ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение …………………………………………………………………….…… 7

1. Основы дискретного анализа ……………………..…………….…… 10

1.1. Основные формулы и элементарные методы …………….….. 10

1.1.1. Множества ……………………………...…………….…… 10

1.1.1.1. Множества. Способы задания множеств …..…...….. 10

1.1.1.2. Операции над множествами …………………......… 13

1.1.1.3. Алгебра множеств ……………………….………..…. 15

1.1.1.4. Разбиения множеств. Правило суммы …..………….. 18

1.1.1.5. Сочетания без повторений ……………………..…… 20

1.1.2. Векторы ……………………..……..…………………… 22

1.1.2.1. Декартово произведение ……………………….…… 22

1.1.2.2. Правило произведения. Размещения ……………….. 24

1.1.2.3. Мультимножества. Сочетания и перестановки с повторениями ………………...…………………...… 26

1.1.2.4. Сюръективные мультимножества ……..…………… 29

1.1.2.5. Разбиения и композиции чисел ……………….…..... 30

1.1.3. Отношения ……………………………….……………….... 32

1.1.3.1. Бинарные отношения ……………….……...……… 32

1.1.3.2. Функции ……………………………..…….….……… 35

1.1.3.3. Бинарные отношения специального вида ……..…… 39

1.1.3.4. Отношения порядка ………………………………… 44

1.2. Метод включений и исключений и формулы обращения …….. 47

1.2.1. Основная формула метода включений и исключений и её применение …………………………………………........... 47

1.2.1.1. Формула включений и исключений ………..……… 47

1.2.1.2. Число элементов объединения множеств …..……... 49

1.2.1.3. Беспорядочные перестановки …………………….... 50

1.2.1.4. Неподвижные элементы преобразований ………..… 52

1.2.1.5. Число сюръективных отображений ……………….... 53

1.2.1.6. Функция Эйлера ……………………….……….…… 53

1.2.1.7. Общие формулы метода …………………………… 56

1.2.2. Формулы обращения …….………………………………... 59

1.2.2.1. Формулы обращения с биномиальными коэффициентами …………….…………………………….…….. 59
1.2.2.2. Обращение общих формул метода включений и исключений …………..………..…………………… 63
1.2.2.3. Дзета-функция и функция Мёбиуса ……….……… 64
1.2.2.4. Обращение мер на множествах ……………..……. 69
1.3. Производящие функции ……..…………………….…….……72
1.3.1. Алгебра производящих функций ……………..…....…… 72
1.3.1.1. Классы производящих функций ………………..…. 72
1.3.1.2. Операции над производящими функциями ……….... 83
1.3.2. Производящие функции комбинаторных последовательностей …………………………………………….…. 98
1.3.2.1. Производящие функции сочетаний ………..……...... 98
1.3.2.2. Производящие функции размещений ……….....…. 99
2. Теория Пойа ……..…………………......………………..…… 102
2.1. Преобразования множества ………..………....………………. 102
2.1.1. Преобразования и подстановки …….…………….…..…… 102
2.1.1.1. Операции и алгебры …………………………..…… 102
2.1.1.2. Гомоморфизм ……..…………………..…….………. 104
2.1.1.3. Группы ………………………………...…………… 104
2.1.1.4. Смежные классы …..………………...…………...… 107
2.1.1.5. Кольца и поля …………………...…………….…… 110
2.1.1.6. Полугруппы преобразований ……….……….……… 112
2.1.1.7. Группы подстановок ..……………………..……….. 113
2.1.2. Орбиты и циклы ……………..…………..…..………….. 115
2.1.2.1. Орбиты подстановок ……………..…………….…….. 115
2.1.2.2. Циклы ………….….....……………..……………….. 116
2.1.2.3. Цикловые классы …..…………………..………... 117
2.1.2.4. Подстановки с заданным числом циклов. Числа Стирлинга ……….………………...……………… 119
2.1.2.5. Цикловой индекс группы подстановок ……..…..... 121
2.2. Теорема Пойа ………………………………….……………… 124
2.2.1. Группы и эквивалентность функций ………......………… 124
2.2.1.1. *GH*-эквивалентность …………………...……..…… 124
2.2.1.2. Лемма Бернсайда ……………………………..………… 125

2.2.1.3. Число классов GH-эквивалентности …............… 127
2.2.2. Теорема Пойа о перечислении и её применение ……..... 130
2.2.2.1. Основная теорема ……..……………..………… 130
2.2.2.2. Задача о числе (m)-мультимножеств …..……..…. 135
2.2.2.3. Задача об ожерельях …………...………..….…… 139
3. Графы ……….…………………………...……………………… 142
3.1. Основные понятия теории графов ……...………….….…. 142
3.1.1. Граф. Компоненты и виды графов ………….……..... 142
3.1.1.1. Понятие графа …………..…………………….…. 142
3.1.1.2. Степень вершины графа ………..………………..… 144
3.1.1.3. Способы задания графа ……….……………….…. 146
3.1.1.4. Маршруты, пути, цепи, циклы ……...…………….. 149
3.1.2. Связность ……………..……………………..………….. 152
3.1.2.1. Компоненты связности …...……………..……… 152
3.1.2.2. Мосты ……………….…………….….……..……… 153
3.1.2.3. Блоки …………………………………………..…. 154
3.1.3. Деревья ……….………..…………..……………………... 155
3.1.3.1. Теоремы о деревьях …….……………..…………… 155
3.1.3.2. Цикломатическое число ……….…….…..……… 159
3.2. Перечислительные задачи на графах ……………..…..…… 160
3.2.1. Помеченные графы ……….………………..…..…… 160
3.2.1.1. Понятие помеченного графа ……..………..…..… 160
3.2.1.2. Перечисление помеченных графов ………….…..… 162
3.2.1.3. Перечисление помеченных деревьев …….…..….... 164
3.2.2. Обходы графов ………….…………………..………… 170
3.2.2.1. Эйлеровы графы ……...……………………….…… 170
3.2.2.2. Эйлеровы контуры в орграфах ………….……..….. 172
3.2.2.3. Гамильтоновы графы ……….…………..……...… 181
3.2.3. Раскраски графов ………………………………..……. 184
3.2.3.1. Хроматическое число ……..…………...………...… 184
3.2.3.2. Хроматический многочлен ……………..…..…… 185
3.2.3.3 Число k-раскрашенных графов ..……...……..……… 189
3.2.4. Ациклические орграфы ……..………………………… 190
3.2.4.1. Расширения ациклических орграфов …..……...…. 190
3.2.4.2. Число помеченных ациклических орграфов …...…. 192

3.2.5. Теорема Пойа и перечисление графов …………………… 194
3.2.5.1. Перечисление корневых деревьев ……………..…… 194
3.2.5.2. Перечисление графов ……...……………………….. 198
3.2.5.3. Перечисление связных графов ………..……….….… 200
Библиографический список ………..……..………..…..……………… 203
Приложения ……….………..……………..…………………..……..... 206
Приложение 1. Указатель принятых обозначений …………..………….... 206
Приложение 2. Предметный указатель …………...……..…..…………… 221

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии сделана попытка систематически изложить алгебраические методы решения комбинаторных задач дискретного анализа.

Основную идею, на которой построено изложение материала, можно сформулировать так. Задачи дискретного анализа рассматриваются в их комбинаторном аспекте, исследуется применение комбинаторных методов их решения с привлечением мощных средств абстрактной алгебры.

Наиболее эффективным математическим аппаратом для решения самых разнообразных комбинаторных задач являются производящие функции и теория групп. Производящие функции позволяют легко и красиво решать многие перечислительные комбинаторные задачи. В данном учебном пособии основательно и максимально строго излагается теория производящих функций, приводятся примеры их применения к различным (от простых до весьма сложных) задачам дискретного анализа. Знание теории и умение свободно обращаться с производящими функциями также важно потому, что они играют основополагающую роль в решении перечислительных задач теории графов.

Методы теории групп и производящие функции используются в теории перечисления Пойа. Общая комбинаторная схема, построенная в рамках этой теории, позволяет с помощью единообразных методов решать различные классы комбинаторных задач. Именно высокая степень абстракции, позволяющая методам теории Пойа справляться с широкими классами задач, предопределила её важную роль в решении комбинаторных задач, в том числе и перечислительных задач на графах.

Итак, основная цель данного учебного пособия заключается в изложении методов решения комбинаторных задач дискретной математики, основанных на двух описанных алгебраических подходах. В соответствии с этим принят строгий абстрактный стиль изложения. Автор не упускал из виду, что главной целью фундаментального математического образования является развитие у обучающихся способностей к абстрактному мышлению, которые необходимы и для математика, и для программиста. Вместе с тем для лучшего понимания материала приведены примеры, демонстрирующие применение излагаемых методов.

Несколько слов о структуре учебного пособия. Материал состоит из трех разделов. В первом даются основы дискретного анализа: теория множеств, элементарная комбинаторика, теория производящих функций. В интересах целостности изложения все определения, необходимые утверждения, которые должны быть известны из базового курса, даются в тексте книги. Вместе с тем вводятся и новые понятия, которые будут использоваться в последующих главах.

Второй раздел посвящен теории Пойа. Значительную её долю составляет изложение основ абстрактной алгебры, теории групп и преобразований множества. В этой части в силу специфики материала принят наивысший уровень абстракции. Поэтому она может быть сложной для понимания с первого чтения, но, как уже отмечалось, без умения оперировать абстрактными категориями не может быть настоящего математического образования. Студенту рекомендуется в деталях воспроизводить излагаемые выводы и доказательства, самостоятельно восстанавливать пропущенные переходы в рассуждениях.

Третий раздел посвящен применению описанных в первых двух разделах методов к решению перечислительных задач на графах. Приведены решения наиболее интересных и типичных с точки зрения применяемой техники таких задач.

В тексте принята тройная нумерация формул, теорем, лемм, рисунков, например, формула (2.2.7). Первая цифра означает номер раздела, вторая — подраздела, последние цифры означают порядковый номер формулы (или теоремы, леммы, рисунка) в данном подразделе.

Знаком ■ отмечены окончания доказательств теорем и лемм.

В конце книги приведён библиографический список. Поскольку данная дисциплина относится к фундаментальным, основными источниками при её изучении являются классические, проверенные временем учебники и монографии. Этого принципа придерживался автор при составлении списка. Для каждой книги приведено последнее по времени её издание. Вместе с тем в список включены вышедшие в последние годы специализированные учебники по дискретной математике, предназначенные для специалистов (в том числе и будущих) по информационным технологиям.

1. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА

1.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ

1.1.1. Множества

1.1.1.1. Множества. Способы задания множеств

В каждой области математики имеются свои основополагающие, неопределяемые понятия. Они не вводятся как точные определения, а понимаются интуитивно, на основе опыта восприятия физической реальности, той или иной степени очевидности. Такими понятиями являются точка, прямая, плоскость в геометрии, вероятность в теории вероятностей, алгоритм, ложь, истина в математической логике. Через них математически строго определяются все остальные объекты, понятия данной теории.

Основополагающим понятием теории множеств является *множество*. Оно понимается как совокупность объектов, рассматриваемая как единое целое. Эти объекты называются *элементами* множества. Они могут объединяться по какому-либо признаку, но не обязательно. В множество можно совершенно произвольно включать элементы разной природы. Такая концепция множества, предложенная немецким математиком Георгом Кантором, лежит в основе так называемой «наивной», или канторовской теории множеств. Она оказалась вполне приемлемой для построения алгебры множеств, описывающей действия над множествами на самом низком уровне абстракции. Но впоследствии оказалось, что такое совершенно произвольное толкование множества приводит к парадоксам (антиномиям), открытие которых на рубеже XIX-XX вв. вызвало необходимость пересмотра канторовской теории на основе более строгой формализации понятия множества. Таким образом, начали создаваться различные аксиоматические теории множеств, назначение которых заключалось в преодолении кризиса в основаниях математики, вызванного открытием антиномий (Цермело-Френкеля, Неймана, Бернайса, Гёделя, Рассела, Куайна, Ван Хао). Надо отметить, что этот кризис ещё не преодолён. В основаниях математики существуют различные конкурирующие теории множеств, и к единому мнению об истинной непротиворечивой системе математики так и не пришли. Но это тема отдельной книги. В данном пособии мы ограничимся изложением канторовской теории множеств.

Итак, будем обозначать множества прописными латинскими буквами (с индексами или без них): A, B, C, … , A_1, A_2, … , элементы множеств — строчными латинскими буквами: a, b, c, … , x_1, x_2, … . Если a является элементом множества A (a принадлежит A), то пишут $a \in A$ (знак принадлежности $\in$ — видоизменённая первая буква греческого слова «εδτι» — «быть»). В противном случае пишут $a \notin A$.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов (записывается $A = B$). Если множества A, B не равны, то применяется запись $A \neq B$. Множество A называется *подмножеством* множества B (A включено в B, B содержит A), если любой элемент A является одновременно и элементом B). Записывается это так: $A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$). Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1.1.1

Множества A и B равны тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Пустым называется множество, не содержащее элементов, обозначается оно знаком $\emptyset$. Из определения равных множеств следует, что пустое множество $\emptyset$ единственно. Понятно, что для любого множества A само A и $\emptyset$ являются его подмножествами. Они называются *несобственными подмножествами* A. Все остальные подмножества A (т. е. отличные от A и $\emptyset$) называются *собственными*. Если A — собственное подмножество множества B, то применяется запись $A \subset B$.

Противоположным пустому является *универсальное множество* (*универсум*). Определим его как множество $\mathbb{U}$, включающее все остальные множества как подмножества. Такое определение вполне приемлемо в рамках канторовской теории. Но при повышении уровней абстракции (переходе к семействам множеств, построении теории кардинальных чисел множеств) понятие универсума может порождать парадоксы.

Булеаном множества A называется семейство всех подмножеств A. Обозначается булеан 2^A. Такая запись связана с тем, что в случае конечного множества A, состоящего из n элементов (пункт 1.1.1.4), булеан содержит 2^n множеств (пункт 1.1.2.5).

Приведём основные *способы задания множеств*. Во-первых, множество можно задавать перечислением его элементов. Например, для множества A, состоящего из элементов a_1, a_2, … , a_n, применяется запись $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (фигурные скобки впредь будут обозначать неупорядоченную совокупность). Порядок следования элементов не имеет значения, обычно буквы и слова располагаются в лексикографическом порядке например, $\{a, b, d, x\}$, {"окно", "поп", "попугай", "реестр"}, числа — в порядке возрастания ($\{1, 3, 17, 24\}$).

Другой способ задания множеств состоит в описании свойств, однозначно определяющих принадлежность ему элемента. В таком случае применяется следующая запись: $A = \{a | P(a)\}$, где $P(a)$ — свойство, которым должен обладать элемент $a \in A$. Читается она так: множество A есть совокупность всех a, для которых выполняется свойство $P(a)$. Например, множество целых степеней 2 можно определить следующим образом:

$$A = \{a | a = 2^k \text{ при некотором целом } k\}.$$

Одним из видов этого способа является *рекурсивное задание* множества. Элементы располагаются в некотором порядке, и каждый последующий определяется через один или несколько предыдущих. Понятно, что при этом надо задать один или, соответственно, несколько начальных элементов. Например, множество целых неотрицательных степеней 2 рекурсивно задаётся так:

$$A = \{a | 1 \in A, \text{если } a \in A, \text{то } 2a \in A\};$$

множество чисел Фибоначчи:

$$B = \{b_i | b_1 = 1, b_2 = 1, b_i = b_{i-1} + b_{i-2}, i > 2, i \in \mathbb{N}\}$$

($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел); множество целых неотрицательных чисел, кратных 5:

$$C = \{c | 0 \in C, \text{если } c \in C, \text{то } c + 5 \in C\}.$$

Третий способ задания множеств — с помощью операций над другими множествами — рассматривается в следующем пункте.

1.1.1.2. Операции над множествами

Операции позволяют получать новые множества из одного или нескольких исходных. Перечислим основные операции над множествами.

Объединением множеств A, B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из A или B. Обозначается $A \cup B$, т. е.

$$A \cup B = \{a | a \in A \text{ или } a \in B\}$$

(другое, менее распространённое, обозначение — $A + B$). Естественным образом эта операция обобщается на любое конечное число множеств:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n =$$
$$= \{a | a \text{ принадлежит хотя бы одному из } A_1, \ldots, A_n\}.$$

Запись этого выражения без скобок означает выполнение операций слева направо. Из законов ассоциативности и коммутативности объединения (см. следующий параграф) следует, что при любой (корректной) расстановке скобок и при любом порядке множеств в результате получается одно и то же множество. Поэтому объединение нескольких множеств можно записывать без скобок.

Примеры: если $A = \{0, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$, то

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\};$$

если $A = \{a | a = 9k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{b | b = 18s, s \in \mathbb{Z}\}$, то

$$A \cup B = \{a | a = 9k, k \in \mathbb{Z}\} = A,$$

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B одновременно. Обозначается пересечение $A \cap B$, т. е.

$$A \cap B = \{a | a \in A \text{ и } a \in B\}$$

(другое обозначение — AB). Пересечением конечного числа множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из этих множеств. Обозначается $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Таким образом,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{a | a \in A_1, a \in A_2, \dots, a \in A_n\}.$$

Примеры: пусть $A = \{0, 2, 3, 5, 7, 10\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 9\}$, тогда $A \cap B = \{0, 2, 3, 5\}$; пусть $A = \{a | a = 9k, k \in \mathbb{Z}\}, B = \{b | b = 18s, s \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{c | c = 15l, l \in \mathbb{Z}\}$, тогда

$$A \cap B \cap C = \{x | x = 90k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Как и объединение, пересечение коммутативно и ассоциативно, поэтому его можно записывать без скобок, и операции в таком выражении выполняются слева направо.

Следующая операция — вычитание (нахождение разности). *Разностью множеств* A и B называется множество тех и только тех элементов A, которые не принадлежат B. Обозначение: $A \backslash B$ (другое встречающееся в литературе обозначение $A - B$). Очевидно, что разность в общем случае некоммутативна: $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Примеры: если $A = \{0, 1, 2, 3, 7, 10, 13\}$, $B = \{2, 4, 5, 7, 9, 10, 14, 15\}$, то $A \backslash B = \{0, 1, 3, 13\}$, $B \backslash A = \{4, 5, 9, 14, 15\}$; если $A \subset B$, то $A \backslash B = \emptyset$.

Дополнением (отрицанием) множества A называется множество $\overline{A}$ тех и только тех элементов, которые не принадлежат A (другое обозначение $\neg A$), т. е. $\overline{A} = \{a | a \notin A\}$ или $\overline{A} = \mathbb{U} \backslash A$. Из определений разности и дополнения следует очевидное равенство

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}. \qquad (1.1.1)$$

Наконец, введём последнюю операцию. *Симметрической разностью множеств* A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат либо A, либо B, но не обоим множествам вместе. Обозначается $A \dot{-} B$ (другие обозначения $A \div B$, $A \vartriangle B$, $A \oplus B$): $A \dot{-} B = \{a | a \in A \text{ или } a \in B, \text{но } a \notin A \cap B\}$. Из этого определения следуют очевидные равенства

$$A \dot{-} B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Операция коммутативна и ассоциативна, поэтому в выражении $A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \dots \dot{-} A_n$ скобки не ставят, порядок выполнения операций — слева направо.

1.1.1.3. Алгебра множеств

Множества и введённые операции над ними образуют *алгебру множеств* (подробнее об абстрактных алгебрах рассказывается в пункте 2.1.1.1). Назовём *формулой* этой алгебры выражение, построенное по следующим правилам:

1) любая буква, обозначающая множество, является формулой;

2) если выражения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — формулы, то формулами также будут $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \backslash \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \dot{-} \mathcal{B})$, $(\overline{A})$;

3) формулами являются те и только те выражения, которые получаются по правилам 1 и 2.

Подформулой называется любая часть формулы, сама являющаяся формулой. Например, $\Big(\big((A \cup B) \backslash C\big) \dot{-} \big((\overline{B}) \cap A\big)\Big)$ — формула, $(A \cup B)$, $\big((A \cup B) \backslash C\big)$, $(\overline{B})$, $\big((\overline{B}) \cap A\big)$ — её подформулы.

Полученные таким образом формулы будут содержать большое количество скобок. Для того чтобы избавляться от некоторых из них, вводится приоритет операций, и устанавливаются правила удаления лишних скобок. Пусть операции расставлены по возрастанию приоритета в таком порядке: симметрическая разность, разность, объединение, пересечение, дополнение. Тогда можно удалять скобки по следующим правилам:

1) внешние скобки всегда можно опускать;

2) если формула содержит вхождения знаков только одной из операций $\cup$, $\cap$, $\dot{-}$, то в ней опускаются любые скобки, операции выполняются слева направо, как описано в предыдущем пункте 1.1.1.2;

3) внешние скобки в подформуле вида $(\overline{\mathcal{A}})$, где $\mathcal{A}$ — некоторая

подформула, можно опускать;

4) можно опускать те пары скобок, без которых возможно восстановление исходной формулы на основе следующего правила. Каждое вхождение знака $\cap$ связывает наименьшие окружающие его подформулы. После расстановки скобок, относящихся к $\cap$, каждое вхождение знака $\cup$ относится к наименьшим подформулам справа и слева от него. Подобным образом расставляются скобки, относящиеся к операциям $\setminus$ и $\dot{-}$. При применении этого правила к одному и тому же знаку движение в формуле происходит слева направо.

Например, в формуле $(A \cup (B \cup C))$ можно удалить все скобки: $A \cup B \cup C$; формулу $\left(\left(\left(A \cap \left(\overline{B \cap C}\right)\right) \cap C\right) \dot{-} D\right)$ можно удалением лишних скобок привести к виду $A \cap \overline{B \cap C} \cap C \dot{-} D$; в формулах $A \cap \cap (B \setminus C)$, $(A \cup B) \cap \overline{C \cap D}$, $\left(A \cup \overline{B \dot{-} C \cap D}\right) \cap \left(\overline{A} \dot{-} (B \setminus D)\right)$ дальнейшее опускание скобок невозможно.

При соблюдении этих правил и договорённостей каждая формула определяет единственное множество. Запись $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ означает, что формулы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ определяют равные множества. Далее приведены основные законы и некоторые полезные равенства алгебры множеств.

