

УДК 530.1  
ББК 22.3  
Л39

Леденев А. Н. **Физика: Учебное пособие:** Для вузов. В 5 кн. Кн. 1. **Механика.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 240 с. — ISBN 5-9221-0461-6.

Основу настоящего курса физики составляют лекции, читаемые автором слушателям Института криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. Тематически курс разделен на пять основных физических разделов, оформленных в виде отдельных книг: «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика», «Электromагнетизм», «Колебания и волны. Оптика», «Основы квантовой физики». В первой книге рассмотрены кинематика, динамика материальной точки, законы сохранения импульса, энергии и момента импульса, динамика твердого тела, механические колебания. Большое внимание уделено кинематике твердого тела, преобразованиям скорости и ускорения при переходе от одной системы отсчета к другой, понятию потенциальной энергии и ее свойствам. Механика жидкости и газа не рассматривается. Свою основную задачу автор видел в отборе основных вопросов механики в соответствии с учебной программой и кратком, но достаточно строгом их изложении в виде системы понятий, определений, законов и теорем.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника».

#### Рецензенты:

кафедра физики Московского института радиозлектроники и автоматики;  
проф. А.Н. Сафронов (Научно-исследовательский институт ядерной  
физики МГУ им. М.В. Ломоносова)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
Введение . . . . .	9

### Г л а в а I

<b>Кинематика материальной точки и твердого тела . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Пространственно-временные системы отсчета . . . . .	11
§ 2. Векторный и координатный способы описания движения частицы . . . . .	15
§ 3. Естественнo-параметрический способ описания движения частицы . . . . .	21
§ 4. Твердое тело в механике. Виды движения . . . . .	25
§ 5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси . . . . .	29
§ 6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки . . . . .	32
§ 7. Плоское движение твердого тела . . . . .	33
§ 8. Положение мгновенной оси вращения при плоском движении . . . . .	37
§ 9. Свободное движение твердого тела . . . . .	40
§ 10. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей . . . . .	40
§ 11. Производная по времени вектора постоянной длины и меняющегося направления . . . . .	43
§ 12. Преобразование скорости и ускорения частицы при переходе к другой системе отсчета . . . . .	45
Задачи . . . . .	50

### Г л а в а II

<b>Динамика материальной точки . . . . .</b>	<b>52</b>
§ 13. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея . . . . .	52
§ 14. Второй и третий законы Ньютона . . . . .	56
§ 15. Классификация сил в природе. Законы сил . . . . .	60
§ 16. Движение относительно неинерциальных систем отсчета. Силы инерции . . . . .	65
Задачи . . . . .	73

## Г л а в а III

**Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса . . . 74**

§ 17. Закон сохранения импульса . . . . .	74
§ 18. Теорема о движении центра масс . . . . .	79
§ 19. Движение тела с переменной массой. Реактивная сила . . . . .	81
§ 20. Приведенная масса . . . . .	83
§ 21. Работа силы. Мощность . . . . .	86
§ 22. Теорема о кинетической энергии . . . . .	93
§ 23. Преобразование кинетической энергии при переходе к другой системе отсчета. Теорема Кенига . . . . .	97
§ 24. Силовое поле. Консервативные силы и их свойства . . . . .	99
§ 25. Потенциальная энергия частицы и ее свойства . . . . .	101
§ 26. Вычисление потенциальной энергии частицы . . . . .	104
§ 27. Связь потенциальной энергии и силы поля. Эквипотенциальные поверхности . . . . .	106
§ 28. Закон сохранения полной механической энергии частицы . . . . .	111
§ 29. Потенциальная энергия и закон сохранения полной механической энергии системы частиц . . . . .	113
§ 30. Закон сохранения энергии при движении в гравитационном поле. Космические скорости . . . . .	120
§ 31. Момент импульса частицы и момент силы. Уравнение моментов . . . . .	125
§ 32. Момент импульса частицы при движении в гравитационном поле. Закон площадей . . . . .	128
§ 33. Закон сохранения момента импульса системы частиц . . . . .	129
§ 34. Преобразование моментов импульса и силы при изменении неподвижного начала . . . . .	133
Задачи . . . . .	139

## Г л а в а IV

**Динамика твердого тела . . . . . 141**

§ 35. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции . . . . .	141
§ 36. Кинетическая энергия твердого тела и работа внешних сил . . . . .	146
§ 37. Динамика плоского движения твердого тела . . . . .	148
§ 38. Гироскопы . . . . .	154
§ 39. Вычисление моментов инерции однородных тел . . . . .	160
§ 40. Теорема Гюйгенса-Штейнера о параллельном переносе оси момента инерции . . . . .	163
§ 41. Тензор инерции . . . . .	165
Задачи . . . . .	171

## Г л а в а V

**Механические колебания . . . . . 173**

§ 42. Гармонические колебания. Колебания тела под действием упругой силы . . . . .	173
--	-----

---

§ 43. Колебания математического и физического маятников. Теорема Гюйгенса о центре качания . . . . .	180
§ 44. Затухающие колебания . . . . .	186
§ 45. Сложение гармонических колебаний одинакового направления методом векторных диаграмм . . . . .	196
§ 46. Вынужденные колебания. Резонанс . . . . .	198
Задачи . . . . .	205
Ответы к задачам . . . . .	207
 П р и л о ж е н и я	
<b>I. Основные определения и формулы механики . . . . .</b>	<b>208</b>
Кинематика . . . . .	208
Динамика . . . . .	212
Законы сохранения . . . . .	214
Динамика твердого тела . . . . .	224
Механические колебания . . . . .	227
<b>II. Системы единиц физических величин . . . . .</b>	<b>232</b>
Предметный указатель . . . . .	237

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу издаваемого курса «Физика» легли лекции, которые автор в течение ряда лет читает слушателям Института криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. В первой из пяти охватывающих все содержание курса книге рассмотрены кинематика материальной точки и твердого тела, динамика материальной точки, законы сохранения импульса, энергии и момента импульса, динамика твердого тела, механические колебания. Свою главную задачу автор видел в отборе в соответствии с учебной программой основных вопросов механики и кратком, но достаточно строгом их изложении.

В настоящее время студентам вузов предлагается широкий выбор учебников и учебных пособий по физике, в которых дается фундаментальное, всеобъемлющее изложение этой дисциплины. К таковым относятся ставшие классическими книги И.В. Савельева «Курс общей физики», Д.В. Сивухина «Общий курс физики» и другие. За полноту содержания учебника неизбежно приходится расплачиваться большим объемом книги.

Цель, которую ставил перед собой автор при создании настоящего пособия, заключалась в том, чтобы компактно изложить основные вопросы курса физики, его традиционной, устоявшейся части. Добиваясь краткости, легко превратить книгу из учебника в справочник, в набор формул и бездоказательных утверждений. Во избежание этой опасности материал курса представлен в виде системы взаимосвязанных понятий, определений, постулатов, законов и теорем физики. Автор стремился добиться логической последовательности изложения и обоснованности выводов.

Автор надеется, что краткое, достаточно полное по содержанию и строгое по характеру изложения пособие окажется полезным для студентов, нередко испытывающих недостаток времени для работы над учебниками большого объема.

В конце книги имеется приложение, содержащее определения физических понятий, формулировки законов и соответствующие математические формулы. Структура приложения отражает логику материала основного текста. Оно полезно как при первом чтении книги, так и в процессе ее повторения.

Системой единиц, принятой в курсе, является Международная система единиц (СИ). Поскольку наряду с СИ допускается применение системы СГС, в приложении к книге приводятся основные и производные единицы обеих систем и связь между ними.

Автор глубоко признателен Д.А. Миртовой, огромный опыт и творческое участие которой способствовали улучшению рукописи.

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ

Физика изучает фундаментальные и, вместе с тем, наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, законы ее движения. Понятия и законы физики лежат в основе всего естествознания. Слово «физика» происходит от греческого слова «*physis*», что означает природа. Границы, отделяющие физику от других естественных наук, в значительной мере условны и меняются с течением времени.

Физика изучает *количественные* закономерности явлений и потому относится к *точным* наукам.

Законы физики базируются прежде всего на фактах, установленных опытным путем, то есть физика в целом — наука *экспериментальная*.

Физика неразрывно связана с математикой, ее законы представляют собой количественные соотношения и формулируются на *математическом* языке.

Различают экспериментальную и теоретическую физику. Экспериментальная физика включает в себя опыты, проводимые для обнаружения новых фактов и для проверки известных физических законов. Цель теоретической физики состоит в формулировании законов природы и объяснении конкретных явлений на основе этих законов, а также в предсказании новых явлений. При изучении любого явления опыт и теория в равной мере необходимы и взаимосвязаны.

В соответствии с многообразием исследуемых объектов и форм движения материи физика подразделяется на ряд разделов, связанных друг с другом. Это деление неоднозначно, его можно проводить, руководствуясь различными критериями.

По изучаемым *объектам* физика делится на физику элементарных частиц, физику ядра, физику атомов и молекул, физику жидкостей и газов, физику твердого тела, физику плазмы, астрофизику и т.д.

Другой критерий деления физики на разделы — деление в соответствии с изучаемыми процессами или *формами движения материи*. Соответственно, в физике выделяют механику материальной точки и абсолютно твердого тела, механику сплошных сред, термодинамику и статистическую физику, электродинамику и оптику, теорию тяготения, квантовую механику и квантовую теорию поля.

Особо выделяют в физике учение о колебаниях и волнах. Это обусловлено общностью закономерностей колебательных процессов различной физической природы и общностью методов их исследования. При этом рассматриваются механические, акустические, электрические и оптические колебания и волны с единой точки зрения.

Вследствие глубокой внутренней взаимосвязи между объектами материального мира и процессами, в которых они участвуют, указанные разделы физики частично перекрываются.

Предлагаемый вниманию читателей курс физики имеет традиционное деление на разделы: механика, молекулярная физика и термодинамика, электромагнетизм, колебания и волны, оптика, основы квантовой физики. Первая книга посвящена механике.

## КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематика — это раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих сил. Исходными в кинематике являются понятия пространства и времени, которые невозможно определить через какие-либо другие более простые понятия. Свойства пространства (пространство трехмерно, однородно и изотропно) и времени (время одномерно и однородно) имеют принципиальное значение для построения кинематики и механики в целом. Историческое развитие физических представлений о пространстве и времени проходило по двум направлениям. В основе одного лежали идеи Демокрита (V век до н.э.), который рассматривал пустоту (пространство) как особый род бытия. Идеи Демокрита нашли наиболее полное воплощение в ньютоновских понятиях абсолютного пространства и абсолютного времени. Другое направление восходит к Аристотелю (IV век до н.э.) и, позднее, к Г.В. Лейбницу (1646–1716), который рассматривал пространство и время как определенные типы отношений между материальными объектами. Согласно этим представлениям, пространство и время не имеют самостоятельного существования. Концепция Лейбница была развита А. Эйнштейном (1879–1955) в специальной и общей теории относительности. В данной книге мы ограничимся изложением основных законов классической ньютоновской механики. Некоторые вопросы релятивистской механики рассматриваются в других разделах курса.

### § 1. Пространственно-временные системы отсчета.

#### Постулаты классической механики о пространстве, времени и движении

**Относительность движения.** *Механическим движением* называется изменение положения тела в пространстве с течением времени. Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Это же касается и движения тела. В связи с этим вводится понятие тела отсчета.



*Телом отсчета* называется тело (система тел), относительно которого определяется положение в пространстве интересующего нас объекта.

Так, движение артиллерийского снаряда удобно описывать относительно поверхности Земли, движение межпланетного космического корабля — относительно Солнца. В первом случае телом отсчета является Земля, во втором — Солнце.

**Система координат.** Для описания движения на практике с телом отсчета всегда жестко связывают какую-либо систему координат.

*Декартова* прямоугольная система координат — это три пересекающиеся в одной точке (начало координат) взаимно перпендикулярные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1).

Существуют два вида координатных систем: правая и левая. В правой системе координат кратчайший переход от положительного конца оси  $x$  к положительному концу оси  $y$ , если его наблюдать от положительного конца оси  $z$ , осуществляется в направлении против часовой стрелки.

В левой системе координат — по часовой стрелке. Мы будем пользоваться правой системой координат.

Координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  небольшого тела  $A$ , которое можно считать материальной точкой (см. ниже), определяют его положение в пространстве. Три координаты удобно объединить в один направленный отрезок или *радиус-вектор*  $\mathbf{r}$ , проведенный из начала координат к телу:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей (орты).

Положение тела на плоскости удобно определять в *полярной* системе координат с помощью двух параметров  $r$  и  $\varphi$  (рис. 2), которые представляют собой, соответственно, длину проведенного из начала координат (точка  $O$ ) к телу  $A$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , и угол между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и некоторой фиксированной осью, обозначенной  $Ox$ .

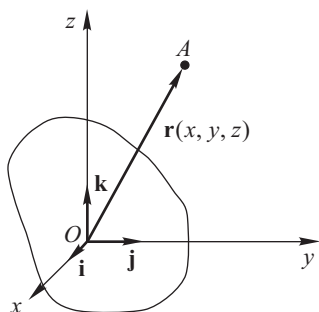


Рис. 1

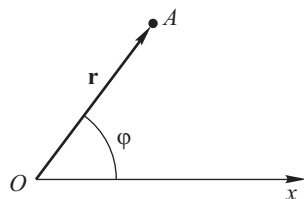


Рис. 2

В *сферической* системе координат положение тела в пространстве задается тремя числами  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  (рис. 3), где  $r$  — длина проведенного из начала координат (точка  $O$ ) к телу  $A$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ ,  $\theta$  — полярный угол, образованный радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  с вертикальной осью  $Oz$  декартовой системы координат;  $\varphi$  — азимутальный угол (угол между проекцией на плоскость  $xy$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и осью  $Ox$  декартовой системы координат).

**Измерение длины.** Определение координат тела в конечном счете сводится к измерению расстояний (длин отрезков).

Под измерением длины мы имеем ввиду следующую операцию. Некоторый твердый стержень принимается за эталон, а его длина — за единицу длины. При измерении расстояния между двумя точками (или длины тела) определяется число, показывающее, сколько раз в отрезке проходящей через эти точки прямой укладывается выбранный эталон. Это число и называется расстоянием или длиной отрезка. Если число не целое, предварительно длину эталона делят на более мелкие части: десятые, сотые и т.д. Длину всякого отрезка можно представить в виде целого числа с десятичной дробью. Инструментом для измерения длины может служить, например, линейка с нанесенной на нее миллиметровой шкалой (простейший эталон). Существуют и значительно более точные методы измерения. Так, при измерении очень малых длин, с которыми имеет дело физика атомов и молекул, применяются методы электронной микроскопии, при измерении расстояний до удаленных объектов — оптические методы и т.д. Однако принципиальный способ измерения длины отрезка всегда сводится к его сравнению с эталоном. За единицу длины в СИ (так принято обозначать *Международную систему единиц*) принят метр (м). Первоначально (с 1799 г.) в качестве эталона использовали платиновый прототип метра в виде линейки ширины 25 см толщины около 4 мм с расстоянием между концами 1 м, причем метр был определен как одна десятиmillionная часть земного меридиана. С конца XIX до середины XX в. международный эталон метра был реализован в виде стержня из сплава платины и иридия. Начиная с 1983 г. метр определен как длина пути, проходимая в вакууме плоской электромагнитной волной за  $1/299\,792\,458$  долю секунды.

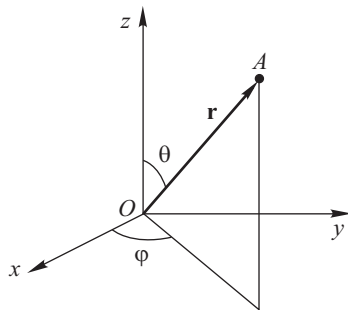


Рис. 3

**Измерение времени.** Движение тел происходит в пространстве и во времени. Для его описания необходимо измерять не только длины отрезков, но и промежутки времени. Это делается с помощью часов.

Под *часами* понимают любое устройство, в котором совершается пригодный для измерения времени периодический процесс.

В качестве примеров используемых в часах периодических процессов можно привести колебания маятника с постоянной амплитудой, вращение Земли вокруг собственной оси, колебания электромагнитного поля и др. За единицу времени в СИ принята *секунда* (с). Эталон секунды — промежуток времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между определенными сверхтонкими энергетическими уровнями основного состояния атома цезия-133 в отсутствие внешних полей.

**Синхронизация часов.** Для описания механического движения необходимо пользоваться единым для всего пространства временем и, следовательно, синхронизовать размещенные в различных частях пространства часы, то есть установить их так, чтобы они показывали одинаковое время. Это можно сделать, например, с помощью световых импульсов. Из пункта  $A$  посылают в пункт  $B$  световой импульс, который, отразившись от расположенного в пункте  $B$  зеркала, возвращается в  $A$ . Полагают, что скорости распространения светового сигнала из пункта  $A$  в пункт  $B$  и обратно одинаковы. Пусть  $t$  — время на расположенных в пункте  $A$  часах в момент отправления сигнала,  $\tau$  — время распространения сигнала из  $A$  в  $B$  и обратно, измеренное по тем же часам. Тогда на часах в пункте  $B$  в момент прихода в этот пункт светового импульса следует установить время  $t + \tau/2$ . В результате часы в точках  $A$  и  $B$  будут показывать одинаковое время.

**Пространственно-временная система отсчета.** Мы установили, что для описания движения в пространстве и во времени необходимо иметь:

- а) тело отсчета и связанную с ним систему координат;
- б) прибор для измерения длин отрезков (линейку);
- в) устройство для измерения промежутков времени (часы);
- г) метод синхронизации часов.

Совокупность перечисленных условий и образует так называемую *пространственно-временную систему отсчета*.

Понятие системы отсчета является фундаментальным в физике. Пространственно-временное описание движения при помо-

щи расстояний и промежутков времени возможно только тогда, когда выбрана определенная система отсчета.

**Постулаты классической механики о пространстве, времени и движении.** В классической ньютоновской механике размеры тел и промежутки времени между событиями рассматриваются как *абсолютные* величины. Это означает, что можно говорить о длине тела («тело имеет длину 1,5 м»), не указывая, покоится или движется тело в данной системе отсчета. Можно говорить об одновременности событий, не указывая, в какой системе отсчета эти события описываются.

Другими словами: линейные масштабы (длины отрезков) и промежутки времени остаются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой, они не зависят от выбора системы отсчета. Эти представления выражают так называемую ньютоновскую *концепцию абсолютности пространства и времени*.

Опыт показывает, что предположения (постулаты) об абсолютности пространства и времени являются справедливыми до тех пор, пока скорости тел малы по сравнению со скоростью света в вакууме, составляющей приблизительно  $3 \cdot 10^8$  м/с. При переходе к скоростям, сравнимым со скоростью света, характер движения тел меняется. События, одновременные в одной системе отсчета, могут оказаться неодновременными в другой системе. Понятие одновременности событий является относительным. Аналогично, размеры движущихся с большими скоростями тел меняются при переходе от одной системы отсчета к другой.

При скоростях, близких к скорости света, линейные масштабы и промежутки времени зависят от выбора системы отсчета. Механика, основанная на представлениях об относительности линейных масштабов и промежутков времени, называется *релятивистской*. В частном случае малых скоростей релятивистская механика переходит в классическую.

## § 2. Векторный и координатный способы описания движения частицы

*Кинематика* — это раздел механики, в котором изучают способы описания движения тел, не интересуясь порождающими это движение причинами.

**Выбор системы отсчета.** В разных системах отсчета движение одного и того же тела выглядит по-разному. В кинематике при выборе системы отсчета руководствуются только сообра-

жениями удобства, поскольку никаких принципиальных отличий одной системы отсчета по сравнению с другой не существует. *В кинематике все системы отсчета эквивалентны.*

Рассматривая движение тел на Земле, естественно связать систему отсчета с Землей. Изучая движение самой Земли, систему отсчета удобнее связывать с Солнцем и т.д.

Принципиальные отличия между определенными классами систем отсчета выявляются только в динамике, изучающей движение в связи с действующими на тела силами. В динамике вводятся понятия инерциальной и неинерциальной систем отсчета (см. ниже).

**Понятие материальной точки.** Реальные движения тел очень сложны. Изучая их, необходимо отвлечься от несущественных для данного движения деталей. С этой целью в физике используются идеализированные модели, применимость которых зависит от конкретного характера интересующей нас задачи и от степени точности, с которой мы хотим получить результат. Среди таких идеализаций большую роль играет понятие материальной точки.

*Материальная точка* — это макроскопическое тело, размеры которого малы по сравнению с характерными для изучаемого движения расстояниями. В этих условиях можно считать, что все вещество тела сосредоточено в одной геометрической точке.

В дальнейшем изложении наряду с термином *материальная точка* будем использовать термин *частица*, вкладывая в них одинаковый смысл.

При решении вопроса, можно или нельзя движущееся тело считать материальной точкой, абсолютные размеры тела не играют роли. Важно отношение размеров тела к характерным для данной задачи расстояниям. При изучении движения Земли, радиус которой составляет 6 400 км, вокруг Солнца по орбите радиусом 150 000 000 км Землю с большой точностью можно считать материальной точкой. Но такая идеализация не годится, когда мы рассматриваем законы вращения Земли вокруг собственной оси.

Произвольное макроскопическое тело, размеры которого возможно и не малы, по сравнению с характерными для данной задачи расстояниями, можно мысленно разбить на малые макроскопические части, взаимодействующие между собой, и каждую из них принять за материальную точку. Тогда *движение произвольного тела сводится к движению системы взаимодействующих между собой материальных точек (частиц)*. Таким образом, механика материальной точки является основой для изучения механики вообще.

Существуют три тесно связанных между собой способа описания движения частицы — векторный, координатный и естественно-параметрический. Рассмотрим их последовательно.

