Линейное уравнение первого порядка

Дифференциальное уравнение

$y' + p(x)y = q(x)$ **(1)**

называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**. Делаем замену $y = uv$, где $u = u(x),\ v = v(x)$ – функции от x. Так как $y' = u'v + uv'$, то после подстановки y и y' в уравнение (1), получаем $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или, группируя члены,

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Функцию v выберем так, чтобы выполнялось равенство

$v' + p(x)v = 0$, или $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$. Пусть решением этого дифференциального уравнения с разделенными переменными v и x является функция $v = f(x)$, тогда при таком выборе функции v из уравнения (6.2) получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными u и x $u'v = q(x)$ или $u'f(x) = q(x)$,

$du = \frac{q(x)}{f(x)}dx$. Пусть общим решением этого уравнения является функция $u = \varphi(x, c)$, тогда функция $y = uv = f(x)\varphi(x, c)$ - общее решение уравнения (1).

Рассмотрим применение этого метода на следующем примере.

Пример4.1 Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Решение. Будем искать решение в виде: $y = u \cdot v$;

Тогда $y' = \frac{dy}{dx} = u'v + uv'$; Подставляя выражения для искомой функции и ее производной в рассматриваемое дифференциальное уравнение, получим:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3, \text{ или}$$
$$u'v + (v' - \frac{2v}{x+1})u = (x+1)^3. \qquad (3)$$

Поскольку одну из функций u и v мы вправе выбрать произвольно, выберем ее так, чтобы выполнялось условие: $v' - \frac{2v}{x+1} = 0$. Тогда уравнение (3) запишется в виде: $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$. Это уравнение легко интегрируется: $\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1}$; $\ln|v| = 2\ln|x+1|$. Произвольную постоянную здесь можно положить равной нулю, так как мы выбираем частное решение. Тогда $v = (x+1)^2$.

После подстановки v в исходное уравнение получим (при $x \neq -1$):

$u'(x+1)^2 = (x+1)^3$; $u' = x+1$; $u = \frac{x^2}{2} + x + C$.

Таким образом, $y = u \cdot v = (x+1)^2(\frac{x^2}{2} + x + C) -$ искомое общее решение.

Пример 4.2

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

Убеждаемся, что уравнение линейное первого порядка относительно искомой функции $y(x)$, причем $p(x) = 2x$, $q(x) = e^{-x^2}$. Делаем замену $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в последнее уравнение: $u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$. Группируем $u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$. Функцию v находим из условия $v' + 2xv = 0$. Разделяем переменные v и x:

$\frac{v'}{v} = -2x$ или $\frac{v'}{v}dx = -2xdx$, $\frac{dv}{v} = -2xdx$. Интегрируя последнее уравнение, находим $\int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx$, $\ln v = -x^2$, $v = f(x) = e^{-x^2}$.

При $v = f(x) = e^{-x^2}$ получаем из сгруппированного уравнения, что

$u'v = xe^{-x^2}$ или $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$.

Сокращаем на e^{-x^2}: $u' = x$, $u = \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$. Таким образом, общим решением заданного уравнения является функция

$y = uv = (\frac{1}{2}x^2 + c)e^{-x^2}$.

Пример 4.3

Найти частное решение уравнения , удовлетворяюшее начальным данным

$$y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$$

Делаем замену $y = uv$, тогда $u'v + uv' - uvtgx = \frac{1}{\cos x}$; далее, по шаблону находим u и v $v' - vtgx = 0$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$, т.к.

$\sin xdx = -d\cos x$, то $\ln v = \ln \frac{1}{\cos x}$, $v = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$,

$u' = 1$, $u = x + c$, $y = uv = \frac{x+c}{\cos x}$ - общее решение.

Используя начальные данные, находим частное решение:

$y(0) = 0 = \frac{0+c}{\cos 0}$, $c = 0$, $y = \frac{x}{\cos x}$ - частное решение.

Пример 4.4

$$y' = \frac{1}{2x - y}$$

Уравнение не является линейным относительно функции Y(x). Однако его можно привести к линейному относительно функции X(y).

Т.к. $x' = \dfrac{dx}{dy}$, то $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x'}$; тогда $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{2x - y}$

или

$x' - 2x = -y$ - линейное уравнение относительно функции X(y).

Решаем его по шаблону: $x = uv$; находим u и v; $v' - 2v = 0$,

$\int \dfrac{dv}{v} = \int 2dy$,

$\ln v = 2y,\ v = e^{2y};\ \ u'v = -y$, $u'e^{2y} = -y,\ u = -\int ye^{-2y}dy$. Берем интеграл по частям: $u = \frac{1}{4}e^{2y}(2y+1) + c$, $x = uv = \frac{1}{4}(2y+1) + ce^{-2y}$ - - общее решение.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение следующего вида:

$$y' + a_1(x)y = f(x)y^n. \qquad (4)$$

Здесь $n \neq 0$ и $n \neq 1$, так как в этих случаях уравнение (4) превращается в линейное уравнение.

Уравнение Бернулли, как и линейное уравнение, решается с помощью представления этой функции в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Пример5. Решить уравнение:

$$y' + tgx \cdot y = y^2 \cdot \sin x. \qquad (5)$$

Решение. Это уравнение Бернулли и $n = 2$. Положим $y = u \cdot v$. Тогда уравнение (5) запишется в виде:

$$u'v + u(v' + v \cdot tgx) = u^2 v^2 \sin x\,. \qquad (6)$$

Будем искать функцию $v(x)$ как решение уравнения:

$$v' + v \cdot tgx = 0\,.$$

Тогда $\dfrac{dv}{dx} = -v \cdot tgx$ и $\int \dfrac{dv}{v} = -\int tgx \cdot dx$. Вычисляя интегралы, получим:

$$\ln v = \ln \cos x \text{ и } v = \cos x.$$

Подставляя полученное выражение в (6), получим:

$$u' = u^2 \cos x \cdot \sin x\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos x \cdot \sin x \cdot dx\,.$$

Выполняя интегрирование, приходим к выражению:

$-\dfrac{1}{u} = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$, или $u = \dfrac{2}{-\sin^2 x - 2C}$.

Окончательно получаем: $y = \dfrac{2\cos x}{-\sin^2 x - 2C}$.