§3. Степенные ряды. Первая теорема Абеля

Определение 3.1. ***Степенным рядом называется функциональный ряд вида***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (3.1)$$

где, числа $a_n \in \mathbf{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами степенного ряда (1).

Замечание 3.1. Степенные ряды замечательны прежде всего тем, что их члены $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ являются сравнительно простыми функциями. Частичные суммы степенного ряда $s_n(x)$ – многочлены от переменной x степени не выше n. Относительная простота $u_n(x)$ и $s_n(x)$ служит причиной многих свойств, присущих степенным рядам, которыми, вообще говоря, не обладают другие функциональные ряды. Заметим также, что область сходимости степенного ряда никогда не является пустым множеством, поскольку ряд (2.1) обязательно сходится в точке x_0.

Если в ряде (3.1) сделать замену переменной, положив $y = x - x_0$, то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n . \qquad (3.2)$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (3.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (3.2). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (3.2), но для обозначения переменной будем рассматривать букву x, а не y.

В основе теории степенных рядов лежит следующая теорема.

Теорема 3.1 (первая теорема Абеля). ***Если степенной ряд***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \qquad (3.3)$$

сходится при $x - x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при любом x, у которого $|x| < |x_0|$.

Если степенной ряд (3.3) расходится при $x = x_0$, то он расходится и при всяком x, у которого $|x| > |x_0|$.

▸ Доказательство проведём в два этапа.

1. Пусть ряд (3.3) сходится в некоторой точке x_0, иными словами, сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n . \qquad (3.4)$$

Но тогда общий член ряда (3.4) стремится к нулю при $n \to \infty$, и потому последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M\ ,\ \ n = 1, 2, \ldots\ .$$

В силу этого для общего члена ряда (3.3) получается следующая оценка:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Если $|x| < |x_0|$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

является геометрическим рядом со знаменателем $q = \left|x/x_0\right| < 1$ и, следовательно, сходится. Но тогда по признаку сравнения сходится и ряд

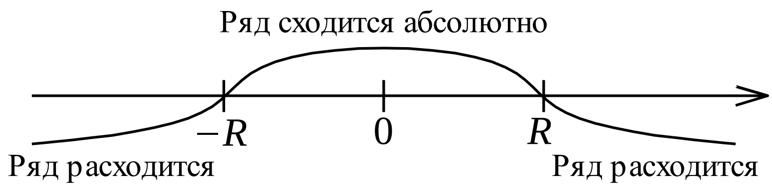
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|,$$

а это и означает абсолютную сходимость ряда (3.3) при $|x| < |x_0|$.

2. Пусть теперь ряд расходится при некотором $x = x_0$. Но тогда он будет расходиться при любом x', удовлетворяющем условию $|x'| > |x_0|$. В самом деле, если бы при каком-либо x', удовлетворяющем условию $|x'| > |x_0|$, ряд (3.3) сходился, то в силу только что доказанной первой части теоремы он должен был бы сходиться в точке x_0, так как $|x_0| < |x'|$. Но это противоречит условию, что в точке x_0 ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x'. ◀

Следствие. Первая теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда (3.3). Действительно, пусть в точке $x_0 \ne 0$ ряд (3.3) сходится, но тогда ряд (3.3) сходится в каждой точке интервала $(-|x_0|, |x_0|)$. Если же ряд (3.3) расходится в точке x_1, то он расходится в интервалах $(-\infty, -|x_1|)$, $(|x_1|, +\infty)$.

Из этого можно заключить, что для рассматриваемого степенного ряда существует число $R > 0$, такое, что при $|x| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.



Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

Замечание 3.2. На концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) ряд (3.3) может или сходиться или расходиться. Здесь необходимо дополнительное исследование.

Замечание 3.3. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку $(R = 0)$, а у других совпадает со всей осью $(R = \infty)$.

При нахождении радиуса сходимости степенного ряда в многих случаях

возможно использовать следующие теоремы.

Теорема 3.2. ***Если для степенного ряда (3.1) существует конечный предел***

$$\boldsymbol{l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \tag{3.5}$$

(конечный или бесконечный), то этот предел равен радиусу сходимости ряда (2.1), т. е. $\boldsymbol{R = l}$**.**

Теорема 3.3. ***Если для степенного ряда (3.1) существует конечный предел***

$$\boldsymbol{l = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}} \tag{3.6}$$

(конечный или бесконечный), то этот предел равен радиусу сходимости ряда (3.1), т. е. $\boldsymbol{R = l}$**.**

Теоремы 3.2 и 3.3 доказываются аналогично. Докажем, например, теорему 3.2.

► Используя признак Даламбера, исследуем ряд (3.1) на абсолютную сходимость в произвольно взятой точке x.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-x_0|}{l}.$$

Согласно признаку Даламбера, при $\frac{|x-x_0|}{l} < 1$ ряд (3.1) сходится, а при $\frac{|x-x_0|}{l} > 1$ – расходится. Таким образом, число l удовлетворяет определению радиуса сходимости, т. е. $R = l$. ◄

Замечание 3.4. Затруднения, связанные с применением формул (3.5), (3.6) для определения радиуса сходимости степенного ряда возникают в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю.

Пример 3.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$.

► Коэффициенты $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$. Чтобы определить радиус сходимости ряда, воспользуемся формулой (3.4).

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1,$$

значит, ряд сходится абсолютно при $x \in (1;\,3)$. Выясним его поведение на концах интервала сходимости.

1. Пусть $x = 3$, рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это расходящийся гармонический ряд, следовательно, исходный степенной ряд расходится при

$x = 3$.

2. Возьмём теперь $x = 1$ и рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Как было показано в примере из §5 главы 2, этот ряд является условно сходящимся, следовательно, исходный степенной ряд условно сходится при $x = 1$.

Ответ: ряд сходится абсолютно при $x \in (1; 3)$, сходится условно при $x = 1$, в остальных случаях ряд расходится. ◄

Пример 3.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$.

► Поскольку $a_n = n! \neq 0$, воспользуемся формулой (3.5) для определения радиуса сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

следовательно, данный ряд сходится в единственной точке $x = 2$. ◄

Пример 3.3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$.

► Используем формулу (3.5):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

следовательно, ряд сходится при любых вещественных x, его область сходимости $E = (-\infty, +\infty)$.◄

Пример 3.4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$.

► В рассматриваемый ряд входят только члены с чётными степенями $(x-2)$, следовательно, все нечётные коэффициенты ряда равны нулю. Это означает, что в данном случае нельзя пользоваться формулами (3.5), (3.6). Применим к данному ряду, например, радикальный признак Коши. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-2)^{2n}}{2^n} \right|} = \frac{(x-2)^2}{2},$$

то ряд будет абсолютно сходиться, если

$$\frac{(x-2)^2}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-2| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}).$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x = 2+\sqrt{2}$, тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+\sqrt{2}-2)^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю. При $x = 2-\sqrt{2}$ данный ряд также расходится. Таким образом, область сходимости ряда $E = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. ◄