Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В.Г. ПАК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

ЛЕКЦИЯ №3

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Содержание

Тема 2. Комбинаторика

§1. Основные правила и формулы

1.1. Выборки

1.2. Правила суммы и произведения

1.3. Размещения

1.4. Перестановки

1.5. Сочетания без повторений

1.6. Сочетания с повторениями

Тема 2. Комбинаторика

Комбинаторика — раздел дискретной математики, в котором количественно и качественно исследуются комбинации элементов множеств и отношения на них.

§1. Основные правила и формулы

1.1. Выборки

Пусть имеются n различных типов (видов) элементов (предметов). Элементы разных видов отличаются, а одного вида логически неразличимы.

Определение. *Выборкой* ((n, r)*-выборкой*) называется совокупность r элементов данных n видов.

Определение. Выборка называется *повторной*, если в ней допустимы предметы одного типа.

Определение. Выборка называется *бесповторной*, если в ней все предметы должны быть разных типов.

Определение. Выборка называется *упорядоченной*, если в ней задан порядок расположения предметов.

Определение. Выборка называется *неупорядоченной*, если в ней порядок следования предметов не имеет значения.

1.1. Выборки

Таким образом, упорядоченная выборка – вектор, неупорядоченная бесповторная – множество, неупорядоченная повторная – *мультимножество.*

Выборка	Упорядоченная	Неупорядоченная
Повторная	Размещение с повторениями	Сочетание с повторениями
Бесповторная	Размещение (без повторений)	Сочетание (без повторений)

1.2. Правила суммы и произведения

Для подсчёта чисел выборок и для решения перечислительных комбинаторных задач вообще применяются следующие основные правила.

Правило суммы. Если выбор предмета A можно осуществить m способами, а выбор предмета B - n способами, причём их совместный выбор исключён, то выбор либо A, либо B возможен $m + n$ способами.

Теоретико-множественная формулировка: если $|A| = m$**,** $|B| = n$, $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = m + n$.

1.2. Правила суммы и произведения

Правило произведения. Если выбор предмета A можно осуществить m способами, а после каждого такого выбора предмет B можно выбрать n способами, то выбор обоих предметов A и B в указанном порядке возможен mn способами.

Теоретико-множественная формулировка: если $|A| = m$, $|B| = n$, то $|A \times B| = mn$.

Замечание. Оба правила естественным образом обобщаются на любое конечное число предметов.

Правило суммы. Если выбор предмета A_1 можно осуществить n_1 способами, выбор предмета A_2 - n_2 способами и т.д. Выбор предмета A_k можно осуществить n_k способами. Попарно совместный выбор предметов исключён. Тогда выбор одного из предметов $A_1, \ldots, A_k$ возможен $n_1 + \cdots + n_k$ способами.

Теоретико-множественная формулировка: если $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2, \ldots, |A_k| = n_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, то $|A_1 \cup \cdots \cup A_k| = n_1 + \cdots + n_k$.

Правило произведения. Если выбор предмета A_1 можно осуществить n_1 способами, а после каждого такого выбора предмет A_2 можно выбрать n_2 способами, после каждого совместного выбора A_1 и A_2 выбор A_3 можно сделать n_3 и т.д., После каждого совместного выбора предыдущих предметов выбор A_k можно осуществить n_k способами то выбор всех предметов $A_1, \dots, A_k$ в указанном порядке возможен $n_1 \cdots n_k$ способами.

Теоретико-множественная формулировка: если $|A_1| =$ $= n_1$, $|A_2| = n_2, \dots, |A_k| = n_k$, то $|A_1 \times \cdots \times A_k| = n_1 \cdots n_k$.

1.3. Размещения

Определение. *Размещением с повторениями* из n элементов по r называется упорядоченная повторная (n, r)-выборка.

Число различных (n, r)-размещений с повторениями обозначается $\bar{A}_n^r$.

$$\boxed{\bar{A}_n^r = n^r}$$

Определение. *Размещением* (*без повторений*) из n элементов по r называется упорядоченная бесповторная (n, r)-выборка.

Число различных (n, r)-размещений обозначается A_n^r.

$$\boxed{A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

1.4. Перестановки

Определение. *Перестановкой* (*без повторений*) n различных элементов называется их расположение в ряд.

Таким образом, (n)-перестановка - вектор n различных элементов данных n типов, или (n, n)-размещение.

Число различных (n)-перестановок обозначается P_n.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Определение. Пусть имеются n_1 предметов первого типа, n_2 - второго типа и т.д., n_k - k-го типа, $n_1 + \cdots + n_k = n$. Предметы разных типов различимы, одного типа – неразличимы. *Перестановкой с повторениями* называется расположение всех этих предметов в ряд.

Число различных перестановок с повторениями обозначается $P(n_1; \ldots ; n_k)$.

$$\boxed{P(n_1; \ldots ; n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$$

1.5. Сочетания без повторений

Определение. *Сочетанием* (*без повторений*) из n элементов по r называется неупорядоченная бесповторная (n, r)-выборка.

Число различных (n, r)-сочетаний обозначается C_n^r.

$$\boxed{C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

Числа C_n^r называются *биномиальными коэффициентами*.

