

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.3
Л39

Леденев А. Н. **Физика**. В 5 кн. Кн. 3. **Электромагнетизм**. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 192 с. — ISBN 5-9221-0463-2.

Основу настоящего курса физики составляют лекции, читаемые автором слушателям Института криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. В данном томе рассматриваются основные понятия и закономерности электрических и магнитных явлений: электрическое и магнитное поле в вакууме, свойства проводников и диэлектриков в электрическом поле, магнитное поле в веществе, законы постоянного тока, явление электромагнитной индукции. Электрические токи в газах и электролитах практически не затрагиваются. Дается краткое, но достаточно строгое изложение учебного материала в виде системы физических понятий, определений, законов и теорем.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Информатика и вычислительная техника».

Рецензенты:

кафедра физики Московского института радиоэлектроники и автоматики;
проф. А.Н. Сафронов (Научно-исследовательский институт ядерной физики
МГУ им. М.В. Ломоносова)

Учебное издание

ЛЕДЕНЕВ Александр Николаевич

ФИЗИКА

Книга 3

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Редактор *Д.А. Миртова*

Оригинал-макет: *О.Б. Широкова*

Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 20.04.05. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 13,2. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

ISBN 5-9221-0463-2

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru; <http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ОАО «Ивановская областная типография»

153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.

E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

9

ISBN 5-9221-0463-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2005

© А. Н. Леденев, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава I. Электростатическое поле в вакууме	9
§ 1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля	9
§ 2. Поток вектора напряженности электрического поля	15
§ 3. Теорема Гаусса	19
§ 4. Напряженность электрического поля заряженной сферической поверхности	25
§ 5. Напряженность электрического поля заряженной бесконечно длинной нити	26
§ 6. Напряженность поля заряженной плоскости	28
§ 7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Потенциал	29
§ 8. Потенциал поля точечного заряда и системы зарядов	34
§ 9. Связь между потенциалом и напряженностью поля	36
§ 10. Граничные условия для вектора напряженности электрического поля	39
§ 11. Потенциал и напряженность поля электрического диполя	41
§ 12. Диполь во внешнем электрическом поле: сила, момент сил, потенциальная энергия	44
Задачи	46
Глава II. Проводники в электрическом поле	48
§ 13. Свойства проводников в электрическом поле	48
§ 14. Электрическая емкость. Конденсаторы	55
§ 15. Энергия электрического поля	60
Задачи	63
Глава III. Электростатика диэлектриков	65
§ 16. Вектор поляризованности и его свойства	65
§ 17. Вектор электрической индукции и его свойства	73
Задачи	79

Глава IV. Постоянный электрический ток	80
§ 18. Закон Ома. Сторонние силы	80
§ 19. Закон Джоуля–Ленца	92
§ 20. Переходные процессы в электрических цепях	95
§ 21. Электрическое поле в проводнике с током	97
§ 22. Электрическое сопротивление однородной слабо проводящей среды.	100
Задачи	102
Глава V. Магнитное поле в вакууме	103
§ 23. Магнитный момент и магнитная индукция. Закон Био–Савара	103
§ 24. Закон Ампера	107
§ 25. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лорентца	109
§ 26. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.	112
§ 27. Контур с током в магнитном поле: сила и момент сил, работа при перемещении контура	115
Задачи	119
Глава VI. Магнитное поле в веществе	120
§ 28. Вектор намагниченности и его свойства.	120
§ 29. Вектор напряженности магнитного поля. Магнитные свойства вещества	125
§ 30. Граничные условия для векторов магнитной индукции и напряженности магнитного поля	131
Задачи	134
Глава VII. Электромагнитная индукция	136
§ 31. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Вихревое электрическое поле.	136
§ 32. Явление самоиндукции. Индуктивность.	141
§ 33. Энергия магнитного поля	145
§ 34. Взаимная индукция	146
Задачи	149
Глава VIII. Уравнения электромагнитного поля	150
§ 35. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля переменных токов. Ток смещения	150
§ 36. Уравнения Максвелла.	153
Задачи	155
Ответы к задачам	156

П р и л о ж е н и я

I. Системы единиц физических величин	158
1. Электрические и магнитные величины в СИ, СГСЭ, СГСМ и гауссовой системе	158
2. Перевод формул электродинамики из системы СИ в гауссову систему	163
II. Основные определения и формулы электромагнетизма	167
1. Электростатическое поле в вакууме	167
2. Свойства проводников в электростатическом поле	172
3. Электрическая емкость	173
4. Свойства диэлектриков в электростатическом поле	174
5. Постоянный электрический ток	176
6. Магнитное поле в вакууме	179
7. Магнитное поле в веществе	181
8. Электромагнитная индукция	183
9. Уравнения Максвелла	185
III. Производные единицы электрических и магнитных величин . . .	187
Предметный указатель	190

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основу настоящего курса физики составляют лекции, читаемые автором слушателям Института криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. В этой книге излагается раздел курса «Электромагнетизм». Рассматриваются основные понятия и закономерности электрических и магнитных явлений, электрическое и магнитное поле в вакууме, свойства проводников и диэлектриков в электрическом поле, магнитное поле в веществе, законы постоянного тока, явление электромагнитной индукции. Как результат обобщения излагаемых на протяжении всей книги опытных фактов, основных понятий и физических законов устанавливается система уравнений Максвелла. Электрические и магнитные свойства вещества затронуты кратко, так как их полное понимание возможно только на основе квантовой механики, а подробное изложение проводится в курсах специальных разделов физики. Закономерности электрических токов в газах и электролитах практически не затрагиваются.

Автор стремился ограничить объем книги, включив в нее только наиболее важные понятия и законы электромагнетизма, изложить их кратко, достаточно строго и логически последовательно. Несмотря на то, что многие вопросы электрических и магнитных свойств вещества, технических применений электричества не вошли в книгу, составляющий ее содержание материал дает достаточно полное и целостное представление о разделе «Электромагнетизм» курса общей физики и может служить основой для его последующего углубленного и более подробного изучения.

В процессе изложения используется Международная система единиц СИ. Как и в других разделах настоящего курса физики, в этой книге имеется приложение, в которое включены только определения физических понятий, формулировки законов и соответствующие математические формулы электромагнетизма. Структура приложения отражает логику изложения материала основного текста книги. Оно полезно как при первом чтении книги, так и в процессе ее повторения.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля

Электрический заряд. Изучая механику, мы обсуждали вопрос о том, что все встречающиеся в природе и известные в настоящее время силы сводятся к силам гравитационного притяжения, электромагнитным силам и силам, действующим между атомными ядрами и элементарными частицами (ядерные силы, слабые взаимодействия). Каждый вид взаимодействия связан с определенной характеристикой тела: гравитационное взаимодействие зависит от масс взаимодействующих тел, электромагнитное — от электрических зарядов и т. д.

Атомы и молекулы всякого вещества построены из элементарных частиц — электронов, протонов, нейтронов и др. *Электрический заряд* является одной из фундаментальных, первичных характеристик элементарной частицы. Заряд всякой элементарной частицы либо равен нулю (например, у нейтрона), либо отличен от нуля (например, у электрона, протона, позитрона). Заряды всех элементарных частиц, если они отличны от нуля, одинаковы по абсолютной величине и равны так называемому *элементарному заряду* e ($e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Пусть макроскопическое тело обладает зарядом q . Поскольку заряд тела равен сумме зарядов элементарных частиц, из которых оно состоит, q является числом, кратным элементарному заряду e :

$$q = Ne,$$

где N — целое число.

Следовательно, *заряд q любого тела может принимать только определенные дискретные значения, кратные элементарному заряду*. Однако элементарный заряд настолько мал, что величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно. Везде в дальнейшем дискретностью макроскопических зарядов будем пренебрегать, считая их непрерывно изменяющимися величинами.

Опыт позволяет сформулировать следующие основные свойства заряда.

Существуют два вида электрических зарядов — положительные и отрицательные. Заряды одного вида отталкиваются друг от друга, разных видов — притягиваются.

В электрически изолированной системе алгебраическая сумма электрических зарядов не изменяется. Это утверждение выражает закон сохранения электрического заряда и является следствием того

факта, что элементарные заряды возникают и исчезают (аннигилируют) только парами, включающими положительный и отрицательный элементарный заряд.

Величина электрического заряда не зависит от выбора системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется заряд или покоится (заряд инвариантен).

Электрическое поле. Согласно современным представлениям всякий электрический заряд q создает в окружающем его пространстве электрическое поле. *Электрическое поле* заряда q проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо точку этого поля другой заряд испытывает действие силы. Таким образом, *взаимодействие между зарядами осуществляется через поле*. В случае неподвижных зарядов это поле называется *электростатическим*. Везде далее в этой книге под электрическим полем мы будем подразумевать поле неподвижных зарядов, то есть электростатическое поле, если не оговорено иное.

Закон Кулона. Основной количественный закон электростатики был открыт Кулоном в 1785 г. Он формулируется следующим образом.

Сила взаимодействия F двух точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме пропорциональна их величинам, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12} и направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды. Сила F является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.

Математическая формула, выражающая закон Кулона, имеет вид

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}, \quad (1.1)$$

где k — числовой коэффициент. В системе СИ он равен

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.}$$

Электрическая постоянная ϵ_0 имеет размерность электрической емкости, деленной на длину; единицей ее измерения является фарад, деленный на метр:

$$\epsilon_0 \approx 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м.}$$

Заряд q измеряется в *кулонах* (Кл). Один кулон — это такой заряд, который в единицу времени проходит через поперечное сечение проводника, по которому течет ток силой один ампер (ампер — единица силы тока в системе СИ, определение которой дается ниже).

Понятие *точечный заряд* подразумевает, что весь заряд тела сосредоточен в одной геометрической точке. Точечный заряд — это идеализированная физическая модель, подобная модели материальной точки. Она применима для реально существующих заряженных тел, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с характерными расстояниями, на которых электрическое поле изменяется значительно.

Формула, выражающая закон Кулона, может быть записана в векторной форме:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.2)$$

где \mathbf{F}_{12} — сила, действующая со стороны первого заряда на второй заряд, \mathbf{r}_{12} — вектор, проведенный от первого заряда ко второму, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$ — единичный вектор, сонаправленный с \mathbf{r}_{12} (рис. 1).

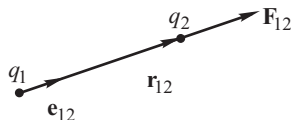


Рис. 1

Вся имеющаяся в настоящее время совокупность экспериментальных фактов свидетельствует, что закон Кулона справедлив для расстояний между зарядами от 10^{-13} см до нескольких километров. Нет оснований полагать, что этот закон не выполняется и на больших расстояниях.

Напряженность электрического поля. Напряженностью \mathbf{E} электрического поля в некоторой точке пространства называется сила, действующая со стороны поля на расположенный в этой точке единичный положительный заряд. Для того, чтобы определить напряженность поля в некоторой точке пространства, не обязательно помещать в нее заряд величиной 1 кулон. Достаточно поместить в эту точку небольшой пробный положительный заряд $q_{\text{пр}}$, измерить действующую на него со стороны поля силу \mathbf{F} и разделить ее на величину заряда:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.3)$$

Величина пробного заряда должна быть настолько малой, чтобы его собственное электрическое поле не приводило к перераспределению имеющихся в пространстве электрических зарядов.

Применив закон Кулона к описанию взаимодействия расположенных на расстоянии r друг от друга зарядов q и $q_{\text{пр}}$, определим напряженность поля точечного заряда q (рис. 2). Для этого рассчитанную по формуле (1.2) силу \mathbf{F} кулоновского взаимодействия зарядов разделим на величину $q_{\text{пр}}$:

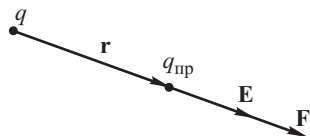


Рис. 2

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{\text{пр}}} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r^3 q_{\text{пр}}} \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{r} — вектор, проведенный от заряда q в точку поля, где размещается пробный заряд $q_{\text{пр}}$. Формула (1.4) позволяет определить величину и направление вектора напряженности поля точечного заряда q .

Силовые линии поля. Зная вектор напряженности \mathbf{E} в каждой точке пространства, можно наглядно представить электрическое поле с помощью линий напряженности (силовых линий).

Силовая линия — это воображаемая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} напряженности поля. Густота линий (число линий, пересекающих единичную площадку, расположенную перпендикулярно вектору напряженности) пропорциональна модулю вектора \mathbf{E} . Положительное направление силовой линии совпадает с направлением вектора \mathbf{E} .

Электрические силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

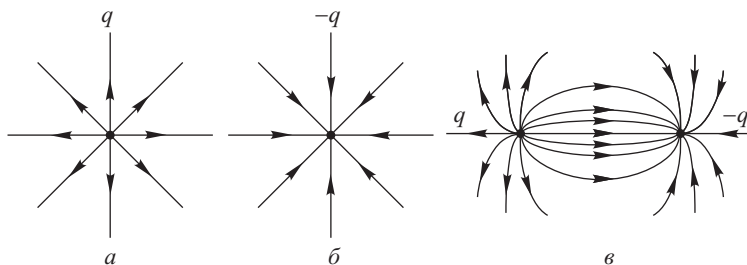


Рис. 3

На рис. 3 изображены силовые линии положительного (а) и отрицательного (б) изолированных точечных зарядов, а также силовые линии диполя — системы двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов (в).

Принцип суперпозиции электрических полей. Из опыта следует, что результирующая напряженность поля \mathbf{E} системы неподвижных точечных зарядов равна сумме векторов напряженности поля \mathbf{E}_i , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad (1.5)$$

где r_i — расстояние между зарядом q_i и точкой пространства, в которой определяется поле \mathbf{E} , суммирование ведется по всем зарядам системы.

Формула (1.5) представляет собой математическое выражение принципа суперпозиции электрических полей.

Рисунок 4 иллюстрирует использование принципа суперпозиции для определения поля \mathbf{E} системы двух точечных зарядов q_1 и q_2 :

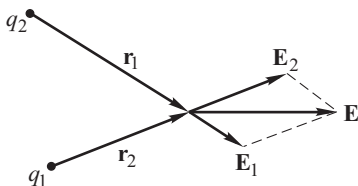


Рис. 4

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \mathbf{r}_1 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \mathbf{r}_2.$$

Принцип суперпозиции и закон Кулона в виде вытекающего из этого закона выражения (1.4) для напряженности поля точечного заряда позволяют рассчитывать напря-

женность поля любой системы зарядов. Если заряд распределен в некоторой области пространства непрерывно, то есть электрическое поле создается макроскопическим заряженным по объему телом, то область пространства, в которой распределен заряд, следует мысленно разделить на множество малых объемов так, чтобы заряд Δq_i каждого такого объема можно было считать точечным. Для определения результирующей напряженности поля \mathbf{E} следует вычислить сумму векторов напряженности поля, созданного каждым из точечных зарядов Δq_i :

$$\mathbf{E} = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} dq, \quad (1.6)$$

где суммирование ведется по всем точечным зарядам Δq_i , а интегрирование — по всей области пространства, где имеется электрический заряд, \mathbf{r}_i — вектор, проведенный от заряда Δq_i к точке наблюдения, \mathbf{r} — вектор, проведенный от элементарного заряда dq к точке наблюдения. В выражении (1.6) для результирующей напряженности поля \mathbf{E} сумму слагаемых можно заменить соответствующим интегралом только при стремлении к бесконечности числа элементарных объемов с зарядами Δq_i , на которые мысленно разбивается вся заряженная область пространства.

Пример. В качестве примера совместного использования принципа суперпозиции и закона Кулона для расчета напряженности рассмотрим электростатическое поле отрезка AB равномерно заряженной по длине тонкой прямой нити или иначе говоря, заряженного отрезка прямой (рис. 5). Пусть длина отрезка AB равна l , линейная плотность заряда — заряд, приходящийся на единицу длины нити, — равна λ . Точка наблюдения, в которой необходимо вычислить напряженность поля \mathbf{E} , находится на расстоянии R от нити. Углы, под которыми видна точка наблюдения из концов A и B заряженного отрезка, равны θ_1 и θ_2 .

Направим координатную ось z вдоль нити, начало отсчета координаты z , то есть точку, в которой $z = 0$, поместим напротив точки наблюдения — в основание перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения на заряженный отрезок. Мысленно разделим нить на элементарные участки так, чтобы заряд dq каждого такого участка можно было считать точечным. Рассмотрим заряд dq , положение которого на нити определяется координатой z , и который сосредоточен на элементарном участке нити длиной dz . Расстояние от заряда dq до точки наблюдения равно r . Угол, под которым видна точка наблюдения из места расположения заряда dq ,

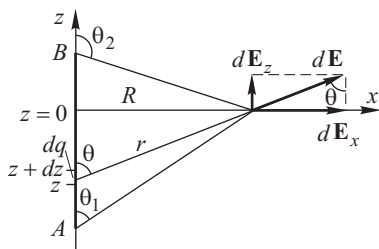


Рис. 5

равен θ . Из рис. 5 очевидны следующие необходимые в дальнейшем соотношения:

$$z = -\frac{R}{\operatorname{tg} \theta},$$

$$dz = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta},$$

$$r = \frac{R}{\sin \theta}.$$

Заряд dq порождает в точке наблюдения электрическое поле, модуль вектора напряженности $d\mathbf{E}$ которого равен

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Вычислим проекцию dE_x вектора $d\mathbf{E}$ на перпендикулярную к нити ось x :

$$\begin{aligned} dE_x = dE \sin \theta &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = \\ &= \frac{\lambda (R/\sin^2 \theta) d\theta}{4\pi\epsilon_0 (R/\sin \theta)^2} \sin \theta = \frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Проекцию E_x на ось x вектора напряженности \mathbf{E} , созданного в точке наблюдения всем заряженным отрезком, найдем путем интегрирования выражения для dE_x по углу θ в пределах от θ_1 до θ_2 :

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (1.7)$$

Аналогично, рассчитаем проекцию dE_z вектора $d\mathbf{E}$ на ось z :

$$\begin{aligned} dE_z = dE \cos \theta &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \\ &= \frac{\lambda (R/\sin^2 \theta) d\theta}{4\pi\epsilon_0 (R/\sin \theta)^2} \cos \theta = \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Проекцию E_z на ось z вектора напряженности \mathbf{E} , созданного в точке наблюдения всем заряженным отрезком, найдем путем интегрирования выражения для dE_z по углу θ в пределах от θ_1 до θ_2 :

$$E_z = \int dE_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1). \quad (1.8)$$

В рассматриваемой задаче структура электрического поля обладает цилиндрической симметрией: поле симметрично относительно прямой,

на которой лежит заряженный отрезок нити. В силу цилиндрической симметрии вектор \mathbf{E} в любой точке пространства вне нити лежит в плоскости, проходящей через ось симметрии; составляющие вектора \mathbf{E} , перпендикулярные этой плоскости, равны нулю. Формулы (1.7) и (1.8) полностью определяют вектор \mathbf{E} напряженности поля отрезка прямой равномерно заряженной нити.

Если нить бесконечно длинная, то углы θ_1 и θ_2 равны нулю и π соответственно. Подставим эти значения в (1.7) и (1.8). Из формулы (1.8) следует, что составляющая напряженности E_z , параллельная нити (параллельная оси z), отсутствует: $E_z = 0$. В этом случае напряженность поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити вычисляется с помощью формулы (1.7). Она направлена перпендикулярно нити и равна

$$E = E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.9)$$

§ 2. Поток вектора напряженности электрического поля

Вектор элементарной площадки. Пусть в пространстве имеется некоторая поверхность S произвольной формы. Рассмотрим участок этой поверхности, площадь dS которого бесконечно мала (рис. 6). Вследствие малых размеров рассматриваемый участок площади dS можно считать плоским. Будем называть такой участок элементарной площадкой на поверхности S . Пусть \mathbf{n} — вектор единичной длины, перпендикулярный к элементарной площадке. Поскольку элементарная площадка лежит в плоскости, касательной к поверхности S , вектор \mathbf{n} называется единичным вектором нормали к поверхности S . Если элементарная площадка задана, направление вектора \mathbf{n} , перпендикулярного к ее поверхности, может быть выбрано, вообще говоря, одним из двух возможных способов (например, на рис. 6 вектор \mathbf{n} может быть направлен вверх или вниз, выбор произволен).

Вектором $d\mathbf{S}$ элементарной площадки называется вектор, длина которого равна площади dS элементарной площадки, а направление совпадает с выбранным направлением единичного вектора \mathbf{n} , перпендикулярного к площадке (см. рис. 6):

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}.$$

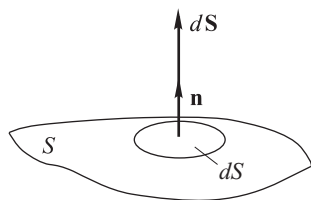


Рис. 6

Поток вектора напряженности электрического поля. Пусть в пространстве имеется электрическое поле, и в некоторой области этого поля выбрана элементарная площадка dS . Ввиду того, что площадка бесконечно малая, вектор напряженности поля \mathbf{E} можно считать

одинаковым во всех ее точках. Выбрав единичный вектор нормали \mathbf{n} , зададим вектор $d\mathbf{S}$ элементарной площадки. Угол между векторами $d\mathbf{S}$ и \mathbf{E} равен α (рис. 7).

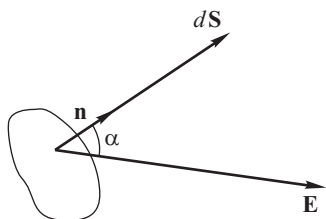


Рис. 7

Поток $d\Phi$ вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через элементарную площадку равен скалярному произведению векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha. \quad (2.1)$$

Поток вектора напряженности \mathbf{E} через произвольную поверхность S конечных размеров определяется следующим образом. Разобьем мысленно всю поверхность S на элементарные участки (элементарные площадки), общее число которых равно N (рис. 8). Каждому участку с номером i ($i = 1, 2, \dots, N$) соответствует вектор элементарной площадки $d\mathbf{S}_i$ и вектор напряженности электрического поля \mathbf{E}_i , взятый в любой точке этого участка (участок настолько мал, что напряженность поля во всех его точках можно считать одинаковой). Если поверхность S не замкнутая, то направление единичного вектора \mathbf{n} нормали к поверхности, необходимого для построения вектора $d\mathbf{S}_i$ элементарной площадки, выбирается произвольно одним из двух возможных способов; при этом для всех элементарных участков, на которые разбивается поверхность S , вектор \mathbf{n} должен быть направлен одинаково относительно поверхности S .

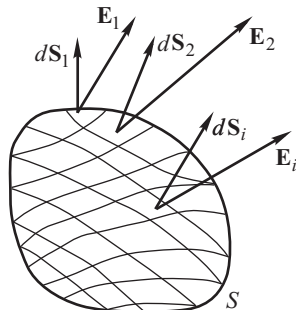


Рис. 8

Поток Φ вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через поверхность S конечных размеров равен пределу при $N \rightarrow \infty$ суммы потоков через все элементарные площадки, на которые мысленно разбита рассматриваемая поверхность:

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad (2.2)$$

где N — число элементарных площадок, интеграл вычисляется по поверхности S .

Поток вектора напряженности \mathbf{E} через замкнутую поверхность S вычисляется аналогично. Вся поверхность мысленно разбивается на элементарные участки, и вычисляется сумма потоков $\mathbf{E}_i d\mathbf{S}_i$ через эти

участки при условии стремления их числа N к бесконечности:

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i d\mathbf{S}_i = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad (2.3)$$

При вычислении потока вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность принято использовать внешнюю единичную нормаль \mathbf{n} к поверхности, то есть нормаль, направленную наружу по отношению к ограниченному поверхностью объему.

Поток Φ вектора напряженности через произвольную поверхность S пропорционален модулю вектора \mathbf{E} в том смысле, что в соответствии с формулой (2.3) при увеличении модуля \mathbf{E} во всех точках пространства в n раз поток также возрастает в n раз. В свою очередь, густота силовых линий электрического поля также пропорциональна модулю вектора \mathbf{E} . Учитывая это обстоятельство, можно утверждать, что поток вектора \mathbf{E} через произвольную поверхность S пропорционален числу силовых линий, пронизывающих эту поверхность.

В качестве примера на рис. 9 изображена замкнутая поверхность S и векторы напряженности электрического поля \mathbf{E} в точках пересечения силовых линий поля с этой поверхностью. Чем больше векторов «выходит» из поверхности S , тем больше поток вектора \mathbf{E} через эту поверхность.

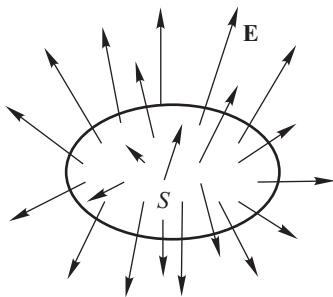


Рис. 9

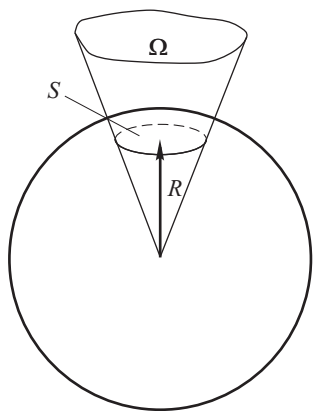


Рис. 10

Телесный угол и единицы его измерения. Телесный угол — это область пространства, ограниченная конической поверхностью с замкнутой направляющей (бесконечная воронка). Телесные углы измеряются в *стерадианах* (ср). Телесный угол Ω в стерадианах равен отношению площади S , вырезаемой телесным углом на поверхности шара произвольного радиуса R , описанного из вершины телесного угла, к квадрату радиуса R^2 этого шара (рис. 10):

$$\Omega [\text{ср}] = \frac{S}{R^2}.$$

Один стерадиан — это такой телесный угол, который вырезает на поверхности шара, описанного из его вершины произвольным радиусом R , участок площади $S = R^2$, то есть участок, площадь которого равна квадрату радиуса шара.

Площадь поверхности шара составляет $4\pi R^2$, где R — радиус шара. Поэтому *полный телесный угол* Ω в стерadians равен

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

Элементарный (бесконечно малый) телесный угол $d\Omega$ вырезает на поверхности шара, описанного произвольным радиусом R из его вершины, бесконечно малый участок площади $dS_{\text{ш}}$, величина которой сколь угодно мало отличается от площади dS_{\perp} основания шарового сегмента, кривая поверхность которого совпадает с участком, вырезанным телесным углом на поверхности шара (рис. 11):

$$dS_{\text{ш}} \approx dS_{\perp}.$$

Величину элементарного телесного угла в стерadians можно рассчитать по формуле:

$$d\Omega = \frac{dS_{\text{ш}}}{R^2} \approx \frac{dS_{\perp}}{R^2},$$

где dS_{\perp} — площадь основания упомянутого выше шарового сегмента. В дальнейшем для краткости будем называть основание шарового сегмента площадью dS_{\perp} элементарной площадкой, ограниченной телесным углом $d\Omega$ и перпендикулярной к его оси.

При этом под осью элементарного телесного угла будем понимать ось конуса, образованного телесным углом $d\Omega$ и основанием упомянутого выше шарового сегмента.

Если элементарный телесный угол $d\Omega$ вырезает на некоторой произвольной поверхности S элементарную площадку dS , вектор нормали \mathbf{n} к которой образует угол α с осью телесного угла, то для вычисления величины $d\Omega$ в стерadians нужно найти площадь dS_{\perp} проекции площадки dS на плоскость, перпендикулярную к оси телесного угла (dS_{\perp} — площадь элементарной площадки, ограниченной телесным углом $d\Omega$ и перпендикулярной к его оси):

$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha,$$

и разделить полученную величину dS_{\perp} на квадрат расстояния R от вершины телесного угла до площадки dS (рис. 12):

$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{R^2} = \frac{dS \cos \alpha}{R^2}.$$

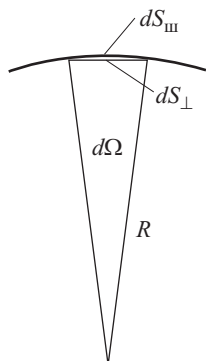


Рис. 11

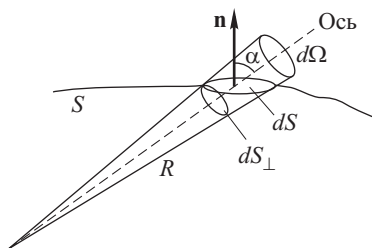


Рис. 12

§ 3. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса в интегральной форме. Теорема Гаусса (1777–1855) является важнейшей теоремой электростатики и формулируется следующим образом.

Поток вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов $\sum q_i$, расположенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0 :

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}. \quad (3.1)$$

Здесь суммирование ведется по всем зарядам i , расположенным внутри поверхности S .

Доказательство. Случай 1. Пусть внутри поверхности S расположен единственный точечный заряд q .

Заряд q порождает электростатическое поле, напряженность которого обозначим через \mathbf{E} (рис. 13). Вычислим поток вектора \mathbf{E} через поверхность S . Для этого рассмотрим элементарный телесный угол $d\Omega$ с вершиной в точке расположения заряда q . Угол $d\Omega$ вырезает на замкнутой поверхности S элементарную площадку dS . Вектор $d\mathbf{S}$ этой площадки составляет угол α с вектором \mathbf{r} , проведенным к ней от заряда q (вектор \mathbf{r} совпадает с осью элементарного телесного угла $d\Omega$). Вектор напряженности поля \mathbf{E} во всех точках площадки dS приблизительно одинаков благодаря ее малым размерам, он сонаправлен с вектором \mathbf{r} и составляет угол α с вектором $d\mathbf{S}$. Поток $d\Phi$ вектора \mathbf{E} через площадку dS равен

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = E dS_{\perp}.$$

С учетом формулы (1.4) напряженности поля точечного заряда получим для $d\Phi$:

$$d\Phi = E dS_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega,$$

где dS_{\perp} — площадь проекции площадки dS на плоскость, перпендикулярную к вектору \mathbf{r} ; $dS_{\perp}/r^2 = d\Omega$ — телесный угол, вырезающий на замкнутой поверхности S элементарную площадку dS .

Поток Φ вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность S найдем интегрированием по этой поверхности:

$$\Phi = \oint_S d\Phi = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

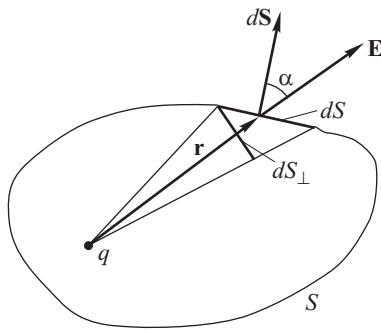


Рис. 13

Интеграл $\oint_S d\Omega$, вычисляемый в процессе преобразований, равен сумме всех элементарных телесных углов $d\Omega$ с вершиной в точке расположения заряда q и вырезающих на замкнутой поверхности S множество элементарных площадок dS , совокупность которых образует эту поверхность. Сумма всех указанных элементарных телесных углов представляет собой полный телесный угол, равный 4π стерadianам.

Таким образом, поток через замкнутую поверхность S вектора напряженности поля \mathbf{E} заряда q равен

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) свидетельствует о том, что теорема Гаусса (3.1) справедлива для электрического поля \mathbf{E} единственного точечного заряда q , расположенного внутри замкнутой поверхности S .

С л у ч а й 2. Внутри замкнутой поверхности S имеется система точечных зарядов или непрерывно распределенные в пространстве заряды.

Пусть внутри поверхности S находится не уединенный точечный заряд q , а система зарядов, состоящая из конечного или бесконечно большого числа точечных зарядов q_i .

Для потока вектора \mathbf{E}_i каждого из зарядов q_i через поверхность S справедлива теорема Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}.$$

Складывая подобные равенства, записанные для всех зарядов q_i , и применяя принцип суперпозиции, убедимся в том, что теорема Гаусса выполняется и в рассматриваемом случае, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S} &= \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}, \\ \oint_S \left(\sum_i \mathbf{E}_i \right) d\mathbf{S} &= \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}, \\ \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} &= \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Здесь вектор $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$ представляет собой векторную сумму напряженностей поля \mathbf{E}_i каждого из зарядов системы, $\sum_i q_i$ — суммарный заряд, расположенный внутри поверхности интегрирования S . Что и требовалось доказать.

Случай 3. Точечный заряд q расположен вне замкнутой поверхности S (снаружи от этой поверхности).

Покажем теперь, что поток через замкнутую поверхность S вектора напряженности поля заряда q , расположенного вне этой поверхности, равен нулю (рис. 14). Для вычисления потока необходимо мысленно разделить всю поверхность на элементарные участки, вычислить поток через каждый из них и сложить все получившиеся величины друг с другом. Деление поверхности S на участки можно провести с помощью элементарных телесных углов с вершиной в точке расположения заряда q , причем каждый элементарный телесный угол $d\Omega$ будет вырезать на поверхности S две элементарных площадки dS_1 и dS_2 . Поток вектора напряженности через каждую пару площадок, образованных одним и тем же элементарным телесным углом $d\Omega$, равен

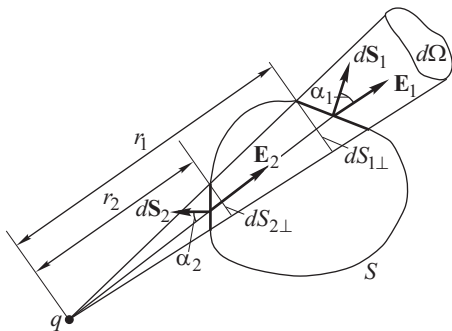


Рис. 14

$$d\Phi = \mathbf{E}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{S}_2,$$

где \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — напряженность поля заряда q в любой точке площадки dS_1 и площадки dS_2 соответственно (площадки настолько малы, что вектор \mathbf{E} во всех точках каждой из площадок можно считать одинаковым); $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$ — векторы элементарных площадок, направленные наружу по отношению к замкнутой поверхности S . Векторы $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$ составляют углы α_1 и α_2 с прямой, проведенной через заряд q и площадки dS_1 и dS_2 (эта прямая является осью элементарного телесного угла). Если расстояния от заряда q до площадок dS_1 и dS_2 равны соответственно r_1 и r_2 , то модули векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 напряженности поля составят величины: $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$, $E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$. С учетом этого поток $d\Phi$ через рассматриваемую пару площадок, вырезанных на поверхности S одним и тем же телесным углом $d\Omega$, равен

$$\begin{aligned} d\Phi &= E_1 dS_1 \cos \alpha_1 + E_2 dS_2 \cos(\pi - \alpha_2) = E_1 dS_{1\perp} - E_2 dS_{2\perp} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dS_{1\perp} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} dS_{2\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{dS_{1\perp}}{r_1^2} - \frac{dS_{2\perp}}{r_2^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (d\Omega - d\Omega) = 0, \end{aligned}$$

где $dS_{1\perp}$ и $dS_{2\perp}$ — площади проекций площадок dS_1 и dS_2 на плоскость, перпендикулярную оси бесконечно малого телесного угла $d\Omega$. В ходе преобразований учтено, что величина телесного угла $d\Omega$ может

быть выражена как через величину $dS_{1\perp}$, так и через $dS_{2\perp}$, а именно:

$$d\Omega = \frac{dS_{1\perp}}{r_1^2} = \frac{dS_{2\perp}}{r_2^2}.$$

Поскольку вся поверхность S поделена бесконечно малыми телесными углами на элементарные площадки таким образом, что поток вектора напряженности \mathbf{E} через каждую пару площадок, образованных одним и тем же телесным углом $d\Omega$, равен нулю, то поток вектора \mathbf{E} через всю замкнутую поверхность S также равен нулю.

Тем самым доказано, что если заряд q расположен вне замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности поля этого заряда через рассматриваемую поверхность равен нулю.

Электростатическая теорема Гаусса (3.1) доказана полностью.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Рассмотрим поток вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через некоторую замкнутую поверхность S : $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}$. Будем стягивать поверхность S в точку, то есть устремим ограниченную поверхностью S объем ΔV к нулю. По определению, *дивергенцией вектора \mathbf{E}* ($\text{div } \mathbf{E}$) в точке, в которой стягивается поверхность S , называется величина, равная пределу при $\Delta V \rightarrow 0$ отношения потока $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}$ через поверхность S к объему ΔV , охватываемому этой поверхностью:

$$\text{div } \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (3.3)$$

Смысл понятия дивергенции, согласно ее определению, состоит в следующем. Дивергенция всякого вектора равна потоку этого вектора через замкнутую поверхность, охватывающую бесконечно малый объем, деленному на величину этого объема.

Пусть внутри объема ΔV , охватываемого замкнутой поверхностью S , сосредоточен заряд, который обозначим символом $q_{\Delta V}$. Теорема Гаусса (3.1) для поля заряда $q_{\Delta V}$ и поверхности S имеет вид

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q_{\Delta V}}{\varepsilon_0}.$$

Разделим обе части этого равенства на ΔV и устремим ΔV к нулю:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{q_{\Delta V}}{\Delta V \varepsilon_0}.$$

Выражение в левой части полученного равенства представляет собой дивергенцию вектора \mathbf{E} . Предел отношения при $\Delta V \rightarrow 0$ заряда

$q\Delta V$, сосредоточенного в объеме ΔV , к величине этого объема, равен объемной плотности заряда ρ :

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{q\Delta V}{\Delta V} = \rho.$$

С учетом этого получим *теорему Гаусса для вектора \mathbf{E} в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) означает, что *дивергенция вектора \mathbf{E} в произвольной точке поля равна объемной плотности макроскопического электрического заряда в этой точке, деленной на ε_0* .

Дивергенция вектора напряженности \mathbf{E} в декартовых координатах. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед бесконечно малого объема, ребра которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат и имеют длины dx , dy и dz . Пусть координаты вершины параллелепипеда, ближайшей к началу системы координат, равны x , y и z . Вычислим поток вектора напряженности \mathbf{E} электрического поля через поверхность такого бесконечно малого параллелепипеда (рис. 15).

Каждая грань параллелепипеда представляет собой элементарную площадку, во всех точках которой вектор напряженности \mathbf{E} практически одинаков. Поток вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность параллелепипеда равен сумме шести слагаемых — потоков вектора \mathbf{E} через каждую из шести граней:

$$d\Phi = \mathbf{E}(x+dx, y, z)\mathbf{i} dy dz - \mathbf{E}(x, y, z)\mathbf{i} dy dz + \mathbf{E}(x, y+dy, z)\mathbf{j} dx dz - \\ - \mathbf{E}(x, y, z)\mathbf{j} dx dz + \mathbf{E}(x, y, z+dz)\mathbf{k} dx dy - \mathbf{E}(x, y, z)\mathbf{k} dx dy, \quad (3.5)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты координатных осей, которые одновременно служат единичными векторами нормали к соответствующим элементарным площадкам — граням параллелепипеда. Например, слагаемое $\mathbf{E}(x+dx, y, z)\mathbf{i} dy dz$ представляет собой скалярное произведение вектора напряженности \mathbf{E} , взятого в любой точке грани параллелепипеда, перпендикулярной оси x и расположенной в плоскости с координатой $x+dx$, и вектора $\mathbf{i} dy dz$ элементарной площадки, соответствующей этой грани. На рис. 15 в качестве примера показаны векторы напряженности и единичные векторы нормали для трех граней параллелепипеда.

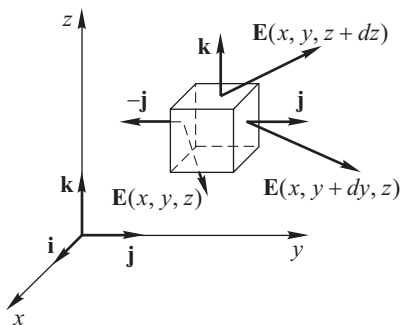


Рис. 15

Все сомножители в правой части выражения (3.5) имеют следующий смысл. Произведения $dy dz$, $dx dz$, $dx dy$ равны площадям соответствующих граней параллелепипеда. Произведения $(\mathbf{i} dy dz)$ и $(-\mathbf{i} dy dz)$ представляют собой векторы двух элементарных площадок, которые являются гранями параллелепипеда, параллельными плоскости yz ; $(\mathbf{j} dx dz)$ и $(-\mathbf{j} dx dz)$ — векторы элементарных площадок, которые являются гранями параллелепипеда, параллельными плоскости xz ; $(\mathbf{k} dx dy)$ и $(-\mathbf{k} dx dy)$ — векторы элементарных площадок, которые являются гранями параллелепипеда, параллельными плоскости xy . $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{E}(x + dx, y, z)$ — векторы напряженности поля на двух гранях параллелепипеда, параллельных плоскости yz , $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{E}(x, y + dy, z)$ — векторы напряженности поля на двух гранях параллелепипеда, параллельных плоскости xz , $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{E}(x, y, z + dz)$ — векторы напряженности поля на двух гранях параллелепипеда, параллельных плоскости xy .

Вычислив в (3.5) скалярные произведения векторов напряженности поля $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и орты координатных осей $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ через приведенные в круглых скобках компоненты этих векторов, группируя подобные члены и раскладывая с помощью формулы Тейлора функции E_x , E_y , E_z координат x , y , z по малым параметрам dx , dy , dz , получим

$$\begin{aligned} d\Phi &= [E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dy dz + \\ &\quad + [E_y(x, y + dy, z) - E_y(x, y, z)] dx dz + \\ &\quad + [E_z(x, y, z + dz) - E_z(x, y, z)] dx dy \approx \\ &\approx \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где $dx dy dz = dV$ — объем рассматриваемого элементарного параллелепипеда.

Покажем, как использовалась формула Тейлора при выполнении преобразований в (3.6), на примере функции $E_x(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} [E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dy dz &\approx \\ &\approx \left[E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx - E_x(x, y, z) \right] dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

Согласно определению (3.3) дивергенцию вектора \mathbf{E} можно вычислить как частное от деления потока $d\Phi$ вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность на величину dV охватываемого этой поверхностью объема. Применив определение (3.3) к потоку $d\Phi$ (3.6), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) позволяет рассчитать дивергенцию вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} , если известна зависимость \mathbf{E} от координат x, y, z .

Дивергенцию вектора \mathbf{E} формально можно рассматривать как скалярное произведение векторного оператора набла на вектор \mathbf{E} :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla, \mathbf{E}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.8)$$

С учетом (3.7) и (3.8) дифференциальная форма теоремы Гаусса (3.4) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.9)$$

$$(\nabla, \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.10)$$

§ 4. Напряженность электрического поля заряженной сферической поверхности

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса a , по которой равномерно распределен заряд q . Это может быть, например, тонкостенная металлическая заряженная сфера. Определим напряженность электрического поля \mathbf{E} в разных точках пространства, используя теорему Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиуса $r \geq a$, concentricкую с заряженной сферой. По соображениям симметрии во всех точках сферы радиуса r вектор напряженности поля \mathbf{E} имеет одну и ту же величину и направлен вдоль радиуса сферы. Мысленно разделим всю поверхность интегрирования на элементарные площадки dS , вычислим скалярное произведение $\mathbf{E} d\mathbf{S}$, где \mathbf{E} — напряженность поля в произвольной точке площадки, $d\mathbf{S}$ — вектор этой площадки (рис. 16). Поскольку векторы \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ сонаправлены, скалярное произведение равно произведению модулей этих векторов: $\mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS$. Теперь легко найти поток вектора \mathbf{E} через всю сферическую поверхность радиуса r , учитывая,

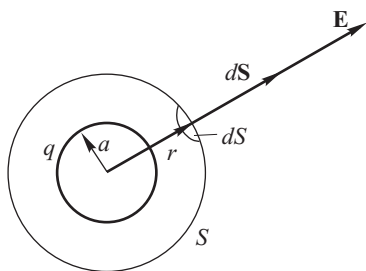


Рис. 16

что модуль E одинаков во всех точках этой поверхности и константу E можно вынести из-под знака интеграла:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда найдем напряженность поля E равномерно заряженной сферы в точках пространства снаружи от этой сферы:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{при } r \geq a.$$

Определим теперь напряженность поля внутри заряженной сферы. Для этого выберем в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса $r < a$, концентрическую с заряженной сферой, и вновь воспользуемся теоремой Гаусса. Поскольку заряд внутри поверхности интегрирования отсутствует, в рассматриваемом случае в правой части уравнения, выражающего теорему Гаусса, стоит нуль:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0.$$

Поток вектора \mathbf{E} вычисляется аналогично предыдущему случаю:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = 0.$$

Отсюда следует, что напряженность поля внутри заряженной сферы равна нулю:

$$E = 0 \quad \text{при } r < a.$$

Итак, напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности радиуса a равна

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{при } r \geq a,$$

$$E = 0 \quad \text{при } r < a.$$

Поле равномерно заряженной сферической поверхности вне этой поверхности совпадает с полем точечного заряда, а внутри поверхности поле равно нулю.

§ 5. Напряженность электрического поля заряженной бесконечно длинной нити

Выше с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции были получены выражения для напряженности поля отрезка заряженной нити (1.5), (1.6) и бесконечно длинной нити (1.7). Значительно проще формулу (1.7) можно вывести, используя симметрию задачи и теорему Гаусса.

По соображениям симметрии, о которых говорилось выше, линии напряженности поля бесконечно длинной равномерно заряженной тонкой нити перпендикулярны к нити и имеют радиальное направление (см. рис. 17, на котором изображены силовые линии поля положительно заряженной нити). При использовании теоремы Гаусса для определения напряженности поля всегда приходится учитывать симметрию задачи и, по возможности, выбирать поверхность интегрирования так, чтобы длина вектора \mathbf{E} во всех точках поверхности была одинаковой.



Рис. 17

Рассмотрим бесконечно длинную тонкую прямую нить, равномерно заряженную с линейной плотностью λ (λ — заряд нити, приходящийся на единицу ее длины). Чтобы воспользоваться теоремой Гаусса, выберем в качестве поверхности интегрирования поверхность прямого

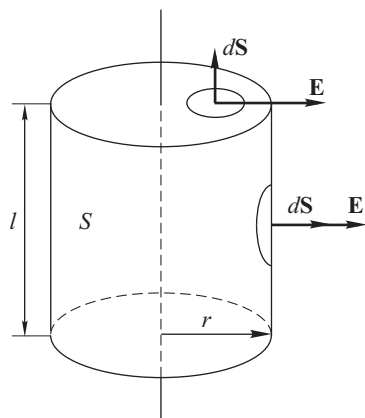


Рис. 18

кругового цилиндра, ось симметрии которого совпадает с нитью, длина образующей равна l , радиус основания — r (рис. 18). Благодаря цилиндрической симметрии в любой точке боковой поверхности цилиндра вектор напряженности \mathbf{E} имеет одну и ту же длину (модуль) и направлен вдоль радиуса цилиндра. Поток вектора напряженности через замкнутую поверхность цилиндра, равный, согласно теореме Гаусса, деленному на ε_0 заряду q той части нити, которая оказалась внутри поверхности интегрирования, представляет собой сумму потоков через боковую поверхность $\int_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ и через основания ци-

линдра $\int_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S}$. При этом поток вектора \mathbf{E} через основания равен нулю в силу перпендикулярности друг другу вектора \mathbf{E} и вектора $d\mathbf{S}$ любой элементарной площадки основания. Таким образом, поток вектора напряженности через поверхность цилиндра равен

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

На боковой поверхности цилиндра вектор напряженности \mathbf{E} и перпендикулярный боковой поверхности цилиндра вектор $d\mathbf{S}$ оказываются сонаправленными, так что скалярное произведение этих векторов равно

произведению их модулей, $\mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS$. Модуль вектора \mathbf{E} одинаков во всех точках боковой поверхности, так что константа E может быть вынесена из-под знака интеграла при вычислении потока:

$$\int_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{\text{бок}} E dS = E \int_{\text{бок}} dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

где было учтено, что интеграл $\int_{\text{бок}} dS$ представляет собой площадь боковой поверхности прямого цилиндра радиуса r и высотой l и, следовательно, равен $2\pi r l$.

Заряд q той части нити, которая оказалась внутри поверхности интегрирования (внутри цилиндра высотой l), равен λl . С учетом этого последнее равенство принимает вид

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},$$

откуда напряженность поля E бесконечно длинной равномерно заряженной нити на удалении r равна

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

§ 6. Напряженность поля заряженной плоскости

Рассмотрим неограниченную (бесконечную) плоскую поверхность, равномерно заряженную положительным зарядом с поверхностной плотностью σ (положительный знак заряда выбран только для определенности). По соображениям симметрии вектор напряженности поля \mathbf{E}

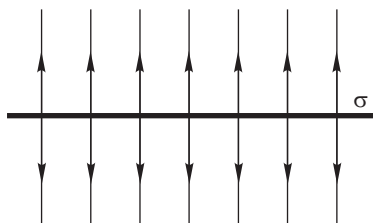


Рис. 19

в любой точке пространства должен быть направлен перпендикулярно плоскости и иметь одну и ту же величину (модуль) во всех точках, равноудаленных от плоскости. Силовые линии поля заряженной плоскости изображены на рис. 19. Для вычисления напряженности поля \mathbf{E} используем теорему Гаусса, а в качестве поверхности интегрирования выберем поверхность прямого цилиндра,

основания которого параллельны заряженной плоскости и расположены по разные стороны на одинаковом расстоянии от нее (рис. 20). Пусть площадь основания цилиндра равна ΔS . Внутри поверхности интегрирования окажется часть заряженной плоскости площадью ΔS , заряд которой равен $\sigma \Delta S$. Применим теорему Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

Здесь \mathbf{E} — напряженность поля в точках поверхности интегрирования S , то есть поверхности цилиндра (см. рис. 20).

