§6. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах

1°. Криволинейные координаты на плоскости. *Координатами точки M на плоскости* называют упорядоченную пару действительных чисел, однозначно определяющих положение точки по отношению к некоторым геометрическим образам. Эти геометрические образы вместе с правилами, по которым определяется положение точки, образуют координатную систему. Нам уже известны декартова и полярная системы координат.

Произвольную систему координат можно получить следующим построением. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат Oxy заданы уравнения двух семейств линий:

$$\begin{cases} u = \varphi_1(x, y), \\ v = \psi_1(x, y), \end{cases} \qquad (6.1)$$

Если точка $M(x,\ y) \in D \subset \boldsymbol{R}_2$ (область D может совпадать со всей плоскостью Oxy), то в силу равенств (6.1) ей ставится в соответствие единственная точка $M'(u,v)$ некоторой области D' на координатной плоскости с прямоугольными координатами u, v (рис. 6.1).

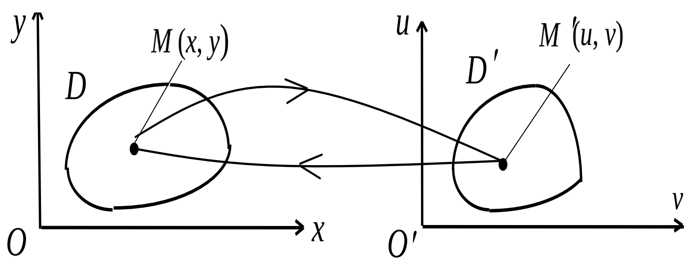

Рис 6.1. К введению криволинейной системы координат

Предположим, что уравнения (6.1) однозначно разрешимы относительно x, y:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \qquad (6.2)$$

где φ, ψ – однозначные функции от u, v в области D'. В силу равенств (6.2) точке $M'(u,v)$ области D' на координатной плоскости с прямоугольными координатами u, v ставится в соответствие единственная точка $M(x,\ y)$ из области D плоскости Oxy (рис. 6.1). Таким образом, между точками областей D и D' устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Из уравнений (6.2) следует, что упорядоченную пару чисел u, v можно рассматривать как координаты точек области D плоскости Oxy. В самом деле, для заданной пары значений u, v по формулам (6.2) вычисляем x, y и по этим координатам строим точку $M(x, y)$. Координаты (u,v) называются *криволинейными координатами* точки $M \in D$. Формулы (6.2) и (6.1) представляют собой формулы перехода от декартовых координат к криволинейным и наоборот.

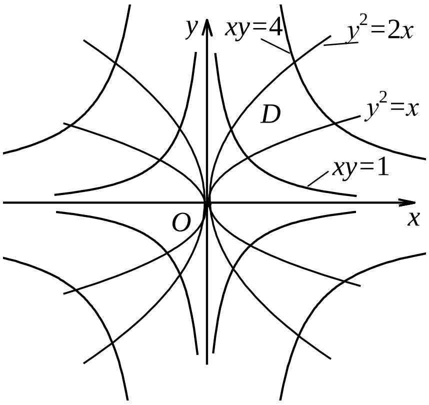

Рис. 6.3. Координатные линии системы координат, вводимой равенствами (6.4)

Двум семействам прямых на плоскости $O'uv$: $u = \text{const}$, $v = \text{const.}$, параллельных осям координат $O'u$ и $O'v$, в силу (5.1) будут соответствовать два семейства кривых на плоскости Oxy: $\varphi_1(x, y) = u = u_0$, $\psi_1(x, y) = v = v_0$, называемых *координатными линиями*, что и объясняет происхождение термина "криволинейные координаты".

Простейшим примером криволинейных координат на плоскости являются полярные координаты (r, φ), связь которых с прямоугольными координатами (x, y) данной точки плоскости задаётся известными формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Координатные линии полярной системы координат − это лучи $\varphi = \varphi_0$, исходящие из полюса, совпадающего с началом данной прямоугольной системы координат и окружности $r = r_0$ с центром в полюсе и радиусом r_0 (рис. 6.2).

Рассмотрим случай, когда координаты u, v вводятся с помощью следующих соотношений:

$$\begin{cases} xy = u, \\ y^2 = vx. \end{cases} \qquad (6.4)$$

Координатные линии здесь задаются уравнениями: $xy = u_0$, $y^2 = v_0 x$ и являются гиперболами и параболами (рис. 6.3, u_0 =1,4, v_0 =1,2).

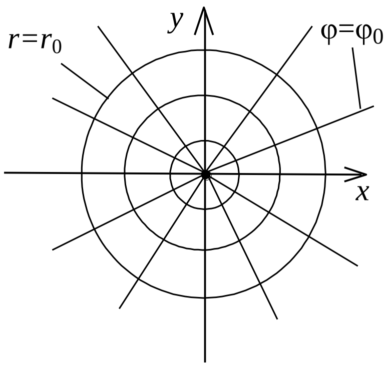

Рис. 6.2. Координатные линии полярной системы координат

2°. Общая формула замены переменных в двойном интеграле. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на замкнутой ограниченной области D, а функции $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ непрерывны на области D' плоскости $O'uv$ вместе со своими частными производными первого порядка и взаимно однозначно отображают область D' на область D. В этих предположениях имеем:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big)\,\big|\,J(u,v)\,\big|\,dudv. \qquad (6.5)$$

Здесь $J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \psi'_u(u,v) \\ \varphi'_v(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix}$ – функциональный определитель, называемый *определителем Якоби*, или *якобианом* преобразования координат (6.2). Выражение $\left|J(u,v)\right|dudv$ называется элементом площади в криволинейных координатах, а формула (6.5) – *общей формулой замены переменных* в двойном интеграле. Она даёт возможность свести вычисление двойного интеграла по области D к вычислению двойного интеграла по области D', что может упростить задачу вычисления этого интеграла.