I. *Законы коммутативности*:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);

2. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);

3. $A \dot{-} B = B \dot{-} A$ (коммутативность симметрической разности).

II. *Законы ассоциативности*:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);

3. $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$ (ассоциативность симметрической разности).

III. *Законы дистрибутивности*:

1. $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

2. $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

3. $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ (дистрибутивность объединения относительно разности справа);

4. $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно разности слева);

5. $A \cap (B \dot{-} C) = A \cap B \dot{-} A \cap C$ (дистрибутивность пересечения относительно симметрической разности).

IV. *Законы идемпотентности*:

1. $A \cup A = A$ (идемпотентность объединения);

2. $A \cap A = A$ (идемпотентность пересечения).

V. *Закон исключённого третьего*: $A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$.

VI. *Закон противоречия*: $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

VII. *Закон двойного отрицания*: $\overline{\overline{A}} = A$.

VIII. *Законы двойственности да Моргана*:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

IX. *Правила поглощения*:

1. $A \cup A \cap B = A$;

2. $A \cap (A \cup B) = A$.

X. *Правила склеивания*:

1. $A \cap B \cup A \cap \overline{B} = A$;

2. $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = A$.

XI. $A \cup \overline{A} \cap B = A \cup B$.

Равенства (эквивалентности формул) **I**, **II.1**, **II.2**, **IV** — **VII** следуют из определений соответствующих операций. Остальные требуют доказательств. Основные законы доказываются путём логических рассуждений. Некоторые законы и равенства можно также доказывать методом алгебраических преобразований, применяя ранее доказанные законы.

Докажем, например, равенство **XI**. Согласно лемме 1.1.1 оно эквивалентно двум включениям: $A \cup \overline{A} \cap B \subseteq A \cup B$ и $A \cup B \subseteq A \cup$ $\cup \overline{A} \cap B$. Докажем первое из них. Пусть a — произвольный элемент множества $A \cup \ \overline{A} \cap B$. Тогда возможны два варианта: $a \in A$ или $a \in \overline{A} \cap B$. В первом случае $a \in A \cup B$ по определению объединения, во втором — $a \in \overline{A}$ и $a \in B$, а значит, $a \in A \cup B$. Итак, произвольный элемент a множества $A \cup \overline{A} \cap B$ является также элементом $A \cup B$, следовательно, по определению подмножества $A \cup \overline{A} \cap B \subseteq A \cup B$. Докажем теперь второе включение. Пусть a — произвольный элемент множества $A \cup B$. Это означает, что либо $a \in A$, либо $a \in B$. В первом случае $a \in A \cup \overline{A} \cap B$ по определению объединения. Во втором нужно рассмотреть два возможных варианта: $a \in A$ и $a \in \overline{A}$ (других не может быть по закону исключённого третьего). Если $a \in A$, то $a \in A \cup \overline{A} \cap B$, если же $a \in \overline{A}$, то $a \in \overline{A} \cap B$, следовательно, $a \in A \cup \overline{A} \cap B$. Включение $A \cup B \subseteq A \cup \overline{A} \cap B$ доказано. Из леммы 1.1.1 следует равенство $A \cup \cup \overline{A} \cap B = A \cup B$.

Ниже даны примеры алгебраических доказательств. Дистрибутивность пересечения относительно разности слева, **III.4**:

$$(A \cap B) \backslash (A \cap C) = (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} =$$
$$= A \cap B \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) = A \cap B \cap \overline{A} \cup A \cap B \cap \overline{C} = \emptyset \cup A \cap \left(B \cap \overline{C}\right) =$$
$$= A \cap (B \backslash C)$$

(здесь применена формула (1.1.1) удаления разности). Правило склеивания **X.2**:

$$(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = A \cup B \cap \overline{B} = A \cup \emptyset = A$$

(применены законы **III.2** и **VI**).

1.1.1.4. Разбиение множеств. Правило суммы

Семейство множеств $\{A_1, \ A_2, \dots, A_n\}$ называется *покрытием множества* A, если $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Важным видом покрытий являются *разбиения*. Покрытие $\{A_1, \ A_2, \dots, A_n\}$ называется разбиением множества A, если все A_i не пусты и попарно не пересекаются, т. е. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $1 \leq i$, $j \leq n$, $i \neq j$. Множества A_1, A_2, ... , A_n называются *блоками разбиения.* В силу коммутативности объединения разбиение неупорядоченно, т. е. любая перестановка блоков даёт то же разбиение. В некоторых случаях удобно рассматривать разбиения с фиксированным порядком следования блоков. Такие разбиения будем называть *поблочно упорядоченными*.

Множество A называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов. Это значит, что элементы A отделены друг от друга (дискретны) и их количество выражается конечным натуральным числом. Это число называется *мощностью множества* и обозначается $|A|$. Пустое множество также считается конечным и $|\emptyset|$=0. Множество, содержащее n элементов, будем называть (n)-*множеством*.

Правило суммы — одно из фундаментальных правил комбинаторики. Оно утверждает, что для любого разбиения конечного множества с блоками A_1, A_2, ... , A_n имеет место равенство $|A| = |A_1| +$ $+|A_2| + \cdots + |A_n|$.

Доказательство

Докажем правило методом полной математической индукции по числу блоков n. При $n = 1$ (база индукции) оно очевидно. Предположение индукции: пусть оно верно для любого разбиения с n блоками. Построим произвольное разбиение с $n + 1$ блоками и докажем, что для него $|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| + |A_{n+1}|$ (индукционный шаг). Имеем

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} = \tilde{A}_n \cup A_{n+1}, \qquad (1.1.2)$$

где $\tilde{A}_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. По определению разбиения A_1, A_2, ... , A_n не пересекаются с A_{n+1}, поэтому $\tilde{A}_n \cap A_{n+1} = \emptyset$. Следовательно, множество A распадается на два непересекающихся множества $\tilde{A}_n$ и A_{n+1}. Очевидно, что они конечны, причём $|A| = \left|\tilde{A}_n\right| + |A_{n+1}|$. Множества A_1, A_2, ... , A_n составляют блоки разбиения $\tilde{A}_n$, поэтому по предположению индукции $|\tilde{A}_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$. Тогда $|A| = |\tilde{A}_n| +$ $+|A_{n+1}| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}|$. Индукционный шаг доказан. ■

Для покрытия множества A с блоками $A_1, A_2, \dots, A_n$ справедливо *обобщённое правило суммы*:

$$|A| \le |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|. \tag{1.1.3}$$

Доказательство

Докажем индукцией по n. При $n = 1$ (база индукции) правило очевидно. Предположение индукции: пусть оно верно для любого покрытия с n блоками. Построим покрытие с $n + 1$ блоками. Тогда множество A, как и в доказательстве правила суммы, можно представить в виде (1.1.2). Далее, $A = \tilde{A}_n \cup B$, где $B = A_{n+1} \backslash \tilde{A}_n$, $\tilde{A}_n \cap B =$ $= \emptyset$. По правилу суммы

$$|A| = |\tilde{A}_n| + |B|. \tag{1.1.4}$$

По предположению индукции для любого покрытия с n блоками верно неравенство (1.1.3), а поскольку множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют покрытие $\tilde{A}_n$, то

$$|\tilde{A}_n| \le |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|. \tag{1.1.5}$$

Далее, очевидно, что A_{n+1}, $\tilde{A}_n$, B конечны и из $B = A_{n+1} \backslash \tilde{A}_n \subseteq A_{n+1}$ следует

$$|B| \le |A_{n+1}|. \tag{1.1.6}$$

Из равенства (1.1.4) и неравенств (1.1.5), (1.1.6) следует $|A| = |\tilde{A}_n| +$ $+|B| \le |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}|$. ■

1.1.1.5. Сочетания без повторений

Пусть имеется (n)-множество A. *Сочетанием без повторений* из n элементов по m называется любое (m)-подмножество A ($m = 0, \dots,$ n). Таким образом, сочетание — неупорядоченная совокупность m различных элементов, выбранных из данных n также различных элементов. Число m называется *объёмом* сочетания. Количество всех различных сочетаний из n по m обозначается C_n^m (в литературе, особенно зарубежной, используется также обозначение $\binom{n}{m}$).

С помощью правила суммы выведем рекуррентное соотношение для чисел C_n^m, связывающее C_n^m с его значениями при меньших параметрах m и n. Разобьём множество C всех сочетаний объёма m из элементов данного (n)-множества A ($|C| = C_n^m$) на два подмножества: C_1 — множество сочетаний, содержащих фиксированный элемент $a \in A$; C_2 — множество сочетаний, каждое из которых не содержит a. Таким образом, все рассматриваемые сочетания разбиты на два непересекающихся множества C_1 и C_1, т. е. $\{C_1, C_2\}$ — разбиение C. Каждое сочетание из совокупности C_1 получается добавлением элемента a к некоторому сочетанию объёма $m-1$, выбранному из $(n-1)$-множества $A' = A \setminus \{a\}$. Поэтому $|C_1| = C_{n-1}^{m-1}$. Сочетания в C_2 являются (m)-подмножествами $(n-1)$-множества A', следовательно, верно равенство $|C_2| = C_{n-1}^m$. По правилу суммы получаем рекуррентное соотношение для C_n^m:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m, \tag{1.1.7}$$

где $m = 1, \dots, n$, $n = 1, 2 \dots$. В элементарной комбинаторике равенство (1.1.7) известно как *формула Паскаля*. Начальные значения для этого соотношения: $C_n^0 = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел), $C_n^m = 0$ при $m > n$; $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Используя рекуррентное соотношение (1.1.7), можно методом математической индукции доказать формулу для вычисления C_n^m:

$$C_n^m = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}, 0 \le m \le n, \\ 0, m > n. \end{cases}$$

Проведём индукцию по n. При $n = 1$ (база индукции) формула очевидна: $C_1^0 = \frac{1!}{0!\cdot 1!} = 1$ согласно начальному условию, далее,

$$C_1^1 = C_0^0 + C_0^1 = 1 + 0 = 1 = \frac{1!}{1!\cdot 0!}$$

согласно (1.1.7) и начальному условию. Предположение индукции: формула верна при $n = k$ для всех целых неотрицательных m. Тогда, подставляя C_k^{m-1}, C_k^m в (7), получаем C_{k+1}^m:

$$C_{k+1}^m = C_k^{m-1} + C_k^m = \frac{k!}{(m-1)!\,(k-m+1)!} + \frac{k!}{m!\,(k-m)!} =$$
$$= \frac{k!\,(m+k-m+1)}{m!\,(k-m+1)!} = \frac{(k+1)!}{m!\,(k-m+1)!},$$
что и доказывает индукционный шаг. ■

Числа C_n^m обладают *свойством симметрии*: $C_n^m = C_n^{n-m}$. Оно следует из того, что каждому (m)-сочетанию элементов (n)-множества A соответствует одно и только одно $(n-m)$-сочетание — дополнение этого сочетания до A.

1.1.2. Векторы

1.1.2.1. Декартово произведение

Вектором (*кортежем*) *длины* (*размерности*) n над множеством A называется упорядоченная совокупность n элементов A. Обозначение вектора: $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ (угловые скобки будут всегда ограничивать упорядоченную последовательность). Упорядоченность означает, что два вектора $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ и $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ равны тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Элементы вектора называются его *координатами*.

Понятие вектора позволяет ввести следующую важную операцию над множествами. *Декартовым* (*прямым*) *произведением множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество всех векторов вида $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... , $a_n \in A_n$. Обозначение декартова произведения: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, т. е.
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{x | x = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle, a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$
Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \times \dots \times A_n = A^n$ называется *декартовой* (*прямой*) *степенью* множества A.

Примеры: если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, то
$$A \times B = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 1, d\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 3, d\rangle\};$$
$$A^2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\};$$

$$B^3 = \{\langle a,a,a\rangle, \langle a,a,b\rangle, \langle a,a,c\rangle, \langle a,a,d\rangle, \langle a,b,a\rangle, \langle a,b,b\rangle, \dots\};$$
пусть $A = [0;1]$ — отрезок числовой оси от 0 до 1, $B = [0;2]$, тогда
$$A \times B = \{z | z = \langle x,y\rangle, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\} —$$
замкнутая область, ограниченная прямоугольником с вершинами (0; 0), (0; 2), (1; 0), (1; 2);
$$B \times A = \{z | z = \langle x,y\rangle, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\} —$$
замкнутая область, ограниченная прямоугольником с вершинами (0; 0), (0; 1), (2; 0), (2; 1);
$$A^2 = \{z | z = \langle x,y\rangle, 0 \le x, y \le 1\} —$$
замкнутая область, ограниченная единичным квадратом;
$$A^3 = \{u | u = \langle x,y,z\rangle, 0 \le x,y,z \le 1\} —$$
замкнутая пространственная область, ограниченная поверхностью единичного куба; если $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{x,y,z\}$, то
$$(A \times B) \times C =$$
$$= \{\langle\langle 1,a\rangle,x\rangle, \langle\langle 1,a\rangle,y\rangle, \langle\langle 1,a\rangle,z\rangle, \langle\langle 1,b\rangle,x\rangle, \langle\langle 1,b\rangle,y\rangle, \langle\langle 1,b\rangle,z\rangle, \dots\},$$
$$A \times (B \times C) =$$
$$= \{\langle 1,\langle a,x\rangle\rangle, \langle 1,\langle a,y\rangle\rangle, \langle 1,\langle a,z\rangle\rangle, \langle 1,\langle b,x\rangle\rangle, \langle 1,\langle b,y\rangle\rangle, \langle 1,\langle b,z\rangle\rangle, \dots\}.$$

Приведённые примеры показывают, что в общем случае декартово произведение некоммутативно и неассоциативно. Введение символа новой операции $\times$ требует переформулировки определения формулы алгебры множеств с назначением приоритета декартову произведению. Но если во избежание неопределённостей декартово произведение всегда заключать в скобки, то можно обойтись без строгого определения формулы с этой операцией и формулировки правил опускания лишних скобок.

Перечислим основные свойства декартова произведения:

I. 1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(дистрибутивность декартова произведения относительно объединения справа и слева);

II. 1) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(дистрибутивность декартова произведения относительно пересечения справа и слева);

III. 1) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$;

2) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

(дистрибутивность декартова произведения относительно разности справа и слева).

Свойства **I**, **II** естественным образом обобщаются на любые конечные объединения и пересечения множеств.

Докажем, например, свойство **III. 1)**. Пусть $x \in (A \backslash B) \times C$. Это означает, что x есть пара $\langle a, b \rangle$, где $a \in A \backslash B$, $b \in C$. Отсюда следует, что $a \in A$, $a \notin B$. Первое условие влечёт принадлежность $x = \langle a, b \rangle \in$ $\in A \times C$, из второго вытекает то, что $x = \langle a, b \rangle \notin B \times C$. Поэтому $x \in (A \times C) \backslash (B \times C)$, что доказывает $(A \backslash B) \times C \subseteq (A \times C) \backslash (B \times C)$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in (A \times C) \backslash (B \times C)$. Значит, $x \in A \times C$, $x \notin B \times C$. Из первого условия следует, что $x = \langle a, b \rangle$, где $a \in A$, $b \in C$, из второго следует то, что a не может принадлежать B, так как $b \in C$. Следовательно, $a \in A \backslash B$, а значит, $x = \langle a, b \rangle \in$ $\in (A \backslash B) \times C$, $(A \times C) \backslash (B \times C) \subseteq (A \backslash B) \times C$.

Из обоих доказанных включений следует равенство **III. 1)**. ■

В качестве упражнения рекомендуется провести доказательства всех остальных свойств.

1.1.2.2. Правило произведения. Размещения

Правило произведения, несмотря на свою простоту и очевидность, играет исключительно важную роль в решении перечислительных задач комбинаторного анализа. Оно утверждает, что для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеет место равенство

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|. \qquad (1.1.8)$$

Доказательство

Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 1$ равенство очевидно. Пусть оно справедливо для декартова произведения любых n конечных множеств, т. е. верно равенство (1.1.8). Составим прямое произведение произвольных $n+1$ множеств $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times$ $\times A_{n+1}$. Надо доказать, что

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|. \quad (1.1.9)$$

Для этого сначала убедимся в том, что правило справедливо для двух множеств A и B. Действительно, каждый элемент $a \in A$ порождает ровно $|B|$ пар в $A \times B$. Поэтому все $|A|$ элементов A дают $|A| \cdot |B|$ пар декартова произведения. Далее, очевидно, что каждому вектору вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\rangle \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ соответствует одна и только одна пара $\langle\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle, a_{n+1}\rangle \in (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … , $a_n \in A_n$, $a_{n+1} \in A_{n+1}$. Следовательно,

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| = |(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}|,$$

а по доказанному правилу произведения для двух множеств получаем

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| = |(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}| =$$
$$= |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Теперь применение к последнему равенству предположения индукции (1.1.8) приводит к индукционному шагу (1.1.9). ■

Размещением с повторениями из n элементов по m ((m)-*размещением с повторениями*) называется (m)-вектор с координатами из данного (n)-множества. Таким образом, размещение — упорядоченная совокупность m элементов, взятых, возможно, с повторами, из данных n. Такие наборы, в которых элементы могут повторяться, называются также *выборками с возвращением*. Число различных (m)-размещений с повторениями обозначается $\overline{A}_n^m$. Из правила произведения как следствие вытекает формула для вычисления $\overline{A}_n^m$: $\overline{A}_n^m = n^m$. Действительно, пусть размещения составляются из элементов (n)-множества A. Тогда $\overline{A}_n^m = |A^m| = |A|^m = n^m$.

Размещение, в котором все элементы различны, называется *размещением без повторений*. Число различных (m)-размещений без повторений обозначается A_n^m (другое обозначение — $(n)_m$). Докажем формулу для вычисления A_n^m:

$$A_n^m = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-m+1), 1 \le m \le n, \\ 1, m = 0, \\ 0, m > n. \end{cases}$$

То, что $A_n^m = 0$ при $m > n$, $A_n^0 = 1$, очевидно. Для доказательства первой части формулы применим математическую индукцию по m. При $m = 1$ имеем очевидное равенство $A_n^1 = n$. Предположение индукции: при $n = k$ $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Найдём количество $(k+1)$-размещений без повторений. Каждый $(k+1)$-вектор рассматриваемого вида получается из какого-либо (k)-вектора добавлением $(k+1)$-й координаты, являющейся элементом данного (n)-множества и не совпадающей ни с одной из k предыдущих координат. Поэтому, с учётом индукционного предположения, имеем

$$A_n^{k+1} = A_n^k(n-k) =$$
$$= n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)A_n^{k+1} =$$
$$= A_n^k(n-k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k).$$

Формула доказана.

При $m = n$ размещение без повторений называется *перестановкой* (*без повторений*) n различных элементов. Перестановка, таким образом, есть расположение этих элементов в ряд. Число различных (n)-перестановок обозначается P_n, и из доказанной формулы следует $P_n = A_n^n = n!$.

Заметим, что каждому (m)-сочетанию из n элементов соответствуют ровно $m!$ различных (m)-векторов с несовпадающими координатами из этого (m)-сочетания. Так как число таких (m)-векторов $P_m = m!$, то отсюда следует формула, связывающая числа сочетаний и размещений:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}.$$

1.1.2.3. Мультимножества. Сочетания и перестановки с повторениями

Пусть имеются (n)-множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и (n)-вектор $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ с неотрицательными целочисленными координатами $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, причём $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$. Неупорядоченная совокупность элементов множества A, в которой a_i встречается α_i раз ($i = 1, \dots, n$), называется (m)-*мультимножеством первичной спецификации* ${a_1}^{\alpha_1}{a_2}^{\alpha_2} \dots {a_n}^{\alpha_n}$, порождённым множеством A. В элементарной комбинаторике мультимножества называются *сочетаниями с повторениями.* Таким образом, (m)-сочетание с повторениями представляет собой неупорядоченную совокупность m элементов, выбранных из данного множества A, возможно, с повторениями. Число m называется *объёмом* сочетания. Мультимножество $\hat{A}$ можно записать таким образом:

$$\hat{A} = \left\{ \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{\alpha_1 \text{раз}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{\alpha_2 \text{раз}}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{\alpha_n \text{раз}} \right\}.$$

Можно применять и такую запись: $\hat{A} = \{\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_2), \dots, \alpha_n(a_n)\}$. Числа α_i называются *показателями первичной спецификации* (m)-мультимножества $\hat{A}$.

Если среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеются β_0 нулей, β_1 единиц, ... , β_m значений m, то символическая запись $0^{\beta_0}1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}$ называется *вторичной спецификацией* (m)-мультимножества $\hat{A}$, а числа β_0, $\beta_1, \dots, \beta_m$ — её *показателями*, $\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$.

Максимальное подмножество A' множества A, содержащее элементы соответствующего мультимножества $\hat{A}$, т. е. объединение всех подмножеств различных элементов $\hat{A}$, называется *носителем* этого мультимножества. Очевидно, что носитель представляет собой множество таких элементов $a \in A$, для которых соответствующие показатели первичной спецификации положительны.

Пример: пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $\alpha = \langle 2, 0, 1, 3, 0, 2 \rangle$, тогда $\hat{A} = \{a_1, a_1, a_3, a_4, a_4, a_4, a_6, a_6\}$ или $\hat{A} = \{2(a_1), 0(a_2), 1(a_3), 3(a_4), 0(a_5), 2(a_6)\}$; объём этого мультимножества равен $2 + 0 + 1 + {}$ $+3 + 0 + 2 = 8$, вторичная спецификация: $0^2 1^1\, 2^2 3^1 4^0 5^0 6^0 7^0 8^0$, $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$; носителем является множество $A' = \{a_1, a_3, a_4, a_6\}$.

