Резюме к главе 1

В главе 1 определенный интеграл определен как предел интегральной суммы. Это определение является более общим, чем то, которое давалось в средней школе посредством формулы Ньютона – Лейбница, и имеет большее применение. Рассмотрены 8 свойств определенного интеграла, которые постоянно используются в практике его применения. Формула Ньютона – Лейбница устанавливает связь между двумя самостоятельными теориями – неопределенного и определенного интегралов – и дает одну из возможностей его вычисления. На определенный интеграл распространяются методы интегрирования, развитые в теории неопределенного интеграла – подстановкой и по частям. Геометрический смысл определенного интеграла как площади и его физический смысл как пути, работы, массы и т. д. с одной стороны указывает на возможные приложения, а с другой стороны помогает уяснить многие абстрактные теоретические положения.

Вопросы и задачи для самоконтроля к §§6, 7 гл. 1, раздел 8

1. Запишите в общем виде формулу замены переменной интегрирования в определенном интеграле.

2. Применяя подстановку $\sqrt{x^2-1}=z$, вычислите интеграл $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

3. Применяя подстановку $e^x-1=t^2$, вычислите интеграл $\int\limits_0^{\ln 5} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

4. Пользуясь методом трапеций, вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, взяв число точек деления отрезка интегрирования равным $n=10$. Сравните результат вычисления с точным ответом $\frac{\pi}{4}$, так как интеграл численно равен площади четверти круга с радиусом 1, т. е. $\frac{\pi}{4}$.

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§6, 7 гл. 1, раздел 8

2. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,x\,dx = \left[\begin{array}{c|c|c} \sqrt{x^2-1}=z & 2x\,dx = 2z\,dz & x=1;\ z=0 \\ x^2-1=x^2 & x\,dx = z\,dz & x=2;\ z=\sqrt{3} \end{array}\right] = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{z^2}{z^2+1}\,dz =$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{(z^2+1)-1}{z^2+1}\,dz = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1-\frac{1}{1+z^2}\right) dz = (z-\operatorname{arctg} z)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

3. $\int\limits_0^{\ln 5} \sqrt{e^x-1}\,dx = \int\limits_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}\,e^x\,dx = \left[\begin{array}{c|c|c} \sqrt{e^x-1}=t & e^x dx = 2t\,dt & x=0;\ t=0 \\ e^x-1=t^2 & e^x = t^2+1 & x=\ln 5;\ t=2 \end{array}\right] =$

$$= \int\limits_0^2 \frac{t}{t^2+1}\,2t\,dt = 2\int\limits_0^2 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = 2\int\limits_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_0^2 = 2(2-\operatorname{arctg} 2).$$

4. Приближенное значение интеграла равно 0.785; $\frac{\pi}{4} = 0.785398\ldots$.