§11. Дифференциалы высших порядков. Нарушение свойства инвариантности

Определение 11.1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X. *Дифференциалом второго порядка* d^2y, или *вторым дифференциалом* данной функции в точке $x \in X$, называется дифференциал, взятый в этой точке (если это возможно) от её дифференциала dy, который в этом контексте называют первым дифференциалом. Итак,

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциал dy можно вычислить по формуле (3.4): $dy = y'(x)dx$. В этой формуле $y'(x)$ – функция точки $x \in X$, а $dx = \Delta x$ не зависит от аргумента x, тогда $d^2y = d(y'(x))dx = (y''(x)dx)dx = y''(x)dx^2$. Под обозначением dx^2 всегда подразумевают степень дифференциала: $dx^2 = (dx)^2$, дифференциал от степени обозначается так: $d(x^2)$. Таким образом, для d^2y имеем:

$$d^2y = y''(x)dx^2. \tag{11.1}$$

Пример 11.1. Найти d^2y, если $y = x\ln x$.

►Имеем $y' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1,\ y'' = \dfrac{1}{x},\ d^2y = \dfrac{1}{x}dx^2$ (формула (11.1). ◄

Определение 11.2. *Дифференциалом третьего порядка* d^3y или *третьим дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется дифференциал, взятый в этой точке от её второго дифференциала d^2y, $d^3y = d(d^2y)$ и т.д. *Дифференциалом n – го порядка* d^ny функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется дифференциал, взятый в этой точке от её дифференциала $(n–1)$–порядка $d^{n-1}y$, т. е. $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Замечание 11.1. В математическом анализе принято, что при каждой операции дифференцирования в определениях 11.1, 11.2 приращение (дифференциал) аргумента берётся одним и тем же.

Для d^ny справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}dx^n. \tag{11.2}$$

►При $n = 1, 2$ она следует из формул (3.4) и (11.1). Предположим, что эта формула верна при $n = k$, где k – любое натуральное число, т. е. $d^ky = y^{(k)}dx^k$. Из определения 11.2 имеем $d^{k+1}y = d(d^ky)$, поэтому в силу нашего предположения, $d^{k+1}y = d(y^{(k)}dx^k)$. Вычислим $d(y^{(k)}dx^k)$ по формуле (3.4): $d^{k+1}y = (y^{(k)}dx^k)'dx = y^{(k+1)}dx^{k+1}$. Итак, заключаем, что формула (11.2) остаётся справедливой и при $n = k + 1$, откуда следует, что она верна при $\forall n \in \boldsymbol{N}$. ◄

Из равенства (11.2) следует, что символ производной n–го порядка $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ можно рассматривать как дробь.

Пример 11.2. Найти d^4y, если $y=\dfrac{x^3+2}{x-1}$.

►Из (11.2) при n=4 следует равенство $d^4y=y^{IV}dx^4$. Поскольку $y^{IV}=72/(x-1)^5$ (пример 9.2), то $d^4y=72/(x-1)^5\ dx^4$.◄

Первый дифференциал dy обладает свойством инвариантности формы, т.е. его можно вычислять по формуле (3.4) независимо от того, является x независимой или зависимой переменной (см. §6). Покажем, что дифференциалы высших порядков этим свойством не обладают.

Пусть $y=f(x)$, $x\in X$, а $x=g(t)$, $t\in T$, причём $E(g)\subset D(f)$, следовательно, y является сложной функцией t: $y=f(g(t))$, $t\in T$. Её первый дифференциал обладает свойством инвариантности формы и может быть вычислен по формуле (3.4): $dy=y'_x\cdot dx$, где $dx=x'_t\cdot dt$ является частью приращения функции $x=g(t)$ и потому зависит от t. Вычислим d^2y:

$$d^2y=d(y'_x\cdot dx)=dy'_x\cdot dx+y'_x\cdot d(dx).$$

Для dy'_x в силу свойства инвариантности формы первого дифференциала имеем равенство: $dy'_x=(y'_x)'_x dx=y''_{x^2}dx^2$, а $d(dx)=d^2x$. Окончательно приходим к соотношению:

$$d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x. \qquad (11.3)$$

Сравнивая формулы (11.1) и (11.3), заключаем, что d^2y не обладает свойством инвариантности формы. Для дифференциала третьего и более высоких порядков можно получить аналогичные формулы, причём число добавочных слагаемых по сравнению с формулой (11.2) в их правых частях будет расти вместе с порядком дифференциала. Заметим, однако, что в случае $d^2x=0$ свойство инвариантности формы имеет место и для d^2y. Например, если x – линейная функция t, $x=at+b$, то $d^2x=0$ и d^2y можно вычислить по формуле (11.1).

Пример 11.3. Найти d^2y, если $y=\cos 2x$, если: а) x – независимая переменная; б) $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дважды дифференцируемая функция независимой переменной t.

►а) В силу равенства (11.1) имеем: $d^2y=y''(x)dx^2=-4\cos 2x dx^2$; б) в силу (11.3) имеем: $d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x=-4\cos 2x dx^2-2\sin 2x d^2x$.◄