**Векторный способ описания движения.** Рассмотрим движение частицы  $A$  в некоторой выбранной системе отсчета, начало координат которой расположено в точке  $O$ .

*Положение* частицы  $A$  в пространстве при векторном способе описания движения задается радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из начала координат к частице. В процессе движения радиус-вектор  $\mathbf{r}$  меняется как по модулю, так и по направлению, то есть представляет собой векторную функцию времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

*Траектория* — это линия в пространстве, вдоль которой движется частица (геометрическое место концов радиуса-вектора частицы).

Пусть за промежуток времени  $\Delta t$  частица переместилась из точки 1 в точку 2 (рис. 4).

*Перемещением*  $\Delta \mathbf{r}$  за промежуток времени  $\Delta t$  называется вектор, проведенный из начального в конечное положение частицы (из точки 1 в точку 2).

Очевидно, что вектор перемещения  $\Delta \mathbf{r}$  представляет собой приращение радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  частицы за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

*Вектор средней скорости*  $\langle \mathbf{V} \rangle$  за промежуток времени  $\Delta t$  равен

$$\langle \mathbf{V} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по времени.

Вектор средней скорости  $\langle \mathbf{V} \rangle$  совпадает по направлению с вектором перемещения  $\Delta \mathbf{r}$ .

Пусть промежуток  $\Delta t$  стремится к нулю, тогда точка 2 траектории приближается к точке 1 (рис. 4).

*Мгновенной скоростью*  $\mathbf{V}$  частицы (или просто скоростью) называется вектор, равный производной радиуса вектора  $\mathbf{r}$  по времени:

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

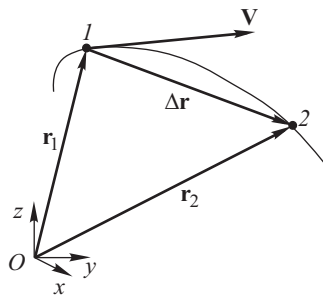


Рис. 4

Мгновенная скорость  $\mathbf{V}$  направлена по касательной к траектории в сторону движения частицы.

Модуль  $V$  скорости частицы равен

$$V = |\mathbf{V}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt}.$$

Модуль скорости, вообще говоря, не совпадает с производной по времени  $dr/dt$  модуля радиуса-вектора частицы.

**Пример.** Частица  $A$  движется по окружности радиуса  $r$  с некоторой скоростью  $\mathbf{V}$  (рис. 5). Очевидно, что  $V \neq 0$ , но при этом  $dr/dt = 0$ , значит  $V \neq dr/dt$ .

**Ускорением** называется вектор, равный производной по времени скорости  $\mathbf{V}$  частицы:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Модуль  $a$  ускорения равен

$$a = |\mathbf{a}| = \left| \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{V}|}{dt}.$$

Модуль ускорения, вообще говоря, не совпадает с производной по времени  $dV/dt$  модуля скорости частицы.

**Пример.** Частица  $A$  равномерно движется по окружности радиуса  $r$  (рис. 6). Поскольку модуль скорости остается неизменным ( $V = \text{const}$ ), то  $dV/dt = 0$ . При этом ускорение  $a = V^2/r$  отлично от нуля и направлено к центру  $O$  окружности. Значит,  $a \neq dV/dt$ .

Если зависимость радиуса-вектора частицы от времени известна, то можно решить так называемую прямую задачу кинематики — определить скорость и ускорение частицы в каждый момент времени.

**Пример.** Дана зависимость  $\mathbf{r} = \mathbf{A}t^2 + \mathbf{B}t + \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  — постоянные векторы. Найдём скорость и ускорение частицы.

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 2\mathbf{A},$$

$$V = \sqrt{\mathbf{V}^2} = \sqrt{4\mathbf{A}^2 t^2 + 4\mathbf{A}\mathbf{B}t + \mathbf{B}^2}.$$

Обратная задача кинематики состоит в том, чтобы зная зависимость от времени ускорения частицы  $\mathbf{a}(t)$  и начальные условия движения (скорость  $\mathbf{V}_0$  и ускорение  $\mathbf{a}_0$  в начальный момент времени  $t=0$ ),

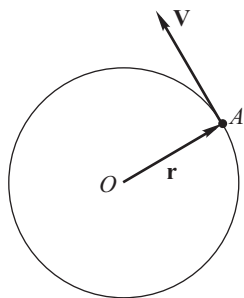


Рис. 5

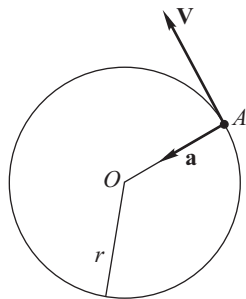


Рис. 6

определить в каждый момент времени скорость  $\mathbf{V}(t)$  и положение частицы в пространстве,  $\mathbf{r}(t)$ .

Пример. Камень брошен под углом к горизонту с начальной скоростью  $\mathbf{V}_0$  из точки, заданной радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$ . Зная ускорение свободного падения  $\mathbf{g}$ , определим  $\mathbf{V}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$ .

По определению ускорения

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем скорость  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{V} &= \mathbf{g} dt, \\ \int_{\mathbf{V}_0}^{\mathbf{V}} d\mathbf{V} &= \int_0^t \mathbf{g} dt, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{g}t. \end{aligned}$$

По определению скорости

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Интегрируя, определим зависимость от времени радиуса-вектора тела:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{V}dt, \quad \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{V} dt, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}.$$

**Координатный способ описания движения.** Для описания движения частицы  $A$  в пространстве выбрано некоторое тело отсчета, с которым связана декартова система координат (рис. 7). Положение частицы в пространстве при координатном способе описания движения задается ее координатами  $x, y, z$ .

*Законом движения* называется зависимость от времени координат частицы  $x(t), y(t), z(t)$ .

Между векторным и координатным способами описания движения существует простая связь. Любой вектор можно задать его проекциями на оси координат (компонентами разложения по базису).

Проекции на оси координат радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из начала координат к частице  $A$ , совпадают с координатами  $x, y, z$

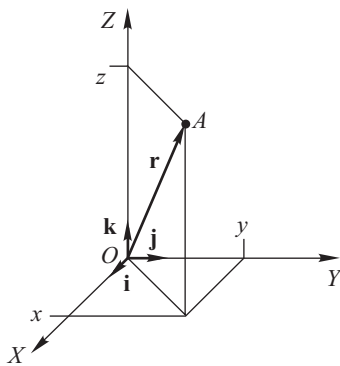


Рис. 7



частицы:  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты координатных осей. (Векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  образуют базис векторного пространства.)

При использовании координатного способа описания движения скорость и ускорение частицы должны быть выражены посредством функций  $x(t), y(t), z(t)$ .

*Скорость*  $\mathbf{V}$  частицы можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

Компоненты вектора скорости, выраженные через функции  $x(t), y(t), z(t)$ , равны

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}.$$

*Ускорение*  $\mathbf{a}$  частицы найдем аналогичным способом:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}) = \frac{dV_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dV_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dV_z}{dt}\mathbf{k}.$$

Компоненты ускорения равны:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Для каждого момента времени можно определить модуль и направление (с помощью косинусов направляющих углов) вектора скорости  $\mathbf{V}$ :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные вектором  $\mathbf{V}$  с осями координат  $x, y, z$ , соответственно.

Аналогично вычисляются модуль и направляющие косинусы вектора ускорения  $\mathbf{a}$ .

**Путь.** Пусть частица, двигаясь вдоль некоторой траектории, переместилась из точки 1 в точку 2 (рис. 8).

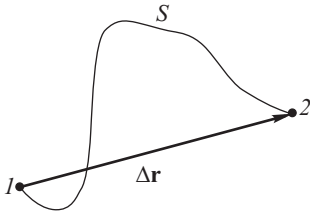


Рис. 8

*Путь* равен измеренному вдоль траектории расстоянию, пройденному частицей в процессе движения (длина траектории).

Обычно путь обозначают буквой  $S$  или символом  $\Delta S$ .

Путь является величиной скалярной и неотрицательной.

Установим связь между модулем скорости  $V$  частицы и путем  $S$ .

За малый промежуток времени  $\Delta t$  частица совершила перемещение  $\Delta \mathbf{r}$  из точки 1 в точку 2 траектории (рис. 9). Пройденный частицей путь равен  $\Delta S$ . Если уменьшать промежуток  $\Delta t$ , точка 2 траектории будет приближаться к точке 1. При этом различие между длиной дуги  $\Delta S$  участка 1–2 траектории и длиной стягивающей эту дугу хорды, равной модулю перемещения  $|\Delta \mathbf{r}|$ , будет уменьшаться. В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  отношение длины дуги  $\Delta S$  к длине хорды  $|\Delta \mathbf{r}|$  равно единице:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{|\Delta \mathbf{r}|} = 1.$$

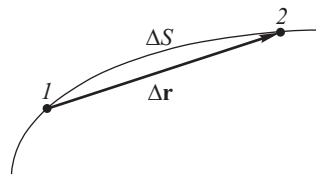


Рис. 9

С учетом этого соотношения, которое строго доказывается в курсе математического анализа, модуль скорости частицы равен

$$V = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Следовательно, модуль скорости равен производной пути по времени:

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (2.1)$$

Зная зависимость модуля скорости  $V$  от времени, можно вычислить пройденный частицей путь. Действительно, из (2.1) следует

$$dS = V(t)dt.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int_1^2 dS = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt, \quad S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt.$$

### § 3. Естественно-параметрический способ описания движения частицы

**Дуговая координата.** Если траектория движения частицы известна заранее, то для описания движения применяют так называемый естественно-параметрический способ.

Выберем на траектории произвольную точку  $O$  — начало отсчета, и произвольно установим положительное направление траектории (указано стрелкой на конце линии, по которой

движется частица  $A$ , рис. 10). Выбранное положительное направление траектории никак не связано с направлением движения: частица  $A$  может двигаться по траектории как в положительном, так и в отрицательном направлении.

Дуговой координатой  $l$  называется измеренное вдоль траектории расстояние от точки  $O$  (начала отсчета) до частицы, взятое со знаком плюс, если частица смещена относительно точки  $O$  в положительном

направлении траектории, и со знаком минус — в противном случае. Таким образом, выбранное ранее положительное направление траектории представляет собой положительное направление отсчета дуговой координаты  $l$ .

В процессе движения положение частицы на траектории полностью определяется единственной скалярной величиной — дуговой координатой  $l$ , которая является функцией времени  $l = l(t)$ .

Для описания движения необходимо ввести вспомогательный вектор, который обозначим через  $\tau$ .

Вектор  $\tau$  — это единичный вектор, связанный с частицей и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты.

Модуль вектора  $\tau$  равен единице ( $\tau = 1$ ), а его направление в пространстве в процессе движения меняется в зависимости от места расположения частицы на траектории. Следовательно,  $\tau$  является функцией дуговой координаты  $l$  и функций времени  $t$ :

$$\tau = \tau(l(t)).$$

### Скорость частицы.

Оба вектора — вектор скорости  $\mathbf{V}$  частицы и единичный вектор  $\tau$  — направлены по касательной к траектории. Если частица движется в направлении возрастания дуговой координаты, то  $\mathbf{V}$  и  $\tau$  сонаправлены, и вектор скорости можно представить в виде (рис. 11 а)

$$\mathbf{V} = V\tau.$$

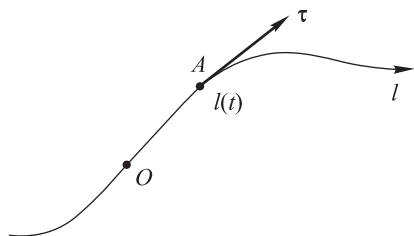


Рис. 10

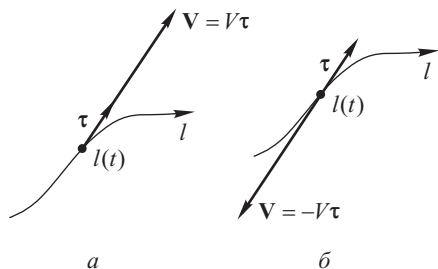


Рис. 11

При движении в отрицательном направлении траектории вектор  $\mathbf{V}$  равен (рис. 11 б)

$$\mathbf{V} = -V\boldsymbol{\tau}.$$

Обе формулы можно объединить в одну, выразив скорость через дуговую координату:

$$\mathbf{V} = \pm V\boldsymbol{\tau} = \pm \frac{dS}{dt}\boldsymbol{\tau} = \frac{dl}{dt}\boldsymbol{\tau},$$

где  $dS$  — элементарный путь,  $dl$  — элементарное приращение дуговой координаты. Мы учли, что при движении частицы в сторону возрастания дуговой координаты имеет место соотношение  $dS = dl$ , при движении в противоположном направлении  $dS = -dl$ .

Следовательно, независимо от направления движения частицы, вектор скорости можно представить в виде

$$\mathbf{V} = \frac{dl}{dt}\boldsymbol{\tau} = V_{\tau}\boldsymbol{\tau},$$

где  $V_{\tau} = \frac{dl}{dt}$  — проекция вектора скорости на касательную к траектории, положительное направление которой задается вектором  $\boldsymbol{\tau}$ .

**Радиус кривизны траектории.** Прежде чем приступить к выводу формул для ускорения, познакомимся на качественном уровне с понятием радиуса кривизны траектории. Пусть положение некоторой точки 1 траектории фиксировано, а точка 2 траектории расположена не слишком далеко от точки 1 (рис. 12). В математическом анализе строго доказывается, что если точку 2 устремить к точке 1, участок 1–2 траектории по своей форме будет сколь угодно мало отличаться от дуги окружности

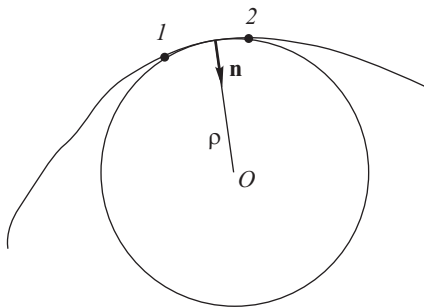


Рис. 12

некоторого радиуса  $\rho$ , который называется *радиусом кривизны* траектории в точке 1. Центр этой окружности (точка  $O$ ) называется *центром кривизны* траектории в точке 1. Величина радиуса кривизны  $\rho$  в разных точках траектории, вообще говоря, различна.

Введем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , перпендикулярный касательной к траектории и направленный к центру кривизны. Вектор  $\mathbf{n}$  называется *вектором нормали к траектории*.

**Тангенциальное и нормальное ускорения.** По определению ускорение равно

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (V_\tau \boldsymbol{\tau}) = \frac{dV_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau} + V_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \quad (3.1)$$

Вектор  $\boldsymbol{\tau}$  является функцией дуговой координаты  $l$ , зависящей от времени:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(l(t)).$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} \frac{dl}{dt} = V_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}. \quad (3.2)$$

Найдем величину и направление вектора  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}$ .

Пусть за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  частица переместилась из точки  $A_1$  траектории в точку  $A_2$  (рис. 13).  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  — единичные векторы касательной к траектории в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к траектории, точка  $O$  — центр кривизны. Радиус кривизны траектории в точке  $A_1$  равен  $\rho$ . Перенесем вектор  $\boldsymbol{\tau}_2$  из точки  $A_2$  в точку  $A_1$  параллельно самому себе, построив отрезок  $A_1Q$ . Из подобия треугольников  $OA_1A_2$  и  $A_1PQ$  следует соотношение между длинами отрезков:

$$\frac{PQ}{A_1A_2} = \frac{A_1P}{OA_1}.$$

Учтем, что  $|d\boldsymbol{\tau}| = PQ$ ,  $A_1P = |\boldsymbol{\tau}_1| = 1$ ,  $OA_1 = \rho$ ,  $A_1A_2 \approx |dl|$ , тогда

$$\frac{|d\boldsymbol{\tau}|}{|dl|} = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} \right| = \frac{1}{\rho}.$$

Рис. 13

Вектор приращения  $d\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1$ , который представлен отрезком  $PQ$  на рис. 13, а также вектор  $d\mathbf{r}/dl$  при стремлении точки  $A_1$  к точке  $A_2$  сонаправлены с вектором  $\mathbf{n}$  нормали. Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} \right| \mathbf{n} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}. \quad (3.3)$$

Подставив это выражение в (3.2), а затем в (3.1), получим

$$\mathbf{a} = \frac{dV_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{V_\tau^2}{\rho} \mathbf{n} = \frac{dV_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \mathbf{n}.$$

Первое слагаемое в этом выражении называется *тангенциальным ускорением*:

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.4)$$

Вектор  $\mathbf{a}_\tau$  направлен по касательной к траектории движения частицы.

Второе слагаемое называется *нормальным ускорением*:

$$\mathbf{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \mathbf{n}. \quad (3.5)$$

Вектор  $\mathbf{a}_n$  перпендикулярен касательной к траектории движения.

Таким образом, полное ускорение частицы можно представить в виде векторной суммы двух составляющих:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n,$$

где  $\mathbf{a}_\tau$  — тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории движения,  $\mathbf{a}_n$  — нормальное ускорение, направленное перпендикулярно касательной к траектории к центру кривизны (рис. 14). Тангенциальное и нормальное ускорения вычисляются по формулам (3.4) и (3.5).

Модуль полного ускорения можно найти по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\rho^2}}.$$

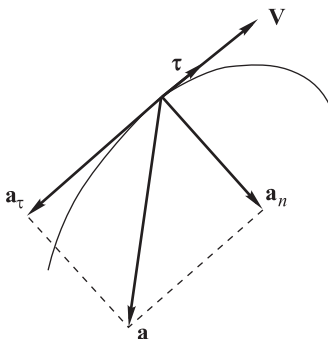


Рис. 14

## § 4. Твердое тело в механике. Виды движения

*Твердым (или абсолютно твердым) телом* в механике называется тело, при движении которого расстояния между любыми двумя его точками остаются неизменными, то есть твердое тело — это неизменяемая система материальных точек.

Под материальными точками понимают не атомы или молекулы, из которых состоят все тела, а достаточно малые макроскопические его части, на которые можно мысленно разделить рассматриваемое тело. В объеме каждой такой части содержится огромное число атомов или молекул (*физически бесконечно малый объем*).

Согласно определению твердое тело не деформируется под действием внешних сил. Реальное тело можно считать твердым телом, если возникающие под действием внешних сил деформации малы, и в условиях задачи ими можно пренебречь.

**Виды движения твердого тела.** Различают пять видов движения твердого тела: 1) поступательное движение; 2) вращение вокруг неподвижной оси; 3) плоское движение; 4) вращение вокруг неподвижной точки; 5) свободное движение. Первые два вида являются основными. Остальные можно свести к одному из основных или их совокупности. Уточним, что понимается под каждым из указанных видов движения.

При *поступательном движении* любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему начальному положению.

*Вращением вокруг неподвижной оси* называется движение, при котором существуют по крайней мере две неподвижные точки тела. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения. Можно показать, что все лежащие на оси вращения точки тела неподвижны. Любая другая точка тела движется в перпендикулярной к оси вращения плоскости по окружности с центром на оси вращения, соответственно, скорость этой точки перпендикулярна к оси вращения и направлена по касательной к окружности.

При *плоском движении* траектория каждой точки твердого тела расположена в некоторой фиксированной плоскости и плоскости движения всех точек параллельны между собой (иначе говоря, все точки тела движутся в параллельных плоскостях).

*Вращением вокруг неподвижной точки* называют движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Более точное описание этого движения таково: существует только одна точка тела, скорость которой в любой момент времени равна нулю. Можно доказать, что движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, представляет собой вращение вокруг проходящей через эту точку *мгновенной оси* или, иначе говоря, *мгновенное вращение*. Это означает следующее.

Во-первых, в любой момент времени существует такая проходящая через неподвижную точку твердого тела прямая  $m$ , что скорости всех точек тела, оказавшихся в рассматриваемый момент времени на этой прямой, равны нулю, а скорость  $V_A$  любой иной точки  $A$  тела направлена по касательной к окружности с центром на прямой  $m$ , причем  $V_A = \omega R$ , где  $R$  — расстояние от точки  $A$  до прямой  $m$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения. Таким образом, в рассматриваемый момент времени распределение скоростей в твердом теле в точности такое, как при вращении вокруг неподвижной оси, совпадающей с прямой  $m$ .

Во-вторых, с течением времени прямая  $m$  перемещается, вообще говоря, как в теле, так и в пространстве. Прямая  $m$ , обла-

дающая описанными выше свойствами, называется мгновенной осью вращения.

При свободном движении никаких кинематических ограничений на движение твердого тела не накладывается.

**Число степеней свободы.** Количество независимых величин, которые необходимо задать, чтобы определить положение тела в пространстве, называется *числом степеней свободы тела*.

Так, для определения положения в пространстве материальной точки нужно задать три координаты (например, декартовы координаты  $x, y, z$ ). Следовательно, число степеней свободы равно трем.

Для определения положения в пространстве твердого тела достаточно задать положение любых трех не лежащих на одной прямой точек этого тела (жестко связанного с телом произвольного недеформируемого треугольника).

Определение положения в пространстве трех произвольных точек требует задания девяти величин — по три координаты для каждой точки  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ . Однако в жестком треугольнике девять координат его вершин не независимы, а связаны между собой тремя уравнениями. Каждое выражает неизменность расстояния между парой точек:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l_{12}^2,$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = l_{13}^2,$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = l_{23}^2,$$

где  $l_{12}$ ,  $l_{13}$ ,  $l_{23}$  — расстояния между парами точек 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3 соответственно.

С помощью этой системы уравнений можно любые три координаты выразить через шесть остальных. Поэтому для определения положения твердого тела в пространстве достаточно задать не девять, а шесть независимых величин. Следовательно, число степеней свободы твердого тела равно шести, если на движение тела не наложены никакие ограничения. С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что закрепленное в одной точке тело, имеет три степени свободы; тело, закрепленное на неподвижной оси, обладает одной степенью свободы и т.д.

