§3. Вычисление объема тела через площади его сечений

Пусть мы хотим вычислить объем V тела (V), изображенного на рис. 3.1. Возьмем в пространстве какую-либо прямоугольную систему координат $Oxyz$ и условимся называть координату x “высотой” точки (над плоскостью Oyz). Плоскость, перпендикулярная оси Ox, при любом фиксированном x из $[a, b]$, вообще говоря, пересекает тело (V) по некоторой плоской фигуре (рис. 3.1). Мы будем считать, что площадь этого сечения нам известна (или что мы так или иначе умеем ее вычислять) для любого $x \in [a, b]$. Эта площадь, разумеется, будет функцией от x, которую мы будем обозначать $S(x)$. Тот специальный класс задач, который мы теперь рассмотрим, будет характеризоваться тем условием, что площадь сечения $S(x)$ тела предполагается данной и требуется с ее помощью выразить объем V данного

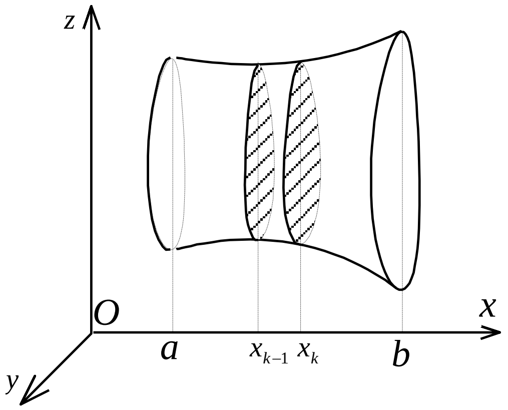

Рис. 3.1. Тело (V) и его сечение плоскостью, перпендикулярной оси

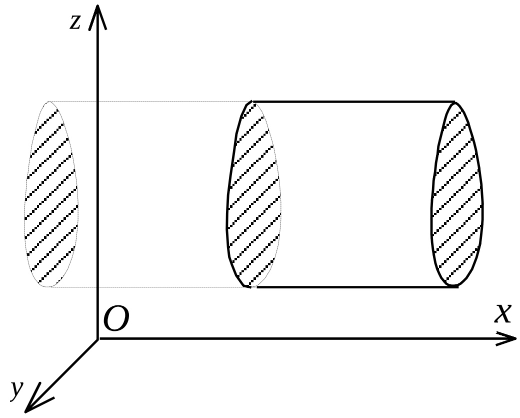

Рис. 3.1д. Прямой цилиндр и его проекция на плоскость Oyz

тела.

Допустим сначала, что данное тело есть прямой цилиндр, т. е. что все его сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox проектируются на плоскость Oyz друг в друга (рис. 3.1д). Если эта фигура есть круг, то мы имеем дело с прямым круговым цилиндром, объём которого, как известно из элементарной математики, равен произведению площади основания на высоту. Это правило мы перенесём, естественно, и на общий случай, когда основание цилиндра имеет произвольную форму. С логической точки зрения мы находимся здесь в обычном положении: понятие объема тела до сих пор не определено, и наша первая задача состоит в том, чтобы дать ему целесообразное общее определение.

Итак, объем всякого тела, имеющего форму прямого цилиндра, мы принимаем равным произведению площади основания этого цилиндра на его высоту (рис. 3.1д).

Перейдем теперь к общему случаю в предположении, что два различных сечения, будучи ортогонально спроецированы на плоскость *Oyz*, перпендикулярную к оси *Ox*, оказываются всегда содержащимися одно в другом (рис. 3.2д). Пусть тело (*V*) расположено между параллельными плоскостями $x = a$ и $x = b$. Разобьем отрезок $[a, b]$ оси *Ox* произвольным образом на n частей посредством точек деления $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$. Через каждую точку деления проведем плоскость перпендикулярно оси *Ox*. Семейство плоскостей $x = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ разделит данное тело (*V*) на вертикальные “слои”, толщина каждого из которых равна *величине* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, соответствующего слоя (ΔV_k). В промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ функция $S(x)$, если предположить ее непрерывной, принимает и свое наименьшее значение m_k, и наибольшее значение M_k. Если на этих, наименьшем и наибольшем, сечениях построить прямые цилиндры высоты $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, то меньший из них будет содержаться в слое (ΔV_k), а больший будет содержать в себе слой (ΔV_k). На основании сделанного выше замечания объемы этих цилиндров будут соответственно $m_k \Delta x_k$ и $M_k \Delta x_k$.

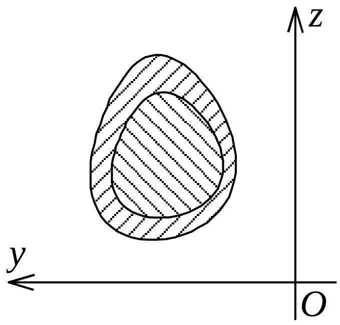

Рис. 3.д. Проекции сечений тела (V) на плоскость Oyz

Из цилиндров, содержащихся в слоях (ΔV_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, составится тело (U_n), а из содержащих в себе эти слои – тело (W_n); объемы тел (U_n) и (W_n) соответственно равны

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \,.$$

Так как при этом тело (U_n) содержится в (*V*), а тело (*V*) содержится в (W_n), то

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le V \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \,. \tag{3.1д}$$

Поскольку $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$, числа m_k и M_k функция принимает в некоторых точках соответствующего промежутка $[x_{k-1}, x_k]$, в силу чего суммы стоящие слева и справа в неравенствах (3.1д), являются интегральными суммами для интеграла

$$\int_a^b S(x)dx \,. \tag{3.2д}$$

Поэтому при $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k \to 0$ $(n \to \infty)$ суммы в (3.1а) имеют интеграл (3.1б) своим пределом. Из (3.1д) тогда вытекает, что $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Если $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, все точки которой имеют абсциссу x, то объем V этого тела равен

$$. \boxed{V = \int_a^b S(x)dx} \tag{3.1}$$