Глава «Основы векторного анализа»

§ 1. Основные понятия

<u>Определение</u> (вектор–функция)

Говорят, что *вектор–функция* скалярного аргумента задана, если установлено правило, согласно которому для любого параметра t, принадлежащего области A, в свою очередь являющейся частью R, ставится в соответствие вектор $\overline{r}$.

<u>Обозначение:</u> $\overline{r} = \overline{r}(t)$ или $\overline{r} = \overline{f}(t)$

<u>Замечание</u>:

Пусть в R^3 задана ПДСК.

Пусть вектор $\overline{r}$ имеет координаты $\{x, y, z\}$.

Пусть вектор-функция $\overline{f}(t)$ имеет координаты $\{\varphi(t), \psi(t), \lambda(t)\}$.

яТогда для задания вектор–функции достаточно задать систему:

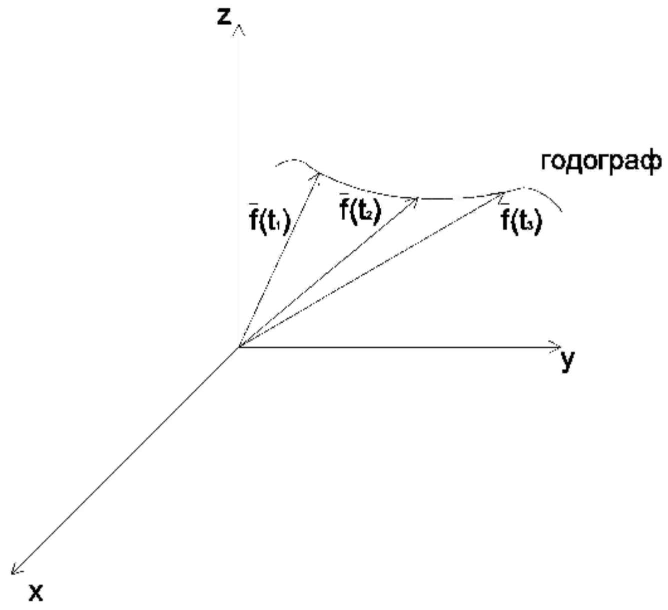
$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \lambda(t) \end{array}\right\} \forall\, t \in A$$

<u>Определение</u> (годограф)

Пусть $\overline{f}(t)$ – некоторая функция $\forall\, t \in A$.

Поместим $\overline{f}(t_1), \overline{f}(t_2), \overline{f}(t_3), ..., \overline{f}(t_n)$ в начало координат.

Множество точек, образованное концами этих векторов, называется *годографом* вектор–функции $\overline{f}(t)$. См. рисунок ниже.



Определение (предел вектор–функции)

Пределом вектор–функции $\overline{f}(t)$ называется вектор $\bar{c}$ при $t \to t_0$, если для любого сколько угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что: $0 < |t - t_0| < \delta$, и выполняется неравенство $|\overline{f}(t) - \bar{c}| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{f}(t) = \bar{c}$

Замечание:

Пусть предел вектор $\bar{c}$ имеет координаты $\{c_1, c_2, c_3\}$.

Пусть вектор–функция $\overline{f}(t)$ имеет координаты $\{\varphi(t), \psi(t), \lambda(t)\}$.

Тогда, если $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{f}(t) = \bar{c}$, то $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = c_1 \\ \lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = c_2 \\ \lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t) = c_3 \end{cases}$

Свойства пределов вектор-функций

1) $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{c} \Rightarrow \lim\limits_{t \to t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{c}|$;

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overline{r_1}(t)+\overline{r_2}(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_1}(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_2}(t)$;

3) $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha(t)\cdot\overline{r}(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\alpha(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)$;

4) $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_1}(t)\cdot\overline{r_2}(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_1}(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_2}(t)$;

5) $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\overline{r_1}(t)\right|=0$, $\left|\overline{r_2}(t)\right|-\textit{огр.}\Rightarrow\lim\limits_{t\to t_0}\left|\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right|=0$;

<u>Доказательство:</u>

$$\left|\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right|=\left|\overline{r_1}(t)\right|\cdot\left|\overline{r_2}(t)\right|\cdot\sin(\overline{r_1}(t)\hat{;}\overline{r_2}(t))\le\left|\overline{r_1}(t)\right|\cdot\left|\overline{r_2}(t)\right|\underset{t\to t_0}{\to}0$$

6) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_1}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_2}(t)$.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_1}(t)=\overline{c_1}$ и $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r_2}(t)=\overline{c_2}$