Количество всех (m)-сочетаний с повторениями из n элементов обозначается $\overline{C}_n^m$. Решим задачу вычисления $\overline{C}_n^m$. Без ограничения общности можно рассмотреть (n)-множество $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Если использовать порядок записи чисел по неубыванию, то любое (m)-мультимножество, порождённое множеством A, можно представить в виде $\hat{A} = \langle s_1, s_2, \dots, s_m \rangle$, где $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m \leq n$. Каждому такому $\hat{A}$ можно поставить в соответствие множество $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, где

$$\left.\begin{array}{r} v_1 = s_1, \\ v_2 = s_2 + 1, \\ v_3 = s_3 + 2, \\ \vdots \\ v_m = s_m + m - 1. \end{array}\right\} \qquad (1.1.10)$$

Очевидно, что все v_i различны и принимают значения от 1 до $n + m - 1$, следовательно, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ представляет собой (m)-подмножество $(n + m - 1)$-множества $\{1, 2, \dots, n + m - 1\}$. Наоборот, по любому бесповторному сочетанию $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ чисел от 1 до $n + m - 1$ можно по формулам (1.1.10) восстановить единственный вектор $\langle s_1, s_2, \dots, s_m \rangle$, определяющий (m)-мультимножество. Следовательно, число всех различных (m)-мультимножеств, порождённых $A = \{1, 2, \dots, n\}$, равно количеству (m)-подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, n + m - 1\}$, т. е. C_{n+m-1}^m. Итак, получаем ответ: $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Теперь решим следующую комбинаторную задачу. *Перестановкой с повторениями* называется (m)-вектор $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, в котором элемент a_1 встречается α_1 раз, a_2 — α_2 раз, … , a_n — α_n раз, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$. Число m называется *объёмом* перестановки. Количество всех различных (m)-перестановок с повторениями при указанных параметрах обозначается $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Выведем формулу для этой величины. Если все элементы были бы разными, то число перестановок равнялось бы $m!$. Но за счёт перестановок одинаковых элементов некоторые векторы переходят друг в друга. Предположим, что α_1 элементов a_1 одинаковы, а все остальные различны. Например, элементы a_2 снабжены пометками $a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, …, $a_2^{(\alpha_2)}$, аналогично для a_3 и так далее. Тогда все векторы разбиваются на классы, в каждый из них включаются векторы, переходящие друг в друга перестановкой α_1 одинаковых элементов a_1. В каждый класс входят $\alpha_1!$ векторов, и он определяет единственную перестановку, в которой α_1 элементов одинаковы, остальные различны. Следовательно, число таких классов равно количеству различных не переходящих друг в друга рассматриваемых перестановок. Чтобы получить это число, нужно общее число $m!$ (m)-векторов с различными координатами поделить на число перестановок в одном классе $\alpha_1!$. Получаем, что с учётом того, что среди m элементов имеются α_1 одинаковых, число различных перестановок равно $\frac{m!}{\alpha_1!}$. Если теперь предположить, что α_2 элементов a_2 одинаковы (т. е. убрать с них пометки), то, рассуждая аналогично, получим $\frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2}$ различных перестановок с α_1 одинаковыми элементами a_1, α_2 одинаковыми a_2. Проведя это рассуждение для всех n элементов, получим формулу

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2 \cdots \alpha_n!}.$$

Если просуммировать $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ при всех возможных показателях первичной спецификации, то получится общее число (m)-векторов над (n)-множеством $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, т. е. количество (m)-перестановок с повторениями из n. Отсюда следует формула

$$\sum_{\substack{0 \le \alpha_i \le m \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2 \cdots \alpha_n!} = n^m.$$

1.1.2.4. Сюръективные мультимножества

Сюръективным называется (m)-мультимножество, у которого все показатели первичной спецификации положительны. Таким образом, носителем сюръективного мультимножества, порождённого (n)-множеством $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, является само A. В таком мультимножестве каждый элемент $a_i \in A$ присутствует хотя бы в одном экземпляре.

Пример: пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $\alpha = \langle 2, 1, 1, 3, 2\rangle$, тогда $\hat{A} = \{a_1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_4, a_4, a_5, a_5\}$, или $\hat{A} = \{2(a_1), 1(a_2), 1(a_3), 3(a_4), 2(a_5)\}$; объём этого мультимножества равен $2 + 1 + 1 + 3 + +2 = 9$, вторичная спецификация: $1^2 2^2 3^1 4^0 5^0 6^0 7^0 8^0 9^0$, $1 \cdot 2 + 2 \times \times 2 + 3 \cdot 1 = 9$.

Определим число $\hat{C}_n^m$ различных сюръективных (m)-мультимножеств, носителями которых является данное (n)-множество. Если удалить из каждого сюръективного (m)-мультимножества по одному элементу $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то получится $(m - n)$-мультимножество произвольной первичной спецификации. Наоборот, из любого $(m - n)$-мультимножества можно добавлением по одному элементу $a_1, a_2, \ldots, a_n$ получить единственное сюръективное (m)-мультимножество. Следовательно, $\hat{C}_n^m$ равно числу $(m - n)$-мультимножеств, порождённых данным (n)-множеством: $\hat{C}_n^m = \overline{C}_n^{m-n} = C_{n+m-n-1}^{m-n} = = C_{m-1}^{m-n}$. Из свойства симметрии (см. пункт 1.1.1.5) следует окончательный ответ: $\hat{C}_n^m = C_{m-1}^{n-1}$.

1.1.2.5. Разбиения и композиции чисел

Разбиением натурального числа n называется его представление в виде неупорядоченной суммы натуральных чисел:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r. \qquad (1.1.11)$$

Неупорядоченность означает, что разбиения, различающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Каждое такое разбиение $\langle n_1, n_2, \ldots, n_r\rangle$ можно рассматривать как (r)-мультимножество первичной спецификации $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}$, где α_i — число слагаемых, равных i в разбиении (11), $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = r$ — общее количество слагаемых. Натуральные числа n_1, n_2, ... , n_r, образующие разбиение, называются его *частями*, а n — его *характеристикой*. Естественно, возникает задача подсчёта числа разбиений при различных условиях. Эта задача просто и эффективно решается с помощью производящих функций.

Представление натурального числа n в виде упорядоченной суммы натуральных чисел называется его *композицией*. Части и характеристика композиции определяются так же, как и для разбиения. Задача подсчёта числа композиций также в общем виде решается методом производящих функций. На данный момент можно сформулировать следующие результаты. Число различных композиций характеристики n с ровно m частями равно количеству сюръективных (n)-мультимножеств, порождённых (m)-множеством $\{1, 2, \dots, m\}$ (элементы этого (m)-множества — номера слагаемых, и каждый номер присутствует в (n)-мультимножестве столько раз, чему равно соответствующее слагаемое), т. е. C_{n-1}^{m-1}.

Для того чтобы подсчитать общее число композиций характеристики n, нужно просуммировать C_{n-1}^{m-1} по всем m от 1 до n: $C_{n-1}^{0} + {}+C_{n-1}^{1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}$. Эта сумма равна числу всех подмножеств $(n-1)$-множества. Найдём это число. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Каждому подмножеству A поставим в соответствие двоичный вектор длины $n-1$, в котором $a_i = 1$, если a_i принадлежит этому подмножеству и $a_i = 0$ в противном случае ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно: каждому подмножеству A соответствует единственный описанный вектор и наоборот. Значит, число различных подмножеств совпадает с количеством двоичных векторов длины $n-1$, которое по правилу произведения равно 2^{n-1}. Итак, существуют 2^{n-1} различных композиций характеристики n.

Например, выпишем все композиции числа 5:

$$5 = 5,$$
$$5 = 4 + 1, 5 = 4 + 1, 5 = 3 + 2, 5 = 2 + 3,$$
$$5 = 3 + 1 + 1, 5 = 1 + 3 + 1,$$
$$5 = 1 + 1 + 3, 5 = 2 + 2 + 1,$$
$$5 = 2 + 1 + 2, 5 = 1 + 2 + 2, 5 = 2 + 1 + 1 + 1,$$
$$5 = 1 + 2 + 1 + 1, 5 = 1 + 1 + 2 + 1, 5 = 1 + 1 + 1 + 2,$$
$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Всего $2^{5-1} = 16$ композиций.

1.1.3. Отношения

1.1.3.1. Бинарные отношения

Пусть имеются некоторые множества A_1, A_2, … , A_n. Рассматривается декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{x | x = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle, a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Произвольное подмножество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется *n-местным отношением*, заданным на множествах A_1, A_2, … , A_n, число n — *арностью* отношения. Таким образом, если все (n)-векторы $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, у которых $a_i \in A_i$, $i = 1$, 2, … , n, составляют декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, то некоторые, возможно, не все из них, образуют n-местное отношение R. Говорят, что упорядоченная совокупность элементов $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ находится в отношении R, если вектор $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ принадлежит R. Одноместные отношения, называемые *унарными*, представляют собой подмножества множества A. Отношения арности 3 называются *тернарными.* Примерами тернарных отношений являются арифметические операции над числами. Сложение определяется как множество упорядоченных троек $\langle a, b, c \rangle$, в которых элемент c является суммой a и b. Аналогично задаются как тернарные отношения операции умножения, вычитания, деления.

В дальнейшем в этом подразделе будут рассматриваться только *бинарные отношения* — отношения арности 2. Если на множествах A, B задано бинарное отношение R, то записи aRb и $\langle a, b \rangle \in R$ считаются эквивалентными, и обе они означают, что элементы a и b находятся в отношении R.

Простейшими примерами бинарных отношений являются отношения сравнения чисел $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ на множестве $\mathbb{Z}$:

$$\leq = \{\langle a, b \rangle | \; a, b \in \mathbb{Z}, b - a - \text{неотрицательное число}\},$$

тогда $\langle 3, 7 \rangle \in \leq$, или $3 \leq 7$, а $\langle 6, -2 \rangle \notin \leq$, или неверно, что $6 \leq -2$; аналогично определяются другие отношения сравнения:

$$\geq = \{\langle a, b \rangle | \; a, b \in \mathbb{Z}, a - b - \text{неотрицательное число}\};$$

$$< = \{\langle a, b \rangle | \; a, b \in \mathbb{Z}, b - a - \text{строго положительно}\};$$

$$>=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in\mathbb{Z}, a-b - \text{строго положительно}\}.$$

Другим примером бинарного отношения является отношение включения на булеане произвольного множества A:

$$\subseteq=\{\langle X,Y\rangle \mid X,Y\in 2^A, X \text{ подмножество } Y\}.$$

Если $A=\{0,1,2,5,9\}$, то пары подмножеств $\langle\{1,9\},\{0,1,2,9\}\rangle$, $\langle\{5,9\},\{1,5,9\}\rangle$ принадлежат этому отношению ($\{1,9\}\subseteq\{0,1,2,9\}$, $\{5,9\}\subseteq$ $\subseteq\{1,5,9\}$), а пара $\langle\{1,9\},\{1,2\}\rangle$ не принадлежит.

Областью определения бинарного отношения R называется множество δ_R таких элементов $a\in A$, что aRb при некотором $b\in B$:

$$\delta_R=\{a\in A \mid aRb \text{ при некотором } b\in B\}.$$

Областью значений бинарного отношения R называется множество ρ_R элементов $b\in B$, для которых aRb при некотором $a\in A$:

$$\rho_R=\{b\in B \mid aRb \text{ при некотором } a\in A\}.$$

Можно говорить, что R каждому элементу из области определения ставит в соответствие элемент (или элементы) из области значений. Поэтому говорят, что бинарное отношение переводит область определений в область значений.

С каждым бинарным отношением R связаны следующие бинарные отношения. *Обратным к бинарному отношению* R называется $R^{-1}=\{\langle a,b\rangle \mid bRa\}$. *Дополнением бинарного отношения* R называется $-R=(A\times B)\backslash R$.

Пример: у бинарного отношения $\le$ на множестве целых чисел область определения и область значений совпадают и равны $\mathbb{Z}$, обратным к нему является $\le^{-1}=\ge$, дополнение $-\le=>$; у бинарного отношения $<$ на множестве натуральных чисел $\delta_<=\mathbb{N}$, $\rho_<=\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $<^{-1}=>$, $-<=\ge$.

Образом множества $X\subseteq A$ при бинарном отношении R называется множество $R(X)=\{b\in B \mid aRb \text{ при некотором } a\in X\}$.

Прообразом множества $Y\subseteq B$ при R называется множество $R^{-1}(Y)$, т. е.

$$R^{-1}(Y)=\{a\in A \mid bR^{-1}a \text{ при некотором } b\in Y\}=$$
$$=\{a\in A \mid aRb \text{ при некотором } b\in Y\}.$$

Например, образом одноэлементного множества $\{n\}$ при отношении $<$ на множестве натуральных чисел является $R(\{n\}) = \{n + +1, n + 2, \dots\}$, прообразом — множество $R^{-1}(\{n\}) = \{n + 1, n + 2, \dots\}$.

Композицией бинарных отношений $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$ называется бинарное отношение

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle a, b\rangle \mid \text{при некотором } c \in \rho_{R_1} \cap \delta_{R_2}\ aR_1c \text{ и } cR_2b\}.$$

Например, для отношений сравнения на множестве $\mathbb{Z}$:

$$<\circ<=<,$$
$$\leq\circ\geq = \{\langle a, b\rangle \mid \text{при некотором } c \in \mathbb{Z}\ a \leq c \text{ и } c \geq b\} = \mathbb{Z}^2;$$
$$<\circ> = \{\langle a, b\rangle \mid \text{при некотором } c \in \mathbb{Z}\ a < c \text{ и } c > b\} = \mathbb{Z}^2,$$
$$>\circ< = \{\langle a, b\rangle \mid \text{при некотором } c \in \mathbb{Z}\ a > c \text{ и } c < b\} = \mathbb{Z}^2;$$

если же отношения $<, >$ заданы на множестве натуральных чисел, то $<\circ> = \mathbb{N}^2$, $>\circ< = (\mathbb{N}\backslash\{1\})^2$.

Последний пример показывает, что в общем случае композиция некоммутативна: $R \circ S \neq S \circ R$.

Свойства бинарных отношений:

I. $(R^{-1})^{-1} = R$;

II. 1) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

2) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

III. $-R^{-1} = (-R)^{-1}$;

IV. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$, где $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times \times D$;

V. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$, где $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$;

VI. $(R \circ S)(X) = S(R(X))$, где $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, X \subseteq A$;

VII. 1) $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$, где $R, S \subseteq A \times B, T \subseteq B \times C$;

2) $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$, где $R \subseteq A \times B$, S, $T \subseteq B \times C$;

VIII. 1) $(R \cap S) \circ T \subseteq R \circ T \cap S \circ T$, где $R, S \subseteq A \times B, T \subseteq B \times C$;

2) $R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$, где $R \subseteq A \times B$, S, $T \subseteq B \times C$.

IX. 1) $\delta_{R^{-1}} = \rho_R$;

2) $\rho_{R^{-1}} = \delta_R$.

Докажем для примера свойство **V**. Доказательство $(R \circ S)^{-1} \subseteq \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$. Пусть $x \in (R \circ S)^{-1}$. Тогда $x = \langle a, b\rangle$ и верно, что

$a(R \circ S)^{-1}b$. Из этого следует $b(R \circ S)a$, а значит, при некотором $c \in \rho_R \cap \delta_S$ выполняются отношения bRc и cSa, т. е. $aS^{-1}c$ и $cR^{-1}b$. По определению композиции получаем, что $a(S^{-1} \circ R^{-1})b$ и $x = = \langle a, b\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Включение доказано.

Доказательство $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$. Пусть $x \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Это значит, что $x = \langle a, b\rangle$ и при некотором $c \in \rho_{S^{-1}} \cap \delta_{R^{-1}} = \delta_S \cap \rho_R$ (свойство **IX**) $aS^{-1}c$, $cR^{-1}b$. Переходя к исходным соотношениям, получаем отношения bRc и cSa. Итак, при некотором $c \in \delta_S \cap \rho_R$ верны отношения bRc, cSa. По определению композиции $b(R \circ S)a$, следовательно, $a(R \circ S)^{-1}b$ и $x = \langle a, b\rangle \in (R \circ S)^{-1}$. Обратное включение, а значит, и равенство **V** доказано. ■

1.1.3.2. Функции

Бинарное отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией* из A в B, если $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$ и для всех $x \in \delta_f$, y_1, $y_2 \in \rho_f$ из xfy_1, xfy_2 следует $y_1 = y_2$. Функцию f из A в B будем обозначать $f: A \to B$. Вместо xfy или $\langle x, y\rangle \in f$ будем писать $y = f(x)$, элемент x называется *аргументом*, y — *значением* функции. *Сужением* функции $f: A \to B$ на множество $A' \subseteq A$ называется функция

$$f|A' = \{\langle x, y\rangle | y = f(x), x \in A'\}.$$

Образ подмножества $A' \subseteq A$ при функции $f: A \to B$ будем обозначать $f(A')$:

$$f(A') = \{y \in B | y = f(x), x \in A'\}.$$

Найдём число различных функций из (m)-множества A в (n)-множество B. Каждой такой функции взаимно однозначным образом соответствует (m)-вектор $\langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)\rangle$ над множеством B ($A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$), т. е. элемент декартовой степени B^m. Тогда по правилу произведения получаем, что число всех функций $f: A \to B$ равно n^m. Совокупность функций $f: A \to B$ по этой причине обозначается B^A (в том числе и для произвольных, не только конечных множеств A и B). Функцию $f: A \to B$, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — конечное (n)-множество, можно записать в виде матрицы с двумя строками:

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}.$$

Например, если $A = B$, то функция $f: A \to A$ изображается матрицей

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \end{pmatrix},$$

где $a_{i_j} = f\left(a_j\right)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Функция f называется *инъекцией* ($(1-1)$-*функцией*) A в B, если для всех x_1, $x_2 \in A$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция f называется *сюръекцией* A на B, если $\rho_f = B$. Функция $f: A \to B$, являющаяся инъекцией и сюръекцией, называется *взаимно однозначным соответствием* (*биекцией*) между множествами A, B. Установление взаимно однозначного соответствия играет важную роль в теории множеств и комбинаторном анализе. На этом основано установление конечности, счётности или бессчётности множеств, решение комбинаторных задач сведением к эквивалентным задачам, имеющим более простое решение. Взаимно однозначное соответствие $f: A \to A$ называется *подстановкой* множества A.

Ниже следуют основные свойства функций:

I. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, где $A, B \subseteq \delta_f$;

II. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, где $A, B \subseteq \delta_f$;

III. $f(A \backslash B) \subseteq f(A) \backslash f(B)$, где $A, B \subseteq \delta_f$;

IV. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, где $A, B \subseteq \rho_f$;

V. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, где $A, B \subseteq \rho_f$;

VI. $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$, где $A, B \subseteq \rho_f$.

Свойства **I**–**II**, **IV**–**V** естественно обобщаются на любое конечное число множеств.

Докажем, к примеру, свойство **II**. Пусть $y \in f(A \cap B)$. Это означает, что при некотором $x \in A \cap B$ $y = f(x)$. Поскольку $x \in A$, то $y = f(x) \in f(A)$, а так как вместе с тем $x \in B$, то $y = f(x) \in f(B)$, поэтому $y \in f(A) \cap f(B)$. ■

Заметим, что включения в свойствах **II** и **III** нельзя заменить равенствами.

Пример: функция $y = x^2$, $\delta_f = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел), $\rho_f = [0;\ \infty)$, $A = [-1; 0]$, $B = [0; 1]$, $A \cap B = \{0\}$, $A \backslash B = [-1; 0)$, $f(A) = f(B) = [0; 1]$, при этих данных

$$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\} \neq f(A) \cap f(B) = [0; 1],$$

$$f(A) \backslash f(B) = \emptyset \neq f(A \backslash B) = f\big([-1; 0)\big) = (0; 1].$$

Докажем также одно свойство для обратных функций, например, **VI**. Пусть $x \in f^{-1}(A \backslash B)$, из этого следует, что $y = f(x) \in A \backslash B$, $y \in A$, $y \notin B$. Из первого условия вытекает $x \in f^{-1}(A)$, из второго — $x \notin f^{-1}(B)$. Значит, $x \in f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$, что доказывает включение $f^{-1}(A \backslash B) \subseteq f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$. Обратно, пусть $x \in f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$. Тогда $x \in f^{-1}(A)$, $x \notin f^{-1}(B)$, $y = f(x)$ принадлежит множеству A, но не является элементом B. Следовательно, $y \in A \backslash B$, $x \in f^{-1}(A \backslash B)$. Включение $f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \backslash B)$, а вместе с ним и свойство **VI** доказано. ■

Найдём число инъекций из (m)-множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ в (n)-множество B. Каждой инъекции соответствует (m)-вектор вида $\langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m) \rangle$ над множеством B с различными координатами, т. е. размещение без повторений из n элементов по m. Тогда из выведенной в пункте 1.1.2.2 формулы следует, что число различных инъекций из A в B равно

$$A_n^m = \begin{cases} n(n-1) \cdots (n-m+1), 1 \leq m \leq n, \\ 1, m = 0, \\ 0, m > n. \end{cases} \qquad (1.1.12)$$

Понятно, что единственной инъекцией при $m = 0$, т. е. когда $A = \emptyset$, является пустое множество. При $m > n$ элементов B не хватит для составления инъекции.

Найдём теперь число биекций из (m)-множества A на (n)-множество B. Очевидно, что для существования биекции между A и B необходимо и достаточно выполнение условия $m = n$ (каждому элементу A должен соответствовать один и только один элемент B). Поскольку биекция по определению является инъекцией, число взаимно однозначных функций из (n)-множества A на (n)-множество B можно вычислить по выведенной формуле (1.1.12): количество биекций равно $A_n^n = P_n = n!$.

В частности, число подстановок (n)-множества A равно $n!$, т. е. числу перестановок элементов этого множества.

В заключение этого пункта приведём некоторые утверждения относительно функций.

Лемма 1.1.2

Если f — функция из A в B, то бинарное отношение f^{-1} является функцией из $\rho_f \subseteq B$ в A тогда и только тогда, когда f — инъекция.

Доказательство

Если f^{-1} является функцией из ρ_f в A, то для любых неравных элементов x_1, $x_2 \in A$ из условий $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ следует $y_1 \neq y_2$, а это и означает инъективность f. Обратно, пусть f — инъекция. Это значит, что из условий $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_1 = y_2$ следует $x_1 = x_2$. А это и есть определение функции f^{-1}. ■

Следствие

Если функция f является инъекцией, то

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B),$$

где A, $B \subseteq \delta_f$, т. е. включения в свойствах **II**, **III** превращаются в равенства (см. замечание к свойствам функций).

Лемма 1.1.3

Функция f является взаимно однозначным соответствием между множествами A и B тогда и только тогда, когда f^{-1} также есть взаимно однозначное соответствие.

