\bigcup Y=\{1,2,3,4,5,7,8\}$, $X\bigcap Y=\{4,5\}$, $X\backslash Y=\{2,7\}$. ◄

Пример 1.2. Найти $X\bigcup Y$, $X\bigcap Y$ и $X\backslash Y$, если X, Y – множества решений неравенств: $x^2-4<0$ и $x^2-4x-5<0$.

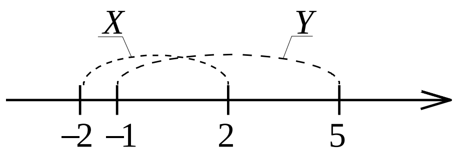


Рис. 1.4. К примеру 1.2

► $x^2-4<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)<0$. Решим последнее неравенство, например, методом интервалов: $-2<x<2$. Итак, множество X состоит из чисел x, удовлетворяющих полученному неравенству (рис. 1.4). Это утверждение можно записать так: $X=\{x: -2<x<2\}$, где знак двоеточия имеет смысл "такой, что". Решив второе из данных неравенств, получим: $Y=\{x: -1<x<5\}$ (рис. 1.4). Имеем:

$$X\bigcup Y=\{x: -2<x<5\},\ X\bigcap Y=\{x: -1<x<2\}, X\backslash Y=\{x: -2<x\le -1\}. ◄$$

Множество X, состоящее из одного элемента, из двух элементов, вообще, из n элементов, где n – любое натуральное число, называют *конечным множеством*. Пустое множество $\varnothing$ также относят к конечным множествам. Множества, не относящиеся к конечным, называют *бесконечными.* Бесконечным является, например, множество $\boldsymbol{N}$, состоящее из всевозможных натуральных чисел.

Всякое бесконечное множество является либо *счётным*, либо *несчётным*. Бесконечное множество называют *счётным*, если между его элементами и натуральными числами можно установить взаимно однозначное соответствие, т. е. если можно перенумеровать все его элементы. Существуют множества, для которых такая процедура неосуществима: при любом способе приписывания его элементам натуральных номеров, всегда часть элементов остаётся непронумерованной. Такие множества называют *несчётными*. Простейшим примером счётного множества является множество $\boldsymbol{N}$ всевозможных натуральных чисел. Совокупность всех точек отрезка прямой есть несчётное множество.