Тогда с учетом свойства 1 достаточно доказать $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right|=\left|\overline{c_1}\times\overline{c_2}\right|$:

$$\lim_{t\to t_0}\overline{r_1}(t)=\overline{c_1}\Leftrightarrow\overline{r_1}(t)=\overline{c_1}+\overline{\alpha_1}(t),\text{ где }\overline{\alpha_1}(t)\underset{t\to t_0}{\to}0$$

$$\lim_{t\to t_0}\overline{r_2}(t)=\overline{c_2}\Leftrightarrow\overline{r_2}(t)=\overline{c_2}+\overline{\alpha_2}(t),\text{ где }\overline{\alpha_2}(t)\underset{t\to t_0}{\to}0$$

$$\left|\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right|=\left|\left(\overline{c_1}+\overline{\alpha_1}(t)\right)\times\left(\overline{c_2}+\overline{\alpha_2}(t)\right)\right|=\left|\overline{c_1}\times\overline{c_2}+\overline{\alpha_1}(t)\times\overline{c_2}+\overline{c_1}\times\overline{\alpha_2}(t)+\overline{\alpha_1}(t)\times\overline{\alpha_2}(t)\right|\le\left|\overline{c_1}\times\overline{c_2}\right|+$$
$$\underbrace{\left|\overline{\alpha_1}(t)\times\overline{c_2}\right|+\left|\overline{c_1}\times\overline{\alpha_2}(t)\right|+\left|\overline{\alpha_1}(t)\times\overline{\alpha_2}(t)\right|}_{\to 0\ \textit{при}\ t\to t_0}$$

$$\lim_{t\to t_0}\left|\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right|=\left|\overline{c_1}\times\overline{c_2}\right|$$

<u>**Определение**</u> (непрерывность вектор–функции в точке)

Вектор-функция $\overline{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если:

1) $\bar{r}(t_0)$ определена;

2) $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t)$;

3) $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0)$.

<u>Замечание</u>:

Пусть вектор–функция $\bar{r}(t)$ имеет координаты $\{\varphi(t), \psi(t), \lambda(t)\}$.

$$\lim_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = \psi(t_0) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t) = \lambda(t_0) \end{cases},$$

т.е. $\varphi(t), \psi(t), \lambda(t)$ – непрерывны в точке t_0.

<u>**Определение**</u> (непрерывность)

Вектор–функция $\bar{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta \bar{r}(t) = 0$.

<u>**Определение**</u> (производная вектор–функции в точке)

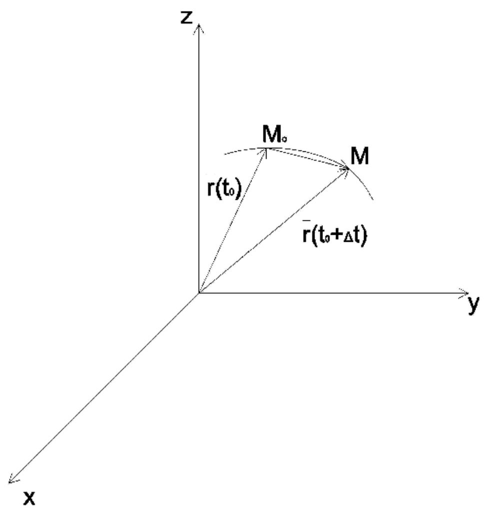
Производной вектор–функции $\bar{r}(t)$ *в точке* t_0 называется $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t} = \bar{r}'(t) = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$,

где $\Delta \bar{r}(t) = \left(\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right)$.

<u>Замечания</u>:

1) О геометрическом смысле производной от вектор–функции.

Геометрический смысл производной от вектор–функции в точке t_0 – касательная к годографу вектор–функции в точке t_0. См. рисунок ниже.



2) Физический смысл производной от вектор–функции.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}(t)$$

Определение (дифференцируемость)

Вектор–функция $\bar{r}(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0, если $\Delta\bar{r}(t) = \bar{c}\cdot\Delta t + \bar{\alpha}(t)\cdot\Delta t$, где $\bar{\alpha}(t) \underset{t\to t_0}{\to} 0$.

Тогда $\bar{c}(t) = \bar{r}'(t)$

Определение (дифференциал)

Дифференциалом вектор–функции $\bar{r}(t)$ в точке t_0 называется главная часть приращения функции, линейного относительно Δt.

$$d\bar{r} = \bar{r}'(t_0)\cdot\Delta t$$

Приращение независимой переменной совпадает с дифференциалом независимой переменной.

$\Delta t = dt \Rightarrow d\bar{r} = \bar{r}'(t_0) \cdot dt$

<u>Определение</u> (определенный интеграл для вектор–функции)

Пусть вектор–функция $\bar{r}(t)$ определена $\forall\, t \in [a;b] \subset R$.

Пусть $\{t_i\}_{i=0}^{N}$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$.

Пусть $\{\Delta t_i\}_{i=1}^{N}$: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$: $\xi_i \in [t_{i-1}; t_i]$

Тогда $\bar{I}(\Delta t_i; \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \bar{r}(\xi_i) \cdot \Delta t_i$ – *векторная интегральная сумма Римана для вектор–функции* $\bar{r}(t)$.

Пусть $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,N} \Delta t_i$

$\int\limits_a^b \bar{r}(t)dt = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \bar{r}(\xi_i) \cdot \Delta t_i$ – *определенный интеграл от вектор–функции.*

<u>Замечание</u>:

Пусть вектор–функция $\bar{r}(t)$ имеет координаты $\{\varphi(t), \psi(t), \lambda(t)\}$.

$$\int\limits_a^b \bar{r}(t)dt = \left\{ \int\limits_a^b \varphi(t)dt; \int\limits_a^b \psi(t)dt; \int\limits_a^b \lambda(t)dt \right\}$$