Доказательство

В силу свойства **I** бинарных отношений (пункт 1.1.3.1) достаточно доказать утверждение в одну сторону. Пусть f — биекция между A и B. Тогда $\delta_f = A$, $\rho_f = B$, из определений множеств δ_f, ρ_f следует, что $\delta_{f^{-1}} = B$, $\rho_{f^{-1}} = A$. Поскольку f по определению является инъекцией, то f^{-1} — функция из A на B. Осталось доказать, что

f^{-1} — инъекция. Пусть $y_1,\ y_2 \in \delta_{f^{-1}} = \rho_f = B,\ y_1 \neq y_2$. Тогда при некоторых $x_1,\ x_2 \in\ \delta_f = \rho_{f^{-1}} = A$ верны равенства $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, причём $x_1 \neq\ x_2$ (так как f — функция). Тогда $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 \neq x_2$. А это значит, что f^{-1} — инъекция. ■

Следствие

Функция $f: A \to A$ является подстановкой множества A тогда и только тогда, когда f^{-1} — также подстановка A.

Лемма 1.1.4

Если f — функция из A в B, а g — функция из $\rho_f \subseteq B$ в C, то $f \circ g$ является функцией из A в C.

Доказательство

Пусть $x \in A$, y_1, y_2 — элементы множества C, удовлетворяющие условиям $x(f \circ g)y_1$, $x(f \circ g)y_2$. Нужно доказать, что $y_1 = y_2$. Из условия $x(f \circ g)y_1$ следует, что при некотором $z_1 \in \rho_f$ верны отношения xfz_1 и z_1gy_1, или равенства $z_1 = f(x)$, $y_1 = g(z_1)$. Аналогично, при некотором $z_2 \in \rho_f$ верно, что xfz_2, z_2gy_2, или $z_2 = f(x)$, $y_2 = g(z_2)$. Поскольку f — функция, то $z_1 = z_2$, а так как g — функция из ρ_f и $\rho_f \subseteq B$, то $y_1 = y_2$. ■

1.1.3.3. Бинарные отношения специального вида

В этом пункте будут рассматриваться бинарные отношения, заданные на множестве A, т. е. подмножества A^2. Пусть $\delta_R = A$.

Бинарное отношение R называется *рефлексивным* (*иррефлексивным*), если для любого $a \in A$ верно отношение aRa (неверно, что aRa).

Бинарное отношение называется *симметричным*, если для любых a, $b \in A$ из aRb следует bRa, *антисимметричным*, если из того, что aRb и одновременно bRa, следует $a = b$.

Бинарное отношение называется *транзитивным*, если для любых a, b, $c \in A$ из aRb, bRc следует aRc. Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение называется *эквивалентно-*

стью.

Решим задачу вычисления количеств бинарных отношений некоторых введённых видов в случае конечного (n)-множества A. Во-первых, каждое бинарное отношение является подмножеством A^2, а это декартово произведение содержит n^2 пар. Поэтому число всех бинарных отношений равно 2^{n^2} (решение задачи нахождения количества всех подмножеств конечного множества с заданным числом элементов см. в пукнте 1.1.2.5). Каждое рефлексивное бинарное отношение получается добавлением к множеству пар

$$\{\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_2\rangle, \dots, \langle a_n, a_n\rangle\} \tag{1.1.13}$$

(всего n пар) произвольного подмножества $n^2 - n$ остальных пар. Следовательно, число рефлексивных бинарных отношение равно 2^{n^2-n}. Поскольку иррефлексивные бинарные отношения являются подмножествами множества $n^2 - n$ пар A^2, не входящих в множество (1.1.13), их число также равно 2^{n^2-n}.

Каждое симметричное бинарное отношение вместе с парой $\langle a, b\rangle$ должно содержать пару $\langle b, a\rangle$. Поэтому оно является подмножеством множества $\overline{C}_n^2 = \frac{n^2+n}{2}$ неупорядоченных пар $\{a, b\}$, в которых элементы могут повторяться (включение в отношение пары $\langle a, b\rangle$ автоматически означает включение $\langle b, a\rangle$, следовательно, порядок элементов в парах не имеет значения). Отсюда получаем, что количество симметричных бинарных отношений равно $2^{\frac{n^2+n}{2}}$. В качестве упражнения предлагается доказать, что число антисимметричных бинарных отношений равно $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Лемма 1.1.5

Симметричное и антисимметричное одновременно бинарное отношение является транзитивным.

Доказательство

Пусть $R \subseteq A^2$ симметрично и антисимметрично. Возьмём произвольную пару $\langle a, b\rangle$ из R. Так как R симметрично, то $\langle b, a\rangle \in R$

(bRa), и в силу антисимметричности R из этого следует, что $a = b$. Значит, все пары в R имеют вид $\langle a, a\rangle$. Очевидно, что такое бинарное отношение транзитивно. ■

Замечание

Обратное утверждение неверно, например, бинарное отношение $\leq$ на множестве действительных чисел (см. пункт 1.1.3.1) транзитивно, но не симметрично.

Лемма 1.1.6

Для любых симметричных бинарных отношений R, S композиция $R \circ S$ симметрична тогда и только тогда, когда $R \circ S = S \circ R$.

Доказательство

Симметричность бинарного отношения R, по определению, эквивалентна условию $R = R^{-1}$. Поэтому симметричность композиции $R \circ S$ эквивалентна выполнению равенства

$$R \circ S = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

(здесь применено свойство **V** бинарных отношений (см. пункт 1.1.3.1)). А поскольку R и S симметричны, последнее равенство эквивалентно $R \circ S = S \circ R$. ■

Лемма 1.1.7

Бинарное отношение R транзитивно тогда и только тогда, когда $R \circ R \subseteq R$.

Доказательство

Докажем необходимость. Пусть R транзитивно и $a(R \circ R)b$, т. е. $\langle a, b\rangle \in R \circ R$. Тогда при некотором $c \in A$ верно, что aRc, cRb, и в силу транзитивности R справедливо aRb, что и доказывает включение $R \circ R \subseteq R$. Теперь докажем, что из условия $R \circ R \subseteq R$ следует транзитивность R. Возьмём такие произвольные a, b, c из A, что aRb и bRc (если такой тройки не существует, то R очевидно транзитивно, поскольку условие $aRb \mathbin{\&} bRc \Rightarrow aRc$ всегда выполняется, & — знак логического умножения (конъюнкции)). Это значит, что $a(R \circ R)c$, т. е. $\langle a, c\rangle \in R \circ R$. Тогда, в силу $R \circ R \subseteq R$ справедливо $\langle a, c\rangle \in R$, т. е. aRc, следовательно, R транзитивно. ■

Лемма 1.1.8

Если R, S — эквивалентности, то $R \circ S$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $R \circ S = S \circ R$.

Доказательство

Необходимость следует из леммы 1.1.6. Докажем достаточность. Пусть R, S — эквивалентности, для которых верно равенство $R \circ S =$ $= S \circ R$. Докажем, что $R \circ S$ — эквивалентность. Используя свойства бинарных отношений, преобразуем следующую композицию:

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) = R \circ (S \circ R) \circ S = R \circ (R \circ S) \circ S =$$
$$= (R \circ R) \circ (S \circ S).$$

Так как R, S транзитивны, из леммы 1.1.7 следует, что $R \circ R \subseteq R$, $S \circ S \subseteq S$, поэтому $(R \circ S) \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ (S \circ S) \subseteq R \circ S$ (здесь мы воспользовались утверждением: если R, $R_1 \subseteq A \times B$, S, $S_1 \subseteq B \times$ $\times C$ — бинарные отношения и $R \subseteq R_1$, $S \subseteq S_1$, то $R \circ S \subseteq R_1 \circ S_1$; доказательство проведите самостоятельно). Из последнего включения в силе леммы 1.1.7 получаем, что $R \circ S$ транзитивно. ■

Лемма 1.1.9

Бинарное отношение R является эквивалентностью тогда и только тогда, когда R^{-1} — также эквивалентность.

Доказательство

Из свойства **I** бинарных отношений (пункт 1.1.3.1) следует, что достаточно доказать утверждение в одну сторону. Пусть $R \subseteq A^2$ — эквивалентность. Тогда $R^{-1} \subseteq A^2$. Так как R рефлексивно, то для любого $a \in \in A$ верно, что aRa, значит, $aR^{-1}a$, т. е. R^{-1} также рефлексивно. Так как R симметрично, из aRb следует bRa для любых a, $b \in A$, а это означает, что $bR^{-1}a$ влечёт $aR^{-1}b$, т. е. R^{-1} также симметрично. Наконец, пусть $aR^{-1}b$ и $bR^{-1}c$ для любых a, b, $c \in A$, что равносильно bRa, cRb. В силу транзитивности R отсюда следует, что верно отношение cRa, т. е. $aR^{-1}c$. Следовательно, R^{-1} транзитивно, стало быть, является эквивалентностью. ■

Пусть на множестве A задана эквивалентность R. *Классом эквивалентности* элемента $a \in A$ по R называется множество всех элементов A, находящихся в отношении R. Обозначается класс эквивалентности a/R, т. е. $a/R = \{b \in A \mid bRa\}$. Множество классов эквивалентности элементов A по R называется *фактор-множеством* A/R: $A/R = \{a\,/\,R \mid a \in A\}$. Сформулируем и докажем следующую важную теорему о фактор-множестве.

Теорема 1.1.1

Фактор-множество $A/R = \{a\,/\,R \mid a \in A\}$ является разбиением множества A, т. е. классы эквивалентности a/R попарно не пересекаются, и их объединение равно A.

Доказательство

Нужно доказать, что любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются, и что любой элемент $a \in A$ попадает в какой-либо класс.

Так как R рефлексивно, то для любого $a \in A$ верно aRa, поэтому $a \in a/R$ (любой элемент принадлежит своему классу эквивалентности).

Пусть теперь $a,\ b \in A,\ aRb$. Докажем, что $a/R = b/R$. Пусть $x \in a/R$, тогда xRa, и из этого условия с учётом aRb и транзитивности R следует xRb. Значит, $x \in b/R$, что доказывает включение $a/R \subseteq b\,/\,R$. Аналогично доказывается $b/R \subseteq a\,/\,R$. Следовательно, в случае aRb классы a/R и $b\,/\,R$ совпадают. Пусть теперь $\langle a, b\rangle \notin R$. Докажем, что $a/R,\ b\,/\,R$ не пересекаются. Предположим противное: $a/R \cap b\,/\,R \neq \emptyset$. Тогда существует $x \in a/R \cap b\,/\,R$. Из $x \in b/R$ следует, что xRb, а из $x \in a/R$ — xRa, а поскольку R симметрично, то aRx. В силу транзитивности R из $aRx,\ xRb$ получаем aRb, что противоречит условию $\langle a, b\rangle \notin R$. Теорема полностью доказана. ■

Пример: пусть Ω — семейство всех существующих множеств (вселенная множеств). На Ω задано бинарное отношение R: для любых множеств A и B пара $\langle A, B\rangle$ принадлежит R тогда и только тогда, когда между A и B существует биекция. Это отношение R является эквивалентностью, фактор-множество $\Omega\,/\,R$ представляет собой семейство классов множеств, в каждом классе между элементами любых двух множеств существует взаимно однозначное соответствие. Такие множества называются *равномощными*, а классы эквивалентности — *мощностями* множеств. Количественной характеристикой мощностей являются *кардинальные числа*.

1.1.3.4. Отношения порядка

Пусть имеется произвольное множество A. С помощью бинарных отношений на A можно вводить различные упорядочения элементов A.

Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ называется *предпорядком* (*квазипорядком*) на A, если оно рефлексивно и транзитивно. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение называется *частичным порядком*. Частичный порядок обозначается $\leq$ (по аналогии с отношением $\leq$ на числовых множествах, являющимся частичным порядком, см. примеры в пункте 1.1.3.1). Бинарное отношение $\leq^{-1}$ называется *двойственным порядком* к $\leq$ и обозначается $\geq$.

Лемма 1.1.10

Порядок, двойственный к частичному, также является частичным.

Доказательство

Пусть $\leq$ — частичный порядок, т. е. бинарное отношение $\leq$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. В доказательстве леммы 1.1.9 было показано, что из рефлексивности и транзитивности $\leq$ следуют рефлексивность и транзитивность $\geq = \leq^{-1}$. Докажем антисимметричность $\geq$. Пусть $x \geq y$, $y \geq x$. Это значит, что $y \leq x$ и $x \leq y$. Из антисимметричности $\leq$ следует $x = y$. ■

Частичный порядок называется *линейным*, если для любых элементов $a, b \in A$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$. Множество с заданным на нём частичным (линейным) порядком называется *частично* (*линейно*) *упорядоченным.* Например, числовые множества линейно упорядочены отношениями сравнения чисел ($\leq$, $\geq$), а булеан произвольного множества A с введённым на нём отношением включения (см. пример из пункта 1.1.3.1) частично упорядочен, но не является линейно упорядоченным.

Элемент a частично упорядоченного множества называется *максимальным* (*минимальным*), если из $a \leq x$ ($x \leq a$) следует $a = x$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x \leq a$ ($a \leq x$) для всех $x \in A$.

Лемма 1.1.11

Частично упорядоченное множество имеет не более одного наибольшего (наименьшего) элемента.

Доказательство

Докажем утверждение для наибольшего элемента. Пусть на множестве A задан частичный порядок $\leq$. Предположим, что в A существуют два наибольших элемента a и b. Тогда для любого элемента x из A $x \leq a$, $x \leq b$. Так как a и b принадлежат A, то это отношения справедливы и для них: $b \leq a$, $a \leq b$. В силу антисимметричности $\leq$ отсюда следует $a = b$.

Доказательство единственности наименьшего элемента аналогично. ■

Соотношение между наибольшим (наименьшим) и максимальным (минимальным) элементами проясняет следующее утверждение.

Лемма 1.1.12

Наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества является единственным максимальным (минимальным).

Доказательство

Докажем утверждение для наибольшего элемента. Пусть $a \in$ $\in A$ — наибольший элемент частично упорядоченного отношением $\leq$ множества A. Предположим, что существует такой элемент $x \in A$, что $a \leq x$. Так как a — наибольший элемент A, то $x \leq a$. А значит, в силу симметричности $\leq$ отсюда следует $a = x$. Следовательно, a — максимальный элемент A.

Предположим теперь, что кроме наибольшего элемента a (единственного, как следует из леммы 1.1.11), существует другой максимальный элемент b. Тогда $b \le a$ в силу того, что a — наибольший элемент, а так как b — максимальный элемент, то $b = a$. ■

Замечание

Обратное утверждение в общем случае неверно, т. е. максимальный или минимальный элемент может не быть наибольшим (соответственно, наименьшим). Например, пусть множество A тривиально упорядочено отношением равенства, т. е. $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a = b$. В этом случае каждый элемент множества является как максимальным, так и минимальным, но не наибольшим и не наименьшим.

Следующая лемма даёт условие эквивалентности понятий максимального (минимального) и наибольшего (наименьшего) элементов.

Лемма 1.1.13

В линейно упорядоченном множестве элемент является наибольшим (наименьшим) тогда и только тогда, когда он максимален (минимален).

Доказательство

Пусть $\le$ — линейный порядок на A. Докажем лемму для наибольшего и максимального элементов. То, что наибольший элемент является максимальным, следует из леммы 1.1.12 (причём для этого достаточно частичного упорядочения).

Пусть a — максимальный элемент A. Докажем, что он является наибольшим. В силу линейности порядка для всех $x \in A$ либо $x \le a$, либо $a \le x$. Во втором случае $a = x$, так как a — максимальный элемент. Следовательно, для всех $x \in A$ верно отношение $x \le a$, т. е. a — наибольший элемент A. ■

Верхней (*нижней*) *гранью* подмножества B частично упорядоченного множества A называется такой элемент $a \in A$, что для любого $b \in B$ верно отношение $b \le a$ ($a \le b$). Понятно, что у подмножества может быть не одна верхняя или нижняя грань. Особое значение имеет наименьшая (наибольшая) из них. *Точной верхней* (*точной нижней*) *гранью* подмножества B множества A называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань B. Точная верхняя и нижняя грани множества B обозначаются $\sup B$ и $\inf B$, соответственно. Таким образом, точная верхняя (точная нижняя) грань подмножества является наименьшим (наибольшим) элементом множества верхних (нижних) граней. Из леммы 1.1.12 следует, что точная верхняя (точная нижняя) грань, в случае её существования в множестве A, единственна.

Примеры: если B — множество рациональных чисел из отрезка $A = [-1; 1]$, упорядоченное отношением сравнения чисел $\leq$, то ни наибольшего, ни максимального, ни наименьшего, ни минимального элементов в B нет, $\sup B = 1$, $\inf B = -1$; если взять

$$A = [0; 1],\ B = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

то ни минимального, ни наименьшего элементов в B нет, $\inf B = 0$, если же $A = (0; 1]$, то $\inf B$ в A не существует.

Линейный порядок на множестве A называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент. Множество A в этом случае — *вполне упорядоченное*. Примерами таких множеств являются $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, упорядоченные отношением $\leq$ сравнения чисел, множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел) с тем же упорядочением не являются вполне упорядоченными, так как в них нет наименьших элементов.

1.2. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ И ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

1.2.1. Основная формула метода включений и исключений и её применение

1.2.1.1. Формула включений и исключений

Пусть имеется (n)-множество, элементы которого могут обладать или не обладать совместными свойствами $p_1, p_2, \dots, p_m$. Обозначим через $\alpha(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s})$ количество элементов, обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}$ $(1 \leq i_1, \dots, i_s \leq m)$ (остальными свойствами эти элементы могут как обладать, так и не обладать), через $\alpha(p_1, \dots, p_s, \overline{p}_{s+1}, \dots, \overline{p}_m)$ — количество элементов со свойствами p_1, p_2, … , p_s, не обладающих остальными свойствами ($1 \le s \le m-1$), при $s = 0$ $\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_m)$ — число элементов, не обладающих ни одним из свойств, при $s = m$ $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_m)$ — количество элементов со всеми свойствами. Тогда $\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_m)$ вычисляется по *формуле включений и исключений*:

$$\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_m) = n - \sum_{i=1}^{m} \alpha(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le m} \alpha(p_i, p_j) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < l \le m} \alpha(p_i, p_j, p_l) + \dots +$$
$$+(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \alpha(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) + \dots +$$
$$+(-1)^m \alpha(p_1, p_2, \dots, p_m).$$

Докажем эту формулу методом полной математической индукции по числу свойств m. База индукции очевидна: $\alpha(\overline{p}_1) = n - -\alpha(p_1)$. Предположение индукции: при $m = k$ справедлива формула

$$\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_k) = n - \sum_{i=1}^{k} \alpha(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} \alpha(p_i, p_j) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < l \le k} \alpha(p_i, p_j, p_l) + \dots +$$
$$+(-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le k} \alpha(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}) + \dots +$$
$$+(-1)^k \alpha(p_1, p_2, \dots, p_k).$$

Делаем индукционный шаг. Добавим к свойствам p_1, p_2, … , p_k свойство p_{k+1} и докажем формулу

$$\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_k, \overline{p}_{k+1}) = n - \sum_{i=1}^{k+1} \alpha(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k+1} \alpha(p_i, p_j) -$$

$$-\sum_{1\le i<j<l\le k+1}\alpha(p_i,p_j,p_l)+\dots+$$
$$+(-1)^s\sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le k+1}\alpha(p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_s})+\dots+$$
$$+(-1)^{k+1}\alpha(p_1,p_2,\dots,p_{k+1}).$$

Рассмотрим множество элементов, обладающих свойством p_{k+1} (их $\alpha(p_{k+1})$). Согласно предположению индукции для этого множества верна формула

$$\alpha(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\dots,\overline{p}_k,p_{k+1})=\alpha(p_{k+1})-\sum_{i=1}^{k}\alpha(p_i,p_{k+1})+$$
$$+\sum_{1\le i<j\le k}\alpha(p_i,p_j,p_{k+1})-\sum_{1\le i<j<l\le k}\alpha(p_i,p_j,p_l,p_{k+1})+\dots+$$
$$+(-1)^s\sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le k}\alpha(p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_s},p_{k+1})+\dots+$$
$$+(-1)^k\alpha(p_1,p_2,\dots,p_k,p_{k+1}).$$

Теперь вычтем из индукционного предположения последнюю формулу. Нетрудно убедиться в том, что справа получится правая часть доказываемой формулы. А слева получится разность

$$\alpha(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\dots,\overline{p}_k)-\alpha(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\dots,\overline{p}_k,p_{k+1})=\alpha(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\dots,\overline{p}_k,\overline{p}_{k+1}),$$

что доказывает индукционный шаг. ■

В следующих пунктах приведены примеры применения формулы включений и исключений для решения задач комбинаторного анализа.

1.2.1.2. Число элементов объединения множеств

Пусть имеются конечные множества A_1, A_2, ... , A_n, известны мощности всех этих множеств, а также мощности их всевозможных пересечений. Найдём мощность объединения $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$.

Введём для элементов $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$ следующую систему свойств: свойство p_i означает, что элемент принадлежит множеству A_i $(1\le i\le n)$. Так как элементов $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$, не обладающих ни одним из свойств, нет, формула включений и исключений применительно к ним будет иметь вид

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots +$$
$$+(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$
$$+(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 0,$$

откуда следует формула

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots +$$
$$+(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$
$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \qquad (1.2.1)$$

В частности, для двух множеств A и B выведенная формула имеет вид

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

для трёх множеств A, B, C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$
$$+|A \cap B \cap C|.$$

Заметим, что если $A_i \cap A_j = \emptyset$ при всех неравных i, j от 1 до n, то формула (1.2.1) даёт правило суммы.