Пример 6.1. Вычислить якобиан преобразования от прямоугольной декартовой системы координат к полярной системе координат.

►Используя формулы (6.3), имеем:

$$J(r,\varphi)=\begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\sin\varphi \end{vmatrix}=r\,.$$

Итак, в полярных координатах $J(r,\varphi)=r$.◄

3°. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Пусть область D – обобщённый криволинейный сектор (рис. 6.4), ограниченный линиями, заданными полярными уравнениями: $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $r=\psi_1(\varphi)$, $r=\psi_1(\varphi)$, $r=\psi_2(\varphi)$, $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$, $\psi_1(\varphi)\le\psi_2(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Области D на плоскости Oxy соответствует область D' на плоскости $O'\varphi r$ − область 1-го типа (рис. 6.4). Поэтому, переходя к полярным координатам, получим:

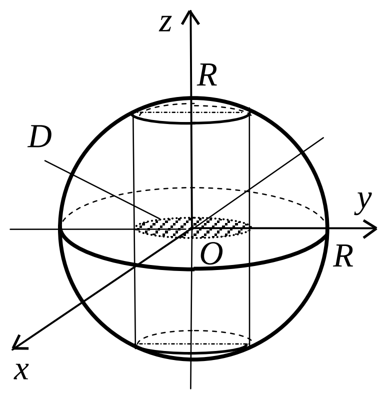

Рис. 6.5. К примеру 6.2

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)} f(\,$$

. (6.6)

Соотношение (6.6) сводит двойной интеграл по области D к повторному при переходе к полярным координатам без построения области D'. В подав-

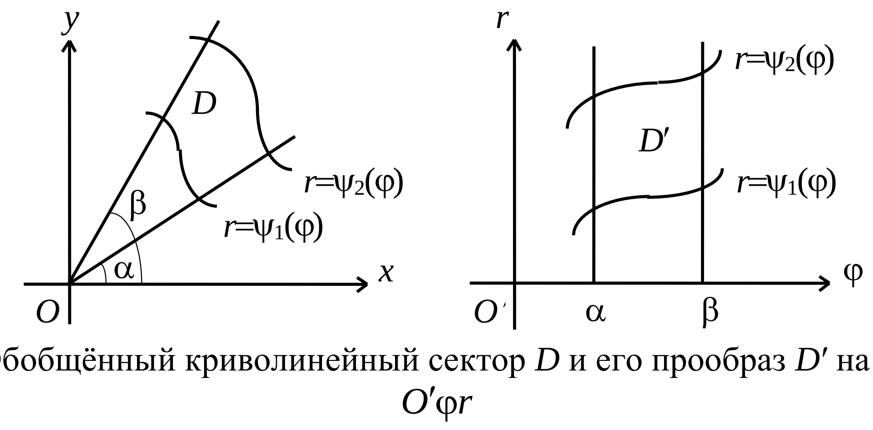

Рис. 6.4. Обобщённый криволинейный сектор D и его прообраз D' на плоскости $O'\varphi r$

ляющем большинстве задач пределы интегрирования по r и φ определяются, исходя из вида области D и геометрического смысла полярных координат.

Замечание 6.2. Если D – более сложная область, чем на рис. 6.4, то, переходя к полярным координатам, её разбивают на части рассмотренного типа.

Замечание 6.3. Часто используются так называемые *обобщённые полярные координаты*, вводимые по формулам

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi, \end{cases}, \quad a > 0, \; b > 0. \qquad (6.7)$$

При этом $J(r,\varphi) = abr$ (докажите это!).

Пример 6.2. Найти объём части шара радиуса R, заключенной внутри прямого кругового цилиндра радиуса $R/2$, осью которого является диаметр шара.

►За начало координат примем центр шара, плоскость Oxy проведём перпендикулярно оси цилиндра (рис. 6.5). В силу симметрии искомый объём будет равен удвоенному объёму части цилиндра, ограниченной плоскостью Oxy и верхним полушарием. Поверхность шара определяется уравнением: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а верхнего полушария – уравнением: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тогда $V = 2\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, где D: $x^2 + y^2 \le R^2/4$ – круг, изображённый на рис. 6.6. Для полярных координат точек области D справедливы неравенства: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R/2$ (рис. 6.6). Из (6.6) имеем:

$$V = 2\iint\limits_{D'} \sqrt{R^2 - r^2}\, rd\varphi dr = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R/2} \sqrt{R^2 - r^2}\, rdr = = \frac{\pi}{6} R^3 (8 - 3\sqrt{3}) . ◄$$

Замечание 6.4. Необходимость перехода к криволинейным координатам диктуется в первую очередь структурой области интегрирования и затем – видом подынтегральной функции.

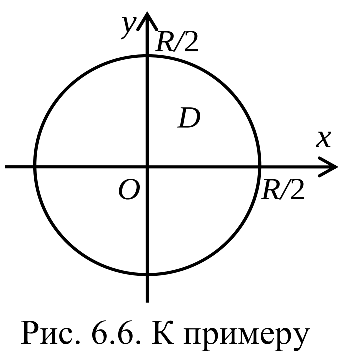

Рис. 6.6. К примеру 6.2. Область D