**Скорость и ускорение при поступательном движении твердого тела.** Примером поступательного движения служит движение кабинок известного аттракциона — колеса обозрения. Несмотря на то, что траектория движения каждой точки кабин-



ки — окружность, всякая жестко связанная с кабиной прямая в процессе движения остается параллельной самой себе. Следовательно, движение является поступательным.

Покажем, что при поступательном движении все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям и в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.

Пусть  $A$  и  $B$  — положения двух точек тела в некоторый момент времени. Через произвольный промежуток времени  $\Delta t$  эти же точки займут положения  $A'$  и  $B'$  (рис. 15). Согласно определению поступательного движения прямые  $AB$  и  $A'B'$  параллельны между собой. Поскольку расстояния между точками твердого тела не меняются в процессе движения, отрезки  $AB$  и  $A'B'$  равны. Следовательно, фигура  $AA'B'B$  — параллелограмм.

Векторы перемещения  $\Delta \mathbf{r}_A$  и  $\Delta \mathbf{r}_B$  точек  $A$  и  $B$  за произвольный промежуток времени  $\Delta t$  равны:

$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B.$$

Поэтому в любой момент времени равны друг другу скорости точек  $A$  и  $B$ :

$$\mathbf{V}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_B}{\Delta t} = \mathbf{V}_B.$$

Аналогично доказывается, что равны друг другу и ускорения точек:  $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B$ .

Мы показали, что при поступательном движении скорости и ускорения двух произвольных точек  $A$  и  $B$  твердого тела в любой момент времени одинаковы. Следовательно, одинаковыми являются скорости и ускорения всех точек тела. Напомним, что

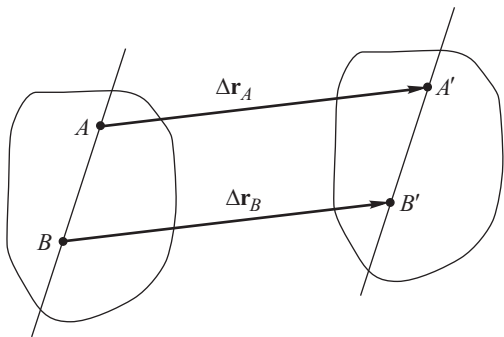


Рис. 15

траектория движения точки задается зависимостью от времени ее радиуса-вектора  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{V} dt,$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор в начальный момент времени, и полностью определяется начальным положением и зависимостью скорости  $\mathbf{V}$  от времени. Поэтому

траектории движения всех точек твердого тела при поступательном движении представляют собой одинаковые кривые. Ки-

нематическое описание поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения одной точки этого тела.

## § 5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

**Угловая координата.** Пусть  $OO'$  — неподвижная ось вращения твердого тела. Направим оси неподвижной декартовой прямоугольной системы координат так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью вращения (рис. 16). Проведем из начала координат к произвольной точке  $A$  тела радиус-вектор  $\mathbf{r}$ .

*Угловой координатой (углом поворота)* называется угол  $\varphi$  между положительным направлением оси  $x$  и проекцией радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  на координатную плоскость  $xy$ .

Угол поворота — величина скалярная, он может быть положительным, отрицательным или нулем. Положительное направление отсчета угловой координаты условились определять по следующему правилу: оно образует правый винт с положительным направлением оси  $z$  декартовой системы координат.

Угол  $\varphi$  измеряется в радианах (рад).

**Вектор элементарного поворота.** Пусть тело повернулось на бесконечно малый угол  $d\varphi$  вокруг оси  $OO'$ . При этом произвольная точка  $A$  тела, двигаясь по окружности, заняла положение  $A'$  (рис. 17).

*Вектором элементарного поворота* называется вектор  $d\boldsymbol{\varphi}$ , модуль которого равен модулю угла поворота  $d\varphi$ :

$$|d\boldsymbol{\varphi}| = |d\varphi|;$$

вектор  $d\boldsymbol{\varphi}$  направлен вдоль оси вращения тела, при этом направление  $d\boldsymbol{\varphi}$  связано правилом правого винта с направлением вращения тела.

Подчеркнем, что положительное направление отсчета угла поворота  $\varphi$  (угловой координаты) не зависит от направления вращения тела, а определяется только выбором положительного направления оси  $z$  неподвижной системы координат

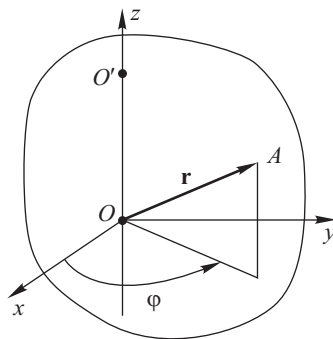


Рис. 16

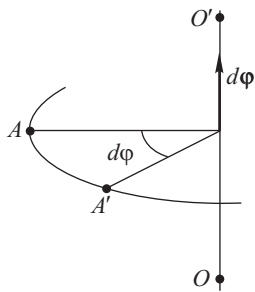


Рис. 17

(рис. 15). Направление вектора элементарного поворота  $d\varphi$  связано с направлением вращения тела.

**Угловая скорость.** Пусть тело, вращаясь вокруг неподвижной оси  $OO'$ , совершило за промежуток времени  $dt$  элементарный поворот  $d\varphi$ .

*Угловой скоростью тела* называется вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  совпадает по направлению с вектором  $d\varphi$  и, следовательно, направлен вдоль оси вращения тела, причем так, что образует правый винт с направлением вращения (рис. 18).

Если ось  $z$  неподвижной декартовой системы координат совпадает с осью вращения тела, проекция на ось  $z$  вектора угловой скорости равна

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Модуль угловой скорости можно представить в следующем виде:

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{|d\varphi|}{dt}.$$

Модуль угловой скорости численно равен углу поворота тела за единицу времени.

Единица угловой скорости в системе СИ — радиан в секунду (рад/с).

**Угловое ускорение.** *Угловым ускорением*  $\boldsymbol{\beta}$  называется вектор, равный производной вектора угловой скорости по времени:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Направление вектора  $\boldsymbol{\beta}$  совпадает с направлением вектора  $d\boldsymbol{\omega}$  приращения угловой скорости за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . Если тело вращается вокруг неподвижной оси  $OO'$ , то вектор  $d\boldsymbol{\omega}$  и, следовательно, вектор  $\boldsymbol{\beta}$  лежат на оси вращения (рис. 19). Если с течением времени модуль угловой скорости увеличивается, вектор  $\boldsymbol{\beta}$  сонаправлен с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , в противном случае — противоположен  $\boldsymbol{\omega}$ .

Если ось  $z$  неподвижной декартовой системы координат направлена вдоль оси вращения тела, то проекция на эту ось вектора углового ускорения равна

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

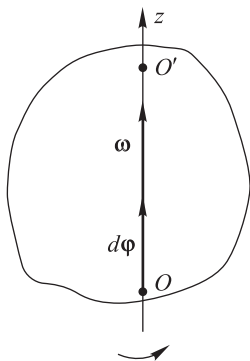


Рис. 18

Единица углового ускорения в системе СИ — радиан на секунду в квадрате ( $\text{рад/с}^2$ ).

Векторы элементарного поворота  $d\phi$ , угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\beta$  являются аксиальными, в отличие от полярных векторов — радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , скорости  $\mathbf{V}$  и ускорения  $\mathbf{a}$ . Векторы  $d\phi$ ,  $\omega$  и  $\beta$  не имеют определенных точек приложения и могут откладываться из любой точки неподвижной оси вращения.

**Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами.** Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $OO'$  с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\beta$ . Найдем связь скорости  $V_A$  (линейной скорости) и ускорения  $a_A$  (линейного ускорения) произвольной точки  $A$  тела с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\beta$ .

Положение точки  $A$  зададим радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из произвольной точки  $O$  на оси вращения  $OO'$  (рис. 20). Угол между осью  $OO'$  и вектором  $\mathbf{r}$  обозначим буквой  $\theta$ . За промежуток времени  $dt$  тело совершает элементарный поворот  $d\phi$ . При этом точка  $A$ , двигаясь по окружности радиуса  $\rho = r \sin \theta$  с центром на оси вращения, совершает перемещение  $d\mathbf{r}$ .

Модуль перемещения  $|d\mathbf{r}|$  приблизительно равен длине дуги окружности, вдоль которой движется точка  $A$ :

$$|d\mathbf{r}| = \rho |d\phi| = r \sin \theta |d\phi|.$$

Учитывая это равенство, вектор перемещения  $d\mathbf{r}$  можно представить в виде векторного произведения элементарного поворота  $d\phi$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ :

$$d\mathbf{r} = [d\phi \mathbf{r}]. \quad (5.1)$$

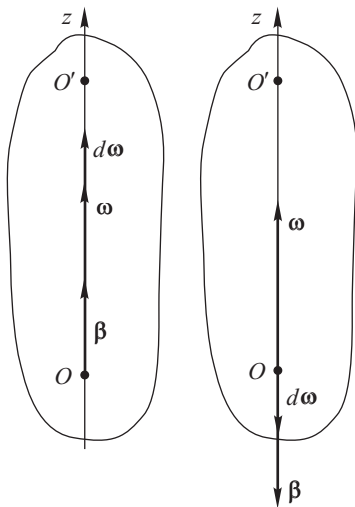


Рис. 19

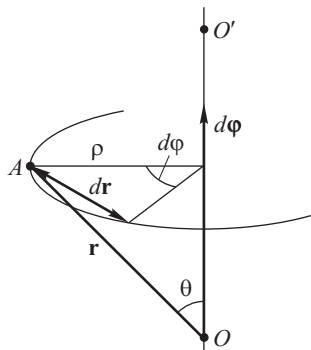


Рис. 20

Это соотношение позволяет найти связь между линейной скоростью  $\mathbf{V}_A$  точки  $A$  тела и его угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[ \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt} \mathbf{r} \right] = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}],$$

$$\mathbf{V}_A = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (5.2)$$

Итак, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, скорость  $\mathbf{V}_A$  любой точки  $A$  тела равна векторному произведению угловой скорости тела  $\boldsymbol{\omega}$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного в точку  $A$  из произвольной точки  $O$  на оси вращения (см. (5.2)).

Найдем выражение для ускорения точки  $A$ :

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]}{dt} = \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right] + \left[ \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}] + \left[ \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] =$$

$$= [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]]. \quad (5.3)$$

Первое слагаемое в (5.3) представляет собой тангенциальное ускорение:

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}].$$

Вектор  $\mathbf{a}_\tau$  направлен по касательной к окружности радиуса  $\rho = r \sin \theta$ , по которой движется точка  $A$  (рис. 21). Модуль тангенциального ускорения равен

$$a_\tau = \beta r \sin \theta.$$

Второе слагаемое в (5.3) — это нормальное (центростремительное) ускорение точки  $A$ :

$$\mathbf{a}_n = [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]].$$

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \omega^2 r \sin \theta.$$

## § 6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в любой момент времени представляет собой вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту неподвижную точку. С течением времени мгновенная ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как в теле, так и в пространстве.

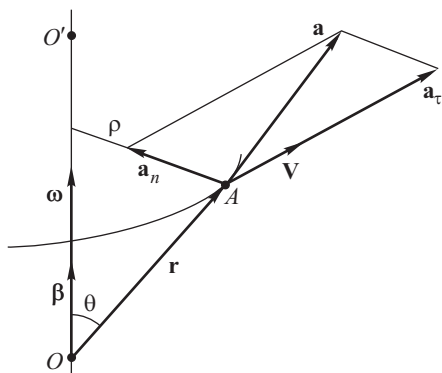


Рис. 21

При определении понятий элементарного поворота  $d\varphi$ , угловой скорости  $\omega$ , углового ускорения  $\beta$  и выводе формул (5.2), (5.3) для тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, достаточно было рассмотреть движение в течение бесконечно малого промежутка времени  $dt$ . Если тело движется так, что лишь одна его точка остается неподвижной, то есть совершает мгновенное вращение, за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  положение мгновенной оси не успевает существенно измениться. В течение этого промежутка времени мгновенную ось можно считать неподвижной. Следовательно, формулы (5.2), (5.3) применимы и для описания вращения твердого тела вокруг неподвижной точки:

$$V_A = [\omega \mathbf{r}], \quad (6.1)$$

$$a_A = [\beta \mathbf{r}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]]. \quad (6.2)$$

Здесь  $V_A$  и  $a_A$  — скорость и ускорение произвольной точки  $A$  тела, имеющего одну неподвижную точку  $O$ ,  $\mathbf{r}$  — проведенный из точки  $O$  в точку  $A$  радиус-вектор. В каждый момент времени угловая скорость  $\omega$  направлена вдоль мгновенной оси вращения и связана правилом правого винта с направлением вращения.

Помимо сходства, имеются и отличия в математическом описании мгновенного вращения от вращения вокруг неподвижной оси. Поскольку с течением времени мгновенная ось меняет свое положение в пространстве, направление вектора  $\omega$  также меняется. Следовательно, вектор  $d\omega$  приращения угловой скорости, вообще говоря, не коллинеарен вектору  $\omega$  и не направлен вдоль мгновенной оси вращения. Совпадающий по направлению с вектором  $d\omega$  вектор углового ускорения  $\beta$  ( $\beta = d\omega/dt$ ), вообще говоря, не лежит на мгновенной оси.

## § 7. Плоское движение твердого тела

**Скорость произвольной точки твердого тела при плоском движении.** При плоском движении все точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях. Частным случаем плоского движения является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Примеры плоского движения — вращение колеса прямолинейно движущегося автомобиля, скольжение по поверхности льда хоккейной шайбы, качение тела цилиндрической формы по плоской поверхности и др.

Пусть твердое тело совершает плоское движение. Мысленно рассечем его неподвижной плоскостью  $P$ , параллельно которой движутся все точки тела ( $P$  — плоскость движения тела). В сечении образуется фигура  $\Phi$ , которая в процессе движения тела

остается в плоскости  $P$  (рис. 22). Положение тела в пространстве задано, если задано положение фигуры  $\Phi$  в плоскости  $P$ . Изучение плоского движения

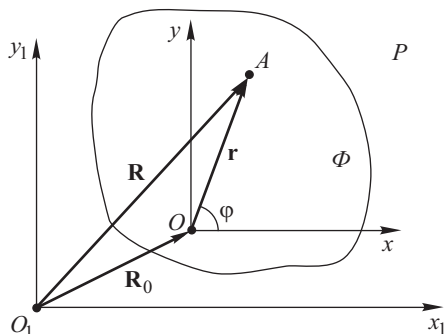


Рис. 22

тела сводится к изучению движения фигуры  $\Phi$ .

Неподвижную систему отсчета и соответствующую систему координат  $O_1x_1y_1$  свяжем с плоскостью  $P$ . Выберем две произвольные точки  $O$  и  $A$  тела. С точкой  $O$  свяжем движущуюся систему отсчета и поместим в нее начало движущейся поступательно системы координат  $Oxy$ , оси которой

остаются параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат. Обозначим через  $\mathbf{R}_O$  — радиус-вектор, проведенный к точке  $O$  из точки  $O_1$ , а через  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный к точке  $A$  из точки  $O$ . Положение фигуры  $\Phi$  в плоскости  $P$  определено, если заданы вектор  $\mathbf{R}_O$  и угол  $\varphi$  между вектором  $\mathbf{r}$  и осью  $Ox$ . Поскольку в системе отсчета  $Oxy$  в любой момент времени точка  $O$  тела неподвижна, движение фигуры  $\Phi$  (и всего тела) в этой системе отсчета представляет собой вращение вокруг проходящей через точку  $O$  перпендикулярной плоскости  $P$  неподвижной оси. Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  угловой скорости направлен вдоль оси вращения и перпендикулярен плоскости движения  $P$ . Обозначим через  $\mathbf{V}_O$  — скорость точки  $O$  тела в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1$ . Выразим скорость точки  $A$  через  $\mathbf{V}_O$  и  $\boldsymbol{\omega}$ .

Радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , проведенный из начала  $O_1$  неподвижной системы координат к точке  $A$ , равен

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}.$$

Дифференцируя по времени это равенство, получим

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_O}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (7.1)$$

При выводе (7.1) использованы следующие обозначения и формулы:

$$\frac{d\mathbf{R}_O}{dt} = \mathbf{V}_O$$

— скорость точки  $O$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1$ ;

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_{\text{отн}}$$

— скорость точки  $A$  в движущейся системе отсчета  $Oxy$ ; поскольку измеренную в движущейся системе отсчета скорость называют *относительной скоростью* (см. § 12), введено обозначение  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ .

Учитывая, что в системе отсчета  $Oxy$  фигура  $\Phi$  вращается вокруг проходящей через точку  $O$  неподвижной оси, выразим  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  через угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки  $A$  с помощью (5.2):

$$\mathbf{V}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}].$$

Поскольку точки  $O$  и  $A$  были выбраны произвольно, полученная формула (7.1) справедлива для любых двух точек фигуры  $\Phi$ .

Формула (7.1) подразумевает, что при плоском движении твердого тела скорость  $\mathbf{V}_A$  произвольной точки  $A$  тела можно представить как сумму скорости  $\mathbf{V}_O$  любой другой точки  $O$  тела и относительной скорости  $\mathbf{V}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ , обусловленной вращением тела вокруг проходящей через точку  $O$  перпендикулярной к плоскости движения неподвижной оси. Иначе говоря, плоское движение представляет собой совокупность двух видов движения — поступательного вместе с произвольной точкой  $O$  тела и вращения вокруг проходящей через эту точку неподвижной оси.

Если в некоторый момент времени скорость точки  $O$ , относительно которой рассматривается вращение, равна нулю ( $\mathbf{V}_O=0$ ), то проходящая через точку  $O$  перпендикулярная к плоскости движения  $P$  прямая является мгновенной осью вращения.

Обоснуем это утверждение. Скорости всех точек совершающего плоское движение твердого тела, лежащих на одной и той же перпендикулярной к плоскости движения прямой, одинаковы. Если эта прямая проходит через неподвижную в данный момент точку  $O$ , то скорости всех точек указанной прямой равны нулю. Скорость любой другой точки тела, например, точки  $A$  фигуры  $\Phi$  (см. рис. 22), направлена по касательной окружности с центром в точке  $O$ . (Действительно, согласно (7.1) при  $\mathbf{V}_O = 0$   $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ ; это выражение подразумевает, что точка  $A$  движется с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  по окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ ). Все сказанное означает, что в рассматриваемый момент времени (когда  $\mathbf{V}_O=0$ ) мгновенное распределение скоростей в твердом теле такое же, как и при вращении вокруг проходящей через точку  $O$  перпендикулярной к плоскости движения неподвижной оси. В соответствии с определением, проходящая через неподвижную точку  $O$  перпендику-



лярная плоскости движения прямая является мгновенной осью вращения. Ниже будет показано, каким способом при плоском движении можно найти положение неподвижной в данный момент точки твердого тела, через которую проходит мгновенная ось вращения, и тем самым определить положение мгновенной оси.

Пример. Колесо радиуса  $r$  катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью  $V_O$  (скорость центра колеса). Найти скорость точки  $A$  — конца горизонтального диаметра колеса (рис. 23).

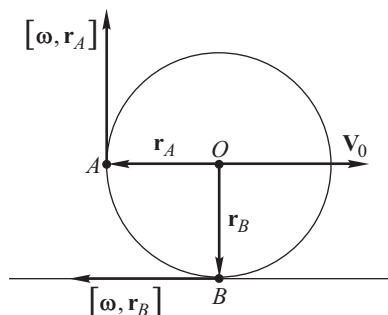


Рис. 23

Пусть  $\omega$  — угловая скорость вращения колеса вокруг проходящей через его центр (точку  $O$ ) оси. Модуль  $\omega$  определим из условия равенства нулю скорости нижней точки колеса — точки  $B$ :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{r}_B] = 0,$$

$$V_O - \omega r = 0,$$

$$\omega = \frac{V_O}{r}.$$

Скорость  $\mathbf{V}_A$  точки  $A$  находится как векторная сумма скорости  $\mathbf{V}_O$  поступательного движения колеса вместе с точкой  $O$  и скорости  $\mathbf{V}_{\text{отн}} = [\omega \mathbf{r}_A]$  вращения вокруг проходящей через точку  $O$  оси:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{r}_A].$$

Складываемые векторы перпендикулярны друг другу. Модуль скорости точки  $A$  равен

$$V_A = \sqrt{V_O^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{V_O^2 + \left(\frac{V_O}{r} r\right)^2} = V_O \sqrt{2}.$$

**Угловая скорость твердого тела при плоском движении.** Для того чтобы по формуле (7.1) выразить скорость  $\mathbf{V}_A$  произвольной точки  $A$  твердого тела через скорость  $\mathbf{V}_O$  любой другой его точки  $O$ , необходимо знать угловую скорость  $\omega$  вращения тела вокруг проходящей через точку  $O$  оси. Возникает вопрос, не зависит ли угловая скорость  $\omega$  от выбора точки  $O$ , относительно которой рассматривается вращение, не изменится ли угловая скорость при замене  $O$  на другую точку  $O'$ ?

Пусть твердое тело совершает плоское движение. Рассмотрим произвольные точки тела  $O$  и  $O'$ , имеющие скорости  $\mathbf{V}_O$  и  $\mathbf{V}_{O'}$ , и произвольную точку  $A$  тела (рис. 24). Траектории движе-

ния всех трех точек лежат в одной плоскости. Обозначим через  $\omega$  и  $\omega'$  угловые скорости вращения вокруг проходящих через точки  $O$  и  $O'$  перпендикулярных плоскости движения осей. Выразим по формуле (7.1) скорость  $\mathbf{V}_A$  произвольной точки  $A$  тела через  $\mathbf{V}_O$  и  $\mathbf{V}'_O$  и затем приравняем полученные выражения:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{r}],$$

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}'_O + [\omega' \mathbf{r}'],$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — векторы, проведенные к точке  $A$  из точек  $O$  и  $O'$  соответственно.

$$\mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{r}] = \mathbf{V}'_O + [\omega' \mathbf{r}'].$$

Учтем, что с помощью (7.1) можно выразить  $\mathbf{V}'_O$  через  $\mathbf{V}_O$ :

$$\mathbf{V}'_O = \mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{a}],$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $O'$ ;  $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  (см. рис. 24).