Поток вектора напряженности — интеграл по поверхности цилиндра — равен сумме потоков через боковую поверхность $\int_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ и через основания цилиндра $\int_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S}$, при этом поток через боковую поверхность равен нулю, поскольку в любой ее точке вектор напряженности \mathbf{E} перпендикулярен вектору элементарной площадки $d\mathbf{S}$ (рис. 20):

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

На основаниях цилиндра векторы \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$ сонаправлены, их скалярное произведение равно произведению модулей, $\mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS$. Модуль E в силу симметрии одинаков во всех точках оснований и может быть вынесен из-под знака интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S} &= \int_{\text{осн}} E dS = E \int_{\text{осн}} dS = \\ &= E \cdot 2\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Отсюда находим модуль напряженности E :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (6.1)$$

Из полученного выражения видно, что напряженность \mathbf{E} поля бесконечной заряженной плоской поверхности не зависит от расстояния до этой поверхности. Если заряженная плоская поверхность имеет конечные размеры, то, строго говоря, формула (6.1) не справедлива. Однако выражение (6.1) можно применять и в этом случае для приближенного расчета напряженности поля в точках пространства, расположенных на малых расстояниях от поверхности (расстояние от точки наблюдения до поверхности должно быть мало по сравнению с размерами самой заряженной поверхности).

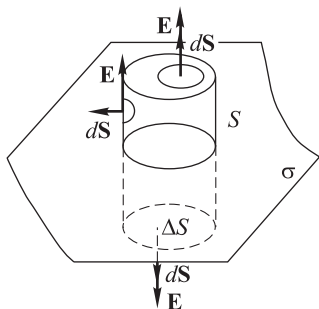


Рис. 20

§ 7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Потенциал

Работа сил электростатического поля и понятие циркуляции.

Пусть точечный заряд q , находящийся в электростатическом поле с напряженностью \mathbf{E} , перемещается из произвольной точки 1 в произвольную точку 2. Действующая на заряд со стороны поля сила \mathbf{F} равна

$q\mathbf{E}$, а работа сил поля на указанном перемещении представляет собой интеграл:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарного перемещения (рис. 21). Пусть начальная и конечная точки траектории совпадают между собой, то есть траектория представляет собой замкнутую линию, которую обозначим буквой l (замкнутый контур) (рис. 22). Работа сил поля, совершаемая

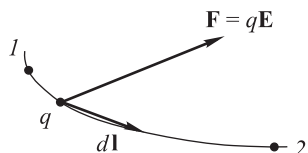


Рис. 21

при перемещении заряда q по замкнутому контуру l , деленная на величину q этого заряда (иначе говоря, работа поля, отнесенная к единичному положительному заряду), называется циркуляцией вектора напряженности поля \mathbf{E} :

$$A_{\text{ед}} = \frac{A}{q} = \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Окончательно, определение циркуляции вектора \mathbf{E} и физический смысл этого понятия таковы.

Циркуляция вектора напряженности \mathbf{E} электростатического поля равна вычисленному по замкнутому контуру l интегралу:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Циркуляция вектора \mathbf{E} численно равна работе сил электростатического поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру.

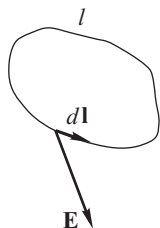


Рис. 22

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Формулировка теоремы следующая.

Циркуляция вектора напряженности \mathbf{E} электростатического поля по произвольному замкнутому контуру l равна нулю:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (7.1)$$

Доказательство этого утверждения основывается на свойствах консервативного поля. При изучении механики было показано, что электростатическое (кулоновое) поле является консервативным. Это означает, что работа сил электростатического поля при перемещении точечного заряда из произвольного начального положения в произвольное конечное положение не зависит от вида траектории и характера движения, а определяется только координатами заряда в начальном и конечном положениях (см. кн. 1 «Механика», гл. III, § 21). Кроме того,

работа сил поля при перемещении заряда по произвольной замкнутой траектории (замкнутому контуру) равна нулю. Следовательно циркуляция вектора напряженности \mathbf{E} по произвольному замкнутому контуру равна нулю.

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме. Равенство (7.1) представляет собой теорему о циркуляции в интегральной форме. Для записи этой теоремы в дифференциальной форме необходимо ввести определение ротора векторной величины.

Рассмотрим циркуляцию вектора \mathbf{E} по замкнутому контуру l (рис. 23). Если размеры контура l взять достаточно малыми, его можно считать плоским. Выберем единичный вектор \mathbf{n} нормали к плоскости контура l , связанный правилом правого винта с направлением обхода контура. Площадь поверхности, охватываемой контуром, равна ΔS . Пусть контур l стягивается в точку A , при этом площадь ΔS стремится к нулю.

Ротором вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} ($\text{rot } \mathbf{E}$) в некоторой точке A пространства называется такой вектор, проекция которого на направление нормали \mathbf{n} к плоскости замкнутого контура l равна пределу отношения циркуляции вектора \mathbf{E} по контуру l к площади ΔS , ограниченной контуром поверхности при условии, что ΔS стремится к нулю и контур l стягивается к точке A :

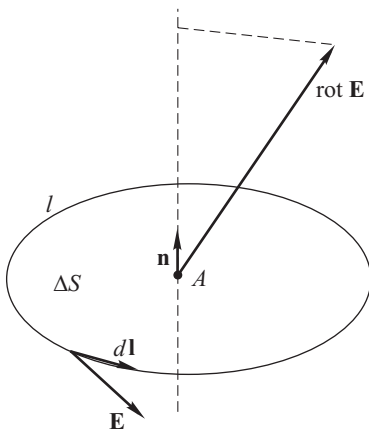


Рис. 23

$$(\text{rot } \mathbf{E})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\Delta S}. \quad (7.2)$$

Разделив обе части равенства (7.1) на величину площади ΔS , охватываемой контуром l поверхности, и вычислив предел обеих частей равенства при стремлении ΔS к нулю, получим *теорему о циркуляции вектора \mathbf{E} в дифференциальной форме*:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\Delta S} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (7.3)$$

Ротор вектора напряженности \mathbf{E} в декартовых координатах. Если задана зависимость $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ вектора напряженности электрического поля от декартовых координат x, y, z , ротор вектора \mathbf{E}

можно представить как векторное произведение оператора набла на вектор \mathbf{E} или в виде соответствующего определителя:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = [\nabla, \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (7.4)$$

Справедливость представления (7.4) ротора векторной функции $\mathbf{E}(x, y, z)$ в декартовых координатах доказывается в курсе векторного анализа.

Потенциал электростатического поля. Понятие потенциала электростатического поля тесно связано с понятием потенциальной энергии тела в поле консервативных сил. Поскольку электростатическое поле является консервативным, помещенное в него заряженное тело обладает потенциальной энергией. *Потенциалом φ электростатического поля в некоторой его точке называется величина, равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.* Напомним, что в системе СИ единичный заряд равен одному кулону.

Опираясь на понятие потенциальной энергии, которое было введено при изучении механики, раскроем данное выше определение потенциала электростатического поля так, чтобы получить способ его вычисления.

Потенциал φ в точке P электростатического поля равен работе сил поля, совершаемой при перемещении пробного положительного заряда $q_{\text{пр}}$ из точки P в точку O , принятую за начало отсчета потенциала, деленной на $q_{\text{пр}}$:

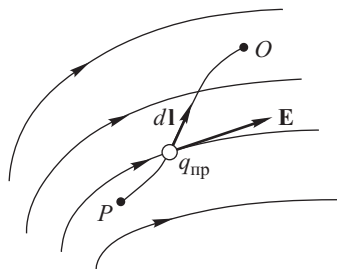


Рис. 24

$$\varphi = \frac{A}{q_{\text{пр}}} = \int_P^O \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (7.5)$$

Здесь P — точка поля, в которой определяется потенциал φ , O — точка начала отсчета потенциала (в точке O по определению потенциал φ равен нулю), A — работа сил поля по перемещению пробного положительного заряда $q_{\text{пр}}$ из точки P в точку O (рис. 24). Из выражения (7.5) видно, что потенциал φ численно равен работе сил поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из точки P в точку O .

Поскольку понятие потенциала φ является частным случаем понятия потенциальной энергии в применении к электростатическому полю, свойства потенциала аналогичны свойствам функции потенциальной энергии и не требуют специального доказательства (см. кн. 1 «Механика», гл. III, § 25).

Свойства потенциала. 1. Потенциал φ в данной точке электростатического поля является функцией только координат x, y, z этой точки:

$$\varphi = \varphi(x, y, z).$$

2. Работа сил поля по перемещению единичного положительного заряда из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2 равна убыли потенциала:

$$A_{\text{ед}} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (7.6)$$

где φ_1 — потенциал поля в точке 1, φ_2 — то же в точке 2.

Если точки 1 и 2 расположены достаточно близко одна от другой, интеграл можно заменить скалярным произведением $\mathbf{E} d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — вектор перемещения, проведенный из точки 1 в точку 2, \mathbf{E} — напряженность поля, приблизительно одинаковая во всех точках отрезка $d\mathbf{l}$. В этих условиях соотношение (7.6) между работой поля и изменением потенциала можно записать в дифференциальной форме:

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\varphi, \quad (7.7)$$

где $d\varphi$ — приращение, $(-d\varphi)$ — убыль потенциала при перемещении из точки 1 поля в точку 2.

3. Потенциал φ электростатического поля определен с точностью до аддитивной постоянной величины. При замене точки O , принятой за начало отсчета потенциала, на некоторую другую точку O' потенциал φ во всех точках поля изменяется на одну и ту же величину C , равную работе сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки O в точку O' :

$$\varphi' = \varphi + C,$$

$$\text{где } C = \int_O^{O'} \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

З а м е ч а н и е о выборе начала отсчета потенциала. Если точечный заряд или заряды, которые порождают электростатическое поле, локализованы в ограниченной области пространства, то в качестве положения, принятого за начало отсчета потенциала, обычно выбирают точки пространства, бесконечно удаленные от места локализации зарядов. Во многих задачах потенциал Земли принимается равным нулю.

Потенциал φ , а также разность потенциалов φ_1 и φ_2 в двух точках поля, которая называется *электрическим напряжением* и обозначается буквой U ($U = \varphi_1 - \varphi_2$), измеряются в *вольтах* (В).

Один вольт — это такая разность потенциалов, при которой для медленного (квазистатического) перемещения заряда величиной 1 Кл из одной точки в другую требуется совершить работу против сил поля, равную 1 Дж:

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}.$$

§ 8. Потенциал поля точечного заряда и системы зарядов

Потенциал поля точечного заряда. Вычислим потенциал φ поля заряда q в точке P , расположенной на расстоянии r от заряда.

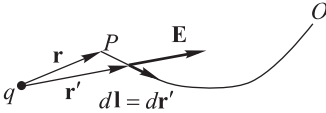


Рис. 25

Потенциал φ равен работе сил поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из точки P в «бесконечность», т.е. в точку O , расположенную на бесконечно большом удалении от заряда q , где потенциал φ считается равным нулю (рис. 25).

Согласно определению (7.5) с учетом выражения (1.4) для напряженности поля точечного заряда потенциал φ в точке P равен:

$$\varphi = \int_P^O \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_P^O \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \mathbf{r}' d\mathbf{r}' = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} r' dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.1)$$

где \mathbf{r}' — переменная интегрирования — вектор, проведенный от заряда q к единичному положительному заряду, $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$ — вектор элементарного перемещения.

Потенциал поля системы точечных зарядов. Для потенциала φ электростатического поля справедлив принцип суперпозиции. Потенциал поля системы зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ в некоторой точке P пространства равен алгебраической сумме потенциалов поля, которое создавал бы в этой точке каждый из зарядов в отсутствие остальных. Это утверждение следует из определения потенциала и принципа суперпозиции для вектора напряженности поля:

$$\varphi = \int_P^O \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_P^O \left(\sum \mathbf{E}_i \right) d\mathbf{l} = \sum \int_P^O \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = \sum \varphi_i,$$

где $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$ — напряженность поля системы зарядов, $\varphi = \int_P^O \mathbf{E} d\mathbf{l}$ — потенциал поля системы зарядов, $\varphi_i = \int_P^O \mathbf{E}_i d\mathbf{l}$ — потенциал в точке P поля заряда q_i в отсутствие остальных зарядов.

Получим выражение для потенциала поля системы точечных зарядов на большом удалении от места их локализации. Пусть $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ — точечные заряды, расположенные в некоторой ограниченной области пространства. Точка наблюдения A удалена от всех этих зарядов q_1 , точка O находится вблизи них (рис. 26). $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_i, \dots$ — радиусы-векторы, проведенные из точки O к каждому из зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots$ — векторы, проведенные от каждого из рассматриваемых зарядов к точке A ; \mathbf{r} — радиус-вектор,

проведенный из точки O к точке A , \mathbf{e}_r — вектор единичной длины, сонаправленный с \mathbf{r} .

По принципу суперпозиции потенциал φ поля в точке A равен сумме потенциалов $\varphi_i = kq_i/r_i$ (см. 8.1), создаваемых каждым из зарядов q_i в отсутствие остальных:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{kq_i}{r_i}, \quad (8.2)$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Поскольку точка A удалена от всех зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ и длины векторов \mathbf{r}_i , а также длина вектора \mathbf{r} намного превышают длины векторов \mathbf{R}_i , расстояние r_i от любого заряда q_i до точки A можно представить в следующем виде (см. рис. 26):

$$r_i \approx r - \mathbf{R}_i \mathbf{e}_r = r \left(1 - \frac{\mathbf{R}_i \mathbf{e}_r}{r} \right).$$

Здесь $\mathbf{R}_i \mathbf{e}_r$ — проекция вектора \mathbf{R}_i на направление вектора \mathbf{r} , величина $R_i e_r / r$ является параметром, малым по сравнению с единицей.

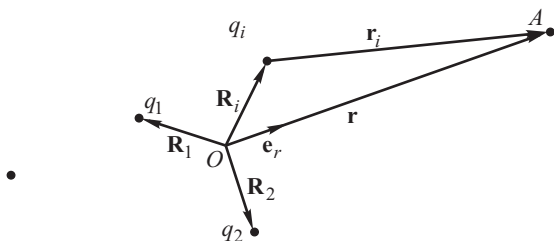


Рис. 26

Подставив r_i в (8.2) и выполнив преобразования, включающие разложение полученного выражения по малому параметру, найдем потенциал φ поля в точке A :

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum \frac{kq_i}{r(1 - \mathbf{R}_i \mathbf{e}_r / r)} \approx \sum \frac{kq_i}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{R}_i \mathbf{e}_r}{r} \right) = \sum \frac{kq_i}{r} + \sum \frac{kq_i}{r} \frac{\mathbf{R}_i \mathbf{e}_r}{r} = \\ &= \frac{k \left(\sum q_i \right)}{r} + \frac{k \left(\sum q_i \mathbf{R}_i \right) \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{kq}{r} + \frac{k\mathbf{p} \mathbf{e}_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

В (8.3) введены следующие обозначения: $q = \sum q_i$ — алгебраическая сумма всех зарядов системы, $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{R}_i$ — так называемый *дипольный момент* системы зарядов.

По определению, дипольный момент \mathbf{p} системы зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ относительно фиксированной точки O пространства равен сумме произведений заряда q_i на радиус-вектор \mathbf{R}_i , проведенный к этому заряду из точки O :

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{R}_i. \quad (8.4)$$

Здесь суммирование ведется по всем зарядам системы.

Итак, выражение (8.3) позволяет вычислить потенциал φ поля системы точечных зарядов на большом удалении от области их локализации. Если алгебраическая сумма зарядов системы равна нулю, $q = \sum q_i = 0$, то первое слагаемое в правой части (8.3) равно нулю, и потенциал определяется только вторым слагаемым, зависящим от дипольного момента \mathbf{p} системы. При этом потенциал φ убывает с увеличением расстояния r от области локализации системы зарядов до точки наблюдения по закону $1/r^2$, то есть значительно быстрее, чем потенциал поля точечного заряда (8.1).

Вектор дипольного момента \mathbf{p} (8.4) является важной характеристикой всякой заряженной физической системы. Можно показать, что если суммарный заряд системы равен нулю, т.е. $q = \sum q_i = 0$, то дипольный момент \mathbf{p} не зависит от выбора точки O , относительно которой он вычисляется.

§ 9. Связь между потенциалом и напряженностью поля

Пусть в пространстве имеется электростатическое поле, потенциал $\varphi(x, y, z)$ которого как функция декартовых координат x, y, z известен. Выразим напряженность поля \mathbf{E} через потенциал φ .

Согласно свойству потенциала (7.7) при элементарном перемещении $d\mathbf{l}$ единичного положительного заряда в электрическом поле силы поля совершают работу, равную убыли потенциала:

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\varphi.$$

Векторы напряженности поля \mathbf{E} и элементарного перемещения $d\mathbf{l}$ в декартовой системе координат можно представить в виде

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k},$$

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты координатных осей.

Выразив скалярное произведение $\mathbf{E} d\mathbf{l}$ через произведение компонент перемножаемых векторов, получим

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\varphi.$$

Пусть вектор элементарного перемещения $d\mathbf{l}$ параллелен координатной оси Ox , то есть единичный положительный заряд смещается параллельно оси x . Тогда приращения координат dy и dz равны нулю, и из последнего равенства получим

$$E_x dx = -d\varphi_{y,z},$$

где нижние индексы y, z у знака потенциала φ указывают, что координаты y и z единичного положительного заряда при его перемещении не изменяются: $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

Выразим компоненту E_x через приращение потенциала $d\varphi_{y,z}$:

$$E_x = - \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{y,z} = - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}. \quad (9.1)$$

Компонента E_x равна частной производной функции $\varphi(x, y, z)$ по координате x .

Аналогично можно показать, что компоненты E_y и E_z равны частным производным потенциала по координатам y и z :

$$E_y = - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y}, \quad (9.2)$$

$$E_z = - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}. \quad (9.3)$$

Таким образом, компоненты вектора \mathbf{E} можно определить, зная зависимость от координат x, y и z потенциала φ , а сам вектор \mathbf{E} представить в следующем виде:

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} = - \nabla \varphi = - \text{grad } \varphi. \quad (9.4)$$

Вектор напряженности поля \mathbf{E} равен взятому с противоположным знаком градиенту потенциала φ . Полученное выражение аналогично формуле механики, устанавливающей связь между силой, действующей на тело в поле консервативных сил, и потенциальной энергией тела.

Эквипотенциальные поверхности. Пусть в пространстве имеется электростатическое поле.

Эквипотенциальной поверхностью называется такая воображаемая поверхность в пространстве, во всех точках которой потенциал φ имеет одно и то же значение.

Рассмотрим примеры. Условие постоянства потенциала в поле точечного заряда q имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \text{const.}$$

Отсюда следует уравнение эквипотенциальной поверхности:

$$r = \text{const.}$$

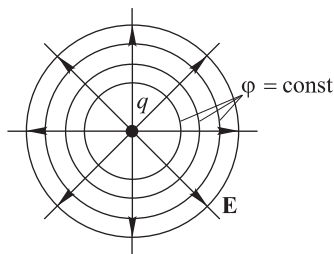


Рис. 27

Следовательно, эквипотенциальные поверхности представляют собой сферы с центром в точке расположения заряда q (рис. 27).

Эквипотенциальные поверхности в поле бесконечной равномерно заряженной тонкой пластины — это плоскости, параллельные пластине (рис. 28).

Эквипотенциальные поверхности всегда перпендикулярны линиям напряженности электростатического поля. Это утверждение иллюстрируют рисунки 27 и 28. Докажем его в общем случае.

Согласно свойству (7.7) потенциала $\mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\varphi$. В левой части этого равенства стоит величина, равная элементарной работе сил поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда вдоль вектора $d\mathbf{l}$. Пусть вектор $d\mathbf{l}$ принадлежит эквипотенциальной поверхности (рис. 29). При перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности приращение потенциала равно нулю, $d\varphi = 0$. Следовательно, $\mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$.

Если скалярное произведение отличных от нуля векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$ равно нулю, эти векторы должны быть перпендикулярны друг другу: $\mathbf{E} \perp d\mathbf{l}$. Поскольку $d\mathbf{l}$ принадлежит эквипотенциальной поверхности, вектор \mathbf{E} перпендикулярен этой поверхности. Что и требовалось доказать.

Уравнения Пуассона и Лапласа.

Пусть распределение объемной плотности электрического заряда в пространстве описывается функцией $\rho(x, y, z)$. Как по известному распределению зарядов в пространстве найти потенциал $\varphi(x, y, z)$ электростатического поля этих зарядов?

Воспользуемся теоремой Гаусса в дифференциальной форме (3.4):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

а также связью между напряженностью \mathbf{E} и потенциалом φ поля (9.4):

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

В координатной записи эти равенства имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Подставляя компоненты E_x , E_y , E_z вектора напряженности из второго уравнения в первое, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}, \quad (9.5)$$

Уравнение (9.5) называется *уравнением Пуассона* (1781–1840). В случае, когда $\rho = 0$, оно переходит в *уравнение Лапласа* (1749–1827):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (9.6)$$

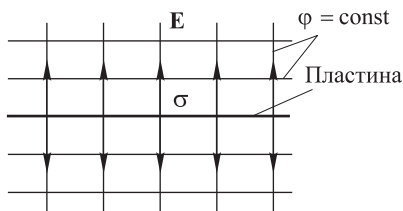


Рис. 28

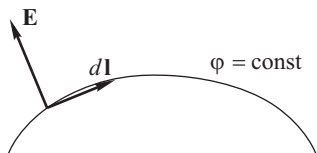


Рис. 29

Решение уравнений (9.5) и (9.6) позволяет по заданному распределению $\rho(x, y, z)$ объемной плотности заряда в пространстве найти потенциал электростатического поля $\varphi(x, y, z)$, а затем, при необходимости, рассчитать и напряженность поля. При заданных граничных условиях дифференциальные уравнения (9.5) и (9.6) имеют единственные решения.

С помощью оператора Лапласа Δ , который можно представить как скалярное произведение оператора набла самого на себя:

$$\Delta = \nabla^2 = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

уравнения (9.5) и (9.6) записываются в компактной форме:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\varphi = 0.$$

§ 10. Граничные условия для вектора напряженности электрического поля

Пусть имеются две граничащие между собой среды 1 и 2, каждая из которых может или проводить электрический ток или быть диэлектрической; среда может также граничить с вакуумом. На поверхности раздела (границе) двух сред 1 и 2 распределен с поверхностной плотностью σ электрический заряд (рис. 30); \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — векторы напряженности электрического поля первой и второй среды в точках, расположенных близко к границе раздела. Найдём связь между тангенциальными и нормальными составляющими (компонентами) векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 .

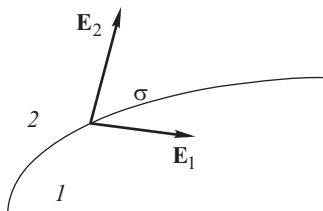


Рис. 30

Граничные условия для тангенциальной компоненты вектора \mathbf{E} . Выберем такой прямоугольный контур $ABCD$ малых размеров, чтобы стороны AB и CD прямоугольника располагались в средах 1 и 2 на малом расстоянии от границы между средами (рис. 31). Длины сторон прямоугольника равны: $AB = CD = dl$, $AD = BC = h$, причем ширина h прямоугольника много меньше его длины dl : $h \ll dl$ (h — величина более высокого порядка малости по сравнению с dl).

Циркуляция вектора напряженности \mathbf{E} электрического поля по произвольному замкнутому контуру, в том числе, по контуру $ABCD$, равна нулю:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} dl = 0.$$

Представим интеграл по контуру $ABCD$ в виде суммы четырех слагаемых — интегралов по каждой из четырех сторон AB , BC , CD ,

DA прямоугольника. В силу условия $h \ll dl$ величиной интегралов вдоль сторон DA и BC пренебрежем по сравнению с интегралами вдоль сторон AB и CD , а их, в свою очередь, заменим скалярными произведениями векторов напряженности \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на векторы элементарных перемещений $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ вдоль сторон AB и CD , учитывая при этом, что $|d\mathbf{l}_1| = |d\mathbf{l}_2| = dl$. Итак, циркуляция вектора \mathbf{E} по контуру $ABCD$ равна

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_{AB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \oint_{BC} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \oint_{CD} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \oint_{DA} \mathbf{E} d\mathbf{l} \approx \\ \approx \oint_{AB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \oint_{CD} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{l}_2 = -E_{1\tau} dl + E_{2\tau} dl = 0,$$

здесь $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ — проекции векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на направление единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, лежащего на касательной к поверхности раздела сред и сонаправленного с вектором перемещения $d\mathbf{l}_2$ (рис. 31).

Из последнего равенства получаем *граничные условия для тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} :*

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (10.1)$$

Условие (10.1) означает, что при переходе через границу раздела двух сред тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} не испытывает скачка, а изменяется непрерывно.

Граничные условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{E} . Чтобы установить связь между нормальными компонентами вектора \mathbf{E} по разные стороны границы двух сред, воспользуемся теоремой Гаусса. В качестве замкнутой поверхности интегрирования возьмем поверхность прямого цилиндра, основания которого расположены по разные стороны поверхности раздела сред 1 и 2, параллельны ей и имеют бесконечно малую площадь dS . Векторы $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$ элементарных площадок, которыми являются основания цилиндра, перпендикулярны поверхности раздела сред 1 и 2 (рис. 32). Высоту цилиндра устремим к нулю, так чтобы потоком вектора \mathbf{E} через его боковую поверхность можно было пренебречь по сравнению с потоком через основания. Участок поверхности раздела

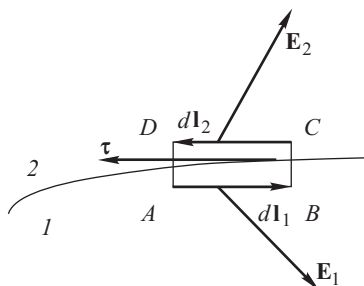


Рис. 31

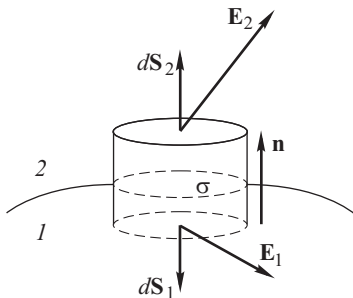


Рис. 32

двух сред, расположенный внутри цилиндра, имеет площадь, практически равную площади оснований dS , на нем сосредоточен заряд σdS . Согласно теореме Гаусса, поток вектора напряженности через поверхность цилиндра S равен деленному на ε_0 заряду σdS , расположенному внутри цилиндра:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0},$$

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} &= \oint_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S} + \oint_{\text{бок}} \mathbf{E} d\mathbf{S} \approx \oint_{\text{осн}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \mathbf{E}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{S}_2 = \\ &= -E_{1n} dS + E_{2n} dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

В процессе преобразований было учтено, что так как основания цилиндра являются элементарными площадками, то поток через основания равен сумме скалярных произведений векторов напряженности \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на векторы элементарных площадок $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$ соответственно. Скалярные произведения $\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{E}_2 d\mathbf{S}_2$ были представлены с помощью проекций E_{1n} и E_{2n} векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на направление общей нормали \mathbf{n} к основаниям цилиндра, проведенной из первой среды во вторую (рис. 32).

Из последнего равенства получим *граничные условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{E}* :

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (10.2)$$

Согласно (10.2) при переходе через границу раздела сред нормальная компонента вектора напряженности \mathbf{E} испытывает скачок, величина которого определяется поверхностной плотностью заряда σ .

§ 11. Потенциал и напряженность поля электрического диполя

Электрическим диполем называется система двух равных по величине, противоположных по знаку зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на некотором фиксированном расстоянии l друг от друга.

Дипольным моментом электрического диполя называется вектор \mathbf{p} , равный

$$\mathbf{p} = ql, \quad (11.1)$$

где q — модуль каждого из зарядов диполя, \mathbf{l} — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному.

Определение (11.1) полностью соответствует приведенному ранее определению (8.4) дипольного момента произвольной системы зарядов. Действительно, если система состоит из двух зарядов $+q$ и $-q$, то дипольный момент такой системы в соответствии с (8.4) равен

$$\mathbf{p} = q\mathbf{R}_1 - q\mathbf{R}_2 = q(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = ql,$$

где \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 — радиусы-векторы, проведенные из некоторой точки отсчета O к зарядам $+q$ и $-q$; разность векторов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 равна вектору \mathbf{l} , проведенному от отрицательного заряда к положительному (рис. 33).

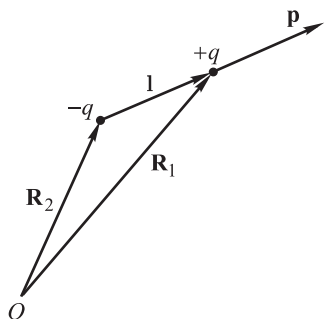


Рис. 33

Точечным электрическим диполем называется диполь, размер которого l мал по сравнению с расстоянием, на котором определяется поле диполя.

Потенциал электрического поля точечного диполя.

Рассмотрим точечный диполь, дипольный момент которого равен \mathbf{p} . Нас интересует потенциал φ поля диполя в точке A , расположенной на расстоянии r от центра диполя, причем r много больше l — расстояния между зарядами $-q$ и $+q$, составляющими диполь.

Направим координатную ось z вдоль оси диполя в направлении от отрицательного заряда к положительному. Угол между осью z и радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным из центра диполя в точку наблюдения A , равен θ ; r_+ и r_- — расстояния между зарядами $+q$ и $-q$ и точкой A . Ввиду малости l по сравнению с расстоянием r ($l \ll r$) можно считать, что углы, под которыми видна точка A из точек, где расположены заряды $-q$ и $+q$, приблизительно равны друг другу и углу θ ; разность расстояний r_- и r_+ равна $l \cos \theta$; произведение $r_+ r_-$ можно заменить на величину r^2 . С учетом всех сделанных замечаний рассчитаем потенциал φ в точке наблюдения A как алгебраическую сумму потенциалов зарядов $+q$ и $-q$:

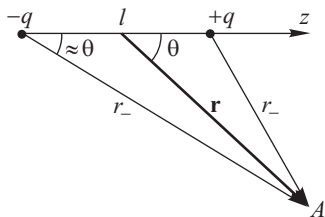


Рис. 34

$$\varphi = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = \frac{kq(r_- - r_+)}{r_+ r_-} \approx \frac{kql \cos \theta}{r^2} = \frac{kp \cos \theta}{r^2} = k \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3}.$$

Итак, потенциал электрического поля точечного диполя равен

$$\varphi = k \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3}, \quad (11.2)$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, $\mathbf{p} \mathbf{r}$ — скалярное произведение дипольного момента \mathbf{p} на радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный от диполя в точку наблюдения.

Полученное выражение (11.2) позволяет рассчитать потенциал φ поля диполя в точке A , положение которой в пространстве задано радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным в эту точку из центра диполя. Потенциал φ определяется величиной дипольного момента p , расстоянием r до точки наблюдения и углом θ между осью диполя и радиусом-вектором \mathbf{r} . Формула (11.2) является частным случаем выражения

(8.3) для потенциала поля произвольной системы зарядов на большом удалении.

Напряженность поля точечного диполя. Для определения напряженности поля диполя воспользуемся формулами (9.1)–(9.3), устанавливающими связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Рассмотрим диполь с моментом \mathbf{p} и точку наблюдения A , положение которой в пространстве задано радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным в эту точку из центра диполя под углом θ к его оси (рис. 35). Расстояние r много больше размеров диполя ($r \gg \gg l$), так что диполь можно считать точечным. Поместим вспомогательную декартову систему координат $x'Ay'$ в плоскости, проходящей через ось диполя и радиус-вектор \mathbf{r} таким образом, что начало системы координат совпадает с точкой наблюдения A , ось Ax' направлена вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} , ось Ay' перпендикулярна \mathbf{r}' .

Пусть \mathbf{E} — напряженность поля диполя в точке A . В силу цилиндрической симметрии электрического поля рассматриваемой системы двух зарядов (это поле симметрично относительно прямой, совпадающей с осью диполя) вектор напряженности \mathbf{E} в точке A лежит в плоскости, проходящей через ось диполя. Проекцию на ось Ax' вектора \mathbf{E} обозначим через E_r и вычислим ее в соответствии с формулой (9.1) как производную потенциала $\varphi = kp \cos \theta / r^2$ по координате x' , или, что то же самое, как производную потенциала φ по переменной r , поскольку приращение координаты x' равно приращению r ($\partial x' = \partial r$):

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2kp \cos \theta}{r^3}. \quad (11.3)$$

Проекцию на ось Ay' вектора \mathbf{E} обозначим через E_θ и вычислим как производную потенциала $\varphi = kp \cos \theta / r^2$ по координате y' , учитывая, что бесконечно малое приращение

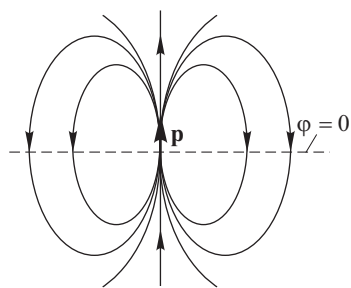


Рис. 36

координаты y' можно выразить через переменные r и θ , а именно:

$$\partial y' = r \partial \theta.$$

Таким образом, проекция E_θ равна

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{kp \sin \theta}{r^3}. \quad (11.4)$$

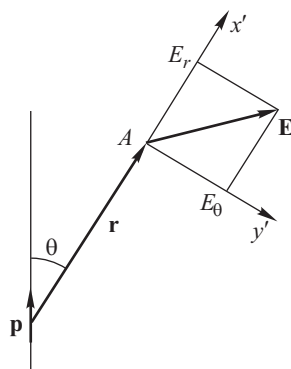


Рис. 35

Если известен дипольный момент \mathbf{p} , по формулам (11.3) и (11.4) можно рассчитать компоненты E_r и E_θ вектора напряженности \mathbf{E} поля диполя в любой достаточно удаленной точке A пространства. Картина силовых линий поля точечного диполя представлена на рис. 36. Штриховая прямая обозначает эквипотенциальную поверхность, для которой $\varphi = 0$.

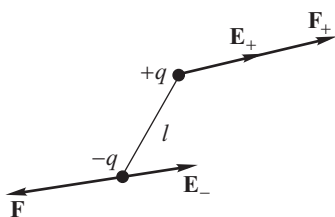
§ 12. Диполь во внешнем электрическом поле: сила, момент сил, потенциальная энергия

Сила, действующая на диполь. Рассмотрим находящийся во внешнем электрическом поле точечный электрический диполь, момент которого $p = ql$, где q — модуль каждого из двух точечных зарядов противоположного знака, составляющих диполь, l — расстояние между зарядами (рис. 37). Рассчитаем действующую на диполь силу \mathbf{F} как сумму сил $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}_-$, действующих со стороны внешнего поля на положительный и отрицательный заряды:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q\mathbf{E}_+ - q\mathbf{E}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-),$$

здесь \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- — напряженность внешнего поля в точках расположения положительного $+q$ и отрицательного $-q$ зарядов соответственно.

Представим разность векторов \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- в следующем виде:



$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-}{l} l \approx \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} l.$$

В преобразованиях было учтено, что расстояние l между зарядами мало, так что величину $(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-)/l$ можно приблизительно считать равной производной $\partial \mathbf{E} / \partial l$ напряженности поля \mathbf{E} по направлению оси диполя.

Напомним, что производная векторной функции координат $\mathbf{E}(x, y, z)$ по направлению, заданному некоторой прямой, равна пределу отношения приращения функции $\Delta \mathbf{E}$, взятой в двух близко расположенных точках этой прямой, к расстоянию l между этими точками при l стремящемся к нулю:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{E}}{l}.$$

Итак, действующая на диполь сила \mathbf{F} равна

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \approx q \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} l = p \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}. \quad (12.1)$$

В однородном поле вектор напряженности \mathbf{E} одинаков во всех точках пространства, так что производная по любому направлению вектора \mathbf{E} равна нулю. Следовательно, в однородном поле равна нулю сила \mathbf{F} , действующая на диполь (см. (12.1)).

Момент сил, действующий на диполь. Допустим, что точечный диполь, момент которого $p = ql$, где q — модуль каждого из зарядов, составляющих диполь, l — расстояние между ними, находится во внешнем электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} , причем поле можно считать практически однородным на расстояниях порядка l . Силы, действующие на положительный и отрицательный заряды диполя, соответственно равны: $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$. Пусть \mathbf{r}_+ и \mathbf{r}_- — радиус-векторы, проведенные из некоторой точки O к положительному и отрицательному зарядам диполя (рис. 38). Рассчитываемый относительно точки O момент сил, действующих на диполь, равен сумме моментов сил, приложенных со стороны внешнего поля к каждому из зарядов:

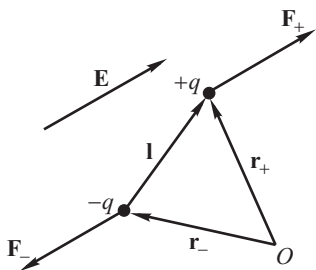


Рис. 38

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= [\mathbf{r}_+, \mathbf{F}_+] + [\mathbf{r}_-, \mathbf{F}_-] = [\mathbf{r}_+, q\mathbf{E}] + [\mathbf{r}_-, -q\mathbf{E}] = \\ &= [q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-), \mathbf{E}] = [ql, \mathbf{E}] = [\mathbf{p}, \mathbf{E}].\end{aligned}$$

В преобразованиях было учтено, что разность $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ равна вектору \mathbf{l} , проведенному от отрицательного заряда к положительному, $ql = \mathbf{p}$ — вектор дипольного момента.

Итак, момент сил \mathbf{M} , действующий на диполь со стороны внешнего электрического поля, равен векторному произведению дипольного момента \mathbf{p} на напряженность поля \mathbf{E} в той точке поля, где расположен диполь:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}]. \quad (12.2)$$

Из рис. 38 видно, что под действием момента сил \mathbf{M} свободный диполь будет вращаться и стремиться перейти в такое положение, при котором его ось параллельна линиям напряженности внешнего поля, а дипольный момент \mathbf{p} расположен параллельно вектору напряженности \mathbf{E} внешнего поля ($\mathbf{p} \uparrow \mathbf{E}$).

Энергия диполя во внешнем поле. Вновь рассмотрим точечный электрический диполь во внешнем электрическом поле.

Потенциал φ электростатического поля равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в поле. Потенциальная энергия W_q заряда q , находящегося в электрическом поле, в q раз отличается от энергии единичного положительного заряда:

$$W_q = q\varphi.$$

Диполь — это система из двух зарядов: $+q$ и $-q$. Потенциальная энергия диполя, помещенного во внешнее поле, равна сумме потенциальных энергий каждого из зарядов:

$$W = W_q + W_{-q} = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где φ_+ и φ_- — потенциал поля в точках расположения положительного и отрицательного зарядов соответственно. Учтем, что расстояние l между зарядами мало, и выразим разность потенциалов $\varphi_+ - \varphi_-$ в двух близко расположенных точках внешнего электрического поля через производную $\partial\varphi/\partial l$ потенциала φ этого поля по направлению оси диполя:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{l} l \approx \frac{\partial\varphi}{\partial l} l.$$

Тогда потенциальная энергия диполя равна:

$$W = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q \frac{\partial\varphi}{\partial l} l = p \frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

Пусть \mathbf{E} — вектор напряженности внешнего электрического поля в том месте, где располагается диполь. В соответствии с соотношением, устанавливающим связь между напряженностью поля и его потенциалом (см. формулы (9.1)–(9.3)), проекция E_l вектора напряженности \mathbf{E} на направление оси диполя равна взятой с противоположным знаком производной потенциала φ по этому направлению:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

С учетом этого соотношения потенциальную энергию диполя W можно представить в следующем виде:

$$W = -pE_l = -\mathbf{p}\mathbf{E},$$

где $\mathbf{p}\mathbf{E} = pE_l$ — скалярное произведение векторов дипольного момента \mathbf{p} и напряженности \mathbf{E} , равное произведению модуля p дипольного момента и проекции напряженности E_l на направление оси диполя.

Из соотношения (12.3) следует, что энергия диполя в электрическом поле минимальна, если вектор \mathbf{p} сонаправлен с вектором \mathbf{E} , то есть $\mathbf{p} \uparrow\uparrow \mathbf{E}$. Положение диполя, в котором векторы дипольного момента \mathbf{p} и напряженности поля \mathbf{E} сонаправлены, соответствует минимуму энергии системы и поэтому является положением устойчивого равновесия. Если изменить направление дипольного момента, возникнет момент сил, стремящийся вернуть диполь в прежнее положение.

Задачи

1.1. В вершинах квадрата со стороной A находятся одинаковые одноименные заряды, равные q . Какой заряд Q противоположного знака необходимо поместить в центре квадрата, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

1.2. Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем, если расстояние между зарядом и диполем равно d , а дипольный момент \mathbf{p} направлен вдоль соединяющей их прямой.

1.3. Тонкий диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ . Определить напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии d от диска, на перпендикуляре, проходящем через центр диска.

1.4. Три концентрические тонкие металлические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящиеся в вакууме, заряжены соответственно зарядами Q_1, Q_2, Q_3 . В некоторой точке A между первой и второй сферами измеряют потенциал. Найти изменение потенциала в этой точке, если вторую и третью сферы замкнуть между собой.

1.5. Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E = 30$ кВ/см, диаметр проводов $d = 1$ см, расстояние между проводами $b = 5$ м.

1.6. С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R , чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0 ? Здесь θ — полярный угол сферической системы координат с началом в центре сферы. Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 13. Свойства проводников в электрическом поле

Предположим, что некоторое тело находится во внешнем электрическом поле. *Микрополем* $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ называется вектор напряженности электрического поля, которое существует в данной точке тела в данный момент времени и представляет собой сумму напряженностей внешнего поля и поля всех заряженных частиц (электронов, атомных ядер), из которых состоит тело. Даже если внешнее поле остается неизменным во времени, микрополе быстро меняется благодаря непрерывному хаотическому тепловому движению заряженных частиц. Оно испытывает резкие изменения и при переходе от одной точки пространства к другой. Величина микрополя достигает огромных значений вблизи мест локализации атомных ядер, электронов и резко падает в промежутках между заряженными частицами. Таким образом, микрополе является пространственно неоднородным, его неоднородность проявляется на расстояниях порядка размера атома.

Точное измерение или вычисление микрополя не представляется возможным на практике. Кроме того, знание микрополя не является необходимым для решения задач макроскопической электродинамики. В дальнейших рассуждениях, говоря о напряженности \mathbf{E} электрического поля в веществе, мы будем иметь ввиду усредненное микрополе:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{\text{микро}} \rangle. \quad (13.1)$$

В выражении (13.1) угловые скобки означают усреднение по времени и по физически бесконечно малому объему тела, под которым мы понимаем такую часть занятого телом пространства, линейные размеры которой много больше размеров атома, но много меньше характерных расстояний, на которых изменяется поле \mathbf{E} .

Поле \mathbf{E} , определяемое выражением (13.1), называют также *электрическим макрополем*.

Электростатическая индукция. В отсутствие внешнего электрического поля положительные и отрицательные заряды микроскопических частиц, из которых состоит тело, компенсируют друг друга, т.е. суммарный заряд любого физически бесконечно малого объема равен нулю. При внесении тела в электрическое поле отрицательно заряженные частицы (например, электроны) смещаются в направлении против поля, а положительно заряженные частицы (атомные ядра, положительные ионы) — по направлению поля. Происходит частичное

разделение положительных и отрицательных зарядов в пространстве. В различных частях тела, в частности, на его поверхности, появляются макроскопические заряды. Явление возникновения макроскопических зарядов противоположных знаков внутри тела и на его поверхности под действием внешнего электрического поля называется *электростатической индукцией*.

Макроскопические заряды образуются благодаря пространственному разделению микроскопических заряженных частиц вещества. Возникающие под действием внешнего поля макроскопические заряды называются *индукционными*.

Индукционные заряды создают дополнительное поле, которое накладывается на внешнее поле. Полное электрическое поле в любой точке пространства, в том числе, внутри тела, представляет собой суперпозицию внешнего поля $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ и поля индукционных зарядов $\mathbf{E}_{\text{инд}}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{внешн}} + \mathbf{E}_{\text{инд}}. \quad (13.2)$$

Если известно внешнее поле и пространственное распределение индукционных зарядов, напряженность электрического поля которых поддается расчету, этого достаточно для вычисления по формуле (13.2) полного электрического поля \mathbf{E} в любой точке пространства, в том числе, внутри тела.

Если в проводниках имеются свободные заряженные частицы — так называемые носители электрического тока (например, электроны), которые в пределах тела могут перемещаться на любые расстояния, то в диэлектриках свободных заряженных частиц нет. Под действием внешнего поля электроны, атомные ядра, ионы в диэлектрике могут смещаться лишь на расстояния порядка размеров атома. В этом состоит основное различие в свойствах проводников и диэлектриков, помещенных в электрическое поле.

Свойства проводников в электрическом поле. Рассмотрим основные свойства, характеризующие проводники в электрическом поле.

1. На поверхности проводника, помещенного в электрическое поле, возникают макроскопические положительные и отрицательные индукционные заряды. Их появление обусловлено пространственным разделением имеющихся в веществе микроскопических положительных и отрицательных зарядов, которые в отсутствие внешнего поля компенсируют друг друга. В металлических проводниках свободные электроны смещаются в направлении, противоположном вектору напряженности электрического поля. Положительно заряженные атомные ядра и ионы оказываются частично лишенными своей электронной оболочки, «оголенными», так что их положительный заряд не компенсируется отрицательным зарядом электронов. В результате на поверхности проводника появляются макроскопические отрицательные и положительные заряды (рис. 39).

2. Напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю; объемная плотность ρ макроскопических зарядов внутри проводника также равна нулю.

Проводники обладают огромным, практически неограниченным запасом свободных зарядов — носителей электрического тока. Если напряженность электрического поля внутри проводника отлична от нуля, при наличии свободных зарядов в проводнике обязательно должен течь электрический ток. В электростатике изучают стационарное (неизменное во времени) распределение электрических зарядов в телах и при этом полагают, что тока, который привел к такому распределению зарядов в проводнике, уже нет, а это возможно лишь при условии равенства нулю напряженности электрического поля внутри проводника:

$$\mathbf{E} = 0.$$

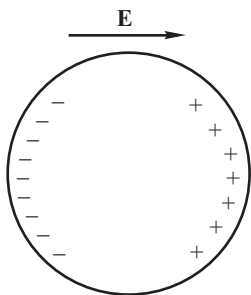


Рис. 39

Из теоремы Гаусса для вектора напряженности \mathbf{E} в дифференциальной форме, согласно которой $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, где ρ — объемная плотность заряда, при выполнении условия $\mathbf{E} = 0$ следует, что объемная плотность ρ макроскопических зарядов также равна нулю: $\rho = 0$. Таким образом, макроскопические заряды внутри проводника отсутствуют.

3. Потенциал φ электрического поля во всех точках проводника одинаков. Объем проводника является эквипотенциальным объемом, его поверхность — эквипотенциальной поверхностью.

Доказательство этих утверждений сводится к следующему. Разность потенциалов в двух произвольно выбранных точках 1 и 2 проводника равна работе сил поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из одной точки в другую (см. (7.6)):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Поскольку напряженность поля \mathbf{E} внутри проводника равна нулю, правая часть рассматриваемого выражения равна нулю. Следовательно, потенциалы φ_1 и φ_2 равны: $\varphi_1 = \varphi_2$. Точки 1 и 2 выбраны произвольно, поэтому можно утверждать, что потенциал всех точек проводника одинаков.

4. Вектор напряженности \mathbf{E} электрического поля снаружи проводника в непосредственной близости от его поверхности перпендикулярен к этой поверхности. Модуль вектора напряженности равен

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (13.3)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Ранее было показано (см. § 9), что вектор напряженности \mathbf{E} в любой точке электрического поля перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку. Поскольку поверхность проводника является эквипотенциальной, вектор \mathbf{E} перпендикулярен к этой поверхности.

