§4. Понятие линейной зависимости и линейной независимости системы векторов

Определение 4.1. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется сумма произведений данных векторов на произвольные вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Таким образом, линейная комбинация векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ имеет вид

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n, \qquad (4.1)$$

где $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь под $\boldsymbol{R}$ понимается множество всех вещественных чисел (см. раздел 4, глава 1, §1). Очевидно, линейная комбинация векторов также является вектором.

Определение 4.2. Линейная комбинация (4.1) векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *нетривиальной*, если не все числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, равны нулю, т.е. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$. Если все $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то линейная комбинация (4.1) называется *тривиальной*.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых векторов является нуль-вектором. Действительно, $0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$.

Определение 4.3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, иначе данные векторы называются *линейно независимыми*.

Для линейно зависимых векторов равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \qquad (4.2)$$

выполняется при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих условию $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, а для линейно независимых векторов равенство (4.2) справедливо только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Свойства линейно зависимых векторов

1. Если хотя бы один из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

2. Если какие-то k из n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ $(2 \le k < n)$ линейно зависимы, то и все векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы.

3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией всех остальных.

►1–2. Доказательство следует из возможности выбора ненулевых коэффициентов в равенстве (4.2). В первом случае такой коэффициент можно выбрать при нулевом векторе. Во втором случае этот выбор обеспечивается линейной зависимостью k векторов системы. Пусть это векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$. Тогда существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k = \vec{0}$. Если положить $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots = \lambda_n = 0$, то получим нетривиальную линейную комбинацию $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k + 0 \cdot \vec{e}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n$, равную $\vec{0}$- вектору.

3. Утверждение “данные векторы линейно зависимы” означает, что в равенстве (4.2) не все $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Для определённости предположим, что $\lambda_n \neq 0$, при этом равенство (4.2) преобразуется к виду

$$\vec{e}_n = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{e}_{n-1}, \tag{4.3}$$

где $\alpha_i = -\lambda_i/\lambda_n$, $i = 1, \ldots, n-1$. А это и означает, что один из векторов (а именно $\vec{e}_n$) является линейной комбинацией векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$. Напротив, если имеет место равенство (4.3), то для векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ из (4.3) получаем:

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{e}_{n-1} - \vec{e}_n = 0. \tag{4.4}$$

Левая часть равенства (4.4) – нетривиальная линейная комбинация данных векторов, так как коэффициент при векторе $\vec{e}_n$ равен –1. Следовательно, по определению 4.3 в силу (4.4) данные векторы линейно зависимы. ◄

Замечание 4.1. Понятие линейной зависимости и линейной независимости, вообще говоря, отнесены к системе векторов. Для единства формул и формулировок любой ненулевой вектор целесообразно считать линейно независимым, а нуль-вектор – линейно зависимым. Действительно, равенство $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ при $\lambda \neq 0$ справедливо только при $\vec{a} = \vec{0}$.