Проведя простые преобразования, получим

$$\mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{r}] = \mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{a}] + [\omega' \mathbf{r}'],$$

$$[\omega \mathbf{r} - \mathbf{a}] = [\omega' \mathbf{r}'],$$

$$[\omega \mathbf{r}'] = [\omega' \mathbf{r}'].$$

Отсюда

$$\omega = \omega'. \quad (7.2)$$

Поскольку точки  $O$  и  $O'$  тела были выбраны произвольно, и показано, что угловые скорости вращения твердого тела вокруг проходящих через эти точки осей одинаковы (см. (7.2)), можно утверждать, что при плоском движении угловая скорость  $\omega$  не зависит от выбора точки, относительно которой рассматривается вращение. Вектор  $\omega$  называют *угловой скоростью вращения твердого тела*. При этом нет необходимости указывать положение оси вращения — она может проходить через любую точку тела. Вектор  $\omega$  перпендикулярен к плоскости  $P$  движения тела (см. рис. 22).

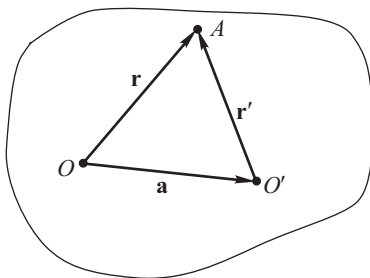


Рис. 24

## § 8. Положение мгновенной оси вращения при плоском движении

В предыдущем параграфе показано, что если скорость некоторой точки совершающего плоское движение твердого тела в рассматриваемый момент времени равна нулю, то через эту

точку проходит перпендикулярная плоскости движения мгновенная ось вращения. Так, скорость  $\mathbf{V}_M$  нижней точки  $M$  колеса, которое катится без проскальзывания по плоской горизонтальной поверхности, равна нулю (рис. 25). Скорость любой другой

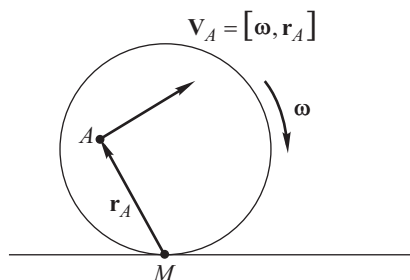


Рис. 25

точки  $A$  колеса с помощью формулы (7.1) и с учетом того обстоятельства, что  $\mathbf{V}_M = 0$ , можно представить в виде

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_M + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_A] = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_A],$$

где  $\mathbf{r}_A$  — проведенный из  $M$  в  $A$  вектор,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения колеса (точка  $A$  выбрана так, что плоскости движения точек  $M$  и  $A$  совпадают). Полученное для  $\mathbf{V}_A$  выражение аналогично формуле

(5.2), описывающей вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, и подразумевает, что в рассматриваемый момент времени скорость точки  $A$  направлена по касательной к окружности с центром в неподвижной точке  $M$ . Мгновенное распределение скоростей в колесе такое же, как при вращении вокруг проходящей через точку  $M$ , перпендикулярной к плоскости движения неподвижной оси. Следовательно, проходящая через точку  $M$  перпендикулярная плоскости движения колеса прямая является мгновенной осью вращения.

При плоском движении всегда существует жестко связанная с телом, но не обязательно расположенная внутри тела точка  $M$ , скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю и через которую проходит мгновенная ось вращения тела.

Определим в общем случае плоского движения положение точки  $M$ . Пусть заданы скорость  $\mathbf{V}_O$  некоторой точки  $O$  тела (точки плоской фигуры  $\Phi$ , образующейся в сечении твердого тела плоскостью движения, рис. 26) и угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  тела. Скорость любой другой точки тела, в том числе, искомой точки  $M$ , согласно (7.1) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_M],$$

где  $\mathbf{r}_M$  — вектор, проведенный из точки  $O$  к точке  $M$ .

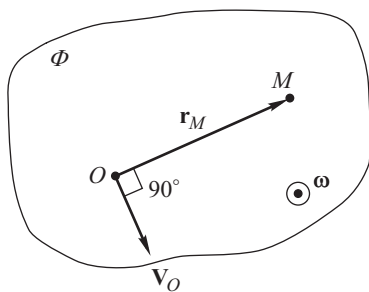


Рис. 26

Поскольку через точку  $M$  проходит мгновенная ось вращения, и  $\mathbf{V}_M = 0$ , из предыдущего равенства получим

$$\mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_M] = 0.$$

Умножим обе части уравнения векторно слева на  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_O] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_M]] = 0.$$

Раскроем двойное векторное произведение:

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_O] + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_M) - \mathbf{r}_M (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Учтем в полученном уравнении, что  $(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_M) = 0$ , так как вектор  $\boldsymbol{\omega}$  перпендикулярен плоскости движения, и, следовательно, вектору  $\mathbf{r}_M$ :

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_O] - \mathbf{r}_M (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Выразим вектор  $\mathbf{r}_M$ :

$$\mathbf{r}_M = \frac{[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_O]}{\omega^2}. \quad (8.1)$$

Из (8.1) следует, что вектор  $\mathbf{r}_M$  перпендикулярен скорости  $\mathbf{V}_O$  точки  $O$ , а его длина равна

$$r_M = \frac{V_O}{\omega}. \quad (8.2)$$

Для того чтобы, зная скорость  $\mathbf{V}_O$  хотя бы одной точки совершающего плоское движение твердого тела и его угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$ , найти положение мгновенной оси вращения, необходимо выполнить следующие действия. По формуле (8.1) найти вектор  $\mathbf{r}_M$ , отложить его из точки  $O$  в плоскости движения перпендикулярно вектору  $\mathbf{V}_O$  и определить тем самым положение точки  $M$ . Мгновенная ось вращения проходит через точку  $M$  перпендикулярно к плоскости движения тела.

Если угловая скорость вращения твердого тела не равна нулю ( $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ), то согласно (8.1), искомая точка  $M$  существует.

Пример. Пусть известны направления векторов скорости  $\mathbf{V}_A$  и  $\mathbf{V}_B$  двух точек  $A$  и  $B$  совершающего плоское движение тела, но неизвестны их модули. Чтобы найти положение точки  $M$ , через которую проходит мгновенная ось, достаточно определить точку пересечения перпендикулярных к векторам  $\mathbf{V}_A$  и  $\mathbf{V}_B$  лежащих а плоскости движения прямых (рис. 27).

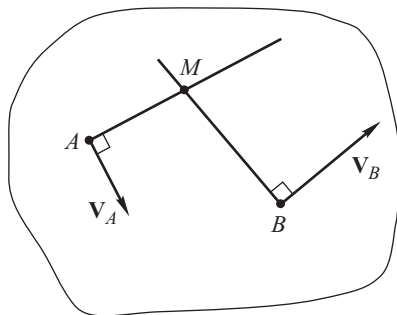


Рис. 27

## § 9. Свободное движение твердого тела

Пусть твердое тело движется свободно, то есть никакие кинематические ограничения на движение тела не накладываются. Выберем две произвольные точки  $O$  и  $A$  тела.  $O_1x_1y_1z_1$  — неподвижная система координат (система отсчета). С точкой  $O$

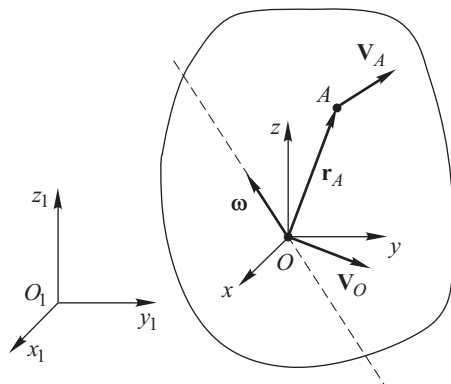


Рис. 28

связем движущуюся систему отсчета и поместим в нее начало движущейся поступательно системы координат  $Oxyz$ , оси которой параллельны соответствующим осям системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  (рис. 28).

Поскольку в системе отсчета  $Oxyz$  в любой момент времени точка  $O$  твердого тела неподвижна, движение тела в этой системе отсчета представляет собой вращение вокруг проходящей через точку  $O$

мгновенной оси, положение которой с течением времени непрерывно меняется как в теле, так и в пространстве.

Свободное движение твердого тела можно рассматривать как совокупность двух движений — поступательного движения вместе с произвольной точкой  $O$  тела и вращения вокруг проходящей через эту точку мгновенной оси. В соответствии с этим утверждением скорость  $\mathbf{V}_A$  точки  $A$  равна сумме скорости  $\mathbf{V}_O$  точки  $O$  и относительной скорости  $\mathbf{V}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_A]$ , обусловленной вращением тела с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг проходящей через точку  $O$  мгновенной оси:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_A]. \quad (9.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_A$  — вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ,  $\mathbf{V}_A$  и  $\mathbf{V}_O$  — скорости точек  $A$  и  $O$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ ,  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  — скорость точки  $A$  в системе отсчета  $Oxyz$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость мгновенного вращения твердого тела в системе отсчета  $Oxyz$ . Доказательство формулы (9.1) аналогично выводу выражения (7.1) для плоского движения.

## § 10. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

**Сложение элементарных поворотов.** Пусть тело совершило два элементарных поворота  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$  вокруг осей, пере-

секающихся в неподвижной точке  $O$ . Согласно результатам, полученным в § 5, проведенный из точки  $O$  в произвольную точку  $A$  тела радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в результате первого поворота получит приращение  $d\mathbf{r}_1$ :

$$d\mathbf{r}_1 = [d\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{r}]. \quad (10.1)$$

При этом точка  $A$  займет положение  $A'$ , определяемое радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}_1.$$

В результате второго поворота вектор  $\mathbf{r}'$  получит приращение  $d\mathbf{r}_2$ :

$$d\mathbf{r}_2 = [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}'] = [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] = [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}] + [d\boldsymbol{\varphi}_2, d\mathbf{r}_1] \approx [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}]. \quad (10.2)$$

Слагаемым  $[d\boldsymbol{\varphi}_2, d\mathbf{r}_1]$  пренебрегли как величиной более высокого порядка малости, по сравнению с  $[d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}]$ .

Результирующее перемещение точки  $A$  — вектор  $d\mathbf{r}$  — равен сумме двух перемещений (10.1) и (10.2):

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = [d\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{r}] + [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}] = [d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}].$$

Полученное выражение показывает, что вектор  $d\mathbf{r}$  можно рассматривать как перемещение точки  $A$ , обусловленное единственным элементарным поворотом  $d\boldsymbol{\varphi}$ , равным векторной сумме  $d\boldsymbol{\varphi}_1$  и  $d\boldsymbol{\varphi}_2$ ;

$$d\mathbf{r} = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}],$$

где

$$d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2. \quad (10.3)$$

Результирующий поворот точки  $A$  происходит вокруг проходящей через неподвижную точку  $O$  прямой, направленной вдоль  $d\boldsymbol{\varphi}$ .

Согласно (10.3) элементарные повороты вокруг пересекающихся осей, складываются по правилам векторного сложения.

Если ввести в рассмотрение вектор  $\boldsymbol{\varphi}$  конечного поворота тела, направленный вдоль оси вращения и численно равный углу поворота  $\varphi$ , для последовательных конечных поворотов правило векторного сложения действовать не будет.

**Пример.** В результате двух последовательных конечных поворотов  $\boldsymbol{\varphi}_1$  и  $\boldsymbol{\varphi}_2$  на угол  $\pi/2$  вокруг осей  $Oy$  и  $Oz$  декартовой системы координат точка  $A$  тела переместится в положение  $A'$ . Такое же положение точка  $A$  займет в

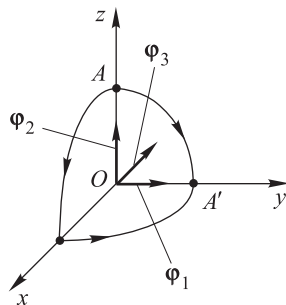


Рис. 29

результате единственного поворота  $\Phi_3$  на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $Ox$  (рис. 29). Однако при этом вектор  $\Phi_3$ , лежащий на оси  $Ox$ , не является суммой векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , расположенных в плоскости  $yOz$ .

### Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.

Рассмотрим одновременное вращение тела вокруг двух пересекающихся в точке  $O$  осей  $OO'$  и  $OO''$  (рис. 30). Пусть  $\omega_1$  — угловая скорость вращения тела вокруг оси  $OO'$ ,  $\omega_2$  — угловая скорость вращения оси  $OO'$  вокруг неподвижной оси  $OO''$ .

За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  тело совершит элементарный поворот  $d\Phi_1$  вокруг оси  $OO'$  и элементарный поворот  $d\Phi_2$  вокруг оси  $OO''$ . Как показано выше (см. (10.3)), результирующий поворот  $d\Phi$  представляется векторной суммой:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2.$$

Поделив обе части равенства на  $dt$ , получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt},$$

или, с учетом определения угловой скорости,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (10.4)$$

Если тело вращается вокруг двух пересекающихся осей, точка пересечения осей остается неподвижной. Следовательно, результирующее движение тела — вращение вокруг неподвижной точки. В каждый момент времени оно представляет собой вращение вокруг проходящей через эту точку мгновенной оси, положение которой в пространстве и в теле непрерывно меняется. Мы показали (см. (10.4)), что угловая скорость  $\omega$  результирующего движения тела равна векторной сумме угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вращения вокруг каждой из осей. Тем самым установлено положение мгновенной оси в пространстве: она проходит через точку  $O$  и направлена вдоль вектора  $\omega$ , вычисляемого по формуле (10.4).

Если модули векторов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  постоянны, модуль  $\omega$  также постоянен (см. рис. 30). Однако направление

$\omega$  в пространстве меняется: этот вектор, а вместе с ним и мгновенная ось, вращается с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг неподвижной оси  $OO''$ .

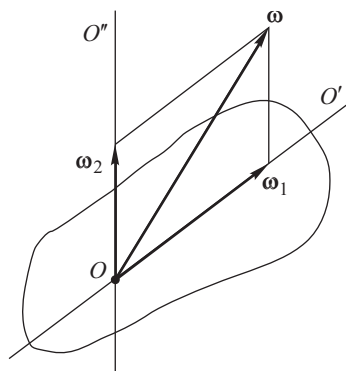


Рис. 30

Имея ввиду полученную в данном параграфе формулу (10.4) сложения угловых скоростей, можно говорить о том, что вращения вокруг пересекающихся осей складываются векторно.

## § 11. Производная по времени вектора постоянной длины и меняющегося направления

Рассмотрим вектор  $\mathbf{a}$ , природа которого не имеет значения. Это может быть радиус-вектор, определяющий положение в пространстве какой-либо точки твердого тела, или вектор скорости движущейся частицы, или вектор угловой скорости мгновенного вращения твердого тела и т.д. Пусть начало вектора  $\mathbf{a}$  находится в неподвижной точке  $O$  и совпадает с началом неподвижной системы координат  $Oxyz$  (рис. 31). Направление вектора  $\mathbf{a}$  в пространстве произвольным образом меняется, а его длина остается неизменной. Найдём производную по времени  $d\mathbf{a}/dt$  вектора  $\mathbf{a}$ . Полученный результат будет часто использоваться в дальнейшем.

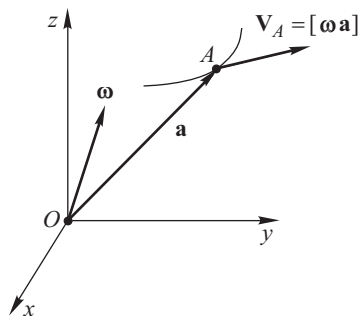


Рис. 31

Поскольку по условию расстояние  $OA$  между точками начала и конца вектора  $\mathbf{a}$  неизменно, движение вектора в пространстве аналогично движению твердого тела, например, тонкого стержня  $OA$  (см. рис. 31). Это движение представляет собой вращение вокруг неподвижной точки  $O$  (мгновенное вращение) с некоторой угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Воспользуемся полученной ранее формулой (6.1) для скорости произвольной точки совершающего мгновенное вращение твердого тела, выразив скорость точки  $A$  через угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и проведенный из  $O$  в  $A$  радиус-вектор (в данном случае, вектор  $\mathbf{a}$ ):

$$\mathbf{V}_A = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}].$$

С другой стороны, скорость  $\mathbf{V}_A$  точки  $A$ , по определению, есть производная по времени радиуса-вектора этой точки, то есть производная вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$



Приравнивая полученные выражения для скорости  $\mathbf{V}_A$ , найдем

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}]. \quad (11.1)$$

Равенство (11.1) означает, что *производная по времени вектора постоянной длины, направление которого в пространстве меняется, равна векторному произведению его угловой скорости вращения на собственно вектор*. Подчеркнем, что полученный результат справедлив для вектора  $\mathbf{a}$  любой природы.

**Пример.** Частица  $A$  движется по окружности радиуса  $r$  с постоянной по модулю скоростью  $\mathbf{V}$  (рис. 32 *a*). Требуется найти ускорение частицы.

Ускорение равно производной скорости по времени  $d\mathbf{V}/dt$ . При неизменной длине направление в пространстве вектора  $\mathbf{V}$

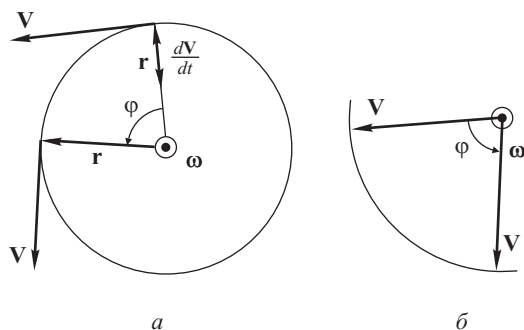


Рис. 32

меняется: вектор  $\mathbf{V}$  вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , равной угловой скорости движения частицы по окружности. Действительно, за один и тот же промежуток времени радиус-вектор  $\mathbf{r}$  частицы и вектор ее скорости  $\mathbf{V}$  совершают поворот на одинаковый угол  $\phi$  (рис. 32). В соответствии с (11.1) производная вектора  $\mathbf{V}$  равна

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}]. \quad (11.2)$$

Вектор ускорения  $d\mathbf{V}/dt = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}]$  перпендикулярен переменным векторам  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{V}$  и, следовательно, направлен к центру окружности, по которой движется частица (рис. 32 *a*).

Из равенства векторов (11.2) следует равенство их модулей. С учетом того, что векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{V}$  взаимно перпендикулярны, а модуль  $V$  скорости частицы, движущейся по окружности ради-

уса  $r$ , равен  $\omega r$ , получим

$$\left| \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right| = |[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}]| = \omega V = \omega^2 r. \quad (11.3)$$

Таким образом, с помощью доказанного свойства (11.1) получена известная формула (11.3) для модуля центростремительного ускорения частицы, движущейся по окружности, и верно определено его направление (см. (11.2)), что подтверждает справедливость формулы (11.1).

## § 12. Преобразование скорости и ускорения частицы при переходе к другой системе отсчета

**Преобразование скорости и ускорения при переходе к системе отсчета, движущейся поступательно.** Рассмотрим движущуюся в пространстве частицу  $A$ . Для описания движения введем две системы отсчета: неподвижную, которой соответствует декартова система координат  $O_1 x_1 y_1 z_1$  с началом в точке  $O_1$ , и движущуюся, которой соответствует поступательно движущаяся декартова система координат  $Oxyz$  с началом в точке  $O$  (рис. 33). Пусть  $\mathbf{R}_O$  — радиус-вектор, проведенный к точке  $O$  из точки  $O_1$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус вектор частицы  $A$  в движущейся системе координат,  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор частицы  $A$  в неподвижной системе координат. Из рисунка видно, что в любой момент времени выполняется векторное равенство

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}.$$

Условно будем называть скорость и ускорение частицы  $A$  в неподвижной системе отсчета *абсолютной скоростью*  $\mathbf{V}_{\text{абс}}$  и *абсолютным ускорением*  $\mathbf{a}_{\text{абс}}$ , а ее скорость и ускорение в движущейся системе отсчета — *относительной скоростью*  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  и *относительным ускорением*  $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ .

Если орты координатных осей движущейся системы координат обозначить через  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , то радиус-вектор  $\mathbf{r}$  можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где  $x, y, z$  — координаты точки  $A$  в указанной системе отсчета.

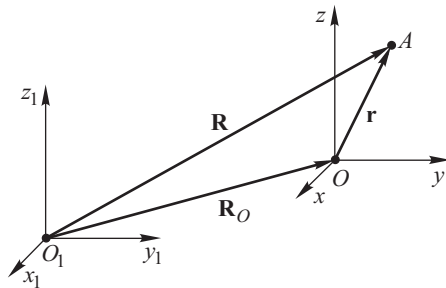


Рис. 33

Относительная скорость частицы равна

$$\mathbf{V}_{\text{отн}} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}.$$

Ее относительное ускорение

$$\mathbf{a}_{\text{отн}} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}.$$

Вычислим абсолютную скорость частицы  $A$  как производную по времени ее радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{абс}} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= \frac{d\mathbf{R}_O}{dt} + \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}}, \end{aligned} \quad (12.1)$$

где  $\mathbf{V}_O = d\mathbf{R}_O/dt$  — скорость точки  $O$  в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ . При дифференцировании было учтено, что в неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  орты  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  координатных осей поступательно движущейся системы координат  $Oxyz$  являются постоянными векторами (модули и направления в пространстве векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  при поступательном движении остаются неизменными).

