## §5. Параболоиды

**Определение 5.1.** Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0, \qquad (5.1)$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0, \qquad (5.2)$$

называются *эллиптическим* и *гиперболическим* параболоидами соответственно.

Данные поверхности симметричны относительно координатных плоскостей $Oxz$ и $Oyz$. В отличие от ранее изученных поверхностей, эллиптические и гиперболические параболоиды не обладают ни центральной симметрией, ни симметрией относительно плоскости $Oxy$.

**1°. Эллиптический параболоид.** При принятом предположении $p,q>0$ вся поверхность расположена в полупространстве, где $z\ge 0$. Начало координат принадлежит эллиптическому параболоиду и называется его *вершиной*.

Сечение эллиптического параболоида плоскостью $P: z=z_0\,(z_0>0)$ – эллипс $\Gamma_1$ с полуосями $\sqrt{2pz_0}$ и $\sqrt{2qz_0}$ (рис. 5.1), а в сечении координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ имеем параболы $\Gamma_2: y^2=2qz$ и $\Gamma_3: x^2=2pz$ (рис. 5.1).

**2°. Гиперболический параболоид.** Сечениями этой поверхности плоскостями $x=0$ и $y=0$ являются параболы $\Gamma_1: y^2=-2qz$ и $\Gamma_2: x^2=2pz$ (рис. 5.2). Сечение плоскостью $x=x_0\ (x_0\neq 0)$ есть парабола $\Gamma_3$ с вершиной на параболе $\Gamma_2$, а сечение плоскостью $y=y_0\ (y_0\neq 0)$ – парабола $\Gamma_4$ с вершиной на параболе $\Gamma_1$ (рис. 5.2). Параболы $\Gamma_3$ и $\Gamma_4$ можно получить путём параллельного переноса парабол $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ соответственно. Название гиперболический параболоид объясня-

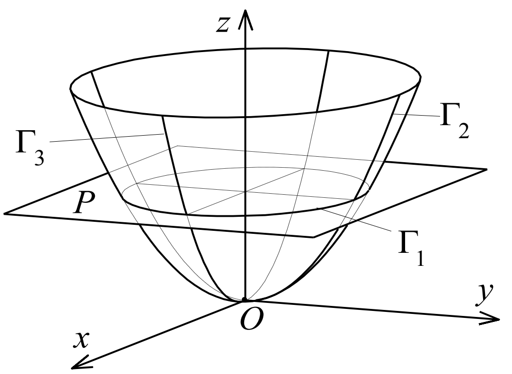


*Рис. 5.1. Эллиптический параболоид*

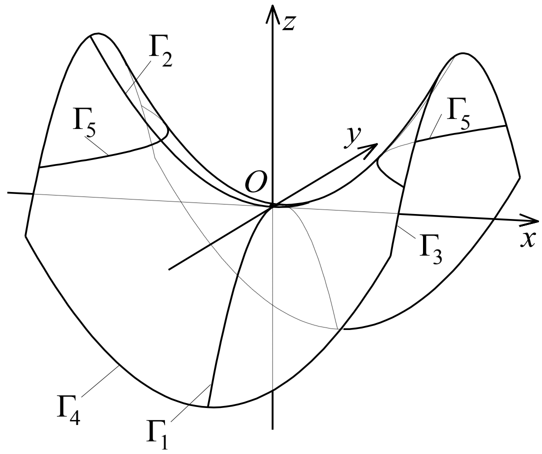


Рис. 5.2. Гиперболический параболоид

ется тем, что в сечении этой поверхности плоскостью $z=z_0\ (z_0\neq 0)$ образуется гипербола $\Gamma_5$ (рис. 5.2).