§2. Геометрический и механический смысл производной

1º. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, а Г – график этой функции. Прямая *L*, проходящая через точки
$M_0(x_0, f(x_0)), M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in \Gamma$, называется *секущей* по отношению к
Г (рис. 2.1). Уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (2.1)$$

где $y_0 = f(x_0)$, задаёт все прямые, проходящие через точку M_0 с данным угловым коэффициентом *k*, кроме прямой $x = x_0$ (см. §3 глава 1 раздел 3). Подставив в (2.1) координаты точки M_1, получим:

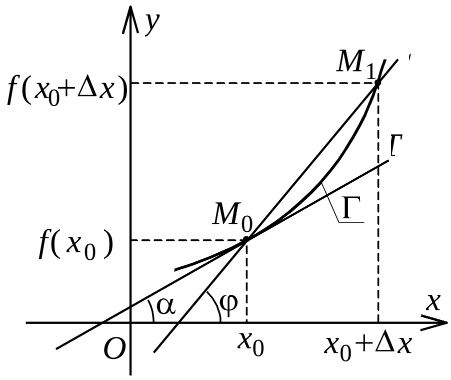

Рис. 2.1. К понятию касательной к графику

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k_1(x_0 + \Delta x - x_0)$$

отсюда $\Delta y = k_1 \Delta x$, где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,
а $k_1 = \mathrm{tg}\varphi$ – угловой коэффициент секущей *L*
(рис. 2.1). Имеем $k_1 = \Delta y / \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ как приращение непрерывной функции, при этом точка $M_1 \in \Gamma$ приближается к точке $M_0 \in \Gamma$. Если данная функция имеет в точке $x = x_0$ производную $y'(x_0)$, то секущая *L* при $\Delta x \to 0$ имеет предельное положение, характеризуемое угловым коэффициентом $k_0 = \mathrm{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$, которое называется *касательной T* к графику Г в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.1). Уравнение касательной *T* получим из (2.1), взяв нужный угловой коэффициент:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.2)$$

Итак, *геометрически* производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 интерпретируется как *угловой коэффициент касательной*, проведённой к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

Пример 2.1. Написать уравнение касательной *T* к графику функции $f(x) = x^3 - x$ в точке (1,0).

► $f'(1) = 2$ (пример 1.1). Уравнение касательной *T* получим из соотношения (2.2): $y - 0 = 2(x - 1)$ ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $y'(x_0) = 2$ (пример 1.1)), *T*: $y = 2x - 2$.◄

Если односторонние производные функции $y = f(x)$ в точке x_0 не равны между собой, т. е. $y'_-(x_0) \neq y'_+(x_0)$, то её график Г не имеет касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Однако, в этом случае в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть так называемые односторонние касательные T_1 и T_2 (левая и правая), являющиеся предельным положением секущей L при $\Delta x \to -0$ или $\Delta x \to +0$, угловыми коэффициентами которых служат $y'_-(x_0)$, $y'_+(x_0)$. Касательные T_1 и T_2 определяются уравнениями:

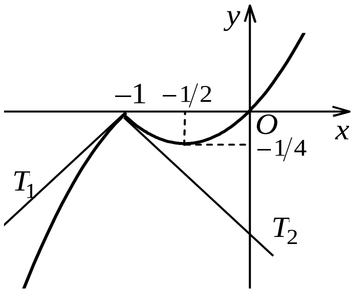

Рис. 2.2. График функции $f(x) = x|x+1|$

$$T_1: \ y - y_0 = y'_-(x_0)(x - x_0), \qquad (2.3)$$

$$T_2: \ y - y_0 = y'_+(x_0)(x - x_0). \qquad (2.4)$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ при этом называется *угловой точкой* графика Г. Так, функция

$$f(x) = x|x+1| = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < -1, \\ (x^2 + x), & x \geq -1, \end{cases}$$

в точке $x = -1$ имеет производные: $f'_-(-1) = 1$, $f'_+(-1) =$ = –1 (пример 1.2), её график имеет в точке (–1, 0) односторонние касательные T_1: $y = x + 1$ и T_2: $y = -x - 1$ (рис. 2.2), их уравнения можно получить из (2.3) и (2.4). Точка (–1, 0) – угловая точка графика.

График Г функции $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, вертикальную касательную, определяемую уравнением $x = x_0$, если $f'(x_0) = \pm\infty$. Так,

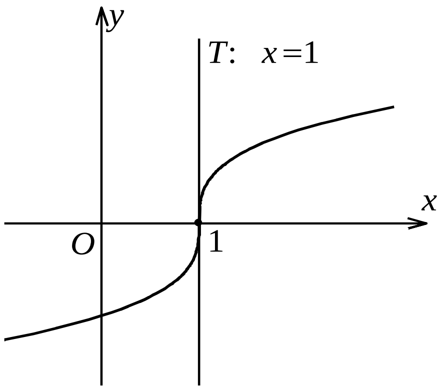

Рис. 2.3. График функции $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

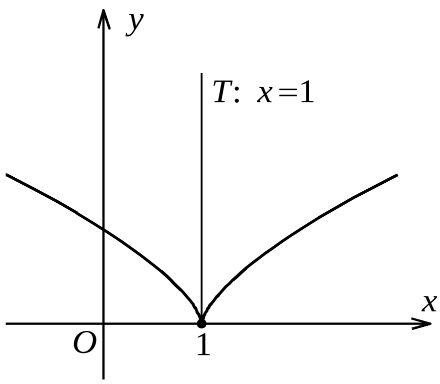

Рис. 2.4. График функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

график функции $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ имеет в точке (1,0) вертикальную касательную T: $x = 1$ (рис. 2.3), поскольку $f'(1) = +\infty$ (пример 1.3). Если $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ являются бесконечными производными разных знаков, график имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ так называемое остриё, через которое проходит вертикальная касательная. Например, график функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ имеет в точке (1,0) остриё, через него проходит вертикальная касательная $x = 1$ (рис. 2.4), ибо $f'_-(1) = -\infty$, а $f'_+(1) = +\infty$ (пример 1.4).

2°. Пусть $s = s(t)$ – путь, пройденный материальный точкой за время t при движении по прямой, тогда $s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$ – путь, пройденный за время Δt, а отношение $\Delta s/\Delta t$– средняя скорость движения на этом промежутке времени. Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t)$, то он является мгновенной скоростью v точки в момент времени t, т.е. $\dot{s}(t) = v(t)$.

Итак, *механически* производная интерпретируется как *мгновенная скорость движения*, если данная функция определяет путь, проходимый материальной точкой в прямолинейном движении.