Резюме к главе 2

Установлен принципиальный факт – не все интегралы являются берущимися, поэтому указываются классы элементарных функций, для которых интегралы можно взять с помощью преобразований и подстановок. Интегралы от рациональных функций берутся с помощью преобразований, выделяющих из рациональной функции целую часть и элементарные дроби. Для функций, рационально зависящих от синуса и косинуса, и некоторых иррациональных указаны подстановки, рационализирующие соответствующие интегралы. В справочниках по математике обычно имеются достаточно обширные таблицы неопределенных интегралов, в которых для берущихся интегралов указаны конкретные первообразные, а часто встречающиеся неберущиеся интегралы выражены через специальные функции, для которых существуют таблицы.

Контрольные вопросы к главе 2

Если вы затрудняетесь ответить на поставленные вопросы или отвечаете неправильно, то следует еще раз проработать соответствующий теоретический материал. Ответы на некоторые вопросы с короткими ответами приведены в конце вопросника.

1. Какая функция называется рациональной? Что такое рациональная алгебраическая дробь?

2. Выпишите элементарные дроби в общем виде всех четырех типов.

3. Найдите интегралы $\int \frac{dx}{x-1}$; $\int \frac{dx}{(x+1)^3}$.

4. Какого типа элементарная дробь стоит под знаком интеграла $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}dx$? Найдите этот интеграл.

5. На какие элементарные дроби разлагается рациональная дробь $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2(x^2+x+5)}$? Что изменится в этом разложении, если числитель $x+1$ заменить на x^2+1?

6. Как интегрируется неправильная рациональная дробь?

7. Являются ли интегралы $\int \frac{x}{\sin x+\cos x}dx$, $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$ интегралами типа (2.1)?

8. Какая из подстановок, рекомендованных в 1°, §2, целесообразна для отыскания интеграла $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$? Найдите этот интеграл.

9. Укажите подстановку для рационализации интеграла $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x}}$.

10. Как найти интеграл $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$?.

11. Какой интеграл называется неберущимся?

12. Покажите, что интеграл $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ является берущимся, выполнив подстановку $\sqrt{x} = z$.

Ответы на контрольные вопросы к главе 2

3. $\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C$;

$\int \frac{dx}{(x+1)^3} = \int (x+1)^{-3} d(x+1) = \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C$.

4. Третьего.

$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 3\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \ln(x^2+4x+5) - 3\operatorname{arctg}(x+2) + C$.

5. $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+5}$. Изменятся лишь коэффициенты A, B, C, D, E.

7. Первый – нет, второй – да.

8. Так как интеграл $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$ является интегралом типа (2.1), то для его нахождения подходит универсальная постановка $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, однако более целесообразной является подстановка $z = \sin x$.

$$J = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} = \int \frac{(1-z^2)+z^2}{z^2(1-z^2)} dz = \int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dz}{1-z^2} =$$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

9. $z = \sqrt[3]{x}$.

10. Подходит любая из подстановок $x = \sin t$; $\sqrt{1-x^2} = t$; $x = \frac{1}{u}$. Выполним, например, последнюю. Тогда $dx = -\frac{1}{u^2} du$;

$$J = \int \frac{-\frac{1}{u^2} du}{\frac{1}{u}\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = -\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-1} - \ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|\right) + C =$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|\right)+C=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2}-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\right|\right)+C.$$

12. $x=z^2$; $\quad\int\cos z\cdot 2z\,dz=2\int z\cos z\,dz=\left[\begin{array}{c|c} u=z & \cos z\,dz=dv \\ du=dz & \sin z=v\end{array}\right]=$

(интегрируем по частям)

$$=2\left(z\sin z-\int\sin z\,dz\right)=2(z\sin z+\cos z)+C=2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+C.$$