§8. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке

Понятие наибольшего и наименьшего значения функции на некотором множестве X было введено в §7 главы 1 раздела 4.

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, в силу теоремы Вейерштрасса (теорема 4.2 главы 4 раздела 4), принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения ($M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек, то отыскание M и m производится по следующему алгоритму.

1. На интервале (a, b) находим критические точки (подозрительные на экстремум): $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2. Вычисляем значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах отрезка $[a, b]$:

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b). \tag{8.1}$$

3. Среди чисел (8.1) находим наименьшее и наибольшее. Наименьшее из этих чисел равно m, а наибольшее – M.

Пример 8.1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ на отрезке [–3, 3].

►Критические точки данной функции найдены в примере 4.3: $x = 1$ и $x = \pm 2$, там же приведены её значения в этих точках: $f(-2) = -13/3$, $f(2) = 19/3$, $f(1) = 83/12$. Вычислим значения $f(x)$ на концах отрезка [3, 3]: $f(-3) = 17/4$, $f(3) = 41/4$. Теперь среди выделенных значений функции найдём наименьшее: $f(-2) = -13/3$ и наибольшее: $f(3) = 41/4$. Итак, приходим к выводу, что $\max\limits_{x\in[-3,3]} f(x) = 41/4$, а $\min\limits_{x\in[-3,3]} f(x) = -13/3$.◄

Замечание 8.1. Существование наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на интервале (a, b) не является обязательным. В прикладных задачах часто встречается случай, когда функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и имеет на нём единственную стационарную точку $x_0 : f'(x_0) = 0$. Если в этой точке $f(x)$ имеет минимум, то число $f(x_0)$ является не только локальным минимумом данной функции, но и её наименьшим значением на этом интервале, наибольшего значения на рассматриваемом промежутке функция может и не иметь. Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция имеет локальный максимум.

Пример 8.2. Из круглого бревна диаметра d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота h этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление: а) на сжатие; б) на изгиб?

►Известно, что сопротивление балки на сжатие пропорционально площади её поперечного сечения, а на изгиб – произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Рассмотрим функции $f(x)=k_1xh$ и $g(x)=k_2xh^2$, где k_1 и k_2– коэффициенты пропорциональности, $f(x)$– сопротивление балки на сжатие, а $g(x)$ – на изгиб. Так как $h=\sqrt{d^2-x^2}$ (рис. 8.1), то $f(x)=k_1x\sqrt{d^2-x^2}$ и $g(x)=k_2x(d^2-x^2)$. Для каждой из этих функций найдём значение x из интервала $(0,d)$, при котором она принимает наибольшее значение на этом промежутке. Имеем $f'(x)=k_1\dfrac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}$ и $g'(x)=k_2(d^2-3x^2)$, $f'(x)=0$ при $x=d/\sqrt{2}$, $g'(x)=0$ при $x=d/\sqrt{3}$. Так как $f''(x)=-k_1\dfrac{4x(d^2+2x^2)}{(\sqrt{d^2-x^2})^3}<0$ при $x=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ и $g''(x)=-6k_2x<0$ при $x=d/\sqrt{3}$, то каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет в указанных точках локальный максимум. Так как он оказывается единственным на интервале $(0,d)$, то он является одновременно и наибольшим значением на данном промежутке (замечание 8.1). Поскольку $h=d/\sqrt{2}$ при $x=d/\sqrt{2}$ и $h=d\sqrt{2/3}$ при $x=d/\sqrt{3}$, то приходим к следующему заключению: балка с квадратным сечением ($x=h=d/\sqrt{2}$) оказывает наибольшее сопротивление на сжатие, а с прямоугольным сечением ($x=d/\sqrt{3}, h=d\sqrt{2/3}$) – на изгиб. На рис. 8.2 показано, как построить этот прямоугольник (диаметр разделён на три равные части, в точках деления восставлены перпендикуляры).◄

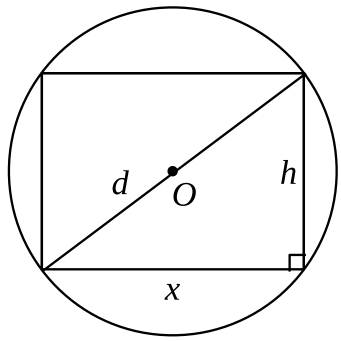

Рис. 8.1. К примеру 8.2 (в круг вписан прямоугольник)

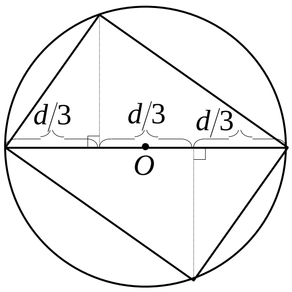

Рис. 8.2. К примеру 8.2