§2. Эллипс и его свойства

Определение 2.1. *Эллипсом* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a \ge b > 0. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипса.

Свойства эллипса

1. Эллипс – *осесимметричная и центрально симметричная* фигура. Осями симметрии эллипса являются оси координат, а центром симметрии – начало координат.

В самом деле, если точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу, то ему принадлежат, как следует из уравнения (2.1), также и точки $M_1(-x,y)$, $M_2(x,-y)$, $M_3(-x,-y)$ (рис. 2.1). А это означает, что оси координат являются осями симметрии, а начало координат – центром симметрии эллипса. Эти оси симметрии называются *главными осями* эллипса, а центр симметрии – его *центром*. Из свойств симметрии эллипса следует, что его достаточно исследовать и построить только в первом квадранте ($x \ge 0$, $y \ge 0$).

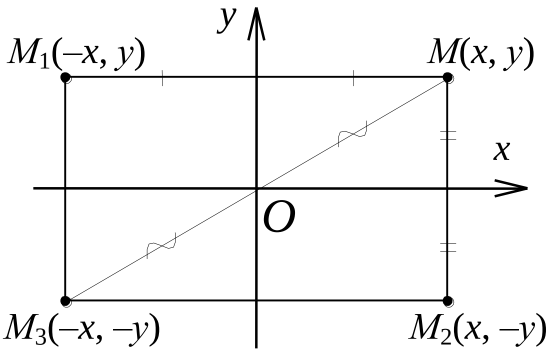

Рис. 2.1. Точки, симметричные относительно осей и начала координат

2. Эллипс – *ограниченная кривая. Построение эллипса.* Эллипс заключён внутри прямоугольника $D=\{(x,y): |x| \le a, |y| \le b\}$, а также внутри окружности $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат и радиусом a (рис. 2.2). На рис. 2.2 заштрихована та часть плоскости Oxy, в которой расположен эллипс.

Доказывая первое из этих утверждений, заметим, что из уравнения (2.1) следуют неравенства $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, откуда получаем $|x| \le a$, $|y| \le b$. Для доказательства второго утверждения преобразуем выражение для квадрата расстояния произвольной точки эллипса $M(x,y)$ от начала координат:

$$OM^2 = x^2+y^2 = a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\right).$$

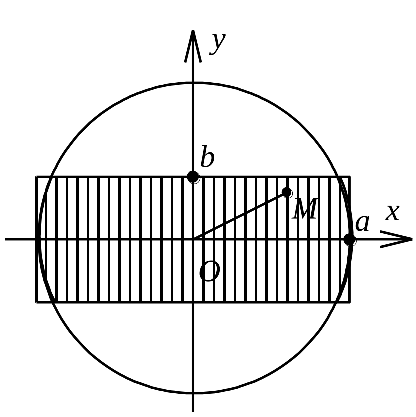

Рис. 2.2. К расположению эллипса на координатной плоскости

Так как $\frac{b^2}{a^2} \le 1$ $(a \ge b)$, то из последнего равенства в силу (2.1) получим

$x^2 + y^2 \le a^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right) = a^2$, что и требовалось доказать.

Эллипс может быть построен путем равномерного сжатия окружности $x^2 + y^2 = a^2$ к оси *Ox*. Действительно, пусть точка $M_1(x, Y)$ принадлежит этой окружности (следовательно, $Y^2 = a^2 - x^2$), Покажем, что точка $M_2\left(x, \dfrac{b}{a}Y\right)$ лежит на эллипсе. Подставим её координаты в левую часть уравнения (2.1) и заменим Y^2 на $a^2 - x^2$, имеем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a^2}Y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + 1 - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Таким образом, координаты точки M_2 удовлетворяют уравнению (2.1) и, следовательно, эта точка принадлежит эллипсу.