Свойства биномиальных коэффициентов:

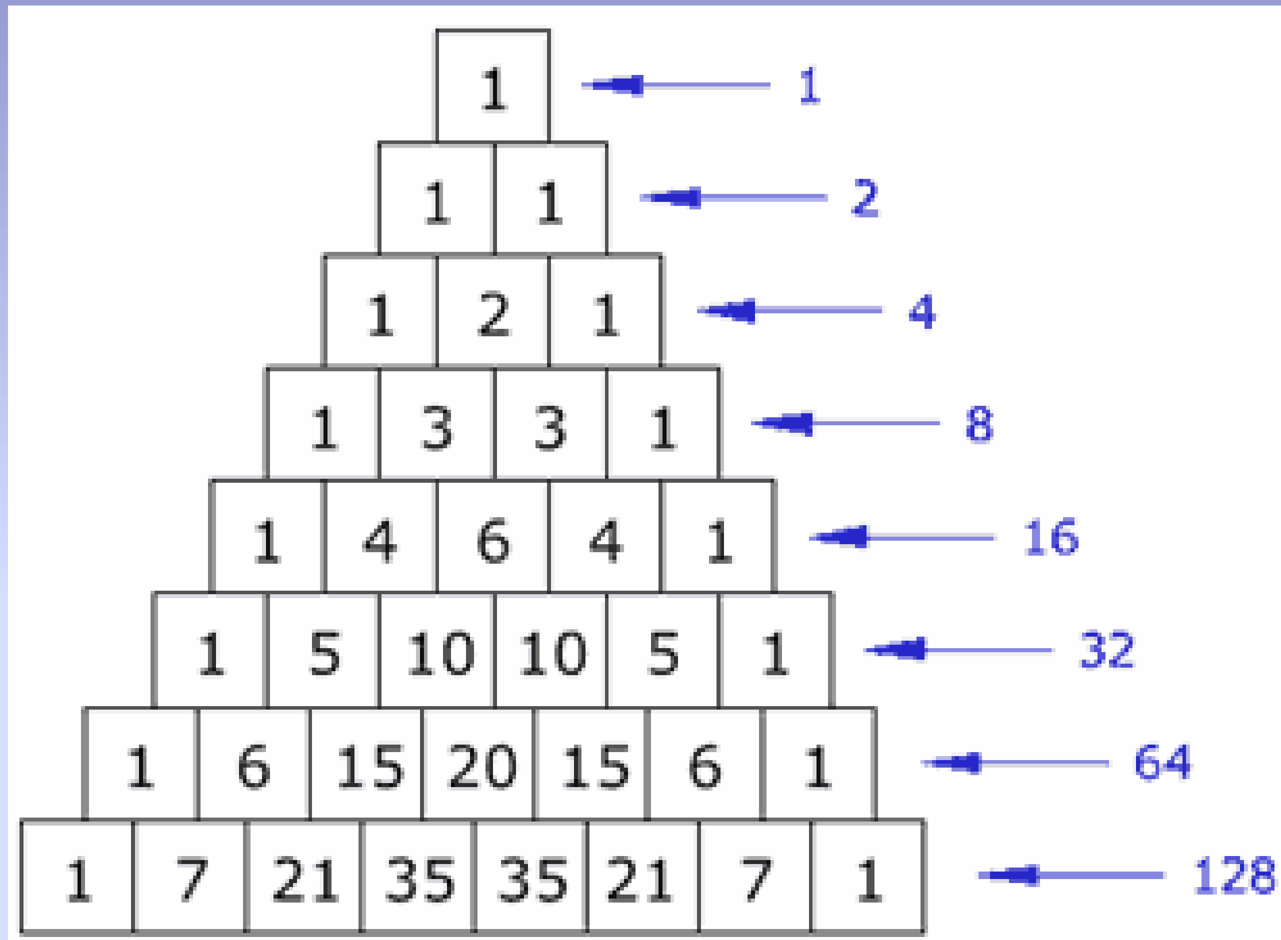
1. $C_n^r = C_n^{n-r}$ (симметрия);
2. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ (*формула Паскаля*);
3. $C_n^k C_k^r = C_n^r C_{n-r}^{k-r}$;
4. C_n^r равно числу r-элементных подмножеств (n)-множества;
5. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

1.5. Сочетания без повторений

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля	Номер строки	Возведение в степень двучлена
1	0	$(a+b)^0 = 1$
1 1	1	$(a+b)^1 = a + b$
1 2 1	2	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	3	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
1 4 6 4 1	4	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	5	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	6	и т. д.

1.5. Сочетания без повторений



1.6. Сочетания с повторениями

Определение. *Сочетанием с повторениями* из n элементов по r называется неупорядоченная повторная (n, r)-выборка.

Число различных (n, r)-сочетаний с повторениями обозначается $\bar{C}_n^r$.

$$\boxed{\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r}$$

Свойство чисел $\bar{C}_n^r$:

$$\bar{C}_n^r = \bar{C}_{n-1}^r + \bar{C}_{n-1}^{r-1}.$$