1.2.1.3. Беспорядочные перестановки

Пусть дан (n)-вектор с различными координатами. Для простоты изложения предположим, что он имеет вид $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$. Назовём *беспорядочной перестановкой* элементов этого вектора любой (n)-

вектор из элементов $1, 2, \dots, n$, в котором i-я координата не равна i. Очевидно, что каждой беспорядочной перестановке соответствует подстановка $f\colon A \to A$ (n)-множества $A = \{1, 2, \dots, n\}$, для которой $f(i) \neq i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Например, для множества $\{1, 2, 3\}$ имеются две беспорядочные перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим количество D_n беспорядочных перестановок. Введём для всех перестановок (как известно, их $n!$) систему n свойств: свойство p_i означает, что элемент i находится на i-м месте в векторе (или для подстановки f выполняется условие $f(i) = i$) ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда число элементов, обладающих k свойствами, равно $C_n^k (n-k)!$ (выбираем C_n^k способами k элементов, которые будут стоять на своих местах в перестановке (неподвижные элементы подстановки f), остальные $n-k$ элементов можно переставлять произвольно $(n-k)!$ способами). Тогда искомое количество беспорядочных перестановок равно $\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n)$. По формуле включений и исключений получаем

$$D_n = \alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n) = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - C_n^3 (n-3)! +$$

$$+ \dots + (-1)^n \cdot 1 = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) =$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}. \qquad (1.2.2)$$

Количество $D_n(r)$ (n)-векторов из элементов $1, 2, \dots, n$, в которых ровно r элементов остаются на своих местах, или число подстановок (n)-множества $A = \{1, 2, \dots, n\}$, имеющих ровно r неподвижных точек, можно найти с помощью выведенной формулы (1.2.2). Сначала выбираем r элементов, остающихся на своих местах, C_n^r способами. К остальным $n - r$ элементам применяем формулу (1.2.2). Получаем ответ:

$$D_n(r) = C_n^r (n-r)! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right) =$$

$$= \frac{n!}{r!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right) = \frac{n!}{r!}\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

1.2.1.4. Неподвижные элементы преобразований

Рассмотрим множество A^A всех функций $f: A \to A$, A — конечное (n)-множество. Такие функции также называют *преобразованиями* множества A. По аналогии с подстановками (см. предыдущий пункт) назовём *неподвижной точкой* преобразования $f \in A^A$ элемент $a \in A$, для которого $f(a) = a$. Обозначим через U_n число преобразований (n)-множества, не содержащих неподвижных элементов. С помощью формулы включений и исключений вычислим U_n. Определим для преобразований множества A (их число равно n^n) свойства p_1, p_2, ... , p_n: p_i заключается в том, что элемент $a_i \in A$ есть неподвижная точка преобразования. Вычислим количество функций $f \in A^A$, обладающих k свойствами. Очевидно, что число преобразований, у которых фиксированные k элементов a_{i_1}, a_{i_2}, ... , a_{i_k} являются неподвижными точками, равно количеству функций из $(n-k)$-множества $A \backslash \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, в A, т. е. n^{n-k}. Если учесть, что k остающихся неподвижными элементов можно выбрать C_n^k способами, то получим $C_n^k n^{n-k}$ преобразований, обладающих k свойствами. Теперь по формуле включений и исключений найдём число функций из A в A, не обладающих ни одним из свойств p_1, p_2, ... , p_n:

$$\alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n) = n^n - C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} - \cdots +$$
$$+ (-1)^k C_n^k n^{n-k} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot n.$$

Поскольку $U_n = \alpha(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n)$, получаем ответ:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k n^{n-k}.$$

Если рассматривать только биективные преобразования, т. е.

подстановки множества A, то ответ был получен в предыдущем пункте: число подстановок (n)-множеств A, не имеющих неподвижных элементов, равно

$$U_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1.2.1.5. Число сюръективных отображений

Пусть имеются (m)-множество A и (n)-множество B. Обозначим через $S(m, n)$ число сюръекций из A на B. Такие функции называют также *сюръективными отображениями* A на B. Вычислим $S(m, n)$ с помощью формулы включений и исключений. Введём для всех функций $f: A \to B$ систему свойств следующим образом: свойство p_i означает, что элемент b_i не входит в образ $f(A)$, т. е. b_i не является значением функции f ни при каком $a \in A$, $i = 1, 2 \dots, n$. Число отображений $f \in B^A$, обладающих k свойствами, равно $C_n^k (n-k)^m$ (сначала выбираем C_n^k способами k элементов $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}$ из множества B, не используемых в качестве значений функций, затем подсчитываем количество отображений из A в $(n-k)$-множество $B \backslash \{b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}\}$). Искомая величина $S(m, n)$ есть число функций, не обладающих ни одним из свойств $p_1, p_2, \dots, p_m$, поэтому с учётом того, что общее число рассматриваемых отображений равно n^m, по формуле включений и исключений получаем

$$S(m, n) = n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots +$$
$$+(-1)^k C_n^k (n-k)^m + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

1.2.1.6. Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для аргумента $n \in \mathbb{N}$ определяется как количество целых неотрицательных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Если использовать понятие вычета (пункт 2.1.1.5), то функция Эйлера равна количеству вычетов по модулю n в системе чисел $0, 1, \ldots, n$, взаимно простых с n.

Например, $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$, $\phi(5) = 4$ и так далее. Получим методом включения и исключения формулу для вычисления $\phi(n)$ при любом натуральном n.

Как известно из элементарной теории чисел, любое натуральное n можно единственным образом представить в виде произведения простых делителей: $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — положительные показатели степеней (напомним, что 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, поэтому ни одно из q_i не равно 1). Введём для натуральных чисел от 1 до n следующую систему свойств. Свойство p_i означает, что число делится на q_i, $1 \le i \le k$. Очевидно, что

$$\alpha(p_i) = \frac{n}{q_i}, 1 \le i \le k,$$

$$\alpha(p_i, p_j) = \frac{n}{q_i q_j}, 1 \le i < j \le k,$$

$$\vdots$$

$$\alpha(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) = \frac{n}{q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_s}}, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le k,$$

$$\vdots$$

$$\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \frac{n}{q_1 q_2 \cdots q_k}.$$

Значение функции $\phi(n)$ есть по определению количество чисел от 1 до n, не делящихся ни на одно из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$, т. е. $\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k})$. По формуле включений и исключений получаем

$$\phi(n) =$$

$$= n - \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{n}{q_i q_j} - \cdots + (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_s \le k} \frac{n}{q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_s}} +$$

$$+ \cdots + (-1)^k \frac{n}{q_1 q_2 \cdots q_k} =$$

$$= n\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{1}{q_i q_j} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k}\right) =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_k}\right).$$

Выведенная формула позволяет достаточно просто вычислять значение функции Эйлера. Из неё следует, что функция ϕ мультипликативна: если числа m и n взаимно просты ($d(m,n) = 1$, $d(m,n)$ — наибольший общий делитель m и n), то

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n).$$

Пусть $\phi_d(n)$ — число элементов среди вычетов $0, 1, \dots, n-1$, имеющих с n наибольший общий делитель, равный d, другими словами, количество чисел s от 0 до $n-1$, для которых $d(s,n) = d$. Тогда понятно, что $\phi_1(n) = \phi(n)$. Все вычеты, учитываемые в $\phi_d(n)$, имеют вид dd', причём $d(\,dd', n) = d$, поэтому $d\left(d', \frac{n}{d}\right) = 1$, $0 \le d' \le$ $\le \frac{n}{d} - 1$. Отсюда получаем

$$\phi_d(n) = \phi_1\left(\frac{n}{d}\right) = \phi\left(\frac{n}{d}\right). \qquad (1.2.3)$$

Пусть $d_1, d_2, \dots, d_t$ — все делители числа n (не обязательно простые или степени простых делителей), а $d_1', d_2', \dots, d_t'$ — такие числа, что $d_i d_i' = n$, $i = 1, \dots, t$. Тогда из равенства (1.2.3) следует

$$\phi_{d_i}(n) = \phi\left(\frac{n}{d_i}\right) = \phi_1\left(\frac{n}{d_i}\right) = \phi\left(\frac{n}{d_i}\right) = \phi(d_i').$$

Из последнего равенства получаем, что

$$\sum_{i=1}^{t} \phi(d_i') = \sum_{i=1}^{t} \phi_{d_i}(n), \qquad (1.2.4)$$

а поскольку в последней сумме учитываются $\phi_{d_i}(n)$ для всех делителей n, то очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{t} \phi_{d_i}(n) = n.$$

С учётом (1.2.4) из последнего соотношения получаем *формулу Гаус-*

са:

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n,$$

где суммирование ведётся по всем делителям d числа n.

1.2.1.7. Общие формулы метода

В общих формулах метода включений и исключений, из которых формула пункта 1.2.1.1 следует как частный случай, учитываются веса элементов. Пусть на элементах (n)-множества A определена весовая функция $\omega: A \to \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — некоторое числовое кольцо, значение функции $\omega(a_i)$ называется *весом* элемента $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$. Каждый из элементов A может обладать или не обладать некоторыми из совместных свойств $p_1, p_2, \dots, p_m$. Обозначим через $W(r)$ сумму весов элементов A, обладающих в точности r свойствами, а через $\overline{W}(r)$ — суммарный вес элементов с не менее чем r свойствами. Далее, пусть

$$V_0 = \sum_{i=1}^{n} \omega(a_i) \text{ —}$$

сумма весов всех элементов A;

$$V_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}),$$

где $N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ — суммарный вес элементов, обладающих фиксированными свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$W(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r V_k, \tag{1.2.5}$$

где $r = 0, 1, \dots, m$. Докажем эту формулу.

Действительно, веса элементов, обладающих ровно r свойствами, учитываются в сумме в правой части (1.2.5) только один раз (в величине V_r). Веса элементов с $t > r$ свойствами в каждой величине V_k, $r \le k \le m$, учитываются C_t^k раз. Поэтому суммарный вес элементов, обладающих ровно t свойствами, равен

$$\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}\,C_k^r C_t^k.$$

Используя равенство $C_t^k C_k^r = C_t^r C_{t-r}^{k-r}$ (оно известно из элементарной комбинаторики, его легко доказать комбинаторными рассуждениями и алгебраически, используя формулу числа сочетаний C_k^r), вычислим эту величину:

$$\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}\,C_k^r C_t^k = C_t^r\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}C_{t-r}^{k-r} = C_t^r\sum_{k=0}^{m-r}(-1)^k C_{t-r}^k.$$

Поскольку $t \le m$, а стало быть, $t - r \le m - r$, и $C_n^s = 0$ при $s > n$, то сумма в последнем выражении равна

$$\sum_{k=0}^{m-r}(-1)^k C_{t-r}^k = \sum_{k=0}^{t-r}(-1)^k C_{t-r}^k + \sum_{k=t-r+1}^{m-r}(-1)^k C_{t-r}^k = 0.$$

Здесь применено известное свойство биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0,$$

которое легко доказывается с помощью бинома Ньютона. Итак, суммарный вес элементов, обладающих ровно t свойствами ($t > r$), получился в правой части (1.2.5) равным нулю, что и доказывает (1.2.5).

Теперь докажем формулу для $\overline{W}(r)$:

$$\overline{W}(r) = \sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}\,C_{k-1}^{r-1}V_k. \qquad (1.2.6)$$

Очевидно, что $\overline{W}(r)$ можно выразить через $W(r)$:

$$\overline{W}(r) = \sum_{s=r}^{m}W(s) = \sum_{s=r}^{m}\sum_{k=s}^{m}(-1)^{k-s}\,C_k^s V_k = \sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}\,C_k^r V_k +$$

$$+\sum_{k=r+1}^{m}(-1)^{k-r-1}\,C_k^{r+1}V_k + \dots + V_m = V_r + V_{r+1}(-C_{r+1}^r + 1) +$$

$$+V_{r+2}(C_{r+2}^{r}-C_{r+2}^{r+1}+1)+\cdots+V_m=\sum_{k=r}^{m}V_k\sum_{s=r}^{k}(-1)^{k-s}\,C_k^s.$$

Остаётся вычислить сумму

$$\sum_{s=r}^{k}(-1)^{k-s}\,C_k^s=\sum_{s=0}^{k-r}(-1)^{k-s-r}C_k^{s+r}=\sum_{s=0}^{k-r}(-1)^{s}C_k^s.$$

Для этого рассмотрим тождество

$$(1-x)^k(1-x)^{-1}=(1-x)^{k-1}. \qquad (1.2.7)$$

Разложим $(1-x)^k$ и $(1-x)^{k-1}$ по формуле бинома Ньютона:

$$(1-x)^k=1-kx+C_k^2x^2-\cdots+(-1)^kx^k=\sum_{s=0}^{k}(-1)^sC_k^s\,;$$

$$(1-x)^{k-1}=1-(k-1)+C_{k-1}^2x^2-\cdots+(-1)^{k-1}x^{k-1}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^sC_{k-1}^s$$

Выражение $(1-x)^{-1}$, как известно, есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{s=0}^{\infty}x^s.$$

Подставим все три разложения в тождество (1.2.7):

$$\left(\sum_{s=0}^{k}(-1)^sC_k^s\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}x^s\right)=\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^sC_{k-1}^s.$$

Если перемножить многочлен и ряд слева по правилу свёртки, то коэффициент при x^{k-r} в произведении будет равен

$$\sum_{s=0}^{k-r}(-1)^sC_k^s\cdot 1^{k-r-s}=\sum_{s=0}^{k-r}(-1)^sC_k^s.$$

Этот же коэффициент в правой части тождества равен $(-1)^{k-r}C_{k-1}^{k-r}$. Отсюда получаем искомую сумму:

$$\sum_{s=0}^{k-r}(-1)^s C_k^s = (-1)^{k-r} C_{k-1}^{k-r},$$

следовательно,

$$\overline{W}(r) = \sum_{k=r}^{m} V_k \sum_{s=r}^{k}(-1)^{k-s}\, C_k^s =$$

$$= \sum_{k=r}^{m} V_k \sum_{s=0}^{k-r}(-1)^s C_k^s = \sum_{k=r}^{m} V_k (-1)^{k-r} C_{k-1}^{k-r} = \sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}\, C_{k-1}^{r-1} V_k.$$

Формула (1.2.6) доказана.

Соотношения (1.2.5) и (1.2.6) называются *общими формулами* метода включений и исключений. Если положить весовую функцию равной тождественной единице (веса всех элементов — единицы), то формула (1.2.5) при $r = 0$ превращается в формулу включений и исключений из пункта 1.2.1.1.

В следующем пункте будут выведены, в том числе с помощью метода включений и исключений, соотношения между взаимосвязанными комбинаторными величинами.

1.2.2. Формулы обращения

1.2.2.1. Формулы обращения с биномиальными коэффициентами

Сначала для знакомства с формулами обращения выведем таковые для биномиальных коэффициентов без использования метода включений и исключений.

Бесконечной последовательностью над множеством A будем называть вектор бесконечной длины $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$, координатами которого являются элементы A. Пусть элементы двух числовых последовательностей $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ и $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$ (нумерация индексов в интересах задачи начинается с нуля) связаны соотношением

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k, \qquad (1.2.8)$$

$n = 0,\ 2,\ \ldots$; C_n^k — число сочетаний без повторений, являющееся, как известно, коэффициентом разложения бинома Ньютона.

Тогда числа b_n выражаются через a_n формулой

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k a_k, \tag{1.2.9}$$

которая называется *формулой обращения* для (1.2.8), обратно, (1.2.9) — формула обращения для (1.2.8). Докажем справедливость (1.2.9). Подстановка a_n из (1.2.8) в (1.2.9) даёт следующее соотношение:

$$\begin{gathered}
b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s b_s = (-1)^n \cdot 1 + (-1)^{n-1} C_n^1 (1 + b_1) + \\
+(-1)^{n-2} C_n^2 (1 + 2b_1 + b_2) + (-1)^{n-3} C_n^3 (1 + 3b_1 + 3b_2 + b_3) + \\
+ \cdots + 1 \cdot (1 + C_n^1 b_1 + C_n^2 b_2 + \cdots + b_n) = \\
= 1 \cdot ((-1)^n \cdot 1 + (-1)^{n-1} C_n^1 + (-1)^{n-2} C_n^2 + \cdots + 1 \cdot C_n^n) + \\
+b_1((-1)^{n-1} C_n^1 + (-1)^{n-2} \cdot 2C_n^2 + (-1)^{n-3} \cdot 3C_n^3 + \cdots + 1 \cdot C_n^{n-1}) + \\
+ \cdots + b_n \cdot 1 = \sum_{s=0}^{n} b_s \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^{n-k-s}\, C_{s+k}^s C_n^{s+k} = \\
= \sum_{s=0}^{n} C_n^s b_s \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^{n-k-s}\, C_{n-s}^k.
\end{gathered} \tag{1.2.10}$$

Здесь опять была применена формула $C_m^k C_k^r = C_m^r C_{m-r}^{k-r}$. Вычислим внутреннюю сумму в последнем выражении:

$$\sum_{k=0}^{n-s} (-1)^{n-k-s}\, C_{n-s}^k = \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^k\, C_{n-s}^{n-s-k} = \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^k\, C_{n-s}^k =$$
$$= \begin{cases} 1, n = s, \\ 0, n \neq s. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что во внешней сумме (1.2.10) все слагаемые, кроме последнего, равного b_n, нулевые, что и доказывает формулу (1.2.9). Точно так же можно проверить, что подстановка b_n из (1.2.9) в формулу (1.2.8) приводит к тождеству. Формулы обращения (1.2.8), (1.2.9) доказаны.

Обобщим понятие биномиального коэффициента для произвольных показателей (индексов). Для этого разложим функцию $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^\alpha. \quad (1.2.11)$$

Ряд (1.2.11) называется *биномиальным рядом*, или *рядом Ньютона.* Его коэффициенты называются *биномиальными* и обозначаются, как и в случае целых неотрицательных индексов, C_α^n:

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

n — натуральное, α — произвольное действительное число, при $n=0$ полагаем $C_\alpha^0 = 1$, при $n<0$ — $C_\alpha^n = 0$. Для таких обобщённых биномиальных коэффициентов следующая пара соотношений является примером формул обращения:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha+k-1}^k\, b_{n-k}, \quad (1.2.12)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_\alpha^k\, a_{n-k}, \quad (1.2.13)$$

$n = 0,\ 1,\ \dots$. Числа a_n, b_n, как и было выше, являются элементами бесконечных последовательностей. Для доказательства (1.2.13) подставим в неё (1.2.12):

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_\alpha^k \sum_{s=0}^{n-k} C_{\alpha+s-1}^s\, b_{n-k-s} = 1 \cdot \sum_{s=0}^{n} C_{\alpha+s-1}^s\, b_{n-s} -$$
$$-C_\alpha^1 \sum_{s=0}^{n-1} C_{\alpha+s-1}^s\, b_{n-1-s} + C_\alpha^2 \sum_{s=0}^{n-2} C_{\alpha+s-1}^s\, b_{n-2-s} - \cdots +$$
$$+(-1)^n C_\alpha^n \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot (1 \cdot b_n + C_\alpha^1 b_{n-1} + \cdots + C_{\alpha+n-1}^n \cdot 1) -$$
$$-C_\alpha^1 (1 \cdot b_{n-1} + C_\alpha^1 b_{n-2} + \cdots + C_{\alpha+n-2}^{n-1} \cdot 1) +$$
$$+C_\alpha^2 (1 \cdot b_{n-2} + C_\alpha^1 b_{n-3} + \cdots + C_{\alpha+n-3}^{n-2} \cdot 1) - \cdots + (-1)^n C_\alpha^n \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= 1 \cdot (1 \cdot C_{\alpha+n-1}^n - C_\alpha^1 C_{\alpha+n-2}^{n-1} + C_\alpha^2 C_{\alpha+n-3}^{n-2} - \cdots + (-1)^n C_\alpha^n \cdot 1) +$$
$$+b_1 (1 \cdot C_{\alpha+n-2}^{n-1} - C_\alpha^1 C_{\alpha+n-3}^{n-2} + C_\alpha^2 C_{\alpha+n-4}^{n-3} - \cdots + (-1)^n C_\alpha^{n-1} \cdot 1) +$$

$$+\cdots+b_n\cdot 1\cdot 1=$$
$$=\sum_{s=0}^{n} b_s \sum_{k=0}^{n-s}(-1)^k\, C_\alpha^k C_{\alpha+n-k-s-1}^{n-s-k} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ b_n=\sum_{s=0}^{n} b_s \sum_{k=0}^{n-s}(-1)^k\, C_\alpha^k C_{\alpha+n-k-s-1}^{n-s-k}. \qquad (1.2.14)$$

Вычислим внутреннюю сумму в этом выражении. Для этого рассмотрим тождество

$$(1+x)^{-\alpha}(1+x)^{\alpha}=1.$$

Найдём разложение $(1+x)^{-\alpha}$ в ряд Ньютона:

$$(1+x)^{-\alpha}=1+\sum_{n=0}^{\infty} C_{-\alpha}^n x^n=$$
$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{\alpha+n-1}^n x^n.$$

Заметим, что при этом была выведена полезная формула $C_{-\alpha}^n = (-1)^n C_{\alpha+n-1}^n$, $n=0,\ 1,\ 2,\dots$. Разложение $(1+x)^{\alpha}$ в ряд Ньютона имеет вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n.$$

Теперь подставим оба разложения в рассматриваемое тождество, тогда в левой части получим произведение рядов:

$$\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{\alpha+n-1}^n x^n\right)\left(1+\sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n\right)=1.$$

По правилу свёртки находим коэффициент степенного ряда в произведении при x^{n-s}:

$$\sum_{k=0}^{n-s}(-1)^k C_{\alpha+k-1}^k C_\alpha^{n-s-k}=\sum_{k=0}^{n-s}(-1)^{n-s-k} C_{\alpha+n-s-k-1}^{n-s-k} C_\alpha^k=$$

$$= (-1)^{n-s} \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^k C_\alpha^k C_{\alpha+n-s-k-1}^{n-s-k}.$$

Из тождества следует, что этот коэффициент равен нулю при $n - s >$ > 0. Отсюда получаем, что искомая сумма равна 0, если $n > s$, и 1, если $n = s$. Поэтому в сумме (1.2.14) все слагаемые нулевые, кроме последнего, которое равно $b_n \cdot 1 = b_n$. Формула обращения (1.2.13) доказана. Аналогично доказывается обратная формула (1.2.12).

1.2.2.2. Обращение общих формул метода включений и исключений

В предыдущем пункте были приведены примеры формул обращения для величин, содержащих биномиальные коэффициенты. Рассмотрим теперь общие формулы метода включений и исключений и выведем подобные соотношения для них. Начнём с формулы (1.2.5) и выразим величины V_k через $W(r)$, $k, r = 0, 1, \dots, m$ (здесь мы имеем дело с конечными векторами $\langle V_0, V_1, \dots, V_m \rangle$, $\langle W(0), W(1), \dots, W(m) \rangle$).