Мысленно представим себе, что с движущейся системой координат  $Oxyz$  жестко связана некоторая заполняющая все пространство среда геометрических точек, расстояния между любыми двумя точками которой остаются неизменными в процессе движения. По аналогии с твердым телом будем называть ее «твердой» геометрической средой. Частица  $A$  движется в этой «твердой» геометрической среде, не испытывая никакого сопротивления. Назовем скорость точки «твердой» геометрической среды, в которой в данный момент находится частица  $A$ , *переносной скоростью* и обозначим ее через  $\mathbf{V}_{\text{пер}}$ . Поскольку жестко связанная с поступательно движущейся системой координат  $Oxyz$  «твердая» геометрическая среда также движется поступательно, скорости всех ее точек одинаковы. В частности, скорость  $\mathbf{V}_{\text{пер}}$  точки среды, в которой находится частица  $A$ , совпадает со скоростью  $\mathbf{V}_O$  начала системы координат:

$$\mathbf{V}_{\text{пер}} = \mathbf{V}_O.$$

С учетом этого равенства из (12.1) получим формулу, связывающую абсолютную и относительную скорости частицы  $A$ :

$$\mathbf{V}_{\text{абс}} = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_{\text{пер}} + \mathbf{V}_{\text{отн}}. \quad (12.2)$$

В соответствии с этой формулой скорость частицы  $\mathbf{V}_{\text{абс}}$  в неподвижной системе отсчета складывается из скорости  $\mathbf{V}_{\text{пер}}$

точки жестко связанной с движущейся системой координат «твердой» геометрической среды, в которой в данный момент расположена частица, и скорости  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  частицы в движущейся системе отсчета.

Вычислим абсолютное ускорение частицы  $A$  как производную по времени абсолютной скорости:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{абс}} &= \frac{d\mathbf{V}_{\text{абс}}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_O}{dt} + \frac{d\mathbf{V}_{\text{отн}}}{dt} = \mathbf{a}_O + \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) = \\ &= \mathbf{a}_O + \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{\text{отн}}. \quad (12.3)\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение *переносное ускорение*  $\mathbf{a}_{\text{пер}}$  — ускорение точки жестко связанной с движущейся системой координат  $Oxyz$  «твердой» геометрической среды, в которой в данный момент находится частица  $A$ , и учтем, что ускорения всех точек этой среды одинаковы, поскольку среда движется поступательно. Тогда ускорение  $\mathbf{a}_O$  точки  $O$  равно переносному ускорению:  $\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_{\text{пер}}$ . С учетом этого равенства получим из (12.3) следующую формулу:

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{отн}}. \quad (12.4)$$

Итак, ускорение  $\mathbf{a}_{\text{абс}}$  частицы в неподвижной системе отсчета складывается из ускорения  $\mathbf{a}_{\text{пер}}$  точки жестко связанной с поступательно движущейся системой координат «твердой» геометрической среды, в которой в данный момент находится частица, и ускорения  $\mathbf{a}_{\text{отн}}$  частицы относительно движущейся системы координат.

**Преобразование скорости и ускорения при переходе к произвольно движущейся системе отсчета.** Как и раньше, движение частицы  $A$  в пространстве будем рассматривать с использованием двух систем отсчета — неподвижной и движущейся, с которыми связаны декартовы системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $Oxyz$ , соответственно. Система  $Oxyz$  движется произвольно относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$ . По аналогии со свободным движением твердого тела движение системы координат  $Oxyz$  и жестко связанной с ней «твердой» геометрической среды можно представить как совокупность двух движений: поступательного движения вместе с точкой  $O$ , и вращения с некоторой угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг мгновенной оси, проходящей через точку  $O$  (рис. 34).

В неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  положения частицы  $A$  и точки  $O$  определяются радиусами-векторами  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_O$ , соответственно. В движущейся системе  $Oxyz$  положение части-

цы  $A$  задается радиусом-вектором  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , где  $x, y, z$  — координаты точки  $A$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты координатных осей. В рассматриваемом случае произвольного, а не поступательного как

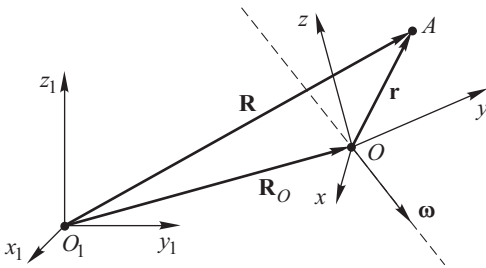


Рис. 34

раньше, движения системы координат  $Oxyz$  орты  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , не являются постоянными векторами. В каждый момент времени вместе с системой координат  $Oxyz$  орты  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  участвуют во вращении вокруг мгновенной оси с некоторой угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . След-

довательно, направления этих векторов в пространстве относительно неподвижной системы отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  непрерывно меняются, при этом длина каждого из векторов остается неизменной, равной единице. В дальнейших вычислениях учтем, что, согласно (11.1), производные по времени векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  постоянной длины и изменяющегося направления можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}], \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j}], \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}].$$

Скорость и ускорение частицы  $A$  в системе  $Oxyz$ , которые мы называем относительной скоростью и относительным ускорением, равны:

$$\mathbf{V}_{\text{отн}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}_{\text{отн}} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

В любой момент времени выполняется векторное равенство (см. рис. 34):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r} = \mathbf{R}_O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Для определения скорости  $\mathbf{V}_{\text{абс}}$  частицы  $A$  в неподвижной системе отсчета продифференцируем это равенство по времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{абс}} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{d\mathbf{R}_O}{dt} + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + \\ &+ x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}} + x[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}] + y[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j}] + z[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}] = \\ &= \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \end{aligned}$$

Полученная формула, связывающая скорости частицы  $A$  в неподвижной и движущейся системах отсчета, может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{V}_{\text{абс}} = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] + \mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_{\text{пер}} + \mathbf{V}_{\text{отн}}, \quad (12.5)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] = \mathbf{V}_{\text{пер}} \quad (12.6)$$

— переносная скорость (скорость точки «твердой» геометрической среды, жестко связанной с системой координат  $Oxyz$ , в которой в данный момент находится частица  $A$ ). Переносная скорость складывается из скорости  $\mathbf{V}_O$  точки  $O$  этой среды (начала системы координат  $Oxyz$ ) и скорости  $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ , обусловленной вращением среды вокруг мгновенной оси, проходящей через точку  $O$ . Выражение (12.6) для переносной скорости совпадает с формулой (9.1) скорости произвольной точки твердого тела при его свободном движении (см. § 9).

Найдем ускорение  $\mathbf{a}_{\text{абс}}$  частицы  $A$  в неподвижной системе отсчета. Для этого продифференцируем по времени формулу (12.5) абсолютной скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{абс}} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] + \mathbf{V}_{\text{отн}}) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega}, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{d\mathbf{V}_O}{dt} + \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \right] + \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right] + \\ &+ \left[ \boldsymbol{\omega}, x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \right] + \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} + \frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \\ &= \frac{d\mathbf{V}_O}{dt} + \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \right] + \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right] + \\ &+ [\boldsymbol{\omega}, x[\boldsymbol{\omega} \mathbf{i}] + y[\boldsymbol{\omega} \mathbf{j}] + z[\boldsymbol{\omega} \mathbf{k}]] + \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} + \\ &+ \frac{dx}{dt}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{i}] + \frac{dy}{dt}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{j}] + \frac{dz}{dt}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{k}] = \frac{d\mathbf{V}_O}{dt} + \\ &+ \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \right] + \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]] + \\ &+ \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} + \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right] = \\ &= \mathbf{a}_O + [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{\text{отн}}] + \mathbf{a}_{\text{отн}}, \quad (12.7) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{a}_O = d\mathbf{V}_O/dt$  — ускорение точки  $O$  в неподвижной системе отсчета,  $\boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\omega}/dt$  — угловое ускорение движущейся системы координат.

Формулу (12.7), связывающую ускорения  $\mathbf{a}_{абс}$  и  $\mathbf{a}_{отн}$  частицы  $A$  в неподвижной и движущейся системах отсчета, можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{a}_{абс} = \mathbf{a}_O + [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{отн}] + \mathbf{a}_{отн} = \mathbf{a}_{пер} + \mathbf{a}_{кор} + \mathbf{a}_{отн}. \quad (12.8)$$

В (12.8) введены следующие обозначения.

$$\mathbf{a}_O + [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] = \mathbf{a}_{пер} \quad (12.9)$$

— переносное ускорение (ускорение точки «твердой» геометрической среды, жестко связанной с движущейся системой координат  $Oxyz$ , в которой в данный момент находится частица  $A$ ). Переносное ускорение складывается из ускорения  $\mathbf{a}_O$  точки  $O$  этой среды (начала системы координат  $Oxyz$ ), а также ускорений  $[\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}]$  и  $[\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]]$ , обусловленных вращением «твердой» среды вокруг проходящей через точку  $O$  мгновенной оси (ср. с формулой (6.2) линейного ускорения произвольной точки твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси).

Слагаемое

$$\mathbf{a}_{кор} = 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{отн}] \quad (12.10)$$

называется *кориолисовым ускорением*, оно зависит от угловой скорости вращения движущейся системы отсчета  $Oxyz$  и от относительной скорости точки  $A$ . Кориолисово ускорение равно нулю в том случае, если система координат  $Oxyz$  движется поступательно ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ), или если относительная скорость точки  $A$  равна нулю ( $\mathbf{V}_{отн} = 0$ ).

Формула (12.8) представляет собой математическое выражение *теоремы Кориолиса* о преобразовании ускорения частицы при переходе от одной системы отсчета к другой.

## Задачи

**1.1.** Под каким углом  $\varphi$  к горизонту следует бросить камень со склона горы, составляющего с горизонтом угол  $\alpha = 45^\circ$ , чтобы камень упал на склон на максимальном расстоянии от точки броска?

**1.2.** Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы:

а) радиус кривизны начала его траектории был в  $\eta = 8$  раз больше, чем в вершине;

б) центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности?

**1.3.** Точка движется в плоскости  $xy$  по закону  $x = \alpha t$ ,  $y = \alpha t(1 - \beta t)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные постоянные. Найти:

а) уравнение траектории точки  $y(x)$  и изобразить ее график;

б) скорость  $V$  и ускорение  $A$  точки в зависимости от  $t$ ;  
 в) момент  $t_0$ , когда угол между скоростью и ускорением равен  $\pi/4$ .

**1.4.** Колесо радиуса  $R$  движется горизонтально со скоростью  $V_0$  и вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Точка  $A$  на ободу колеса описывает в пространстве некоторую траекторию. Найти радиус кривизны  $\rho$  траектории точки  $A$  в момент, когда точка находится на горизонтальной прямой, проходящей через центр колеса (рис. 1.4).

**1.5.** Горизонтальный диск вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг вертикально расположенной собственной оси. В некоторой точке на этом диске на расстоянии  $R$  от его оси установлен второй диск, ось которого также вертикальна. Второй диск вращается вокруг своей оси в том же направлении, что и первый, но с угловой скоростью  $\omega_2$ . Где располагается мгновенная ось вращения, движение вокруг которой второго диска будет эквивалентно его участию в двух вращениях с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ? С какой угловой скоростью  $\omega$  вращается второй диск вокруг мгновенной оси?

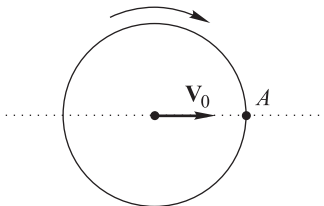


Рис. 1.4



## ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика изучает движение тел в связи с вызывающими его причинами — взаимодействиями тел. В основе динамики лежат законы, сформулированные Ньютоном в 1687 году (законы Ньютона).

### § 13. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея

**Закон инерции Галилея–Ньютона. Инерциальные системы отсчета.** В качестве первого закона движения Ньютон принял закон инерции, открытый Галилеем (1564–1642). Согласно этому закону, *тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, находится в состоянии покоя, либо движется прямолинейно и равномерно.*

Тело может испытывать внешние воздействия двух типов: а) воздействия, возникающие при непосредственном контакте тел, их соприкосновении (например, давление, трение); б) воздействия со стороны порождаемых телами силовых полей (например, электрического, гравитационного). Говоря о том, что тело не подвержено внешним воздействиям, имеют ввиду, что оно не соприкасается с другими телами и не испытывает влияния силовых полей, то есть является изолированным по отношению к другим телам.

Не подверженных внешним воздействиям тел, строго говоря, не существует. Такие тела являются физическими абстракциями. Однако, на практике можно поставить тело в такие условия, что внешние воздействия либо очень малы, либо компенсируют друг друга. Представив себе, что внешние воздействия на тело беспредельно уменьшаются, мы приходим к представлениям о свободном теле (не следует смешивать понятие *свободного движения* твердого тела в кинематике, то есть движения, не ограниченного какими-либо кинематическими связями, и понятие *свободного тела* в динамике, то есть тела, которое не взаимодействует ни с какими другими телами или силовыми полями). Примерами практически свободных тел являются звезды ввиду их громадной удаленности от других тел. Установить в каждом

конкретном случае факт наличия или отсутствия внешних воздействий на тело можно только с помощью опыта, и, вообще говоря, это нелегкая экспериментальная задача.

Закон инерции Галилея не может быть справедлив во всех системах отсчета. Покажем, что если существует система отсчета, в которой закон инерции выполняется, всегда можно указать систему отсчета, где это не так.

Пусть тело  $A$  (материальная точка) не испытывает внешних воздействий и для него выполняется закон инерции в системе отсчета  $S_1$  ( $O_1x_1y_1z_1$  — связанная с системой  $S_1$  система координат, см. рис. 35). Ускорение  $\mathbf{a}_1$  тела в системе отсчета  $S_1$  равно нулю:

$$\mathbf{a}_1 = 0. \quad (13.1)$$

Рассмотрим систему отсчета  $S$ , которая движется ускоренно и поступательно относительно системы  $S_1$  (строго говоря, речь идет о поступательном движении связанной с  $S$  системы координат, обозначенной  $Oxyz$ ). Ускорение  $\mathbf{a}_O$  точки  $O$  — начала системы  $S$  — отлично от нуля:

$$\mathbf{a}_O \neq 0. \quad (13.2)$$

В соответствии с формулой (12.2) преобразования ускорения при переходе от одной системы отсчета к другой можно выразить ускорение  $\mathbf{a}_1$  тела в системе  $S_1$  через его ускорение  $\mathbf{a}$  в системе  $S$  и ускорение  $\mathbf{a}_O$  подвижной системы отсчета  $S$  относительно неподвижной  $S_1$ :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}.$$

Отсюда, с учетом (13.1) и (13.2), получим

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_O = -\mathbf{a}_O \neq 0.$$

Несмотря на то, что тело является свободным, его ускорение  $\mathbf{a}$  в системе отсчета  $S$  отлично от нуля, тело движется ускоренно. Следовательно, закон инерции в системе  $S$  не выполняется.

Приведенный пример показывает, что если закон инерции справедлив в некоторой системе отсчета (система  $S_1$ ), то в любой системе, движущейся ускоренно относительно первой (система  $S$ ), он не действует. Таким образом, все системы отсчета

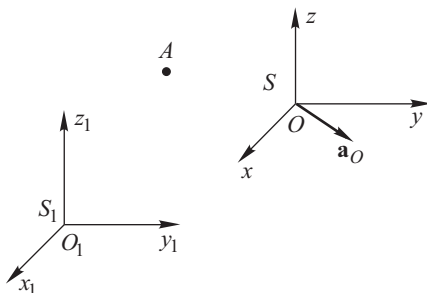


Рис. 35

делятся на два класса по отношению к закону инерции — в одних он верен, в других — нет.

Содержание *первого закона Ньютона* (закона инерции Галилея-Ньютона) сводится к следующему утверждению. *Существует система отсчета, называемая инерциальной, в которой не подверженное внешним воздействиям тело (материальная точка) находится в состоянии покоя, либо движется равномерно и прямолинейно.* В приведенной формулировке первый закон движения содержит определение инерциальной системы отсчета.

*Неинерциальной* системой отсчета называется всякая система, движущаяся ускоренно по отношению к инерциальной системе отсчета. В неинерциальной системе отсчета свободное тело движется ускоренно.

**Примеры.** Система отсчета, начало которой расположено в центре масс Солнечной системы, а координатными осями служат прямые, направленные на три удаленные звезды, является строго инерциальной. Эта система отсчета называется *гелиоцентрической* или системой Коперника. До настоящего времени не существует ни одного опытного факта, который опровергал бы инерциальность этой системы.

Система отсчета, жестко связанная с поверхностью Земли, не является инерциальной. Действительно, Земля, вращаясь вокруг Солнца и вокруг собственной оси, движется ускоренно относительно гелиоцентрической системы отсчета. Неинерциальность системы отсчета, связанной с земной поверхностью, можно обосновать и иначе. Удаленные звезды, которые являются практически свободными телами, в рассматриваемой системе отсчета совершают суточные вращения на небесном небосводе, их траекториями являются замкнутые кривые. При движении тела по криволинейной траектории его ускорение отлично от нуля (по крайней мере, отлично от нуля нормальное ускорение (см. формулу (3.5)). Таким образом, свободные тела (звезды) движутся ускоренно по отношению к системе отсчета, связанной с поверхностью Земли. Закон инерции не выполняется, что доказывает неинерциальность системы отсчета.

В кинематике, где речь идет лишь об описании движения тел и не затрагивается вопрос о причинах, вызывающих движение, никакой принципиальной разницы между различными системами отсчета не существует, все они равноправны. Совершенно иначе обстоит дело в динамике, при изучении законов движения. Обнаруживается существенное различие между системами отсчета: все они делятся на два класса — инерциальные и неинерциальные.

Всякая система отсчета, которая движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, также является инерциальной. Вследствие этого, *существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета.*

Докажем это утверждение. Действительно, пусть некоторое тело движется равномерно и прямолинейно в гелиоцентрической системе отсчета, которая, как известно из опыта, является инерциальной. Обозначим гелиоцентрическую систему отсчета через  $S_1$  ( $O_1x_1y_1z_1$  — связанная с  $S_1$  система координат). Рассмотрим свободное тело, ускорение которого в этой системе отсчета равно нулю:

$$\mathbf{a}_{абс} = 0. \quad (13.3)$$

Пусть некоторая система отсчета  $S$  ( $Oxyz$  — связанная с  $S$  система координат) движется равномерно и прямолинейно по отношению к системе  $S_1$ . Тогда ускорение точки  $O$  — начала системы  $S$  — равно нулю:

$$\mathbf{a}_O = 0. \quad (13.4)$$

Ускорение тела относительно системы  $S$  обозначим через  $\mathbf{a}_{отн}$ . Применим формулу (12.2), связывающую ускорения тела в двух системах отсчета:

$$\mathbf{a}_{абс} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{отн}.$$

Из этой формулы с учетом (13.3) и (13.4) найдем

$$\mathbf{a}_{отн} = \mathbf{a}_{абс} - \mathbf{a}_O = 0,$$

ускорение тела в системе  $S$  равно нулю.

Таким образом, в системе отсчета  $S$ , как и в системе  $S_1$ , свободное тело движется равномерно и прямолинейно. Следовательно, система  $S$  является инерциальной. Движущаяся равномерно система  $S$  была выбрана нами произвольно. Значит всякая система отсчета, которая движется равномерно и прямолинейно по отношению к инерциальной системе отсчета  $S_1$  (гелиоцентрической), также будет инерциальной.

**Принцип относительности Галилея.** Согласно *принципу относительности*, сформулированному Галилеем в 1636 г., *все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.* Во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы, а законы механики имеют одинаковую математическую форму выражения. В соответствии с этим принципом, никакими механическими опытами, проводимыми в какой-либо инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится данная система или движется равномерно и прямолинейно.

Движение относительно. Это означает, что траектория материальной точки, ее скорость зависят от выбора системы отсчета. В то же время законы классической механики, например, закон движения материальной точки  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , во всех инерциальных системах отсчета записываются одинаково.

**Преобразования Галилея.** Преобразования Галилея — это формулы преобразования координат материальной точки и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

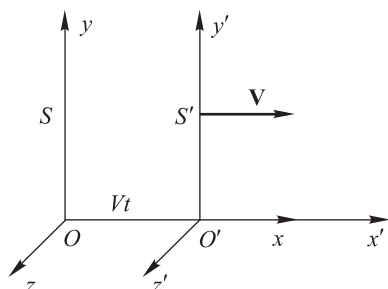


Рис. 36

и сонаправлены с вектором  $\mathbf{V}$  (рис. 36). Преобразования Галилея — формулы, связывающие между собой координаты  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  материальной точки и время  $t$  и  $t'$  в двух системах отсчета, имеют следующий вид:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (13.5)$$

Преобразования Галилея соответствуют представлениям классической механики о том, что промежутки времени между событиями и размеры тел (длины отрезков) одинаковы во всех системах отсчета. Кроме того, при замене координат движущихся материальных точек и времени с помощью (13.5) уравнения механики, в частности, уравнение движения  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , не меняется по форме. Говорят, что уравнения движения *инвариантны* по отношению к преобразованиям Галилея.

Таким образом, преобразования Галилея по существу являются математическим выражением принципа относительности Галилея.

## § 14. Второй и третий законы Ньютона

*Инертностью* называется свойство тела оказывать сопротивление при попытках привести его в движение или изменить величину и направление его скорости. Из опыта хорошо

известно, что разные тела обладают различной инертностью. Так, столкнуть с места заглухший автомобиль гораздо труднее, чем, например, катить перед собою детскую коляску. Чтобы охарактеризовать инертность того или иного тела, вводят понятие массы.

*Масса* есть мера инертности тела.