Найдем величину напряженности поля снаружи расположенного в вакууме проводника вблизи его поверхности, используя граничные условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{E} (см. (10.2)):

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (13.4)$$

Здесь E_{2n} — нормальная компонента вектора напряженности поля \mathbf{E} снаружи проводника (проекция вектора \mathbf{E} на направление внешней нормали \mathbf{n} к поверхности проводника), при этом $E_{2n} = E$, так как поле \mathbf{E} снаружи проводника перпендикулярно к его поверхности, и тангенциальная компонента $E_{2\tau}$ этого поля равна нулю; E_{1n} — нормальная компонента вектора напряженности поля внутри проводника, при этом $E_{1n} = 0$, так как поле внутри проводника отсутствует; σ — поверхностная плотность заряда; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности раздела между проводником и вакуумом (рис. 40). Доказываемое выражение (13.3) непосредственно вытекает из граничного условия (13.4) при $E_{2n} = E$ и $E_{1n} = 0$:

$$E_{2n} - E_{1n} = E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Соотношение (13.3) можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}. \quad (13.5)$$

5. Найдем силу, действующую на единицу площади поверхности заряженного проводника.

Рассмотрим небольшой участок поверхности площади ΔS (назовем его площадкой ΔS). Поверхностная плотность заряда на рассматриваемом участке приблизительно постоянна и равна σ (рис. 41). Напряженность поля \mathbf{E} снаружи проводника вблизи площадки ΔS можно вычислить по формуле (13.5).

Вектор \mathbf{E} представим как сумму сонаправленных векторов \mathbf{E}_0 и $\mathbf{E}_{\Delta S}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\Delta S}. \quad (13.6)$$

Здесь $\mathbf{E}_{\Delta S}$ — напряженность поля, создаваемая заряженной площадкой ΔS ; \mathbf{E}_0 —

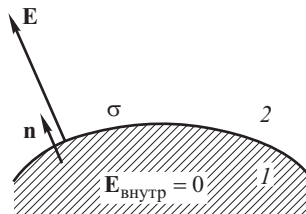


Рис. 40

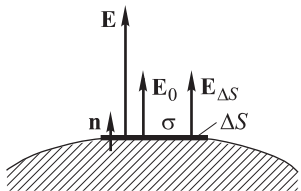


Рис. 41

напряженность поля, создаваемая всей заряженной поверхностью проводника за исключением площадки ΔS . Поскольку расстояние от точки наблюдения, в которой определяется поле \mathbf{E} , до поверхности проводника можно взять сколь угодно малым (много меньше размеров площадки ΔS), вектор $\mathbf{E}_{\Delta S}$ можно рассчитать по формуле напряженности поля бесконечной заряженной плоскости (см. (6.1)):

$$\mathbf{E}_{\Delta S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}. \quad (13.7)$$

Подставив в равенство (13.6) \mathbf{E} из (13.5) и $\mathbf{E}_{\Delta S}$ из (13.7), получим

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n} = \mathbf{E}_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}. \quad (13.8)$$

Отсюда найдем \mathbf{E}_0 :

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}. \quad (13.9)$$

Поле \mathbf{E}_0 можно рассматривать как внешнее по отношению к расположенной в этом поле площадке ΔS , на которой имеется заряд $\sigma \Delta S$. Сила \mathbf{F} , действующая на площадку ΔS , равна произведению заряда площадки на напряженность внешнего поля:

$$\mathbf{F} = \sigma \Delta S \mathbf{E}_0 = \sigma \Delta S \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Delta S \mathbf{n}, \quad (13.10)$$

где значение \mathbf{E}_0 соответствует выражению (13.9).

Силу $\mathbf{F}_{\text{ед}}$, действующую на единицу площади поверхности проводника, найдем, поделив \mathbf{F} в формуле (13.10) на ΔS :

$$\mathbf{F}_{\text{ед}} = \frac{\mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (13.11)$$

Силу $\mathbf{F}_{\text{ед}}$ можно выразить через напряженность \mathbf{E} электрического поля вблизи поверхности проводника с учетом (13.6):

$$\mathbf{F}_{\text{ед}} = \frac{\varepsilon_0 \sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \mathbf{n}. \quad (13.12)$$

Из формул (13.11) и (13.12) следует, что независимо от того, является ли заряд поверхности проводника положительным или отрицательным, т.е. независимо от знака величины поверхностной плотности заряда σ , сила, приложенная к поверхности, всегда направлена наружу (вдоль вектора нормали \mathbf{n}). Если поверхность проводника заряжена, то приложенные к ней силы стремятся растянуть проводник так, чтобы увеличить его объем.

6. Продолжая рассматривать свойства проводников в электрическом поле, приведем так называемую *теорему Фарадея* (1791–1867), которую можно разделить на две части.

Теорема Фарадея (первая часть). Пусть внутри проводника, помещенного во внешнее электрическое поле, имеется полость (рис. 42); проводник при этом может быть заряженным.

Согласно теореме Фарадея, *электрическое поле внутри расположенной в проводнике полости отсутствует, то есть напряженность поля \mathbf{E} во всех точках полости равна нулю.*

Докажем это утверждение с помощью уравнения Пуассона (9.5):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — потенциал электростатического поля, ρ — объемная плотность заряда. Поскольку электрических зарядов внутри полости нет, т.е. $\rho = 0$, уравнение Пуассона для потенциала φ внутри полости переходит в уравнение Лапласа (9.6):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Граничные условия, при наличии которых решение уравнения Лапласа в данной задаче становится единственным, состоят в том, что потенциал φ постоянен на стенках полости: $\varphi_{\text{ст}} = C = \text{const}$. Допустим, что потенциал $\varphi(x, y, z)$ имеет одно и то же значение во всех точках внутри полости, причем его величина совпадает с потенциалом на стенках: $\varphi(x, y, z) = C$. Функция $\varphi(x, y, z) = C$, значение которой одинаково во всех точках полости, удовлетворяет как уравнению Лапласа, так и граничным условиям к нему. Следовательно, эта функция является единственным решением уравнения Лапласа. Потенциал φ во всех точках полости одинаков.

Из равенства (9.4) $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ при $\varphi = \text{const}$ следует:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = 0,$$

то есть напряженность поля внутри полости равна нулю. Что и требовалось доказать.

Теорема Фарадея (вторая часть). Пусть в полости, расположенной внутри проводника, имеется точечный заряд q . Суммарный заряд на стенках полости обозначим $q_{\text{ст}}$. Заряд стенок складывается, вообще говоря, из стороннего заряда (помещенного на проводник извне), и заряда, индуцированного на стенках полем заряда q (рис. 43). На рисунке для определенности заряд q внутри полости взят положительным.

Теорема Фарадея утверждает: а) *суммарная напряженность электрического поля зарядов q и $q_{\text{ст}}$ во всем пространстве вне полости равна нулю;* б) *заряд на стенках полости равен по величине и противоположен по знаку заряду q , расположенному внутри полости:*

$$q_{\text{ст}} = -q.$$

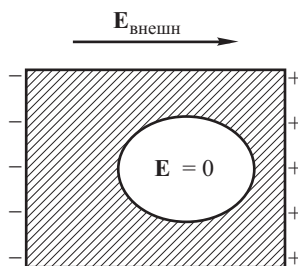


Рис. 42

Доказательство утверждения *а* сводится к следующему. Пусть сначала все пространство вне полости заполнено проводником. Макроскопических зарядов внутри проводника нет (см. свойства 2). Поэтому

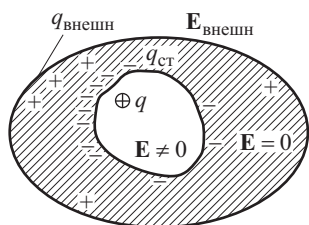


Рис. 43

поле в любой точке пространства, в том числе, и вне полости, порождается только зарядами q и $q_{\text{ст}}$. Напряженность поля в проводнике равна нулю. Это означает, что заряды q и $q_{\text{ст}}$, рассматриваемые совместно, создают такое электрическое поле, что его напряженность во всем пространстве вне полости равна нулю. Частичное удаление электрически нейтрального проводника из окружающего полость пространства, которое приводит к конфигурации, изображенной на рис. 43, не должно вызвать

никаких изменений в распределении зарядов на стенках полости и, следовательно, не должно привести к изменению порождаемого зарядами q и $q_{\text{ст}}$ электрического поля. Таким образом, суммарное поле этих зарядов во всем пространстве вне полости останется равным нулю. Что и требовалось доказать.

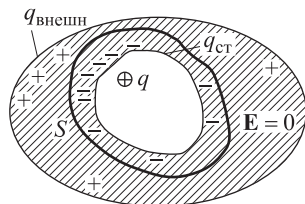
Утверждение пункта *б* доказывается с помощью теоремы Гаусса.

Выберем расположенную внутри проводника замкнутую поверхность S таким образом, чтобы полость с зарядом q оказалась внутри этой поверхности (рис. 44). Согласно теореме Гаусса, поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S равен деленному на ϵ_0 суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q + q_{\text{ст}}}{\epsilon_0}.$$

Так как напряженность поля \mathbf{E} внутри проводника равна нулю, то интеграл в левой части рассматриваемого уравнения также равен нулю. Отсюда следует:

$$q = -q_{\text{ст}},$$



+

Рис. 44

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы Фарадея о том, что напряженность суммарного поля зарядов q и $q_{\text{ст}}$ во всем пространстве вне полости равна нулю, не означает, что внешнее поле проводника $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ вообще отсутствует. Поле $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ создается зарядами $q_{\text{внешн}}$, расположенными на внешней поверхности проводника (см. рис. 43). Заряд $q_{\text{внешн}}$ складывается, вообще говоря, из стороннего заряда, помещенного на проводник извне, и индукционного заряда, возникающего под действием поля расположенного в полости заряда q .

Например, в случае, если проводник, в котором имеется полость с зарядом q , в целом электрически нейтрален, то есть $q_{\text{внешн}} + q_{\text{ст}} = 0$, то $q_{\text{внешн}} = -q_{\text{ст}} = q$. Это означает, что заряд на внешней поверхности проводника равен заряду q , расположенному внутри полости. Заряд $q_{\text{внешн}}$ порождает поле $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ снаружи проводника (рис. 45).

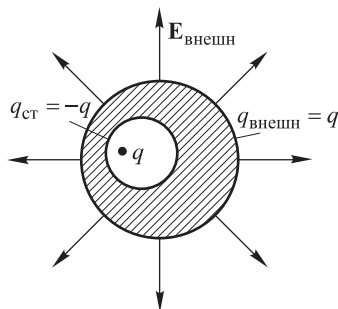


Рис. 45

В соответствии с теоремой Фарадея суммарное поле зарядов q и $q_{\text{ст}}$ равно нулю везде, кроме объема полости, в которой расположен заряд q . В частности, это поле равно нулю на внешней поверхности проводника. Поэтому распределение заряда $q_{\text{внешн}}$ на внешней поверхности проводника определяется только формой самого проводника и не зависит от места локализации заряда q внутри полости и от характера распределения заряда $q_{\text{ст}}$ по стенкам полости. В рассматриваемом примере проводник, изображенный на рис. 45, имеет форму шара. Вследствие сферической симметрии заряд $q_{\text{внешн}}$ распределен по поверхности шара равномерно. Поле $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ снаружи шара в этом случае совпадает с полем однородного (без каких-либо полостей) проводящего заряженного шара, несущего на себе заряд q . При любом изменении положения заряда q внутри полости и сопутствующем перераспределении заряда $q_{\text{ст}}$ по стенкам полости поле $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ снаружи шара меняться не будет.

§ 14. Электрическая емкость. Конденсаторы

Электрическая емкость уединенного проводника. *Электрической емкостью (емкостью)* уединенного проводника называется отношение заряда q проводника к его потенциалу φ (рис. 46):

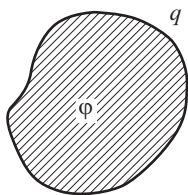


Рис. 46

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (14.1)$$

Как показывает опыт, отношение q/φ есть величина постоянная, определяемая только формой проводника и независимая от величины заряда q . При изменении q потенциал φ меняется так, что отношение q/φ остается неизменным.

Емкость измеряется в *фарадах* (Ф). Емкостью в один фарад (1 Ф) обладает проводник, потенциал которого равен одному вольту (1 В) при сообщении ему заряда величиной в один кулон (1 К):

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}.$$

Пример. Определим емкость проводящего шара радиуса R . Если на шар поместить заряд q , его потенциал будет равен: $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Емкость C шара найдем, поделив q на φ :

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Электрическая емкость конденсатора. Емкость проводника увеличивается при приближении к нему других тел. Качественно это явление можно объяснить на следующем примере. Пусть уединенный

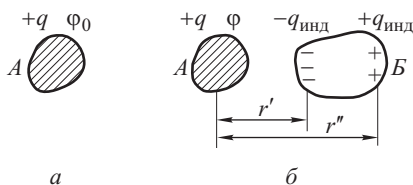


Рис. 47

проводник A , несущий на себе положительный заряд q , имеет потенциал φ_0 (рис. 47 а). Приблизим к этому проводнику другой, незаряженный проводник B . Под действием электрического поля на проводнике B возникнут индукционные заряды. Для приближенной оценки будем считать, что на поверхности проводника B , обращенной к проводнику A и расположенной на расстоянии от последнего приблизительно равном r' , имеется индуцированный полем отрицательный заряд $-q_{\text{инд}}$; на поверхности проводника B , наиболее удаленной от проводника A и расположенной от него на расстоянии приблизительно равном r'' , имеется заряд $+q_{\text{инд}}$ (рис. 47 б). При приближении проводника B к проводнику A потенциал проводника A изменится. Грубо его можно оценить по формуле:

$$\varphi \approx \varphi_0 - \frac{kq_{\text{инд}}}{r'} + \frac{kq_{\text{инд}}}{r''},$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Поскольку $r' < r''$, алгебраическая сумма $-kq_{\text{инд}}/r' + kq_{\text{инд}}/r''$ отрицательна. Поэтому потенциал φ проводника A в присутствии проводника B меньше φ_0 — потенциала проводника A в отсутствие проводника B :

$$\varphi < \varphi_0.$$

Следовательно, в присутствии B емкость проводника A увеличивается:

$$\frac{q}{\varphi} > \frac{q}{\varphi_0}.$$

Конденсатором называется система из двух расположенных рядом проводников (обкладок).

Наличие двух близко расположенных обкладок позволяет добиться следующего. Во-первых, емкость такой системы значительно выше емкости уединенного проводника. Во-вторых, на величину емкости конденсатора практически не оказывают влияния окружающие тела. Для

этого обкладки располагают друг относительно друга таким образом, чтобы электрическое поле конденсатора было сосредоточено внутри его объема. Благодаря практически полному отсутствию поля снаружи конденсатора на приближенном к нему проводнике не возникают индукционные заряды, соответственно, не изменяется потенциал обкладок конденсатора и его емкость.

Устройство и форма конденсатора могут быть различными. *Плоский* конденсатор представляет собой две близко расположенные тонкие металлические пластины, пространство между которыми заполнено диэлектриком (рис. 48а); обкладки *цилиндрического* конденсатора — коаксиальные цилиндрические поверхности, изготовленные из проводящего материала и изолированные друг от друга диэлектриком (рис. 48б); *сферический* конденсатор — две проводящие изолированные друг от друга концентрические сферы близких по величине радиусов (рис. 48в).

Если обкладки конденсатора подключить к источнику постоянного напряжения U , на них возникают равные по величине и противоположные по знаку заряды $+q$ и $-q$. Зарядом конденсатора называют величину q , равную модулю заряда каждой из его обкладок.

Электрической емкостью конденсатора называется величина, равная отношению заряда конденсатора к разности потенциалов его обкладок:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (14.2)$$

где q — заряд конденсатора, $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов обкладок или иначе — напряжение на конденсаторе.

Емкость плоского конденсатора. Пусть расстояние между расположенными в вакууме или воздухе обкладками плоского конденсатора равно d , площадь каждой обкладки — S , заряд конденсатора — q (рис. 49).

Расстояние между обкладками много меньше размеров пластин. В пространстве между пластинами векторы напряженности поля обеих пластин сонаправлены, одинаковы по величине и вычисляются по формуле напряженности поля заряженной плоскости:

$$E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

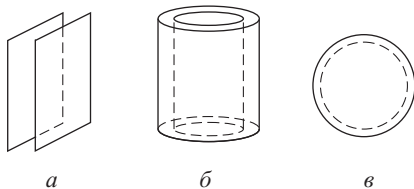


Рис. 48

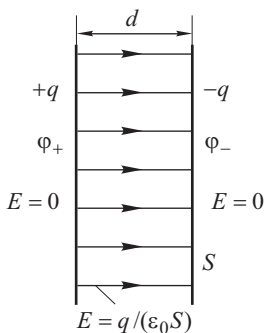


Рис. 49

Напряженность поля конденсатора равна удвоенной напряженности поля одной пластины и составляет величину:

$$E_{\text{конд}} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов φ_+ и φ_- — положительно и отрицательно заряженной обкладок конденсатора — равна (см. (7.6))

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда получим емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (14.3)$$

Емкость сферического конденсатора. Пусть a и b — радиусы внутренней и внешней концентрических проводящих сфер, которые служат обкладками конденсатора. Заряд конденсатора q (рис. 50). Напряженность поля в пространстве между обкладками равна:

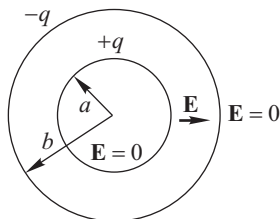


Рис. 50

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где r — расстояние от центра сфер до точки наблюдения.

Разность потенциалов обкладок найдем интегрированием (см. (7.6)):

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 ab}.$$

Емкость сферического конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}. \quad (14.4)$$

Емкость цилиндрического конденсатора. Конденсатор имеет форму прямого цилиндра высотой l . Пусть a и b — радиусы внутренней и внешней цилиндрических обкладок, q — заряд конденсатора. Поле в пространстве между обкладками создается только зарядом внутренней обкладки, его напряженность может быть вычислена по формуле, аналогичной формуле напряженности поля бесконечно длинной заряженной нити:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l},$$

где q/l — заряд, приходящийся на единицу длины цилиндрической обкладки конденсатора, r — расстояние от оси конденсатора до точки наблюдения.

Разность потенциалов между обкладками найдем интегрированием (см. (7.6)):

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r l} dr = \frac{q \ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 l}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}. \quad (14.5)$$

Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.

Последовательное соединение. Два конденсатора емкостью C_1 и C_2 соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U (рис. 51). Покажем, что при последовательном соединении заряды конденсаторов одинаковы. Обозначим заряд первого и второго конденсаторов через q_1 и q_2 соответственно. Знаки зарядов, расположенных на каждой из обкладок обоих конденсаторов, указаны на рис. 51. Электрически изолированный от источника напряжения участок цепи, который включает правую обкладку конденсатора C_1 и левую обкладку конденсатора C_2 , в целом электрически нейтрален, то есть алгебраическая сумма зарядов двух указанных обкладок равняется нулю:

$$-q_1 + q_2 = 0.$$

Отсюда:

$$q_1 = q_2,$$

то есть заряды последовательно соединенных конденсаторов одинаковы.

Рис. 51

Найдем заряд $q = q_1 = q_2$ каждого из последовательно соединенных конденсаторов, если на составленную из них цепь подано напряжение U . Величина U равна сумме напряжений $U_1 = q/C_1$ и $U_2 = q/C_2$ на каждом конденсаторе:

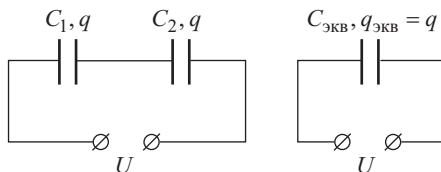


Рис. 52

$$U = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}.$$

Отсюда получаем q :

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U. \quad (14.6)$$

Два последовательно соединенных конденсатора можно заменить одним конденсатором эквивалентной емкости $C_{\text{ЭКВ}}$, величина которой определяется из условия равенства друг другу заряда q системы из двух конденсаторов и заряда $q_{\text{ЭКВ}}$ эквивалентного конденсатора при одинаковом напряжении U , поданном как на систему конденсаторов, так и на эквивалентный конденсатор (рис. 52):

$$q_{\text{ЭКВ}} = q, \quad q_{\text{ЭКВ}} = C_{\text{ЭКВ}} U.$$

Емкость эквивалентного конденсатора с учетом (14.6) равна:

$$C_{\text{ЭКВ}} = \frac{q_{\text{ЭКВ}}}{U} = \frac{q}{U} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (14.7)$$

Параллельное соединение. Параллельное соединение конденсаторов емкостью C_1 и C_2 показано на рис. 53. Пусть на клеммы подано напряжение U . Обкладки, соединенные проводником, имеют один и тот же потенциал. Поэтому и разности потенциалов обкладок конденсаторов (напряжения на конденсаторах) при их параллельном подключении одинаковы:

$$U_1 = U_2 = U.$$

Вычислим заряды конденсаторов:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U.$$

Два параллельно соединенных конденсатора можно заменить одним конденсатором эквивалентной емкости $C_{\text{ЭКВ}}$, определяемой из условия равенства суммарного заряда $q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U$ системы из двух

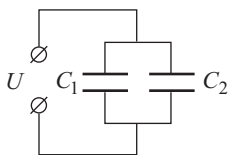


Рис. 53

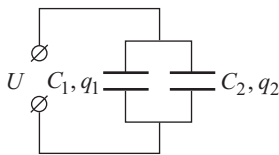
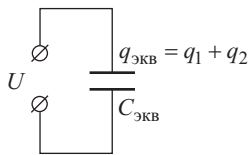


Рис. 54



конденсаторов заряду $q_{\text{ЭКВ}}$ эквивалентного конденсатора при одинаковом напряжении U , поданном как на систему, так и на эквивалентный конденсатор (рис. 54):

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (C_1 + C_2)U, \\ q_{\text{ЭКВ}} &= C_{\text{ЭКВ}} U, \\ q_{\text{ЭКВ}} &= q_1 + q_2. \end{aligned}$$

Отсюда емкость эквивалентного конденсатора равна:

$$C_{\text{ЭКВ}} = \frac{q_{\text{ЭКВ}}}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = C_1 + C_2. \quad (14.8)$$

§ 15. Энергия электрического поля

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов. Рассмотрим систему точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$. Кулоновские силы взаимодействия между зарядами являются консервативными силами. Поэтому для описания свойств электрического поля системы зарядов можно использовать понятие потенциальной энергии. Как указывалось выше, потенциал φ электростатического поля в некоторой его точке представляет собой потенциальную энергию единичного положитель-

ного заряда, помещенного в эту точку. Потенциальная энергия заряда q в точке поля с потенциалом φ равна произведению $q\varphi$.

Потенциальная энергия W системы тел с консервативными силами взаимодействия, в частности, системы точечных зарядов, равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i W_i, \quad (15.1)$$

где W_i — потенциальная энергия i -го заряда в поле, созданном всеми зарядами, кроме i -го; суммирование ведется по всем зарядам системы (см. в кн. 1 «Механика», гл. III, § 29).

Необходимо сделать замечание по поводу понятия потенциальной энергии системы тел. Потенциальная энергия W представляет собой энергию взаимодействия тел (зарядов), входящих в рассматриваемую систему, и не учитывает собственную энергию каждого тела.

Так, изолированный электрический заряд, не взаимодействующий ни с какими другими телами или внешними силовыми полями, обладает своим собственным электрическим полем, ему можно приписать некоторую собственную энергию $W_{\text{соб}}$. Однако эта энергия не входит в выражение для W — потенциальной энергии системы зарядов.

Потенциальная энергия W_i заряда i в поле всех остальных зарядов системы равна:

$$W_i = q_i \varphi_i, \quad (15.2)$$

где φ_i — потенциал поля, созданного всеми зарядами системы, кроме i -го заряда.

Таким образом, выражение для потенциальной энергии W системы точечных зарядов (15.1) с учетом (15.2) имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i. \quad (15.3)$$

Величина W представляет собой энергию взаимодействия системы точечных зарядов.

Энергия заряженного проводника. Рассмотрим уединенный проводник, несущий на себе заряд q и обладающий потенциалом φ . Электрическую энергию такого проводника можно определить, рассчитав работу, которую необходимо затратить, чтобы на первоначально незаряженный проводник поместить заряд q . Представим себе следующий способ зарядки: бесконечно малые порции электрического заряда последовательно переносятся из «бесконечности» на проводник до тех пор, пока его заряд не достигнет величины q . Пусть в данный момент проводник обладает зарядом q' , его потенциал равен φ' (рис. 55). Для квазистатического процесса

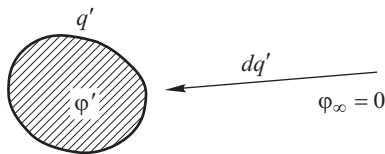


Рис. 55

переноса (то есть для переноса с практически нулевой постоянной скоростью) из «бесконечности» на рассматриваемый проводник малой порции заряда dq' потребуется затратить работу δA , равную по величине и противоположную по знаку работе сил электрического поля, которую они совершат в процессе такого переноса:

$$\delta A = -\delta A_{\text{поля}} = dq'(\varphi' - \varphi_{\infty}) = dq' \varphi' = dq' \frac{q'}{C}, \quad (15.4)$$

где $\varphi_{\infty} = 0$ — потенциал электростатического поля на бесконечно большом удалении от рассматриваемого заряженного проводника. В преобразованиях потенциал φ' проводника был выражен через его заряд q' и емкость C по формуле $\varphi' = q'/C$.

Работу A по переносу на проводник заряда q найдем интегрированием правой части равенства (15.4) по параметру q' в пределах от нуля до q :

$$A = \int \delta A = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}. \quad (15.5)$$

Полученное выражение (15.5) позволяет вычислить энергию заряженного проводника.

Энергия проводника, обладающего зарядом q , потенциалом φ и емкостью C может быть рассчитана с помощью любой из следующих формул, которые получаются из (15.5) с учетом соотношения $q = C\varphi$:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (15.6)$$

Энергия конденсатора. Заряженный конденсатор представляет собой систему двух проводников, один из которых несет заряд q и имеет потенциал φ_+ , другой проводник обладает зарядом $-q$ и характеризуется потенциалом φ_- . Рассчитаем энергию конденсатора как сумму энергий двух заряженных проводников с помощью формулы (15.6):

$$W = \frac{q\varphi_+}{2} - \frac{q\varphi_-}{2} = \frac{q(\varphi_+ - \varphi_-)}{2} = \frac{qU}{2}, \quad (15.7)$$

где $U = \varphi_+ - \varphi_-$ — напряжение на конденсаторе. Учитывая связь между зарядом q , емкостью C и напряжением U конденсатора $C = q/U$, получим из (15.7) следующие формулы для расчета энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (15.8)$$

Энергия электрического поля. Энергию системы электрических зарядов можно выразить через параметры электрического поля, порождаемого этими зарядами. Сделаем это на примере плоского заряженного конденсатора. Воспользуемся формулой (15.8) энергии конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Подставим в него выражение (14.3) для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где S — площадь обкладок, d — расстояние между ними.

Учтем также формулу связи напряжения U и напряженности поля E в применении к плоскому конденсатору:

$$U = Ed,$$

где E — напряженность поля внутри конденсатора. Тогда энергия конденсатора W представляется в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V, \quad (15.9)$$

где $V = Sd$ — объем конденсатора (объем пространства между обкладками).

Поле плоского конденсатора практически полностью сосредоточено внутри конденсатора, между его пластинами. Если пренебречь краевыми эффектами, поле в конденсаторе можно считать однородным: характеристики поля — напряженность, объемная плотность энергии — одинаковы во всех точках пространства, где имеется поле. В связи с этим объемную плотность энергии w поля плоского конденсатора можно вычислить, разделив полную энергию W конденсатора, определяемую по формуле (15.9), на объем V конденсатора:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (15.10)$$

Можно показать, что полученная формула (15.10) объемной плотности энергии справедлива не только для однородного, но и для произвольного электрического поля как его характеристика в точке с напряженностью E .

Задачи

2.1. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки на расстоянии d от ее центра в точке A помещен точечный заряд q . Радиус внутренней поверхности оболочки — r , внешней — R , $d < r$. Найти: 1) поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки; 2) потенциал оболочки, принимая за нуль потенциал бесконечно удаленной точки; 3) поверхностную плотность индуцированных зарядов на внутренней поверхности оболочки в точках B и C , лежащих на прямой, проходящей через центр оболочки и точку A .

2.2. Металлический шар радиусом R имеет заряд Q . Точечный заряд q помещен на расстоянии d от центра шара, $d > R$. Найти потенциал шара φ .

2.3. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластины расположены в вакууме параллельно друг другу. Полный заряд (то есть сумма зарядов на обеих поверхностях пластины), приходящийся на единицу площади первой пластины, равен q_1 , второй пластины — q_2 . Определить поверхностную плотность электрических зарядов на пластинах, а также напряженность электрического поля между пластинами и во внешнем пространстве.

2.4. Найти взаимную емкость системы из двух расположенных в вакууме одинаковых металлических шариков радиуса a , расстояние между центрами которых равно b , причем $b \gg a$.

2.5. Считая, что масса электрона определяется из соотношения $W = mc^2$, где W — электростатическая энергия заряда электрона, найти значение радиуса электрона при следующих предположениях: 1) заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью; 2) весь заряд электрона распределен по его поверхности.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 16. Вектор поляризованности и его свойства

Поляризация диэлектриков. *Диэлектрики* — это вещества, которые из-за отсутствия в них свободных зарядов, которые могут служить носителями тока, не проводят электрический ток.

Химический состав и структура диэлектриков многообразны. В качестве простой модели, удобной для выяснения основных свойств диэлектриков, рассмотрим диэлектрики только двух типов, а именно, вещества, состоящие из *полярных* или *неполярных* молекул.

В молекуле суммарный отрицательный заряд электронов по модулю равен суммарному положительному заряду всех входящих в ее состав атомных ядер. Каждая молекула является в целом электрически нейтральной. В *неполярной* молекуле пространственное распределение всех имеющихся зарядов таково, что дипольный момент \mathbf{p} молекулы равен нулю. Примером может служить симметричная молекула метана CH_4 (рис. 56). В *полярной* молекуле положительный и отрицательный заряды пространственно разнесены друг относительно друга таким образом, что дипольный момент \mathbf{p} молекулы отличен от нуля. В качестве примера полярной молекулы можно привести несимметричную молекулу воды H_2O , в которой электроны атомов водорода смещены в направлении к атому кислорода. В результате положительный и отрицательный заряды данной молекулы оказываются частично разделенными в пространстве (рис. 57). На рисунке стрелкой показано направление дипольного момента \mathbf{p} молекулы воды.

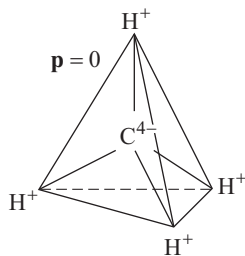


Рис. 56

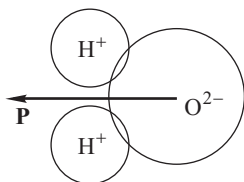


Рис. 57

Диэлектрик, как и любое другое вещество, состоит из огромного числа заряженных микроскопических частиц — электронов, ионов, атомных ядер. В отсутствие внешнего электрического поля суммарный заряд всех частиц в любом физически бесконечно малом объеме вещества равен нулю. Дипольный момент любого физически бесконечно малого объема диэлектрика также равен нулю либо из-за того, что дипольный момент каждой

молекулы равен нулю, либо вследствие неупорядоченной хаотической ориентации дипольных моментов, которыми обладают молекулы.

Если поместить диэлектрик в электрическое поле, то происходит пространственное разделение положительных и отрицательных зарядов, в результате на поверхности и, возможно, внутри диэлектрика появляются макроскопические заряды. Изменяются дипольные характеристики вещества. Это явление называется *поляризацией* диэлектриков.

Поляризационными называются макроскопические заряды, возникающие внутри и на поверхности диэлектрика под действием внешнего электрического поля, то есть в результате поляризации. Поскольку в отличие от проводников, где имеются свободные заряды, микроскопические заряды диэлектрика не могут покинуть пределов той молекулы, в состав которой они входят, поляризационные заряды диэлектрика называются и, по сути дела, являются *связанными* зарядами.

В отличие от поляризационных зарядов заряды, помещенные на диэлектрик извне, будем называть *сторонними*.

Отметим, что существуют кристаллические вещества, которые поляризованы, обладают отличным от нуля дипольным моментом и в отсутствие внешнего поля (имеет место самопроизвольная или спонтанная поляризация). Такие вещества называются *сегнетоэлектриками*. Изучение свойств сегнетоэлектриков выходит за рамки данного пособия.

Рассмотрим механизм поляризации диэлектриков.

Поляризация диэлектрика, состоящего из неполярных молекул. В отсутствие внешнего электрического поля суммарный заряд и дипольный момент каждой неполярной молекулы, а также любой части и всего диэлектрика в целом равны нулю. На рис. 58а неполярные молекулы диэлектрика изображены в виде кружков. При

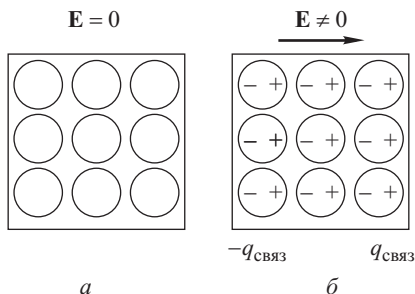


Рис. 58

включении внешнего электрического поля с напряженностью E каждая молекула диэлектрика поляризуется: положительно заряженные частицы (атомные ядра) смещаются в направлении по полю, отрицательно заряженные частицы (электроны) — в направлении против поля. Происходит пространственное разделение положительных и отрицательных зарядов. В результате

поляризации дипольный момент молекулы становится отличным от нуля. В этих условиях, как видно из рис. 58б, поверхность образца диэлектрика становится заряженной, возникает макроскопический

заряд. Та часть поверхности, в направлении которой под действием поля смещаются положительные заряды, оказывается заряженной положительно. На противоположной стороне диэлектрика возникает отрицательный макроскопический заряд. Часть поверхности остается электрически нейтральной. Если диэлектрик неоднородный, т.е. свойства диэлектрического вещества неодинаковы в разных его точках, макроскопические электрические заряды могут появиться не только на поверхности диэлектрика, но и внутри него.

Поляризация диэлектрика, состоящего из полярных молекул.

Молекула диэлектрика в целом является электрически нейтральной, однако ее положительный и отрицательный заряды распределены в пространстве таким образом, что дипольный момент молекулы отличен от нуля (рис. 59а, вектор дипольного момента условно обозначен стрелкой). В отсутствие внешнего электрического поля вследствие хаотического теплового движения молекул не существует преимущественного направления, вдоль которого ориентировались бы их дипольные моменты. Дипольный момент любого физически бесконечно малого объема диэлектрика и всего тела в целом равны нулю.

Пусть теперь диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} .

Обозначим дипольный момент отдельной молекулы через \mathbf{p}_i . Поскольку минимуму потенциальной энергии обладающей дипольным моментом системы электрических зарядов (в данном случае, молекулы) соответствует такое ее положение, в котором дипольный момент \mathbf{p}_i параллелен вектору напряженности \mathbf{E} электрического поля ($\mathbf{p}_i \uparrow \uparrow \mathbf{E}$, см. § 12), то под действием внешнего поля молекулы преимущественно ориентируются так, чтобы их дипольные моменты \mathbf{p}_i были направлены вдоль поля (рис. 59б). В результате на поверхности и, вообще говоря, внутри диэлектрика появляются макроскопические электрические заряды. Дипольный момент любого физически бесконечно малого объема и всего диэлектрика в целом становится отличным от нуля. Диэлектрик поляризуется.

Если диэлектрик имеет кристаллическую структуру и его нельзя рассматривать как совокупность изолированных друг от друга, свободно движущихся молекул, то и в этом случае сопровождающие поляризацию явления (возникновение макроскопических поляризационных зарядов, изменение дипольных характеристик вещества) объясняются пространственным разделением положительных и отрицательных мик-

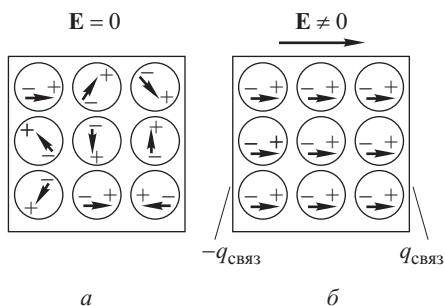


Рис. 59

микропических зарядов под действием внешнего поля. Условно кристалл можно рассматривать как одну большую молекулу, в которой в отсутствие внешнего поля положительно и отрицательно заряженные частицы (например, ионы) распределены в пространстве равномерно, так что суммарный заряд и дипольный момент любого физически бесконечно малого объема диэлектрика равны нулю. При включении внешнего поля положительные и отрицательные микропические заряды смещаются в пространстве друг относительно друга в противоположных направлениях. В результате возникает макроскопический поляризационный заряд, и становится отличным от нуля дипольный момент кристалла.

Напряженность поля в диэлектрике. Если учесть, что под действием внешнего электрического поля $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ в диэлектрике возникают связанные макроскопические поляризационные заряды, порождающие собственное электрическое поле, напряженность которого обозначим через $\mathbf{E}_{\text{св}}$, то электрическое поле \mathbf{E} в диэлектрике можно рассматривать как суперпозицию внешнего поля и поля поляризационных зарядов:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{внешн}} + \mathbf{E}_{\text{св}}.$$

Вектор поляризованности \mathbf{P} . Вектор поляризованности \mathbf{P} представляет собой дипольный момент единицы объема вещества диэлектрика.

Более строгое определение вектора \mathbf{P} состоит в следующем. Мысленно выделим в диэлектрике небольшой объем ΔV . Обозначим через \mathbf{p}_i дипольные моменты молекул, расположенных в данном объеме. Вектор поляризованности \mathbf{P} определяется как предел при $\Delta V \rightarrow 0$ отношения суммы дипольных моментов всех молекул в объеме ΔV к величине этого объема:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (16.1)$$

где суммирование ведется по всем молекулам внутри объема ΔV .

Вектор поляризованности \mathbf{P} является локальной характеристикой вещества, он определяет свойства вещества в точке (точнее, физически бесконечно малом объеме) и, вообще говоря, при переходе из одной области диэлектрика в другую может изменяться.

Единица поляризованности — кулон, деленный на метр квадратный (Кл/м^2).

Диэлектрическая восприимчивость вещества. Как показывает опыт, для широкого класса диэлектриков поляризованность \mathbf{P} линейно зависит от напряженности поля \mathbf{E} в веществе. Для изотропного однородного диэлектрика связь между поляризованностью \mathbf{P} и напряженностью поля \mathbf{E} имеет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (16.2)$$

где κ — безразмерный коэффициент пропорциональности, который называется *диэлектрической восприимчивостью* вещества.

Напомним, что диэлектрик называется изотропным, если все направления в нем одинаковы относительно свойств вещества. В частности, соотношение (16.2) между поляризованностью \mathbf{P} и напряженностью поля \mathbf{E} в изотропном диэлектрике не зависит от направления вектора \mathbf{E} в пространстве и в веществе. Диэлектрик является однородным, если свойства всех его пространственных частей одинаковы. В частности, для всех точек диэлектрика справедливо соотношение (16.2) с одинаковым коэффициентом пропорциональности κ (κ — константа, которая характеризует все вещество в целом).

В изотропном однородном диэлектрике направления векторов \mathbf{P} и \mathbf{E} совпадают. Существует большое количество кристаллических веществ, у которых векторы \mathbf{P} и \mathbf{E} не являются сонаправленными, а связь между ними устанавливается с помощью тензора диэлектрической восприимчивости. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких диэлектриков, для которых справедливо соотношение (16.2).

Теорема Гаусса для вектора поляризованности. Пусть диэлектрическое вещество помещено в электрическое поле. *Поток вектора поляризованности \mathbf{P} через произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком поляризационному связанному заряду $-q_{св}$, расположенному внутри этой поверхности:*

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -q_{св}. \quad (16.3)$$

Рассмотрим замкнутую поверхность S , расположенную целиком или частично внутри диэлектрика.

Мысленно выделим в диэлектрике небольшой прямой круговой цилиндр высоты δl , основания которого имеют площадь δS и находятся по разные стороны поверхности S (рис. 60). Ось цилиндра параллельна векторам поляризованности \mathbf{P} и напряженности электрического поля \mathbf{E} . Объем выбранного нами цилиндра настолько мал, что вектор поляризованности \mathbf{P} можно считать одинаковым во всех его точках.

Диэлектрик в объеме рассматриваемого цилиндра, также как и во всем теле, поляризован. Векторы дипольных моментов молекул под действием электрического поля ориентированы параллельно оси цилиндра. При этом на основаниях цилиндра возникает поляризационный связанный заряд — на одном основании положительный, на противоположном — отрицательный (см. рис. 60). Обозначим поверхностную плот-

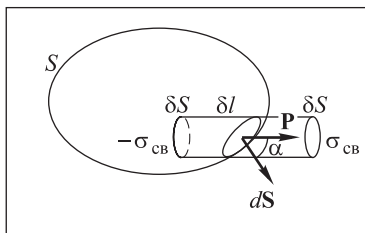


Рис. 60

ность связанного заряда на основаниях цилиндра через $+\sigma_{\text{св}}$ и $-\sigma_{\text{св}}$. В этом случае величина зарядов оснований равна $+\sigma_{\text{св}}\delta S$ и $-\sigma_{\text{св}}\delta S$.

Вычислим дипольный момент $\delta p_{\text{цил}}$ цилиндра двумя способами. Поскольку площади оснований цилиндра малы, заряды $+\sigma_{\text{св}}\delta S$ и $-\sigma_{\text{св}}\delta S$ можно считать точечными. Будем рассматривать цилиндр как диполь, в котором точечные заряды $+\sigma_{\text{св}}\delta S$ и $-\sigma_{\text{св}}\delta S$ расположены на расстоянии δl друг от друга. Дипольный момент равен произведению заряда диполя на расстояние δl между зарядами:

$$\delta p_{\text{цил}} = +\sigma_{\text{св}}\delta S\delta l. \quad (16.4)$$

С другой стороны, дипольный момент цилиндра можно вычислить как произведение поляризованности P (P — это дипольный момент единицы объема вещества) на объем цилиндра $\delta S\delta l$:

$$\delta p_{\text{цил}} = P\delta S\delta l. \quad (16.5)$$

Приравняем вычисленные двумя способами значения дипольного момента рассматриваемого цилиндра (16.4) и (16.5):

$$\sigma_{\text{св}}\delta S\delta l = P\delta S\delta l.$$

Отсюда получим соотношение:

$$\sigma_{\text{св}} = P, \quad (16.6)$$

которое означает, что поверхностная плотность $\sigma_{\text{св}}$ связанного, образовавшегося в результате поляризации диэлектрика заряда на основаниях цилиндра равна поляризованности P вещества в том месте, где расположен цилиндр.

Рассматриваемый цилиндр вырезает на поверхности S элементарную площадку dS . Пусть вектор $d\mathbf{S}$ этой площадки составляет угол α с осью цилиндра и, следовательно, с вектором поляризованности \mathbf{P} (см. рис. 60). Площадь основания цилиндра δS можно выразить через площадь dS и угол α :

$$\delta S = dS \cos \alpha. \quad (16.7)$$

Поляризационный связанный заряд $\delta q_{\text{св}}$ основания цилиндра, расположенного снаружи от поверхности S , с учетом (16.6) и (16.7) равен

$$\delta q_{\text{св}} = \sigma_{\text{св}}\delta S = P dS \cos \alpha = \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (16.8)$$

Соотношение (16.8) означает, что заряд $\delta q_{\text{св}}$ основания цилиндра равен скалярному произведению вектора поляризованности \mathbf{P} на вектор элементарной площадки $d\mathbf{S}$. Такой же по величине, но противоположный по знаку заряд имеется на втором основании цилиндра, расположенном внутри поверхности интегрирования S .

Появление поляризационных зарядов на основаниях рассматриваемого цилиндра можно объяснить с помощью следующей модели. Заряд

$\delta q_{\text{св}}$ в процессе поляризации диэлектрика (разделения микроскопических положительных и отрицательных зарядов при включении внешнего поля) прошел через участок dS замкнутой поверхности S , то есть покинул ограниченный поверхностью S объем. Поскольку диэлектрик в целом и любая его часть, в том числе, рассматриваемый элементарный цилиндр, электрически нейтральны, то такой же по величине, но противоположный по знаку заряд $-\delta q_{\text{св}}$ возник в процессе поляризации на противоположном основании цилиндра; этот заряд остался внутри поверхности S после выхода заряда $\delta q_{\text{св}}$ наружу.

Всю замкнутую поверхность S можно мысленно разбить на элементарные участки dS и построить на каждом из них описанным выше способом элементарный цилиндр, ось которого параллельна вектору \mathbf{P} , а основания располагаются по разные стороны от поверхности S . Связанный заряд, который обозначим через $q_{\text{св.наружн}}$, всех оснований, расположенных снаружи поверхности S , можно вычислить интегрированием правой части выражения (16.8) по этой поверхности:

$$q_{\text{св.наружн}} = \oint_S \delta q_{\text{св}} = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (16.9)$$

Согласно рассматриваемой модели заряд $q_{\text{св.наружн}}$ в процессе поляризации прошел через поверхность S , то есть покинул ограниченный поверхностью S объем. Такой же по величине, но противоположный по знаку заряд $q_{\text{св.внутр}}$ остался внутри поверхности S :

$$q_{\text{св.внутр}} = -q_{\text{св.наружн}} = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (16.10)$$

Переобозначим заряд $q_{\text{св.внутр}}$, расположенный внутри поверхности интегрирования S , как $q_{\text{св}}$ (опустим индекс «внутр»). Тогда из равенства (16.10) получим выражение (16.3) доказываемой теоремы Гаусса для вектора поляризованности \mathbf{P} :

$$q_{\text{св}} = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема Гаусса для вектора поляризованности в дифференциальной форме. Пусть объем части диэлектрика, охватываемый поверхностью интегрирования S , равен ΔV . Связанный заряд, заключенный в этом объеме, обозначим через $\Delta q_{\text{св}}$. Согласно (16.3) теорема Гаусса в интегральной форме для потока вектора поляризованности через рассматриваемую поверхность S имеет вид

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -\Delta q_{\text{св}}.$$

Разделим обе части этого равенства на ΔV и вычислим пределы полученных отношений при стремлении ΔV к нулю:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}}{\Delta V} = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{\text{св}}}{\Delta V}. \quad (16.11)$$

Предел левой части по определению равен дивергенции вектора \mathbf{P} , предел правой части представляет собой объемную плотность поляризационного связанного заряда $\rho_{\text{св}}$ в точке диэлектрика, к которой стягивается поверхность S при стремлении к нулю объема ΔV . Из (16.11) получаем теорему Гаусса для вектора \mathbf{P} в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{св}}. \quad (16.12)$$

Итак, дивергенция вектора поляризованности \mathbf{P} равна взятой с противоположным знаком объемной плотности поляризационного связанного заряда.

Граничные условия для вектора поляризованности \mathbf{P} на поверхности раздела диэлектриков. Рассмотрим поверхность раздела (границу) двух однородных изотропных диэлектрических сред, которые обозначим цифрами 1 и 2 (рис. 61). Среды находятся в электрическом

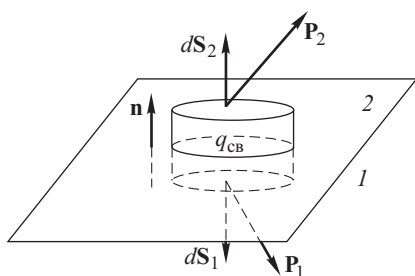


Рис. 61

поле и, следовательно, поляризованы. Поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности раздела диэлектриков обозначим через $\sigma_{\text{св}}$.

Для вывода граничных условий воспользуемся теоремой Гаусса в форме (16.3). В качестве поверхности интегрирования S выберем поверхность прямого цилиндра малого объема, основания которого площадью dS расположены по разные стороны

границы сред 1 и 2 и параллельны поверхности раздела. Высоту цилиндра возьмем настолько малой, что потоком вектора \mathbf{P} через его боковую поверхность можно пренебречь. Внутри рассматриваемого цилиндра расположена площадка dS поверхности раздела сред, на которой имеется связанный заряд $\sigma_{\text{св}} dS$.

Теорема Гаусса для вектора \mathbf{P} имеет вид

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -\sigma_{\text{св}} dS, \quad (16.13)$$

где интеграл вычисляется по поверхности S рассматриваемого цилиндра.