Итак, эллипс получается из рассматриваемой окружности путем ее равномерного сжатия к оси *Ox* с коэффициентом $\dfrac{b}{a}$, т.е. такого сдвига всех точек окружности к оси *Ox*, при котором ордината каждой точки окружности умножается на одно и то же число $\dfrac{b}{a}$ (рис. 2.3). Построив дугу эллипса в первом квадранте ($x \ge 0$, $y \ge 0$), остальные его части получим, используя его симметрию относительно осей координат (рис. 2.3).

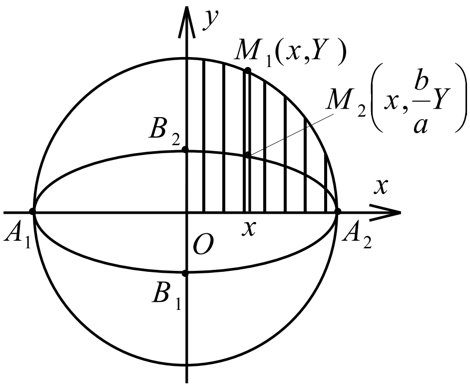

Рис. 2.3. Эллипс как фигура, получаемая при сжатии окружности ($\frac{b}{a} = \frac{2}{5}$)

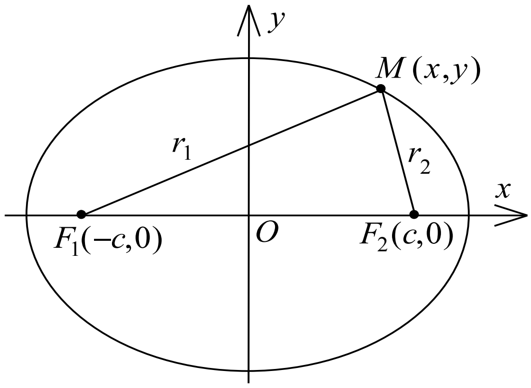

Рис. 2.4. Точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса, r_1 и r_2 – фокальные радиусы его точки

Как следует из уравнения (2.1), точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ принадлежат эллипсу. Они называются его *вершинами*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются *большой и малой осями* эллипса соответственно, а числа a и b – *большой и малой полуосями* (рис. 2.3).

3. *Фокусы эллипса. Свойство фокальных радиусов точки эллипса.* Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, находящиеся на большой оси эллипса, называются его *фокусами*, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки эллипса

$M(x,y)$ до этих точек и отрезки F_1M, F_2M называются *фокальными радиусами* точки M (рис. 2.4). Число $2c$ называется *межфокусным расстоянием*.

Свойство фокальных радиусов

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2.2}$$

►Имеем

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}\,. \tag{2.3}$$

Раскрывая в подкоренном выражении скобки и заменяя, в силу (2.1), y^2 на $b^2(1 - x^2/a^2)$, приходим к соотношению:

$$(x \pm c)^2 + y^2 = x^2 \pm 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

После перегруппировки слагаемых получаем:

$$(x \pm c)^2 + y^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 \pm 2xc + c^2 + b^2. \tag{2.4}$$

Поскольку $c^2 = a^2 - b^2$ и, следовательно, $c^2 + b^2 = a^2$, то правая часть равенства (2.4) преобразуется к виду:

$$(x \pm c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \pm 2xc + a^2 = \left(\frac{c}{a}x \pm a\right)^2, \tag{2.5}$$

а для r_1 и r_2 из (2.3) и (2.5) получаем:

$$r_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x \pm a\right)^2} = a \pm \frac{c}{a}x, \tag{2.6}$$

ибо $|x| \le a$, $0 \le \frac{c}{a} < 1$ и поэтому $a \pm \frac{c}{a}x > 0$. Из (2.6) следует равенство (2.2).◄

Свойство фокальных радиусов можно сформулировать следующим образом.

Сумма расстояний произвольной точки* M *эллипса, определяемого уравнением (2.1), до двух фиксированных точек* $F_1(-c,0)$ *и* $F_2(c,0)$, *где* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, *есть величина постоянная, равная длине его большой оси.

