Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В.Г. ПАК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

ЛЕКЦИЯ №4

БИНОМ НЬЮТОНА И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА. ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Содержание

§2. Бином Ньютона и полиномиальная формула

2.1. Бином Ньютона

Биномом Ньютона называется формула

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k +$$

$$+ \dots + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Другая форма бинома Ньютона:

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \dots + C_n^k t^k + \dots + t^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k .$$

Коэффициенты бинома числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Свойство симметрии бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Свойства биномиальных коэффициентов:

$$1)\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n;$$

$$2)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$3) C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots =$$
$$= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}.$$

2.2. Полиномиальная формула

Обобщением бинома Ньютона является полиномиальная формула:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\substack{0 \le k_1, \dots, k_m \le n \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} P(k_1, \dots, k_m) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m},$$

где $P(k_1, \dots, k_m)$ - *полиномиальные коэффициенты*.

При $m = 2$ полиномиальная формула превращается в бином Ньютона.

Суммирование ведётся по всем разбиениям числа n на m неотрицательных слагаемых с учётом их порядка, т.е. по всем кортежам $\langle k_1, \dots, k_m \rangle$. Ясно, что для кортежей, получающихся друг из друга перестановкой координат, полиномиальные коэффициенты равны, поэтому достаточно вычислить коэффициенты для разбиений $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_m$.

§3. Формула включений и исключений и её применение

3.1. Формула включений и исключений

Пусть имеются N разных предметов и n *совместных* свойств p_1, $p_2, \dots, p_n$, которыми могут обладать или не обладать эти предметы. Обозначим $\alpha(p_{i_1}, \dots, p_{i_s})$ количество предметов, обладающих свойствами $p_{i_1}, \dots, p_{i_s}$ $(1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n)$. *Остальными свойствами эти предметы могут обладать или не обладать*; $\alpha(p_1, \dots, p_s, \overline{p}_{s+1}, \dots, \overline{p}_n)$ - количество предметов со свойствами $p_1, \dots, p_s$, не обладающих остальными свойствами $p_{s+1}, \dots, p_n (1 \leq s \leq n-1)$. При $s = 0$ $\alpha(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_n)$ - количество предметов, не обладающих ни одним из свойств, при $s = n$ $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ - количество предметов, обладающих всеми свойствами.

Тогда $\alpha(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_n)$ вычисляется по *формуле включений и исключений*:

3.1. Формула включений и исключений

$$\alpha(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} \alpha(p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha(p_i, p_j) -$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} \alpha(p_i, p_j, p_k) + \dots + (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^{n} \alpha(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) +$$

$$+ \dots + (-1)^n \alpha(p_1, \dots, p_n).$$

Далее рассмотрим примеры применения формулы для решения комбинаторных задач.

3.2. Число элементов объединения множеств

Пусть имеются конечные множества $A_1, A_2, \dots, A_n$, известны их мощности и мощности всевозможных их пересечений.

Тогда мощность объединения множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ вычисляется по формуле

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| -$$

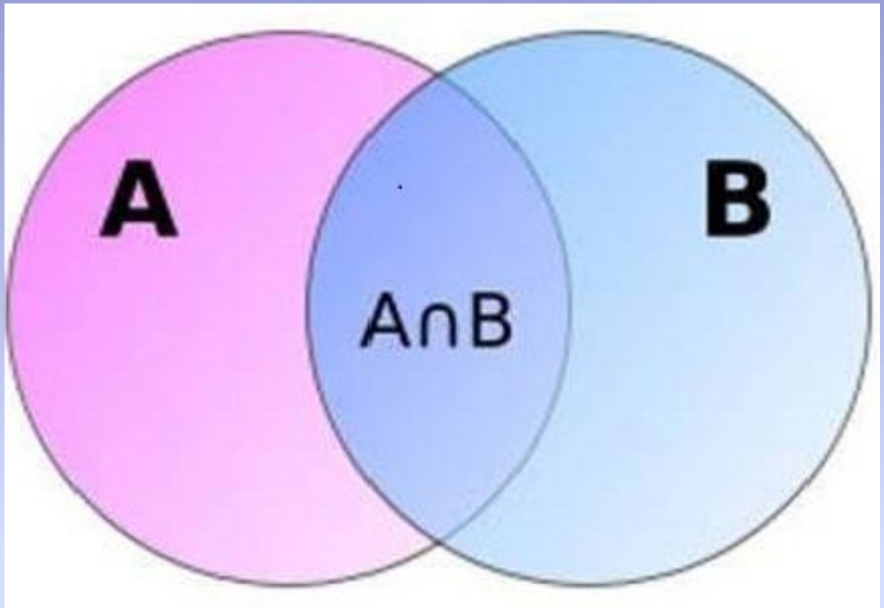
$$- \dots + (-1)^{k-1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i_1<i_2<\dots<i_k}}^{n} \left|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

