Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1)$$

Если уравнение (11) может быть разрешено относительно второй производной, то оно записывается в следующей форме:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка состоит в нахождении частного решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y'_0.$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальные уравнения этого типа представляются в виде:

$$y''+py'+qy = 0, \qquad (2)$$

где p, q - постоянные числа.

Будем искать решение уравнения (2) в виде $y = e^{kx}$, где $k -$ постоянное число. После подстановки этого выражения в (2) получим:

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Поскольку $e^{kx} \neq 0$, должно выполняться квадратное уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (3)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для уравнения (2). В зависимости от величины его дискриминанта $D = p^2 - 4q$ возможны три случая:

а) $D > 0, \qquad k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$

Можно показать, что общим решением в этом случае является комбинация двух линейно-независимых решений, отвечающих двум различным корням характеристического уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (4)$$

б) $D = 0, \quad k_1 = k_2 = \dfrac{-p}{2} \equiv k$.

В этом случае общим решением будет:

$$y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x)e^{kx}. \qquad (5)$$

в) $D < 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня: $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$.
Общее решение записывается в следующем виде:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \qquad (6)$$

В формулах (14)–(16) C_1 и C_2 − произвольные постоянные.

Пример6.1 Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 5y' + 6y = 0$;

Решение. Характеристическое уравнение принимает вид: $k^2 - 5k + 6 = 0$; Дискриминант положителен, уравнение имеет два различных корня: $k_1 = 2$; $k_2 = 3$. Тогда, согласно (14), общее решение дифференциального уравнения записывается в виде:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример6.2 Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 2y' + y = 0$;

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет один кратный корень $k = 1$; В соответствии с (15) общее решение дифференциального уравнения записывается в виде:

$$y(x) = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Пример6.3 Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Решение. Дискриминант характеристического уравнения отрицателен, характеристическое уравнение имеет комплексные корни: $k_1 = -1 + i6;\ k_2 = -1 - i6.$ В этом случае формула (6) дает следующее общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \sin 6x + C_2 \cos 6x).$$

Пример 6.4

Решить однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 2.$$

Решение:

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

его корни:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 4.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Используя начальные условия, находим постоянные C_1 и C_2:
из первого начального условия

$$C_1 + C_2 = 1,$$

из второго

$$C_1 + 4C_2 = 2.$$

Решая эту систему, получаем:

$$C_2 = \frac{1}{3}; \quad C_1 = \frac{2}{3}$$

и соответствующее частное решение

$$y = \frac{2}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

.