Вычислим следующую сумму:

$$\sum_{r=k}^{m} C_r^k \, W(r) = \sum_{r=k}^{m} C_r^k \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} C_s^r V_s =$$

$$= \sum_{s=k}^{m} V_s \sum_{r=k}^{s} (-1)^{s-r} C_r^k \, C_s^r.$$

Здесь применена такая же перегруппировка слагаемых в двойной сумме, что и в предыдущих доказательствах. Далее, поскольку индексы биномиальных коэффициентов целые неотрицательные, имеет место формула $C_r^k C_s^r = C_s^k C_{s-k}^{r-k}$. С учётом этого продолжаем вычислять рассматриваемую сумму:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=k}^{m} C_r^k \, W(r) = \sum_{s=k}^{m} C_s^k V_s \sum_{r=k}^{s} (-1)^{s-r} C_{s-k}^{r-k} = \\ &= \sum_{s=k}^{m} C_s^k V_s \sum_{r=0}^{s-k} (-1)^{s-r-k} C_{s-k}^{r} = \sum_{s=k}^{m} (-1)^{s-k} C_s^k V_s \sum_{r=0}^{s-k} (-1)^r C_{s-k}^{r}. \end{aligned}\right\} \quad (1.2.15)$$

Поскольку

$$\sum_{r=0}^{s-k}(-1)^r C_{s-k}^r = \begin{cases}1, s = k,\\ 0, s > k,\end{cases}$$

то из (1.2.15) получаем, что вычисляемая сумма равна V_k, из чего следует формула обращения для (1.2.5):

$$V_k = \sum_{r=k}^{m} C_r^k \, W(r),$$

$k = 0, 1, \dots, m$.

Аналогично доказывается формула обращения для (1.2.6):

$$V_k = \sum_{r=k}^{m} C_{r-1}^{k-1} \, \overline{W}(r),$$

$k = 0, 1, \dots, m$, выражающая те же величины V_k через $\overline{W}(r)$.

1.2.2.3. Дзета-функция и функция Мёбиуса

Функция ζ: $A^2 \to \{0, 1\}$, где A — конечное частично упорядоченное множество, определяемое равенством

$$\zeta(\langle x, y\rangle) = \begin{cases}1, x \le y,\\ 0, x \nleq y,\end{cases}$$

$\langle x, y\rangle \in A^2$, называется *дзета-функцией*. Запись $x \nleq y$ означает, что отношение $x \le y$ неверно.

Функцией Мёбиуса называется такая функция μ: $A^2 \to \mathbb{Z}$, что

$$\mu(\langle x, y\rangle) = \begin{cases} 1, x = y,\\ -\sum\limits_{x \le z < y} \mu(\langle x, z\rangle), x < y,\\ 0, x \nleq y.\end{cases}$$

Запись $x < y$ означает, что $x \le y$ и $x \ne y$. Как видно, $\mu(\langle x, y\rangle)$ при $x < y$ вычисляется рекуррентно. Сначала полагаем $\mu(\langle x, x\rangle) = 1$ (это значение определено в силу рефлексивности отношения частичного порядка). Далее, если ни одного z, удовлетворяющего условиям $x \le z$ и $z < y$, нет, то $\mu(\langle x, y\rangle) = -1$, в противном случае находим наименьшее z, следующее по упорядоченности за x (такой элемент существует в силу конечности, а значит, дискретности A), и полагаем

$\mu(\langle x,z\rangle) = -1$, затем находим следующий элемент z, вычисляем $\mu(\langle x,z\rangle) = -(1-1) = 0$, и так далее, пока не будут исчерпаны все z, удовлетворяющие условиям $x \le z$, $z < y$.

Функция Мёбиуса играет важную роль при получении формул обращения для функций из заданного множества.

Теорема 1.2.1 (теорема обращения)

Пусть функции f и g определены на конечном частично упорядоченном множестве A, в котором существует наименьший элемент a, причём

$$f(x) = \sum_{a \le z \le x} g(z)$$

для всех $x \in A$. Тогда имеет место формула обращения

$$g(x) = \sum_{a \le z \le x} f(z)\mu(\langle z,x\rangle). \qquad (1.2.16)$$

Доказательство

Представим f, используя определение дзета-функции, в виде

$$f(x) = \sum_{u \ge a} g(u)\zeta(\langle u,x\rangle)$$

(напоминаем, что символом $\ge$ обозначается двойственный к $\le$ порядок $\le^{-1}$) и подставим в (1.2.16). Имеем

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \sum_{a \le z \le x} \left(\sum_{u \ge a} g(u)\zeta(\langle u,z\rangle) \right) \mu(\langle z,x\rangle) = \\ &= \sum_{u \ge a} g(u) \sum_{a \le z \le x} \zeta(\langle u,z\rangle)\, \mu(\langle z,x\rangle). \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.17)$$

Очевидно, что

$$\sum_{a \le z \le x} \zeta(\langle u,z\rangle)\, \mu(\langle z,x\rangle) = \begin{cases} 1, u = x, \\ 0, u \ne x. \end{cases}$$

Поэтому сумма в (1.2.17) имеет только одно ненулевое слагаемое, равное $g(x)$. Получили тождество, что доказывает теорему. ■

Если $A = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, упорядоченное отношением сравнения чисел, то функция Мёбиуса имеет вид

$$\mu(\langle x, y\rangle) = \begin{cases} 1, x = y, \\ -1, x = y - 1, \\ 0, x \neq y - 1. \end{cases}$$

Отсюда следуют формулы обращения

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k),$$

$$g(n) = f(n) - f(n-1).$$

Пусть теперь $A = \mathbb{N}$ — то же множество натуральных чисел, но упорядоченное отношением делимости, т. е. для $x, y \in \mathbb{N}$ $x \leq y$ в том случае, когда x делит y (y кратно x). Очевидно, что это отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, т. е. действительно является частичным порядком. Из определения функции Мёбиуса следует, что в этом случае

$$\left.\begin{aligned} \mu(\langle x, x\rangle) &= 1, \\ \mu(\langle x, y\rangle) &= -\sum_{\substack{x|z, z|y \\ x \neq y}} \mu(\langle x, z\rangle), \end{aligned}\right\} \tag{1.2.18}$$

здесь, как и выше, запись $x|y$ означает, что x является делителем y, т. е. в нашем случае $x \leq y$. С помощью (1.2.18) можно вывести формулу для вычисления функции Мёбиуса. Для этого сначала установим следующие утверждения.

Лемма 1.2.1

Для простого числа p при любом натуральном $k \geq 2$ имеет место равенство

$$\mu(\langle x, xp^k\rangle) = 0. \tag{1.2.19}$$

Доказательство

Во-первых, заметим, что из (1.2.18) следует

$$\left.\begin{aligned} \mu(\langle x, xp\rangle) &= -1, \\ \mu(\langle x, xp^2\rangle) &= -(1-1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.2.20}$$

при простом p. Теперь проведём индукцию по k. База индукции ($k =$ $= 2$) следует из равенства (1.2.20). Предположим, что при любом $2 \leq$

$\leq n \leq k$ верно $\mu(\langle x, xp^n \rangle) = 0$.

Тогда

$$\mu(\langle x, xp^{k+1} \rangle) = -\mu(\langle x, x \rangle) - \mu(\langle x, xp \rangle) - \mu(\langle x, xp^2 \rangle) - \cdots -$$
$$-\mu(\langle x, xp^k \rangle) = -1 + 1 + 0 + \cdots + 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Лемма 1.2.2

Для любых попарно неравных простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$

$$\mu(\langle x, xp_1 p_2 \cdots p_k \rangle) = (-1)^k. \qquad (1.2.21)$$

Доказательство

Применяем индукцию по k. База индукции ($k = 1$) следует из (20). Предполагаем, что для любого набора $n \leq k$ неравных простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ верно равенство

$$\mu(\langle x, xp_1 p_2 \cdots p_n \rangle) = (-1)^n.$$

Тогда для $k + 1$ простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$ имеем

$$\mu(\langle x, xp_1 p_2 \cdots p_k\, p_{k+1} \rangle) = -\mu(\langle x, x \rangle) - \mu(\langle x, p_1 \rangle) - \mu(\langle x, xp_2 \rangle) -$$
$$- \cdots - \mu(\langle x, xp_{k+1} \rangle) - \mu(\langle x, p_1 p_2 \rangle) - \cdots - \mu(\langle x, p_k p_{k+1} \rangle) - \cdots -$$
$$-\mu(\langle x, xp_1 p_2 \cdots p_k \rangle) - \cdots - \mu(\langle x, xp_1 p_2 \cdots p_{k-1}\, p_{k+1} \rangle) =$$
$$= -\left(1 + C_{k+1}^1(-1) + C_{k+1}^2(-1)^2 + \cdots + C_{k+1}^k(-1)^k\right) =$$
$$= -\left(1 + C_{k+1}^1(-1) + C_{k+1}^2(-1)^2 + \cdots + C_{k+1}^k(-1)^k + (-1)^{k+1}\right) +$$
$$+(-1)^{k+1} = -\left(1 + (-1)\right)^{k+1} + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}. \qquad \blacksquare$$

Теперь можно установить окончательную формулу для вычисления функции Мёбиуса:

$$\mu(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 1, x = y, \\ (-1)^k, y = xp_1 p_2 \cdots p_k, \\ 0, y \neq xp_1 p_2 \cdots p_k, \end{cases} \qquad (1.2.22)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — попарно различные простые числа. Действительно, из (1.2.18), (1.2.19) и (1.2.21) следует, что если хотя бы одно из чисел $s_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, то

$$\mu\left(\langle x, xp_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} \rangle\right) = -\mu(\langle x, x \rangle) - \mu(\langle x, p_1 \rangle) - \mu(\langle x, xp_2 \rangle) -$$
$$- \cdots - \mu(\langle x, xp_k \rangle) - \mu(\langle x, p_1 p_2 \rangle) - \cdots - \mu(\langle x, p_{k-1} p_k \rangle) - \cdots -$$

$$-\mu(\langle x, xp_1p_2\cdots p_k\rangle) - \sum_{\substack{\langle\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\rangle \\ 0\le\alpha_1\le s_1 \\ \vdots \\ 0\le\alpha_k\le s_k \\ \langle\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\rangle\ne\langle s_1,s_2,\dots,s_k\rangle}} \mu\left(\langle x, xp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\rangle\right).$$

Последняя сумма берётся по всем наборам $\langle\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\rangle$, в которых хотя бы одно из $\alpha_i > 1$. С помощью лемм 1.2.1, 1.2.2 можно убедиться в том, что все слагаемые в ней равны нулю. Поэтому, вычисляя далее, имеем:

$$\mu\left(\langle x, xp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_k^{s_k}\rangle\right) = -\mu(\langle x, x\rangle) - \mu(\langle x, p_1\rangle) - \mu(\langle x, xp_2\rangle) -$$
$$-\cdots-\mu(\langle x, xp_k\rangle) - \mu(\langle x, p_1p_2\rangle) - \cdots - \mu(\langle x, p_{k-1}p_k\rangle) - \cdots -$$
$$-\mu(\langle x, xp_1p_2\cdots p_k\rangle) =$$
$$= -(1 + C_k^1(-1) + C_k^2(-1)^2 + \cdots + (-1)^k) = -(1-1)^k = 0.$$

Учитывая равенство (1.2.21), убеждаемся в справедливости (1.2.22).

Пусть функции f и g связаны соотношением

$$f(x) = \sum_{d|x} g(d).$$

Тогда по теореме обращения получаем

$$g(x) = \sum_{d|x} \mu(\langle d, x\rangle) f(d).$$

В теории чисел известна функция Мёбиуса от одного натурального аргумента $\mu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, определяемая равенством

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1, \\ (-1)^k, n = p_1p_2\cdots p_k, \\ 0, n \ne p_1p_2\cdots p_k, \end{cases} \tag{1.2.23}$$

где p_1, p_2, … , p_k — попарно различные простые числа. Сравнивая (1.2.22) и (1.2.23), приходим к выводу, что

$$\mu(d, n) = \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Поэтому формула обращения для такого варианта функции Мёбиуса принимает вид

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f\,(d).$$

1.2.2.4. Обращение мер на множествах

Пусть A — конечное множество. Введём на булеане 2^A отношением включения $\subseteq$ частичный порядок: для любых множеств X, $Y \in 2^A$ $X \le Y$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$. Вычислим в этом случае функцию Мёбиуса. Из её определения следует, что

$$\mu(\langle X, Y\rangle) = \begin{cases} 1, X = Y, \\ -\sum\limits_{X \le V < Y} \mu(\langle X, V\rangle), X < Y, \\ 0, X \nleq Y. \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Пусть имеются n элементов y_1, y_2, … , y_n множества A, не принадлежащих $X \in 2^A$. Индукцией по n покажем, что для них

$$\mu(\langle X, X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}\rangle) = (-1)^n. \tag{1.2.25}$$

База индукции ($n = 1$) следует из равенства (1.2.24):

$$\mu(\langle X, X \cup \{y\}\rangle) = -\mu(\langle X, X\rangle) = -1,$$

так как в силу конечности A других подмножеств $V \subset X \cup \{y\}$, удовлетворяющих условию $X \le V < X \cup \{y\}$, кроме X, нет. Предположение индукции: для всех натуральных $k \le n$ верна формула

$$\mu(\langle X, X \cup Y_k\rangle) = (-1)^k,$$

где Y_k — (k)-множество элементов A, не принадлежащих X. Делаем индукционный шаг: вычисляем функцию Мёбиуса для пары $\langle X, Y_{n+1}\rangle$, где $Y_{n+1} = \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$. Из формулы (1.2.24) получаем

$$\mu(\langle X, X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}\rangle) =$$

$$= -\left(\mu(\langle X, X\rangle) + \sum_{i=1}^{n+1} \mu(\langle X, X \cup \{y_i\}\rangle) + \sum_{1 \le i < j \le n+1} \mu\big(\langle X, X \cup \{y_i, y_j\}\rangle\big) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_n \le n+1} \mu\big(\langle X, X \cup \{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\}\rangle\big)\right).$$

Используя предположение индукции, приходим к нужному результату:

$$\mu(\langle X, X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}\rangle) =$$
$$= -(1 + (n+1)(-1) + C_{n+1}^2(-1)^2 + \dots + C_{n+1}^n(-1)^n) =$$
$$= -\left(\left(1 + (-1)\right)^n - (-1)^{n+1}\right) = (-1)^{n+1}.$$

Индукционный шаг доказан.

Из формулы (1.2.25) следует, что в случае конечных X и Y

$$\mu(\langle X, Y\rangle) = (-1)^{|Y|-|X|}. \tag{1.2.26}$$

Пусть на булеане 2^A определены функции f и g такие, что

$$f(X) = \sum_{V \le X} g(V).$$

Тогда из теоремы обращения следует

$$g(X) = \sum_{V \le X} f(V)\mu(\langle V, X\rangle).$$

Подставляя в это выражение формулу (1.2.26), получим

$$g(X) = \sum_{V \le X} (-1)^{|X|-|V|} f(V).$$

В правой части последнего равенства можно сумму разбить на отдельные части, соответствующие мощностям множества V от $|X|$ до 0. Приходим к формуле

$$\left.\begin{aligned} g(X) = f(X) - \sum_{\substack{V<X \\ |V|=|X|-1}} f(V) + \sum_{\substack{V<X \\ |V|=|X|-2}} f(V) - \dots + \\ +(-1)^k \sum_{\substack{V<X \\ |V|=|X|-k}} f(V) + \dots + (-1)^{|X|} f(\emptyset). \end{aligned}\right\} \tag{1.2.27}$$

Из неё могут быть получены различные варианты формул включения и исключения, если ввести на конечном множестве A меру. В общем-то, и сама формула (1.2.27) имеет ту же структуру, что и выведенные в предыдущем пункте формулы метода включений и исключений.

Пусть каждому элементу $x \in A$ приписана некоторая *числовая мера* $\mathfrak{m}(x)$ — неотрицательное число, другими словами, на элементах A определена функция $\mathfrak{m}: A \to [0;\ \infty)$. Тогда *мерой множества* $X \in$ $\in 2^A$ называется числовая функция $\mathfrak{m}: 2^A \to [0;\ \infty)$, удовлетворяющая условиям

$$\mathfrak{m}(X)=\begin{cases}0, X=\emptyset,\\ \sum_{x\in X}\mathfrak{m}(x), X\neq\emptyset.\end{cases}$$

Заметим, что такое упрощённое определение меры возможно только для конечных множеств. В общем случае (бесконечных и бессчётных множеств) необходимо применять понятие абстрактной σ-аддитивной меры.

Пусть элементы (n)-множества A могут обладать или не обладать каждым из попарно совместных (в общем случае) свойств p_1, p_2, … , p_m. На булеане 2^A задана мера $\mathfrak{m}$. Обозначим через P некоторое подмножество множества свойств $P_m=\{p_1,p_2,\dots,p_m\}$. Будем говорить, что элемент $x\in A$ обладает (P)-свойством, если он обладает всеми свойствами из P. Пусть $g(P)$ — мера множества элементов A, обладающих $(\overline{P})$-свойством, где $\overline{P}=P_m\backslash P$; $f(P)$ — суммарная мера тех элементов, которые обладают $(\overline{P})$-свойством и, может быть, другими свойствами из P. Тогда очевидно, что

$$f(P)=\sum_{V\leq P}g(V). \tag{1.2.28}$$

Применяя к (1.2.28) формулу обращения (1.2.27), получаем при $P=P_m$:

$$\left.\begin{aligned} g(P_m)=\sum_{V\leq P_m}(-1)^{m-|V|}f(V)=\mathfrak{m}(A)-\\ -\sum_{\substack{V<P_m\\|V|=m-1}}f(V)+\dots+(-1)^k\sum_{\substack{V<P_m\\|V|=m-k}}f(V)+\dots+(-1)^m f(\emptyset).\end{aligned}\right\} \tag{1.2.29}$$

Эта формула представляет собой вариант формулы включений и исключений, содержащий меры множеств. Здесь $g(P_m)$ — мера множества элементов A, не обладающих ни одним из свойств p_1, p_2, … , p_m, $f(V)$ — суммарная мера элементов, обладающих свойствами из $P_m\backslash V$ и, возможно, некоторыми свойствами из V, таким образом, $f(\emptyset)$ — мера элементов со всеми свойствами из P_m, $f(P_m)==\mathfrak{m}(A)$. Если меры всех элементов A взять равными единице, то мера множества равна его мощности и (1.2.29) превращается в основную формулу метода включений и исключений из пункта 1.2.1.1.

1.3. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

1.3.1. Алгебра производящих функций

1.3.1.1. Классы производящих функций

Математический аппарат используемых в комбинаторном анализе производящих функций основан на теории формальных степенных рядов. Поэтому для умелого применения метода производящих функций к решению комбинаторных задач надо овладеть техникой обращения со степенными рядами.

Введём понятие производящей функции. Пусть $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ — конечная или бесконечная последовательность чисел. Конечный вектор $\langle a_0, a_1, \dots, a_N \rangle$ будем обозначать $\{a_n\}_{n=0}^{N}$, бесконечный — $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (или просто $\{a_n\}$). В комбинаторном анализе применяются два основных класса производящих функций последовательностей чисел: собственно производящие функции и экспоненциальные производящие функции. С первым классом связаны неупорядоченные выборки (множества), со вторым — векторы.

Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется степенной ряд

$$F_a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

В случае конечной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{N}$ ряд вырождается в многочлен $F_a(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$. Если ряд сходится к некоторой функции f_a, последняя также называется производящей для $\{a_n\}$. В задачах на вычисление производящих функций имеется в виду именно f_a в качестве решения, т. е. найти производящую функцию значит вычислить сумму ряда F_a в области его сходимости. Последовательность чисел однозначно определяет производящую функцию, обратное же верно не всегда, а лишь в случае сходимости степенного ряда в некотором круге положительного радиуса в комплексной плоскости.

Экспоненциальной производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется степенной (экспоненциальный) ряд

$$E_a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

В случае сходимости его сумма e_a также называется экспоненциальной производящей функцией.

Вычислим последовательности, соответствующие некоторым наиболее часто встречающимся в комбинаторных задачах производящим функциям.

Лемма 1.3.1

Следующие функции f_a являются производящими для последовательностей $\{a_n\}$:

1) $f_a(z) = (p + qz)^{-1}$, $a_n = \frac{(-1)^n q^n}{p^{n+1}}$, p, q — заданные действительные числа, $q \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$;

2) $f_a(z) = (p + qz)^{-m}$, $a_n = (-1)^n C_{m+n-1}^n \frac{q^n}{p^{m+n}}$, p, q — заданные действительные числа, $q \neq 0$, m — натуральное число, $n \in \mathbb{N}_0$;

3) $f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-1}$, p, q — заданные действительные числа, тогда:

а) $a_n = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1^{n+1}} - \frac{1}{\alpha_2^{n+1}}\right)$, если дискриминант квадратного трёхчлена $z^2 + qz + p$ положителен, α_1, α_2 — его корни, $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $a_n = \frac{n+1}{\alpha^{n+2}}$, если дискриминант квадратного трёхчлена $z^2 + +qz + p$ равен нулю, α — его единственный корень, $n \in \mathbb{N}_0$;

в) $a_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\beta\rho^{n+1}}$, если дискриминант отрицателен, $\alpha \pm i\beta$ — комплексно сопряжённые корни квадратного трёхчлена $z^2 + qz + p$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ — модуль, $\varphi = \arg(\alpha + i\beta)$ — аргумент (главное значение) комплексного числа $\alpha + i\beta$, i — мнимая единица, $n \in \mathbb{N}_0$;

4) $f_a(z)=(p+qz+z^2)^{-m}$, p, q — заданные действительные числа, m — натуральное число, тогда:

а) если дискриминант трёхчлена z^2+qz+p неотрицателен, то

$$a_n=\sum_{s=0}^{n}\frac{C_{m+s-1}^{s}C_{m+n-s-1}^{m-s}}{\alpha_1^{m+s}\alpha_2^{m+n-s}},$$

где α_1, α_2 — его корни, $n\in\mathbb{N}_0$;

б) если дискриминант отрицателен, то

$$a_n=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^{2m}}, n=0,\\ \dfrac{2}{\rho^{2(m+k)+1}}\sum\limits_{s=0}^{k}C_{m+s-1}^{s}C_{m+2k-s}^{2k-s+1}\cos(2(k-s)+1)\varphi, n=2k+1,\\ \dfrac{2}{\rho^{2(m+k)}}\sum\limits_{s=0}^{k-1}C_{m+s-1}^{s}C_{m+2k-s-1}^{2k-s}\cos 2(k-s)\varphi+\\ +\dfrac{\left(C_{m+k-1}^{k}\right)^2}{\rho^{2(m+k)}}, n=2k, k>0,\end{cases}$$

$$k\in\mathbb{N}_0.$$

Доказательство

1) Если $p=0$, то функция f не разлагается в ряд по неотрицательным степеням z, поэтому полагаем $p\neq 0$. Применяя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\left.\begin{aligned}f_a(z)=(p+qz)^{-1}=p^{-1}\left(1+\frac{q}{p}z\right)^{-1}=\\ =p^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{q}{p}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{p^{n+1}}z^n,\end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

откуда и следует формула для a_n.