Аристотель рассматривал силу как причину движения. Он считал, что для поддержания движения необходима сила, вместе с прекращением действия силы прекращается и движение. С открытием закона инерции представления о силе как причине движения оказались неверными, поскольку для поддержания равномерного движения тела никаких сил не требуется. Силу стали рассматривать как причину изменения движения тела. Поскольку изменение движения тела всегда вызывается другими телами, можно дать следующее качественное определение силы.

*Сила* есть мера интенсивности взаимодействия тел.

Пусть на гладкой горизонтальной плоскости лежат два тела. Поочередно подействуем на каждое из них растянутой на одну и ту же длину  $l$  горизонтальной пружины (рис. 37). Можно полагать, что растянутая на одну и ту же длину пружина одинаково воздействует на каждое тело, или, говоря иначе, действует на разные тела с одинаковой силой. В дальнейших рассуждениях мы будем исходить из того, что обладаем способом подействовать на различные тела одинаковой силой. При этом измерять саму силу не требуется.

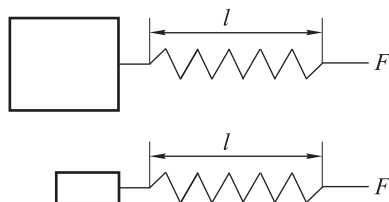


Рис. 37

**Количественное определение массы.** Подействуем на два различных тела равными силами и измерим ускорения  $a_1$  и  $a_2$ , которые приобретут эти тела. Количественное определение массы состоит в следующем. *Отношение масс двух тел равно обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными силами:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Чтобы определить массу  $m_x$  какого-либо конкретного тела, необходимо иметь тело эталонной массы  $m_{\text{эт}}$ . Действуя одинаковой силой на тело неизвестной массы  $m_x$  и эталонной массы  $m_{\text{эт}}$  и измеряя соответствующие ускорения  $a_x$  и  $a_{\text{эт}}$ , можно вы-

числить  $m_x$  по формуле

$$m_x = m_{\text{эт}} \frac{a_{\text{эт}}}{a_x}.$$

Единицей массы в системе СИ является *килограмм* (кг). По определению массой один килограмм обладает эталонная гиря, изготовленная из платино-иридиевого сплава по специальной технологии (эталон массы хранится в Международном бюро мер весов в г. Севр, Франция). В повседневной жизни в качестве тел известной массы, с помощью которых определяют массы других тел, используют гири и разновесы, которые с той или иной степенью точности воспроизводят эталонную массу.

**Свойства массы.** Опытным путем установлены следующие свойства массы.

Масса составного тела равна сумме масс его частей. Иначе говоря, масса — величина *аддитивная*.

Масса тела не изменяется при его движении, не зависит от величины скорости тела. Масса — величина *постоянная*. Этим свойством масса обладает только в рамках классической механики при движении тел со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме ( $\sim 3 \cdot 10^8$  м/с).

Существуют примеры движения с относительно небольшими скоростями, в которых масса тела изменяется (движение космической ракеты, самолета и т.д.). Изменение массы движущегося тела в подобных случаях происходит за счет изменения количества вещества (например, сгорание топлива). Закономерности движения тел с переменной массой будут рассмотрены ниже (см. § 19).

**Количественное определение силы.** Пусть тело массы  $m$  в результате воздействия со стороны других тел приобрело ускорение  $\mathbf{a}$ . По определению *действующая на тело (материальную точку) сила  $\mathbf{F}$*  равна произведению массы тела на его ускорение:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Сила  $\mathbf{F}$  — вектор, совпадающим по направлению с ускорением тела  $\mathbf{a}$ .

**Второй закон Ньютона.** *Второй закон Ньютона: произведение массы тела (материальной точки) на его ускорение равно действующей на тело силе.* В такой формулировке закон лишь воспроизводит определение силы и является малосодержательным.

Фактическое содержание второго закона Ньютона состоит в том, что произведение массы тела на его ускорение, которое на-

зывается силой  $\mathbf{F}$ , зависит только от положения тела относительно других тел и, возможно, от скорости тела. На математическом языке это означает, что сила  $\mathbf{F}$  является функцией только координат  $x, y, z$  тела, и, возможно, первых производных  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  координат по времени (компонент скорости тела):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \quad (14.1)$$

Координаты других тел входят в функцию  $\mathbf{F}$  в качестве параметров.

**Законом силы** называется конкретный вид функции  $\mathbf{F}$ . Установление закона силы в каждом конкретном случае взаимодействия тел является одной из основных задач физической механики. Например, из опыта известно, что при не слишком больших скоростях сила сопротивления движению тела в вязкой среде равна  $\mathbf{F} = -k\mathbf{V}$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $\mathbf{V}$  — скорость тела.

Таким образом, установлен закон силы вязкого трения.

Единицей силы в системе СИ является *ньютон* (Н). Сила, равная одному ньютону, сообщает телу массой 1 кг ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ ,  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$ .

**Принцип суперпозиции сил.** Пусть материальная точка взаимодействует с несколькими телами (телом 1, телом 2 и т.д.). Опыт показывает, что действующую на материальную точку силу  $\mathbf{F}$  можно представить как векторную сумму нескольких сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i + \dots,$$

где  $\mathbf{F}_i$  — сила, с которой действует на материальную точку тело с номером  $i$  в отсутствие других тел.

Итак, силы подчиняются *принципу суперпозиции: действующая на материальную точку сила равна векторной сумме сил, с которыми каждое из окружающих тел действует на нее в отсутствие других тел.*

**Третий закон Ньютона.** На основании опытных фактов был сформулирован *третий закон Ньютона: силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны*



Рис. 38

*вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 38):*

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$



Силы взаимодействия появляются парами. Они приложены к разным материальным точкам. Третий закон Ньютона распространяется и на системы из произвольного числа материальных точек. В этом случае закон применим к силам попарного взаимодействия между материальными точками системы.

## § 15. Классификация сил в природе. Законы сил

Все силы, встречающиеся в природе и известные науке в настоящее время, в конечном счете сводятся к четырем типам фундаментальных взаимодействий — гравитационным, электромагнитным, ядерным и слабым. Ядерные и слабые взаимодействия характерны для процессов с участием атомных ядер и элементарных частиц и проявляются на малых расстояниях ( $\sim 10^{-13}$  см). Электромагнитные и гравитационные силы убывают с увеличением расстояния между взаимодействующими телами медленно (например, сила гравитационного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами), потому что электромагнитные и гравитационные силы называются *дальнодействующими*.

**Сила гравитационного притяжения.** Согласно открытому Ньютоном *закону всемирного тяготения* два тела (материальные точки) притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r_{12}$  между ними:

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \quad (15.1)$$

Здесь  $\gamma$  — *гравитационная постоянная*,  $\gamma = 6,672 \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ . В литературе силу  $F_{\text{гр}}$  называют *силой гравитационного притяжения*, *гравитационной силой*, *силой тяготения*.

Гравитационную силу  $\mathbf{F}_{21}$ , действующую на тело массой  $m_2$  со стороны тела массой  $m_1$ , можно записать в векторной форме:

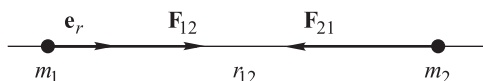


Рис. 39

$$\mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_r,$$

где  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор, направленный от тела 1 к телу 2 (рис. 39).

В формулу (15.1) входит так называемая *гравитационная масса* тел, которая характеризует тела как источники тяготения. Из опыта известно, что гравитационная масса равна *инертной массе*, определение которой дано выше (см. § 14).

**Кулоновская сила.** Согласно *закону Кулона* сила взаимодействия между двумя заряженными телами (материальными точками) равна:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (15.2)$$

где  $q_1, q_2$  — модули зарядов,  $r$  — расстояние между телами,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м.

**Упругие силы.** В основе всех механических явлений лежат фундаментальные гравитационные и электромагнитные взаимодействия. Однако при изучении многих явлений, которые происходят с макроскопическими телами, удобно рассматривать силы, которые не являются фундаментальными, но могут быть получены из фундаментальных сил. Важную роль играют упругие силы.

Всякое реальное тело под действием приложенных к нему внешних сил деформируется, то есть изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется упругой. *Упругие силы* возникают в теле в процессе его упругой деформации.

Закрепим неподвижно один конец стальной спиральной пружины, имеющей в недеформированном состоянии длину  $r_0$ , а к свободному концу приложим направленную вдоль оси пружины силу  $\mathbf{F}$ . Под действием внешней силы  $\mathbf{F}$  пружина растянется, после чего наступит равновесие: внешняя сила  $\mathbf{F}$  будет уравновешена возникающей в пружине в результате деформации упругой силой  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$  (силой упругости пружины). Пусть длина растянутой пружины  $r$ . Направим ось  $x$  вдоль оси пружины, совместив с ее закрепленным концом начало отсчета координаты  $x$  — точку  $O$  (рис. 40). Если деформация пружины не слишком велика,

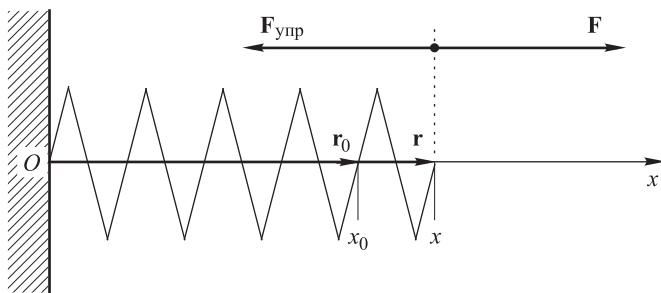


Рис. 40

то, согласно *закону Гука*, сила упругости пропорциональна величине деформации:

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (15.3)$$

где  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$  — векторы, проведенные из точки  $O$  к незакрепленному концу пружины в недеформированном и растянутом состояниях соответственно; вектор  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  характеризует величину деформации;  $\kappa$  — коэффициент пропорциональности, называемый *жесткостью* или *коэффициентом жесткости* пружины.

В проекции на ось  $x$  сила упругости равна

$$F_x = -\kappa(x - x_0), \quad (15.4)$$

где  $x_0$  и  $x$  — координаты незакрепленного конца пружины в недеформированном и растянутом состояниях.

Пропорциональная величине деформации сила упругости возникает и при сжатии пружины.

Однородный стальной стержень ведет себя подобно пружине (рис. 41). Если деформация стержня не слишком велика, относительное удлинение  $\Delta r/r_0$  пропорционально приходящейся на единицу площади поперечного сечения силе  $F/S$ :

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (15.5)$$

где  $r_0$  — длина недеформированного стержня,  $\Delta r$  — величина удлинения под действием внешней силы  $F$ , которая уравновешена упругой силой  $F_{\text{упр}}$ ,  $S$  —

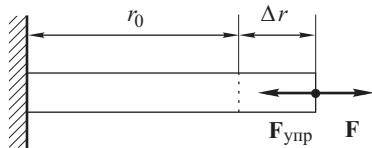


Рис. 41

площадь поперечного сечения стержня. Величина  $F/S$  называется *нормальным напряжением*. Константа  $E$  называется *модулем Юнга*, ее размерность  $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$  (паскаль). Величина  $E$  зависит от свойств материала, из которого изготовлен стержень.

**Силы трения.** Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел друг относительно друга или при попытках вызвать такое перемещение. Трение между поверхностями двух твердых тел называется *сухим*, а между твердым телом и жидкой или газообразной средой — *вязким*. Применительно к сухому трению различают трение покоя, скольжения и качения.

В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. В этом случае она называется силой *трения покоя*.

Пусть тело в форме бруска прижимается к неподвижной плоской горизонтальной поверхности другого тела силой  $\mathbf{F}_n$ ,

направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел (рис. 42).  $\mathbf{F}_n$  называется силой *нормального давления*, она может быть обусловлена притяжением бруска к Земле ( $\mathbf{F}_n = m\mathbf{g}$ )

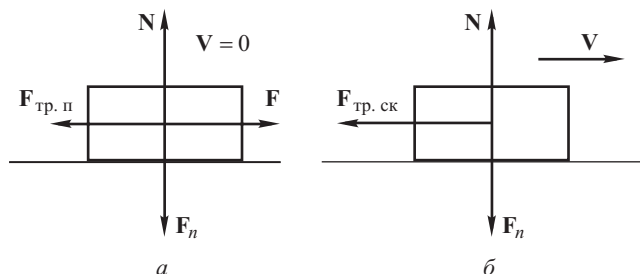


Рис. 42

или другими причинами. Сила нормального давления  $\mathbf{F}_n$  уравнивается приложенной к бруску силой *нормальной реакции опоры*  $\mathbf{N}$  ( $N = F_n$ ).

Попытаемся переместить брусок внешней горизонтальной силой  $\mathbf{F}$ , направленной параллельно поверхности соприкосновения тел (рис. 42 а). Из опыта известно, что если модуль силы  $\mathbf{F}$  не превышает некоторого значения  $F_0$ , то внешняя сила уравнивается силой трения покоя  $\mathbf{F}_{\text{тр. п}}$ :  $\mathbf{F}_{\text{тр. п}} = -\mathbf{F}$ . Поэтому брусок не движется. Если модуль  $\mathbf{F}$  превысит  $F_0$ , брусок начнет скользить. Таким образом, при увеличении внешней силы  $F$  от нуля до  $F_0$  автоматически меняется в тех же пределах сила трения покоя  $F_{\text{тр. п}}$ :

$$0 \leq F_{\text{тр. п}} \leq F_0, \quad (15.6)$$

препятствуя попыткам переместить соприкасающиеся тела друг относительно друга.

Сила *трения скольжения*  $\mathbf{F}_{\text{тр. ск}}$  возникает при перемещении (скольжении) соприкасающихся тел друг относительно друга. Приложенная к бруску сила трения скольжения направлена вдоль поверхности соприкосновения тел и противоположна скорости бруска (рис. 42 б). Из опыта известно, что модуль силы трения скольжения пропорционален силе нормального давления или, что тоже самое, силе нормальной реакции опоры  $N$  ( $F_n = N$ ):

$$F_{\text{тр. ск}} = kF_n = kN, \quad (15.7)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом трения скольжения*.

Коэффициент трения скольжения  $k$  зависит от природы соприкасающихся поверхностей и их состояния. Кроме того, коэффициент трения скольжения  $k$  является функцией относительной скорости  $V$  тел:

$$k = k(V).$$

Сила трения скольжения, равная  $F_{\text{тр.ск}} = k(V)F_n$ , зависит от относительной скорости  $V$  (рис. 43). Однако, эта зависимость является слабой, и в большинстве случаев ею мож-

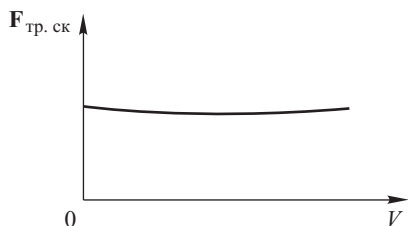


Рис. 43

но пренебречь, считая коэффициент трения скольжения и силу трения скольжения постоянными величинами.

При решении задач как правило предполагается, что наибольшее возможное значение силы трения покоя приблизительно равно силе трения скольжения:

$$F_0 \approx F_{\text{тр.ск.}}$$

С учетом этого соотношения неравенство (15.6), определяющее пределы изменения силы трения покоя, можно представить в следующем виде:

$$0 \leq F_{\text{тр.п}} \leq kN. \quad (15.8)$$

*Сила трения качения* возникает при качении тел цилиндрической или шарообразной формы по гладкой поверхности вследствие деформации обоих соприкасающихся тел. На гладкой поверхности в месте ее соприкосновения с телом круглой формы появляются небольшое углубление и бугорок. Вследствие этого возникает сила сопротивления движению  $\mathbf{F}$  (*сила реакции*), горизонтальная составляющая которой называется силой трения качения  $\mathbf{F}_{\text{тр.кач}}$ , а вертикальная составляющая — *силой нормальной реакции опоры*  $\mathbf{N}$  (рис. 44). Обычно величина силы трения качения во много раз меньше силы трения скольжения. Этим обусловлено широкое использование в технике подшипников качения, позволяющих значительно уменьшить трение в деталях машин и механизмов.

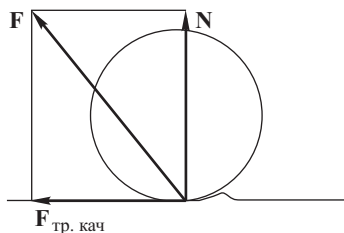


Рис. 44

Подчеркнем, что если при решении той или иной задачи соприкасающиеся тела считаются абсолютно твердыми (недеформируемыми), то сила трения качения возникнуть не может.

**Основное уравнение динамики.** Основное уравнение динамики представляет собой математическое выражение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (15.9)$$

Уравнение (15.9) — это векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки.

Решение уравнения можно проводить в векторном виде, или в проекциях на оси неподвижной декартовой прямоугольной системы координат, или в проекциях на касательную и нормаль к траектории движения тела.

В проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат векторное уравнение (15.9) эквивалентно трем скалярным:

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dV_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dV_z}{dt} = F_z.$$

Если траектория материальной точки является плоской кривой, то в проекциях на касательную и нормаль к траектории векторное уравнение (15.9) распадается на два скалярных:

$$m \frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n,$$

где  $\frac{dV_\tau}{dt} = a_\tau$  — тангенциальное ускорение,  $\frac{V^2}{\rho} = a_n$  — нормальное ускорение,  $\rho$  — радиус кривизны траектории.

## § 16. Движение относительно неинерциальных систем отсчета. Силы инерции

**Уравнение движения в неинерциальных системах отсчета.** В инерциальных системах отсчета справедлив второй закон Ньютона, математическим выражением которого является уравнение движения материальной точки:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (16.1)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, обусловленная взаимодействием материальной точки с другими телами.

Свободное не подверженное внешним воздействиям тело в неинерциальной системе отсчета движется с отличным от нуля ускорением ( $\mathbf{a} \neq 0$ ), несмотря на то что силы взаимодействия с другими телами отсутствуют ( $\mathbf{F} = 0$ ) (см. выше, § 13). Следовательно, в неинерциальной системе отсчета произведение массы тела на его ускорение не равно действующей на тело силе:

$$m\mathbf{a} \neq \mathbf{F},$$

и второй закона Ньютона в форме (16.1), где в правой части записана сила  $\mathbf{F}$ , обусловленная взаимодействием тел (ньютоновская сила), не выполняется.

Между тем, в практических целях часто требуется определить движение тела в неинерциальной системе отсчета, например, рассчитать траекторию движения баллистической ракеты относительно поверхности Земли. Для этого необходимо так изменить уравнение движения (16.1), чтобы оно оказалось справедливым в неинерциальных системах отсчета.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета  $S_1$  ( $O_1x_1y_1z_1$  — связанная с  $S_1$  система координат) и неинерциальную систему отсчета  $S$  ( $Oxyz$  — связанная с  $S$  система координат) (рис. 45).

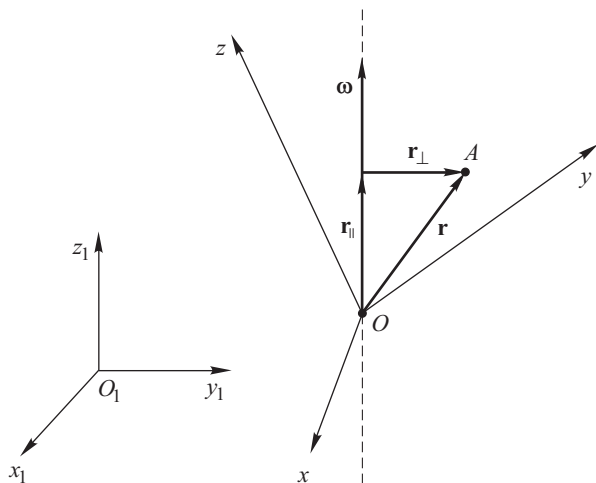


Рис. 45

Произвольное движение системы координат  $Oxyz$  можно представить как совокупность двух движений — поступательного движения вместе с началом системы координат — точкой  $O$ , и вращения с некоторой угловой скоростью  $\omega$  вокруг проходящей через точку  $O$  мгновенной оси.

Пусть на тело  $A$  (материальную точку), масса которого  $m$ , со стороны окружающих тел действует сила  $\mathbf{F}$ . Уравнение движения тела в инерциальной системе  $S_1$  имеет вид

$$m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}, \quad (16.2)$$

где  $\mathbf{a}_1$  — ускорение.

Согласно формуле (12.8) преобразования ускорения при переходе от одной системы отсчета к другой ускорение  $\mathbf{a}_1$  тела

в системе отсчета  $S_1$  можно выразить через его ускорение  $\mathbf{a}$  в системе отсчета  $S$ :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_O + \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] + 2 [\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{\text{отн}}] + \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}_O$  — ускорение точки  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения системы координат  $Oxyz$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к телу  $A$ ,  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  — скорость тела  $A$  относительно системы  $S$ . Умножив обе части равенства на  $m$  и выполнив простые преобразования, получим

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_O - m \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right] - m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] - 2m [\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{\text{отн}}]. \quad (16.3)$$

Рассмотрим поочередно слагаемые правой части этого уравнения. Произведение  $m\mathbf{a}_1$ , в соответствии с (16.2), равно действующей на тело  $A$  со стороны других тел силе  $\mathbf{F}$ :  $m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}$ .

Для остальных слагаемых правой части введем следующие названия и обозначения:

*поступательная сила инерции:*

$$\mathbf{F}_{\text{пост}} = -m\mathbf{a}_O; \quad (16.4)$$

*центробежная сила инерции:*

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = -m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]]. \quad (16.5)$$

Центробежную силу инерции можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}, \quad (16.6)$$

где  $\mathbf{r}_{\perp}$  — составляющая радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , перпендикулярная к мгновенной оси вращения системы  $S$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  (см. рис. 45).