Поток $\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}$ вектора \mathbf{P} через поверхность S равен сумме потока через основания цилиндра $\int_{\text{осн}} \mathbf{P} d\mathbf{S}$ и потока через его боковую поверхность $\int_{\text{бок}} \mathbf{P} d\mathbf{S}$. Величиной последнего, как указывалось выше, можно пренебречь. Основания цилиндра представляют собой элементарные площадки одинаковой площади dS , векторы которых обозначим через $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$. Поток вектора \mathbf{P} через основания цилиндра можно представить в следующем виде:

$$\int_{\text{осн}} \mathbf{P} d\mathbf{S} = \mathbf{P}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{P}_2 d\mathbf{S}_2,$$

где \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 — векторы поляризованности соответственно в первой и второй средах, взятые в произвольных точках оснований рассматриваемого цилиндра. С учетом всех сделанных замечаний левая часть уравнения (16.13), выражающего теорему Гаусса, преобразуется следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = \int_{\text{осн}} \mathbf{P} d\mathbf{S} + \int_{\text{бок}} \mathbf{P} d\mathbf{S} \approx \int_{\text{осн}} \mathbf{P} d\mathbf{S} = \mathbf{P}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{P}_2 d\mathbf{S}_2.$$

Скалярные произведения $\mathbf{P}_1 d\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{P}_2 d\mathbf{S}_2$ выразим через проекции P_{1n} и P_{2n} векторов \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 на общую нормаль \mathbf{n} к поверхности раздела, проведенную из первой среды во вторую (см. рис. 61):

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = \mathbf{P}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{P}_2 d\mathbf{S}_2 = -P_{1n} dS + P_{2n} dS. \quad (16.14)$$

Из уравнения (16.13) с учетом (16.14) получим

$$-P_{1n} dS + P_{2n} dS = -\sigma_{\text{св}} dS.$$

Отсюда найдем связь между нормальными компонентами вектора поляризованности \mathbf{P} при переходе из одной среды в другую, которая называется *граничными условиями для нормальной компоненты вектора \mathbf{P}* :

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{\text{св}}. \quad (16.15)$$

На границе раздела сред нормальная компонента вектора \mathbf{P} испытывает скачок, величина которого определяется поверхностной плотностью связанного заряда $\sigma_{\text{св}}$.

§ 17. Вектор электрической индукции и его свойства

Вектор электрической индукции \mathbf{D} (электрического смещения) определяется выражением:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (17.1)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{P} — вектор поляризованности в рассматриваемой точке вещества.

Как указывалось выше, в однородном изотропном диэлектрике векторы \mathbf{P} и \mathbf{E} связаны соотношением:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E},$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость вещества.

С учетом этого вектор \mathbf{D} можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E},$$

где величина $1 + \kappa$ обозначена буквой ε .

Диэлектрической проницаемостью ε вещества называется величина:

$$\varepsilon = 1 + \kappa, \quad (17.2)$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость.

Диэлектрическая проницаемость ε является безразмерной величиной, $\varepsilon > 1$.

Итак, связь между вектором электрической индукции \mathbf{D} и напряженностью электрического поля \mathbf{E} в однородном изотропном диэлектрике устанавливается с помощью диэлектрической проницаемости среды:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \quad (17.3)$$

Теорема Гаусса для вектора \mathbf{D} . Рассмотрим однородный изотропный диэлектрик, поляризованный под действием электрического поля. В диэлектрике имеются поляризационные (связанные) заряды и, возможно, сторонние заряды. Согласно теореме Гаусса, *поток вектора электрической индукции \mathbf{D} через произвольную замкнутую поверхность S равен стороннему заряду $q_{\text{ст}}$, расположенному внутри этой поверхности:*

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ст}}. \quad (17.4)$$

Доказательство. Воспользуемся интегральной формой теоремы Гаусса для вектора напряженности \mathbf{E} электрического поля:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{ст}} + q_{\text{св}}}{\varepsilon_0}, \quad (17.5)$$

где $q_{\text{ст}} + q_{\text{св}}$ — полный заряд внутри поверхности интегрирования S , равный сумме стороннего $q_{\text{ст}}$ и связанного $q_{\text{св}}$ зарядов. Преобразуем последнее равенство с учетом теоремы Гаусса для вектора \mathbf{P} (см. (16.3)),

согласно которой величину связанного заряда $q_{\text{св}}$ можно выразить через поток вектора поляризованности \mathbf{P} :

$$q_{\text{св}} = - \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Тогда из (17.5) получим

$$\begin{aligned} \oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} - q_{\text{св}} &= q_{\text{ст}}, \\ \oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} &= \oint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} = q_{\text{ст}}. \end{aligned}$$

Величина в скобках под знаком интеграла представляет собой вектор электрической индукции \mathbf{D} . Тем самым утверждение (17.4) теоремы Гаусса для вектора \mathbf{D} доказано.

Теорема Гаусса для вектора \mathbf{D} в дифференциальной форме. Пусть поверхность интегрирования S в (17.4) ограничивает объем ΔV , внутри которого расположен сторонний заряд $\Delta q_{\text{ст}}$:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \Delta q_{\text{ст}}.$$

Разделив обе части равенства на ΔV и вычислив пределы полученных отношений при стремлении ΔV к нулю, найдем:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{\text{ст}}}{\Delta V},$$

Здесь, по определению дивергенции, $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} \right) / \Delta V = \text{div } \mathbf{D}$; $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta q_{\text{ст}} / \Delta V = \rho_{\text{ст}}$ — объемная плотность стороннего заряда. С учетом этих соотношений получаем теорему Гаусса для вектора \mathbf{D} в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{ст}}, \quad (17.6)$$

согласно которой дивергенция вектора \mathbf{D} в некоторой точке диэлектрика равна объемной плотности стороннего заряда в этой точке.

Пример. Целесообразность введения понятия вектора электрической индукции \mathbf{D} при изучении электростатики диэлектриков поясним на следующем примере. Допустим, все пространство заполнено диэлектриком с проницаемостью ε . В некоторой точке пространства находится точечный сторонний заряд $q_{\text{ст}}$. Требуется определить напряженность поля \mathbf{E} в произвольной точке пространства, расположенной на расстоянии r от заряда $q_{\text{ст}}$.

Можно попытаться воспользоваться теоремой Гаусса для вектора \mathbf{E} , выбрав в качестве поверхности интегрирования S сферу радиуса r с центром в точке расположения заряда $q_{\text{ст}}$. При этом необходимо учесть, что внутри сферы имеется не только сторонний заряд $q_{\text{ст}}$, но и поляризационный связанный заряд $q_{\text{св}}$. В этом случае теорема Гаусса записывается в следующей форме:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{ст}} + q_{\text{св}}}{\varepsilon_0}.$$

Из этого интегрального уравнения не удастся определить напряженность поля \mathbf{E} , поскольку величина связанного заряда $q_{\text{св}}$ неизвестна.

При определении напряженности поля \mathbf{E} в диэлектрике нужно сначала найти электрическую индукцию \mathbf{D} . При этом достаточно знать распределение в пространстве только сторонних зарядов и нет необходимости интересоваться связанным зарядом (см. (17.4)). В этом и заключается удобство введения и использования вектора электрической индукции \mathbf{D} . После определения \mathbf{D} по известному соотношению (17.3) вычисляется вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} . В рассматриваемом примере теорема Гаусса для вектора \mathbf{D} имеет вид

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ст}},$$

где интегрирование ведется по сфере радиуса r с центром в точке, где расположен сторонний заряд $q_{\text{ст}}$. В силу симметрии задачи во всех точках рассматриваемой сферической поверхности модуль вектора \mathbf{D} одинаков. Поэтому поток вектора \mathbf{D} равен произведению его модуля D на площадь сферы:

$$D \cdot 4\pi r^2 = q_{\text{ст}}, \quad D = \frac{q_{\text{ст}}}{4\pi r^2}.$$

Чтобы найти напряженность поля, воспользуемся соотношением (17.3):

$$E = \frac{q_{\text{ст}}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \quad (17.7)$$

Рассмотренный пример иллюстрирует также физический смысл диэлектрической проницаемости ε . Величина ε показывает, во сколько раз по сравнению с вакуумом ослабляется диэлектриком напряженность \mathbf{E} электрического поля сторонних зарядов. Действительно, рассчитанное по формуле (17.7) поле в диэлектрике в ε раз меньше поля заряда $q_{\text{ст}}$ в вакууме: $E_{\text{вак}} = q_{\text{ст}}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

Можно показать, что поле E в диэлектрике ослабляется в ε раз по сравнению с полем в вакууме только при условии, что диэлектрическое вещество заполняет все пространство или целиком заполняет пространство между двумя эквипотенциальными поверхностями.

Граничные условия для вектора \mathbf{D} . Рассмотрим поверхность раздела двух однородных изотропных диэлектриков 1 и 2 (рис. 62). Поверхностную плотность сторонних зарядов обозначим через $\sigma_{\text{ст}}$.

Для вывода граничных условий воспользуемся теоремой Гаусса для вектора \mathbf{D} в интегральной форме (17.4). В качестве поверхности интегрирования S выберем поверхность прямого цилиндра малого объема, основания которого — элементарные площадки dS — расположены по разные стороны границы сред 1 и 2 и параллельны поверхности раздела. Высота цилиндра настолько мала, что потоком вектора \mathbf{D} через его боковую поверхность можно пренебречь. Внутри рассматриваемого цилиндра находится элементарная площадка dS поверхности раздела сред 1 и 2, на которой имеется сторонний заряд $\sigma_{\text{ст}}dS$. Теорема Гаусса для вектора \mathbf{D} в этом случае имеет вид

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sigma_{\text{ст}} dS, \quad (17.8)$$

где интеграл вычисляется по поверхности S цилиндра.

Поток $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$ вектора \mathbf{D} через поверхность S равен сумме потоков через основания цилиндра $\int_{\text{осн}} \mathbf{D} d\mathbf{S}$ и через его боковую поверхность $\int_{\text{бок}} \mathbf{D} d\mathbf{S}$, причем последним можно пренебречь благодаря тому, что высота цилиндра и площадь его боковой поверхности стремятся к нулю. Основания цилиндра представляют собой элементарные площадки, векторы которых обозначим через $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$. Представим поток вектора \mathbf{D} через основания в следующем виде:

$$\int_{\text{осн}} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}_2,$$

где \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 — векторы электрической индукции соответственно в первой и второй средах вблизи границы раздела, взятые в произвольных точках двух оснований цилиндра. С учетом всех сделанных замечаний левая часть уравнения (17.8), выражающего теорему Гаусса, преобразуется следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{\text{осн}} \mathbf{D} d\mathbf{S} + \int_{\text{бок}} \mathbf{D} d\mathbf{S} \approx \int_{\text{осн}} \mathbf{D} d\mathbf{S} \approx \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}_2.$$

Скалярные произведения $\mathbf{D}_1 d\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{D}_2 d\mathbf{S}_2$ выразим через проекции D_{1n} и D_{2n} векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 на общую нормаль \mathbf{n} к основаниям

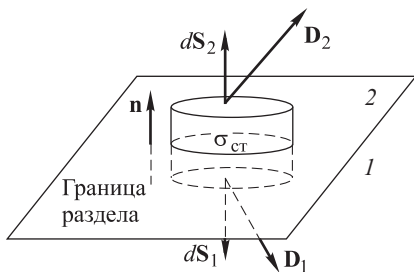


Рис. 62

цилиндра (к поверхности раздела сред), проведенную из первой среды во вторую. Тогда получим

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}_2 = -D_{1n} dS + D_{2n} dS. \quad (17.9)$$

Теорема Гаусса (17.8) с учетом (17.9) будет иметь вид

$$-D_{1n} dS + D_{2n} dS = \sigma_{\text{ст}} dS.$$

Сократив на dS , получим связь между нормальными компонентами D_{1n} и D_{2n} вектора электрической индукции \mathbf{D} при переходе через границу раздела сред. Это соотношение называется *граничными условиями для нормальной компоненты вектора \mathbf{D}* :

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{ст}}. \quad (17.10)$$

На границе раздела двух диэлектриков нормальная компонента вектора \mathbf{D} испытывает скачок, величина которого определяется поверхностной плотностью стороннего заряда $\sigma_{\text{ст}}$.

На практике часто встречаются задачи, в которых сторонние заряды на границе раздела диэлектриков отсутствуют, $\sigma_{\text{ст}} = 0$. В этом случае нормальная компонента вектора \mathbf{D} при переходе через границу раздела не изменяется:

$$D_{2n} = D_{1n} \quad \text{при} \quad \sigma_{\text{ст}} = 0. \quad (17.11)$$

Преломление линий вектора \mathbf{E} . В качестве примера использования граничных условий для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} рассмотрим преломление линий вектора напряженности поля \mathbf{E} на плоской поверхности раздела однородных изотропных диэлектриков 1 и 2 с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. Диэлектрики находятся в однородном электрическом поле, линии которого составляют с нормалью \mathbf{n} к поверхности раздела в первой среде угол α_1 , во второй среде — угол α_2 (рис. 63). Найдем соотношение между α_1 и α_2 .

Пусть \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — напряженность поля в первой и второй среде. Разложим векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на составляющие: $\mathbf{E}_{1\tau}$ и $\mathbf{E}_{2\tau}$ параллельны поверхности раздела сред, \mathbf{E}_{1n} и \mathbf{E}_{2n} перпендикулярны к этой поверхности. Учтем, что из граничных условий для тангенциальной компоненты вектора напряженности \mathbf{E} (см. (10.1)) следует:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (17.12)$$

Из граничных условий (17.11) для нормальной компоненты вектора электрической индукции \mathbf{D} при отсутствии на поверхности раздела

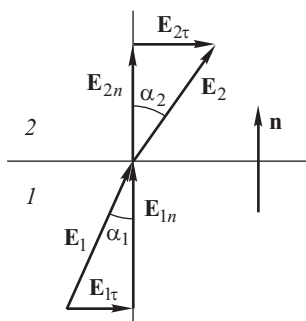


Рис. 63

сторонних зарядов и с учетом соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ для каждой из сред 1 и 2 получим соотношение между нормальными компонентами вектора \mathbf{E} :

$$D_{2n} = D_{1n}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \quad (17.13)$$

Как видно из рис. 63, тангенсы углов α_1 и α_2 равны отношениям тангенциальных и нормальных компонент векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Вычислим отношение тангенсов углов α_1 и α_2 с учетом соотношений (17.12) и (17.13):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1\tau}/E_{1n}}{E_{2\tau}/E_{2n}} = \frac{E_{1\tau} E_{2n}}{E_{2\tau} E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (17.14)$$

Выражение (17.14) представляет собой закон преломления линий напряженности электрического поля на поверхности раздела двух однородных изотропных диэлектриков.

Задачи

3.1. Металлический шар радиусом 5 см окружен шаровым слоем диэлектрика ($\varepsilon = 7$) толщиной 1 см и помещен concentрично в металлическую сферу с внутренним радиусом 7 см. Чему равна емкость C такого конденсатора?

3.2. В плоский конденсатор параллельно обкладкам введена пластина из оптического стекла ($\varepsilon = 9$) так, что остался воздушный зазор $d_1 = 1$ мм. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 1$ см. К конденсатору приложена разность потенциалов $V = 100$ В. Какой будет разность потенциалов U , если после отключения конденсатора от источника напряжения убрать стеклянную пластину?

3.3. В диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется однородное поле напряженностью \mathbf{E} . Внутри среды расположена сферическая полость. Найти напряженность поля \mathbf{E}' в центре сферы, созданного индуцированными на поверхности сферы поляризационными зарядами, считая, что вектор поляризованности \mathbf{P} всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение.

3.4. Плоскопараллельная пластина толщины h из однородного статически поляризованного диэлектрика расположена внутри плоского конденсатора параллельно его обкладкам. Обкладки конденсатора соединены между собой проводником. Поляризованность диэлектрика равна \mathbf{P} и направлена перпендикулярно пластине и обкладкам конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора — d ($d > h$). Найти векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} внутри и вне пластины.

3.5. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии l от плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика равна ε . Найти: 1) поверхностную плотность $\sigma_{\text{св}}$ связанных зарядов как функцию расстояния r от точечного заряда q ; 2) суммарный связанный заряд $q_{\text{св}}$ на поверхности диэлектрика.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 18. Закон Ома. Сторонние силы

Поляризация диэлектриков. В электростатике рассматривались свойства электрического поля неподвижных электрических зарядов. В данной главе нам предстоит изучение движущихся зарядов и связанных с этим явлений.

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.

Различают токи двух видов. *Конвекционными* называются токи, которые сопровождаются переносом вещества. Пример конвекционного тока — перемещение в пространстве несущих на себе заряд макроскопических тел, например, заряженных пылинок, капелек жидкости. В отличие от конвекционных токов *токи проводимости* не сопровождаются переносом вещества. Так, при движении под действием электрического поля свободных электронов в проводнике, который входит в состав электрической цепи, электроны перемещаются вдоль проводника на большие расстояния. Однако в целом в результате такого перемещения переноса вещества не происходит, поскольку в любой части проводника имеет место непрерывный процесс замещения одних заряженных частиц другими.

Ток проводимости может течь в твердых телах (металлы, полупроводники), в жидкостях (электролиты) и в газах. Для протекания тока необходимо наличие в данном теле или среде заряженных частиц, которые могут перемещаться на макроскопические расстояния в пределах всего тела. Такие частицы называются *носителями тока*. Ими могут быть электроны или ионы.

Ток возникает при условии, что в проводящей среде существует электрическое поле. Носители тока участвуют в хаотическом тепловом движении, благодаря которому через любую поверхность S проходит в обе стороны в среднем одинаковое число носителей. Ток через поверхность S , обусловленный тепловым движением, равен нулю. При наличии электрического поля на хаотическое тепловое движение носителей накладывается упорядоченное движение с некоторой постоянной средней скоростью, и через поверхность S течет ток.

В настоящей главе рассматриваются закономерности, которым подчиняются токи проводимости.

Сила тока. Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока, которую будем обозначать буквой I . *Сила тока I*

через заданную поверхность S численно равна заряду, переносимому через эту поверхность в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (18.1)$$

где dq — заряд, прошедший через поверхность S за промежуток времени dt .

При практических расчетах силы тока выше упомянутая поверхность S нередко представляет собой поперечное сечение металлического провода (рис. 64). Например, важно знать силу тока, текущего по проводам, изготовленным из меди или алюминия и используемым для подачи электроэнергии потребителям. При расчетах и измерениях токов в проводящих средах — растворах электролитов, заполняющих аккумуляторы или электролитические ванны, в поверхностном слое Земли (токи заземления), в газах — поверхность S может иметь довольно сложную форму.

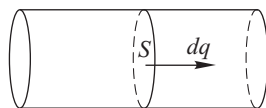


Рис. 64

Носителями тока в электролитах являются положительно заряженные ионы и отрицательно заряженные электроны, которые под действием электрического поля одновременно движутся в проводящей среде в противоположных направлениях. При протекании тока в металлах по объему проводника перемещаются только отрицательно заряженные частицы — электроны. На схемах электрических цепей в качестве направления тока принято указывать направление движения положительно заряженных носителей. Если таковые отсутствуют, за направление тока принимается направление, противоположное направлению движения отрицательных носителей.

Единица силы тока в системе СИ — *ампер* (А). Один ампер определяется следующим образом. При протекании тока силой один ампер по двум прямолинейным параллельным бесконечно длинным тонким проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, в расчете на один метр длины проводника действует сила, равная $2 \cdot 10^{-7}$ Н. Сила взаимодействия двух проводников с током имеет магнитную природу (см. гл. V).

Плотность тока. Для детальной характеристики распределения токов в проводящей среде вводится понятие вектора плотности тока \mathbf{j} .

Везде ниже, если не оговорено иное, будем полагать, что протекание тока в среде обеспечивается движением носителей одного знака, например, электронов. Пусть ρ_n — объемная плотность заряда носителей. Так, в случае металлического проводника отнесенный к единице объема проводника заряд электронов проводимости равен

$$\rho_n = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q_n}{\Delta V},$$

где Δq_n — усредненный заряд электронов проводимости в объеме ΔV проводника.

Среднюю скорость упорядоченного движения носителей тока обозначим через \mathbf{u} . Вектор *плотности тока* \mathbf{j} определяется следующим образом:

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{u}. \quad (18.2)$$

Если в проводящей среде имеются носители тока нескольких типов, полная плотность тока вычисляется суммированием вычисленных по формуле (18.2) векторов \mathbf{j} для каждого из носителей.

Если средняя концентрация носителей тока (число частиц в единице объема) в среде равна n , а заряд каждой частицы-носителя равен q_n , то объемная плотность ρ_n заряда равна:

$$\rho_n = nq_n.$$

С учетом этого вектор плотности тока \mathbf{j} можно представить в виде:

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{u} = q_n n \mathbf{u}. \quad (18.3)$$

Установим связь между силой тока I через некоторую поверхность S в проводящей среде и плотностью тока \mathbf{j} . Пусть через элементарный участок площади dS поверхности S (в дальнейшем — площадка dS), единичный вектор нормали \mathbf{n} к которому составляет угол α с

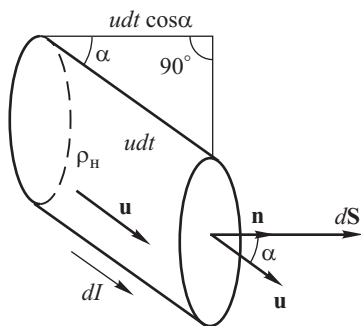


Рис. 65

направлением скорости \mathbf{u} носителей тока, течет ток силой dI (рис. 65). Заряд dq , прошедший через площадку dS за промежуток времени dt , равен заряду всех носителей в объеме наклонного цилиндра с длиной образующей udt и площадью основания dS . Действительно, расположенные внутри такого цилиндра носители тока движутся со скоростью \mathbf{u} вдоль боковой поверхности по направлению к основанию цилиндра и за промежуток времени dt пересекут площадку dS . Носители, расположенные от площадки на расстоянии, превышающем udt , не успеют за время dt достичь площадки. Заряд dq носителей внутри рассматриваемого цилиндра равен произведению их объемной плотности ρ_n на объем цилиндра $udt \cos \alpha dS$ (здесь $udt \cos \alpha$ — высота цилиндра):

$$dq = \rho_n udt \cos \alpha dS.$$

С учетом этого соотношения силу тока dI через площадку dS представим в следующем виде:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho_n u \cos \alpha dS = \rho_n \mathbf{u} d\mathbf{S} = \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

где $d\mathbf{S}$ — вектор элементарной площадки, $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{u}$ — вектор плотности тока вблизи площадки $d\mathbf{S}$.

Итак, сила тока dI через элементарную площадку равна скалярному произведению плотности тока \mathbf{j} и вектора $d\mathbf{S}$ элементарной площадки:

$$dI = \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (18.4)$$

Зная плотность тока \mathbf{j} в каждой точке проводящей среды, можно вычислить силу тока I через произвольную поверхность S . Для этого необходимо мысленно разделить всю поверхность S на малые участки так, чтобы в пределах каждого участка (элементарной площадки) соответствующий вектор плотности тока \mathbf{j} можно было считать постоянным, вычислить для каждой элементарной площадки скалярное произведение $dI = \mathbf{j} d\mathbf{S}$ — силу тока через данную площадку, и наконец, сложить все полученные величины. Результат сложения при устремлении к бесконечности числа элементарных площадок, на которые разделена вся поверхность S (интеграл по поверхности S), равен силе тока через поверхность:

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (18.5)$$

Пусть ток силой I течет по тонкому однородному цилиндрическому проводнику, небольшой участок которого показан на рис. 66. Носители тока движутся параллельно боковой поверхности проводника вдоль его оси. Плотность тока \mathbf{j} одинакова во всех точках поперечного сечения проводника. Вычислим силу тока в проводнике с помощью формулы (18.5), учитывая, что скалярное произведение $\mathbf{j} d\mathbf{S}$ равно произведению модулей $j dS$ перемножаемых векторов:

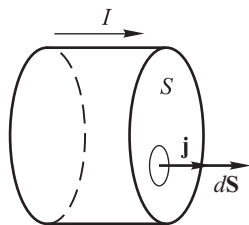


Рис. 66

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_S j dS = j \int_S dS = jS.$$

Из полученного выражения видно, что плотность тока j равна силе тока I , деленной на площадь поперечного сечения S проводника:

$$j = \frac{I}{S}.$$

Иначе говоря, плотность тока равна силе тока, отнесенной к единице площади поперечного сечения проводника.

Рассмотренный пример позволяет уяснить смысл понятия плотности тока, который состоит в следующем: *модуль плотности тока j равен силе тока, протекающего через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению тока.*

При изучении электрических явлений используется понятие *линии тока*. Это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по

направлению с вектором \mathbf{j} плотности тока. Густота линий пропорциональна модулю вектора \mathbf{j} . Линии тока представляют собой траектории движения носителей заряда при стационарном протекании тока по проводнику (рис. 67).

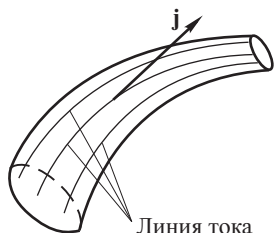


Рис. 67

Уравнение непрерывности. Рассмотрим замкнутую поверхность S , внутри которой расположен некоторый заряд q (рис. 68). Величина q с течением времени изменяется:

$$q = q(t).$$

В соответствии с законом сохранения заряда (см. § 1) уменьшение или увеличение заряда q внутри ограниченного поверхностью S объема может быть обусловлено только переходом заряда через эту поверхность. Действительно, если бы поверхность S была непроницаемой для электрических зарядов, величина заряда q в электрически изолированном от окружающей среды ограниченном поверхностью S объеме с течением времени оставалась бы неизменной.

Скорость изменения заряда q внутри поверхности S , то есть производная dq/dt по модулю равна силе тока I через поверхность S :

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -I, \quad (18.6)$$

где \mathbf{j} — плотность тока. Знак «минус» перед интегралом и силой тока I в равенстве (18.6) имеет следующий смысл. Если заряд q внутри замкнутой поверхности S положительный и уменьшается с течением времени, то $dq/dt < 0$. При этом положительный заряд пересекает поверхность S в направлении изнутри наружу, выходя из ограниченного поверхностью S объема во внешнюю среду. Электрический ток через поверхность S в этом случае по определению считается положительным, $I > 0$. Учитывая противоположные знаки величин dq/dt и силы тока I , в (18.6) перед одной из них необходимо поставить знак «минус».

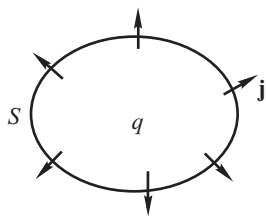


Рис. 68

Равенство (18.6) называется *уравнением непрерывности* в интегральной форме.

Уравнение непрерывности в дифференциальной форме получим, разделив обе части уравнения (18.6) на величину ΔV ограниченного поверхностью S объема и вычислив пределы при стремлении ΔV к нулю:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}}{\Delta V} = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{\partial \Delta q}{\partial t} \right). \quad (18.7)$$

В этом выражении заряд внутри ограниченного замкнутой поверхностью S объема ΔV обозначен через Δq (вместо обозначения q в равенстве (18.6)), чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что объем ΔV является малым. Кроме того, производную по времени заряда Δq записали в виде частной производной $\partial \Delta q / \partial t$, указывая тем самым на зависимость величины Δq не только от времени, но и от координат x , y , z , определяющих положение объема ΔV в пространстве. Предел левой части равенства (18.7) представляет собой дивергенцию плотности тока \mathbf{j} , предел правой части равен производной по времени объемной плотности ρ макроскопического заряда в точке с координатами x , y , z , в которую стягивается поверхность S при стремлении к нулю объема ΔV :

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{\partial \Delta q}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (18.8)$$

С учетом (18.8) из (18.7) получим *уравнение непрерывности в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (18.9)$$

При протекании постоянных токов имеет место установившееся, неизменное во времени пространственное распределение макроскопических электрических зарядов в проводящей среде. Величина заряда в любом фиксированном объеме среды постоянна. В этих условиях, называемых стационарными, производная по времени заряда q , расположенного внутри произвольной замкнутой поверхности S , и производная по времени объемной плотности ρ заряда в любой точке проводящей среды равны нулю:

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (18.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (18.11)$$

В частном случае протекания в проводящей среде постоянных токов с учетом равенств (18.10) и (18.11) уравнения непрерывности (18.6) и (18.9) записываются в следующей форме:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0, \quad (18.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (18.13)$$

Закон Ома для однородного участка цепи. Рассмотрим однородный проводник, к концам которого приложено напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — значения потенциала электростатического поля у концов проводника (рис. 69). Согласно полученному опытным путем

закону Ома сила тока I , текущего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов (напряжению) на его концах:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}. \quad (18.14)$$

В этом выражении R — константа, называемая *электрическим сопротивлением* (*сопротивлением*) проводника. Закон Ома в форме (18.14), связывающий между собой силу тока и напряжение на концах однородного проводника, одновременно служит определением понятия его сопротивления.

Единица сопротивления — *ом* (Ом). Сопротивление однородного проводника равно одному ому, если при напряжении в 1 В, приложенном к концам проводника, по нему течет ток силой 1 А:

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}.$$

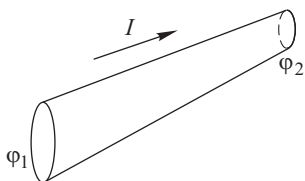


Рис. 69

Закон Ома не является фундаментальным (всеобщим) законом физики. Он справедлив лишь для определенных классов проводящих материалов и сред, например, металлических проводников,

растворов электролитов. Существуют проводящие электрический ток материалы, для которых связь между током и напряжением не описывается законом Ома (18.14). К ним относится, например, изготовленный на основе полупроводниковых материалов так называемый *p-n-переход* (см. кн. 5 «Основы квантовой физики»). В данной главе рассматриваются только проводники, для которых справедлив закон Ома.

Опытным путем установлено, что сопротивление однородного проводника пропорционально его длине и обратно пропорционально площади поперечного сечения. Сопротивление R проводника длиной l и одинакового по всей длине сечения площадью S , равно

$$R = \rho_{\text{уд}} \frac{l}{S}, \quad (18.15)$$

где $\rho_{\text{уд}}$ — коэффициент пропорциональности, называемый *удельным электрическим сопротивлением* (*удельным сопротивлением*) материала, из которого изготовлен проводник.

Единица удельного сопротивления — *ом·метр* (Ом·м). Удельное сопротивление хороших проводников составляет при комнатной температуре: $1,5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м у серебра, $1,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м у меди, $2,5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м у алюминия. Удельное сопротивление изоляторов много выше, например, у бумаги 10^{10} Ом·м, у янтаря 10^{17} Ом·м.

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной электрической проводимостью* вещества:

$$\lambda = \frac{1}{\rho_{\text{уд}}}. \quad (18.16)$$

Сопротивление металлических проводников возрастает с увеличением температуры. Эта зависимость описывается выражением:

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (18.17)$$

где R_0 — сопротивление при 0°C , R — сопротивление при температуре t , выраженной в $^\circ\text{C}$, α — так называемый *температурный коэффициент сопротивления*.

Закон Ома в локальной форме. Пусть в проводящей среде течет ток с плотностью \mathbf{j} . Мысленно выделим внутри среды небольшой прямой цилиндр, высота которого dl , площадь основания dS , плоскости оснований перпендикулярны направлению упорядоченного движения носителей тока, то есть вектору \mathbf{j} и линиям тока. Объем цилиндра настолько мал, что вектор \mathbf{j} плотности тока во всех точках среды в пределах рассматриваемого элементарного цилиндра можно считать одинаковым. Это же относится к вектору напряженности \mathbf{E} электрического поля (рис. 70). Движение носителей тока осуществляется с некоторой постоянной средней скоростью в направлении действия на заряды носителей силы со стороны электрического поля, т.е. в направлении вектора \mathbf{E} . Векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} сонаправлены.

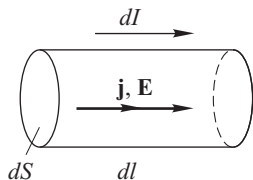


Рис. 70

Применим закон Ома (18.14) к рассматриваемому элементарному цилиндру:

$$dI = \frac{\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}}{dR}, \quad (18.18)$$

где dI — сила тока, текущего через основания цилиндра, $\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}$ — разность потенциалов на его основаниях, dR — сопротивление ограниченной цилиндрической поверхностью части проводящей среды.

Выразим силу тока dI через плотность тока j и площадь dS основания цилиндра:

$$dI = j dS, \quad (18.19)$$

разность потенциалов $\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}$ на основаниях цилиндрического проводника — через напряженность E электрического поля внутри цилиндра:

$$\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} = E dl. \quad (18.20)$$

Кроме того, представим сопротивление dR в виде

$$dR = \rho_{\text{уд}} \frac{dl}{dS}. \quad (18.21)$$

Подставим силу тока, разность потенциалов и сопротивление из (18.19)–(18.21) в равенство (18.18) и выполним преобразования:

$$j dS = \frac{E dl}{\rho_{уд} dl/dS},$$

$$j = \frac{1}{\rho_{уд}} E.$$

Как указывалось выше, векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} сонаправлены. Поэтому последнее равенство можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho_{уд}} \mathbf{E} = \lambda \mathbf{E}, \quad (18.22)$$

где $\rho_{уд}$ и λ — удельные сопротивление и электрическая проводимость среды.

Выражение (18.22) устанавливает связь между характеристиками тока (плотность \mathbf{j}), среды (удельная электрическая проводимость λ или удельное сопротивление $\rho_{уд}$) и электрического поля (напряженность \mathbf{E}). Связь (18.22) между плотностью тока \mathbf{j} и напряженностью электрического поля \mathbf{E} называется *законом Ома в локальной форме*.

Закон Ома для неоднородного участка цепи. Сторонние силы, ЭДС. Если при протекании тока в проводнике на подвижные носители тока не действуют никакие другие силы, кроме сил электростатического поля, через некоторое время ток в цепи прекратится. Это произойдет, как только вследствие пространственного перераспределения зарядов напряженность поля в проводнике станет равна нулю, как это имеет место в электростатике.

Для поддержания тока в цепи должны существовать силы, которые осуществляют пространственное разделение имеющихся в проводнике положительных и отрицательных микроскопических зарядов, препятствуя тем самым установлению такого состояния, в котором электрическое поле и ток в проводнике отсутствуют. Разделяя в пространстве заряды противоположных знаков, эти силы перемещают положительные носители тока в направлении возрастания потенциала, а отрицательные носители тока — в направлении уменьшения потенциала электростатического поля, то есть в обоих случаях заряды перемещаются против сил электростатического поля. Силы, осуществляющие пространственное разделение зарядов противоположных знаков в описанных условиях, называются *сторонними*.

Сторонние силы — это силы не электростатического происхождения, способные осуществлять пространственное разделение положительных и отрицательных зарядов, перемещая положительные носители тока в направлении возрастания, а отрицательные — в направлении уменьшения потенциала электростатического поля, то есть против сил этого поля.

Так, в источнике тока, например, аккумуляторной батарее, входящей в состав замкнутой электрической цепи, действуют сторон-

ние силы, благодаря которым по цепи течет ток I (рис. 71). При этом внутри источника положительные носители тока перемещаются от отрицательного к положительному электроду (от клеммы «минус» к клемме «плюс»), то есть в направлении возрастания потенциала электростатического поля. Поддерживая ток в цепи, сторонние силы совершают положительную работу.

Участок электрической цепи, на котором действуют сторонние силы, называют *неоднородным участком*.

Сторонние силы разнообразны. Это, например, силы химического происхождения, возникающие при протекании химических реакций в гальванических элементах. Роль сторонних могут выполнять магнитные силы, действующие на движущиеся заряды в генераторах тока. Пространственное разделение электрических зарядов под действием сторонних сил происходит в электрической цепи, состоящей из нескольких разнородных проводников, контакты между которыми имеют различную температуру (термоэлементы) и т. д.

По аналогии с напряженностью электростатического поля вводится понятие напряженности поля сторонних сил $\mathbf{E}_{\text{ст}}$. Вектор *напряженности поля сторонних сил* $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ в некоторой точке пространства (проводящей среды) представляет собой стороннюю силу, отнесенную к единичному положительному заряду.

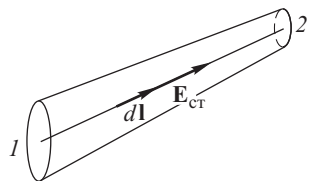


Рис. 72

Пусть на участке электрической цепи, начальную и конечную точки которого обозначим через 1 и 2, действуют сторонние силы с напряженностью $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ (рис. 72). *Электродвижущей силой (ЭДС) на участке цепи 1–2* называется работа сторонних сил, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\mathcal{E}_{12} = A_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l}. \quad (18.23)$$

Электродвижущая сила, как и потенциал электростатического поля, измеряется в вольтах.

При наличии в проводнике помимо сил электростатического поля сторонних сил закон Ома в локальной форме записывается следующим образом:

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}), \quad (18.24)$$

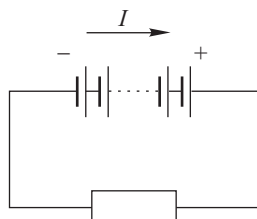


Рис. 71

где \mathbf{E} — напряженность электростатического поля, $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил. Выражение (18.24) представляет собой закон Ома в локальной форме для неоднородного участка цепи.

Получим выражение закона Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме. Рассмотрим участок цепи, на котором помимо сил электростатического поля с напряженностью \mathbf{E} действуют сторонние силы, напряженность которых $\mathbf{E}_{\text{ст}}$. Для упрощения вычислений будем полагать, что участок цепи представляет собой проводник цилиндрической формы длиной l и площадью поперечного сечения S . Удельное сопротивление материала проводника равно $\rho_{\text{уд}}$. Вектор \mathbf{j} плотности тока одинаков во всех точках проводника и параллелен его боковой поверхности (рис. 73). То же относится к векторам напряженности электростатического поля \mathbf{E} и напряженности поля сторонних сил $\mathbf{E}_{\text{ст}}$. Применим к рассматриваемому участку закон Ома (18.24), записав его в скалярной форме:

$$j = \lambda(E + E_{\text{ст}}),$$

где E и $E_{\text{ст}}$ — проекции векторов на направление тока.

Подставим сюда плотность тока $j = I/S$, выраженную через силу тока I и площадь поперечного сечения S , удельную электрическую проводимость $\lambda = 1/\rho_{\text{уд}}$ и умножим обе части полученного равенства на длину участка l . В результате получим

$$I\rho_{\text{уд}}\frac{l}{S} = El + E_{\text{ст}}l. \quad (18.25)$$

Учитывая, что величина $\rho_{\text{уд}}l/S$ представляет собой электрическое сопротивление проводника, величина $El = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов на его концах, величина $E_{\text{ст}}l = \mathcal{E}_{12}$ — работу сторонних сил по переносу единичного положительного заряда по участку, то есть действующую на данном участке ЭДС, запишем (18.25) в следующем виде:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (18.26)$$

Равенство (18.26) представляет собой закона Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме. Эта формула применима к произвольному неоднородному участку, сопротивление которого R , разность потенциалов на концах $\varphi_1 - \varphi_2$ и на котором действуют сторонние силы с ЭДС \mathcal{E}_{12} . Схематично произвольный неоднородный участок цепи можно изобразить в виде, показанном на рис. 74, где величиной R обозначено полное сопротивление участка, включающее как внутреннее сопро-

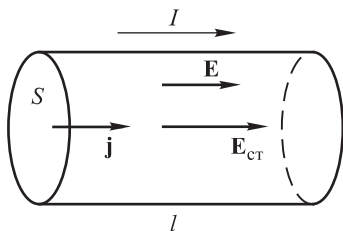


Рис. 73

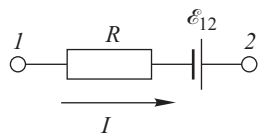


Рис. 74

тивление источника тока, так и сопротивление подключенных к источнику проводников.

Правила Кирхгофа. *Первое правило Кирхгофа* (1824–1887). Алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи, то есть в точке соединения нескольких проводников, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (18.27)$$

где индекс k — условный номер проводника, I_k — сила текущего по k -му проводнику тока; токи, текущие в направлении к рассматриваемому узлу и в направлении от узла, учитываются в сумме (18.27) с противоположными знаками.

Правило Кирхгофа (18.27) иллюстрирует рис. 75. Сила тока I_1 , втекающего в узел, равна сумме сил токов I_2 и I_3 , вытекающих из узла:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Алгебраическая сумма токов в точке разветвления проводников равна нулю:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

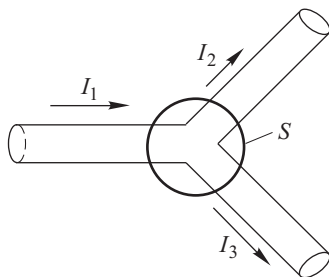


Рис. 75

Первое правило Кирхгофа является прямым следствием уравнения непрерывности для постоянных токов (см. (18.12)). В соответствии с этим уравнением суммарный ток через произвольную замкнутую поверхность, в частности, через изображенную на рис. 75 охватывающую область соединения нескольких проводников поверхность S , равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0.$$

Ток через поверхность S равен алгебраической сумме токов всех пересекающих эту поверхность проводников:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \sum_k I_k.$$

Из двух последних равенств следует правило (18.27).

Согласно *второму правилу Кирхгофа* в любом замкнутом электрическом контуре в составе разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме действующих в этом контуре ЭДС:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (18.28)$$

Здесь I_k — сила тока на k -м участке, R_k — сопротивление, $I_k R_k$ — падение напряжения, \mathcal{E}_k — ЭДС этого участка. При вычислении сумм в равенстве (18.28) необходимо выбрать направление обхода контура. Ток I_k и ЭДС \mathcal{E}_k любого участка учитываются в сумме (18.28) со знаком «плюс», если на этом участке направление тока и направление действия сторонних сил совпадают с выбранным направлением обхода контура. В противном случае перед соответствующим слагаемым ставится знак «минус».

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома. Рассмотрим в качестве примера состоящий из трех неоднородных участков цепи замкнутый контур в составе сложной разветвленной цепи (рис. 76). Для каждого участка запишем закон Ома:

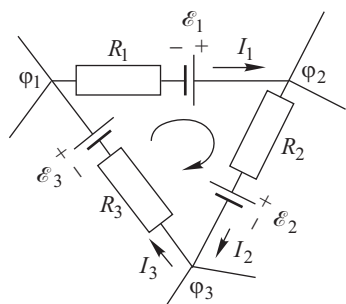


Рис. 76

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 - \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_3.$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — силы токов; R_1, R_2, R_3 — сопротивления; $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ — ЭДС каждого участка; φ_1, φ_2 и φ_3 — потенциалы точек соединения участков друг с другом. Сложив все три уравнения,

получим математическое выражение второго правила Кирхгофа (18.28) в рассматриваемом конкретном примере:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

На рис. 76 указано направление обхода контура, в соответствии с которым необходимо учитывать знаки падений напряжения и ЭДС при их суммировании по правилу Кирхгофа. Например, величина ЭДС \mathcal{E}_2 входит в сумму со знаком «минус», поскольку направление обхода противоположно направлению действия сторонних сил в источнике тока на данном участке контура.

§ 19. Закон Джоуля–Ленца

Пусть по длинному тонкому проводнику, потенциалы начальной и конечной точек которого равны соответственно φ_1 и φ_2 , течет постоянный ток силой I . Сторонних сил в проводнике нет. Потенциал электростатического поля изменяется только при перемещении вдоль проводника, а во всех точках любого его поперечного сечения он одинаков. За промежуток времени dt через любое поперечное сечение перемещается один и тот же заряд dq , причем $dq = Idt$. На малом (элементарном) перемещении заряда dq вдоль проводника силы элек-

тростатического поля совершают работу, равную произведению заряда на убыль потенциала, а именно:

$$dq(-d\varphi),$$

где $d\varphi$ — приращение, а $(-d\varphi)$ — убыль потенциала электростатического поля (рис. 77). За тот же промежуток времени dt силы электростатического поля на всем проводнике между точками 1 и 2 совершают работу δA , равную сумме элементарных работ на всех элементарных участках, из которых состоит проводник. Если число таких участков стремится к бесконечности, указанная сумма представляет собой интеграл, вычисляемый вдоль проводника между точками 1 и 2:

$$\delta A = - \int_1^2 dq d\varphi = - dq \int_1^2 d\varphi = dq (\varphi_1 - \varphi_2) = I dt (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19.1)$$

При интегрировании было учтено, что за промежуток времени dt через любое поперечное сечение проводника проходит один и тот же заряд dq , и поэтому величина dq была вынесена из-под знака интеграла.

Работой тока на участке электрической цепи называется работа сил электростатического поля, совершаемая при перемещении заряда dq по этому участку. В соответствии с определением работа δA в выражении (19.1) представляет собой работу тока на участке цепи 1–2. Она равна произведению заряда dq на разность потенциалов на концах участка.

Мощностью тока N называется работа тока, отнесенная к единице времени. Из (19.1) следует, что мощность тока N на участке 1–2 равна:

$$N_T = \frac{\delta A}{dt} = I (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19.2)$$

Если на участке цепи не действуют сторонние силы и, кроме того, энергия электростатического поля не затрачивается на совершение макроскопической механической работы (работу тока можно превратить в механическую работу, например, за счет включенного в цепь электродвигателя), то совершенная силами поля работа δA полностью превращается во внутреннюю энергию проводника. Проводник при этом получает количество теплоты, равное работе поля: $\delta Q = \delta A$). Механизм превращения энергии поля во внутреннюю энергию проводника состоит в следующем. Заряженная частица (носитель тока) под действием сил внешнего электростатического поля движется внутри проводника в пространстве между его атомами ускоренно и приобретает за счет работы поля дополнительную кинетическую энергию.

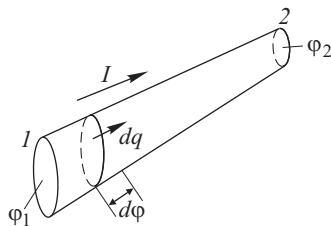


Рис. 77

Затем частица испытывает столкновение с атомом (ионом) вещества проводника, и отдает ему частично или полностью свою кинетическую энергию. Этот процесс многократно повторяется. Энергия поля таким образом переходит в энергию движения атомов проводника, то есть в его внутреннюю энергию. При протекании тока по проводнику в нем выделяется тепло.

Итак, количество теплоты δQ , выделившееся за время dt на однородном участке цепи, равно работе тока δA на этом участке (см. (19.1)):

$$\delta Q = \delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = Idt(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19.3)$$

Тепловая мощность тока, т.е. количество теплоты, выделяющееся на участке цепи за единицу времени, с учетом (19.3) равна:

$$N = \frac{\delta Q}{dt} = I(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19.4)$$

Отметим, что полученная формула для тепловой мощности совпадает с формулой мощности тока (19.2) при условии, что участок цепи является однородным в смысле отсутствия на нем сторонних сил, электродвигателей и т.п.

С учетом закона Ома: $U = IR$, где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение на концах цепи, R — его сопротивление, I — сила тока, тепловую мощность тока можно представить в следующем виде:

$$N = I(\varphi_1 - \varphi_2) = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (19.5)$$

В соответствии с установленным опытным путем в 1841 г. *законом Джоуля-Ленца* выделяющееся за время t в проводнике с сопротивлением R при протекании по нему тока силой I количество теплоты Q равно:

$$Q = I^2 R t. \quad (19.6)$$

Выражение (19.6) может быть получено из (19.5) умножением тепловой мощности тока $I^2 R$ на время t .

Закон Джоуля-Ленца в локальной форме. Применим формулу тепловой мощности тока $N = I^2 R$ (19.5)

к небольшому участку тонкого проводника цилиндрической формы длиной dl и площадью поперечного сечения dS (рис. 78). Векторы плотности тока \mathbf{j} и напряженности электростатического поля \mathbf{E} параллельны оси проводника. Тепловая мощность тока δN в рассматриваемом проводнике равна:

$$\delta N = (dI)^2 dR, \quad (19.7)$$

где dI — сила тока, текущего по проводнику, dR — его сопротивление.

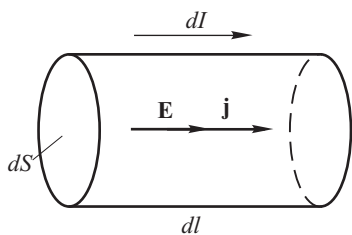


Рис. 78

Выразив силу тока dI через плотность тока j и площадь сечения dS по формуле

$$dI = j dS,$$

сопротивление dR — через удельное сопротивление материала проводника $\rho_{уд}$, длину dl и площадь сечения dS по формуле

$$dR = \rho_{уд} \frac{dl}{dS},$$

и подставив dI и dR в (19.7), получим

$$\delta N = (j dS)^2 \rho_{уд} \frac{dl}{dS} = j^2 \rho_{уд} dS dl = j^2 \rho_{уд} dV,$$

где $dV = dS dl$ — объем цилиндрического проводника.

Удельная тепловая мощность тока $N_{уд}$, то есть выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника количество теплоты равно

$$N_{уд} = \frac{\delta N}{dV} = j^2 \rho_{уд}. \quad (19.8)$$

Формула (19.8) выражает закон Джоуля–Ленца в локальной форме. Величина $N_{уд}$ характеризует тепловую мощность тока в точке проводника, где плотность тока равна j , удельное сопротивление — $\rho_{уд}$.

