## §5. Модуль вещественного числа и его свойства

**Определение 5.1.** *Абсолютной величиной* (*модулем*) вещественного числа $x$ называется число, обозначаемое через $|x|$ и определяемое формулой:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

***Замечание 5.1.*** Геометрически $|x|$ интерпретируется как расстояние от точки $x$ числовой прямой до точки $O$ (начала отсчёта) (рис. 5.1, 5.2).

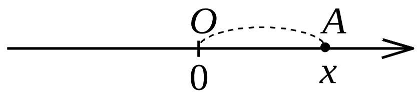


Рис. 5.1. К замечанию 5.1, $x > 0$, $|x| = |OA|$

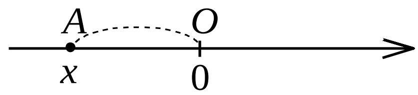


Рис. 5.2. К замечанию 5.1, $x < 0$, $|x| = |OA|$

### Свойства абсолютной величины

1. Неравенство $|x| \ge 0$ выполняется для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $|x| = 0$ только для $x = 0$.
2. Для $\forall x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство: $|x| = |-x|$.
3. Для $\forall x \in \boldsymbol{R}$ справедливо неравенство: $-|x| \le x \le |x|$.
4. Неравенства $|x| \le a$ и $-a \le x \le a$ равносильны для $\forall a > 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$.
5. Неравенство $|x| \ge a$ и объединение двух неравенств: $x \le -a \vee x \ge a$ равносильны для $\forall a > 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$.
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall y \in \boldsymbol{R}$, если $y \ne 0$, то $|x/y| = |x|/|y|$.
7. Неравенство $||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$ справедливо для $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$.

***Замечание 5.2.*** Из свойства 4 следует, что число $x$ находится в данном случае на числовой прямой на отрезке длиной $2a$ между точками $-a$, $a$ и на расстоянии от точки 0, не большем, чем $a$ (рис. 5.3), а из свойства 5 – число $x$ находится от точки 0 на расстоянии, не меньшем, чем $a$ (рис. 5.4).

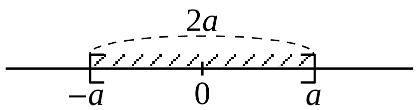


**Рис. 5.3. К замечанию 5.2**

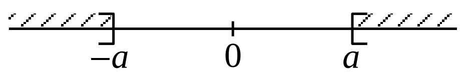


**Рис. 5.4. К замечанию 5.2**

***Замечание 5.3.*** Неравенство $|x + y| \le |x| + |y|$ называют *неравенством треугольника*. Можно доказать и более общее утверждение: пусть $n$ – заданное натуральное число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – заданные вещественные числа, тогда справедливо неравенство: $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

►**1.** Пусть $x \ge 0$, тогда $|x| = x$ (определение 5.1), поэтому $|x| \ge 0$. Для $x < 0$ имеем $|x| = -x$ (определение 5.1) и потому $|x| > 0$, так как $(-x) > 0$.

**2.** Пусть $x \ge 0$, $|x| = x$, $|-x| = -(-x) = x$ (определение 5.1) и $|x| = |-x|$. Если $x < 0$, $|x| = -x$, $|-x| = -x$ (определение 5.1). Итак, и в этом случае $|x| = |-x|$.

**3.** Пусть $x \ge 0$, тогда $|x| = x$ (определение 5.1) и $-|x| \le x$, так как $-|x| \le 0$ (свойство 1), а $x \ge 0$. Таким образом, заключаем: $-|x| \le x = |x|$. Для $x < 0$

имеем $|x| = -x$ (определение 5.1), поэтому $-|x| = x$. В то же время: $x \le |x|$, ибо $|x| \ge 0$ (свойство 1), а $x < 0$. Итак, для $x < 0$ верно соотношение: $-|x| = x \le |x|$.

**4.** Пусть $|x| \le a$, отсюда имеем: $-|x| \ge -a$. Эти два неравенства и свойство 3 приводят к соотношению: $-a \le -|x| \le x \le |x| \le a$ или $-a \le x \le a$.

Предположим теперь, что $-a \le x \le a$. Для $x$: $0 \le x \le a$ имеем $|x| = x$ (определение 5.1), поэтому приходим к неравенству: $|x| \le a$. Для $x$: $-a \le x \le 0$ имеем $|x| = -x$ (определение 5.1), откуда следует, что $-a \le -|x|$ или $|x| \le a$.

**5.** Доказательство аналогично доказательству свойства 4.

**6.** Доказательство следует из определения 5.1 и свойств действий с действительными числами.

**7.** В силу свойства 3 для $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$ справедливы неравенства: $-|x| \le x \le |x|$, $-|y| \le y \le |y|$. Сложив их почленно, получим: $-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$. Отсюда, по свойству 4 имеем $|x + y| \le |x| + |y|$.

Представим число $x$ в виде: $x = (x + y) + (-y)$. В силу вышедоказанного и свойства 2 имеем: $|x| \le |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$ или $|x| - |y| \le |x + y|$. Проведя аналогичные рассуждения для $y$, получим: $|y| - |x| \le |x + y|$. Объединение двух последних неравенств приводит к неравенству: $||x| - |y|| \le |x + y|$.◄

**Пример 5.1.** Решить неравенства: а) $|x-1| \le 3$, б) $|x+2| \ge 2$, в) $|x+2| \ge -2$.

►а) В силу свойства 4 имеем $-3 \le x - 1 \le 3$. Прибавив ко всем частям неравенства по 1, получим: $-2 \le x \le 4$ или $x \in [-2, 4]$.

б) Из свойства 5 имеем: $x+2 \le -2 \vee x+2 \ge 2$. Прибавив ко всем частям этих неравенств по $-2$, получим $x \le -4 \vee x \ge 0$, или $x \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

в) В силу свойства 1 решением данного неравенства является $\forall x \in \boldsymbol{R}$.◄