Для вывода формулы (16.6) представим радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в виде суммы двух составляющих:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}, \quad (16.7)$$

где вектор  $\mathbf{r}_{\perp}$  перпендикулярен к  $\boldsymbol{\omega}$ , а вектор  $\mathbf{r}_{\parallel}$  параллелен  $\boldsymbol{\omega}$ .

Векторное произведение параллельных векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}_{\parallel}$  равно нулю:

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{\parallel}] = 0; \quad (16.8)$$

Скалярное произведение перпендикулярных векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}_{\perp}$  также равно нулю:

$$(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{\perp}) = 0. \quad (16.9)$$

Преобразовав с учетом равенств (16.7)–(16.9) выражение (16.5) и воспользовавшись формулой двойного векторного про-



изведения, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{цб}} &= -m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] = -m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}]] = \\ &= -m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{\perp}]] - m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{\parallel}]] = \\ &= -m [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{\perp}]] = -m \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{\perp}) + m \mathbf{r}_{\perp} (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}) = m \omega^2 \mathbf{r}_{\perp},\end{aligned}$$

что совпадает с (16.6).

*Силой Кориолиса* называется векторная величина

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -2m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{\text{отн}}] = 2m[\mathbf{V}_{\text{отн}} \boldsymbol{\omega}]. \quad (16.10)$$

Слагаемое  $-m \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right]$  правой части (16.3) не имеет специального названия. Это сила инерции, обусловленная неравномерностью вращения системы отсчета.

С учетом (16.2) и введенных обозначений (16.4), (16.5), (16.10) уравнение (16.3) принимает следующий вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{пост}} - m \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right] + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{кор}}. \quad (16.11)$$

Уравнение (16.11) называется *уравнением движения частицы в неинерциальной системе отсчета*. Оно по форме похоже на математическое выражение второго закона Ньютона, однако в правой части (16.11), помимо обусловленной взаимодействием тела  $A$  с другими телами силы  $\mathbf{F}$ , имеются еще четыре слагаемых, называемых *силами инерции*. Принципиальные отличия этих сил от ньютоновских сил взаимодействия между телами состоят в следующем.

Силы инерции возникают не из-за взаимодействия тел, а вследствие ускоренного движения системы отсчета.

Силы инерции изменяются при переходе от одной неинерциальной системы отсчета к другой, они не инвариантны относительно такого перехода. Напротив, ньютоновские силы взаимодействия тел во всех системах отсчета одинаковы.

Силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона.

Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела.

Рассмотрим силы инерции подробнее.

**Поступательная сила инерции.** Поступательная сила инерции возникает за счет ускоренного поступательного движения неинерциальной системы отсчета. Она пропорциональна массе тела и направлена противоположно вектору ускорения  $\mathbf{a}_O$  точки  $O$  начала координат неинерциальной системы отсчета:

$$\mathbf{F}_{\text{пост}} = -m\mathbf{a}_O.$$

**Пример.** Вагон движется с ускорением  $\mathbf{a}_O$  по прямолинейному горизонтальному участку дороги. К потолку вагона на нити подвешен груз массой  $m$ . Найти угол отклонения нити от вертикали. Решить задачу в системе отсчета, связанной с вагоном.

Система отсчета является неинерциальной и движется поступательно. Помимо сил взаимодействия груза с окружающими телами, которыми являются сила тяжести  $m\mathbf{g}$  и сила натяжения нити  $\mathbf{T}$ , необходимо учесть поступательную силу инерции  $(-m\mathbf{a}_O)$  (рис. 46). В связанной с вагоном системе отсчета груз покоится, его ускорение равно нулю. Уравнение движения груза имеет вид

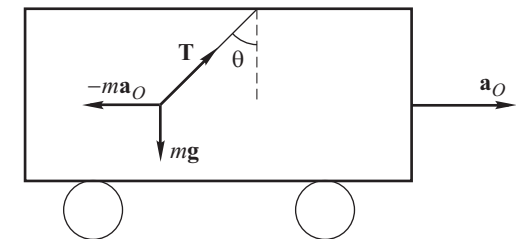


Рис. 46

$$0 = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{a}_0,$$

то же в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси декартовой системы координат

$$0 = T \sin \theta - ma_0,$$

$$0 = T \cos \theta - mg.$$

Отсюда легко найти угол  $\theta$  отклонения нити подвеса от вертикали:

$$\operatorname{tg} \theta = a_0/g.$$

**Принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции.** Характерным свойством сил инерции, в частности, поступательной силы инерции является их пропорциональность массе тела. Благодаря этому силы инерции в определенных ситуациях оказываются похожими на силы тяготения.

Представим себе, что мы находимся в удаленной от всех внешних тел, в том числе, от Земли, закрытой кабине, которая движется с ускорением  $\mathbf{g}$  (ускорение свободного падения на поверхности Земли) в направлении вверх относительно самой кабины (рис. 47). Все тела, находящиеся внутри кабины, будут вести себя так, как если бы на них действовала направленная вниз сила  $-m\mathbf{g}$ . Это поступательная сила инерции, обусловленная ускоренным движением кабины. В частности, пружина, к концу которой подвешено тело массой  $m$ , растянется так, что

упругая сила будет уравновешивать силу инерции:

$$\kappa \Delta l = mg,$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины,  $\Delta l$  — величина удлинения.

Такое же явление наблюдается и в случае, когда кабина лифта неподвижна и находится на поверхности Земли: под действием силы тяжести  $mg$  прикрепленная к потолку пружина с грузом растянется на величину  $\Delta l = mg/\kappa$ . Никакими опытами внутри кабины нельзя установить, чем обусловлена действующая на груз сила  $mg$  — ускоренным движением кабины или действием силы тяжести (силы тяготения Земли). Рассмотренный пример иллюстрирует *принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения*.

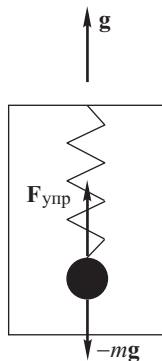


Рис. 47

Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения состоит в том, что *все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно также, как в однородном поле сил инерции*. Этот принцип был положен Эйнштейном в основу общей теории относительности.

**Центробежная сила инерции.** Центробежная сила инерции  $\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2 \mathbf{r}_\perp$  действует на тело только во вращающейся системе отсчета (при условии  $\omega \neq 0$ ). Вектор  $\mathbf{F}_{цб}$  перпендикулярен оси вращения и направлен вдоль вектора  $\mathbf{r}_\perp$  (см. рис. 45).

**Пример.** При точном решении задач о движении тел относительно земной поверхности нужно учитывать центробежную силу инерции, модуль которой равен:

$$F_{цб} = m\omega^2 r_\perp = m\omega^2 R_3 \cos \varphi.$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси;  $\varphi$  — широта местности на поверхности Земли, где расположено тело массой  $m$ ;  $R_3$  — радиус Земли;  $r_\perp = R_3 \cos \varphi$  — радиус окружности, которую описывает в процессе вращения Земли точка земной поверхности, где расположено тело (рис. 48). Центробежная сила инерции направлена перпендикулярно оси вращения Земли.

На расположенное вблизи поверхности Земли тело массой  $m$ , скорость которого по отношению к Земле равна нулю, действует центробежная сила инерции  $\mathbf{F}_{цб}$  и сила гравитационного притяжения  $\mathbf{F}_{гр}$ , направленная к центру Земли и равная по модулю

$$F_{гр} = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}.$$

Направление и величина ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$  определяется с помощью уравнения движения тела в неинерциальной системе отсчета:

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_{\text{гп}} + \mathbf{F}_{\text{цб}}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{гп}}}{m}.$$

Везде, кроме экватора и полюса, благодаря наличию центробежной силы вектор  $\mathbf{g}$  не направлен к центру Земли (см. рис. 48). Поскольку величина центробежной силы меняется при

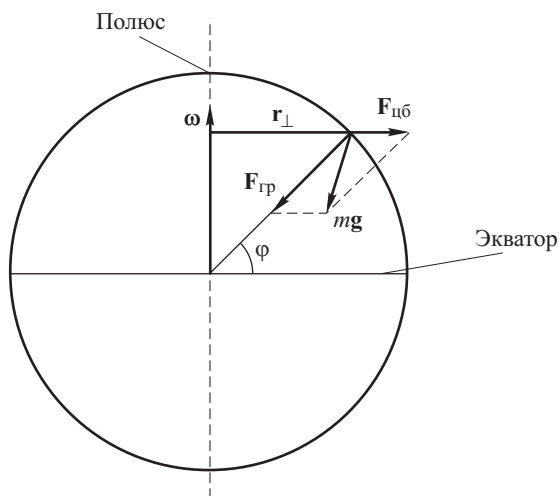


Рис. 48

перемещении по поверхности Земли от экватора к полюсу, направление и модуль вектора  $\mathbf{g}$  зависят от широты местности, где расположено тело.

На экваторе векторы  $\mathbf{F}_{\text{гп}}$  и  $\mathbf{F}_{\text{цб}}$  направлены противоположно друг другу, поэтому величина ускорения свободного падения минимальна и равна  $g_{\text{экв}} = 9,780 \text{ м/с}^2$ . Вычисления показывают, что модуль центробежной силы  $F_{\text{цб}}$  на экваторе составляет приблизительно 0,3 % от модуля гравитационной силы  $F_{\text{гп}}$ . Соответственно, величина  $g$  на экваторе на 0,3 % меньше значения, которое наблюдалось бы при отсутствии вращения Земли. На полюсе центробежная сила инерции равна нулю. Здесь ускорение свободного падения тел определяется только силой гравитационного притяжения к Земле и должно было бы составить  $9,810 \text{ м/с}^2$ . Однако, экспериментально измеренное ускорение свободного падения на полюсе равно  $g_{\text{пол}} = 9,832 \text{ м/с}^2$ .

Установлено, что увеличение  $g$  по мере приближения к полюсу обусловлено не только уменьшением вклада центробежной силы инерции, но и изменением расстояния от поверхности до центра Земли. С увеличением широты местности это расстояние уменьшается (Земля как бы сплюснута у полюсов). Благодаря этому по мере приближения к полюсу возрастает сила гравитационного притяжения  $F_{\text{гр}}$  и, соответственно, увеличивается ускорение свободного падения  $g$ . При перемещении от экватора к полюсу за счет сплюснутости Земли  $g$  возрастает приблизительно на 0,2 % (0,02 м/с<sup>2</sup>). При этом общее увеличение ускорения свободного падения составляет приблизительно 0,5 % (0,05 м/с<sup>2</sup>).

**Сила Кориолиса.** Сила Кориолиса имеет вид

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{V}_{\text{отн}} \boldsymbol{\omega}],$$

где  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  — скорость движения тела массой  $m$  относительно неинерциальной системы отсчета,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения системы отсчета. Сила Кориолиса возникает, если тело движется относительно неинерциальной вращающейся системы отсчета. Вектор  $\mathbf{F}_{\text{кор}}$  перпендикулярен к вектору скорости  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  и вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ .

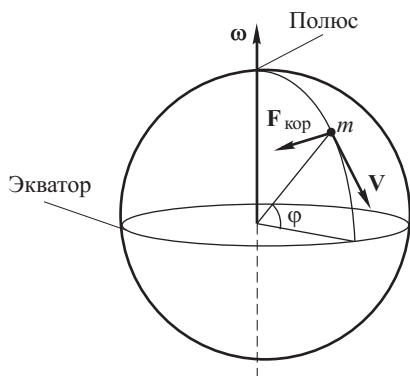


Рис. 49

Наличием силы Кориолиса объясняются такие явления, как отклонение свободно падающих тел к востоку, размыв правых берегов текущих северных рек и др.

**Пример.** Поезд массой  $m$  движется со скоростью  $V$  вдоль меридиана в направлении с севера на юг. Широта местности  $\varphi$ . Найдём силу бокового давления, с которой поезд действует на рельсы (рис. 49).

Сила бокового давления возникает за счёт действия на поезд силы Кориолиса, величина которой равна

$$F_{\text{кор}} = |2m[\mathbf{V} \boldsymbol{\omega}]| = 2mV\omega \sin(\pi - \varphi) = 2mV\omega \sin \varphi,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли. Сила бокового давления со стороны рельс уравнивает силу Кориолиса.

## Задачи

**2.1.** Небольшой брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $V_0$  и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности радиуса  $R$  (рис. 2.1). Определить время, через которое брусок покинет эту область. Коэффициент трения бруска о поверхность забора  $k$ . Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска малы.

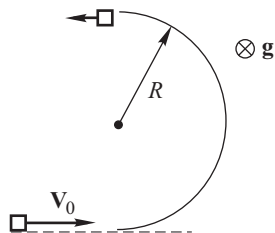


Рис. 2.1

**2.2.** Сила сопротивления воды при движении лодки пропорциональна скорости лодки. Как скорость лодки после спуска паруса будет зависеть от пройденного лодкой пути?

**2.3.** Шарик массы  $m$  подвешен на идеальной пружине жесткости  $k$  и длины  $l_0$  в недеформированном состоянии к оси центробежной машины (рис. 2.3). Шарик начинает вращаться вместе с машиной с угловой скоростью  $\omega$ . Какой угол  $\alpha$  образует при этом пружина с вертикалью?

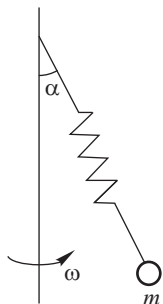


Рис. 2.3

**2.4.** Шнур, положенный на доску, пропущен одним концом в отверстие, просверленное в доске (рис. 2.4.) Найти, с какой скоростью  $V$  соскользнет с доски конец шнура, если длина всего шнура  $l$ , длина свешивающегося в момент начала движения конца шнура  $l_0$ . Найти зависимость от времени длины свисающего с доски отрезка шнура. Трение отсутствует.

**2.5.** Горизонтально расположенную трубку длины  $l$  начинают вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В середине трубки до начала ее вращения находился шарик. Через какое время  $\tau$  шарик покинет трубку? Трением пренебречь.

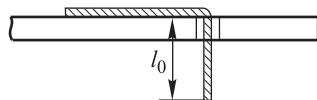


Рис. 2.4

**2.6.** Цилиндрическую горизонтальную штангу длины  $L$  вращают с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов. На штангу надета небольшая муфта массы  $m$ , которая может скользить вдоль штанги. Какую работу необходимо затратить, чтобы передвинуть муфту вдоль всей штанги с постоянной относительно нее скоростью  $V$  к оси вращения. Коэффициент трения между муфтой и штангой  $k$ .

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, ЭНЕРГИИ И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Описание движения любой механической системы, в принципе, можно свести к описанию движения системы материальных точек (системы частиц). Если известны положения частиц в начальный момент времени и действующие на них силы, то записав уравнения движения, можно найти координаты и скорости частиц в любой момент времени. На практике нередко уравнения движения для сложных систем не поддаются решению. В некоторых случаях, например, в системах с ядерными и слабыми взаимодействиями, неизвестны законы действующих сил. В подобных ситуациях решить задачу описания поведения физической системы помогают так называемые законы сохранения.

Существуют величины, обладающие важным свойством оставаться в процессе движения механической системы неизменными (сохраняться). Это импульс, механическая энергия и момент импульса. Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса являются фундаментальными принципами физики. Они выполняются для любых, а не только механических систем, и представляют собой универсальные законы природы. Они действуют в области элементарных частиц и в области космических объектов, в физике атома и в физике твердого тела и т. д. До сих пор не обнаружено ни одного явления, где бы эти законы нарушались.

Рассмотрим закон сохранения импульса.

### § 17. Импульс частицы и системы частиц. Импульс силы. Закон сохранения импульса

**Импульс частицы.** *Импульсом частицы (количеством движения)* называется вектор, равный произведению массы частицы на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V}.$$

Запишем уравнение движения частицы (второй закон Ньютона) через импульс. Если  $\mathbf{a}$  — ускорение,  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на частицу, то, согласно второму закону Ньютона,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Пользуясь определением импульса, получим

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Уравнение движения можно представить в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (17.1)$$

Согласно (17.1) производная по времени импульса частицы равна действующей на нее силе.

Если никакие силы на частицу не действуют ( $\mathbf{F} = 0$ ), ее импульс сохраняется ( $\mathbf{p} = \text{const}$ ). Это утверждение, по существу, равносильно первому закону движения — закону инерции.

**Импульс силы.** Если зависимость силы от времени  $\mathbf{F}(t)$  известна, то с помощью уравнения (17.1) можно найти приращение импульса частицы за любой промежуток времени:

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= \mathbf{F} dt, \\ \Delta\mathbf{p} &= \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_n = \int_0^t \mathbf{F} dt, \end{aligned} \quad (17.2)$$

где  $\mathbf{p}_k$  и  $\mathbf{p}_n$  — конечный и начальный импульс частицы.

*Импульсом силы* называется вектор, равный произведению средней силы  $\mathbf{F}_{\text{ср}}$  на промежуток времени  $t$  действия этой силы. Импульс силы равен

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} t = \int_0^t \mathbf{F} dt. \quad (17.3)$$

Как следует из (17.2) и (17.3), приращение импульса частицы равно импульсу силы.

**Пример.** Тело брошено вертикально вверх со скоростью  $\mathbf{V}_0$ . Найти приращение импульса тела за все время полета от броска до момента возвращения в исходную точку.

В течение всего полета, время которого составляет  $t = 2V_0/g$ , на тело действует постоянная сила  $m\mathbf{g}$ . Приращение импульса равно

$$\Delta\mathbf{p} = \int_0^{2V_0/g} m\mathbf{g} dt = m\mathbf{g} \frac{2V_0}{g} = -2m\mathbf{V}_0.$$

**Импульс системы частиц.** Рассмотрим произвольную систему частиц.

Силы взаимодействия между частицами, входящими в систему, называются *внутренними силами*. Силы взаимодействия частиц системы с телами, не входящими в систему, называются *внешними силами*.



На каждую частицу системы действуют как внутренние, так и внешние силы. Пусть  $i$  — порядковый номер частицы. Обозначим через  $\mathbf{F}_{i \text{ внутр}}$  равнодействующую всех внутренних сил, приложенных к  $i$ -й частице системы,  $\mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$  — равнодействующую всех внешних сил, приложенных к той же частице.

*Импульсом системы* называется векторная сумма импульсов всех входящих в систему частиц:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{V}_i,$$

где суммирование ведется по всем частицам системы.

Найдем физическую величину, которая определяет скорость изменения импульса системы.

Запишем уравнение движения  $i$ -й частицы системы:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_{i \text{ внутр}} + \mathbf{F}_{i \text{ внешн}}.$$

Сложим уравнения движения всех частиц:

$$\sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_{i \text{ внутр}} + \sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}}. \quad (17.4)$$

Проведем преобразование левой части (17.4):

$$\sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (17.5)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия частиц системы друг с другом попарно равны. Поэтому сумма всех внутренних сил обращается в нуль:

$$\sum \mathbf{F}_{i \text{ внутр}} = 0. \quad (17.6)$$

С учетом (17.5) и (17.6) из равенства (17.4) получим:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad (17.7)$$

где  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  — сумма всех внешних сил, приложенных к частицам системы.

Равенство (17.7) представляет собой закон изменения импульса  $\mathbf{p}$  системы частиц и показывает, что производная по времени импульса системы равна сумме всех внешних сил. Таким образом, скорость изменения импульса системы определяется только внешними силами.

Из (17.7) следует, что приращение импульса системы равно импульсу внешних сил:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_n = \int_0^t \mathbf{F}_{\text{внешн}} dt. \quad (17.8)$$

**Закон сохранения импульса.** *Замкнутой* системой тел (в частности, замкнутой системой частиц) называется система, не взаимодействующая с внешними (не входящими в систему) телами.

В соответствии с определением, если система частиц замкнута, то внешние силы отсутствуют:

$$\mathbf{F}_{i \text{ внешн}} = 0,$$

$$\sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0$$

при любом значении  $i$ .

Из (17.7) для замкнутой системы получим

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0,$$

$$\mathbf{p} = \text{const.}$$

Следовательно, *импульс замкнутой системы частиц с течением времени не изменяется (сохраняется)*. Это утверждение — закон сохранения импульса.

**Пример.** Частица, обладающая импульсом  $\mathbf{p}$ , налетает на неподвижную частицу и отскакивает от нее под некоторым углом к первоначальному направлению движения, имея импульс  $\mathbf{p}_1$ . Найти импульс  $\mathbf{p}_2$  первоначально покоившейся частицы после столкновения.

Система из двух частиц замкнута, ее импульс до и после столкновения одинаков:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Пусть  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$ . Из треугольника импульсов (рис. 50) следует:

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 + p^2 - 2p_1 p \cos \theta} = \sqrt{p_1^2 + p^2 - 2(\mathbf{p}_1 \mathbf{p})}.$$

В определенных условиях импульс системы частиц или его проекция на некоторое направление могут сохраняться, если система не является замкнутой. Рассмотрим эти случаи.

1. Система не является замкнутой, приложенные к каждой  $i$ -й частице внешние силы, вообще говоря, не равны нулю:

$$\mathbf{F}_{i \text{ внешн}} \neq 0.$$

(Здесь, как и раньше,  $\mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$  — сумма всех внешних сил, приложенных к  $i$ -й частице системы.) Однако сумма всех внешних сил равна нулю:

$$\sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0.$$

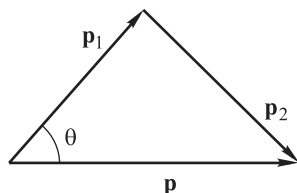


Рис. 50

В этом случае, как следует из уравнения (17.7), импульс  $\mathbf{p}$  системы является постоянной величиной,  $\mathbf{p} = \text{const}$ . Итак, *если сумма всех внешних сил равна нулю, импульс системы частиц сохраняется.*

**Пример.** Аэростат с постоянной скоростью поднимается вертикально вверх. На него действуют внешние силы: сила тяжести, сила сопротивления воздуха, подъемная сила. Сумма внешних сил равна нулю, поэтому импульс аэростата и его скорость в процессе движения не изменяются.