4. *Эксцентриситет эллипса.*

Определение 2.2. Отношение расстояния между фокусами эллипса к длине его большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается e.

По определению $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, следовательно, $e \in [0,1)$, поскольку $0 \le c < a$.

Зафиксируем большую ось (т.е. зафиксируем a). При $e = 0$ имеем $c = 0$ и, следовательно, $b = a$. В этом случае эллипс превращается в окружность с центром в начале координат и радиусом a (рис. 2.5), а оба его фокуса сливаются в

Рис. 2.5. Влияние величины эксцентриситета на форму эллипса

один в начале координат. С увеличением эксцентриситета c увеличивается, а малая полуось b, следовательно, уменьшается (рис. 2.5). Таким образом, с увеличением эксцентриситета эллипс сплющивается, а его фокусы сдвигаются к концам большой оси. Предельным положением эллипса при приближении эксцентриситета к единице является отрезок A_1A_2, т.е. большая ось эллипса.

5. *Каноническая* система координат. *Каноническое* уравнение эллипса.

Эллипс определяется уравнением (2.1), если система координат выбрана следующим образом: ось Ox проходит через фокусы эллипса, а ось Oy – через его центр. Такая система координат называется *канонической* по отношению к данному эллипсу, а уравнение эллипса в такой системе координат (т.е. уравнение (2.1)) – *каноническим* уравнением эллипса. В другой прямоугольной системе координат уравнение эллипса не будет каноническим и может содержать члены с первыми степенями координат и их произведением.

Пример 2.1. На плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат Oxy и задан эллипс с полуосями a, b, центром в точке $O'(x_0, y_0)$ и осями симметрии, параллельными осям координат (рис. 2.6). Написать его уравнение.

►Выберем новую систему координат $O'x'y'$, оси которой параллельны осям старой системы. В новой системе данный эллипс имеет каноническое уравнение $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$. Переходя в нём от новых координат к старым по формулам

$x'=x-x_0$, $y'=y-y_0$, получаем уравнение $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.◄

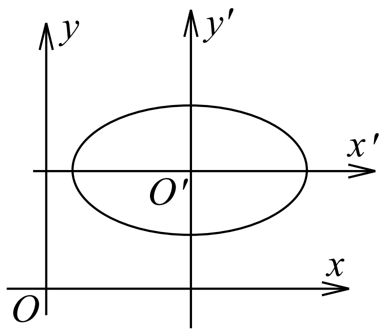

Рис. 2.6. Эллипс с центром в точке O' и осями симметрии, параллельными осям координат

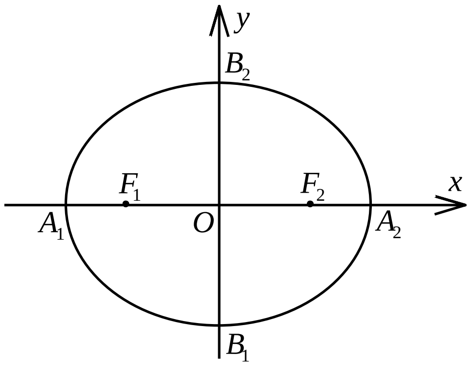

Рис. 2.7. К примеру 2.2

Пример 2.2. Эллипс задан уравнением $16x^2+25y^2=400$. Найти его полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет. Изобразить этот эллипс на чертеже.

►Разделим обе части уравнения эллипса на 400, получим равенство

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, сравнив которое с уравнением (2.1) заключаем, что $a^2=25$, $b^2=16$, откуда $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$. Точки $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ – фокусы эллипса, эксцентриситет $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$. На рис. 2.7 изображен данный эллипс, A_1A_2 – его большая ось, $A_1(-5,0)$, $A_2(5,0)$, B_1B_2 – малая ось, $B_1(-4,0)$, $B_2(4,0)$. ◄