Используя закон Ома $\mathbf{j} = (1/\rho_{уд})\mathbf{E}$ (см. (18.22)), удельную тепловую мощность $N_{уд}$ (19.8) можно представить в следующей форме:

$$N_{уд} = j^2 \rho_{уд} = (\mathbf{j}\mathbf{j}) \rho_{уд} = \mathbf{j} \frac{1}{\rho_{уд}} \mathbf{E} \rho_{уд} = (\mathbf{j}\mathbf{E}).$$

Окончательно:

$$N_{уд} = \mathbf{j}\mathbf{E}. \quad (19.9)$$

§ 20. Переходные процессы в электрических цепях

Законы Ома и Джоуля–Ленца экспериментально были установлены в опытах с постоянным током. Однако они оказываются применимыми и в случае медленно меняющихся токов, называемых *квазистационарными*.

Текущий по проводнику ток называется *квазистационарным*, если мгновенное значение силы тока одинаково во всех поперечных сечениях проводника в один и тот же момент времени.

Выясним условие квазистационарности тока на простом примере. Рассмотрим проводник с током, сила которого изменяется с течением времени. Например, через рассматриваемый проводник заряжается конденсатор, или по нему течет переменный синусоидальный ток и т. д. Обозначим характерное время изменения тока в цепи через τ . В случае синусоидального тока величина τ равна периоду колебаний тока.

Пусть приложенное к концам проводника напряжение мгновенно изменилось, то есть произошел скачок напряжения. Новому значению

напряжения или разности потенциалов на концах проводника будет соответствовать новая величина напряженности поля \mathbf{E} , а также плотности тока \mathbf{j} ($\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$) и силы тока I ($\mathbf{I} = \mathbf{jS}$) в проводнике. Чтобы текущий в проводнике ток можно было считать квазистационарным, изменение тока во всех сечениях проводника в ответ на изменение приложенного к его концам напряжения должно произойти быстро, а именно: время $t_{\text{уст}}$ установления новой величины силы тока в проводнике должно быть мало по сравнению с характерным временем τ изменения силы тока:

$$t_{\text{уст}} \ll \tau. \quad (20.1)$$

Величину $t_{\text{уст}}$ можно оценить как время распространения вдоль проводника электромагнитного возмущения — скачка напряженности электрического поля. Скорость распространения возмущения равна скорости c электромагнитной волны в вакууме. В этом случае $t_{\text{уст}}$ по порядку величины равно времени распространения электромагнитной волны на расстояние, равное длине l проводника:

$$t_{\text{уст}} \sim \frac{l}{c}. \quad (20.2)$$

Из (20.1) и (20.2) получим условие квазистационарности тока в проводнике:

$$t_{\text{уст}} \sim \frac{l}{c} \ll \tau. \quad (20.3)$$

Оценим время $t_{\text{уст}}$. При длине проводника $l \sim 3$ м и скорости распространения электромагнитных волн $c \sim 3 \cdot 10^8$ м/с время установления в проводнике новых стационарных значений напряженности электрического поля и силы тока равно: $t_{\text{уст}} \sim l/c \approx 10^{-8}$ с. Таким образом, в проводнике длиной порядка нескольких метров ток можно считать квазистационарным, если характерное время τ его изменения много больше величины $t_{\text{уст}} \sim 10^{-8}$ с.

Разрядка конденсатора. Рассмотрим пример использования закона Ома для описания переходных процессов в электрических цепях, то есть процессов, в результате которых сила тока изменяется от одного стационарного значения до другого после скачкообразного изменения внешних параметров цепи. Будем считать, что условие (20.3) квазистационарности тока при этом выполнено.

Пусть обкладки заряженного конденсатора емкостью C замыкаются на проводник с сопротивлением R с помощью ключа K в некоторый момент времени, который будем называть начальным (рис. 79). Найдем зависимость от времени силы тока I в рассматриваемой цепи.

Запишем закон Ома для однородного участка цепи, содержащего сопротивление R :

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы обкладок конденсатора, на которых имеются заряды q и $-q$ соответственно. Выразим разность потенциалов обкладок и силу тока в цепи через заряд q конденсатора:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C},$$

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Решая совместно три полученных уравнения, придем к дифференциальному уравнению относительно переменной величины — заряда q конденсатора:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_0 e^{-t/\tau}, \quad (20.4)$$

где q_0 — заряд конденсатора в начальный момент времени, $\tau = RC$.

Величина $\tau = RC$ называется *постоянной времени цепи*. Она равна промежутку времени, в течение которого заряд конденсатора уменьшается в « e » раз.

Для того чтобы ток зарядки конденсатора можно было считать квазистационарным, параметры R и C в соответствии с (20.3) должны удовлетворять условию:

$$t_{\text{уст}} \sim 10^{-8} \text{ с} \ll \tau = RC.$$

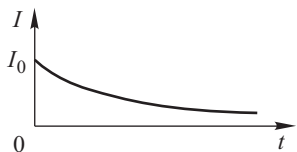


Рис. 80

Зависимость от времени силы тока I в цепи найдем, дифференцируя по времени заряд q в (20.4):

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (20.5)$$

Здесь $I_0 = q/(RC)$ — сила тока в начальный момент времени. Характерное время изменения тока, как и заряда конденсатора, равно $\tau = RC$. Качественный график зависимости силы тока от времени представлен на рис. 80.

Закона Ома позволяет получить уравнения, описывающие разнообразные переходные процессы в электрических цепях, а также уравнения электрических колебаний (см. кн. 4 «Колебания и волны. Оптика» настоящего курса физики).

§ 21. Электрическое поле в проводнике с током

Если проводник, по которому течет постоянный или квазистационарный электрический ток, является однородным, то макроскопический

заряд в любой точке внутри проводника равен нулю. Отличным от нуля может быть только заряд на поверхности проводника.

Доказательство этого утверждения основывается на законе Ома и уравнении непрерывности для стационарных токов и заключается в следующем.

Однородность проводника подразумевает, что свойства материала, из которого он изготовлен, в различных точках проводника одинаковы. В частности, все части проводника характеризуются одинаковой удельной электрической проводимостью λ . Дифференциальная форма уравнения непрерывности для стационарных токов (18.13) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (21.1)$$

где \mathbf{j} — вектор плотности тока. Вектор \mathbf{j} связан с вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} в проводнике (см. (18.22)):

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (21.2)$$

Подставив \mathbf{j} из (21.2) в (21.1) и учитывая, что параметр λ для однородного проводника является величиной постоянной, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} (\lambda \mathbf{E}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Итак, дивергенция вектора \mathbf{E} внутри проводника с током равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (21.3)$$

В соответствии с теоремой Гаусса для вектора \mathbf{E} (см. (3.4)) дивергенция \mathbf{E} равна деленной на ε_0 объемной плотности ρ макроскопического заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (21.4)$$

Сравнивая между собой равенства (21.3) и (21.4), приходим к выводу о том, что объемная плотность ρ макроскопических зарядов внутри однородного проводника с током равна нулю:

$$\rho = 0.$$

Последнее утверждение не означает, что в проводнике с током вообще отсутствуют заряды (в таком случае не было бы и тока). В проводнике имеются положительно и отрицательно заряженные частицы вещества, которые служат носителями тока. Однако положительные и отрицательные заряды компенсируют друг друга, так что суммарный заряд любого объема проводника строго равен нулю.

В представленном выше доказательстве равенства нулю объемной плотности ρ макроскопических зарядов использовалось то обстоятельство, что электрическая проводимость λ одинакова во всех точках проводника (см. вывод формулы (21.3)). Любой физически бесконечно малый объем, расположенный вблизи поверхности, отделяющей проводник от окружающей его среды, и включающий часть этой поверх-

ности, является неоднородным по своим свойствам. В частности, при переходе через поверхность проводника электрическая проводимость λ испытывает скачок. Следовательно, основанное на свойствах однородности проводника доказательство равенства нулю объемной плотности макроскопического заряда в этом случае не годится. На поверхности проводника с током возможно наличие отличных от нуля макроскопических зарядов.

Электрическое поле внутри и снаружи проводника с током.

Внутри проводника, по которому течет ток, вектор напряженности \mathbf{E}_1 электрического поля отличен от нуля и сонаправлен с вектором плотности тока \mathbf{j} . Модуль E_1 напряженности поля можно выразить через модуль j вектора плотности тока с помощью закона Ома в локальной форме (18.22):

$$E_1 = \frac{j}{\lambda} = \rho_{\text{уд}} j, \quad (21.5)$$

где λ и $\rho_{\text{уд}}$ — соответственно удельная электрическая проводимость и удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

Рассмотрим расположенный в вакууме тонкий длинный цилиндрический проводник постоянного сечения, по которому течет ток. В таком проводнике векторы плотности тока \mathbf{j} и напряженности электрического поля \mathbf{E}_1 направлены вдоль оси проводника и параллельны его поверхности (рис. 81). Определим направление вектора напряженности электрического поля снаружи проводника вблизи его поверхности.

Пусть вектор напряженности поля \mathbf{E}_2 снаружи проводника составляет угол α с нормалью к поверхности (рис. 81). Поверхность проводника с током (как и его объем) не являются эквипотенциальными. Поэтому вектор \mathbf{E}_2 не перпендикулярен к поверхности проводника, как это имело место в электростатике. Разложим \mathbf{E}_2 на составляющие $\mathbf{E}_{2\tau}$ и \mathbf{E}_{2n} вдоль двух направлений — по касательной (параллельной оси проводника) и по нормали к поверхности проводника. Из граничных условий для тангенциальной компоненты вектора напряженности поля на границе раздела двух сред, в данном случае, на границе проводника с вакуумом, с учетом (21.5) получим

$$E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_1 = \frac{j}{\lambda} = \rho_{\text{уд}} j.$$

где $E_{1\tau} = E_1$ — напряженность поля внутри проводника вблизи его поверхности.

Из граничных условий для нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля на границе раздела двух сред найдем

$$E_{2n} - E_{1n} = E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

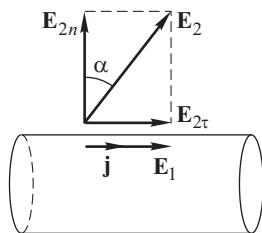


Рис. 81

где E_{1n} — нормальная компонента напряженности электрического поля внутри проводника, σ — поверхностная плотность макроскопического заряда на поверхности проводника. Поскольку напряженность поля \mathbf{E}_1 внутри проводника с током направлена по касательной к его поверхности, то $E_{1n} = 0$;

Зная тангенциальную и нормальную компоненты вектора \mathbf{E}_2 , определим тангенс угла α между вектором напряженности электрического поля и нормалью к поверхности проводника с током:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_0 \rho_{\text{уд}} j}{\sigma}. \quad (21.6)$$

Итак, в отличие от электростатики, когда в отсутствие токов в проводниках напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю, а напряженность поля снаружи проводника вблизи его поверхности перпендикулярна к этой поверхности, при протекании тока по проводнику напряженность поля внутри проводника отлична от нуля, вектор напряженности поля снаружи проводника вблизи его поверхности составляет с нормалью к поверхности угол α , величина которого определяется соотношением (21.6).

§ 22. Электрическое сопротивление однородной слабо проводящей среды

Поместим в безграничную однородную диэлектрическую слабо проводящую электрический ток среду с удельной электрической проводимостью λ и диэлектрической проницаемостью ε два расположенных на большом удалении друг от друга

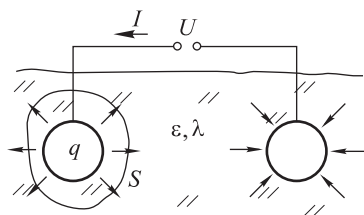


Рис. 82

металлических проводника, на которые подано напряжение U (рис. 82). Рассматриваемая физическая система в какой-то мере служит моделью реально существующих технических устройств электрической защиты различных объектов бытового и промышленного назначения («заземление»).

С этой целью массивный металлический проводник зарывают в землю на большую глубину, обеспечивая его электрический контакт с защищаемым объектом.

Найдем сопротивление среды между проводниками.

Поскольку электрическая проводимость среды мала, конфигурация электрического поля в среде практически такая же, как в однородном диэлектрике. Рассмотрим один из двух проводников, положительный заряд которого обозначим через q . С поверхности проводника в окружающую среду стекают электрические заряды. По цепи, в состав которой входят источник напряжения, подводящие провода, рассматриваемые

проводники и среда между ними, течет ток силой I . Сопротивление среды обозначим через R .

В соответствии с законом Ома сопротивление R равно деленному на силу тока I напряжению U :

$$R = \frac{U}{I}. \quad (22.1)$$

Рассмотрим замкнутую поверхность S , расположенную в среде и охватывающую проводник (см. рис. 80). Согласно (18.5) сила тока I через поверхность S равна

$$I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (22.2)$$

где \mathbf{j} — плотность тока в точках поверхности S .

Вектор \mathbf{j} плотности тока в среде связан с вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} законом Ома (18.22):

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (22.3)$$

Напряженность поля \mathbf{E} в однородной изотропной диэлектрической среде можно выразить через вектор электрической индукции \mathbf{D} (см. (17.3)):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (22.4)$$

Воспользуемся теоремой Гаусса для вектора \mathbf{D} (см. (17.4)):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ст}} = q, \quad (22.5)$$

где $q_{\text{ст}} = q$ — сторонний заряд, расположенный внутри поверхности S и равный заряду q проводника.

Учтем, что взаимная емкость C проводников равна:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (22.6)$$

Преобразуем формулу закона Ома (22.1) с учетом соотношений (22.2)–(22.6):

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\oint \mathbf{j} d\mathbf{S}} = \frac{U}{\lambda \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}} = \frac{U}{\lambda \oint_S \mathbf{D}/(\varepsilon_0 \varepsilon) d\mathbf{S}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{\lambda \oint \mathbf{D} d\mathbf{S}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{\lambda q} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\lambda C}.$$

Итак, сопротивление диэлектрической слабо проводящей однородной среды (сопротивление «заземления») равно

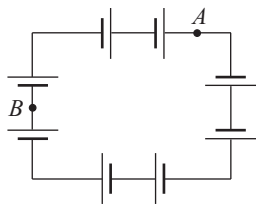
$$R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\lambda C}. \quad (22.7)$$

Из формулы (22.7) видно, что сопротивление R тем меньше, чем больше удельная электрическая проводимость среды λ и чем больше емкость C проводников. В устройствах заземления стремятся сделать

сопротивление R как можно меньше. С этой целью обычно используют металлические проводники больших размеров, обладающие большой емкостью, и располагают их в земле ниже уровня грунтовых вод с тем, чтобы электрическая проводимость среды была достаточно высокой.

Задачи

4.1. Источники тока с различными ЭДС соединены, как пока-



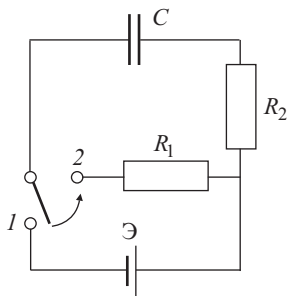
К задаче 4.1

зано на рис. 4.1. ЭДС источников пропорциональны их внутренним сопротивлениям: $\mathcal{E} = \alpha R$, где α — постоянная. Сопротивление проводов пренебрежимо мало. Найти: 1) ток I в цепи; 2) разность потенциалов между точками A и B .

4.2. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 2,6$ В, замкнутый на внешнее сопротивление, дает ток $I = 1,0$ А. При этом разность потенциалов между полюсами аккумулятора $U = 2,0$ В.

Найти тепловую мощность Q , выделяемую в аккумуляторе, и мощность P , которую развивают в нем сторонние силы.

4.3. Конденсатор емкости $C = 5$ мкФ подключили к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В (рис. 4.2). Затем ключ K перевели из положения 1 в положение 2. Найти количество тепла Q , выделившееся на сопротивлении $R_1 = 500$ Ом, если $R_2 = 330$ Ом.



К задаче 4.2

4.4. Два одинаковых металлических шарика радиуса a находятся в однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ . Найти сопротивление среды между шариками при условии, что расстояние между ними значительно больше a .

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 23. Магнитный момент и магнитная индукция. Закон Био–Савара

Магнитное поле тока. Движущиеся в пространстве заряды и текущие по проводам токи порождают магнитное поле. В основе представлений о существовании магнитного поля лежат следующие экспериментальные факты.

1. Опыт показывает, что два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут электрические токи, взаимодействуют друг с другом. Проводники притягиваются, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкиваются, если токи противоположно направлены. Сила взаимодействия проводников пропорциональна силе токов и обратно пропорциональна расстоянию между проводниками. Закон взаимодействия токов был установлен Ампером в 1820 г. Взаимодействие проводников объясняется наличием в окружающем пространстве магнитного поля.

2. В опытах Эрстеда (1777–1851) в 1820 г. было установлено, что провод с текущим по нему током ориентирует расположенную поблизости стрелку магнитного компаса в направлении, перпендикулярном направлению тока (рис. 83). Определенная ориентация стрелки относительно провода объясняется наличием в пространстве магнитного поля, порождаемого током.

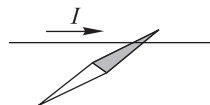


Рис. 83

3. Если вместо магнитной стрелки рядом с прямолинейным проводом с током расположить изготовленную из проволоки рамку, по которой течет электрический ток, рамка будет испытывать действие механического момента сил и установится так, что нормаль к плоскости рамки будет перпендикулярна направлению тока в проводе (рис. 84). Ориентирующее действие провода с током на рамку можно объяснить существованием магнитного поля.

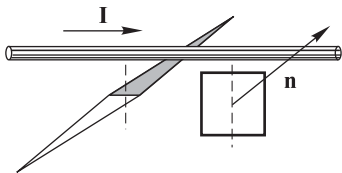


Рис. 84

Описанные опыты позволяют предположить, что в окружающем проводники с токами пространстве существует магнитное поле, которое способно оказывать силовое ориентирующее действие на другие токи. В качестве силовой характеристики

магнитного поля вводится векторная величина, называемая *магнитной индукцией* \mathbf{B} (определение см. ниже).

Магнитный момент контура с током. Магнитная индукция.

Тонкий достаточно длинный проводник (толщина проводника много меньше его длины) кольцеобразной формы будем называть *замкнутым проводящим контуром*. Если все участки проводника принадлежат одной плоскости, то контур называется *плоским*. *Элементарным* будем называть проводящий контур, размеры которого малы по сравнению с расстоянием, на котором магнитное поле существенно изменяется. Под размером контура в этом случае нужно понимать характерный линейный размер ограниченной контуром поверхности. Благодаря малым размерам ограниченную элементарным контуром поверхность или, говоря иначе, поверхность, натянутую на контур, можно считать плоской.

Магнитным моментом \mathbf{p}_m плоского проводящего контура с текущим по нему током силой I называется вектор, модуль которого равен произведению силы тока I на площадь контура S , а направление вектора \mathbf{p}_m совпадает с направлением единичной нормали \mathbf{n} к плоскости контура, причем направление \mathbf{n} и направление тока в контуре связаны правилом правого винта (рис. 85):

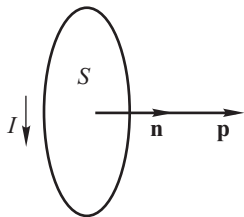


Рис. 85

$$\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}. \quad (23.1)$$

Единица магнитного момента — ампер, умноженный на квадратный метр ($\text{А} \cdot \text{м}^2$).

Из опыта известно, что на помещенный в магнитное поле контур с током действует механический момент сил \mathbf{M} . Дадим следующее количественное определение индукции \mathbf{B} магнитного поля.

Пусть на помещенный в магнитное поле элементарный контур с током, магнитный момент которого равен \mathbf{p}_m , действует механический момент сил \mathbf{M} . Магнитная индукция \mathbf{B} — это вектор, удовлетворяющий равенству:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (23.2)$$

Равенство (23.2) подразумевает, что приложенный к элементарному контуру с током момент сил \mathbf{M} равен векторному произведению магнитного момента контура \mathbf{p}_m на вектор магнитной индукции \mathbf{B} .

Единицей магнитной индукции служит *тесла* (Тл). Магнитной индукцией 1 тесла обладает однородное магнитное поле, в котором на плоский контур с током, магнитный момент которого равен $1 \text{ А} \times \text{м}^2$, действует максимальный момент сил $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Поскольку величина действующего на контур момента сил зависит от ориентации контура относительно магнитного поля (см. § 27), в определении единицы магнитной индукции подразумевается такое расположение контура, при котором момент сил имеет наибольшее возможное значение.

Силовой линией магнитного поля или *линией магнитной индукции* называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором магнитной индукции \mathbf{B} . Густота линий пропорциональна модулю вектора \mathbf{B} .

С помощью силовых линий можно наглядно представить структуру магнитного поля, порожденного различными источниками. Силовые линии магнитного поля прямолинейного провода с током — это концентрические окружности с центром на оси провода, расположенные в перпендикулярной к проводу плоскости (рис. 86). Густота линий уменьшается по мере удаления от центра. На рис. 87 показаны силовые

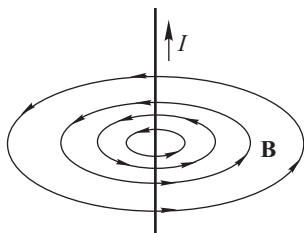


Рис. 86

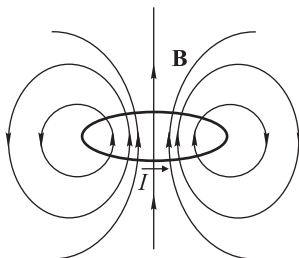


Рис. 87

линии магнитного поля кругового витка с током (кругового тока). Соленоид представляет собой навитой на круглый цилиндрический каркас тонкий провод (рис. 88 а). Витки расположены вплотную и изолированы друг от друга. При пропускании тока по проводу, из которого изготовлен соленоид, возникает магнитное поле, которое,

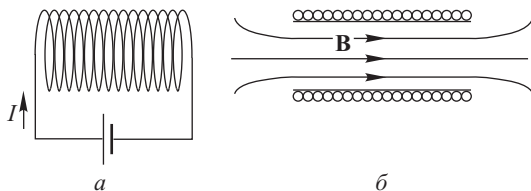


Рис. 88

если соленоид достаточно длинный, можно считать однородным внутри соленоида на большом удалении от его концов. Здесь линии магнитной индукции параллельны оси соленоида и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 88 б).

Закон Био–Савара. Рассмотрим тонкий проводник, по которому течет ток силой I . Выберем малый участок (элемент) проводника длиной dl и определим вектор $d\mathbf{l}$ следующим образом: длина вектора $d\mathbf{l}$ равна длине рассматриваемого участка проводника, направление $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока (рис. 89). Вектор $I d\mathbf{l}$ называют

элементом тока. Проведем от рассматриваемого участка проводника в точку наблюдения вектор \mathbf{r} .

Текущий по проводнику ток создает в окружающем пространстве (вакууме) магнитное поле. Экспериментально установлено, что элемент тока $I d\mathbf{l}$ порождает в точке наблюдения, положение которой в пространстве определено вектором \mathbf{r} , магнитное поле с индукцией $d\mathbf{B}$, которая равна

$$d\mathbf{B} = k \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (23.3)$$

где k — коэффициент пропорциональности, который в системе СИ равен $\mu_0/4\pi$, μ_0 — так называемая *магнитная постоянная*, $\mu_0 \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м (генри на метр).

Рис. 89

Формула (23.3) представляет собой математическое выражение закона Био (1774–1862) и Савара (1791–1841) (*закон Био–Савара*).

Магнитное поле подчиняется принципу суперпозиции, в соответствии с которым магнитную индукцию \mathbf{B} тонкого проводника с током можно рассчитать как сумму (интеграл) векторов $d\mathbf{B}$, порождаемых всеми элементами тока, на которые можно мысленно разделить проводник:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (23.4)$$

Интеграл (23.4) вычисляется вдоль линии, совпадающей с проводником.

Применим формулу (23.3), выражающую закон Био–Савара, и принцип суперпозиции для расчета магнитной индукции прямого провода с током.

Магнитное поле прямого провода с током. Рассмотрим тонкий бесконечно длинный провод, по которому течет ток силой I (рис. 90).

Определим магнитную индукцию \mathbf{B} в точке, расположенной на расстоянии R от провода.

Направим координатную ось z вдоль тока. Пусть точка $z = 0$ совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного на провод из точки, в которой определяется магнитное поле. Положение элемента провода $d\mathbf{l}$ определяется координатой z , причем $z = -R/\operatorname{tg} \theta$, где θ — угол между положительным направлением оси z и вектором \mathbf{r} , проведенным от элемента

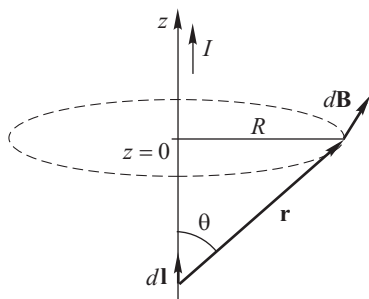


Рис. 90

провода $d\mathbf{l}$ в точку наблюдения. Длина элемента $d\mathbf{l}$ равна

$$dl = dz = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta. \quad (23.5)$$

Длину вектора \mathbf{r} также можно выразить через расстояние R и угол θ :

$$r = \frac{R}{\sin \theta}. \quad (23.6)$$

Вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$, порожденный в точке наблюдения элементом тока $I d\mathbf{l}$, равен

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (23.7)$$

Вектор $d\mathbf{B}$ принадлежит плоскости, перпендикулярной проводу с током, он направлен по касательной к окружности с центром на оси провода. Данная окружность совпадает с линией магнитной индукции. Все векторы $d\mathbf{B}$, порожденные различными элементами $d\mathbf{l}$ провода, независимо от их координаты z , сонаправлены друг с другом.

Раскрыв векторное произведение в (23.7) и подставив выражения для r и dl из (23.5) и (23.6), получим модуль dB

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta d\theta}{R}. \quad (23.8)$$

Магнитную индукцию B в точке наблюдения найдем, интегрируя правую часть равенства (23.8) по параметру θ в пределах от нуля до π . При этом будет учтен вклад в магнитную индукцию B всех элементов тока $I d\mathbf{l}$, из которых состоит бесконечно длинный провод. Итак, магнитная индукция, порожденная прямым тонким бесконечно длинным проводом с током, равна

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta d\theta}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (23.9)$$

Как упоминалось выше, вектор \mathbf{B} , модуль которого вычисляется по формуле (23.9), направлен по касательной к окружности с центром на оси провода, расположенной в перпендикулярной к проводу плоскости. Направление вектора \mathbf{B} связано правилом правого винта с направлением тока в проводе.

§ 24. Закон Ампера

На проводник с током, помещенный во внешнее магнитное поле, действует сила, которую называют *силой Ампера* (1775–1836).

Рассмотрим помещенный в магнитное поле тонкий провод с током силой I (рис. 91). Мысленно выделим на этом проводе малый участок

длиной dl . Элемент тока $I d\mathbf{l}$ испытывает на себе со стороны внешнего магнитного поля действие силы $d\mathbf{F}$, которая равна

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (24.1)$$

Формула (24.1) представляет собой математическое выражение закона Ампера.

Рассмотрим теперь расположенную во внешнем магнитном поле с индукцией \mathbf{B} проводящую среду, вектор плотности тока в каждой точке которой известен и равен \mathbf{j} . Выделим в среде объем в форме прямого кругового цилиндра высотой dl и площадью основания dS , расположенный так, что ось цилиндра параллельна вектору \mathbf{j} (рис. 92).

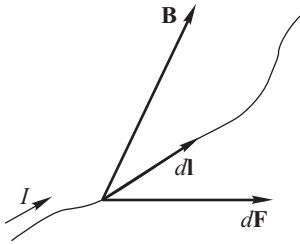


Рис. 91

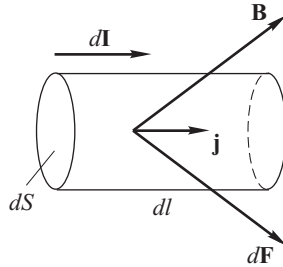


Рис. 92

Объем цилиндра мал, так что вектор \mathbf{j} во всех его точках можно считать одинаковым. Будем рассматривать цилиндр с текущим по нему током dI как элемент тока $dI d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — вектор длины dl , направленный по току ($d\mathbf{l} \parallel \mathbf{j}$). Ток dI выразим через плотность тока \mathbf{j} и площадь основания цилиндра dS : $dI = j dS$. Тогда элемент тока $dI d\mathbf{l}$ можно представить в виде

$$dI d\mathbf{l} = j dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV, \quad (24.2)$$

где $dV = dS dl$ — объем цилиндра.

Сила Ампера, действующая на элемент тока $dI d\mathbf{l}$ в рассматриваемом цилиндре, в соответствии с (24.1) и с учетом (24.2) равна

$$d\mathbf{F} = dI[d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = [dI d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = [\mathbf{j} dV, \mathbf{B}] = [\mathbf{j} \mathbf{B}] dV.$$

Окончательно, сила Ампера $d\mathbf{F}$, действующая со стороны внешнего магнитного поля с индукцией \mathbf{B} на элемент тока плотностью \mathbf{j} , текущего в объеме dV проводящей среды, определяется формулой:

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] dV. \quad (24.3)$$

Сила взаимодействия параллельных токов. По двум тонким прямолинейным бесконечно длинным параллельным проводникам (проводам), расположенным в вакууме на расстоянии r друг от друга, текут токи силой I_1 и I_2 (рис. 93). Найдём силу, действующую на каждый из проводников.

Провод с током силой I_2 расположен в магнитном поле, порожденном прямым током силой I_1 . Индукция поля тока I_1 в месте расположения провода с током I_2 в соответствии с формулой (23.9) равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \quad (24.4)$$

На участок провода с током I_2 длиной dl будет действовать сила Ампера $d\mathbf{F}$, равная

$$d\mathbf{F} = I_2 [d\mathbf{l}, \mathbf{B}_1].$$

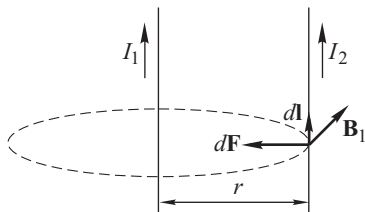


Рис. 93

Поскольку вектор $d\mathbf{l}$ перпендикулярен вектору магнитной индукции \mathbf{B}_1 , модуль силы dF с учетом (24.4) можно представить в виде

$$dF = I_2 dl B_1 = I_2 dl \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \quad (24.5)$$

Разделив обе части равенства (24.5) на dl , найдем силу Ампера, отнесенную к единице длины провода:

$$F_{\text{ед}} = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}. \quad (24.6)$$

§ 25. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лорентца

Магнитное поле движущегося заряда. Поскольку электрический ток представляет собой упорядоченное движение свободных зарядов — носителей тока, магнитное поле тока, по существу, является полем движущихся электрических зарядов. Пусть по очень тонкому проводнику с площадью поперечного сечения dS течет ток силой I . Элемент тока $I d\mathbf{l}$ создает в точке наблюдения, положение которой в пространстве задано вектором \mathbf{r} (рис. 94), магнитное поле $d\mathbf{B}_T$, равное согласно (23.3):

$$d\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (25.1)$$

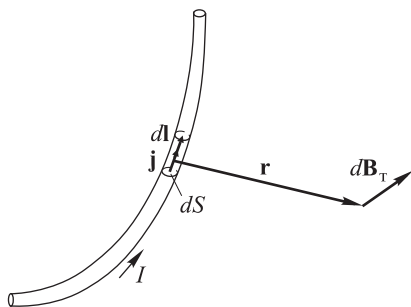


Рис. 94

Преобразуем вектор элемента тока $I d\mathbf{l}$, выразив силу тока I через плотность тока \mathbf{j} и площадь поперечного сечения проводника dS ($I = j dS$), учитывая, что в тонком проводнике вектор \mathbf{j} сонаправлен с

вектором $d\mathbf{l}$:

$$I d\mathbf{l} = j dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV, \quad (25.2)$$

где $dV = dS d\mathbf{l}$ — объем элемента проводника длины $d\mathbf{l}$.

Вектор плотности тока \mathbf{j} в соответствии с его определением равен:

$$\mathbf{j} = n_n q_n \mathbf{u}, \quad (25.3)$$

где n_n — концентрация носителей тока в проводнике (например, концентрация электронов), q_n — величина заряда каждого носителя, \mathbf{u} — средняя скорость упорядоченного движения носителя тока. С учетом соотношения (25.3) элемент тока $I d\mathbf{l}$ (25.2) равен

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV = n_n q_n \mathbf{u} dV. \quad (25.4)$$

Подставим выражение (25.4) в формулу (25.1) для магнитного поля элемента тока:

$$d\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n_n q_n [\mathbf{u} \mathbf{r}]}{r^3} dV. \quad (25.5)$$

Величина $n_n dV$ представляет собой число носителей тока в объеме dV проводника. Поделив вектор $d\mathbf{B}_T$ на это число, получим вклад $d\mathbf{B}$ одного носителя в магнитную индукцию $d\mathbf{B}_T$ тока в целом:

$$d\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}_T}{n_n dV} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_n [\mathbf{u} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (25.6)$$

Полученная формула позволяет вычислить индукцию магнитного поля $d\mathbf{B}$, порожденного движущимся со скоростью \mathbf{u} точечным зарядом q_n в точке пространства, положение которой определяется вектором \mathbf{r} , проведенным от заряда q_n . Аналогичная формула справедлива для индукции магнитного поля $d\mathbf{B}$ всякого изолированного движущегося со скоростью \mathbf{u} точечного заряда q .

Сила Лорентца. Рассмотрим один из элементов $I d\mathbf{l}$ тонкого проводника, по которому течет ток силой I . Проводник имеет площадь поперечного сечения dS и помещен в магнитное поле с индукцией \mathbf{B} . На элемент тока $I d\mathbf{l}$ действует сила Ампера $d\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = [I d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (25.7)$$

Представим вектор элемента тока $I d\mathbf{l}$ в следующем виде (см. вывод формулы (25.4) с помощью соотношений (25.2) и (25.3)):

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV = n_n q_n \mathbf{u} dV. \quad (25.8)$$

Здесь $\mathbf{j} = n_n q_n \mathbf{u}$ — вектор плотности тока, n_n — концентрация, q_n — заряд, \mathbf{u} — средняя скорость упорядоченного движения носителей тока, $dV = d\mathbf{l} dS$ — объем элемента проводника длины $d\mathbf{l}$ и площади поперечного сечения dS . С учетом (25.8) сила Ампера, действующая на элемент тока $I d\mathbf{l}$ в выражении (25.7), равна

$$d\mathbf{F} = [I d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = [n_n q_n \mathbf{u} dV, \mathbf{B}] = n_n q_n dV [\mathbf{u} \mathbf{B}]. \quad (25.9)$$

Множитель $n_n dV$ представляет собой число носителей тока в объеме dV . Разделив действующую на элемент тока $I d\mathbf{l}$ силу $d\mathbf{F}$ на число движущихся заряженных частиц $n_n dV$ внутри соответствующего элемента проводника, найдем силу, действующую на каждую частицу с зарядом q_n :

$$\mathbf{F}_{\text{Лор}} = \frac{d\mathbf{F}}{n_n dV} = q_n [\mathbf{u} \mathbf{B}]. \quad (25.10)$$

Формула (25.10) справедлива для произвольного изолированного точечного заряда q , движущегося в магнитном поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{u} . Сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся в нем заряд и вычисляемая по формуле (25.10), называется *силой Лорентца* (1853–1828).

Отметим, что при наличии в пространстве, помимо магнитного поля с индукцией \mathbf{B} , еще и электрического поля с напряженностью \mathbf{E} , на движущийся со скоростью \mathbf{u} точечный заряд q будет действовать сила:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{u} \mathbf{B}], \quad (25.11)$$

которую также называют силой Лорентца. В таком случае сила Лорентца включает две составляющие — силу $q\mathbf{E}$, действующую на заряд со стороны электрического поля, и силу $q[\mathbf{u} \mathbf{B}]$, действующую на заряд со стороны магнитного поля. В дальнейшем мы будем подразумевать под силой Лорентца только магнитную составляющую.

Пример. Определим, как соотносятся между собой силы электрического и магнитного взаимодействия двух заряженных частиц, движущихся в вакууме с одинаковыми скоростями \mathbf{u} на расстоянии l друг от друга (рис. 95). Пусть заряд каждой частицы q . Сила электрического взаимодействия $F_{\text{эл}}$ определяется законом Кулона:

$$F_{\text{эл}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

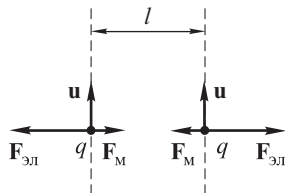


Рис. 95

Сила магнитного взаимодействия $F_{\text{м}}$ представляет собой силу Лорентца, действующую на один из зарядов q со стороны магнитного поля B , порожденного другим зарядом q :

$$F_{\text{м}} = quB = qu \frac{\mu_0 qu}{4\pi l^2} = \frac{\mu_0 q^2 u^2}{4\pi l^2}.$$

Найдем отношение магнитной и электрической сил:

$$\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{эл}}} = \mu_0 \epsilon_0 u^2 = \left(\frac{u}{c} \right)^2,$$

где $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Если скорости частиц u малы по сравнению со скоростью света c , то величина

отношения $F_m/F_{эл}$ много меньше единицы, то есть сила Лорентца мала по сравнению с силой Кулона.

§ 26. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

Теорема Гаусса. Поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (26.1)$$

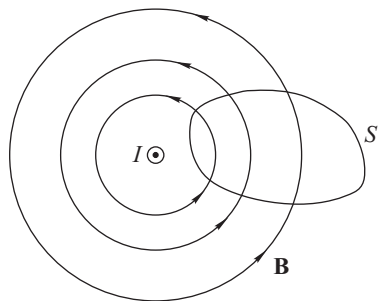
Это утверждение, которое называют теоремой Гаусса для вектора \mathbf{B} , является результатом обобщения опытных данных. До настоящего времени в природе не обнаружены так называемые магнитные заряды, которые могли бы служить источниками магнитного поля. Если бы магнитные заряды существовали, на них должны начинаться или заканчиваться линии магнитной индукции. Как известно из опыта, линии магнитной индукции (силовые линии магнитного поля) являются замкнутыми или начинаются и заканчиваются в бесконечности. Вследствие этого число силовых линий, «входящих» в ограниченный произвольной замкнутой поверхностью объем, равно числу силовых линий, «выходящих» из этого объема. Таким образом, поток вектора \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность всегда оказывается равным нулю. В качестве примера на рис. 96 изображены силовые линии

прямого провода с током, пересекающие замкнутую поверхность S , расположенную вблизи провода.

Теорему Гаусса для вектора \mathbf{B} в дифференциальной форме легко получить, разделив обе части равенства (26.1) на объем ΔV , ограниченный замкнутой поверхностью интегрирования S , и вычислив затем пределы при $\Delta V \rightarrow 0$ обеих частей:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}}{\Delta V} = 0.$$

Рис. 96



Выражение в левой части полученного равенства представляет собой дивергенцию вектора магнитной индукции, то есть

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (26.2)$$

Равенство (26.2) выражает теорему Гаусса для вектора \mathbf{B} в дифференциальной форме.

Теорема о циркуляции. Циркуляция вектора магнитной индукции \mathbf{B} по произвольному замкнутому контуру L равна умножен-

ной на μ_0 алгебраической сумме токов, охватываемых контуром L , или, говоря иначе, пересекающих ограниченную контуром поверхность:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum_k I_k \right). \quad (26.3)$$

Слагаемое I_k учитывается в правой части выражения (26.3) со знаком «плюс», если направление тока I_k связано правилом правого винта с направлением обхода контура L , которое произвольно выбирается при вычислении циркуляции $\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l}$. В противном случае слагаемое I_k входит в сумму со знаком «минус». Токи, не охватываемые контуром L (токи, которые не пересекают «натянутую» на контур L поверхность), при вычислении суммы вообще не учитываются.

В конкретном примере токов и замкнутого контура L , показанных на рис. 97, теорема о циркуляции вектора \mathbf{B} записывается в следующем виде:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 - I_3).$$



Рис. 97

Покажем, что теорема о циркуляции справедлива в частном случае магнитного поля прямого тока. Пусть по прямолинейному бесконечно длинному проводу течет ток силой I . Возьмем в качестве контура обхода L окружность радиуса r , лежащую в перпендикулярной проводу плоскости, с центром на оси провода (рис. 98). С учетом того, что магнитная индукция на расстоянии r от оси провода равна $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ (см. (23.6)) и направлена по касательной к окружности, выбранной в качестве контура обхода L , вычислим циркуляцию вектора \mathbf{B} :

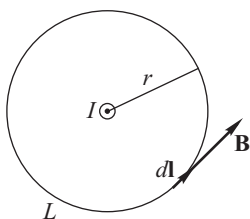


Рис. 98

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I. \quad (26.4)$$

Согласно (26.4) циркуляция вектора \mathbf{B} равна умноженной на μ_0 силе тока I , охватываемой контуром, что соответствует утверждению теоремы о циркуляции.

Опираясь на закон Био–Савара и принцип суперпозиции, теорему о циркуляции вектора \mathbf{B} можно доказать в общем случае произвольного распределения токов в пространстве.

Циркуляция по произвольному замкнутому контуру вектора напряженности \mathbf{E} электростатического поля равна нулю. Это утверждение является следствием того факта, что электростатическое поле является полем консервативных сил (см. § 7). Для описания свойств

электростатического поля вводятся понятия потенциальной энергии и потенциала; поле это потенциальное. В отличие от электростатического потенциального поля магнитное поле, для которого циркуляция вектора магнитной индукции, вообще говоря, отлична от нуля (см. (26.3)), называется *соленоидальным*.

Дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} можно вывести из ее интегральной формы (26.3) предельным переходом, стягивая контур обхода L в точку. Приведем *теорему о циркуляции вектора \mathbf{B} в дифференциальной форме* без вывода:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (26.5)$$

Согласно (26.5) ротор вектора \mathbf{B} в произвольной точке поля равен умноженной на μ_0 плотности тока \mathbf{j} в этой же точке.

Магнитное поле соленоида. Тонкий проводник, навитой на круглый цилиндрический каркас, представляет собой *соленоид*; проводник, по которому пропускают ток, называется обмоткой соленоида. Расчет и опыт показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше величина магнитной индукции в пространстве вне соленоида. У бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи вообще отсутствует.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с числом витков провода на единицу его длины равным n . Сила тока в проводе, из которого изготовлен соленоид, равна I . Внутри соленоида в любой точке вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} направлен вдоль оси соленоида, то есть вдоль оси цилиндрического каркаса с намотанным на него проводом. Направление \mathbf{B} связано правилом правого винта с направлением тока в обмотке. Определим величину магнитной индукции с помощью теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} .

Выберем контур обхода $1-2-3-4-5-6-1$ в виде прямоугольника (рис. 99), обозначим его через L . Сторона прямоугольника $1-2$, имеет длину l и параллельна оси соленоида.

Циркуляцию вектора \mathbf{B} по замкнутому контуру L можно представить как сумму интегралов вдоль отдельных участков контура:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{3-4-5-6} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_6^1 \mathbf{B} d\mathbf{l}. \quad (26.6)$$

На участке $1-2$ вектор магнитной индукции \mathbf{B} и все векторы $d\mathbf{l}$ элементов контура сонаправлены. Поэтому первый интеграл в правой

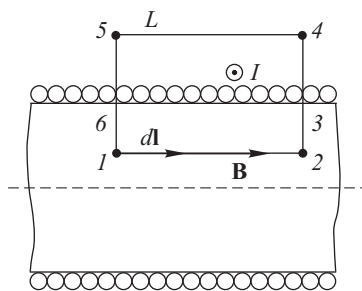


Рис. 99

части (26.6) равен

$$\int_1^2 \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_1^2 B d\mathbf{l} = B \int_1^2 d\mathbf{l} = B\mathbf{l}. \quad (26.7)$$

На участках контура 2–3 и 6–1 векторы \mathbf{B} и $d\mathbf{l}$ перпендикулярны друг другу, а на участке 3–4–5–6, расположенном снаружи соленоида, магнитная индукция \mathbf{B} равна нулю. Поэтому интегралы в правой части равенства (26.6), вычисляемые по всем участкам контура обхода, кроме 1–2, равны нулю. С учетом (26.6), (26.7) и всех сделанных замечаний теорема о циркуляции вектора \mathbf{B} в применении к контуру L имеет вид

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B} d\mathbf{l} = B\mathbf{l} = \mu_0 n l I, \quad (26.8)$$

где величины nl и nlI — соответственно полное число витков провода и полный ток, пересекающие ограниченную контуром обхода L поверхность. Отсюда найдем магнитную индукцию B внутри бесконечно длинного соленоида:

$$B = \mu_0 n I. \quad (26.9)$$

Из полученной формулы следует, что величина магнитной индукции B не зависит от расстояния между точкой, в которой определяется поле, и осью соленоида. Следовательно, магнитное поле во всех точках внутри бесконечно длинного соленоида, одинаковое (однородное).

§ 27. Контур с током в магнитном поле: сила и момент сил, работа при перемещении контура

Сила, действующая на контур с током. С помощью закона Ампера вычислим силу, действующую на помещенный во внешнее магнитное поле замкнутый проводящий контур.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле однородное, то есть одинаковое во всех точках пространства.

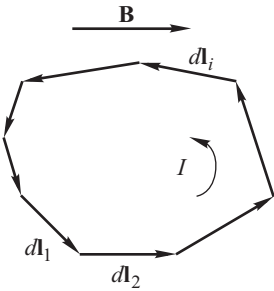
Пусть замкнутый контур L , изготовленный из тонкого провода, находится в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} . По контуру течет ток силой I . Мысленно разделим весь контур на бесконечно малые участки — элементы $d\mathbf{l}$. Длина вектора $d\mathbf{l}$ равна длине элементарного участка контура, а направление $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока в проводе (рис. 100). Согласно закону Ампера сила, действующая на элемент $d\mathbf{l}$ контура с током, равна:

$$d\mathbf{F} = [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (27.1)$$

Силу \mathbf{F} , действующую со стороны магнитного поля на контур в целом, найдем интегрированием $d\mathbf{F}$ (27.1) по контуру L :

$$\mathbf{F} = \oint_L I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = I \left[\oint_L d\mathbf{l}, \mathbf{B} \right] = 0. \quad (27.2)$$

Вычисленная в (27.2) сила \mathbf{F} равна нулю, поскольку равна нулю сумма элементарных векторов $d\mathbf{l}$, образующих любую замкнутую линию, то есть равен нулю интеграл по замкнутому контуру:



$$\oint_L d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом, показано, что сила, действующая на произвольный замкнутый контур с током, помещенный в однородное магнитное поле, равна нулю.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле неоднородное.

Если элементарный контур с током, магнитный момент которого \mathbf{p}_m , находится в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , то можно показать, что действующая на контур сила, равна:

$$\mathbf{F} = p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial l}, \quad (27.3)$$

где p_m — модуль магнитного момента, $\partial \mathbf{B} / \partial l$ — производная вектора магнитной индукции \mathbf{B} по направлению магнитного момента \mathbf{p}_m .

Напомним, что контур можно считать элементарным, если его размеры малы по сравнению с характерным расстоянием, на котором изменяется магнитная индукция \mathbf{B} . Доказательство формулы (27.3) мы не приводим. Рассмотрим примеры применения этой формулы.

Пример 1. Элементарный контур с током, магнитный момент которого равен \mathbf{p}_m , расположен около тонкого бесконечно длинного прямого провода с током силой I (рис. 101). Магнитный момент \mathbf{p}_m элементарного контура сонаправлен с вектором магнитной индукции \mathbf{B} поля прямого тока в той точке пространства, где расположен элементарный контур. Согласно (27.3) сила \mathbf{F} , действующая на элементарный контур, совпадает по направлению с приращением $\partial \mathbf{B}$ вектора \mathbf{B} при перемещении вдоль направления вектора \mathbf{p}_m . Как видно из рис. 101, вектор приращения $\partial \mathbf{B} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1$ и вектор силы \mathbf{F} направлены к проводу с током.

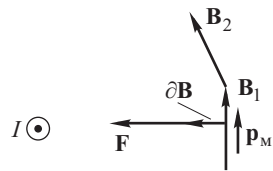


Рис. 101

Пример 2. Вектор \mathbf{p}_m магнитного момента элементарного контура находится в плоскости, проходящей через тонкий прямой бесконечно длинный провод с током силой I , \mathbf{p}_m перпендикулярен к этому проводу (рис. 102). При перемещении вдоль вектора \mathbf{p}_m вектор приращения магнитной индукции $\partial\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1$ сонаправлен с самим вектором \mathbf{B} в той точке пространства, где расположен элементарный контур, то есть сонаправлен с каждым из векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 . Следовательно, в рассматриваемом примере действующая на элементарный контур сила \mathbf{F} , сонаправленная согласно (27.3) с вектором $\partial\mathbf{B}$, совпадает по направлению с вектором \mathbf{B} индукции магнитного поля прямого провода с током.