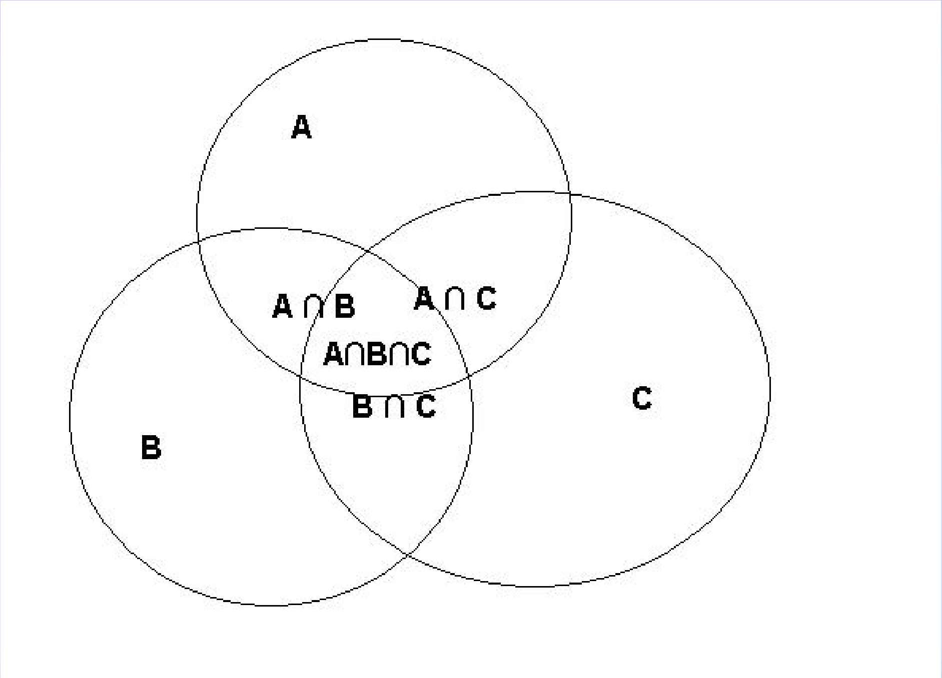
Частные случаи для двух и трёх множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

3.2. Число элементов объединения множеств





3.3. Беспорядочные перестановки

Имеется некоторая перестановка n разных предметов. Назовём *беспорядочной перестановкой* (*беспорядком*) такую их перестановку, в которой ни один предмет не находится на своём прежнем месте.

Число D_n беспорядочных перестановок n различных предметов находится по формуле

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Число $D_n(r)$ перестановок n предметов, при которых *ровно* r остаются на своих прежних местах, равно

$$D_n(r) = C_n^r D_{n-r} = \frac{n!}{r!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right) = \frac{n!}{r!}\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

<u>Пример.</u>

Двое играют в такую игру. У каждого по перетасованной колоде карт. Игроки по очереди достают по одной карте из своей колоды. Если очередные вынутые игроками карты совпадут, выигрывает первый, если колода закончится без совпадений, выигрывает второй. У какого игрока выше шансы выиграть?

3.3. Беспорядочные перестановки

Вероятность несовпадения ни одной карты (n – число карт):

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

При $n \to \infty$:

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \to e^{-1} \approx 0{,}367879.$$

Поэтому вероятность несовпадения ни одной карты близка к 0,37.

3.4. Преобразования без неподвижных элементов

Пусть имеется (n)-множество A. *Преобразованием множества* A назовём произвольную функцию $f: A \to A$, множество всех преобразований A обозначается A^A.

Неподвижной точкой преобразования $f \in A^A$ называется такой элемент $a \in A$, что $f(a) = a$.

Число U_n преобразований (n)-множества, не имеющих неподвижных точек, равно

$$U_n = n^n - C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} - \cdots + (-1)^k C_n^k n^{n-k} + \cdots + (-1)^n \cdot 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k n^{n-k} = (n-1)^n.$$

Если ограничиться только биективными преобразованиями, т.е. подстановками (n)-множества A, то ответ получен в предыдущем пункте.

3.5. Сюръективные отображения множеств

Пусть имеются конечные множества A и B, $|A| = m$, $|B| = n$. *Сюръективным отображением A на B*, или просто *функцией A на B*, называется сюръекция из A на B.

Число $S(m,n)$ сюръективных отображений (m)-множества на (n)-множество находится по формуле

$$S(m,n) = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \cdots +$$
$$+(-1)^k C_n^k(n-k)^m + \cdots +$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot n\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(n-k)^m.$$

3.6. Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для аргумента $n \in \mathbb{N}$ равна количеству целых неотрицательных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n (числа m, n взаимно просты, если НОД$(m, n) = 1$).

С помощью формулы включений и исключений можно получить формулу функции Эйлера:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k}\frac{1}{q_i q_j} - \cdots + (-1)^k\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k}\right) =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{q_k}\right),$$

где $q_1, q_2, \dots, q_k$ - простые делители n.

Из этой формулы следует мультипликативность функции Эйлера: если m и n взаимно просты, то

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$