§6. Свойства несобственных интегралов второго рода

Эти свойства аналогичны свойствам несобственных интегралов первого рода. Сформулируем их применительно к интегралам вида (5.1). В этом случае $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a,b)$ и $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$.

Теорема 6.1 (свойство аддитивности). Пусть $a<c<b$. Если сходится интеграл по промежутку $[a,b]$, то сходится и интеграл по промежутку $[c,b]$, и наоборот. При этом выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{6.1}$$

Теорема 6.2 (свойство линейности). Если сходятся интегралы $\int_a^b f_1(x)\,dx$ и $\int_a^b f_2(x)\,dx$, то сходится интеграл $\int_a^b\left[C_1f_1(x)+C_2f_2(x)\right]dx$ и выполняется равенство

$$\int_a^b\left[C_1f_1(x)+C_2f_2(x)\right]dx=C_1\int_a^b f_1(x)\,dx+C_2\int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{6.2}$$

Теорема 6.3 (признак сравнения).

1. Пусть в промежутке $[a,b)$ выполняются неравенства

$$0\le f(x)\le g(x), \tag{6.3}$$

и интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится (он называется *мажорантным*). Тогда также сходится интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ (он называется *минорантным*). При этом имеет место неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.4}$$

2. Если минорантный интеграл расходится, то мажорантный интеграл также расходится.

Пример 6.1. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

► $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\Big|_0^1=0+2=2$. ◄

Теорема 6.4 (предельный признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны и непрерывны на полусегменте $[a, b)$. Если существует предел

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k;\quad k\neq 0;\quad k\neq\infty, \tag{6.5}$$

то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся совместно (одновременно).

Пример 6.2. Исследовать сходимость интеграла $J=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x}}dx$.

▶ Рассмотрим для сравнения интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\Big|_0^1=2$, который сходится. Далее,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x}}:\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что интеграл J сходится. ◀

Пример 6.3. Исследовать сходимость интеграла $J=\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$.

▶ Вместо интеграла J рассмотрим интеграл от положительной функции $J_1=\int_0^1\frac{dx}{|\ln x|}$. Заметим, что $|\ln x|=-\ln x$ при $x\in[0,1)$. Возьмем для сравнения функцию $1/(1-x)$, учитывая, что интеграл $J_2=\int_0^1\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)\Big|_0^1=+\infty$ расходится:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x}:\left(-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1/x}{1}=1.$$

Здесь применено правило Лопиталя.

Так как предел конечен и не равен нулю и интеграл J_2 расходится, заключаем, что расходится интеграл J_1, а потому и интеграл J. ◀

Теорема 6.5. Если сходится интеграл $\int_a^b|f(x)|\,dx$, то подавно сходится интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Определение 6.1. Если сходится интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции, то несобственный интеграл от данной функции называется *абсолютно сходящимся*. Если же данный несобственный интеграл сходится, а интеграл от модуля подынтегральной функции расходится, то данный интеграл называется *неабсолютно сходящимся*.

Пример 6.4. Интеграл $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ сходится и притом абсолютно, так как $\frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, а интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$ – сходится. ◀

Замечание 6.1. При использовании предельного признака сравнения часто привлекаются интегралы

$$J_b = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \tag{6.6}$$

$$J_a = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \tag{6.7}$$

сходящиеся при $p<1$ и расходящиеся при $p \ge 1$.

▶ Рассмотрим интеграл J_b.

Пусть $p<1$. Тогда $J_b = -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b = 0 + \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$.

Пусть $p=1$. Тогда $J_b = -\ln(b-x)\big|_a^b = +\infty$.

Пусть $p>1$. Тогда $J_b = -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b = +\infty$. ◀

Замечание 6.2. На несобственные интегралы второго рода распространяются методы интегрирования по частям и замены переменной.

Пример 6.5. $\int_0^1 \ln x\, dx = \left[\begin{array}{l|c} u=\ln x & du=(1/x)\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right] = x\ln x\big|_0^1 - \int_0^1 dx = \ln 1 - \lim_{x\to 0} x\ln x - 1 = -1$, так как по правилу Лопиталя $x\ln x \underset{x\to 0}{\to} 0$.

Замечание 6.3. Точки, в которых подынтегральная функция терпит разрыв, обращаясь в бесконечность, принято называть *особыми*. К особым точкам относят также несобственные числа $\pm\infty$ в случае несобственных интегралов первого рода.