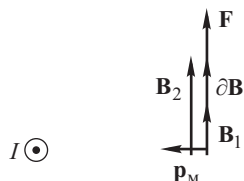


Рис. 102

Момент сил, действующий на контур с током в магнитном поле.

Формулу, позволяющую вычислять момент сил, получим на примере прямоугольного проволочного контура с током (рамки с током), помещенного во внешнее однородное магнитное поле.

Пусть a и b — соответственно длина и ширина рамки, I — сила тока в ней, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции однородного магнитного поля, θ — угол между единичным вектором нормали \mathbf{n} к плоскости рамки и направлением вектора \mathbf{B} (рис. 103). Магнитный момент \mathbf{p}_m рамки сонаправлен с вектором \mathbf{n} , его модуль равен $p_m = Iab$, где произведение ab — площадь рамки. На рис. 103 показаны силы Ампера \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_4 , приложенные к сторонам рамки. Силы \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_4 стремятся растянуть рамку в вертикальном направлении, не создавая момента сил.

Момент сил, который стремится повернуть рамку вокруг вертикальной оси, создают силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 , модули которых равны (см. (24.1)):

$$F_1 = F_3 = IaB \sin 90^\circ = IaB. \quad (27.4)$$

Здесь I — сила тока; a — длина проводников, к которым приложены силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 ; угол между направлением тока I и вектором \mathbf{B} равен 90° .

Сумма сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 равна нулю (пара сил), поэтому суммарный момент

этих сил не зависит от выбора оси, относительно которой он вычисляется. Удобно вычислить момент силы \mathbf{F}_1 , приложенной к стороне рамки длиной a , относительно оси, совпадающей с противоположной стороной рамки, то есть со стороной, к которой приложена сила \mathbf{F}_3 . При этом момент силы \mathbf{F}_3 равен нулю, так что действующий на рамку суммарный момент M сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 равен моменту только силы \mathbf{F}_1 :

$$M = F_1 b \sin \theta = IaBb \sin \theta = |[Iab\mathbf{n}, \mathbf{B}]| = |[\mathbf{p}_m \mathbf{B}]|. \quad (27.5)$$

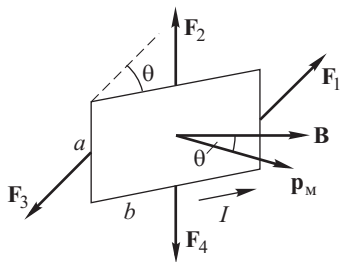


Рис. 103

В цепочке преобразований (27.5) модуль силы $F_1 = IaB$, взятый из формулы (27.4), умножается на плечо $b \sin \theta$ этой силы. Результат умножения представляет собой модуль векторного произведения магнитного момента $\mathbf{p}_m = Iab\mathbf{n}$ и вектора \mathbf{B} . Как легко проверить, вектор \mathbf{M} суммарного момента сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 и вектор $[\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$ сонаправлены. Поэтому имеет место не только равенство модулей векторов (27.5), но и равенство самих указанных векторов:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (27.6)$$

Таким образом, момент сил \mathbf{M} , действующий на рамку с током в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , равен векторному произведению магнитного момента \mathbf{p}_m рамки и вектора \mathbf{B} .

Момент \mathbf{M} стремится повернуть рамку таким образом, чтобы вектор \mathbf{p}_m располагался параллельно вектору магнитной индукции \mathbf{B} . Такое положение является положением устойчивого равновесия рамки.

Формулу (27.6) можно использовать и для вычисления момента сил \mathbf{M} , действующих на расположенный в неоднородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} элементарный контур с магнитным моментом \mathbf{p}_m .

Работа амперовых сил при перемещении контура в магнитном поле.

При перемещении в магнитном поле проводника с током, в том числе, замкнутого проводящего контура, силы Ампера совершают работу. Получим формулу, позволяющую вычислять эту работу, на примере замкнутого проводящего прямоугольного контура, одна из сторон которого представляет собой подвижную перемычку длины l . Контур находится в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен к его плоскости (рис. 104). Сила тока в контуре равна I .

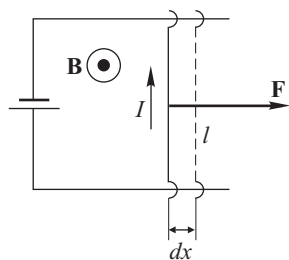


Рис. 104

Модуль силы Ампера, действующей на подвижную перемычку, равен (см. (24.1)):

$$F = IlB. \quad (27.7)$$

При перемещении перемычки на расстояние dx сила F (27.7) совершает работу:

$$\delta A = Fdx = IlBdx = IBdS = Id\Phi, \quad (27.8)$$

где $dS = ldx$ — приращение площади контура, $d\Phi = BdS$ — приращение потока вектора \mathbf{B} через поверхность, ограниченную контуром.

Как следует из (27.8), элементарная работа δA амперовых сил при изменении положения в пространстве проводящего замкнутого контура с током (проводника с током) равна произведению силы тока I на величину $d\Phi$ приращения потока вектора магнитной индукции \mathbf{B} через поверхность, ограниченную контуром:

$$\delta A = Id\Phi. \quad (27.9)$$

Если в магнитном поле перемещается незамкнутый проводник с током, величина $d\Phi$ в формуле (27.9) равна потоку вектора \mathbf{B} через поверхность, описываемую («заметаемую») этим проводником при его движении.

Можно показать, что формулой (27.9) можно пользоваться и для вычисления работы амперовых сил при перемещении проводящего замкнутого контура (проводника) произвольной формы в неоднородном магнитном поле.

Если сила тока в контуре поддерживается постоянной, работа приложенных к контуру амперовых сил при перемещении контура равна

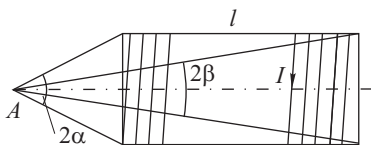
$$A = \int_1^2 I d\Phi = I (\Phi_2 - \Phi_1), \quad (27.10)$$

где Φ_1 и Φ_2 — поток вектора \mathbf{B} через ограниченную контуром поверхность в начальном и конечном положении контура.

Задачи

5.1. Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A , из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β (рис. 5.1). Соленоид состоит из N витков провода, равномерно намотанных по длине l , и по нему течет ток силой I .

5.2. Длинный проводник с током $I = 5,0$ А изогнут под прямым углом. Найти магнитную индукцию B в точке, которая отстоит от плоскости проводника на $l = 35$ см и находится на перпендикуляре к проводникам, проходящем через точку изгиба.



К задаче 5.1

5.3. Внутри однородного длинного прямого провода круглого сечения имеется круглая длинная цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние, заданное вектором \mathbf{l} . По проводу течет постоянный ток плотности \mathbf{j} . Найти индукцию магнитного поля внутри полости.

5.4. Длинный тонкий многovitковый соленоид с поверхностной плотностью тока i и площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$ согнут так, что его ось образует половину окружности радиусом R . Найти величину магнитного поля B в центре этой окружности.

5.5. Постоянный ток I течет по длинному прямому проводу и далее растекается радиально-симметрично по проводящей плоскости, перпендикулярной к проводу. Найти индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 28. Вектор намагниченности и его свойства

Намагничивание вещества. Все тела, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, можно разделить по их способности или неспособности притягивать к себе предметы из железа, например, канцелярские скрепки, кнопки и т. д. О телах, притягивающих к себе такие предметы, мы говорим как о намагниченных веществах или постоянных магнитах. Далеко не все вещества способны приобретать и проявлять свойства постоянных магнитов.

Если тело намагничено, в окружающем его пространстве существует магнитное поле, источником которого служат текущие внутри вещества замкнутые токи. Характеристикой всякого замкнутого контура с током служит его магнитный момент. Тело из намагниченного вещества обладает магнитным моментом. При внесении во внешнее магнитное поле все вещества намагничиваются в той или иной степени. При выключении внешнего поля у некоторых веществ намагниченность сохраняется (ферромагнетики), у других — пропадает (парамагнетики и диамагнетики).

Явление *намагничивания* — это способность вещества приобретать магнитный момент при его внесении во внешнее магнитное поле. *Магнетиками* называются вещества, способные намагничиваться.

Рассмотрим вещество, которое в отсутствие внешнего магнитного поля не обладает свойствами постоянного магнита, то есть не порождает в окружающем пространстве магнитное поле и его магнитный момент равен нулю. Механизм намагничивания под действием внешнего магнитного поля можно представить следующим образом.

Рассмотрим случай *парамагнитных* веществ или *парамагнетиков*. Каждая молекула такого вещества обладает собственным магнитным моментом \mathbf{p}_{mi} , наличие которого обусловлено внутримолекулярным движением заряженных частиц. Так, движущийся вокруг атомного ядра электрон можно рассматривать как круговой ток, который характеризуется определенным магнитным моментом. В отсутствие внешнего магнитного поля благодаря хаотическому тепловому движению молекул их собственные магнитные моменты \mathbf{p}_{mi} ориентированы беспорядочно. В среднем суммарный магнитный момент всех молекул и, следовательно, магнитный момент вещества в целом равны нулю (рис. 105). При включении внешнего магнитного поля с индукцией \mathbf{B} собственные магнитные моменты молекул ориентируются преимущественно вдоль

линий магнитной индукции (см. § 27). В результате вещество намагничивается, его магнитный момент становится отличным от нуля.

Рассмотрим другой случай — намагничивание *диамагнитных веществ*. Собственный магнитный момент молекул диамагнитного вещества в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю. Это означает, что сумма всех микроскопических внутренних токов в каждой молекуле вещества равна нулю. При включении

внешнего магнитного поля у каждой молекулы появляется магнитный момент \mathbf{p}_{Mi} , ориентированный вдоль линий магнитной индукции в направлении, противоположном вектору \mathbf{B} (рис. 106). Таким образом вещество намагничивается, его магнитный момент становится отличным от нуля.

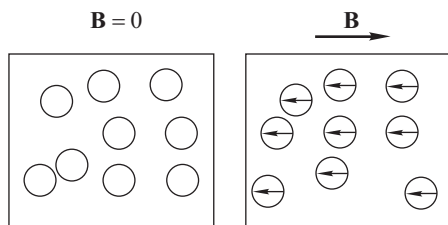


Рис. 106

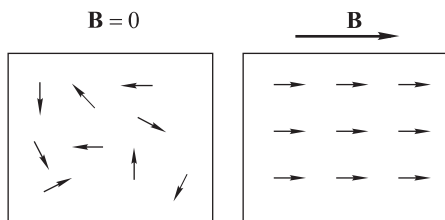


Рис. 105

Вектор намагниченности \mathbf{J} . Для количественной характеристики намагниченности вещества вводится *вектор намагниченности \mathbf{J}* .

Рассмотрим физически бесконечно малый объем ΔV вещества. Магнитные моменты молекул, расположенных внутри этого объема, обозначим через \mathbf{p}_{Mi} . Вектор намагниченности \mathbf{J} определяется выражением:

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_{Mi}}{\Delta V}, \quad (28.1)$$

где суммирование ведется по всем молекулам в объеме ΔV (по индексу i). Вектор \mathbf{J} представляет собой характеристику вещества в точке. Физический смысл намагниченности состоит в том, что модуль вектора \mathbf{J} численно равен магнитному моменту вещества, отнесенному к единице объема.

Единица намагниченности — ампер, деленный на метр (А/м).

Вещество называется однородно намагниченным, если вектор \mathbf{J} одинаков во всех его точках.

Токи намагничивания. Молекулярными токами называются локализованные в каждой молекуле вещества микроскопические круговые токи, обусловленные внутренним движением заряженных частиц (электронов).

Молекулярные токи определяют величину собственного магнитного момента молекулы. Полезно помнить, что вектор магнитного момента \mathbf{p}_{Mi} молекулы перпендикулярен плоскости, в которой движутся заряженные микроскопические частицы, порождающие молекулярный ток, то есть \mathbf{p}_{Mi} перпендикулярен плоскости молекулярного тока. Под действием внешнего магнитного поля молекулы ориентируются таким образом, что вектор магнитного момента \mathbf{p}_{Mi} преимущественно располагается вдоль линий поля. Хаотическое тепловое движение молекул стремится нарушить упорядоченную ориентацию молекулярных магнитных моментов. Степень упорядоченности тем выше, чем больше величина внешнего поля.

Токами намагничивания называются макроскопические токи, которые возникают на поверхности и в объеме намагниченного тела и представляют собой результат совместного действия (эффективную сумму) всех молекулярных токов. Возбуждаемое токами намагничивания макроскопическое магнитное поле такое же, как магнитное поле молекулярных токов вместе взятых. Токи намагничивания отличаются от токов проводимости тем, что они не связаны с перемещением в веществе свободных зарядов — носителей тока.

На рис. 107 изображены молекулярные токи в однородно намагниченном теле. В окрестности любой точки внутри тела локализованы молекулярные токи одинаковой величины, но противоположно направленные. Поэтому суммарный молекулярный ток, и, следовательно, ток намагничивания внутри тела равны нулю. Во всех молекулах, расположенных вблизи поверхности тела, молекулярные токи, соприкасающиеся с этой поверхностью, имеют одинаковое направление. Их можно заменить одним эффективным поверхностным макроскопическим током I_{M} , который и называется током намагничивания. Ток намагничивания отличается от обычного тока проводимости тем, что порождающие его заряженные частицы не переносятся по всему объему тела, их движение осуществляется только в пределах одной молекулы.

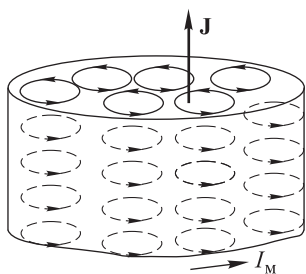


Рис. 107

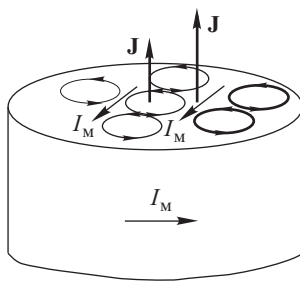


Рис. 108

На рис. 108 схематически изображено неоднородно намагниченное тело. Неоднородность подразумевает, что молекулярные токи и вектор

намагниченности \mathbf{J} изменяются при переходе от одной точки тела к другой, так что локализованные в соседних молекулах микроскопические токи не компенсируют друг друга. В любой точке внутри тела суммарный молекулярный ток и, следовательно, ток намагничивания I_M отличны от нуля. В рассматриваемом случае поверхностные молекулярные токи, как и в однородно намагниченном теле, можно заменить эффективным макроскопическим током намагничивания I_M .

Рисунки 107 и 108 демонстрируют, как соотносятся между собой направление вектора намагниченности \mathbf{J} и направление тока намагничивания в намагниченном веществе. Поскольку плоскости молекулярных круговых токов перпендикулярны соответствующим векторам \mathbf{p}_{mi} магнитных моментов молекул, а ток намагничивания I_M является эффективной суммой молекулярных токов, направление тока намагничивания перпендикулярно вектору намагниченности \mathbf{J} вещества, который в свою очередь является суммой магнитных моментов молекул \mathbf{p}_{mi} .

Удобство введения понятия тока намагничивания определяется следующим обстоятельством. Если известны текущие по проводникам токи проводимости, а также токи намагничивания, которые существуют как на поверхности, так и внутри магнитного вещества (магнетика), то индукция магнитного поля в любой точке пространства, в том числе, внутри магнетика, может рассчитываться с помощью закона Био–Савара с учетом токов проводимости и токов намагничивания.

Теорема о циркуляции вектора намагниченности. Формулировка теоремы состоит в следующем.

Циркуляция вектора намагниченности \mathbf{J} по произвольному замкнутому контуру L равна току намагничивания I_M , охватываемому этим контуром или, иначе говоря, пересекающему ограниченную контуром поверхность:

$$\oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = I_M. \quad (28.2)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L , расположенный внутри намагниченного вещества (магнетика) и ограниченную этим контуром, «натянутую» на него поверхность S (рис. 109). В правую часть выражения (28.2) теоремы

о циркуляции входит величина I_M тока намагничивания, пересекающего поверхность S . Ток намагничивания представляет собой сумму молекулярных круговых токов. Всякий молекулярный круговой ток, который непосредственно не охватывает в каком-либо месте линию L , обладает следующим свойством: пересекает рассматриваемую поверхность S дважды, причем направления тока в точках его пересечения

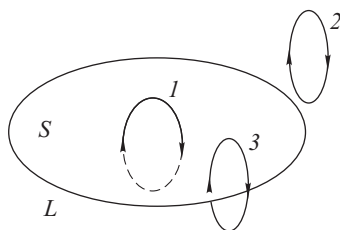


Рис. 109

с поверхностью противоположны друг другу (ток 1), либо вообще не пересекает поверхность S , находясь вне контура (ток 2). Молекулярные токи, подобные токам 1 и 2, не вносят вклад в величину тока намагничивания I_M . Следовательно, для определения I_M в правой части (28.2) достаточно рассмотреть только молекулярные токи, непосредственно охватывающие в каком-либо месте контур L (ток 3). Величина I_M равна сумме подобных токов.

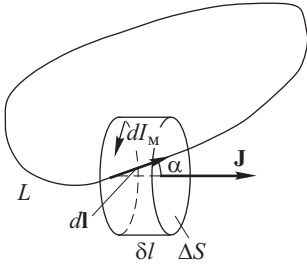


Рис. 110

Мысленно выделим внутри рассматриваемого магнетика бесконечно малый объем в форме диска с площадью основания ΔS и высотой δl , ось симметрии которого сонаправлена с вектором \mathbf{J} в том месте, где расположен диск, а боковая поверхность охватывает один из участков контура обхода L (рис. 110). Объем диска настолько мал, что вектор \mathbf{J} можно считать одинаковым во всех его точках. Внутри

диска, между его основаниями расположен бесконечно малый участок контура обхода L длиной dl . Угол между этим отрезком и вектором \mathbf{J} равен α . По боковой поверхности диска течет ток намагничивания dI_M в направлении, перпендикулярном вектору \mathbf{J} . Силу тока dI_M можно выразить через плотность i_M поверхностного тока намагничивания и высоту диска δl :

$$dI_M = i_M \delta l. \quad (28.3)$$

Диск можно рассматривать в качестве замкнутого контура с текущим по нему током силой dI_M (ток, текущий по боковой поверхности диска). Модуль магнитного момента ΔJ такого контура равен произведению силы тока (28.3) на площадь контура ΔS :

$$\Delta J = dI_M \Delta S = i_M \delta l \Delta S. \quad (28.4)$$

С другой стороны, модуль ΔJ магнитного момента диска можно рассчитать, умножив магнитный момент J единицы объема магнетика на объем диска $\Delta S \delta l$:

$$\Delta J = J \Delta S \delta l. \quad (28.5)$$

Приравняв правые части равенств (28.4) и (28.5), найдем:

$$i_M \delta l \Delta S = J \Delta S \delta l.$$

Отсюда:

$$J = i_M. \quad (28.6)$$

Равенство (28.6) означает, что модуль вектора намагниченности J численно равен поверхностной плотности тока намагничивания i_M .

Используя (28.6), представим силу тока намагничивания dI_M в (28.3) в виде скалярного произведения векторов намагниченности \mathbf{J} и элемента $d\mathbf{l}$ контура обхода L , расположенного внутри рассматриваемого бесконечно малого диска (см. рис. 110):

$$dI_M = i_M \delta l = J dl \cos \alpha = \mathbf{J} d\mathbf{l}, \quad (28.7)$$

где высота δl диска выражена через длину dl элемента контура и угол α : $\delta l = dl \cos \alpha$.

Весь контур L можно мысленно разделить на множество элементарных участков длиной dl , каждый из которых находится внутри элементарного диска из магнитного вещества, подобного рассмотренному выше. Формула (28.7) справедлива для любого элемента $d\mathbf{l}$ контура L и позволяет рассчитать ток намагничивания, охватывающий этот элемент.

Суммарный ток намагничивания I_M , охватываемый контуром L , равен сумме токов dI_M , вычисляемых по формуле (28.7) для всех элементов контура. Таким образом, искомый ток намагничивания I_M равен интегралу по замкнутому контуру L от правой части равенства (28.7):

$$I_M = \oint_L dI_M = \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}. \quad (28.8)$$

Формула (28.8) совпадает с выражением (28.2). Тем самым теорема о циркуляции вектора намагниченности \mathbf{J} доказана.

Дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора \mathbf{J} можно получить из (28.8) делением обеих частей этого равенства на площадь поверхности, охватываемой замкнутым контуром L и последующим предельным переходом при стремлении этой площади к нулю (то есть при стягивании контура обхода L в точку). Теорема о циркуляции вектора \mathbf{J} в дифференциальной форме имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{J} = \mathbf{j}_M, \quad (28.9)$$

где \mathbf{j}_M — объемная плотность тока намагничивания.

§ 29. Вектор напряженности магнитного поля. Магнитные свойства вещества

Напряженность магнитного поля. Вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} определяется выражением:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}, \quad (29.1)$$

где \mathbf{B} — вектор магнитной индукции поля, \mathbf{J} — вектор намагниченности вещества, μ_0 — магнитная постоянная.

Единица напряженности \mathbf{H} магнитного поля — ампер, деленный на метр (А/м).

Магнитная восприимчивость. Количественная связь между намагниченностью вещества \mathbf{J} и параметрами магнитного поля устанавливается экспериментально. Вектор намагниченности \mathbf{J} принято связывать функциональной зависимостью с напряженностью \mathbf{H} магнитного поля, а не с магнитной индукцией \mathbf{B} . В основном мы будем рассматривать такие способные к намагничиванию вещества (магнетики), для которых связь между векторами \mathbf{J} и \mathbf{H} является линейной.

Опытным путем показано, что для многих веществ намагниченность \mathbf{J} пропорциональна напряженности \mathbf{H} магнитного поля:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (29.2)$$

где χ — коэффициент пропорциональности, называемый *магнитной восприимчивостью* вещества. Магнитная восприимчивость χ является безразмерной величиной.

Пара-, диа- и ферромагнетики. По характеру связи (29.2) между векторами \mathbf{J} и \mathbf{H} вещества делятся на три класса.

Парамагнетиками называются вещества, для которых магнитная восприимчивость χ является положительной величиной: $\chi > 0$. Векторы \mathbf{J} и \mathbf{H} в парамагнетиках сонаправлены. Парамагнетиком является, например, алюминий, для которого магнитная восприимчивость $\chi \approx 2,1 \cdot 10^{-5}$.

Диамагнетиками называются вещества, для которых величина χ отрицательна: $\chi < 0$. В диамагнетиках векторы \mathbf{J} и \mathbf{H} направлены противоположно. Представителем класса диамагнетиков является серебро, для которого $\chi \approx -2,6 \cdot 10^{-5}$.

У веществ, называемых *ферромагнетиками*, связь между намагниченностью \mathbf{J} и напряженностью поля \mathbf{H} не описывается простой формулой (29.2), зависимость \mathbf{J} от \mathbf{H} неоднозначная. График зависимости \mathbf{J} от \mathbf{H} у ферромагнетиков называется *петлей гистерезиса*. Пример петли гистерезиса представлен на рис. 111.

Если размагниченный образец ферромагнетика, у которого $\mathbf{J} = 0$, поместить во внешнее магнитное поле, то с увеличением модуля напряженности поля \mathbf{H} намагниченность \mathbf{J} сначала плавно увеличивается, а затем практически перестает меняться, достигнув

насыщения при $H = H_{\text{нас}}$ (см. участок OA графика на рис. 111). При первоначальном намагничивании исходно размагниченного вещества под действием внешнего магнитного поля \mathbf{H} векторы \mathbf{J} и \mathbf{H} сонаправлены.

Рассмотрим изменение состояния вещества, которому соответствует участок ABC графика. При уменьшении напряженности внешнего

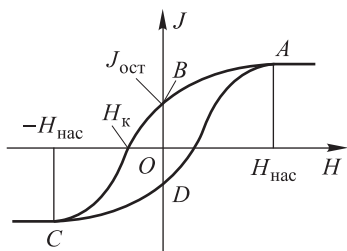


Рис. 111

магнитного поля H от величины $H_{\text{нас}}$ до нуля намагниченность не исчезает, а имеет значение $J_{\text{ост}}$, называемое *остаточной намагниченностью*. При последующем постепенном увеличении вектора \mathbf{H} в направлении, противоположном первоначальному, намагниченность \mathbf{J} вещества плавно уменьшается до нуля, а затем растет в направлении, противоположном первоначальному, вновь достигая насыщения, когда модуль H равен $H_{\text{нас}}$ (точка C).

Явление гистерезиса проявляется, в частности, в том, что участок AB кривой размагничивания не совпадает с кривой OA первоначального намагничивания. Так, при уменьшении внешнего магнитного поля от величины $H_{\text{нас}}$ до нуля ($H = 0$) вещество остается частично намагниченным ($J_{\text{ост}} \neq 0$). Чтобы полностью размагнитить вещество, то есть перевести его из состояния с намагниченностью $J_{\text{ост}}$ в состояние с $J = 0$, вектор напряженности внешнего поля \mathbf{H} должен изменить направление на противоположное первоначальному (при котором происходило намагничивание), достигнув при этом по модулю величины H_k . Значение поля H_k , при котором вещество полностью размагничивается, называется *коэрцитивной силой*. При увеличении модуля внешнего магнитного поля от нуля до H_k в направлении, противоположном первоначальному, векторы \mathbf{H} и \mathbf{J} противоположны друг другу.

Пусть намагниченность образца вещества достигла насыщения в точке C . Процесс изменения направления вектора \mathbf{J} на противоположное — перемагничивание образца — можно повторить, сначала уменьшая поле \mathbf{H} до нуля, затем увеличивая его по модулю в противоположном направлении. Участок CDA графика, соответствующий этому процессу, не совпадает с участком ABC . Таким образом, на графике зависимости намагниченности J вещества от величины и направления напряженности магнитного поля \mathbf{H} возникает петля гистерезиса, характерная для ферромагнитных материалов.

График зависимости J от H , представленный на рис. 111, позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, у ферромагнетиков намагниченность \mathbf{J} зависит не только от величины напряженности магнитного поля \mathbf{H} , но и от предыстории образца. Во-вторых, при намагничивании образца (участок OA графика) зависимость $J(H)$ не является строго линейной. Соответственно, магнитная восприимчивость χ ферромагнетика, если рассматривать ее как отношение J к H , не является постоянной величиной. По порядку величины магнитная восприимчивость χ_f ферромагнетика составляет $\sim 10^3 \div 10^4$ и многократно превышает магнитную восприимчивость пара- и диамагнетиков ($\chi_p \sim 10^{-5}$, $\chi_{\text{диа}} \sim -10^{-5}$). Примерами веществ из класса ферромагнетиков являются железо, кобальт, никель.

Если образец ферромагнитного вещества нагреть до температуры, превышающей так называемую *температуру Кюри* (точка Кюри), то остаточная намагниченность образца исчезает, вещество размагничивается. В состояниях с температурой, превышающей точку Кюри,

ферромагнитное вещество становится парамагнитным. Точка Кюри составляет для железа 1043 К, для кобальта 1403 К, для никеля 631 К.

Магнитная проницаемость вещества. Существует простая связь между индукцией \mathbf{B} и напряженностью \mathbf{H} магнитного поля для однородных и изотропных пара- и диамагнетиков. Выразив \mathbf{B} из формулы (29.1) и подставив в полученное выражение $\mathbf{j} = \chi \mathbf{H}$ из (29.2), найдем:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi) \mathbf{H}. \quad (29.3)$$

Магнитной проницаемостью μ вещества называется величина, равная:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (29.4)$$

С учетом определения (29.4) связь (29.3) между \mathbf{B} и \mathbf{H} для пара- и диамагнетиков выглядит так:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (29.5)$$

Магнитная проницаемость μ , как и магнитная восприимчивость χ , безразмерная величина. Для парамагнетиков μ незначительно превышает единицу, а для диамагнетиков μ несколько меньше единицы.

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Рассмотрим намагниченное вещество. В присутствии такого вещества магнитная индукция \mathbf{B} в любой точке пространства, в том числе, внутри вещества, определяется не только текущими в проводниках токами проводимости, если таковые имеются, но и токами намагничивания, которые существуют в магнетике. В отличие от магнитной индукции \mathbf{B} при расчете напряженности магнитного поля \mathbf{H} необходимо учитывать только токи проводимости. Это следует из теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} , которую предстоит рассмотреть.

Циркуляция вектора напряженности \mathbf{H} магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром или, иначе говоря, пересекающих поверхность, ограниченную контуром:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}}, \quad (29.6)$$

где $I_{\text{пр}} = \sum_k I_k$ — алгебраическая сумма токов проводимости. При вычислении величины $I_{\text{пр}}$ любое слагаемое в сумме (сила тока I_k) учитывается со знаком «плюс», если направление тока I_k и направление обхода контура L , которое было выбрано для вычисления интеграла $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$, связаны правилом правого винта. Слагаемое I_k учитывается в сумме со знаком «минус» в противном случае.

Доказательство. Выберем произвольный контур обхода L и воспользуемся теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции \mathbf{B} (см. (26.3)):

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{пр}} + I_{\text{м}}), \quad (29.7)$$

где $I_{\text{пр}}$ — ток проводимости, $I_{\text{м}}$ — ток намагничивания, оба тока охватываются контуром L . Преобразуем это равенство:

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} d\mathbf{l} - I_{\text{м}} = I_{\text{пр}}. \quad (29.8)$$

Согласно теореме о циркуляции вектора намагниченности \mathbf{J} (28.2) ток намагничивания $I_{\text{м}}$ равен:

$$I_{\text{м}} = \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}. \quad (29.9)$$

Подставив выражение для $I_{\text{м}}$ (29.9) в равенство (29.8), получим:

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = I_{\text{пр}},$$

или с учетом определения (29.1) напряженности магнитного поля \mathbf{H} :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}},$$

что совпадает с (29.6). Теорема доказана.

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пр}}, \quad (29.10)$$

где $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости. Равенство (29.10) означает, что ротор вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} в любой точке вещества равен плотности тока проводимости в этой точке. Дифференциальная форма рассматриваемой теоремы может быть получена из ее интегральной формы (29.6) (см. текст перед формулой (28.9)).

В качестве примера использования теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} рассчитаем индукцию магнитного поля в бесконечно длинном соленоиде, заполненном однородным изотропным пара- или диамагнетиком. По обмотке соленоида течет ток силой I . Магнитная проницаемость вещества, заполняющего соленоид, равна μ ; число витков соленоида на единицу его длины — n .

Пусть длина соленоида много больше его диаметра, так что соленоид можно считать бесконечно длинным, а поле внутри него — однородным. Вектор напряженности \mathbf{H} параллелен оси соленоида. Выберем плоский прямоугольный контур обхода 1–2–3–4–5–6–1, который обозначим через L (рис. 112).

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} в применении к выбранному контуру L имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}}, \quad (29.11)$$

где $I_{\text{пр}}$ — суммарный ток проводимости, пересекающий ограниченную контуром L поверхность.

Циркуляцию вектора \mathbf{H} по контуру L можно представить как сумму интегралов по различным участкам контура обхода $1-2-3-4-5-6-1$, а именно:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_{3-4-5-6} \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_6^1 \mathbf{H} d\mathbf{l}. \quad (29.12)$$

На участках $2-3$ и $6-1$ вектор \mathbf{H} перпендикулярен вектору $d\mathbf{l}$ любого элемента контура, поэтому равны нулю интегралы $\int_2^3 \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ и $\int_6^1 \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$. На участке $3-4-5-6$ контура обхода, расположенном снаружи соленоида, поле \mathbf{H} равно нулю. Соответствующий данному участку интеграл также равен нулю: $\int_{3-4-5-6} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$. На участке $1-2$ вектор \mathbf{H} одинаков во всех точках и сонаправлен с вектором $d\mathbf{l}$ любого элемента контура. Соответствующий интеграл равен

$$\int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_1^2 H dl = H \int_1^2 dl = Hl, \quad (29.13)$$

где l — длина участка $1-2$ контура обхода.

Из (29.12) с учетом (29.13) найдем циркуляцию вектора \mathbf{H} :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} = Hl. \quad (29.14)$$

Сила тока $I_{\text{пр}}$ в правой части (29.11) равна произведению числа витков соленоида nl , пересекающих ограниченную контуром L поверхность, и силы тока I в каждом витке:

$$I_{\text{пр}} = nlI. \quad (29.15)$$

Подставив величины циркуляции (29.14) и силы тока проводимости (29.15) в (29.11), получим

$$Hl = nlI.$$

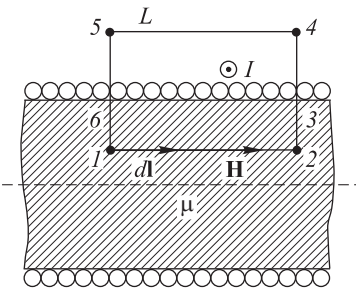


Рис. 112

Отсюда напряженность поля H в бесконечно длинном соленоиде равна

$$H = nI. \quad (29.16)$$

Учитывая соотношение (29.5) между индукцией B и напряженностью H магнитного поля в однородном изотропном магнетике:

$$B = \mu_0 \mu H,$$

и подставив в него H из (29.16), получим формулу для расчета магнитной индукции B поля в бесконечно длинном соленоиде, заполненном веществом с магнитной проницаемостью μ :

$$B = \mu_0 \mu nI. \quad (29.17)$$

§ 30. Граничные условия для векторов магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Рассмотрим поверхность раздела двух однородных изотропных магнетиков, которые обозначим через 1 и 2. Установим, как меняется нормальная компонента вектора \mathbf{B} и тангенциальная компонента вектора \mathbf{H} при переходе через эту поверхность.

Граничные условия для нормальной компоненты вектора магнитной индукции. Согласно теореме Гаусса, поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (30.1)$$

Выберем в качестве поверхности интегрирования S прямой круговой цилиндр с площадью оснований dS , высота которого мала настолько, что потоком вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь. Основания цилиндра параллельны поверхности раздела сред и расположены по разные стороны от нее (рис. 113). Основания цилиндра представляют собой элементарные площадки, в пределах каждой из которых магнитная индукция постоянна. Индукция магнитного поля в первой и второй среде в точках, расположенных на основаниях цилиндра, соответственно равна \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 . Поток вектора \mathbf{B} через

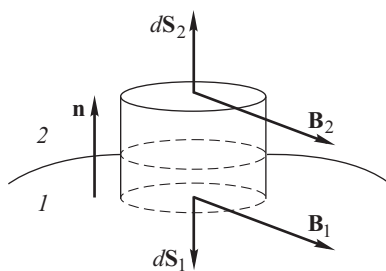


Рис. 113

поверхность S цилиндра приблизительно равен сумме потоков через основания и может быть представлен в виде:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{\text{бок}} \mathbf{B} d\mathbf{S} + \int_{\text{осн}} \mathbf{B} d\mathbf{S} \approx \int_{\text{осн}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{B}_2 d\mathbf{S}_2 = \\ = B_{2n} dS - B_{1n} dS, \quad (30.2)$$

где $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$ — векторы элементарных площадок, которыми являются основания цилиндра; B_{1n} и B_{2n} — проекции векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 на направление общей нормали \mathbf{n} , проведенной из первой среды во вторую. С учетом (30.1) из (30.2) получим

$$B_{2n} dS - B_{1n} dS = 0, \\ B_{2n} = B_{1n}. \quad (30.3)$$

Выражение (30.3) представляет собой граничные условия для нормальной компоненты вектора магнитной индукции \mathbf{B} на поверхности раздела магнетиков. Согласно (30.3) при переходе через поверхность раздела нормальная компонента вектора \mathbf{B} не претерпевает скачка (изменяется непрерывно).

Граничные условия для тангенциальной компоненты вектора напряженности магнитного поля. Пусть поверхностная плотность тока проводимости, который течет по поверхности раздела магнетиков 1 и 2, равна \mathbf{i} .

Циркуляция вектора \mathbf{H} напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна току проводимости $I_{\text{пр}}$, охватываемому этим контуром:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}}. \quad (30.4)$$

Применим теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} (30.4), выбрав в качестве контура обхода L прямоугольник 1–2–3–4, у которого длина

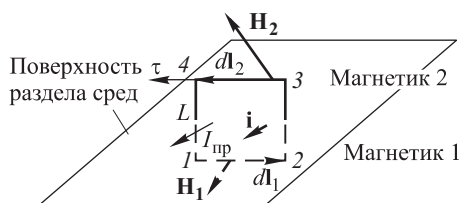


Рис. 114

1–2 равна dl , а ширина является величиной более высокого порядка малости по сравнению с dl (рис. 114). Участки контура 1–2 и 3–4 параллельны поверхности раздела сред 1 и 2 и расположены по разные стороны от нее. Чтобы не перегружать расчеты геометрическими построениями, будем считать, что вектор

плотности тока проводимости \mathbf{i} , текущего по поверхности раздела сред, перпендикулярен плоскости прямоугольника 1–2–3–4. Напряженность магнитного поля по разные стороны границы раздела магнетиков в

точках, принадлежащих отрезкам 1–2 и 3–4 контура, равна **H**₁ и **H**₂ соответственно. В пределах каждого из этих отрезков бесконечно малой длины dl векторы напряженности магнитного поля **H**₁ и **H**₂ можно считать приблизительно постоянными.

Вычислим циркуляцию вектора **H** по контуру L :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{H} d\mathbf{l} \approx \\ \approx \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{H} d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{H}_2 d\mathbf{l}_2 = H_{2\tau} dl - H_{1\tau} dl. \quad (30.5)$$

В преобразованиях (30.5) использованы обозначения: $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ — векторы длиной dl , направления которых совпадают с направлением обхода контура L на участках 1–2 и 3–4 соответственно; $H_{1\tau}$ и $H_{2\tau}$ — проекции векторов **H**₁ и **H**₂ на направление касательной к поверхности раздела, заданной единичным вектором **τ**, который сонаправлен с вектором $d\mathbf{l}_2$. Величиной интегралов на участках 2–3 и 4–1 контура пренебрегаем, поскольку по условию выбора контура L их длина мала по сравнению с длиной dl двух других участков 1–2 и 3–4.

Сила тока проводимости, охватываемого контуром обхода L 1–2–3–4, равна (см. рис. 114):

$$I_{\text{пр}} = i dl, \quad (30.6)$$

где i — модуль вектора **i**.

Подставив циркуляцию вектора **H** из (30.5) и силу тока проводимости $I_{\text{пр}}$ из (30.6) в (30.4), получим

$$H_{2\tau} dl - H_{1\tau} dl = i dl.$$

Отсюда найдем граничные условия для тангенциальной компоненты вектора **H**:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i. \quad (30.7)$$

Если на поверхности раздела магнетиков токи проводимости отсутствуют, то есть $i = 0$, граничные условия для тангенциальной компоненты принимают следующий вид:

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}. \quad (30.8)$$

Преломление линий вектора магнитной индукции. В качестве примера использования граничных условий для векторов **B** и **H** рассмотрим преломление линий вектора магнитной индукции **B** однородного магнитного поля на плоской границе раздела двух веществ, магнитные проницаемости которых равны μ_1 и μ_2 .

Пусть в первой среде вектор магнитной индукции равен **B**₁, линии магнитной индукции составляют с нормалью к поверхности раздела

угол α_1 , во второй среде вектор магнитной индукции равен \mathbf{B}_2 , а угол между нормалью к поверхности раздела и линиями магнитной индукции α_2 (рис. 115). Найдем связь между α_1 и α_2 .

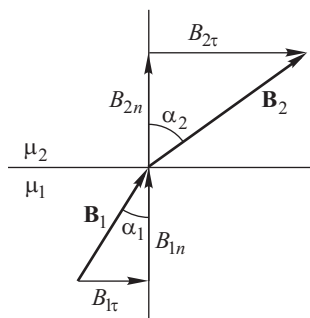


Рис. 115

Тангенсы углов α_1 и α_2 равны отношению тангенциальных и нормальных компонент векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 . Вычислим отношение:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_{2\tau}/B_{2n}}{B_{1\tau}/B_{1n}} = \frac{B_{2\tau}B_{1n}}{B_{2n}B_{1\tau}}. \quad (30.9)$$

Из (30.3) следует:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (30.10)$$

Граничные условия (30.8) для тангенциальной компоненты вектора \mathbf{H} запишем с учетом соотношений: $\mathbf{B}_1 = \mu_0\mu_1\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mu_0\mu_2\mathbf{H}_2$, которые справедливы и для тангенциальных компонент \mathbf{B} и \mathbf{H} . Итак:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau},$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}. \quad (30.11)$$

Отношение (30.9) с учетом (30.10) и (30.11) равно

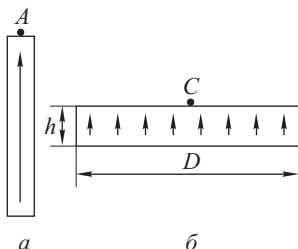
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_{2\tau}B_{1n}}{B_{2n}B_{1\tau}} = \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (30.12)$$

Равенство (30.12) выражает закон преломления линий магнитной индукции на плоской границе магнетиков.

Задачи

6.1. Ток какой силы I нужно пустить по длинному тонкому однослойному соленоиду с числом витков на единицу длины n , чтобы магнитная индукция \mathbf{B} поля в соленоиде была равна индукции постоянного магнита тех же размеров? Намагниченность \mathbf{J} постоянного магнита одинакова во всех его точках и направлена вдоль оси симметрии.

6.2. Длинный цилиндр изготовлен из материала с замороженной однородной намагниченностью, направленной вдоль его оси (рис. 6.2 а). Магнитная индукция в точке A оказалась равной B_A . Найти приближенно индукцию B_C в точке C вблизи

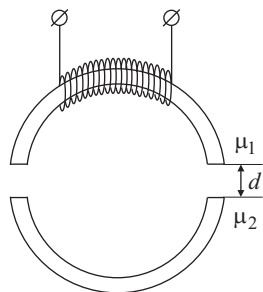


К задаче 6.2

основания короткого цилиндра, изготовленного из того же материала, если $h \ll D$, где h — высота, D — диаметр цилиндра (рис. 6.2 б).

6.3. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ . Найти: а) поверхностный ток намагничивания $I_{\text{пов}}$; б) объемный ток намагничивания $I_{\text{об}}$.

6.4. Тороидальный сердечник составлен из двух половинок, сделанных из различных материалов с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (рис. 6.4). Общая длина сердечника, включая два небольших зазора величиной d , равна L . По обмотке сердечника, имеющей N витков, течет ток I . Определить величину магнитной индукции B в зазоре. Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебречь.



К задаче 6.4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 31. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Вихревое электрическое поле

Магнитный поток. *Магнитным потоком* через некоторую поверхность S называется поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (31.1)$$

Единица магнитного потока — *вебер* (Вб). Один вебер равен магнитному потоку через поверхность плоского контура площадью 1 м^2 , расположенного в однородном магнитном поле с индукцией в 1 Тл, вектор которой перпендикулярен плоскости контура ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$). Магнитный поток Φ является скалярной алгебраической величиной, знак которой зависит от направления единичной нормали \mathbf{n} к поверхности S (рис. 116). При изменении направления \mathbf{n} знак потока изменяется на противоположный.

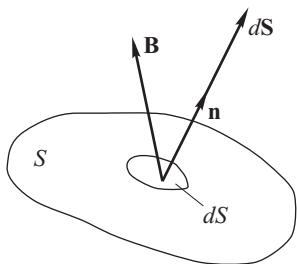


Рис. 116

Закон электромагнитной индукции Фарадея. Рассмотрим замкнутый проводящий контур L в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} (рис. 117). Магнитный поток Φ через поверхность, ограниченную контуром, можно вычислить с помощью формулы (31.1).

Согласно закону электромагнитной индукции, открытому Фарадеем в 1831 г., *при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в контуре возникает электрический ток, называемый индукционным*. Величина электродвижущей силы индукции (ЭДС индукции) равна

$$\mathcal{E}_и = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (31.2)$$

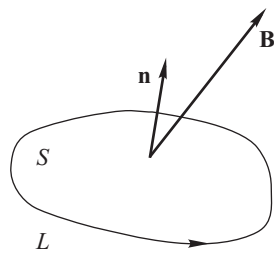


Рис. 117

Как указывалось выше, для расчета магнитного потока Φ через поверхность S , ограниченную контуром L , необходимо определиться с направлением нормали \mathbf{n} к поверхности S .

Если направление нормали \mathbf{n} задано, то тем самым определено положительное направление обхода контура: положительное направление обхода замкнутого контура связано правилом правого винта с направлением нормали \mathbf{n} к поверхности, ограниченной контуром (см. рис. 117). Если при расчете по формуле (31.2) ЭДС индукции, действующей в контуре, величина \mathcal{E}_i положительная, это означает, что индукционный ток течет в направлении, совпадающем с положительным направлением обхода контура. Если же \mathcal{E}_i — отрицательная величина, индукционные ток течет в направлении, противоположном положительному направлению обхода контура.

Правило Ленца. В соответствии с установленным опытным путем *правилом Ленца* (1804–1865) индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Например, если магнитный поток Φ через поверхность замкнутого контура по каким-либо причинам увеличивается, индукционный ток будет течь в таком направлении, чтобы магнитное поле индукционного тока, складываясь с внешним магнитным полем, приводило к уменьшению потока Φ .

Природа электромагнитной индукции. Существуют две принципиально разные причины, которые могут вызвать изменение потока Φ через поверхность замкнутого контура: 1) при неизменном магнитном поле изменение положения контура в пространстве (перемещение контура, изменение его формы, вращение и т. д.); 2) при неизменной форме контура и неизменном его положении в пространстве изменение с течением времени индукции \mathbf{B} магнитного поля. Природа электромагнитной индукции в этих двух случаях различна.

Природа электромагнитной индукции в движущемся контуре. Рассмотрим на частном примере явление электромагнитной индукции в движущемся контуре. Плоский проводящий прямоугольный контур, одна из сторон которого представляет собой подвижную перемычку длиной l , находится в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , перпендикулярной плоскости контура (рис. 118). Перемычка движется со скоростью V так, что площадь контура увеличивается. За счет чего возникает ЭДС индукции в контуре?

В материале, из которого изготовлена подвижная перемычка, как в любом проводнике, имеются заряженные микроскопические частицы — носители тока. Если заряд частицы равен q и частица вместе с перемычкой движется со скоростью V в магнитном поле с индукцией B , на нее будет действовать сила Лоренца:

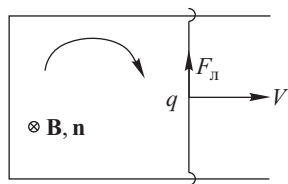


Рис. 118

$$F_L = qVB. \quad (31.3)$$

На рис. 118 указано направление силы Лорентца F_L , действующей на положительный заряд q . Силу Лорентца нужно рассматривать в качестве сторонней силы, благодаря действию которой в контуре течет индукционный ток. Работа силы Лорентца (31.3) при перемещении заряда q вдоль проводника длиной l равна

$$A_{\text{ст}} = F_L l = qVB l. \quad (31.4)$$

ЭДС индукции на участке контура длиной l , который представляет собой движущуюся перемычку, равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль этого участка. Для вычисления ЭДС индукции разделим работу $A_{\text{ст}}$ (31.4) на величину заряда q :

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = VB l = \frac{dx}{dt} B l = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (31.5)$$

где $d\Phi = B dx l$ — приращение магнитного потока через поверхность контура за промежуток времени dt , $|\mathcal{E}_i|$ — модуль ЭДС индукции.

Определим знак вычисленной по формуле (31.5) ЭДС индукции. Если выбрать единичный вектор нормали \mathbf{n} к поверхности контура сонаправленным с вектором \mathbf{B} , то магнитный поток Φ и его приращение $d\Phi$ в рассматриваемом примере являются положительными величинами. При этом сторонняя сила — сила Лорентца — противоположна положительному направлению обхода контура, которое связано правилом правого винта с направлением \mathbf{n} . Следовательно, ЭДС индукции — отрицательная величина. С учетом этого обстоятельства ЭДС индукции \mathcal{E}_i , модуль которой рассчитывается по формуле (31.5), может быть записана в виде

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

что полностью соответствует формуле (31.2), выражающей закон электромагнитной индукции Фарадея.

Можно показать, что во всех случаях, когда ЭДС индукции возникает за счет изменения положения в пространстве или формы замкнутого проводящего контура в постоянном магнитном поле, природа этого явления заключается в действии силы Лорентца на движущиеся вместе с проводниками микроскопические заряды.

Природа электромагнитной индукции в покоем контуре.