2) Снова предполагаем, что $p\neq 0$. Для получения доказываемой формулы применим разложение в ряд Ньютона:

$$f_a(z)=(p+qz)^{-m}=p^{-m}\left(1+\frac{q}{p}z\right)^{-m}=$$

$$= p^{-m}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-m}^{n}\left(\frac{q}{p}z\right)^{n}\right) = p^{-m}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} C_{m+n-1}^{n}\left(\frac{q}{p}z\right)^{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} C_{m+n-1}^{n}\frac{q^{n}}{p^{m+n}}z^{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} C_{m+n-1}^{n}\frac{q^{n}}{p^{m+n}}z^{n} \qquad (1.3.2)$$

(см. 1.2.2.1). Заметим, что доказанный выше случай является частным случаем полученного разложения при $m = 1$.

3) Чтобы функция разлагалась в ряд по неотрицательным степеням z, предполагаем, что $p \neq 0$.

а) Корни α_1 и α_2 квадратного трёхчлена $z^2 + qz + p$ различны и среди них нет нулевых, поскольку $p \neq 0$. Тогда, учитывая, что $z^2 + {}$ $+ qz + p = (\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)$, имеем

$$f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-1} = (\alpha_1 - z)^{-1}(\alpha_2 - z)^{-1} =$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}((\alpha_1 - z)^{-1} - (\alpha_2 - z)^{-1}) =$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1^{n+1}} - \frac{1}{\alpha_2^{n+1}}\right)z^{n}$$

(здесь осуществлено разложение дробно рациональной функции на сумму элементарных дробей методом неопределённых коэффициентов, и использован доказанный результат (1.3.1)). Отсюда и получается формула для a_n.

б) Квадратный трёхчлен имеет единственный корень α кратности 2. Тогда

$$f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-1} = (\alpha - z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\alpha^{n+2}}z^{n}$$

(здесь использован результат (1.3.2) при $m = 2$).

в) Трёхчлен $z^2 + qz + p$ имеет пару комплексно сопряжённых корней $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Имеем

$$f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-1} = (\alpha + i\beta - z)^{-1}(\alpha - i\beta - z)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2i\beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha - i\beta)^{n+1}}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha + i\beta)^{n+1}}z^n\right)$$

(здесь также функция была представлена в виде суммы элементарных дробей, и применено разложение в ряд (1.3.1)). Запишем комплексные корни в тригонометрической форме:

$$\alpha \pm i\beta = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

где $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\varphi = \arg(\alpha + i\beta)$ — соответственно модуль и аргумент (главное значение) комплексного числа $\alpha + i\beta$. Тогда по формуле Муавра $(\alpha \pm i\beta)^m = \rho^m(\cos m\varphi \pm i\sin m\varphi)$. Поэтому

$$(p + qz + z^2)^{-1} = \frac{1}{2i\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{n+1}}\left(\frac{1}{\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi}\right)z^n = \frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\varphi}{\rho^{n+1}}z^n.$$

4) Снова предполагаем, что $p \neq 0$.

а) Пусть α_1, α_2 — действительные корни трёхчлена $z^2 + qz + p$ (если дискриминант нулевой, то $\alpha_1 = \alpha_2$). Тогда, используя результат (1.3.2), имеем

$$f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-m} = (\alpha_1 - z)^{-m}(\alpha_2 - z)^{-m} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+n-1}^{n}}{\alpha_1^{m+n}}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+n-1}^{n}}{\alpha_2^{m+n}}z^n\right).$$

Произведение степенных рядов представляет собой степенной ряд, коэффициенты которого находятся по правилу свёртки. Поэтому

$$f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-m} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+n-1}^{n}}{\alpha_1^{m+n}}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+n-1}^{n}}{\alpha_2^{m+n}}z^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где

$$a_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s}}{\alpha_1^{m+s}} \cdot \frac{C_{m+n-s-1}^{s}}{\alpha_1^{m+n-s}}.$$

б) Пусть $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ — комплексные корни трёхчлена, ρ, φ — модуль и главное значение аргумента числа $\alpha + i\beta$. Тогда

$$f_a(z) = (p + qz + z^2)^{-m} = (\alpha_1 - z)^{-m}(\alpha_2 - z)^{-m} =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{m+n-1}^{n}}{(\alpha + i\beta)^{m+n}} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{m+n-1}^{n}}{(\alpha - i\beta)^{m+n}} z^n\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s}}{(\alpha + i\beta)^{m+s}} \cdot \frac{C_{m+n-s-1}^{n-s}}{(\alpha - i\beta)^{m+n-s}}\right) z^n.$$

Отсюда

$$a_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{(\alpha + i\beta)^{m+s}(\alpha - i\beta)^{m+n-s}} =$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{(\alpha + i\beta)^{m}(\alpha - i\beta)^{m}(\alpha + i\beta)^{s}(\alpha - i\beta)^{n-s}} =$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{\rho^{2m}\rho^{n}(\cos s\varphi + i \sin s\varphi)(\cos(n-s)\varphi - i\sin(n-s)\varphi)} =$$
$$= \frac{1}{\rho^{2m+n}} \sum_{s=0}^{n} \frac{C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}}{\cos(n-2s)\varphi - i\sin(n-2s)\varphi} =$$
$$= \frac{1}{\rho^{2m+n}} \sum_{s=0}^{n} C_{m+s-1}^{s} C_{m+n-s-1}^{n-s}(\cos(n-2s)\varphi + i\sin(n-2s)\varphi).$$

Можно заметить, что симметричные относительно середины суммы слагаемые в полученном выражении комплексно сопряжены (это проверяется, например, подстановкой в слагаемое вместо s индекса $n - -s$). Поэтому, если $n = 2k + 1$ нечётное, то

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{1}{\rho^{2(m+k)+1}} \sum_{s=0}^{2k+1} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s}^{2k-s+1} \times$$
$$\times (\cos(2(k-s)+1)\varphi + i\sin(2(k-s)+1)\varphi) =$$

$$= \frac{2}{\rho^{2(m+k)+1}} \sum_{s=0}^{k} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s}^{2k-s+1} \cos(2(k-s)+1)\,\varphi.$$

Если $n = 2k$ чётное ($k > 0$), то

$$a_n = a_{2k} = \frac{1}{\rho^{2(m+k)}} \sum_{s=0}^{2k} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s-1}^{2k-s} \times$$

$$\times (\cos 2(k-s)\varphi + i \sin 2(k-s)\varphi) =$$

$$= \frac{2}{\rho^{2(m+k)}} \sum_{s=0}^{k-1} C_{m+s-1}^{s} C_{m+2k-s-1}^{2k-s} \cos 2(k-s)\varphi + \frac{\left(C_{m+k-1}^{k}\right)^2}{\rho^{2(m+k)}}.$$

Наконец, при $n = 0$ $a_n = \frac{1}{\rho^{2m}}$. ■

Примеры:

1) $f_a(z) = \frac{1}{1+3z}$;

$$\frac{1}{1+3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n z^n \Rightarrow\ a_n = (-1)^n \cdot 3^n\,, n \in \mathbb{N}_0;$$

2) $f_a(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$;

$$\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{9\left(1 - \frac{1}{3}z\right)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{n+1}^{n} \frac{1}{(-3)^n} z^n =$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+2}} z^n\ \Rightarrow\ a_n = \frac{n+1}{3^{n+2}}, n \in \mathbb{N}_0;$$

3) $f_a(z) = \frac{1}{z^2-z-2}$;

$$\frac{1}{z^2 - z - 2} = -\frac{1}{(2-z)(1+z)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1+z}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right) z^n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right), n \in \mathbb{N}_0;$$

4) $f_a(z) = \frac{1}{4+3z^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}+z^2}\ \Rightarrow$

$$\frac{1}{4+3z^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4}z^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}z^2\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n z^{2n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{\frac{n}{2}}}{4^{\frac{n}{2}+1}}z^{2n}\ \Rightarrow\ a_n=\begin{cases}\frac{(-3)^{\frac{n}{2}}}{4^{\frac{n}{2}+1}}, n=2k, & k\in\mathbb{N}_0;\\ 0, n=2k+1,\end{cases}$$

решим этот пример также с помощью леммы 1.3.1. Представим функцию в виде

$$f_a(z)=\frac{1}{4+3z^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}+z^2}.$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}=\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n+2}}\cos\frac{\pi n}{2};$$

учитывая, что $\cos\frac{\pi n}{2}=0$ при n нечётном и $\cos\frac{\pi n}{2}=\cos\pi k=(-1)^k$ при $n=2k$, приходим к полученному выше ответу;

5) $f_a(z)=\frac{1}{(z^2+z+1)^3}$. Пусть α_1, α_2 — корни квадратного трёхчлена z^2+z+1, по теореме Виета $\alpha_1\alpha_2=1$, следовательно, $\alpha_1^{-1}=\alpha_2$, $\alpha_2^{-1}=\alpha_1$. Тогда имеем

$$f_a(z)=\frac{1}{(z^2+z+1)^3}=\frac{1}{(\alpha_1-z)^3}\cdot\frac{1}{(\alpha_2-z)^3}=$$

$$=\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha_1}z\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha_2}z\right)^3}=\frac{1}{(1-\alpha_1 z)^3}\cdot\frac{1}{(1-\alpha_2 z)^3}.$$

Теперь разложим каждую дробь в степенной ряд по формуле и применим правило умножения рядов:

$$\frac{1}{(z^2+z+1)^3}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^{n}\alpha_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^{n}\alpha_2^n z^n\right)=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha_2^n z^n\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\alpha_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\alpha_2^n z^n\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\,\alpha_1^s\alpha_2^{n-s}\right)z^n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_n = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\alpha_1^s\alpha_2^{n-s}.$$

Так как $\alpha_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$, то далее

$$a_n = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}s + i\sin\frac{2\pi}{3}s\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}(n-s) - i\sin\frac{2\pi}{3}(n-s)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}s\cos\frac{2\pi}{3}(n-s) + \sin\frac{2\pi}{3}s\sin\frac{2\pi}{3}(n-s) +\right.$$

$$\left.+i\left(\sin\frac{2\pi}{3}s\cos\frac{2\pi}{3}(n-s) - \cos\frac{2\pi}{3}s\sin\frac{2\pi}{3}(n-s)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(n-2s) + i\sin\frac{2\pi}{3}(n-2s)\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_n = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}(s+1)(s+2)(n-s+1)(n-s+2)\times \\ \times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(n-2s) + i\sin\frac{2\pi}{3}(n-2s)\right). \end{aligned}\right\} \quad (1.3.3)$$

Слагаемые в последней сумме, симметричные относительно её середины, комплексно сопряжены, поэтому для приведения ответа к действительному виду надо рассмотреть отдельно случаи чётного и не-чётного n. При $n = 2k + 1$ (n нечётно, число слагаемых $n + 1 = 2k + 2$ чётно)

$$a_{2k+1} = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3) \times \right.$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1) + i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1)\right) +$$
$$+\sum_{s=k+1}^{2k+1}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3) \times$$
$$\left.\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1) + i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1)\right)\right).$$

Если во второй сумме заменить индекс s на $s' = n - s = 2k + 1 - s$, то её можно представить в виде

$$\sum_{s'=0}^{k}(2k-s'+2)(2k-s'+3)(s'+1)(s'+2) \times$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s')+1) - i\sin\frac{2\pi}{3}(2(k-s')+1)\right).$$

Теперь обе суммы можно объединить в одну:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3) \times$$
$$\times\cos\frac{2\pi}{3}(2(k-s)+1).$$

Аналогично получаем ответ при $n = 2k$, $k > 0$ (n чётно, число слагаемых $n + 1 = 2k + 1$ нечётно):

$$a_{2k} = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{k-1}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2) \times \right.$$
$$\times\left(\cos\frac{4\pi}{3}(k-s) + i\sin\frac{4\pi}{3}(k-s)\right) +$$
$$+\sum_{s=k+1}^{2k}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2) \times$$

$$\times\left(\cos\frac{4\pi}{3}(k-s)+i\sin\frac{4\pi}{3}(k-s)\right)+(k+1)^2(k+2)^2\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2)\cos\frac{4\pi}{3}(k-s)+$$

$$+\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.$$

Наконец, при $n=0$ по формуле (1.3.3) находим, что $a_0=1$. Получаем окончательный ответ этого примера:

$$a_n=\begin{cases} 1, n=0, \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{k}(s+1)(s+2)(2k-s+2)(2k-s+3)\times \\ \times\cos\dfrac{2\pi}{3}(2(k-s)+1), n=2k+1, \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{k-1}(s+1)(s+2)(2k-s+1)(2k-s+2)\cos\dfrac{4\pi}{3}(k-s)+ \\ +\dfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2, n=2k, k>0, \end{cases}$$

$$k\in\mathbb{N}_0.$$

Лемма 1.3.2

Следующие функции e_a являются экспоненциальными производящими для последовательностей $\{e_n\}$:

1) $e_a(z)=e^{\alpha z}$, $a_n=\alpha^n$, $n\in\mathbb{N}_0$, α — заданное действительное число;

2) $e_a(z)=(p+qz)^{-m}$, $a_n=(-1)^n A_{m+n-1}^n\frac{q^n}{p^{m+n}}$, $n\in\mathbb{N}_0$, p и q — заданные числа, m — натуральное число.

Доказательство

1) Применим разложение $e^{\alpha z}$ в степенной ряд:

$$e^{\alpha z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}z^n,$$

откуда и следует, что $a_n = \alpha^n$.

2) Полагаем $p \neq 0$ (в противном случае функция $(p+qz)^{-m}$ не разлагается в ряд с неотрицательными степенями z). Применяя разложение (1.3.2), имеем

$$e_a(z) = (p+qz)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{m+n-1}^n \frac{q^n}{p^{m+n}} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{m+n-1}^n n! \frac{q^n}{p^{m+n}} \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{A_{m+n-1}^n p^{m+n}} \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad \blacksquare$$

1.3.1.2. Операции над производящими функциями

Рассматривая производящие функции как степенные ряды, можно определить операции их сложения, умножения на константу, перемножения и деления. Пусть F_a, F_b — производящие функции последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, соответственно. *Суммой* F_a, F_b называется производящая функция последовательности $\{a_n + b_n\}$:

$$F_{a+b}(z) = F_a(z) + F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Произведением производящей функции F_a на число c называется производящая функция последовательности $\{ca_n\}$:

$$F_{ca}(z) = cF_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n z^n.$$

Нулём относительно сложения в исчислении производящих функций является нулевой ряд $\mathfrak{o}$ — производящая функция нулевой последовательности. Очевидно, что

$$F_a(z) + \mathfrak{o}(z) = \mathfrak{o}(z) + F_a(z) = F_a(z)$$

для любого ряда F_a. Обратным относительно сложения для ряда F_a будет ряд $-F_a(z) = (-1)F_a(z)$:

$$F_a(z) + \big(-F_a(z)\big) = \big(-F_a(z)\big) + F_a(z) = \mathfrak{o}(z).$$

Аналогично определяются эти операции для экспоненциальных производящих функций. Пусть E_a, E_b — экспоненциальные производящие функции последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, соответственно. *Суммой E_a и E_b* называется ряд

$$E_{a+b}(z) = E_a(z) + E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \frac{z^n}{n!},$$

а произведением константы c на ряд E_a — ряд

$$E_{ca}(z) = cE_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n \frac{z^n}{n!}.$$

Очевидно, что 0, $-E_a(z) = (-1)E_a(z)$ — соответственно нулевой и противоположный относительно сложения элементы исчисления алгебры производящих функций.

Умножение производящих функций определяется как обобщение правила свёртки для многочленов на случай бесконечных сумм. Именно, *произведением производящих функций F_a, F_b* называется ряд

$$F_{ab}(z) = F_a(z) \cdot F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_0 = a_0 b_0,$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$
$$\vdots$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s},$$
$$\vdots$$

Произведением экспоненциальных производящих функций E_a, E_b называется ряд

$$E_{ab}(z) = E_a(z) \cdot E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!},$$

где

$$c_0 = a_0 b_0,$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$
$$c_2 = a_0 b_2 + 2a_1 b_1 + a_2 b_0,$$
$$\vdots$$
$$c_n = a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s b_{n-s},$$
$$\vdots$$

Это правило умножения следует из общего правила перемножения производящих функций. Действительно, если перемножить ряды

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!},$$
$$E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$$

по обобщённому правилу свёртки, то получим:

$$E_{ab}(z) = E_a(z) \cdot E_b(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{s!} \cdot \frac{b_{n-s}}{(n-s)!}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} a_s b_{n-s}\right) \frac{z^n}{n!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{n} C_n^s\, a_s b_{n-s}\right) \frac{z^n}{n!}.$$

Единицей относительно умножения является ряд I — производящая (экспоненциальная производящая) функция последовательности $\langle 1, 0, 0, \dots \rangle$. Нетрудно проверить, что

$$F_a(z) \cdot \mathrm{I}(z) = \mathrm{I}(z) \cdot F_a(z) = F_a(z),$$
$$E_a(z) \cdot \mathrm{I}(z) = \mathrm{I}(z) \cdot E_a(z) = E_a(z)$$

для любых F_a, E_a.

Обратным к ряду F_a (E_a) называется такой ряд F_a^{-1} (E_a^{-1}), что

$$F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = F_a^{-1}(z) \cdot F_a(z) = \mathrm{I}(z),$$
$$E_a(z) \cdot E_a^{-1}(z) = E_a^{-1}(z) \cdot E_a(z) = \mathrm{I}(z).$$

Для вычисления обратного ряда надо ввести операцию деления.

Частным производящих функций F_a *и* F_b (у ряда F_b $b_0 \neq 0$) называется ряд

$$F_{a/b}(z) = \frac{F_a(z)}{F_b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты которого c_0, c_1, ... находятся по правилу

$$\begin{gathered} b_0 c_0 = a_0, \\ b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1, \\ b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2, \\ \vdots \\ b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0 = \sum_{s=0}^{n} b_s c_{n-s} = a_n, \\ \vdots \end{gathered}$$

т. е. для их вычисления надо решить бесконечную систему линейных уравнений. Коэффициент c_0 находится из первого уравнения: $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$ $(b_0 \neq 0)$, c_1 находится из второго уравнения после подстановки c_0, и так далее. Аналогично делятся экспоненциальные производящие функции. *Частным* E_a *и* E_b (у ряда E_b $b_0 \neq 0$) называется ряд

$$E_{a/b}(z) = \frac{E_a(z)}{E_b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!},$$

коэффициенты которого c_0, c_1, ... находятся по правилу

$$\begin{gathered} b_0 c_0 = a_0, \\ b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1, \\ b_0 c_2 + 2 b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2, \\ \vdots \\ b_0 c_n + C_n^1 b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0 = \sum_{s=0}^{n} C_n^s b_s c_{n-s} = a_n, \\ \vdots \end{gathered}$$

Теперь понятно, что обратные производящие функции вычисляются по формулам

$$F_a^{-1} = \frac{\mathrm{I}}{F_a}, E_a^{-1} = \frac{\mathrm{I}}{E_a}.$$

Далее будет доказана единственность обратной производящей (экспоненциальной производящей) функции.

Следует иметь в виду, что операции над производящими функциями понимаются чисто формально, поэтому вопросы сходимости соответствующих степенных рядов не берутся во внимание.

Алгебра производящих функций известна в дискретной математике под названием *алгебра Коши*, экспоненциальных производящих функций — под названием *символическое исчисление Блиссара*.

Далее формулируются некоторые свойства операций над производящими функциями.

Лемма 1.3.3

1) Сложение и умножение производящих функций коммутативны и ассоциативны.

2) Умножение производящих функций дистрибутивно относительно сложения.

Доказательство

1) Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны. Докажем коммутативность умножения. Пусть

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда

$$F_a(z) \cdot F_b(z) = F_{ab}(z) = F_c(z),$$

где

$$c_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s};$$

$$F_b(z) \cdot F_a(z) = F_{ba}(z) = F_{c'}(z),$$

где

$$c'_n = \sum_{s=0}^{n} b_s a_{n-s}.$$

Сделаем в c'_n замену индекса суммирования $s' = n - s$. Получаем

$$c'_n = \sum_{s'=0}^{n} b_{n-s'} a_{s'} = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s} = c_n,$$

что и доказывает коммутативность умножения.

