## §2. Достаточный признак строгой монотонности функции на промежутке

Понятие монотонной функции было рассмотрено в §7 главы 1 раздела 4 (определение 7.5).

**Теорема 2.1** (*достаточный признак строгой монотонности функции*). Если производная функции $f(x)$ положительна (отрицательна) на интервале $(a, b)$, то данная функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

►Пусть $f'(x) > 0$ для $\forall x \in (a, b)$. Возьмём две любые точки $x_1$ и $x_2$ этого промежутка такие, что $x_1 < x_2$, тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа (см. §4 главы 2), в силу которой имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2). \tag{2.1}$$

Поскольку $f'(c) > 0$, а разность $x_2 - x_1$ положительна, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, следовательно, $f(x)$ возрастает на интервале $(a, b)$. Аналогично проводится доказательство для случая $f'(x) \le 0$.◄

***Замечание 2.1.*** Теорема 2.1 позволяет найти так называемые *промежутки монотонности* дифференцируемой функции, на каждом из которых она только возрастает или только убывает.

**Пример 2.1.** Найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^2 - 4x$.

► $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$, $f'(x) < 0$ при $x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$, поэтому в силу теоремы 2.1 данная функция убывает на промежутке $(-\infty, 2)$ и возрастает на промежутке $(2, +\infty)$.◄