Если замкнутый проводящий контур, расположенный в магнитном поле, неподвижен, а само поле изменяется с течением времени, то в контуре возникает ЭДС индукции, течет индукционный ток. Величина ЭДС индукции рассчитывается по формуле (31.2).

Для объяснения этого явления Максвелл предположил, и это было подтверждено результатами многочисленных опытов, что изменяющееся с течением времени магнитное поле с индукцией \mathbf{B} порождает в пространстве (независимо от наличия или отсутствия проводящего контура) электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} , которое называется

вихревым электрическим полем. Силовые линии вихревого электрического поля замкнуты (рис. 119).

Если силовая линия поля замкнута, работа поля при перемещении заряда по совпадающему с силовой линией замкнутому контуру отлична от нуля. Учитывая, что циркуляция вектора напряженности равна работе поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда по замкнутой траектории, приходим к следующему выводу. Справедливая для электростатического поля теорема о циркуляции, согласно которой циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю, не выполняется для вихревого электрического поля. В этом состоит принципиальное отличие вихревого электрического поля от поля электростатического.

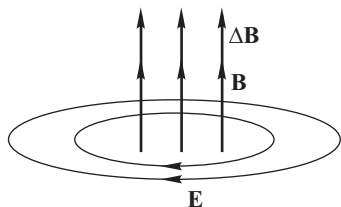


Рис. 119

Если в области пространства, где порождается вихревое электрическое поле, расположен замкнутый проводящий контур, то имеющиеся в проводнике носители тока под действием сил вихревого электрического поля будут перемещаться по контуру и потечет индукционный ток. Проводящий контур, в котором с помощью гальванометра регистрируется индукционный ток, позволяет косвенно доказать наличие в пространстве вихревого электрического поля. Однако сам контур не является необходимым условием возникновения такого поля.

Уравнение Максвелла. Пусть в покоем замкнутом проводящем контуре L в результате изменения поля \mathbf{B} наблюдается явление электромагнитной индукции (рис. 120). ЭДС индукции равна

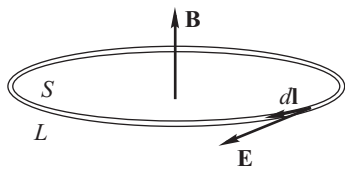


Рис. 120

$$\mathcal{E}_и = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (31.6)$$

Причина возникновения электромагнитной индукции в покоем контуре заключается в действии вихревого электрического поля \mathbf{E} на свободные носители тока в проводнике. Силы вихревого поля в этом случае нужно рассматривать как сторонние, порождающие индукционный ток. ЭДС индукции равна работе сторонних сил по переносу единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура L и вычисляется по следующей формуле:

$$\mathcal{E}_и = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (31.7)$$

где \mathbf{E} — напряженность вихревого электрического поля.

Магнитный поток через поверхность S , ограниченную контуром L , равен

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Производную по времени потока Φ можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (31.8)$$

В преобразованиях (31.8) производную $d\mathbf{B}/dt$ заменили частной производной $\partial \mathbf{B}/\partial t$, учитывая зависимость вектора \mathbf{B} не только от времени t , но и от пространственных координат x, y, z : $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$.

Подставив выражения (31.7) и (31.8) в равенство (31.6), получим

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (31.9)$$

Если помимо вихревого электрического поля в пространстве существует электростатическое электрическое поле, под напряженностью \mathbf{E} в уравнении (31.9) можно подразумевать сумму вихревого и электростатического полей.

Действительно, циркуляция вектора напряженности электростатического поля $\mathbf{E}_{\text{эл.-ст}}$ по произвольному замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{эл.-ст}} d\mathbf{l} = 0.$$

Прибавление к левой части записанного для вихревого электрического поля $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$ уравнения (31.9) интеграла $\oint_L \mathbf{E}_{\text{эл.-ст}} d\mathbf{l}$, значение которого равно нулю, не нарушает равенства левой и правой частей этого уравнения:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \\ \oint_L \mathbf{E}_{\text{эл.-ст}} d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (31.10)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{эл.-ст}} + \mathbf{E}_{\text{вихр}}$.

Уравнение (31.10) называется *уравнением Максвелла* (1831–1879). Это уравнение является обобщением теоремы о циркуляции вектора напряженности электростатического поля для случая произвольных полей.

Уравнение Максвелла (31.10) можно представить в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (31.11)$$

§ 32. Явление самоиндукции. Индуктивность

Пусть замкнутый проводящий контур находится в свободном от внешних магнитных полей пространстве. Если по контуру пропускать ток, вокруг него возникнет собственное магнитное поле, порождаемое током (рис. 121). Можно показать, используя закон Био–Савара (23.3), что магнитный поток Φ через ограниченную контуром поверхность пропорционален силе тока I в контуре:

$$\Phi = LI, \quad (32.1)$$

где L — коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью контура*.

Индуктивность контура L — это коэффициент пропорциональности между магнитным потоком Φ через ограниченную контуром поверхность, который возникает благодаря магнитному полю тока в контуре, и силой тока I . При вычислении магнитного потока Φ единичный вектор нормали \mathbf{n} к ограниченной контуром поверхности интегрирования следует выбирать так, чтобы он был связан правилом правого винта с направлением тока в контуре.

Единица индуктивности — *генри* (Гн). Индуктивностью в 1 Гн обладает контур, магнитный поток через который равен одному веберу при пропускании по контуру тока силой в один ампер:

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб} / 1 \text{ А} = 1 \text{ Вб} / \text{А}.$$

Магнитный поток Φ через ограниченную контуром поверхность S вычисляется по формуле (31.1):

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (32.2)$$

Магнитная индукция \mathbf{B} в любой точке поверхности интегрирования S в соответствии с законом Био–Савара равна (см. (23.4)) равна

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (32.3)$$

Здесь интеграл вычисляется вдоль замкнутого контура l , по которому течет ток силой I .

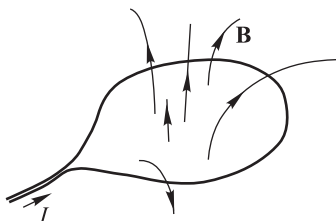


Рис. 121

Из формулы (32.3) следует, что при увеличении силы тока I в контуре в N раз магнитное поле \mathbf{B} в любой точке пространства возрастает в N раз пропорционально току. Соответственно, в N раз увеличивается магнитный поток Φ , вычисляемый по формуле (32.2). Таким образом магнитный поток Φ через ограниченную замкнутым проводящим контуром поверхность и сила тока I в этом контуре связаны прямой пропорциональной зависимостью. Следовательно, введение понятия индуктивности L как коэффициента пропорциональности между Φ и I (32.1) является обоснованным.

Индуктивность соленоида. В качестве примера вычислим индуктивность соленоида, длина которого равна l , площадь поперечного сечения S , число витков на единицу длины соленоида n . Соленоид заполнен магнетиком с магнитной проницаемостью μ . Длина соленоида велика по сравнению с его диаметром, так что справедлива формула (29.17) для магнитной индукции B поля бесконечно длинного соленоида:

$$B = \mu_0 \mu n I, \quad (32.4)$$

где I — сила тока в проводе, из которого сделана обмотка соленоида.

Если полное число витков соленоида равно nl , магнитный поток Φ через соленоид в целом равен магнитному потоку BS через поверхность, ограниченную одним витком, умноженному на nl :

$$\Phi = BSnl = \mu_0 \mu n I S n l = \mu_0 \mu n^2 S l I. \quad (32.5)$$

Здесь магнитную индукцию B подставили из формулы (32.4).

Из (32.5) следует, что индуктивность соленоида L — коэффициент пропорциональности между магнитным потоком Φ и силой тока I — равна

$$L = \mu_0 \mu n^2 S l = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (32.6)$$

где $V = Sl$ — объем соленоида.

Явление самоиндукции. Рассмотрим замкнутый проводящий контур с индуктивностью L , по которому течет ток силой I . Магнитный поток Φ через ограниченную контуром поверхность равен:

$$\Phi = LI.$$

При изменении силы тока I магнитный поток Φ также будет меняться, и в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея в контуре возникнет ЭДС индукции, потечет индукционный ток. Явление электромагнитной индукции в контуре возникает вследствие изменения силы тока в этом же контуре. В таком случае явление электромагнитной индукции называется *самоиндукцией*.

Самоиндукция — это явление возникновения ЭДС индукции и индукционного тока в замкнутом проводящем контуре за счет изменения силы тока в этом контуре.

ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с.и}}$ как частный случай ЭДС индукции рассчитывается по формуле (31.2):

$$\mathcal{E}_{\text{с.и}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (32.7)$$

Знак минус в правой части выражения (32.7) показывает, что индукционный ток и ЭДС самоиндукции имеют такое направление, чтобы противодействовать изменению тока силы I , которое служит причиной возникновения самоиндукции. Например, если сила тока I увеличивается, то, согласно (32.7), ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с.и}}$ является отрицательной величиной, то есть индукционный ток будет течь в направлении, противоположном направлению тока I .

Установление тока в цепи, содержащей большую индуктивность. Если электрическая цепь, по которой течет ток, обладает большой индуктивностью, то при размыкании цепи резкое уменьшение силы тока до нуля приводит к возникновению ЭДС самоиндукции большой величины. В том месте, где происходит разрыв цепи (между контактами выключателя), проскакивает искра, то есть в воздушном пространстве возникает искровой разряд. Рассмотрим на простом примере причины этого явления.

Размыкание цепи, по которой в этот момент течет ток, можно рассматривать как включение в цепь очень большого сопротивления (сопротивления воздушного промежутка между контактами выключателя). Рассмотрим цепь, содержащую идеальную катушку индуктивности L (омическое сопротивление катушки равно нулю), сопротивления r и R ($R \gg r$), источник тока с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, ключ K (рис. 122). Сначала ключ K находится в положении 1, так что сопротивление цепи равно r , и по цепи течет ток силой $I_0 = \mathcal{E}/r$. Затем ключ K переводится в положение 2, в результате чего источник тока практически мгновенно отключается, сопротивление цепи становится равным R , то есть многократно увеличивается по сравнению с первоначальным (рис. 123). Через катушку индуктивности продолжает течь ток.

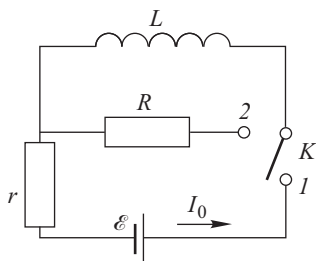


Рис. 122

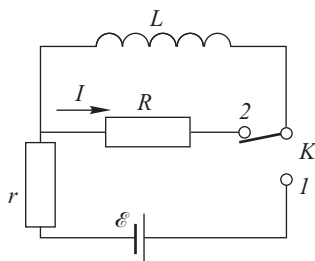


Рис. 123

Закон Ома для рассматриваемой цепи с ключом K в положении 2 имеет вид

$$IR = \mathcal{E}_{\text{с.и}}, \quad (32.8)$$

где I — сила тока, $\mathcal{E}_{\text{с.и}} = -L dI/dt$ — ЭДС самоиндукции в катушке, возникающая при изменении силы тока.

Решив дифференциальное уравнение (32.8), записанное в следующей форме:

$$IR = -L \frac{dI}{dt},$$

найдем зависимость силы тока I в катушке индуктивности от времени:

$$I = I_0 e^{-Rt/L} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-Rt/L}. \quad (32.9)$$

где $I_0 = \mathcal{E}/r$ — сила тока в цепи в начальный момент времени (сразу после перевода ключа K в положение 2).

Как следует из (32.9), время τ , в течение которого сила тока в цепи уменьшится в e раз, составляет величину:

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (32.10)$$

Вычислим напряжение U на концах катушки индуктивности, равное возникающей в ней ЭДС самоиндукции:

$$U = -L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \frac{R}{r} e^{-Rt/L}. \quad (32.11)$$

Падение напряжения на сопротивлении R равно напряжению U (32.11) на концах катушки индуктивности.

Поскольку сопротивление R в рассматриваемом примере служит моделью воздушного промежутка между контактами выключателя реально существующих цепей, выражение (32.11) дает возможность проанализировать различные факторы, способствующие электрическому пробую воздушного промежутка. Согласно (32.11) напряжение U пропорционально R/r — отношению сопротивления воздушного промежутка между контактами выключателя R к сопротивлению цепи до ее разрыва r . Поскольку отношение R/r представляет собой огромную величину, напряжение U между контактами выключателя сразу после разрыва цепи, равное согласно (32.11) $\mathcal{E}R/r$, также очень велико: многократно превышает ЭДС \mathcal{E} источника тока. Вместе с тем, величина $\mathcal{E}R/r$ не зависит от индуктивности L катушки. Почему же искрение между контактами выключателя тем больше, чем больше индуктивность цепи?

Чтобы произошел пробой воздушного промежутка (искрение), высокое напряжение между контактами выключателя должно поддерживаться в течение определенного (достаточного для лавинообразного нарастания тока в газовой среде) времени. Согласно (32.10) характерное время τ , в течение которого после переключения ключа из положения 1

в положение 2 в цепи течет ток и поддерживается высокое напряжение на сопротивлении R , тем больше, чем больше индуктивность L катушки. С увеличением L время τ , и, соответственно, вероятность возникновения искрового разряда в воздушном промежутке между контактами выключателя возрастают.

§ 33. Энергия магнитного поля

Магнитная энергия контура с током. Рассмотрим процесс нарастания тока в цепи, содержащей катушку индуктивности L , сопротивление R , источник тока с ЭДС \mathcal{E} , после замыкания ключа K (рис. 124). Согласно закону Ома падение напряжения IR на сопротивлении R , где I — сила тока, равно сумме действующих в контуре ЭДС: постоянной ЭДС \mathcal{E} и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{с.и} = -L dI/dt$:

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}.$$

Умножив это уравнение на величину I и выполнив преобразования, получим

$$I\mathcal{E} = I^2 R + LI \frac{dI}{dt},$$

$$I\mathcal{E} = I^2 R + \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} \right). \quad (33.1)$$

Равенство (33.1) по существу является выражением закона сохранения энергии. Входящие в него величины имеют следующий смысл: $I\mathcal{E}$ — мощность сторонних сил, которая затрачивается на выделение теплоты на сопротивлении R и увеличение энергии катушки индуктивности, $I^2 R$ — тепловая мощность тока, $LI^2/2$ — магнитная энергия катушки, $\frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} \right)$ — приращение энергии катушки в единицу времени.

Итак, величина

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.2)$$

представляет собой энергию катушки с током или магнитную энергию контура.

Учитывая, что магнитный поток Φ через катушку индуктивности равен LI , можно представить магнитную энергию W в другой форме:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (33.3)$$

Энергия магнитного поля и ее плотность. Магнитную энергию катушки $LI^2/2$ можно интерпретировать как энергию имеющегося в катушке магнитного поля и выразить ее через параметры поля — магнитную индукцию \mathbf{B} и напряженность \mathbf{H} .

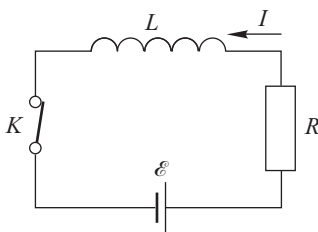


Рис. 124

Воспользуемся формулой (32.6) индуктивности бесконечно длинного соленоида: $L = \mu_0 \mu n^2 V$, где μ — магнитная проницаемость вещества, заполняющего соленоид, n — число витков на единицу его длины, V — объем соленоида; формулой (29.17) индукции магнитного поля соленоида: $B = \mu_0 \mu n I$, где I — сила тока, и формулой (29.16) напряженности магнитного поля в соленоиде: $H = nI$. Тогда магнитную энергию можно представить в виде

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 V I^2}{2} = \frac{BH}{2} V. \quad (33.4)$$

Магнитное поле внутри бесконечно длинного соленоида является однородным. Разделив энергию W поля в соленоиде на его объем V , найдем объемную плотность энергии магнитного поля w :

$$w = \frac{W}{V} = \frac{BH}{2}. \quad (33.5)$$

Можно показать, что в общем случае магнитного поля с индукцией \mathbf{B} и напряженностью \mathbf{H} объемная плотность энергии рассчитывается по формуле:

$$w = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2}. \quad (33.6)$$

Объемная плотность энергии w является характеристикой поля в точке. Если параметры поля \mathbf{B} и \mathbf{H} от точки к точке меняются, формула (33.6) остается справедливой. Формула (33.5) является частным случаем выражения (33.6) для плотности энергии магнитного поля в однородном изотропном магнетике, где \mathbf{B} и \mathbf{H} связаны соотношением (29.2): $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$.

Расчет энергии магнитного поля в конечном объеме V пространства выполняется с помощью интегрирования объемной плотности w :

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV. \quad (33.7)$$

§ 34. Взаимная индукция

Пусть в пространстве расположены два неподвижных проводящих замкнутых контура 1 и 2, между которыми имеется магнитная связь, а именно: магнитное поле, порожденное током в одном из контуров, пронизывает поверхность другого контура, и наоборот (рис. 125). Если сила тока I_1 в первом контуре равна нулю, $I_1 = 0$, а сила тока I_2 во втором контуре отлична от нуля, $I_2 \neq 0$, магнитный поток Φ_1 через поверхность, ограниченную первым контуром, пропорционален силе тока I_2 :

$$\Phi_1 = L_{12} I_2, \quad (34.1)$$

где L_{12} — коэффициент пропорциональности, называемый *взаимной индуктивностью* контуров 1 и 2. Если сила тока во втором контуре

равна нулю, $I_2 = 0$, а в первом — отлична от нуля, $I_1 \neq 0$, то магнитный поток Φ_2 через поверхность, ограниченную вторым контуром, пропорционален силе тока в первом контуре:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1, \quad (34.2)$$

где L_{21} — коэффициент пропорциональности, также называемый *взаимной индуктивностью* контуров 1 и 2. Константы L_{12} и L_{21} зависят от формы каждого из контуров и от их взаимного расположения. Прямая пропорциональная зависимость (34.1) и (34.2) между величинами потоков Φ_1 и Φ_2 и силой токов I_2 и I_1 , соответственно, доказываются аналогично соотношению (32.1).

Согласно *теореме взаимности*, для любых двух контуров, между которыми имеется магнитная связь, взаимные индуктивности L_{12} и L_{21} одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Доказательство данной теоремы мы не приводим.

Отметим, что в соответствии с определением индуктивности L контура (см. (32.1)), благодаря такому выбору направления нормали \mathbf{n} к поверхности контура, при котором поток Φ и сила тока I в контуре имеют одинаковые знаки, индуктивность L всякого контура является величиной положительной. Напротив, взаимная индуктивность двух контуров может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Взаимная индукция. *Взаимной индукцией* называется явление возникновения ЭДС индукции в одном из двух контуров, между которыми имеется магнитная связь, за счет изменения силы тока в другом контуре.

Если в контурах 1 и 2, между которыми имеется магнитная связь (см. рис. 125), силы токов равны I_1 , I_2 , величина I_2 с течением времени изменяется, и при этом магнитный поток через ограниченную первым контуром поверхность, согласно (34.1), равен $\Phi_1 = L_{12} I_2$, то в контуре 1 возникнет ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{1\text{вз}}$:

$$\mathcal{E}_{1\text{вз}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Аналогично, если величина I_1 с течением времени изменяется, и согласно (34.2) $\Phi_2 = L_{21} I_1$, то в контуре 2 возникнет ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{2\text{вз}}$:

$$\mathcal{E}_{2\text{вз}} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Магнитная энергия двух контуров с током. Рассмотрим два замкнутых проводящих контура 1 и 2, индуктивности которых L_1 и L_2 ,

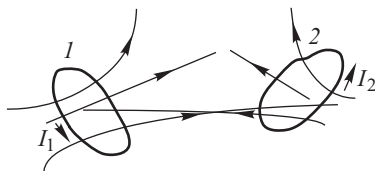


Рис. 125

сопротивления R_1 и R_2 . В каждом из контуров имеются источники тока с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , а также ключи K_1 и K_2 , которые первоначально разомкнуты (рис. 126). Взаимная индуктивность контуров L_{12} . Замкнем оба ключа K_1 и K_2 в момент времени $t = 0$. По контурам потекут токи силой I_1 и I_2 , которые, вообще говоря, меняются с течением времени. В каждом контуре, помимо постоянных ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , будет действовать ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{1\text{с.и}}$ и $\mathcal{E}_{2\text{с.и}}$, а также ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{1\text{вз}}$ и $\mathcal{E}_{2\text{вз}}$. Запишем закон Ома для контура 1:

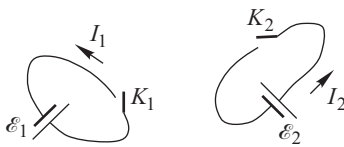


Рис. 126

$$I_1 R_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{1\text{с.и}} + \mathcal{E}_{1\text{вз}}, \quad (34.3)$$

где $\mathcal{E}_{1\text{с.и}} = -L_1 I_1 dI_1/dt$, $\mathcal{E}_{1\text{вз}} = -L_{12} dI_2/dt$.

В течение промежутка времени dt сторонние силы источника тока, имеющегося в контуре 1, совершат работу $\delta A_1 = I_1 \mathcal{E}_1 dt$, которая с учетом выраженной из (34.3) величины \mathcal{E}_1 равна

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= I_1 \mathcal{E}_1 dt = I_1 (I_1 R_1 - \mathcal{E}_{1\text{с.и}} - \mathcal{E}_{1\text{вз}}) dt = \\ &= I_1^2 R_1 dt + L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} dt + L_{12} I_1 \frac{dI_2}{dt} dt = I_1^2 R_1 dt + L_1 I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 = \\ &= \delta Q_1 + L_1 I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2, \end{aligned} \quad (34.4)$$

где δQ_1 — выделившаяся в контуре 1 за время dt теплота.

Аналогично можно показать, что сторонние силы источника тока, имеющегося в контуре 2, за промежуток времени dt совершат работу δA_2 , равную

$$\delta A_2 = \delta Q_2 + L_2 I_2 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1. \quad (34.5)$$

Суммарная работа сторонних сил источников тока обоих контуров составит величину:

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta A_1 + \delta A_2 = \delta Q_1 + L_1 I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + \delta Q_2 + L_2 I_2 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1 = \\ &= \delta Q_1 + \delta Q_2 + L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + L_{12} d(I_1 I_2). \end{aligned} \quad (34.6)$$

В преобразованиях (34.6) учтено, что $L_{12} = L_{21}$.

Интегрируя обе части равенства (34.6), найдем работу сторонних сил к некоторому моменту времени, когда сила тока в контурах 1 и 2 достигнет величины I_1 и I_2 соответственно:

$$A = Q_1 + Q_2 + \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2. \quad (34.7)$$

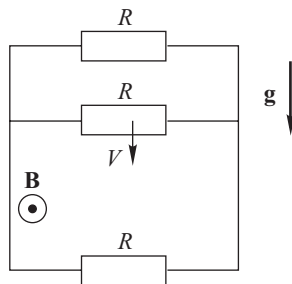
Смысл полученного соотношения (34.7) состоит в следующем. Работа A сторонних сил источников тока затрачивается на выделение теплоты Q_1 и Q_2 и на накопление магнитной энергии $L_1 I_1^2/2$ и $L_2 I_2^2/2$ контурами 1 и 2, соответственно. Слагаемое $L_{12} I_1 I_2$ представляет со-

бой выражение для *взаимной магнитной энергии* контуров, между которыми имеется магнитная связь и в которых текут токи I_1 и I_2 .

Задачи

7.1. В длинном воздушном соленоиде с радиусом катушки r_0 и плотностью витков n течет ток, нарастающий с постоянной скоростью \dot{I} . Какова форма силовых линий вихревого электрического поля \mathbf{E} ? Найти величину E на расстоянии $2r_0$ от оси соленоида.

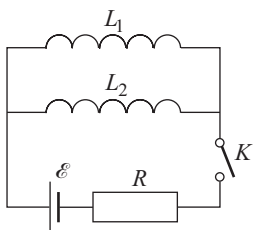
7.2. По двум вертикальным рейкам, соединенным сверху и снизу сопротивлениями R , может скользить без трения проводник длиной l , массой m и сопротивлением R (рис. 7.2). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого B перпендикулярна плоскости рисунка. Найти максимальную скорость V проводника в поле силы тяжести. Сопротивлением реек пренебречь.



К задаче 7.2

7.3. Один и тот же ток течет по двум длинным параллельным проводам в противоположные стороны. Провода имеют круглые сечения радиусом r , а расстояние между ними d , причем $r \ll d$. Найти индуктивность единицы длины этой системы, учитывая магнитное поле только вне проводов.

7.4. В схеме (рис. 7.4) известны ЭДС \mathcal{E} источника, сопротивления R и индуктивности L_1 и L_2 катушек. Внутреннее сопротивление источника и сопротивления катушек пренебрежимо малы. Найти установившиеся токи в катушках после замыкания ключа K .



К задаче 7.4

7.5. Тонкое кольцо из магнетика имеет средний диаметр $d = 30$ см и несет на себе обмотку из $N = 800$ витков. Площадь поперечного сечения кольца $S = 5,0$ см². В кольце сделана поперечная прорезь шириной $b = 2,0$ мм. Когда по обмотке течет некоторый ток, магнитная проницаемость магнетика $\mu = 1400$. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти:

- отношение магнитной энергии в зазоре к магнитной энергии в магнетике;
- индуктивность системы.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 35. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля переменных токов. Ток смещения

Сначала введем определения, которые потребуются для описания свойств электромагнитного поля. Напомним, что сила тока I , текущего через некоторую поверхность S , вычисляется как интеграл от плотности тока \mathbf{j} по поверхности S :

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Плотностью тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}}$ называется производная по времени вектора электрической индукции \mathbf{D} :

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (35.1)$$

Отметим, что вектор \mathbf{D} зависит не только от времени t , но и от пространственных координат x, y, z , а именно: $\mathbf{D}(x, y, z; t)$.

Обозначим через $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ плотность тока проводимости, то есть тока, обусловленного упорядоченным движением свободных зарядов в проводящей среде.

Плотностью полного тока будем называть сумму плотностей тока проводимости и тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (35.2)$$

Сила полного тока $I_{\text{полн}}$, текущего через произвольную поверхность S , и плотность $\mathbf{j}_{\text{полн}}$ полного тока в точках этой поверхности связаны соотношением:

$$I_{\text{полн}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{полн}} d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}}) d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (35.3)$$

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} . Рассмотрим участок электрической цепи, в состав которой входит плоский конденсатор. Пусть конденсатор заряжается. Величина зарядов пластин $+q$ и $-q$ и сила тока в подводящих проводах I зависят от времени (рис. 127). Будем полагать, что размеры пластин конденсатора велики по сравнению с расстоянием между ними, так что электрическое поле конденсатора сосредоточено между пластинами и является однородным, а электри-

ческое поле снаружи конденсатора равно нулю. Применим теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} к плоскому замкнутому контуру L , охватывающему один из подводящих проводов (рис. 127).

В соответствии с этой теоремой (см. (29.6)) циркуляция вектора \mathbf{H} по контуру L равна силе тока проводимости, который пересекает ограниченную контуром поверхность. Рассмотрим две ограниченные контуром L поверхности S_1 и S_2 . Поверхность S_1 плоская, она «натянута» на контур L . Поверхность S_2 такова, что часть ее располагается между обкладками конденсатора, не касаясь их.

Проводник с током силой I (ток зарядки конденсатора) пересекает поверхность S_1 . Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} для поверхности S_1 в соответствии с (29.6) записывается в следующем виде:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (35.4)$$

Проводники, по которым текут токи проводимости, не пересекают поверхность S_2 . Следовательно, для поверхности S_2 теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} должна быть записана в следующей форме:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0. \quad (35.5)$$

Сравнение равенств (35.3) и (35.5) показывает, что они противоречат друг другу. Кроме того, если справедливо равенство (35.5), из него следует, что $\mathbf{H} = 0$, то есть поле \mathbf{H} в пространстве около провода с током силой I вообще отсутствует. Однако такое утверждение не согласуется с опытом.

Причина противоречий состоит в следующем. Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} в форме (29.6), справедливая для магнитного поля, порождаемого постоянными токами, не применима для описания свойств магнитного поля переменных токов. В рассматриваемом примере сила тока I в подводящих проводах в процессе зарядки конденсатора изменяется с течением времени. Поэтому применять теорему о циркуляции в форме (29.6) нельзя.

Необходимо подвергнуть формулировку теоремы изменению. С этой целью введены понятия плотности тока смещения (35.1) и полного тока как суммы токов проводимости и смещения (см. (35.3)).

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} , справедливая для описания свойств магнитного поля как постоянных, так и изменяющихся с течением времени (переменных) токов, имеет следующую формулировку:

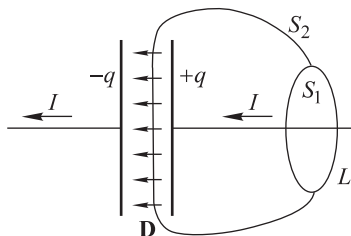


Рис. 127

циркуляция вектора \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру L равна силе полного тока, охватываемого этим контуром или, иначе говоря, пересекающей ограниченный контуром поверхность S :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{полн}} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (35.6)$$

Вернемся к расчету тока, пересекающего поверхность S_1 (см. рис. 127). Поскольку электрическое поле конденсатора полностью сосредоточено в пространстве между его пластинами, а вне конденсатора оно равно нулю, поверхность S_1 токами смещения не пересекается (во всех точках поверхности S_1 $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t = 0$). Математическое выражение теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} для поверхности S_1 имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j}_{\text{пр}} d\mathbf{S} = I. \quad (35.7)$$

Рассмотрим токи, пересекающие поверхность S_2 (см. рис. 127). Текущий по подводящему проводнику ток проводимости силой I поверхность S_2 не пересекает. Плотность тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ (35.1) на поверхности S_2 отлична от нуля только там, где поверхность находится в электрическом поле, то есть в пространстве между обкладками конденсатора. Модуль вектора \mathbf{D} электрической индукции в пространстве между обкладками конденсатора равен

$$D = \frac{q}{S_{\text{конд}}}, \quad (35.8)$$

где $S_{\text{конд}}$ — площадь обкладок. Выражение (35.8) несложно получить, применив теорему Гаусса для вектора \mathbf{D} (см. (17.4)), при этом внутри замкнутой поверхности интегрирования должна содержаться одна из обкладок плоского конденсатора.

Дифференцируя обе части равенства (35.8), найдем модуль вектора плотности тока смещения:

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\dot{q}}{S_{\text{конд}}} = \frac{I}{S_{\text{конд}}}, \quad (35.9)$$

где $\dot{q} = I$ — производная по времени заряда q конденсатора, равная силе тока I в подводящих проводах.

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} в применении к поверхности S_2 с учетом (35.9) имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j}_{\text{см}} d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{конд}}} j_{\text{см}} dS = \frac{I}{S_{\text{конд}}} \int_{S_{\text{конд}}} dS = I. \quad (35.10)$$

В преобразованиях (35.10) скалярное произведение $\mathbf{j}_{\text{см}} d\mathbf{S}$ представили как произведение модулей $j_{\text{см}} dS$ перемножаемых векторов, поскольку векторы \mathbf{D} электрической индукции и $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ плотности

тока смещения перпендикулярны плоскости пластин конденсатора и сонаправлены с вектором $d\mathbf{S}$ любой элементарной площадки поверхности S_2 , расположенной между обкладками конденсатора.

Сопоставление формул (35.7) и (35.10) показывает, что применение теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} в форме (35.6) к поверхностям S_1 и S_2 приводит к одинаковому для обеих поверхностей результату. В этом случае противоречащие друг другу уравнения, подобные (35.3) и (35.5), не возникают. Рассмотренный пример с зарядкой конденсатора иллюстрирует справедливость теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} магнитного поля переменных токов, математическим выражение которой является уравнение (35.6).

Уравнение (35.6) впервые было предложено Максвеллом при построении теории электромагнитного поля и имеет глубокий физический смысл. Из него следует, что в пространстве, где токи проводимости отсутствуют ($\mathbf{j}_{\text{пр}} = 0$), но существует изменяющееся со временем электрическое поле, и ток смещения отличен от нуля ($\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial\mathbf{D}/\partial t \neq 0$), циркуляция вектора напряженности \mathbf{H} магнитного поля не равна нулю. Следовательно, магнитное поле может существовать и в отсутствие токов проводимости. Оно порождается изменяющимся со временем электрическим полем. Это открытие Максвелла подобно открытию электромагнитной индукции Фарадеем, согласно которому изменяющееся с течением времени магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле.

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} в дифференциальной форме имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (35.11)$$

§ 36. Уравнения Максвелла

Английским ученым Максвеллом (1831–1879) была создана теория электрических и магнитных явлений. Она с единой точки зрения объяснила разрозненные явления электричества и магнетизма, предсказала ряд новых явлений, существование которых было подтверждено впоследствии.

Всю картину электромагнитных явлений можно представить в виде системы фундаментальных уравнений электродинамики, называемых *уравнениями Максвелла*. Эти уравнения нельзя вывести, они являются основными аксиомами, постулатами электродинамики, полученными путем обобщения опытных фактов.

Приведем эти уравнения в интегральной и дифференциальной формах.

1. Поток вектора электрической индукции \mathbf{D} через произвольную замкнутую поверхность S равен стороннему заряду $q_{\text{ст}}$, расположенно-

му внутри этой поверхности):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ст}}. \quad (36.1)$$

Дифференциальная форма этого уравнения:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{ст}}, \quad (36.2)$$

где $\rho_{\text{ст}}$ — объемная плотность сторонних зарядов.

Уравнение Максвелла в форме (36.1) и (36.2) является следствием теоремы Гаусса для вектора напряженности электрического поля. Это уравнение по существу эквивалентно закону Кулона и принципу суперпозиции электрических полей.

2. Поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (36.3)$$

Дифференциальная форма этого уравнения:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (36.4)$$

Уравнения Максвелла (36.3) или (36.4) отражают тот факт, что в природе не обнаружены магнитные заряды, и силовые линии магнитного поля являются замкнутыми.

3. Циркуляция вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} по произвольному замкнутому контуру L равна:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (36.5)$$

где интеграл от производной по времени вектора магнитной индукции \mathbf{B} вычисляется по произвольной поверхности S , ограниченной контуром L .

Дифференциальная форма этого уравнения:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (36.6)$$

Уравнения Максвелла (36.5) или (36.6) являются следствием закона электромагнитной индукции Фарадея, согласно которому ЭДС индукции в произвольном замкнутом контуре равна скорости изменения магнитного потока Φ через ограниченную контуром поверхность: $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$.

4. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру L равна силе полного тока, охватыва-

емого этим контуром или, иначе говоря, пересекающего поверхность S , ограниченную контуром:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (36.7)$$

Дифференциальная форма этого уравнения имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.8)$$

Уравнения (36.7) или (36.8) являются математическим выражением открытия Максвелла, в соответствии с которым изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное поле.

Материальные уравнения. Уравнения Максвелла не составляют полной системы уравнений электромагнитного поля. Этих уравнений недостаточно для расчета полей по заданным распределениям в пространстве зарядов и токов. Для решения этой задачи необходимо дополнить систему уравнений Максвелла так называемыми *материальными уравнениями*, которые характеризуют индивидуальные свойства заполняющей пространство материальной среды.

Для изотропных однородных сред, не содержащих сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, в случае не слишком сильных электрических и магнитных полей материальные уравнения имеют следующий вид:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \lambda \mathbf{E},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, λ — удельная электрическая проводимость среды.

Из уравнений Максвелла вытекает существование электромагнитных волн, то есть такого электромагнитного поля, которое способно существовать самостоятельно, в отсутствие электрических зарядов и токов. Изучение этого явления предстоит нам в разделе курса физики, посвященном электрическим колебаниям и волнам.

Задачи

8.1. Доказать с помощью уравнений Максвелла, что:

а) переменное во времени магнитное поле не может существовать без электрического поля;

б) однородное электрическое поле не может существовать при наличии переменного во времени магнитного поля.

8.2. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда: $\text{div } \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$.

8.3. Показать, что уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ и $\text{div } \mathbf{B} = 0$ являются совместимыми, то есть первое из них не противоречит второму.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1.1. $Q = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4}q.$

1.2. $F = \frac{2qp}{4\pi\epsilon_0 d^3}.$ Диполь притягивается к заряду, если он обращен к нему противоположно заряженным концом, и отталкивается в противном случае.

1.3. $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}\right).$

1.4. $\Delta\varphi = \frac{Q_2 R_2 - Q_1 (2R_3 - R_2)}{4\pi\epsilon_0 R_2 R_3}.$

1.5. $U = E_{\text{макс}} d \left(1 - \frac{d}{2b}\right) \ln \left(\frac{2b}{d} - 1\right) \approx Ed \ln \left(\frac{2b}{d}\right) \approx 207 \text{ кВ},$ где $E_{\text{макс}}$ — напряженность поля пробоя воздуха.

1.6. $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta;$ поле вне сферы — поле точечного диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0.$

2.1. 1) $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2};$ 2) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R};$ 3) $\sigma_B = \frac{q}{4\pi(r-d)^2} \left(1 + \frac{d}{r}\right);$ $\sigma_C = \frac{q}{4\pi(r+d)^2} \left(1 - \frac{d}{r}\right).$

2.2. $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d} + \frac{Q}{r}\right).$

2.3. $\sigma_1 = -\sigma_2 = (q_1 - q_2)/2$ — поверхностная плотность заряда на внутренних обращенных друг к другу поверхностях первой и второй пластин;

$\sigma'_1 = \sigma'_2 = (q_1 + q_2)/2$ — то же на внешних поверхностях первой и второй пластин;

$E = (q_1 - q_2)/2\epsilon_0;$ $E' = (q_1 + q_2)/2\epsilon_0$ — напряженность поля соответственно между пластинами и во внешнем пространстве.

2.4. $C \approx 2\pi\epsilon_0 a.$

2.5. 1) $R = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \approx 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ м};$ 2) $R = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$

3.1. $C \approx 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ Ф}.$

3.2. $U = \frac{\epsilon V}{1 + (\epsilon - 1) d_1/d} = 500 \text{ В}.$

3.3. $\mathbf{E}' = \frac{\epsilon - 1}{3} \mathbf{E}.$

3.4. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{P}h/\epsilon_0 d$ (в зазоре), $\mathbf{E}_2 = -(1 - h/d)\mathbf{P}/\epsilon_0,$ $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{P}h/d.$

3.5. 1) $\sigma_{\text{св}} = -\frac{ql(\epsilon - 1)}{2\pi r^3(\epsilon + 1)};$ 2) $q_{\text{св}} = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}.$

4.1. 1) $I = \alpha;$ 2) $\varphi_A - \varphi_B = 0.$

4.2. $Q = I(\mathcal{E} - U) = 0,6 \text{ Вт},$ $P = I\mathcal{E} = 2,6 \text{ Вт}.$

$$4.3. Q = \frac{C\mathcal{E}^2 R_1}{2(R_1 + R_2)} = 60 \text{ мДж.}$$

$$4.4. R = \frac{\rho}{2\pi a}.$$

$$5.1. B = \mu_0 n I \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2l}.$$

$$5.2. B = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{4\pi l} = 2,0 \text{ мкТл.}$$

$$5.3. \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\mathbf{j} \, l], \text{ поле в полости однородное.}$$

$$5.4. B = \frac{\mu_0 i}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

5.5. В полупространстве, где находится прямой провод: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$, где r — расстояние от провода; в другом полупространстве: $B = 0$.

$$6.1. I = \frac{J}{n}.$$

$$6.2. B_C = \frac{2B_A h}{D}.$$

6.3. а) $I_{\text{пов}} = \chi I$; б) $I_{\text{об}} = \chi I$; токи направлены в противоположные стороны.

$$6.4. B = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 N I}{(L/2 - d)(\mu_1 + \mu_2) + 2d\mu_1 \mu_2}.$$

$$7.1. E = \frac{1}{4} \mu_0 r_0 n \dot{I}.$$

$$7.2. V = \frac{3mgR}{2B^2 l^2}.$$

$$7.3. L_{\text{ед}} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r}.$$

$$7.4. I_1 = \frac{\mathcal{E} L_2}{R(L_1 + L_2)}, I_2 = \frac{\mathcal{E} L_1}{R(L_1 + L_2)}.$$

$$7.5. \text{ а) } \frac{W_3}{W_m} \approx \frac{\mu b}{\pi d} = 3,0; \text{ б) } L \approx \frac{\mu_0 S N^2}{b + \pi d / \mu} = 0,15 \text{ Гн.}$$

8.1. а) Если $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, то $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$, то есть не равны нулю пространственные производные электрического поля, что возможно только при наличии электрического поля.

б) Если $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, то $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$. В однородном же поле $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

8.2. Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$. Имея ввиду, что дивергенция ротора всегда равна нулю, получим $0 = \text{div } \mathbf{j} + \partial(\text{div } \mathbf{D}) / \partial t$. Учитывая, что $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, получим уравнение непрерывности (закон сохранения электрического заряда).

8.3. Возьмем дивергенцию от обеих частей первого уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$. Так как дивергенция ротора равна нулю, то $\partial(\text{div } \mathbf{B}) / \partial t = 0$. Отсюда $\text{div } \mathbf{B} = \text{const}$, что не противоречит второму уравнению.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Системы единиц физических величин

1. Электрические и магнитные величины в СИ, СГСЭ, СГСМ и гауссовой системе. Изложение материала настоящего курса физики ведется с использованием *Международной системы единиц* (сокращенно СИ). Поскольку кроме единиц СИ допускается применение в некоторых случаях системы СГС рассмотрим основные отличия этой системы от СИ.

В системе СИ вводятся 7 основных единиц: длины (метр), массы (килограмм), времени (секунда), силы электрического тока (ампер), термодинамической температуры (кельвин), количества вещества (моль), силы света (кандела) и 2 дополнительных единицы: плоского угла — радиан (рад), телесного угла — стерadian (ср).

В системе СГС в рамках механики использованы 3 основные единицы: длины — сантиметр (см), массы — грамм (г), времени — секунда (с) и 2 дополнительных единицы: плоского угла — радиан (рад), телесного угла — стерadian (ср). Основные и дополнительные механические единицы системы СГС либо совпадают с соответствующими единицами СИ, либо являются дольными от них: $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$, $1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$.

В физике применяются следующие три системы единиц электрических и магнитных величин, построенных на основе системы СГС для механических величин: *абсолютная электростатическая система* (СГСЭ), *абсолютная электромагнитная система* (СГСМ) и *абсолютная* или *гауссова* система единиц. Гауссова система есть система единиц СГС для механических величин, дополненная единицами электрических и магнитных величин. Она является комбинацией двух систем единиц: СГСЭ и СГСМ. Единицы электрических величин (заряд, напряженность электрического поля, электрический потенциал, сила электрического тока, сопротивление проводника и пр.) в гауссовой системе совпадают с единицами СГСЭ, а единицы магнитных величин (напряженность и индукция магнитного поля, магнитный момент, индуктивности проводов и пр.) — с единицами СГСМ.

Система СГСЭ. Математическое выражение закона Кулона для силы взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , расположенных в вакууме на расстоянии r_{12} друг от друга, имеет вид

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (\text{П.1})$$

где k — постоянная (числовой коэффициент).

Числовое значение постоянной k в законе кулона (П.1) можно выбрать произвольно и приписать этой постоянной любую размерность. Поскольку размерности силы F (дин) и длины (см) уже определены, в зависимости от размерности k будет меняться размерность электрического заряда q . В системе СГСЭ и гауссовой системе коэффициент пропорциональности k в законе Кулона считается *безразмерным* и полагается равным *единице*. Закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \quad (\text{П.2})$$

В соответствии с (П.2) размерность заряда определяется формулой:

$$[q] = [F^{1/2}L] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1},$$

размерность напряженности электрического поля — формулой:

$$[E] = [Fq^{-1}] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}.$$

За единицу заряда в СГСЭ принимается величина такого точечного заряда, который действует на такой же точечный заряд в вакууме с силой в одну дину, если расстояние между обоими зарядами равно одному сантиметру. За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность такого поля в вакууме, которое действует на единичный точечный заряд с силой в одну дину. Эти единицы не получили специальных названий. Их называют *электростатическими* или СГСЭ-единицами заряда и напряженности электрического поля.

В отличие от СГСЭ в системе СИ электрическому заряду (или току) приписывается самостоятельная размерность, не зависящая от размерности длины, массы и времени: единица тока — ампер (А), единица заряда — кулон (Кл) или ампер-секунда. Кулон — очень большая единица:

$$1 \text{ Кл} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед. заряда.}$$

Гауссова система. Закон, определяющий силу $\mathbf{F}_л$, действующую на движущийся со скоростью \mathbf{V} точечный заряд q в магнитном поле ($\mathbf{F}_л$ — сила Лорентца), получен обобщением опытных фактов и выражается формулой:

$$\mathbf{F}_л = \frac{q}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}], \quad (\text{П.3})$$

где вектор \mathbf{B} характеризует только магнитное поле и называется *напряженностью магнитного поля*, c — постоянная (числовой коэффициент). Формула (П.3) указывает принципиальный способ измерения магнитного поля \mathbf{B} по силе, действующей на движущийся заряд, и позволяет определить единицу напряженности магнитного поля.

Постоянную c можно выбрать произвольно. Выбором числового значения и размерности этой постоянной определяется та или иная система единиц. В гауссовой системе единиц величине c приписывают

размерность скорости. Тем самым добиваются того, что напряженность \mathbf{B} магнитного поля и напряженность \mathbf{E} электрического поля в этой системе имеют одинаковую размерность (ср. формулу (П.3) с формулой $\mathbf{F}_{\text{кул}} = q\mathbf{E}$).

Закон, определяющий магнитное поле \mathbf{B} движущегося со скоростью \mathbf{V} точечного заряда q , получен обобщением опытных фактов и выражается формулой:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c'r^3} [\mathbf{V} \mathbf{r}], \quad (\text{П.4})$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения, c' — постоянная (числовой коэффициент), значение и размерность которой зависят от выбора системы единиц. В гауссовой системе единиц постоянная c' выбирается равной постоянной c , применяемой в равенстве (П.3):

$$c' = c. \quad (\text{П.5})$$

Тем самым вновь достигают совпадения размерностей напряженности \mathbf{B} магнитного и напряженности \mathbf{E} электрического поля (ср. формулу (П.4) с вытекающей из закона Кулона формулой $\mathbf{E} = q/(r^3)\mathbf{r}$). Таким образом, имеем

$$\mathbf{B} = \frac{q}{cr^3} [\mathbf{V} \mathbf{r}]. \quad (\text{П.6})$$

Определенная таким способом постоянная c , которая имеет размерность скорости и входит в соотношения (П.3) и (П.6), называется *электродинамической постоянной*.

Исходя из формул (П.3) и (П.6) нетрудно рассчитать силу взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных постоянных токов I_1 и I_2 . Эта сила равна

$$F = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R} l, \quad (\text{П.7})$$

где R — расстояние между токами, l — длина участка провода с током, для которого рассчитана сила F . Формулу (П.7) можно использовать для измерения опытным путем числового значения электродинамической постоянной c . Измерения показали, что в пределах погрешности опыта значение c совпадает со скоростью света в вакууме и равно

$$c = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с}. \quad (\text{П.8})$$

Система СГСМ. Опытное определение числового значения постоянной c открывает возможность построения системы СГСМ. Введем обозначение:

$$q_m = \frac{q}{c}, \quad (\text{П.9})$$

где q — электрический заряд, выраженный в СГСЭ-единицах заряда, c — электродинамическая постоянная (П.8). По определению величина q_m в (П.9) называется электрическим зарядом в единицах СГСМ-системы. Поскольку c имеет размерность скорости, согласно (П.9),

размерность СГСМ-единицы заряда отличается от размерности СГСЭ-единицы заряда. Постоянная c показывает, во сколько раз заряд, выраженный в СГСЭ-единицах, больше того же самого заряда, выраженного в СГСМ-единицах: $q/q_m = c$.

В системе СГСМ формулы (П.3) и (П.6) имеют следующий вид:

$$\mathbf{F}_л = q_m [\mathbf{V} \mathbf{B}], \quad (\text{П.10})$$

$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{r^3} [\mathbf{V} \mathbf{r}]. \quad (\text{П.11})$$

В гауссовой системе дается следующее точное определение единицы заряда *кулон* и единицы силы тока *ампер*, а именно: кулон равен десятой доле СГСМ-единицы заряда, ампер равен десятой доле СГСМ-единицы силы тока:

$$1 \text{ Кл} = 0,1 \text{ СГСМ-ед. заряда},$$

$$1 \text{ А} = 0,1 \text{ СГСМ-силы тока}.$$

Теперь можно дать определение единицы напряженности магнитного поля \mathbf{B} — *гаусса* — в системах СГСМ и гауссовой системе. Пусть вектор \mathbf{B} напряженности магнитного поля и вектор \mathbf{V} скорости движущегося заряда, величина которого $q_m = 1$ СГСМ-ед. заряда, взаимно перпендикулярны. При этом $V = 1$ см/с, а вычисляемая по формуле (П.10) сила $F_л$, действующая на рассматриваемый движущийся заряд, равна одной дине: $F_л = 1$ дин. Тогда величина напряженности магнитного поля B равна одному гауссу: $B = 1$ Гс. Итак, *гаусс* есть напряженность такого магнитного поля, которое действует на заряд в одну СГСМ-единицу с силой в одну дина, если заряд движется перпендикулярно к магнитному полю со скоростью 1 см/с.

