Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнения, допускающие понижение порядка

1° *Уравнение n-ого порядка*

$$y^{(n)}=f(x)$$

решается последовательным n-кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании одно произвольное постоянное, а в конечном результате – n произвольных постоянных.

Пример 1. Решить уравнение $y'''=60x^2$.

Решение

Умножая обе части данного уравнения на dx и затем, интегрируя, получаем уравнение 2-го порядка:

$$y'''dx=60x^2dx;$$
$$y''=\int 60x^2dx;$$
$$y''=20x^3+C_1$$

Далее тем же способом получаем уравнение 1-го порядка:

$$y''dx=20x^3dx+C_1dx;$$
$$y'=\int 20x^3dx+\int C_1dx;$$
$$y'=5x^4+C_1x+C_2$$

и затем искомую функцию – общий интеграл данного уравнения: $y'dx=(5x^4+C_1x+C_2)dx$; $y=x^5+C_1x^2/2+C_2x+C_3$.

2° *Уравнения, не содержащие явно функции y*

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},y^{(n)})=0.$$

Порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящую в уравнение, т.е. сделав замену

$$y^{(k)}=z.$$

Пример2. Решить уравнение $(x-3)y''+y'=0$

Решение

Полагая

$$y'=\frac{dy}{dx}=p,$$

получим

$$y''=\frac{dp}{dx}$$

и после подстановки исходное уравнение обращается в уравнение 1-го порядка:

$$(x-3)\frac{dp}{dx}+p=0$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\frac{dp}{p}+\frac{dx}{x-3}=0;$$
$$\ln|p|+\ln|x-3|=\ln C;$$
$$|p(x-3)|=C;$$
$$p(x-3)=\pm C=C_1.$$

Заменяя вспомогательную переменную p через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение

$$(x-3)\,\frac{dy}{dx}=C_1,$$

решая которое, найдем искомый общий интеграл: $dy=\frac{C_1dx}{x-3}$;

$$y=C_1\ln|x-3|+C_2.$$

3° *Уравнения, не содержащие явно переменной x*

$$F(y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0.$$

Порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y, а за неизвестную функцию

$$y'=p(y),$$

тогда

$$y''=p\frac{dp}{dy}.$$

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение $y\cdot y''+(y')^2=0$.

Решение

Полагаем $y'=p(y)$, тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$. Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}+p^2=0$$

$$y\cdot p\cdot dp=-p^2\cdot dy;$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y};$$

$$p=\frac{C_1}{y}\ \text{или}\ \frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{y},$$

$$ydy=C_1dx,$$

$$\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2.$$