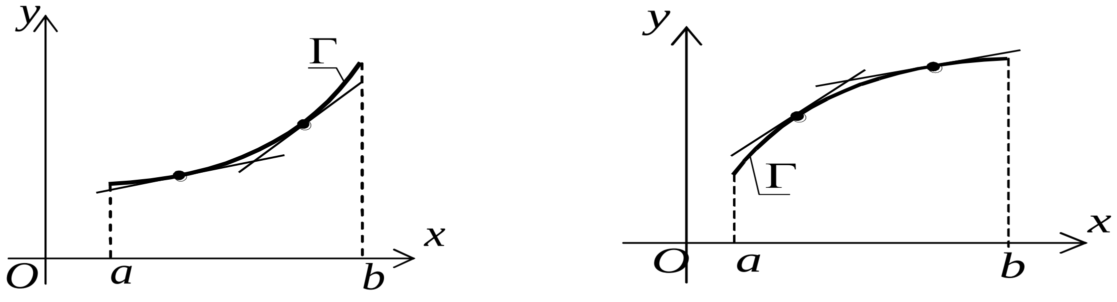
§5. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда в любой точке $M(x,\ f(x))$ графика $f(x)$ функции существует невертикальная касательная.

Определение 5.1. График Г функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a,\ b)$, называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на этом промежутке, если он расположен выше (ниже) касательной, проведённой к Г в любой его точке $M(x,\ f(x))$, где $x \in (a,\ b)$.

На рис. 5.1а изображён график Г функции $f(x)$, направленный на интервале $(a,\ b)$ выпуклостью вниз, а на рис. 5.1б – выпуклостью вверх.



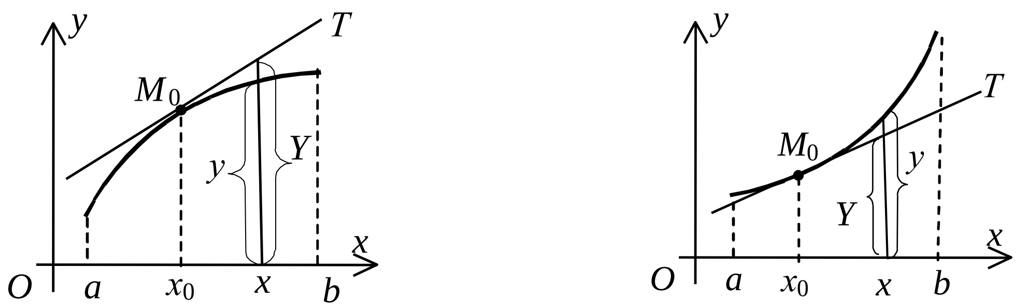
а) б)

Рис. 5.1. К определению 5.1

Теорема 5.1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b) и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) всюду на этом интервале, то график Г этой функции на интервале (a,b) является выпуклым вверх (вниз).

►Пусть x_0 – произвольная точка интервала (a,b) (рис. 5.2). Напишем уравнение касательной T, проведённой к графику Г функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$, обозначая ординату текущей точки T через Y:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{5.1}$$



а) б)

Рис. 5.2. К доказательству теоремы 5.1

Для функции $y = f(x)$ напишем формулу Тейлора при $n = 1$, остаточный член возьмём в форме Лагранжа:

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2\,, \tag{5.2}$$

где c – число, расположенное между x_0 и x. Вычтем почленно (5.1) из (5.2):

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2. \tag{5.3}$$

В силу (5.3) знак разности $y - Y$ при $x \neq x_0$ совпадает со знаком $f''(c)$. Поэтому, если $f''(x) < 0$ на интервале (a, b), то для всех x из (a, b) выполняется неравенство $y - Y < 0$; если же $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то для всех x из (a, b) выполняется неравенство $y - Y > 0$. В первом случае график функции $y = f(x)$ лежит

ниже касательной, проведённой к нему в точке $M_0(x_0, f(x_0))$(рис. 5.2а), во втором – выше этой касательной (рис. 5.2б). Ввиду произвольного выбора точки x_0 на интервале (a, b) в первом случае в соответствии с определением 5.1 график этой функции является выпуклым вверх на интервале (a, b), во втором – выпуклым вниз.◄

Пример 5.1. Найти интервалы выпуклости графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$.

