Примеры

Диффереренциальные операции 1 и 2 порядков

Пример 1.

Доказать следующие равенства дифференциальных операций второго порядка, используя оператор «набла»,

1.1 $rotgradf(M) = \bar{0}$;

1.2 $divrot\bar{a}(M) = 0$;

Решение 1.1:

$$rotgradf(M) = \nabla \times (\nabla f(M) = (\nabla \times \nabla) f(M) = [\text{т.к. } \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}] = \bar{0},$$

т.е. $rotgradf(M) = \bar{0}$ или $\nabla \times (\nabla f(M) = \bar{0}$.

Решение 1.2:

$divrot\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla \times \bar{a}(M)\big) = 0,$ т.к. смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю.

Пример 2.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$$rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$$

Решение:

$$rotrot\bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = \begin{bmatrix} \bar{a} \times \big(\bar{b} \times \bar{c}\big) = \bar{b}\bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{a}\bar{b} \\ \text{двойное векторное произведение} \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) - (\nabla\nabla)\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M),$$

т. е. $\quad rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M).$$

Пример 3.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$graddiv\bar{a}(M) =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Решение:

$$graddiv\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) = \frac{\partial}{\partial x} div\bar{a}(M)\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} div\bar{a}(M)\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} div\bar{a}(M)\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Пример 4.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$$div(u\bar{a}) = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu,$$

где u − скалярная функция, $\bar{a}$ − векторная функция.

Решение:

В символьной форме записи

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (\,u\bar{a}).$$

Учитывая сначала дифференциальный характер ∇ , мы должны написать

$$\nabla \cdot (\,u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u$$

В результате получаем формулу

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (\,u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u = u div\bar{a} + \bar{a} \cdot grad u.$$