§2. Эллипсоид

Определение 2.1. *Эллипсоидом* называется поверхность второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a\ge b\ge c>0\,. \tag{2.1}$$

(Уравнение (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипсоида. Эллипсоид обладает центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей.)

Эллипсоид – *ограниченная* поверхность. Он находится внутри шара радиуса a с центром в начале координат. Действительно, для расстояния $|OM|$ любой точки $M(x,y,z)$ эллипсоида до начала координат с учётом (2.1) имеем

$$|OM|^2=x^2+y^2+z^2=a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}\right)\le a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=a^2\cdot 1=a^2\,.$$

Произведём сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям. В сечении плоскостью $P: z=z_0$, $|z_0|<c$, получим эллипс Γ_1: определяемый уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z_0^2}{a^2}$ в прямоугольной декартовой системе координат O_1xy, введённой на этой плоскости так, что точка $O_1(0,0,z_0)$ – начало

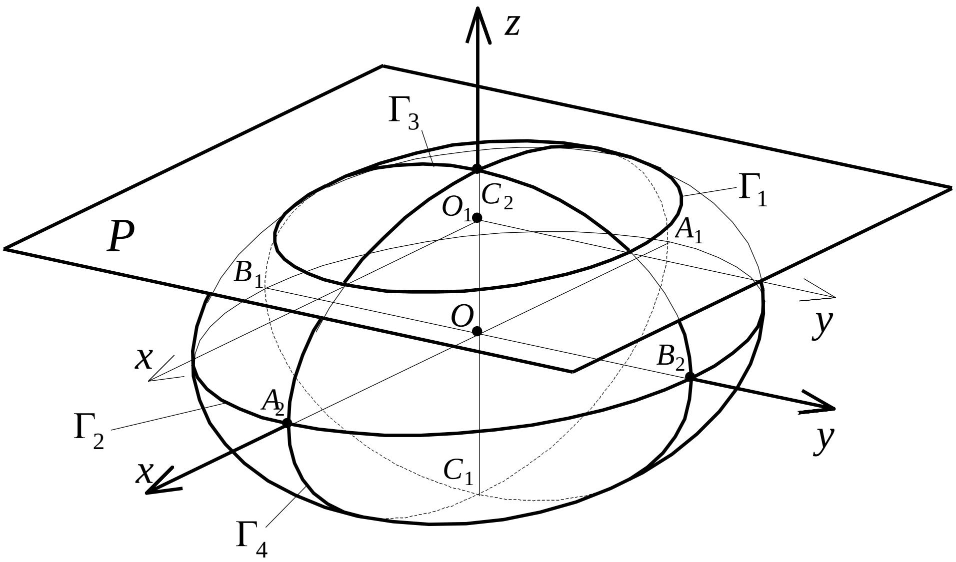

Рис. 2.1. Эллипсоид

координат, а оси O_1x и O_1y параллельны осям *Ox* и *Oy* пространственной системы координат *Oxyz* (рис. 2.1, $z_0\ne 0$). Полуоси Γ_1 равны $a\sqrt{1-z_0^2/a^2}$ и $b\sqrt{1-z_0^2\,/\,a^2}$. В сечении плоскостью $z=0$ ($z_0=0$) получается эллипс Γ_2 с наибольшими полуосями a и b (рис. 2.1). Аналогичным образом можно убедиться, что сечения эллипсоида плоскостями $x=x_0$ ($|x_0|<a$) и $y=y_0$ ($|y_0|<b$) тоже эллипсы, полуоси которых не превосходят a, b, c. В сечении координатными плоскостями $x=0$, $y=0$ полуоси этих эллипсов Γ_3 и Γ_4 наибольшие и равны b, c и a, c соответственно (рис. 2.1). Числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида, а точки $A_1(-a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$,

$B_1(0,-b,0)$, $B_2(0,b,0)$, $C_1(0,0,-c)$, $C_2(0,0,c)$ – его *вершинами* (рис. 2.1). Описанный эллипсоид иногда называют также *трёхосным эллипсоидом*.