§9. Уравнения линии в пространстве

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат *Oxyz* и задана линия Γ, понимаемая как множество точек пространства, обладающих некоторым общим геометрическим свойством. Таким свойством, например, может служить принадлежность любой её точки одновременно двум поверхностям, что соответствует заданию Γ как линии пересечения этих поверхностей.

Определение 9.1. Система из двух уравнений с тремя переменными x, y, z вида

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{9.1}$$

называется *уравнениями линии* Γ, если координаты любой её точки удовлетворяют этой системе, а координаты точек, не принадлежащих Γ, ей не удовлетворяют.

Под функциями $F_1(x,y,z)$ и $F_2(x,y,z)$ в аналитической геометрии понимают, как правило, многочлены от трёх переменных x, y, z.

Очевидно, что если каждое из уравнений системы (9.1) задаёт некоторую поверхность, то Γ является линией пересечения этих поверхностей. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ y=z \end{cases} \tag{9.2}$$

определяет в пространстве окружность как линию пересечения сферы (S): $x^2+y^2+z^2=r^2$ и плоскости P: $y=z$ (рис. 9.1).

Одна и та же линия может быть пересечением различных пар поверхностей. Поэтому её можно задавать различными системами уравнений вида (9.1). Так, вышеупомянутая окружность является также линией пересечения плоскости P: $y=z$ и поверхности (S_1): $x^2+2y^2=r^2$, которая (см. гл. 3, §6), называется цилиндром (рис. 9.2). Поэтому система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2=r^2, \\ y=z \end{cases}$$

также, наряду с (9.2), является уравнениями данной окружности.

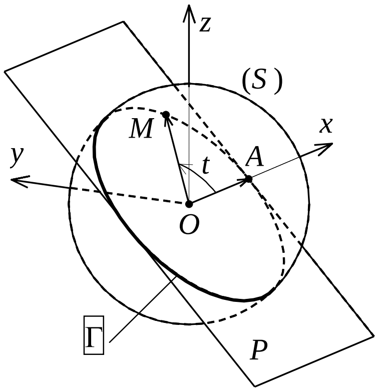

Рис. 9.1. Окружность Г как линия пересечения сферы (S) и плоскости P

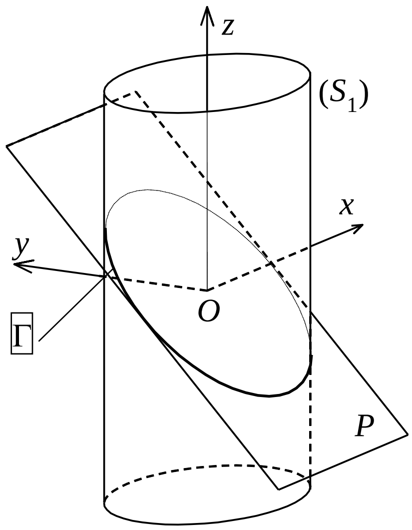

Рис. 9.2. Окружность Г как линия пересечения цилиндра и плоскости P

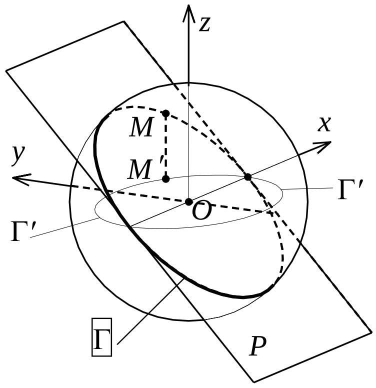

Рис. 9.3. Линия Γ' – проекция линии Г в плоскость *Oxy*

Для линии Γ, определяемой системой (9.1), можно найти уравнение её проекции Г' в ту или иную координатную плоскость. Пусть, например, точка $M'(x, y, 0)$ – проекция точки $M(x, y, z)$, принадлежащей Г, в плоскость *Oxy* (рис. 9.3). Очевидно, что абсциссы и ординаты этих двух точек равны. Поэтому исключение координаты *z* из уравнений (9.1) даёт ту связь между *x* и *y*, которая и характеризует линию Г' – проекцию Г в плоскость *Oxy*, т.е. приводит к уравнению Г'. Так, при исключении *z* из уравнений (9.2) приходим к уравнению $x^2 + 2y^2 = r^2$, определяющему проекцию Г' данной окружности Г в плоскость *Oxy*, которая, как мы увидим ниже (глава 2, §2), является эллипсом (рис. 9.3). Аналогично может быть рассмотрен вопрос об уравнении проекции данной линии в другие координатные плоскости.

Система из двух уравнений с тремя переменными *x*, *y*, *z* не является единственным способом задания линии в пространстве с помощью уравнений. В некоторых случаях представляется более удобным выразить координаты её точек через третью вспомогательную переменную (или параметр) *t*.

Определение 9.2. Система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in T, \\ z = z(t), \end{cases} \tag{9.3}$$

называется *параметрическими уравнениями* линии Г, если для любой её точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ найдётся такое значение параметра $t_0 \in T$, что её координаты определятся из этой системы при $t = t_0$: $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, а для точек, не принадлежащих Г, такого значения параметра не существует.

Под $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в правых частях уравнений системы (9.3) понимают некоторые функции параметра t, например, выражающиеся через элементарные функции из школьного курсе алгебры и начал анализа. Так, вышеупомянутую окружность можно задать такими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = (R/\sqrt{2})\sin t, \ t \in [0, 2\pi], \\ z = (R/\sqrt{2})\sin t, \end{cases}$$

где за параметр t принят угол поворота вектора $\overrightarrow{OA}$ до совмещения с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M этой окружности (рис. 9.1). Действительно, подстановка этих равенств в (9.2) обращает каждое из уравнений этой системы в тождество.

Если линия Г является траекторией движущейся точки, то за параметр t принимается время, прошедшее от начала движения. Тогда функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ из уравнений (9.3) определят координаты этой точки на любой момент времени t из промежутка T.