§6. Разрывы функций нескольких переменных

Пусть функция f определена в некоторой области D m-мерного пространства и X_0 – некоторая точка этой области.

Как известно, X_0 будет точкой непрерывности функции f, если

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0); \tag{6.1}$$

в противном случае X_0 называется точкой разрыва функции f. Если предел (6.1) (конечный или бесконечный) существует, а $f(X)$ не определена в точке X_0, то X_0 также является точкой разрыва.

Пример 6.1. $f(X) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Эта функция как элементарная непрерывна во всех точках плоскости xOy, кроме точки $(0, 0)$, где знаменатель обращается в нуль. С приближением точки $X = (x, y)$ к точке $(0, 0)$ функция f неограниченно возрастает:

$$\lim_{X \to 0} f(X) = +\infty.$$

Поведение этой функции вблизи точки $(0, 0)$ показано на рис. 6.1.

Точки разрыва функции могут быть не только изолированными (как в предыдущем примере), но и заполнять собой линии, поверхности и т. д.

Пример 6.2. Функция двух переменных $f(X) = \dfrac{|y - x|}{y - x} + 1$ имеет конечные разрыва-скачки вдоль прямой $y - x = 0$ (рис. 6.2), а функция трех переменных $f(X) = \dfrac{|x + y + z - 1|}{x + y + z - 1}$ имеет разрывы на плоскости $x + y + z - 1 = 0$.

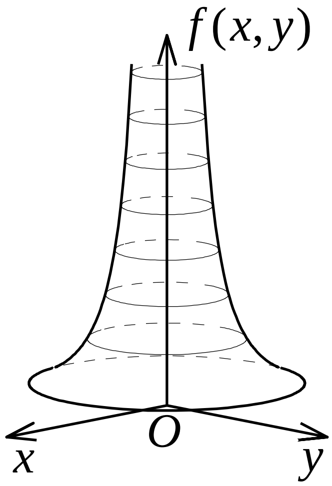

Рис. 6.1. Иллюстрация к примеру 6.1

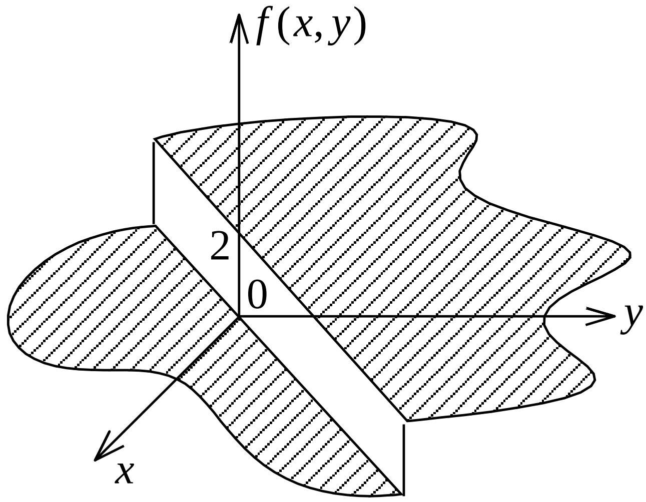

Рис. 6.2. Иллюстрация к примеру 6.2