Теперь докажем ассоциативность. Пусть

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

$$F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Нужно доказать, что

$$F_a(z) \cdot \big(F_b(z) \cdot F_c(z)\big) = \big(F_a(z) \cdot F_b(z)\big) \cdot F_c(z). \qquad (1.3.4)$$

Выпишем выражение общего члена ряда в левой части равенства (1.3.4):

$$F_b(z) \cdot F_c(z) = F_{bc}(z) = F_d(z),$$

где

$$d_n = \sum_{s=0}^{n} b_s c_{n-s}\,;$$

$$F_a(z) \cdot \big(F_b(z) \cdot F_c(z)\big) = F_a(z) \cdot F_d(z) = F_{ad}(z) = F_{d'}(z),$$

где

$$d'_n = \sum_{s=0}^{n} a_s d_{n-s} = \sum_{s=0}^{n} a_s \left(\sum_{s'=0}^{n-s} b_{s'} c_{n-s-s'} \right).$$

Общий член ряда в (1.3.4) справа:

$$F_a(z) \cdot F_b(z) = F_{ab}(z) = F_g(z),$$

где

$$g_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s}\,;$$

$$\left(F_a(z)\cdot F_b(z)\right)\cdot F_c(z) = F_g(z)\cdot F_c(z) = F_{gc}(z) = F_{g'}(z),$$
где
$$g'_n = \sum_{s=0}^{n} g_s c_{n-s} = \sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{s'=0}^{s} a_{s'} b_{s-s'}\right) c_{n-s}.$$
Напишем g'_n в развёрнутом виде и преобразуем сумму:
$$g'_n = \underbrace{a_0 b_0}_{g_0} c_n + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{g_1} c_{n-1} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{g_2} c_{n-2} +$$
$$+\cdots+\underbrace{(a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \cdots + a_s b_0)}_{g_s} c_{n-s} + \cdots +$$
$$+\underbrace{(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)}_{g_n} c_0 =$$
$$= a_0 \underbrace{(b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \cdots + b_n c_0)}_{d_n} +$$
$$+a_1 \underbrace{(b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} + b_2 c_{n-3} + \cdots + b_{n-1} c_0)}_{d_{n-1}} +$$
$$+a_2 \underbrace{(b_0 c_{n-2} + b_1 c_{n-3} + b_2 c_{n-4} + \cdots + b_{n-2} c_0)}_{d_{n-2}} + \cdots +$$
$$+a_s \underbrace{(b_0 c_{n-s} + b_1 c_{n-s-1} + \cdots + b_{n-s} c_0)}_{d_{n-s}} + \cdots + a_n \underbrace{b_0 c_0}_{d_0} =$$
$$= \sum_{s=0}^{n} a_s \left(\sum_{s'=0}^{n-s} b_{s'} c_{n-s-s'}\right) = d'_n,$$
что и требовалось доказать.

2) Пусть
$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, F_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$
$$F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$
Нужно доказать, что
$$F_a(z)\cdot\left(F_b(z) + F_c(z)\right) = F_a(z)\cdot F_b(z) + F_a(z)\cdot F_c(z).$$
Производящая функция (степенной ряд) слева:

$$F_a(z)\cdot\big(F_b(z)+F_c(z)\big)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(b_n+c_n)z^n\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}a_s(b_{n-s}+c_{n-s})\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}(a_sb_{n-s}+a_sc_{n-s})\right)z^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}a_sb_{n-s}\right)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}a_sc_{n-s}\right)z^n=$$
$$=F_a(z)\cdot F_b(z)+F_a(z)\cdot F_c(z). \qquad \blacksquare$$

Такими же свойствами обладают и операции с экспоненциальными производящими функциями.

Лемма 1.3.4

1) Сложение и умножение экспоненциальных производящих функций коммутативны и ассоциативны.

2) Умножение экспоненциальных производящих функций дистрибутивно относительно сложения.

Доказательство

1) Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны. Докажем коммутативность умножения. Пусть
$$E_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n, E_b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n.$$
Тогда
$$E_a(z)\cdot E(z)=E_{ab}(z)=E_c(z),$$
где
$$c_n=\sum_{s=0}^{n}C_n^sa_sb_{n-s};$$
$$E_b(z)\cdot E_a(z)=E_{ba}(z)=E_{c'}(z),$$
где
$$c_n'=\sum_{s=0}^{n}C_n^sb_sa_{n-s}.$$
Замена индекса $s'=n-s$ в c_n' с учётом свойства симметрии биноми-

ального коэффициента $C_n^s = C_n^{n-s}$ приводит к равенству $c'_n = c_n$, что и доказывает коммутативность.

Докажем ассоциативность. Пусть

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, E_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n,$$

$$E_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n.$$

Тогда

$$E_b(z) \cdot E_c(z) = E_{bc}(z) = E_d(z),$$

где

$$d_n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s b_s c_{n-s};$$

$$E_a(z) \cdot \big(E_b(z) \cdot E_c(z)\big) = E_a(z) \cdot E_d(z) = E_{ad}(z) = E_{d'}(z),$$

где

$$d'_n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s d_{n-s} = \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s \left(\sum_{s'=0}^{n-s} C_{n-s}^{s'} b_{s'} c_{n-s-s'} \right);$$

$$E_a(z) \cdot E_b(z) = E_{ab}(z) = E_g(z),$$

где

$$g_n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s b_{n-s};$$

$$\big(E_a(z) \cdot E_b(z)\big) \cdot E_c(z) = E_g(z) \cdot E_c(z) = E_{gc}(z) = E_{g'}(z),$$

где

$$g'_n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s g_s c_{n-s} = \sum_{s=0}^{n} C_n^s \left(\sum_{s'=0}^{s} C_s^{s'} a_{s'} b_{s-s'} \right) c_{n-s}.$$

Напишем в развёрнутом виде и преобразуем g'_n, используя равенство $C_n^s C_s^k = C_{n-k}^{s-k} C_n^k$:

$$g'_n = \underbrace{a_0 b_0}_{g_0} c_n + C_n^1 \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{g_1} c_{n-1} +$$

$$+C_n^2 \underbrace{(a_0 b_2 + C_2^1 a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{g_2} c_{n-2} + \cdots +$$

$$+C_n^s \underbrace{(a_0 b_s + C_s^1 a_1 b_{s-1} + \cdots + a_s b_0)}_{g_s} c_{n-s} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{(a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)}_{g_n} c_0 = a_0 b_0 c_n + C_n^1 a_0 b_1 c_{n-1} +$$

$$+C_n^2 a_0 b_2 c_{n-2} + \cdots + C_n^s a_0 b_s c_{n-s} + \cdots + a_0 b_n c_0 +$$

$$+C_n^1 a_1 b_0 c_{n-1} + C_n^2 C_2^1 a_1 b_1 c_{n-2} + \cdots + C_n^s C_s^1 a_1 b_{s-1} c_{n-s} + \cdots +$$

$$+C_n^1 a_1 b_{n-1} c_0 + C_n^2 a_2 b_0 c_{n-2} + \cdots + C_n^s C_s^2 a_2 b_{s-2} c_{n-s} + \cdots +$$

$$+C_n^2 a_2 b_{n-2} c_0 + \cdots + C_n^s a_s b_0 c_{n-s} + C_n^{s+1} C_{s+1}^s a_s b_1 c_{n-s-1} + \cdots +$$

$$+C_n^s a_s b_{n-s} c_0 + \cdots + a_n b_0 c_0 = a_0 \times$$

$$\times \underbrace{(b_0 c_n + C_n^1 b_1 c_{n-1} + C_n^2 b_2 c_{n-2} + \cdots + C_n^s b_s c_{n-s} + \cdots + b_n c_0)}_{d_n} +$$

$$+C_n^1 a_1 \times$$

$$\times \underbrace{\left(b_0 c_{n-1} + C_{n-1}^1 b_1 c_{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{s'} b_{s'} c_{n-s'-1} + \cdots + b_{n-1} c_0\right)}_{d_{n-1}} +$$

$$+C_n^2 a_2 \underbrace{\left(b_0 c_{n-2} + \cdots + C_{n-2}^{s'} b_{s'} c_{n-s'-2} + \cdots + b_{n-2} c_0\right)}_{d_{n-2}} + \cdots +$$

$$+C_n^s a_s \times$$

$$\times \underbrace{(b_0 c_{n-s} + C_{n-s}^1 b_1 c_{n-s-1} + \cdots + C_{n-s}^{s'} b_{s'} c_{n-s-s'} + \cdots +}_{d_{n-s}}$$

$$\underbrace{+b_{n-s} c_0)}_{d_{n-s}} + \cdots + a_n \underbrace{b_0 c_0}_{d_0} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} C_n^s a_s \left(\sum_{s'=0}^{n-s} C_{n-s}^{s'} b_{s'} c_{n-s-s'} \right) = d'_n.$$

2) Дистрибутивность доказывается так же, как и для производящих функций (см. доказательство леммы 1.3.3). ■

Следующая лемма утверждает, что нулевой ряд $\mathfrak{o}$ (производящая функция нулевой последовательности) обладает важным свойством: он является единственным элементом, умножение на который обнуляет любой элемент алгебры производящих (экспоненциальных производящих) функций (это означает, что в этой алгебре нет ненулевых делителей нуля).

Лемма 1.3.5

Пусть F_a — произвольный ненулевой ряд. Тогда для любого ряда F_b справедлива эквивалентность

$$F_a(z) \cdot F_b(z) = \mathfrak{o}(z) \Leftrightarrow F_b(z) = \mathfrak{o}(z).$$

Доказательство

Достаточность утверждения очевидна. Докажем необходимость. Из условия $F_a(z) \cdot F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$ следует бесконечная система равенств

$$\begin{gathered} a_0 b_0 = 0; \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0; \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0; \\ \vdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0; \\ \vdots \end{gathered}$$

Нужно доказать, что $F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$.

Предположим, что $a_0 \neq 0$. Тогда из уравнения $a_0 b_0 = 0$ получаем, что $b_0 = 0$. Допустим, что F_b представляет собой ненулевой ряд, т. е. при некотором $n > 0$ $b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$, а $b_n \neq 0$. Тогда из равенства $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0$ следует $a_0 b_n = 0$, а так как $a_0 \neq 0$, то $b_n = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$.

Пусть теперь $a_0 = 0$. Поскольку F_a — ненулевой ряд, то при некотором $n > 0$ $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, $a_n \neq 0$. Тогда из уравнения $a_0 b_n + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 0$ следует $a_n b_0 = 0$, а значит, $b_0 = 0$. Далее запишем условие равенства нулю коэффициента при z^{n+1} в $F_a(z) \cdot F_b(z)$:

$$a_0 b_{n+1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 + a_{n+1} b_0 = 0.$$

Из него следует $a_n b_1 = 0$, значит, $b_1 = 0$. Рассмотрение коэффициента при z^{n+2} с учётом того, что $b_0 = b_1 = 0$, приводит к $b_2 = 0$. Последовательно увеличивая степень z и приравнивая к нулю соответствующие коэффициенты, получаем $b_n = 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, т. е. $F_b(z) = \mathfrak{o}(z)$. ■

Из доказанной леммы следует аналогичное утверждение для экспоненциальных производящих функций.

Лемма 1.3.6

Пусть E_a — произвольная ненулевая экспоненциальная производящая функция. Тогда для любой E_b справедлива эквивалентность

$$E_a(z) \cdot E_b(z) = \mathfrak{o}(z) \Leftrightarrow E_b(z) = \mathfrak{o}(z).$$

Следующие леммы утверждают единственность обратной производящей (экспоненциальной производящей) функции, а значит, однозначность операции деления таких функций.

Лемма 1.3.7

Для произвольного ненулевого ряда F_a $(a_0 \neq 0)$ существует единственный обратный ряд F_a^{-1}.

Доказательство

Построим F_a^{-1} с помощью правила деления рядов. Пусть

$$F_a^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

По определению $F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = \mathfrak{l}(z)$. Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z слева и справа:

$$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1};$$
$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0;$$
$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0);$$
$$\vdots$$
$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_n = -a_0^{-1}(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0);$$
$$\vdots$$

Таким образом, доказано существование F_a^{-1}. Теперь предположим, что существует другой, отличный от F_a^{-1}, обратный ряд $\hat{F}_a^{-1}$. Тогда одновременно выполняются равенства

$$F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = \mathfrak{l}(z),$$
$$F_a(z) \cdot \hat{F}_a^{-1}(z) = \mathfrak{l}(z).$$

Вычитая одно из другого, получаем

$$F_a(z)\cdot\left(F_a^{-1}(z)-\hat{F}_a^{-1}(z)\right)=\mathfrak{o}(z).$$

Тогда из леммы 5 следует, что

$$F_a^{-1}(z)-\hat{F}_a^{-1}(z)=\mathfrak{o}(z)\ \Leftrightarrow\ F_a^{-1}(z)=\hat{F}_a^{-1}(z)+\mathfrak{o}(z)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ F_a^{-1}(z)=\hat{F}_a^{-1}(z).$$

■

Лемма 1.3.8

Для произвольной ненулевой экспоненциальной производящей функции E_a ($a_0\neq 0$) существует единственная обратная E_a^{-1}.

Примеры:

1) найдём обратную производящую функцию для

$$F_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Имеем

$$F_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\ \Rightarrow\ f_a^{-1}(z)=1-z;$$

2) пусть

$$F_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z=f_a(z).$$

Тогда

$$f_a^{-1}(z)=e^{-z}\ \Rightarrow\ F_a^{-1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!};$$

3) пусть

$$E_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Тогда

$$E_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z}(e^z-1)=e_a(z)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ e_a^{-1}(z)=\frac{z}{e^z-1}.$$

Функция $\frac{z}{e^z-1}$ имеет устранимую особенность в нуле, поэтому E_a^{-1} как экспоненциальная производящая функция существует. Найдём E_a^{-1}. Пусть

$$E_a^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}.$$

Тогда

$$E_a(z) \cdot E_a^{-1}(z) = \mathrm{I}(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) \times$$

$$\times \left(c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2!} + \frac{c_3 z^3}{3!} + \cdots \right) = \mathrm{I}(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1;$$

$$1 \cdot c_1 + \frac{1}{2}c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2};$$

$$1 \cdot c_2 + 2 \cdot \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{6};$$

$$1 \cdot c_3 + 3 \cdot \frac{1}{2}c_2 + 3 \cdot \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{4}c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = 0;$$

$$1 \cdot c_4 + 4 \cdot \frac{1}{2}c_3 + 6 \cdot \frac{1}{3}c_2 + 4 \cdot \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_0 = 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{30};$$

$$\vdots$$

Получаем ответ:

$$E_a^{-1}(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{30} \cdot \frac{z^4}{4!} + \cdots;$$

4) найдём для функции

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

обратную производящую функцию:

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^2}(e^z - z - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_a^{-1}(z) = \frac{z^2}{e^z - z - 1}.$$

Эта функция имеет устранимую особенность в нуле, поэтому она разлагается в ряд с неотрицательными степенями z. Найдём этот ряд. По определению

$$F_a(z) \cdot F_a^{-1}(z) = \mathrm{I}(z).$$

Если обозначить

$$F_a^{-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

то последнее равенство запишется в виде

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \cdots\right)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots) = \mathrm{I}(z).$$

Применяя правило деления рядов, находим

$$\frac{1}{2}c_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_0 = 2;$$

$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3!}c_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = -\frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{3!}c_1 + \frac{1}{4!}c_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{1}{18};$$

$$\frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{3!}c_2 + \frac{1}{4!}c_1 + \frac{1}{5!}c_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_3 = \frac{1}{270};$$

$$\vdots$$

Отсюда получаем ответ:

$$F_a^{-1}(z) = 2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{18}z^2 + \frac{1}{270}z^3 + \cdots.$$

Рассматривая эту же функцию как экспоненциальную производящую E_a, найдём для неё E_a^{-1}:

$$E_a^{-1}(z) = \frac{z^2}{e^z - z - 1} =$$

$$= c_0 + c_1 z + \frac{c_2}{2!}z^2 + \frac{c_3}{3!}z^3 + \cdots \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \cdots\right)\left(c_0 + c_1 z + \frac{c_2}{2!}z^2 + \frac{c_3}{3!}z^3 + \cdots\right) = \mathrm{I}(z).$$

Далее находим коэффициенты c_0, c_1, c_2, ... аналогично тому, как это делалось в приведённых выше примерах, и получаем ответ:

$$E_a^{-1}(z) = 2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}\cdot\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{45}\cdot\frac{z^3}{3!} - \frac{1}{135}\cdot\frac{z^4}{4!} + \cdots.$$

1.3.2. Производящие функции комбинаторных последовательностей

1.3.2.1. Производящие функции сочетаний

Вычислим производящую функцию для последовательности чисел сочетаний без повторений объёма r из элементов (n)-множества A. Запишем разложение $(1+z)^n$ в ряд Ньютона при натуральном n:

$$(1+z)^n = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} z^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} C_n^r z^r.$$

Очевидно, что $C_n^r = 0$ при $r > n$ (в произведении в числителе будет участвовать нулевая скобка), поэтому ряд вырождается в многочлен

$$(1+z)^n = \sum_{r=1}^{n} C_n^r z^r,$$

представляющий собой известную формулу бинома Ньютона. Биномиальные коэффициенты C_n^r при натуральном n равны числам (r)-сочетаний без повторений элементов (n)-множества $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$. Итак, производящей функцией чисел $C_n^r,\ r = 0,\ 1, \dots,\ n$ является функция $f_C(z) = (1+z)^n$.

Решим ту же задачу для чисел $\overline{C}_n^r$ (r)-сочетаний с повторениями. Так как $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$, то

$$F_{\overline{C}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r z^r.$$

Из п. 2 леммы 1.3.1 следует

$$f_{\overline{C}}(z) = (1-z)^{-n}.$$

Итак, получаем, что для последовательности $\left\{\overline{C}_n^r\right\}_{r=0}^{\infty}$ $f_{\overline{C}}(z) =$ $= (1-z)^{-n}$.

Решим методом производящих функций теперь задачу нахождения чисел $\hat{C}_n^m$ различных сюръективных (m)-мультимножеств, носителями которых является данное (n)-множество. Составим производящую функцию чисел сочетаний при выборе элементов одного вида.

Очевидно, что если в сочетание взяты k элементов одного вида, то соответствующая производящая функция равна z^k. Если же нужно включить в сочетание хотя бы один элемент этого вида, т. е. 1, 2, ... , то по правилу суммы производящая функция равна $z+z^2+\cdots$. Теперь, поскольку включаются все n элементов данного множества, по правилу произведения получаем итоговую производящую функцию:

$$F_C(z)=(z+z^2+z^3+\cdots)^n.$$

Для нахождения нужной формулы числа сочетаний преобразуем F_C:

$$F_C(z)=z^n(1+z+z^2+\cdots)^n=z^n(1-z)^{-n}=$$

$$=z^n\sum_{m=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{m}z^m=\sum_{m=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{m}z^{n+m}=\sum_{m=n}^{\infty}C_{m-1}^{m-n}z^m=$$

$$=\sum_{m=n}^{\infty}C_{m-1}^{n-1}z^m.$$

В итоге получаем тот же ответ, что в пункте 1.1.2.4:

$$\hat{C}_n^m=\begin{cases}C_{m-1}^{n-1}, m\geq n,\\ 0, m<n,\end{cases}$$

$$m\in\mathbb{N}_0.$$

1.3.2.2. Производящие функции размещений

Выше уже отмечалось, что экспоненциальные производящие функции порождают последовательности чисел размещений. Найдём такую функцию для чисел $\{A_n^r\}_{r=0}^n$ (r)-размещений элементов данного (n)-множества. Поскольку $A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$, то

$$e_A(z)=1+\sum_{r=1}^{n}A_n^r\frac{z^r}{r!}=1+\sum_{r=1}^{n}n(n-1)\cdots(n-r+1)\frac{z^r}{r!}=$$

$$=1+\sum_{r=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}z^r=\sum_{r=0}^{n}C_n^r z^r=(1+z)^n.$$

Вычислим экспоненциальную производящую функцию чисел $\{P_n\}$ бесповторных перестановок. Учитывая, что $P_n=n!$, имеем

$$e_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Найдём такую же функцию для чисел $\left\{\overline{A}_n^r\right\}$ (r)-размещений с повторениями. Так как $\overline{A}_n^r = n^r$, то

$$e_{\overline{A}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \overline{A}_n^r \frac{z^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{z^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nz)^r}{r!} = e^{nz}.$$

Применение экспоненциальных производящих функций покажем на примере следующей комбинаторной задачи. Дано (n)-множество A. Найти количество (m)-векторов с координатами из A ((m)-размещений элементов множества A), в которых присутствует хотя бы по одному экземпляру каждого элемента A. Обозначим через $\hat{A}_m$ число таких векторов и найдём экспоненциальную производящую функцию последовательности $\{\hat{A}_m\}$.

Экспоненциальная производящая функция, соответствующая единственной перестановке k неразличимых экземпляров какого-либо элемента, равна $\frac{1}{k!}z^k$. По правилу суммы получаем экспоненциальную производящую функцию для всех возможных непустых перестановок экземпляров одного элемента: $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = e^z - 1$. Теперь по правилу произведения строим производящую функцию чисел размещений с повторами всех n элементов множества A:

$$E_{\hat{A}}(z) = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^z - 1)^n = e_{\hat{A}}(z).$$

Разложением $e_{\hat{A}}$ по формуле бинома Ньютона и далее в степенной ряд найдём общее выражение для числа размещений $\hat{A}_m$:

$$e_{\hat{A}}(z) = (e^z - 1)^n = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s e^{(n-s)z} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n-s)^m}{m!} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-s)^m \right) \frac{z^m}{m!}.$$

Отсюда

$$\hat{A}_m = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-s)^m.$$

Получили формулу числа сюръективных отображений (m)-множества на (n)-множество. Это неудивительно, поскольку каждый рассматриваемый (m)-вектор представляет собой запись сюръективного отображения на (n)-множество.

Решим теперь более общую задачу. Построим производящую функцию чисел (m)-векторов над (n)-множеством A, в которых присутствуют не менее p_i экземпляров элемента $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Экспоненциальная производящая функция всех возможных в данном случае перестановок экземпляров элемента a_i имеет вид:

$$\frac{z^{p_i}}{p_i!} + \frac{z^{p_i+1}}{(p_i+1)!} + \cdots .$$

Следовательно, функция, соответствующая размещениям всех элементов, равна

$$E_A(z) = \left(\frac{z^{p_1}}{p_1!} + \frac{z^{p_1+1}}{(p_1+1)!} + \cdots\right) \cdots \left(\frac{z^{p_n}}{p_n!} + \frac{z^{p_n+1}}{(p_n+1)!} + \cdots\right).$$

Число A_m (m)-векторов рассматриваемого качественного состава равно коэффициенту при $\frac{z^m}{m!}$ в разложении E_a в степенной ряд. Для его нахождения следует использовать правило перемножения экспоненциальных производящих функций.

Рассмотрим ещё более общую постановку задачи. Пусть в размещении должно быть от p_i до q_i экземпляров элемента a_i. Тогда экспоненциальная производящая функция чисел таких (m)-векторов равна

$$E_A(z) = \left(\frac{z^{p_1}}{p_1!} + \frac{z^{p_1+1}}{(p_1+1)!} + \cdots + \frac{z^{q_1}}{q_1!}\right) \cdots \left(\frac{z^{p_n}}{p_n!} + \frac{z^{p_n+1}}{(p_n+1)!} + \cdots + \frac{z^{q_n}}{q_n!}\right).$$

Для нахождения числа (m)-размещений надо раскрыть в этом многочлене скобки и найти коэффициент при $\frac{z^m}{m!}$.