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$, $f''(x) = \dfrac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$. Так как $f''(x) < 0$ на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и $f''(x) > 0$ на интервале $(-1, 1)$ то в силу теоремы 5.1 заключаем, что на промежутках $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ график функции направлен выпуклостью вверх, а на промежутке $(-1,\ 1)$ – выпуклостью вниз (рис. 5.3).◄

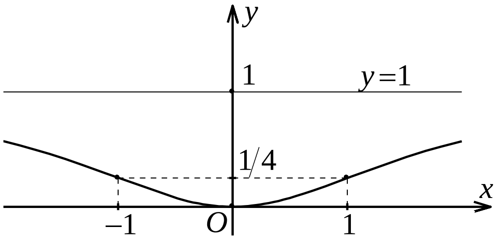


Рис. 5.3. График функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

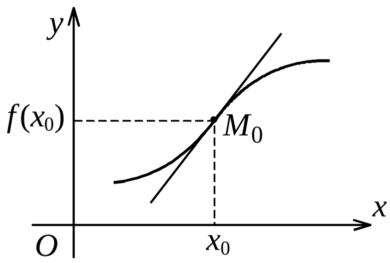


Рис. 5.4. К определению 5.2

Определение 5.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и дифференцируема на $U(x_0)$ за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку меняется направление выпуклости графика Г этой функции, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика Г (рис. 5.3).

Так, $(\pm 1, 1/4)$ – точки перегиба графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ (рис. 5.3).

Замечание 5.1. Предположим, что в точке перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ график функции $f(x)$ имеет касательную T. Из определения 5.2 следует, что при переходе x через точку x_0 график переходит с одной стороны касательной T на другую и “перегибается через неё” (рис. 5.4), отсюда и произошло название “точка перегиба”.

Теорема 5.2 (*необходимое условие существования точки перегиба графика функции*). Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $f(x)$, то либо $f''(x_0)=0$, либо $f''(x_0)=\infty$, либо $f''(x_0)$ не существует.

►Возможны только два случая: $f''(x_0)$ существует либо не существует. Если $f''(x_0)$ существует, то также возможны только два случая: либо $f''(x_0)$ конечна, либо $f''(x_0)=\infty$. Если $f''(x_0)$ конечна, то докажем, что $f''(x_0)=0$.

Для упрощения доказательства ограничимся случаем, когда $f''(x)$ непрерывна в точке x_0. Предположим противное, что $f''(x_0)\neq 0$. В силу непрерывности второй производной в точке x_0 и теоремы о сохранении знака функции, непрерывной в точке (теорема 3.3 глава 4 раздел 4) найдётся окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в которой $f''(x)$ не меняет знака. Тогда график функции $f(x)$ в пределах этой окрестности имеет одно и то же направление выпуклости. Так как это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, остаётся принять то, что требовалось доказать.◄

Определение 5.3. Точки из области определения функции $f(x)$, в которых её вторая производная равна нулю, бесконечности, или не существует, называются *точками, подозрительными на перегиб*.

При исследовании функции $f(x)$ на направление выпуклости её графика и существование точек перегиба из области определения этой функции с помощью определения 5.3 выделяют точки, где график может иметь перегиб.

Замечание 5.2. Не в любой точке, подозрительной на перегиб, график функции имеет перегиб. Так, для функций $y=x^3$ и $y=x^4$ точка $x=0$ является подозрительной на перегиб: $(x^3)''=6x=0$ и $(x^4)''=12x^2=0$ при $x=0$, но для графика первой из них она является точкой перегиба, а для графика второй не является (рис. 3.2, 5.5).

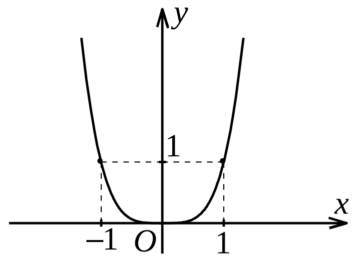


Рис. 5.5. График функции $f(x)=x^4$

Теорема 5.3 (*достаточное условие существования точки перегиба графика функции*). Пусть x_0 – точка, подозрительная на перегиб графика функции $f(x)$ и данная функция имеет вторую производную на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является абсциссой точки перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ графика данной функции.

►В самом деле, в точке M_0 в силу теоремы 5.1 меняется направление выпуклости графика, что и означает, что M_0 является точкой перегиба (определение 5.2).◄

Пример 5.2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x)=(2-x)e^x+2$.

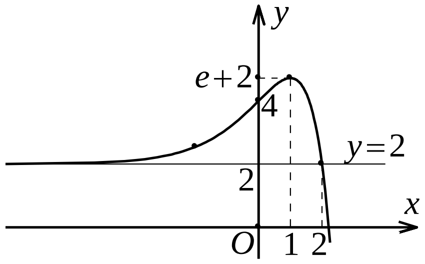


Рис. 5.6. График функции $f(x)=(2-x)e^x+2$

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x)=(1-x)e^x$ (пример 4.1), $f''(x)=((1-x)e^x)'=-xe^x$, $f''(x)=0$ при $x=0$ – в точке $(0, f(0))$ график может иметь перегиб. Поскольку $f''(x)>0$ при $x<0$ и $f''(x)<0$ при $x>0$, то заключаем, что при $x<0$ в силу теоремы 5.1 график направлен выпуклостью вниз, а при $x>0$ – выпуклостью вверх, следовательно, по определению 5.2 $(0, f(0))$ – точка перегиба графика (рис. 5.6, $f(0)=4$).◄