§3. Действия с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

1. Умножение комплексных чисел. Пусть отличные от нуля комплексные числа z_1 и z_2 записаны в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2). \tag{3.1}$$

Найдем тригонометрическую форму произведения $z_1 z_2$. Имеем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\ (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$ Отсюда:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \tag{3.2}$$

Правая часть равенства (3.2) является тригонометрической формой числа $z_1 z_2$.

Из (3.2) следует:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = r_1 r_2; \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

При умножении комплексных чисел z_1, z_2 их модули перемножаются, а аргументы складываются (точнее: сложив аргументы сомножителей, получаем одно из значений $\arg(z_1 z_2)$). Геометрически умножение z_1 на z_2 сводится к повороту вектора z_1 на угол $\arg z_2$ и к изменению длины вектора z_1 в $|z_2|$ раз.

2. Деление комплексных чисел. Найдём частное z_1/z_2, где z_1 и z_2 заданы равенствами (3.1). Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$ Значит,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big), \tag{3.3}$$

причём правая часть этого равенства является тригонометрической формой числа z_1/z_2. Таким образом,

при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (точнее: при вычитании из аргумента числителя аргумента знаменателя получается одно из значений аргумента частного).

Пример 3.1. Пусть $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_3}$.

► Запишем заданные числа в тригонометрической форме:

$$z_1=\sqrt{2}\cdot(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4);\ z_2=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4);$$
$$z_3=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3).$$
Таким образом, $|z_1|=\sqrt{2}$, $\arg z_1=-\pi/4$; $|z_2|=|z_3|=1$; $\arg z_2=\pi/4$; $\arg z_3=\pi/3$,
$$z_1 z_2=\sqrt{2}\cdot 1\cdot(\cos(-\pi/4+\pi/4)+i\sin(-\pi/4+\pi/4))=\sqrt{2};$$
$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)\right).$$ ◄

3. Формула Муавра. Пусть $z\neq 0$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, n – натуральное число. Степень z^n представляет собой произведение n одинаковых множителей, поэтому z^n можно вычислить по формуле (3.2):
$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{3.4}$$

Определим целые неположительные степени комплексного числа z, $z\neq 0$. По определению положим $z^0=1$ и $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ для всякого n, $n\in\boldsymbol{N}$. Заметим: если $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, а $n\in\boldsymbol{N}$, то, воспользовавшись формулой (1.6), получим:
$$z^{-n}=\frac{1}{r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}=\frac{1}{r^n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=r^{-n}\big(\cos(-n)\varphi+i\sin(-n)\varphi\big).$$
Итак, равенство (3.4) справедливо при любых целых n. Это равенство называют *формулой Муавра*; его правая часть представляет собой тригонометрическую форму числа z^n, $n\in\boldsymbol{Z}$. Заметим, что $|z^n|$ равен $|z|^n$. Если $\varphi=\arg z$, то $n\varphi$ есть одно из значений $\arg(z^n)$. В частности, при $r=1$ из (3.4) имеем:
$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{3.5}$$

4. Извлечение корня из комплексного числа.

Определение 3.1. Пусть n – натуральное число, $n\geq 2$. *Корнем n-ой степени* из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству:
$$w^n=z. \tag{3.6}$$

Обозначение: $w=\sqrt[n]{z}$.

Покажем, что корень n-ой степени из любого комплексного числа существует и имеет ровно n различных значений, за исключением случая $z=0$. Положим: $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Равенство (3.6) в силу формулы Муавра эквивалентно следующему:
$$\rho^n(\cos n\psi+in\sin\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{3.7}$$

Два комплексных числа равны только в том случае, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π, поэтому из (3.7) имеем:
$$\rho^n=r,\quad n\psi=\varphi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$
Отсюда получаем:

$$\rho=\sqrt[n]{r} \text{ (корень арифметический)}, \quad \psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Таким образом, корень n-ой степени из числа z существует и имеет значения:

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k\in\mathbf{Z}. \tag{3.8}$$

В случае $z=0$, очевидно, $\rho=0$ и $w=0$ – единственное значение $\sqrt[n]{0}$. Покажем, что при $z\neq 0$ среди чисел, определяемых (3.8), ровно n различных. Положив в (3.8) $k=0,1,2,\ldots,n-1$, получим n различных значений $\sqrt[n]{z}$:

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{3.9}$$

Если k не совпадает ни с одним из чисел $0,1,2,\ldots,n-1$, то соответствующее ему значение $\sqrt[n]{z}$ в силу периодичности синуса и косинуса будет совпадать с одним из чисел в (3.9). Так, $w_n=w_0$, $w_{n+1}=w_1$ и т.д. Итак, показано, что все различные значения корня n-ой степени из числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ содержатся в формуле (3.9). Модуль любого из этих значений равен $\sqrt[n]{r}$ (имеется в виду арифметическое значение корня степени n из положительного числа r), а аргументы соседних значений отличаются на одно и то же число $2\pi/n$, так что все они лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке $z=0$ и делят эту окружность на n равных дуг (рис. 3.1).

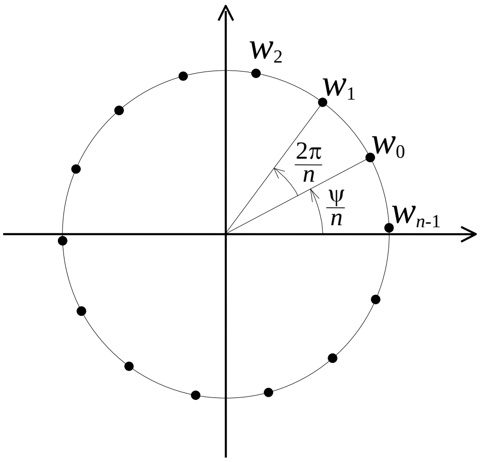

Рис. 3.1. Расположение корней степени n из числа z

Пример 3.2. Найти все значения $\sqrt[n]{1}$.

►Обозначим $w=\sqrt[n]{1}$ и представим число 1 в тригонометрической форме: $1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$. Так как $r=1$; $\varphi=\arg 1=0$, то в силу (3.9) имеем:

$$w_k=\sqrt[n]{1}\cdot\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right)=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где k достаточно придать значения $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

При $n=2$ и $k=0,1$, получаем два значения корня квадратного из единицы:

$$z_0=\cos 0+i\sin 0=1;\ z_1=\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2}=-1.$$

При $n=3$ и $k=0,1,2$, имеем три значения корня кубического из единицы:

$$z_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_1=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Эти три точки делят единичную окружность на три равные дуги.◄