Связь между системой СИ и гауссовой системой. В системе СИ закон Кулона, выражающий силу взаимодействия в вакууме двух точечных зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстоянии r друг от друга, записывается так (см. (1.1)):

$$F_{\text{кул}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}, \quad (\text{П.12})$$

где ε_0 — электрическая постоянная.

В этой же системе сила Ампера — сила взаимодействия в вакууме двух тонких параллельных бесконечно длинных проводников, по которым текут токи силой I_1 и I_2 , равна (см. 24.5):

$$F_A = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} l, \quad (\text{П.13})$$

где l — длина участка провода, для которого вычисляется сила F , R — расстояние между проводниками, μ_0 — магнитная постоянная.

Выразим постоянные ε_0 и μ_0 через электродинамическую постоянную c , используемую для записи соотношений (П.3) и (П.6).

Пусть в формуле (П.12) $q_1 = q_2 = 1$ Кл, $r = 1$ м. Тогда находим, что кулоновская сила $F_{\text{кул}}$ в ньютонах численно равна:

$$F_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ Н.} \quad (\text{П.14})$$

Вычислим эту же силу $F_{\text{кул}}$ по закону Кулона (П.2), записанному в гауссовой системе. В этом случае расстояние между зарядами равно:

$$r = 100 \text{ см,}$$

величина зарядов q_1 и q_2 в единицах СГСЭ:

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = 0,1 \text{ СГСМ-ед. заряда} &= 0,1c [\text{см/с}] \text{ СГСЭ-ед. заряда} = \\ &= 10c [\text{м/с}] \text{ СГСЭ-ед. заряда.} \end{aligned}$$

Здесь $c [\text{см/с}] \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с и $c [\text{м/с}] \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Расчет по формуле (П.2) дает числовое значение кулоновской силы $F_{\text{кул}}$ в динах, которое легко перевести в ньютоны:

$$\begin{aligned} F_{\text{кул}} &= \frac{(10c [\text{м/с}] \text{ СГСЭ-ед. заряда})^2}{(100 \text{ см})^2} = 10^{-2} (c [\text{м/с}])^2 \text{ дин} = \\ &= 10^{-7} (c [\text{м/с}])^2 \text{ Н.} \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Сравнивая (П.14) с (П.15), находим:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi (c [\text{м/с}])^2}. \quad (\text{П.16})$$

Расчет по этой формуле при подстановке в нее значения постоянной c дает:

$$\epsilon_0 \approx 0,8854 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м.}$$

Аналогично определим магнитную постоянную по формуле (П.13). Полагаем $I_1 = I_2 = 1$ А, $l = R = 1$ м. Тогда из (П.13) числовое значение амперовой силы F_A , выраженной в ньютонах, равно:

$$F_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{ Н.} \quad (\text{П.17})$$

Воспользуемся теперь для вычисления той же силы F_A формулой (П.7), записанной в гауссовой системе единиц:

$$F_A = \frac{2I_1 I_2}{(c [\text{см/с}])^2 R} l. \quad (\text{П.18})$$

Полагая в (П.18):

$$l = R = 100 \text{ см,}$$

$$I_1 = I_2 = 0,1 \text{ СГСМ-силы тока} = 0,1c [\text{см/с}] \text{ СГСЭ-ед. силы тока,}$$

где $c [\text{см/с}] \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$, получим числовое значение силы F_A в динах, которое легко перевести в ньютоны:

$$F_A = \frac{2 \cdot 0,1c [\text{м/с}] \cdot 0,1c [\text{м/с}]}{(c [\text{см/с}])^2 \cdot 100 \text{ см}} \cdot 100 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ дин} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}. \quad (\text{П.19})$$

Сравнивая результаты расчета F_A в (П.17) и (П.19), находим магнитную постоянную:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Г/м}. \quad (\text{П.20})$$

Как следует из равенства (П.16) и строгого равенства в (П.20), электрическая ε_0 и магнитная μ_0 постоянные связаны с электродинамической постоянной c точным соотношением:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (\text{П.21})$$

где c измеряется в м/с. Комбинация $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ имеет реальный физический смысл — она равна скорости света в вакууме.

2. Перевод формул электродинамики из системы СИ в гауссову систему. Каждой физической величине в системе СИ сопоставим определенный переводной коэффициент. После замены каждой физической величины такой же величиной, умноженной на соответствующий переводной коэффициент, уравнения системы СИ переходят в уравнения гауссовой системы.

Так как уравнения механики в обеих системах единиц записываются одинаково, нет надобности вводить переводные коэффициенты для чисто механических величин. Коэффициенты нужны только для электрических и магнитных величин. Умножение любой электрической или магнитной величины на произвольную механическую величину оставляет переводной коэффициент без изменения. Например, напряженности электрического поля \mathbf{E} и потенциалу φ сопоставляется один и тот же переводной коэффициент, так как в силу соотношения $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ поле \mathbf{E} получается из потенциала φ путем деления на механическую величину — длину. По аналогичной причине заряд q , его плотность ρ , сила тока I , его плотность \mathbf{j} , поляризованность \mathbf{P} и т. д. будут иметь одинаковые переводные коэффициенты из СИ в гауссову систему.

В соответствии с (П.21) комбинация $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ заменяется на скорость света в вакууме c при переходе от уравнения, записанного в СИ, к уравнению в гауссовой системе. Диэлектрическая и магнитная проницаемости ε и μ , как величины, одинаковые в обеих системах, не преобразуются.

Обозначим переводные коэффициенты, сопоставляемые физическим величинам \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , I , q и т. д., малыми латинскими буквами e , d , b , h , i согласно следующей схеме:

E	D	B	H	I, j, q, ρ, P	$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$
<i>e</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>c</i>

Переводные коэффициенты найдем, сравнивая между собой выражения для плотности энергии, потока энергии и силы, записанные в системе СИ и гауссовой системе.

В СИ объемная плотность энергии электрического поля:

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D},$$

объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B},$$

вектор **S** плотности потока энергии электромагнитного поля (см. кн. 4 «Колебания и волны. Оптика»):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}],$$

сила **F**, действующая на заряд *q* в поле напряженностью **E**:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

В левой части каждого из четырех уравнений, записанных в СИ, стоят механические величины, которые при переводе этих уравнений в гауссову систему не преобразуются. После умножения физических величин в правых частях уравнений на переводные коэффициенты уравнения приобретают вид:

$$w_e = \frac{ed}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (\text{П.22})$$

$$w_m = \frac{hb}{2} \mathbf{H} \mathbf{B}, \quad (\text{П.23})$$

$$\mathbf{S} = eh [\mathbf{E} \mathbf{H}], \quad (\text{П.24})$$

$$\mathbf{F} = ieq\mathbf{E}. \quad (\text{П.25})$$

Эти же соотношения в гауссовой системе выглядят так:

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (\text{П.26})$$

$$w_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \mathbf{B}, \quad (\text{П.27})$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} [\mathbf{E} \mathbf{H}], \quad (\text{П.28})$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (\text{П.29})$$

Приравнивая правые части уравнений (П.22) и (П.26), (П.23) и (П.27), (П.24) и (П.28), (П.25) и (П.29), получим:

$$\frac{ed}{2} = \frac{1}{8\pi}, \quad \frac{hb}{2} = \frac{1}{8\pi}, \quad eh = \frac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad ie = 1. \quad (\text{П.30})$$

Учтем, что задача нахождения переводных коэффициентов не однозначна. Если найден какой-либо один набор коэффициентов, то после умножения их на одну и ту же величину получится другой набор, также пригодный для выполнения требуемого преобразования от одной системы единиц к другой. Один из искомых коэффициентов можно выбрать произвольно, что равносильно какому-либо дополнительному условию, связывающему переводные коэффициенты между собой. Принято использовать следующее дополнительное условие:

$$e\sqrt{\varepsilon_0} = h\sqrt{\mu_0}. \quad (\text{П.31})$$

Из системы уравнений (П.30) с учетом (П.31) найдем требуемые переводные коэффициенты от СИ к гауссовой системе:

$$e = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}, \quad i = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}, \quad d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}.$$

Пусть, например, соотношение системы СИ, определяющее вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, требуется перевести в гауссову систему. Для этого запишем уравнение с переводными коэффициентами:

$$d\mathbf{D} = \varepsilon_0 e\mathbf{E} + i\mathbf{P},$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \mathbf{E} + \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{P},$$

после сокращения получим соотношение гауссовой системы:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.$$

Аналогичным приемом переведем из СИ в гауссову систему уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \text{rot } \mathbf{H} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{j} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Коэффициенты обратного преобразования от гауссовой системы к СИ равны обратным значениям коэффициентов, служащих для прямого преобразования. Пользуясь найденными коэффициентами, легко найти

переводные коэффициенты для других физических величин. Некоторые из них приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Таблица перевода формул и уравнений электродинамики, связывающих физические величины, из системы СИ в гауссову систему

Наименование	Система СИ	Гауссова система
Скорость света	$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$	c
Напряженность электрического поля, потенциал	\mathbf{E}, φ	$(1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}) (\mathbf{E}, \varphi)$
Электрическая индукция	\mathbf{D}	$\sqrt{\varepsilon_0/4\pi} \mathbf{D}$
Заряд, плотность заряда, сила тока, плотность тока, поляризованность	$q, \rho, I, \mathbf{j}, \mathbf{P}$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0} (q, \rho, I, \mathbf{j}, \mathbf{P})$
Магнитная индукция, магнитный поток	\mathbf{B}, Φ	$\sqrt{\mu_0/4\pi} (\mathbf{B}, \Phi)$
Напряженность магнитного поля	\mathbf{H}	$(1/\sqrt{4\pi\mu_0}) \mathbf{H}$
Магнитный момент, намагниченность	\mathbf{p}_m, \mathbf{J}	$\sqrt{4\pi/\mu_0} (\mathbf{p}_m, \mathbf{J})$
Диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость	ε, μ	ε, μ
Диэлектрическая восприимчивость, магнитная восприимчивость	\varkappa, χ	$4\pi(\varkappa, \chi)$
Удельная электрическая проводимость	λ	$4\pi\varepsilon_0\lambda$
Электрическое сопротивление	R	$(1/4\pi\varepsilon_0)R$
Электрическая емкость	C	$4\pi\varepsilon_0C$
Индуктивность	L	$(\mu_0/4\pi)L$

II. Основные определения и формулы электромагнетизма

1. Электростатическое поле в вакууме. *Электрический заряд* любого тела принимает только кратные элементарному заряду e значения ($e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл); электрический заряд существует в двух видах: положительный и отрицательный; в электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается неизменной с течением времени; величина заряда не зависит от того, движется он или покоится (не зависит от системы отсчета).

Закон Кулона (сила взаимодействия двух точечных зарядов):

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

где $|q_1|$ и $|q_2|$ — модули зарядов, r — расстояние между ними, $k = 1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Напряженность \mathbf{E} электрического поля в некоторой точке пространства равна силе, действующей на расположенный в этой точке единичный положительный заряд, и определяется выражением:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{\text{пр}}},$$

где $q_{\text{пр}}$ — величина пробного положительного заряда, \mathbf{F} — действующая на пробный заряд сила.

Напряженность поля точечного заряда q :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — вектор, проведенный от заряда q в точку, где определяется напряженность \mathbf{E} .

Силовая линия электрического поля — воображаемая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} напряженности поля; густота линий пропорциональна величине напряженности (модулю вектора \mathbf{E}).

Принцип суперпозиции. Напряженность поля \mathbf{E} системы неподвижных точечных зарядов равна сумме векторов напряженности поля \mathbf{E}_i , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i,$$

где \mathbf{r}_i — вектор, проведенный от заряда q_i в точку наблюдения (точку пространства, в которой определяется поле \mathbf{E}); суммирование ведется по всем зарядам системы.

Вектором $d\mathbf{S}$ элементарной площадки называется вектор, длина которого равна площади dS элементарного участка поверхности (элементарной площадки), а направление совпадает с направлением единичной нормали \mathbf{n} к площадке:

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}.$$

Поток $d\Phi$ вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через элементарную площадку равен скалярному произведению векторов \mathbf{E} и вектора элементарной площадки $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi = \mathbf{E}d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha.$$

Поток Φ вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через конечную поверхность S :

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S},$$

где N — число элементарных участков (элементарных площадок), на которые мысленно разделена поверхность S , \mathbf{E}_i — напряженность поля в любой точке i -й площадки, $d\mathbf{S}_i$ — вектор i -й площадки; интеграл вычисляется по поверхности S .

Поток вектора напряженности \mathbf{E} через замкнутую поверхность S :

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i d\mathbf{S}_i = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S},$$

интеграл вычисляется по замкнутой поверхности S .

Теорема Гаусса в интегральной форме. Поток вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов $\sum q_i$, расположенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0 :

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}.$$

Дивергенция вектора \mathbf{E} в некоторой точке поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\Delta V},$$

где ΔV — ограниченный замкнутой поверхностью S объем, в пределе поверхность S стягивается в точку, в которой определяется дивергенция.

Представление дивергенции вектора $\mathbf{E}(x, y, z)$ в декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla, \mathbf{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где ρ — объемная плотность заряда.

Напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности радиуса a на расстоянии r от ее центра:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{при } r \geq a,$$

$$E = 0 \quad \text{при } r < a.$$

Напряженность поля E бесконечно длинной тонкой равномерно заряженной нити на расстоянии r от ее оси:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоской поверхности:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Циркуляция вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} по замкнутому контуру l :

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l};$$

данный интеграл равен работе, совершаемой силами электрического поля при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру l .

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{E} в интегральной форме. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля \mathbf{E} по произвольному замкнутому контуру l равна нулю:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Ротор вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} определяется равенством:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\Delta S}.$$

где $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_n$ — проекция вектора $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ на направление нормали \mathbf{n} к поверхности, ограниченной контуром l (натянутой на контур l), ΔS — площадь этой поверхности.

Представление ротора вектора $\mathbf{E}(x, y, z)$ в декартовых координатах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = [\nabla \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля \mathbf{E} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Потенциал φ в точке P электростатического поля равен работе сил поля, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из точки P в точку O — положение, принятое за начало отсчета потенциала:

$$\varphi = \int_P^O \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Потенциал φ представляет собой потенциальную энергию единичного положительного заряда.

Свойства потенциала:

1. Потенциал φ в некоторой точке поля является функцией только координат x, y, z этой точки:

$$\varphi = \varphi(x, y, z).$$

2. Работа $A_{\text{ед}}$ сил поля по перемещению единичного положительного заряда из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2 равна убыли потенциала:

$$A_{\text{ед}} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Это свойство справедливо и для бесконечно малого перемещения $d\mathbf{l}$ заряда:

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\varphi.$$

3. Потенциал φ определен с точностью до аддитивной постоянной C : при замене точки O , принятой за начало отсчета потенциала, на другую точку O' потенциал φ во всех точках поля изменяется на одну и ту же величину C :

$$\varphi' = \varphi + C,$$

где $C = \int_O^{O'} \mathbf{E} d\mathbf{l}$ — работа сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки O в точку O' .

Потенциал поля точечного заряда q на расстоянии r от заряда равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциал системы зарядов на большом удалении r от места расположения зарядов:

$$\varphi = \frac{kq}{r} + \frac{k\mathbf{p}\mathbf{e}_r}{r^2},$$

где $q = \sum q_i$ — алгебраическая сумма всех зарядов, $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{R}_i$ — дипольный момент системы зарядов, $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Связь между напряженностью \mathbf{E} и потенциалом $\varphi(x, y, z)$ электростатического поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = -\nabla\varphi = -\text{grad } \varphi.$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где $\varphi(x, y, z)$ — потенциал, ρ — объемная плотность заряда, $\Delta = (\nabla \nabla) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа.

Уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Граничные условия для вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} на заряженной поверхности раздела двух сред:

$$\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \\ E_{2n} - E_{1n} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

где $E_{1\tau}$, $E_{2\tau}$ — проекции на направление касательной к поверхности раздела сред, а E_{1n} , E_{2n} — проекции на направление общей нормали n к поверхности раздела, проведенной из первой среды во вторую, векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 напряженности поля в первой и второй средах, σ — поверхностная плотность электрического заряда.

Дипольный момент системы двух равных по величине, противоположных по знаку зарядов, расположенных на расстоянии l друг от друга (электрический диполь):

$$\mathbf{p} = ql,$$

где q — модуль каждого из зарядов, \mathbf{l} — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Если расстояние l стремится к нулю, диполь называется *точечным*.

Потенциал поля точечного диполя:

$$\varphi = k \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} = \frac{k p \cos \theta}{r^2},$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, \mathbf{p} — дипольный момент, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от диполя в точку наблюдения, θ — угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{r} .

Напряженность поля точечного диполя:

$$E_r = \frac{2kp \cos \theta}{r^3},$$

$$E_\theta = \frac{kp \sin \theta}{r^3}.$$

Сила, действующая на помещенный в электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} точечный диполь:

$$\mathbf{F} = p \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l},$$

где p — модуль дипольного момента, $\partial \mathbf{E} / \partial l$ — производная напряженности внешнего поля \mathbf{E} по направлению дипольного момента.

Момент сил, действующий на помещенный в электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} точечный диполь:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \mathbf{E}].$$

Энергия диполя в электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} :

$$W = -\mathbf{p} \mathbf{E}.$$

2. Свойства проводников в электростатическом поле. 1. На поверхности помещенного в электростатическое поле проводника возникают макроскопические *индукционные* заряды вследствие пространственного разделения микроскопических положительных и отрицательных зарядов проводника (*электростатическая индукция*).

2. Напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю:

$$\mathbf{E}_{\text{внутр}} = 0.$$

Объемная плотность ρ макроскопических зарядов внутри проводника равна нулю:

$$\rho = 0.$$

3. Потенциал φ электрического поля во всех точках проводника и на его поверхности одинаков:

$$\varphi = \text{const.}$$

4. Вектор напряженности \mathbf{E} электрического поля снаружи проводника вблизи его поверхности перпендикулярен к этой поверхности:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}.$$

Здесь σ — поверхностная плотность заряда, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности.

5. Сила $\mathbf{F}_{\text{ед}}$, действующая на единицу площади поверхности проводника:

$$\mathbf{F}_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{n},$$

где σ — поверхностная плотность заряда, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности.

6. *Теорема Фарадея.* Напряженность электрического поля во всех точках полости, расположенной внутри проводника, равна нулю.

Если в полость, расположенную внутри проводника, помещен заряд q , на ее стенках возникает индукционный заряд $q_{\text{ст}}$; при этом во всем пространстве вне полости суммарная напряженность электрического поля зарядов q и $q_{\text{ст}}$ равна нулю; индукционный заряд на стенках полости равен по величине и противоположен по знаку заряду q внутри полости: $q_{\text{ст}} = -q$.

3. Электрическая емкость. *Электрическая емкость (емкость)* уединенного проводника равна отношению заряда q проводника к его потенциалу φ :

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Емкость конденсатора равна отношению заряда конденсатора к разности потенциалов его обкладок:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U},$$

где q — заряд конденсатора, $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов обкладок или иначе напряжение на конденсаторе.

Размерность электроемкости — *фарад* (Ф).

Емкость проводящего шара радиуса R :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

Емкость плоского конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием между пластинами d :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d};$$

такой же конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , обладает емкостью:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Свойства *последовательного соединения* конденсаторов:

1) заряды конденсаторов одинаковы и равны заряду эквивалентного конденсатора $q_1 = q_2 = q_{\text{экв}}$;

2) напряжение, поданное на батарею последовательно соединенных конденсаторов, равно сумме напряжений на каждом конденсаторе, в частности, для двух конденсаторов: $U = U_1 + U_2$;

3) емкость эквивалентного конденсатора для двух последовательно соединенных конденсаторов определяется из формулы

$$\frac{1}{C_{\text{эКВ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Свойства *параллельного соединения* конденсаторов:

1) напряжения на параллельно соединенных конденсаторах одинаковы;

2) заряд батареи параллельно соединенных конденсаторов равен сумме зарядов каждого конденсатора, в частности, для двух конденсаторов $q = q_1 + q_2$;

3) емкость эквивалентного конденсатора $C_{\text{эКВ}} = C_1 + C_2$.

Энергия системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал электрического поля всех зарядов, кроме заряда q_i .

Энергия проводника, имеющего заряд q , потенциал φ и емкость C :

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q \varphi = \frac{C \varphi^2}{2}.$$

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q U = \frac{C U^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии w электрического поля в вакууме:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

то же в среде с диэлектрической проницаемостью ε :

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

4. Свойства диэлектриков в электростатическом поле. Под действием электрического поля в диэлектрическом веществе происходит пространственное разделение положительных и отрицательных микроскопических связанных зарядов, в результате на поверхности и, вообще говоря, внутри диэлектрика возникает макроскопический *поляризационный* заряд, изменяются дипольные характеристики вещества (*поляризация диэлектриков*).

Вектор поляризованности \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V},$$

где \mathbf{p}_i — дипольный момент i -й молекулы, находящейся в объеме ΔV диэлектрика, суммирование ведется по всем молекулам объема ΔV .

В изотропном однородном диэлектрике связь между поляризованностью и напряженностью поля:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E},$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость вещества.

Теорема Гаусса для вектора поляризованности \mathbf{P} в интегральной форме. Поток вектора \mathbf{P} через произвольную замкнутую поверхность равен взятому с обратным знаком поляризационному связанному заряду, расположенному внутри этой поверхности:

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -q_{\text{св}}.$$

Теорема Гаусса для вектора поляризованности \mathbf{P} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{св}}.$$

Граничные условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{P} на поверхности раздела двух сред 1 и 2:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{\text{св}},$$

где P_{2n} , P_{1n} — проекции на направление общей нормали \mathbf{n} к поверхности раздела сред, проведенной из первой среды во вторую, векторов поляризованности \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 в первой и второй средах; $\sigma_{\text{св}}$ — поверхностная плотность связанного поляризационного заряда на поверхности раздела сред.

Вектор электрической индукции \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{P} — вектор поляризованности.

В однородном изотропном диэлектрике связь между векторами электрической индукции \mathbf{D} и напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E},$$

где $\varepsilon = 1 + \kappa$ — диэлектрическая проницаемость вещества.

Теорема Гаусса для вектора электрической индукции \mathbf{D} в интегральной форме. Поток вектора \mathbf{D} через произвольную замкнутую поверхность равен стороннему заряду $q_{\text{ст}}$, расположенному внутри этой поверхности:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ст}}.$$

Теорема Гаусса для вектора электрической индукции \mathbf{D} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ст}}.$$

Граничные условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{D} :

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{ст}},$$

где D_{1n} , D_{2n} — проекции на направление общей нормали n к поверхности раздела сред, проведенной из первой среды во вторую, векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 электрической индукции в первой и второй средах, $\sigma_{\text{ст}}$ — поверхностная плотность стороннего заряда на поверхности раздела двух сред.

5. Постоянный электрический ток. *Электрический ток* — это упорядоченное движение электрических зарядов (носителей тока).

Сила тока через некоторую поверхность S численно равна заряду, переносимому через эту поверхность в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq — заряд, прошедший через поверхность S за промежуток времени dt .

Сила тока измеряется в *амперах* (А).

Плотность тока:

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{u} = q_n n \mathbf{u},$$

где ρ_n — объемная плотность заряда носителей тока в проводнике; \mathbf{u} — средняя скорость упорядоченного движения носителей тока, q_n — заряд одного носителя, n — концентрация носителей.

Связь силы тока через произвольную поверхность S и плотности тока \mathbf{j} :

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Уравнение непрерывности в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt},$$

где q — величина расположенного внутри замкнутой поверхности S заряда.

Уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где ρ — объемная плотность заряда.

Уравнение непрерывности в стационарных условиях (постоянный ток):

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где I — сила тока; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение или разность потенциалов на концах участка, R — сопротивление участка. Сопротивление измеряется в *омах* (Ом).

Сопротивление R однородного проводника цилиндрической формы длиной l и площадью поперечного сечения S равно:

$$R = \rho_{\text{уд}} \frac{l}{S},$$

где $\rho_{\text{уд}}$ — *удельное сопротивление* материала проводника (удельное сопротивление измеряется в омах на метр (Ом·м)).

Удельная электрическая проводимость материала проводника:

$$\lambda = \frac{1}{\rho_{\text{уд}}}.$$

Зависимость сопротивления R металлического проводника от температуры:

$$R = R_0(1 + \alpha t),$$

где R_0 — сопротивление при 0°C , R — сопротивление при температуре t , α — *температурный коэффициент сопротивления*, t — температура в градусах Цельсия.

Закон Ома в локальной форме:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}.$$

Сторонние силы — силы не электростатической природы, которые осуществляют пространственное разделение положительных и отрицательных зарядов — носителей тока, перемещая их в направлении, противоположном направлению действия сил электростатического поля.

Неоднородный участок цепи — это участок, на котором действуют сторонние силы.

Напряженность поля сторонних сил $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — сторонняя сила, действующая на единичный положительный заряд.

Если на некотором участке цепи 1–2 действуют сторонние силы, *электродвижущая сила* \mathcal{E}_{12} равна работе сторонних сил, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда вдоль данного участка:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_{\text{ст}} dl.$$

Электродвижущая сила, как напряжение и потенциал, измеряется в вольтах.

Закон Ома для неоднородного участка цепи в локальной форме:

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}),$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил.

Закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

где φ_1, φ_2 — потенциалы начала и конца рассматриваемого участка цепи, I — сила тока, R — сопротивление участка, \mathcal{E}_{12} — действующая на участке ЭДС.

Правила Кирхгофа. Первое правило. Алгебраическая сумма токов в узле электрической схемы (в точке соединения нескольких проводников электрической цепи) равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Второе правило. В замкнутом контуре в составе разветвленной цепи алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме действующих в контуре ЭДС:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k,$$

здесь I_k — сила тока, R_k — сопротивление, \mathcal{E}_k — ЭДС, действующая на k -м участке.

Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме:

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = I U t,$$

где Q — количество теплоты, выделяющееся за время t на однородном участке цепи с сопротивлением R , силой тока I и напряжением на концах участка U .

Закон Джоуля–Ленца в локальной форме:

$$N_{\text{уд}} = j^2 \rho_{\text{уд}} = \mathbf{j} \mathbf{E},$$

где $N_{\text{уд}}$ — тепловая мощность тока, отнесенная к единице объема проводника; \mathbf{j} — плотность тока, $\rho_{\text{уд}}$ — удельное сопротивление материала проводника; \mathbf{E} — напряженность поля.

Текущий в проводнике ток называется *квазистационарным*, если в каждый момент времени сила тока имеет одинаковое значение во всех сечениях проводника. Условие квазистационарности тока:

$$t_{\text{уст}} \sim \frac{l}{c} \ll \tau,$$

где $t_{\text{уст}}$ — время распространения вдоль проводника электромагнитного возмущения, l — длина проводника, c — скорость распространения электромагнитного возмущения (электромагнитной волны), τ — характерное время изменения силы квазистационарного тока, текущего по проводнику.

6. Магнитное поле в вакууме. *Магнитный момент* \mathbf{p}_m плоского контура с током равен:

$$\mathbf{p}_m = I \mathbf{S} \mathbf{n},$$

где I — сила тока в контуре, S — площадь контура, \mathbf{n} — единичная нормаль к плоскости контура, направление которой связано правилом правого винта с направлением тока в контуре.

Единица магнитного момента — ампер на метр квадратный ($\text{А} \cdot \text{м}^2$).

Магнитной индукцией называется вектор \mathbf{B} , удовлетворяющий равенству:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}],$$

где \mathbf{M} — момент сил, действующий на помещенный в магнитное поле элементарный контур с током, магнитный момент которого равен \mathbf{p}_m .

Единица магнитной индукции — *тесла* (Тл). Магнитной индукцией в один тесла обладает однородное магнитное поле, в котором на плоский контур с током, магнитный момент которого равен $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, действует максимальный вращающий момент $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Силовой линией или *линией магнитной индукции* называется воображаемая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором магнитной индукции \mathbf{B} . Густота линий пропорциональна модулю вектора \mathbf{B} .

Закона Био–Савара. Элемент тока $I d\mathbf{l}$ порождает в точке пространства, положение которой задается вектором \mathbf{r} , проведенным в точку от элемента тока, магнитное поле с индукцией $d\mathbf{B}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где μ_0 — *магнитная постоянная*, $\mu_0 \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ (генри на метр), $d\mathbf{l}$ — вектор элементарного участка тонкого проводника, по которому течет ток силой I .

Магнитная индукция прямого тонкого бесконечно длинного проводника с током силой I на расстоянии R от него равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Закон Ампера. На элемент тока $I d\mathbf{l}$ со стороны внешнего магнитного поля с индукцией \mathbf{B} действует сила $d\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

В проводящей среде на элемент тока $\mathbf{j} dV$, где \mathbf{j} — плотность тока, dV — элементарный объем, со стороны внешнего магнитного поля с индукцией \mathbf{B} действует сила Ампера $d\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] dV.$$

Сила магнитного взаимодействия между двумя расположенными в вакууме на расстоянии r друг от друга тонкими прямыми бесконечно длинными проводниками, по которым текут токи силой I_1 и I_2 , равна:

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r},$$

здесь $F_{\text{ед}}$ — сила, отнесенная к единице длины провода.

Индукция $d\mathbf{B}$ магнитного поля, порожденного движущимся со скоростью \mathbf{V} точечным зарядом q в точке пространства, положение которой задается проведенным в эту точку от заряда q вектором \mathbf{r} , равна:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\mathbf{V} \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Сила Лорентца, действующая на движущийся со скоростью \mathbf{V} в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} точечный заряд q равна:

$$\mathbf{F}_{\text{лор}} = q[\mathbf{V}, \mathbf{B}].$$

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции \mathbf{B} в интегральной форме. Поток вектора \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0;$$

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции \mathbf{B} в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции \mathbf{B} в интегральной форме. Циркуляция вектора \mathbf{B} по произвольному замкнутому контуру L равна умноженной на μ_0 алгебраической сумме токов, охватываемых контуром L :

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum_k I_k \right),$$

Слагаемое I_k учитывается в сумме со знаком «плюс», если направление тока I_k связано правилом правого винта с направлением обхода контура L при вычислении циркуляции $\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l}$.

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции \mathbf{B} в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

где \mathbf{j} — плотность тока.

Индукция B однородного магнитного поля *бесконечно длинного соленоида*, в обмотке которого течет ток силой I :

$$B = \mu_0 n I,$$

где n — число витков провода на единицу длины соленоида.

Сила, действующая на произвольный замкнутый контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю.

Сила \mathbf{F} , действующая на элементарный контур с током, магнитный момент которого \mathbf{p}_m , равна

$$\mathbf{F} = p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n},$$

где p_m — модуль магнитного момента, $\partial \mathbf{B} / \partial n$ — производная по направлению магнитного момента \mathbf{p}_m магнитной индукции \mathbf{B} поля в точке, где расположен контур.

Момент сил \mathbf{M} , действующий на расположенный в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} контур с током, магнитный момент которого \mathbf{p}_m :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}].$$

Работа сил Ампера при перемещении в пространстве контура с током силой I из произвольного начального положения l в произвольное конечное положение 2 равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 — поток вектора \mathbf{B} через ограниченную контуром поверхность в начальном и конечном положении контура.

7. Магнитное поле в веществе. Явление *намагничивания* — это способность тела (вещества) намагничиваться, то есть приобретать магнитный момент под действием внешнего магнитного поля. *Магнетиками* называются вещества, способные намагничиваться.

Вектор намагниченности \mathbf{J} равен

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_{mi}}{\Delta V}.$$

Здесь \mathbf{p}_{mi} — магнитный момент i -й молекулы, находящейся в объеме ΔV , суммирование ведется по всем молекулам объема ΔV . Намагниченность \mathbf{J} численно равна магнитному моменту единицы объема вещества.

Единица намагниченности — ампер, деленный на метр (А/м).

Молекулярными токами называются локализованные внутри молекулы вещества микроскопические круговые токи, обусловленные движением заряженных частиц — электронов.

Токи намагничивания — это макроскопические токи, текущие по поверхности и в объеме намагниченного тела (вещества), эквивалентные всей совокупности молекулярных токов в том смысле, что воз-

буждаемое токами намагничивания макроскопическое магнитное поле такое же, как магнитное поле молекулярных токов вместе взятых. Токи намагничивания отличаются от токов проводимости тем, что они не связаны с перемещением свободных зарядов по всему объему тела.

Теорема о циркуляции вектора намагниченности \mathbf{J} в интегральной форме. Циркуляция вектора \mathbf{J} по произвольному замкнутому контуру L равна току намагничивания I_m , охватываемому этим контуром, или, иначе говоря, пересекающему ограниченную контуром L поверхность:

$$\oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = I_m;$$

Теорема о циркуляции вектора намагниченности \mathbf{J} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{J} = \mathbf{j}_m,$$

где \mathbf{j}_m — объемная плотность тока намагничивания.

Вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} равен

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J},$$

где \mathbf{B} — магнитная индукция, \mathbf{J} — намагниченность вещества, μ_0 — магнитная постоянная.

Единица напряженности магнитного поля — ампер, деленный на метр (А/м).

Связь между \mathbf{J} и \mathbf{H} в однородном изотропном магнетике:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где χ — *магнитная восприимчивость* вещества (безразмерная величина). Для *парамагнетиков* $\chi > 0$, для *диамагнетиков* $\chi < 0$, в обоих случаях $|\chi| \sim 10^{-5}$.

У *ферромагнетиков* намагниченность \mathbf{J} отлична от нуля в отсутствие внешнего магнитного поля ($\mathbf{J} \neq 0$ при $\mathbf{H} = 0$). Во внешнем магнитном поле намагниченность \mathbf{J} не является однозначной функцией напряженности \mathbf{H} , а зависит от предшествующего состояния образца. *Петля гистерезиса* — это график зависимости $J(H)$. Эффективная магнитная восприимчивость $\chi_\phi \sim 10^3 - 10^4$.

Точка Кюри — это температурная точка, в которой вещество теряет ферромагнитные свойства, становясь парамагнетиком.

Магнитная проницаемость μ вещества:

$$\mu = 1 + \chi.$$

Связь между \mathbf{B} и \mathbf{H} для однородных изотропных пара- и диамагнетиков:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}.$$

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{H} в интегральной форме. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} по произвольному

замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром или, иначе говоря, пересекающих ограниченную контуром поверхность:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}},$$

где $I_{\text{пр}} = \sum_k I_k$ — алгебраическая сумма токов проводимости, при вычислении которой сила тока I_k учитывается со знаком «плюс», если направление тока и направление обхода контура L при вычислении циркуляции $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$ связаны правилом правого винта.

Дифференциальная форма *теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H}* :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пр}},$$

где $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости.

Напряженность H и индукция магнитного поля B в бесконечно длинном соленоиде, заполненном магнетиком с магнитной проницаемостью μ , равны:

$$\begin{aligned} H &= nI, \\ B &= \mu_0 \mu nI, \end{aligned}$$

где I — сила тока в обмотке соленоида, n — число витков провода на единицу длины соленоида.

Граничные условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{B} на поверхности раздела магнетиков:

$$B_{2n} = B_{1n},$$

где B_{1n} , B_{2n} — проекции векторов магнитной индукции \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 в первой и второй средах на направление общей нормали \mathbf{n} к поверхности раздела магнетиков.

Граничные условия для тангенциальной компоненты вектора \mathbf{H} на поверхности раздела магнетиков:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_{\text{пр}},$$

где $H_{1\tau}$, $H_{2\tau}$ — проекции векторов напряженности магнитного поля \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 в первой и второй средах на направление касательной к поверхности раздела магнетиков, $i_{\text{пр}}$ — плотность поверхностного тока проводимости. Если токи проводимости на поверхности раздела отсутствуют ($i_{\text{пр}} = 0$), то граничные условия имеют вид

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0.$$

8. Электромагнитная индукция. *Магнитный поток* через поверхность S равен:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Единица магнитного потока Φ — *вебер* (Вб).

Закон электромагнитной индукции Фарадея. При изменении магнитного потока Φ через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в контуре возникает электрический ток, называемый индукционным. Величина ЭДС индукции равна:

$$\mathcal{E}_\text{и} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

В постоянном магнитном поле ЭДС индукции в движущемся контуре возникает за счет действия силы Лорентца на движущиеся вместе с проводником носители тока.

Если контур неподвижен, а магнитное поле с течением времени изменяется, ЭДС индукции возникает за счет действия вихревого электрического поля на носители тока.

Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} при наличии переменного магнитного поля (уравнение Максвелла):

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Дифференциальная форма этой теоремы:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Индуктивность L контура — это коэффициент пропорциональности между магнитным потоком Φ и силой тока I в контуре:

$$\Phi = LI.$$

Единица индуктивности — *генри* (Гн): $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$.

Индуктивность бесконечно длинного соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где μ — магнитная проницаемость магнетика, заполняющего соленоид, n — число витков соленоида на единицу его длины, V — объем соленоида.

Явление самоиндукции — возникновение ЭДС индукции и индукционного тока в замкнутом проводящем контуре за счет изменения силы тока в этом контуре. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с.и}}$ равна:

$$\mathcal{E}_{\text{с.и}} = -L \frac{dI}{dt},$$

где L — индуктивность контура, I — сила тока.

Магнитная энергия катушки индуктивности L , в которой течет ток силой I :

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2I},$$

где Φ — магнитный поток через катушку.

Объемная плотность энергии магнитного поля с индукцией \mathbf{B} и напряженностью \mathbf{H} :

$$w = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2}.$$

9. Уравнения Максвелла. Плотность тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}}$:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}(x, y, z, t)}{\partial t},$$

где $\mathbf{D}(x, y, z, t)$ — вектор электрической индукции.

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} переменных токов. Циркуляция вектора \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру L равна силе полного тока (сумма тока проводимости и тока смещения), пересекающего ограниченную контуром поверхность S :

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S},$$

где $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости.

Дифференциальная форма этой теоремы:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

1. Поток вектора электрической индукции \mathbf{D} через произвольную замкнутую поверхность S равен суммарному стороннему заряду $q_{\text{ст}}$, расположенному внутри поверхности:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ст}}.$$

2. Поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

3. Циркуляция вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} по произвольному замкнутому контуру L равна взятому со знаком «минус» интегралу от производной по времени вектора магнитной индукции \mathbf{B} по ограниченной контуром L поверхности S :

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

4. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру L равна силе полного тока (сумма тока проводимости и тока смещения), пересекающего ограниченную контуром L поверхность S :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ст}},$$

где $\rho_{\text{ст}}$ — объемная плотность сторонних зарядов,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости.

Материальные уравнения однородной изотропной среды с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \lambda \mathbf{E},$$

здесь λ — удельная электрическая проводимость среды.

III. Производные единицы электрических и магнитных величин

Производные единицы СИ электрических и магнитных величин образованы в соответствии с так называемой рационализованной формой уравнений, выражающих закон Кулона и закон Био–Савара (см. формулы (1.1) и (23.3) настоящей книги). Важнейшие производные единицы СИ электрических и магнитных величин приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Производные единицы СИ электрических и магнитных величин

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м ²	—
Электрический заряд	TI	кулон	Кл	1 Кл=1 А·с
Объемная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м ³	—
Поляризованность, электрическая индукция	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м ²	—
Электрический дипольный момент	LTi	кулон–метр	Кл·м	—
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	1 В=1 Дж/Кл
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	—
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	1 Ф=1 Кл/В
Электрическая постоянная	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м	—
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	1 Ом=1 В/А
Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом–метр	Ом·м	—
Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	—
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	1 Вб=1 Тл·м ² =1 В·с
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	1 Тл=1 Н/(А·м)

Продолжение таблицы 2

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	—
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	1 Гн=1 Вб/А
Магнитная постоянная	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	—
Магнитный момент тока	L^2I	ампер-квадратный метр	А·м ²	—
Намагниченность	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	—

В системе СГСЭ коэффициент пропорциональности k в законе Кулона (см. (1.1)) полагается безразмерным и равным 1. В системе СГСМ коэффициент пропорциональности k в законе Био–Савара (23.3) полагается безразмерным и равным 1. Величина c , которая называется *электродинамической постоянной*, численно равна электрическому заряду в единицах системы СГСЭ, эквивалентному одной единице электрического заряда в системе СГСМ. Электродинамическая постоянная равна скорости света в вакууме: $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

В физике часто употребляется гауссова система единиц, в которой единицы всех электрических величин такие же, как в системе СГСЭ, а единицы всех магнитных величин такие же, как в системе СГСМ. В гауссовой системе, как и в системе СГСЭ, коэффициент пропорциональности k в законе кулона (1.1) полагается безразмерным и равным 1. В то же время коэффициент пропорциональности k в законе Био–Савара (23.3) полагается равным $k=1/c$, где c — электродинамическая постоянная.

Производные единицы гауссовой системы СГС для электрических и магнитных величин приведены в табл. 3

Таблица 3

Производные единицы СГС электрических и магнитных величин

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Значение в единицах СИ
Сила электрического тока	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	—	—	10/с А
Плотность электрического тока	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}$	—	—	10 ⁵ /с А
Электрический заряд	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	10/с Кл
Объемная плотность электрического заряда	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	10 ⁷ /с Кл/м ³

Продолжение таблицы 3

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Значение в единицах СИ
Поляризованность	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	$10^5/c$ Кл/м ²
Электрический дипольный момент	$L^5/2M^{1/2}T^{-1}$	—	—	$1/(10c)$ Кл·м
Электрическое смещение	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	$10^5/(4\pi c)$ Кл/м ²
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	$10^{-8}c$ В
Напряженность электрического поля	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	$10^{-6}c$ В/м
Электрическая емкость	L	сантиметр	см	$10^9/c^2$ Ф
Электрическое сопротивление	$L^{-1}T$	—	—	$10^{-9}c^2$ Ом
Удельное электрическое сопротивление	T	—	—	$10^{-11}c^2$ Ом·м
Магнитный поток	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	максвелл	Мкс	10^{-8} Вб
Магнитная индукция	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	гаусс	Гс	10^{-4} Тл
Напряженность магнитного поля	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	эрстед	Э	$10^3/(4\pi)$ А/м
Индуктивность, взаимная индуктивность	L	сантиметр	см	10^{-9} Гн
Магнитный момент тока	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	10^{-3} А·м ²
Намагниченность	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	10^3 А/м

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ампер 81

Вебер 136

Вектор элементарной площадки 15

Взаимная индуктивность 146

Вихревое электрическое поле 139

Вольт 33

Восприимчивость диэлектрическая
69

— магнитная 126

Генри 141

Гистерезис 126

Градиент потенциала электрического поля 37

Граничные условия для вектора **P**
73

— — — — электрической индукции **D** 78

— — — — **B** 132

— — — — **E** 40, 41

— — — — **H** 133

Диамagnetики 126

Дивергенция вектора магнитной индукции 112

— — напряженности электрического поля 22

— — поляризованности 72

— — электрической индукции 75

— плотности тока 85

Дипольный момент 35, 41

Диполь электрический 41

— — точечный 42

Диэлектрики 49, 65

Диэлектрическая восприимчивость
69

— проницаемость 74

Емкость конденсатора 57

— — плоского 57

— — сферического 58

Емкость конденсатора цилиндрического 58

— — эквивалентного 60

— проводника 55

— проводящего шара 56

Закон Джоуля–Ленца 94

— — в локальной форме 96

— Кулона 10

— Ома 86

— — для неоднородного участка цепи 90

— — в локальной форме 88

— сохранения электрического заряда 9

— электромагнитной индукции Фарадея 136

Заряд электрический 9

— точечный 10

— пробный 11

Заряды индукционные 49

— поляризационные 66

— связанные 66

— сторонние 66

Индуктивность взаимная 146

— контура 141

— соленоида 142

— магнитная 104

— электрическая 74

— электромагнитная 136

— электростатическая 49

Квазистационарный электрический ток 95

Конденсатор 56

— плоский 57

— сферический 57

— цилиндрический 57

Коэрцитивная сила 127

Кулон 10

Линия магнитной индукции 105
— тока 84

Магнетики 121

Магнитная индукция 104
— восприимчивость 126
— постоянная 103
— проницаемость 128
— энергия контура с током 145
— — контуров с током, взаимная 148

Магнитный момент 104

— поток 137

Магнитное поле 103

— — витка с током 105
— — движущегося заряда 110
— — прямого провода с током 105, 107
— — соленоида 105, 114, 115, 131

Макрополе электрическое 48

Материальные уравнения 155

Микрополе 48

Молекулярные токи 121

Мощность тока 93

— — тепловая 94, 95

Напряжение электрическое 33

Напряженность поля магнитного 125

— — сторонних сил 89

— — электрического 11

— — — заряженной бесконечной нити 28

— — — — плоской поверхности 29

— — — — сферической поверхности 26

Намагниченность, вектор 121

— остаточная 127

Намагничивание вещества 121

— , насыщение 126

— , токи 122

Неоднородный участок цепи 89

Неполярные молекулы 65

Носители тока 80

Обкладки конденсатора 56

Оператор Лапласа 39

— набла 39

Ом 86

Парамагнетики 120, 126

Петля гистерезиса 126

Плотность заряда 23

— — внутри проводника 50, 98

— — поляризации связанного 72

— тока 82

— энергии магнитного поля 146

— — электрического поля 63

Поле консервативное 30

— магнитное 103

— потенциальное 32

— соленоидальное 114

— электрическое 10

— электромагнитное 155

— электростатическое 10

Полярные молекулы 65

Поляризация диэлектриков 66

Поляризованность, вектор 68

Постоянная времени цепи 97

— электрическая 10

Потенциал поля системы точечных зарядов 35

— — точечного диполя 42

— — — заряда 34

— — электростатического 32

Поток вектора магнитной индукции 112

— — напряженности электрического поля 16

— магнитный 136

Правило Кирхгофа, первое 91

— — , второе 91

— Ленца 137

Принцип суперпозиции 12

Проводимость, ток 80

Проводники 49

Проводящий контур 104

Проницаемость диэлектрическая 74

— магнитная 128

Работа амперовых сил 118, 119

— тока 93

Ротор вектора магнитной индукции 114

— — напряженности магнитного поля 129

— — — электрического поля 31, 32

- Самоиндукция 142
Сегнетоэлектрики 66
Сила Ампера 107, 108
— Лорентца 111
— тока 80
— электродвижущая 89
— — индукции 136
— — самоиндукции 143
Силовая линия магнитного поля 105
— — электрического поля 12
Силы сторонние 88
Система единиц физических величин 158
Соленоид 114
Соленоидальное поле 114
Сопrotивление проводника 86
— слабо проводящей однородной среды 102
— электрическое 86
— , температурный коэффициент 87
Стерadian 17
Сторонние силы 88

Температура Кюри 127
Теорема Гаусса для вектора **B** 112
— — — — **D** 74, 75
— — — — **E** 19, 23
— — — — **P** 71, 72
— взаимности 147
— о циркуляции вектора **B** 112, 113
— — — — **E** 30, 31, 140
— — — — **H** 128, 129
— — — — **H** магнитного поля переменных токов 151, 153
— — — — **J** 123, 124
— Фарадея 52
Тепловая мощность тока 94
— — — удельная 96
Тесла 104
Токи молекулярные 121
— намагничивания 122
Ток квазистационарный 95
— конвекционный 80
— полный 150
— постоянный 85
— проводимости 80

Ток смещения 150
Точка Кюри 127

Угол телесный 17
Уравнение Лапласа 38
— Максвелла 140
— непрерывности 84, 85
— Пуассона 38
Уравнения Максвелла 140, 153
— материальные 155

Фарад 55
Фарадея теорема 52
Ферромагнетики 126

Циркуляция вектора **E** 30, 140
— — **B** 112, 114
— — **H** 128, 129, 151, 153

ЭДС 89
— индукции 136
— самоиндукции 143
Эквипотенциальная поверхность 37
Электрическая емкость 55
— постоянная 10
— проводимость удельная 87
Электрический ток 80
— — конвекционный 80
— — проводимости 80
Электрическое поле 10
— — заряженной бесконечной нити 28
— — — — плоской поверхности 29
— — — — сферической поверхности 26
— смещение 73
Электромагнитная индукция 136
Электромагнитное поле 155
Электромагнитные волны 155
Элементарный проводящий контур 104
Элемент тока 107
Энергия заряженного проводника 62
— — конденсатора 63
— магнитного поля 146
— системы точечных зарядов 61
— электрического поля 63