2. *Если проекция на некоторое направление суммы всех внешних сил равна нулю, то проекция на это направление импульса системы частиц сохраняется.*

Векторное равенство (17.7) эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_{\text{внешн } x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_{\text{внешн } y}, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_{\text{внешн } z}. \quad (17.9)$$

Здесь  $p_x, p_y, p_z, F_{\text{внешн } x}, F_{\text{внешн } y}, F_{\text{внешн } z}$  — проекции на оси декартовой системы координат импульса  $\mathbf{p}$  системы и вектора  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  суммы всех внешних сил;  $\mathbf{F}_{\text{внешн}} = \sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$ ;  $\mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$  — сумма всех внешних сил, приложенных к  $i$ -й частице системы.

Если проекция на какую-либо ось силы  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  равна нулю, то, как следует из уравнений (17.9), соответствующая проекция импульса — постоянная величина. Например, если  $F_{\text{внешн } x} = 0$ , то  $p_x = \text{const}$ .

**Пример.** Тело массой  $m$  брошено со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то проекция на горизонтальное направление единственной действующей на тело внешней силы — силы тяжести  $m\mathbf{g}$  — равна нулю. Проекция на это направление импульса тела, равная в начальный момент движения  $mV_0 \cos \alpha$ , остается неизменной в течение всего полета.

3. *Импульс системы частиц приблизительно сохраняется, если ограниченная по модулю внешняя сила действует в течение малого промежутка времени.*

Действительно, согласно (17.8) приращение импульса системы за промежуток времени  $\Delta t$  равно:

$$\Delta \mathbf{p} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{\text{внешн}} dt = \mathbf{F}_{\text{внешн., средн}} \cdot \Delta t,$$

где  $\mathbf{F}_{\text{внешн., средн}}$  — средняя за время  $\Delta t$  суммарная внешняя сила.

Если время  $\Delta t$  мало, то  $\Delta \mathbf{p} \approx 0$  и  $\mathbf{p} \approx \text{const}$ , то есть импульс остается приблизительно постоянным. Для неограниченной силы утверждение несправедливо.

**Пример.** Во время взрыва в воздухе артиллерийского снаряда на него действует внешняя сила — сила тяжести. Время взрыва мало, так что импульсом силы тяжести можно пренебречь. Следовательно, импульс снаряда непосредственно перед взрывом равен суммарному импульсу образовавшихся осколков сразу после разрыва.

В заключение отметим, что в данном параграфе закон сохранения импульса был выведен из законов движения Ньютона (см. формулу (17.7) и следующий за ней текст). Существуют физические системы и объекты, для описания поведения которых законы Ньютона не применимы. Это, например, взаимодействующее с веществом электромагнитное излучение. Как показывает опыт, закон сохранения импульса справедлив и для таких систем. Являясь фундаментальным законом природы, закон сохранения импульса обладает большей общностью, чем законы классической механики.

## § 18. Теорема о движении центра масс

Рассмотрим систему частиц с массами  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$  ( $i$  — порядковый номер частицы). Положения частиц в пространстве заданы радиус-векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots$ , проведенными из начала системы координат (рис. 51).

*Центром масс или центром инерции* системы частиц называется геометрическая точка, положение которой в пространстве определено радиусом-вектором  $\mathbf{r}_C$ :

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (18.1)$$

где  $m = \sum m_i$  — масса системы, суммирование проводится по всем частицам системы.

Центр масс обладает рядом важных свойств.

1. Импульс  $\mathbf{p}$  системы частиц равен произведению массы  $m$  системы на скорость  $\mathbf{V}_C$  ее центра масс:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V}_C. \quad (18.2)$$

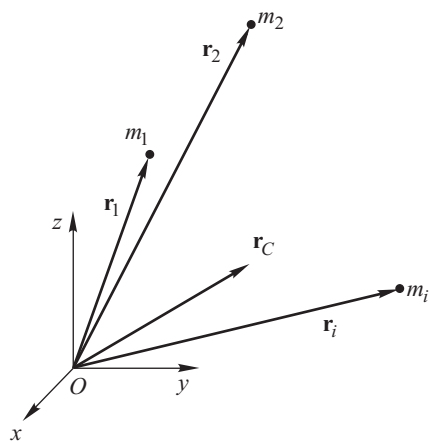


Рис. 51

Доказывается это соотношение дифференцированием по времени обеих частей равенства (18.1):

$$\mathbf{V}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i \mathbf{V}_i}{m} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

что и требовалось доказать.

2. Центр масс замкнутой системы частиц движется равномерно и прямолинейно. Действительно, если система замкнута, ее импульс сохраняется,  $\mathbf{p} = \text{const}$ . Из (18.2) следует, что скорость  $\mathbf{V}_C$  центра масс в этом случае постоянна.

3. Сформулируем теорему о движении центра масс.

*Центр масс системы частиц движется как материальная точка, в которой заключена масса всей системы, и к которой приложены сила, равная сумме всех внешних сил:*

$$m \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad (18.3)$$

где  $\mathbf{F}_{\text{внешн}} = \sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$ ;  $\mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$  — сумма всех внешних сил, приложенных к  $i$ -й частице системы.

Доказательство теоремы получается с помощью дифференцирования по времени обеих частей соотношения (18.2) и с учетом равенства (17.7):

$$m \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}.$$

**Система центра масс.** Для описания движения иногда удобно использовать систему отсчета, в которой центр масс покоится.

Снова рассмотрим систему частиц. *Системой центра масс* называется жестко связанная с центром масс система отсчета, которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе отсчета.

Указанная система отсчета обладает рядом интересных свойств.

1. Импульс системы частиц в системе центра масс равен нулю:

$$\mathbf{p} = 0. \quad (18.4)$$

Поскольку в системе центра масс скорость центра масс равна нулю,  $\mathbf{V}_C = 0$ , то в соответствии с (18.2) импульс системы также равен нулю,  $\mathbf{p} = 0$ .

2. Если система состоит из двух частиц, то их импульсы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  в системе центра масс равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2. \quad (18.5)$$

Действительно, импульс системы равен сумме импульсов частиц:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (18.6)$$

В системе центра масс импульс  $\mathbf{p}$  системы равен нулю (см. (18.4)):

$$\mathbf{p} = 0. \quad (18.7)$$

Из (18.6) и (18.7) следует (18.5).

## § 19. Движение тела с переменной массой. Реактивная сила

В настоящем параграфе, как и во всех предшествующих, рассматривается движение тел с малыми по сравнению со скоростью света скоростями. Масса движущегося тела меняется только за счет потери или приобретения вещества. Например, падение дождевой капли в пересыщенном водяными парами воздухе сопровождается увеличением массы капли за счет процесса конденсации. Масса летящей ракеты или самолета уменьшается вследствие сгорания топлива.

Уравнения движения тел с переменной массой не содержат ничего принципиально нового, по сравнению с законами Ньютона, и являются следствиями этих законов.

**Уравнение Мещерского.** Уравнение движения тела с переменной массой впервые было получено русским механиком И.В. Мещерским (1859–1935), и носит его имя. Выведем это уравнение на примере движения ракеты.

Принцип действия ракеты прост: ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (газообразные продукты сгорания топлива), которое с силой воздействует на ракету и сообщает ей ускорение. Предположим, что на ракету действует внешняя сила  $\mathbf{F}$ . Это может быть сила тяготения, сила сопротивления среды, в которой движется ракета, и пр.

Рассмотрим движение ракеты относительно неподвижной инерциальной системы отсчета. Пусть в момент времени  $t$   $m(t)$  — масса ракеты,  $\mathbf{V}(t)$  — ее скорость,  $m\mathbf{V}$  — импульс ракеты. Спустя промежуток времени  $dt$  масса  $m$  и скорость  $\mathbf{V}$  получают приращения  $dm$  и  $d\mathbf{V}$ , при этом  $dm$  — величина отрицательная, так как масса ракеты уменьшается за счет сгорания топлива. Импульс ракеты станет равным

$$(m + dm)(\mathbf{V} + d\mathbf{V}).$$

Импульс образовавшихся за промежуток времени  $dt$  газов равен

$$dm_{\text{газ}} \mathbf{V}_{\text{газ}},$$

где  $dm_{\text{газ}}$  — масса газов,  $\mathbf{V}_{\text{газ}}$  — скорость газов в неподвижной системе отсчета. Масса образовавшихся газов равна убыли массы ракеты:

$$dm_{\text{газ}} = -dm.$$

Приращение импульса системы, в состав которой входит ракета и образовавшиеся за время  $dt$  газы, равно импульсу внешней силы  $\mathbf{F}$ :

$$d\mathbf{p} = (m + dm)(\mathbf{V} + d\mathbf{V}) + dm_{\text{газ}} \mathbf{V}_{\text{газ}} - m\mathbf{V} = \mathbf{F}dt.$$

Раскроем скобки, пренебрежем малой величиной  $dm d\mathbf{V}$ , заменим  $dm_{\text{газ}}$  на  $-dm$ , и введем относительную скорость истечения газов из ракеты  $\mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_{\text{газ}} - \mathbf{V}$ . В результате имеем

$$m d\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{отн}} dm + \mathbf{F}dt.$$

После деления обеих частей равенства на  $dt$  окончательно получим

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{V}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} + \mathbf{F}. \quad (19.1)$$

Уравнение (19.1) называется уравнением движения тела с переменной массой — *уравнением Мещерского*.

По форме уравнение (19.1) похоже на уравнение второго закона Ньютона. Отличия состоят в следующем: а) масса  $m$  тела (материальной точки) является функцией времени; б) кроме действующей на тело внешней силы  $\mathbf{F}$  в правой части уравнения имеется слагаемое

$$\mathbf{V}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt},$$

которое называется *реактивной силой*. Это слагаемое может быть истолковано как сила, с которой действуют на ракету вытекающие из нее газы.

**Формула Циолковского.** В качестве примера использования уравнения Мещерского применим его к движению ракеты, на которую внешние силы не действуют.

Положив в (19.1)  $\mathbf{F} = 0$  и умножив уравнение на  $dt$ , получим

$$m d\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{отн}} dm. \quad (19.2)$$

Допустим, ракета движется прямолинейно. Учтем, что вектор  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  скорости газов направлен противоположно вектору  $\mathbf{V}$

скорости ракеты (рис. 52). Тогда уравнение (19.2) в скалярной форме будет иметь вид

$$m dV = -V_{\text{отн}} dm, \quad (19.3)$$

где  $V_{\text{отн}}$  — модуль относительной скорости газов,  $V_{\text{отн}} > 0$ .



Рис. 52

Предположим, что относительная скорость газовой струи  $V_{\text{отн}}$  не меняется во время движения, то есть  $V_{\text{отн}} = \text{const}$ . Проинтегрировав при этом условии уравнение (19.3), найдем зависимость массы ракеты от ее скорости:

$$m = m_0 \exp \left( -\frac{V}{V_{\text{отн}}} \right), \quad (19.4)$$

где  $m_0$  — масса ракеты в начальный момент времени, когда ее скорость равна нулю. Соотношение (19.4) называется *формулой Циолковского* (1857–1935).

Формула (19.4) позволяет оценить относительный запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости  $V$ . Допустим, ракете надо сообщить первую космическую скорость  $V \approx 8$  км/с. Если скорость газовой струи составляет приблизительно  $V_{\text{отн}} \approx 1$  км/с, то из (19.4) получим

$$\frac{m_0}{m} = e^8 \approx 2980.$$

Начальная (стартовая) масса  $m_0$  ракеты примерно в 3000 раз превышает ее массу в момент, когда скорость достигнет нужной величины. Практически вся стартовая масса ракеты приходится на топливо. Из формулы Циолковского следует, что относительная полезная масса ракеты  $m/m_0$  быстро увеличивается с увеличением скорости газовой струи.

## § 20. Приведенная масса

Рассмотрим замкнутую систему из двух взаимодействующих между собой частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Запишем уравнение движения для каждой из них:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1, \quad (20.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2, \quad (20.2)$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиусы-векторы, проведенные к частицам



из неподвижной точки  $O$ ,  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  — действующие на частицы силы (рис. 53). Поделим первое уравнение на  $m_1$ , второе — на  $m_2$ , и вычтем из второго первое, учитывая, что  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  в соответствии с третьим законом Ньютона. В результате получим

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt^2} = \mathbf{F}_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}. \quad (20.3)$$

Введем обозначения:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  — радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй;  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  — так называемая *приведенная масса*.

Тогда уравнение (20.3) будет иметь вид

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_2. \quad (20.4)$$

Формально уравнение (20.4) можно рассматривать как уравнение движения воображаемой частицы с массой  $\mu$  под действием силы  $\mathbf{F}_2$ , то есть

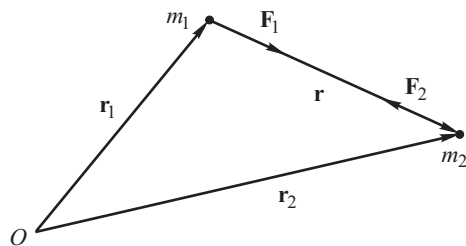


Рис. 53

как уравнение движения частицы с массой  $\mu$  в силовом поле первой частицы, имеющей массу  $m_1$ .

Одно уравнение (20.4) не может быть эквивалентно двум исходным уравнениям движения (20.1) и (20.2). Чтобы сохранить равносильность преобразований, кроме (20.4), необходимо учитывать уравнение движения центра масс:

$$(m_1 + m_2) \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad (20.5)$$

где  $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс,  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  — внешняя сила. Для замкнутой системы  $\mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0$ ,  $\mathbf{V}_C = \text{const}$  — центр масс движется равномерно и прямолинейно.

Итак, задача о движении двух взаимодействующих только друг с другом частиц сводится к независимым задачам: 1) определение с помощью уравнения (20.5) равномерного движения центра масс системы частиц; 2) определение с помощью уравнения (20.4) движения воображаемой частицы с массой  $\mu$  в силовом поле неподвижной частицы.

Подчеркнем, что никакого глубокого физического смысла введение понятия приведенной массы не несет. Это лишь удобное обозначение и соответствующий рациональный математический прием, с помощью которого описание движения двух частиц сводится к решению уравнения (20.4) движения одной частицы.

**Пример.** Воспользуемся уравнением (20.4) для расчета периода обращения космических тел. Пусть замкнутая система из двух тел (материальных точек) с массами  $m_1$  и  $m_2$  вращается вокруг неподвижного центра масс. Расстояние между телами не изменяется и равно  $r$ . Необходимо найти период  $T$  обращения системы.

На тело массой  $m_2$  действует гравитационная сила:

$$\mathbf{F}_{\text{гп}2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный от первого тела ко второму.

Приведенная масса равна

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Запишем в соответствии с (20.4) уравнение движения воображаемой частицы с массой  $\mu$  под действием гравитационной силы  $\mathbf{F}_{\text{гп}2}$ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F}_{\text{гп}2}, \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем ускорение:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (20.6)$$

По условию расстояние  $r$  между телами постоянно. Следовательно, траектории движения тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  и воображаемой частицы с массой  $\mu$  представляют собой окружности. Центробежное ускорение частицы с массой  $\mu$  при движении по окружности радиуса  $r$  равно:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (20.7)$$

где  $\omega$  — угловая скорость.

Из (20.6) и (20.7) найдем  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^3}}.$$

Период обращения  $T$  воображаемой частицы с массой  $\mu$  совпадает с периодом обращения системы двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  вокруг неподвижного центра масс. Он равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma(m_1 + m_2)}}. \quad (20.8)$$

Из полученной формулы следует, например, что период обращения планеты с малой массой  $m_2$  вокруг звезды с массой  $m_1 = M$  ( $m_2 \ll m_1 = M$ ), который обозначим через  $T_{\text{пл}}$ , в  $\sqrt{2}$  раз больше периода обращения двойной звезды (системы, состоящей из двух тел одинаковой массы  $m_1 = m_2 = M$ ), который обозначим через  $T_{\text{дв.зв}}$ :

$$T_{\text{дв.зв}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{2\gamma M}},$$

$$T_{\text{пл}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma(m_1 + m_2)}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}} = \sqrt{2} T_{\text{дв.зв}}.$$

## § 21. Работа силы. Мощность

**Элементарная работа и работа на конечном перемещении.** Рассмотрим частицу, которая движется под действием силы  $\mathbf{F}$ . Величина и направление  $\mathbf{F}$ , вообще говоря, меняются с течением времени. Пусть частица совершила элементарное перемещение  $d\mathbf{r}$  за промежуток времени  $dt$ , в течение которого силу  $\mathbf{F}$  можно считать постоянной (рис. 54).

*Элементарной работой* силы  $\mathbf{F}$  называется скалярное произведение:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (21.1)$$

Рис. 54

Элементарную работу можно представить в других формах:

$$\delta A = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \alpha = |\mathbf{F}| ds \cos \alpha = F_\tau ds.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{F}$  и  $d\mathbf{r}$ ,  $ds$  — длина пути, пройденного частицей за время  $dt$ ,  $F_\tau = |\mathbf{F}| \cos \alpha$  — проекция вектора  $\mathbf{F}$  на направление касательной к траектории движения частицы.

Элементарная работа  $\delta A$  — скалярная величина. Она отрицательна, если  $\alpha > \pi/2$ , и положительна, если  $\alpha < \pi/2$ ; работа равна нулю при  $\alpha = \pi/2$ , то есть при условии, что сила  $\mathbf{F}$  перпендикулярна перемещению  $d\mathbf{r}$  и скорости  $\mathbf{V}$  тела.

Пусть частица под действием силы  $\mathbf{F}$  переместилась вдоль траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 55). Чтобы вычислить работу силы на пути между точками 1 и 2, необходимо разделить

траекторию на  $N$  элементарных участков  $d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, \dots, d\mathbf{r}_i, \dots, d\mathbf{r}_N$  так, чтобы на каждом участке силу  $\mathbf{F}$  можно было считать величиной постоянной (для этого число  $N$  должно быть

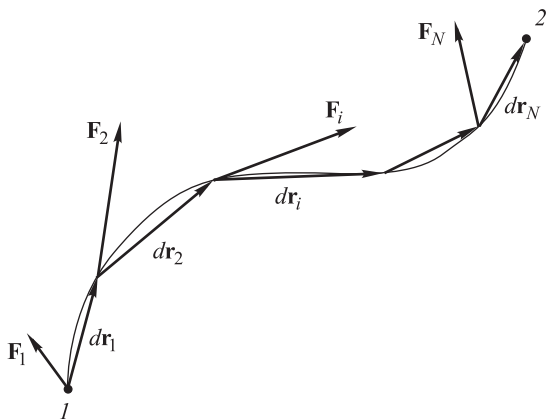


Рис. 55

достаточно большим). Вычислив и сложив элементарные работы  $\delta A_i = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i$  на всех участках, получим работу на пути от точки 1 до точки 2.

Работа силы  $\mathbf{F}$  на конечном пути равна:

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad (21.2)$$

где  $\int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}$  — интеграл от векторной функции  $\mathbf{F}$  вдоль траектории движения между точками 1 и 2.

Единицей работы в системе СИ является *джоуль* (Дж). Один джоуль равен работе силы в один ньютон на перемещении один метр при условии, что направления силы и перемещения совпадают,  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Если действующую на частицу силу можно представить в виде векторной суммы нескольких составляющих, то работа силы равна алгебраической сумме работ каждой из составляющих. Пусть, например, на частицу действуют две силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , так что результирующая  $\mathbf{F}$  сила равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

При перемещении частицы из точки 1 в точку 2 траектории сила  $\mathbf{F}$  совершит работу

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}_1 d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F}_2 d\mathbf{r} = A_1 + A_2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — работа сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  соответственно.

**Мощность.** *Мощность* — это физическая величина, которая характеризует работу силы в единицу времени. Пусть за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  сила  $\mathbf{F}$  совершила работу  $\delta A$ . *Мгновенной мощностью* силы  $\mathbf{F}$  называется величина, равная

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (21.3)$$

Единицей мощности в системе СИ является *ватт* (Вт),  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ .

Мгновенную мощность можно выразить через скорость  $\mathbf{V}$  движения частицы и действующую на нее силу  $\mathbf{F}$ :

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\mathbf{F} d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{V}.$$

Здесь учтено, что по определению скорости  $\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt$ .

Выразим работу  $A$  силы на конечном пути через мгновенную мощность  $N$ . Из (21.1) и (21.3) для элементарной работы следует:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = N dt.$$

С учетом этого соотношения вычисляемую по формуле (21.2) работу силы на конечном пути можно представить в виде

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} N dt,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — моменты времени, соответствующие пребыванию частицы в точках 1 и 2 траектории.

**Вычисление работы силы тяжести.** На нескольких примерах покажем, как вычисляется работа силы на конечном пути.

Частица массы  $m$  переместилась вдоль произвольной траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 56). При этом на частицу, помимо других сил, работа которых нас интересовать не будет, действует постоянная сила тяжести  $m\mathbf{g}$ . Работа силы тяжести в

соответствии с (21.2) равна:

$$A = \int_1^2 mg \, dr.$$

Мысленно разделим всю траекторию на элементарные участки и вычислим элементарную работу  $\delta A = mg \, dr$  на одном из них (рис. 56):

$$\delta A = mg \, dr = mg |dr| \cos \theta = -mg \, dz,$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{g}$  и  $d\mathbf{r}$ ,  $dz$  — приращение координаты  $z$  тела, соответствующее его перемещению  $d\mathbf{r}$ ,  $dz = -|dr| \cos \theta$ . Как видно из полученного выражения, элементарная работа зависит только от переменной  $z$ . Поэтому вычисление интеграла по криволинейной траектории сводится к интегрированию по переменной  $z$ . При перемещении частицы из точки 1 в точку 2 координата  $z$  изменяется в пределах от  $z_1$  до  $z_2$ . С учетом сказанного работа силы тяжести равна

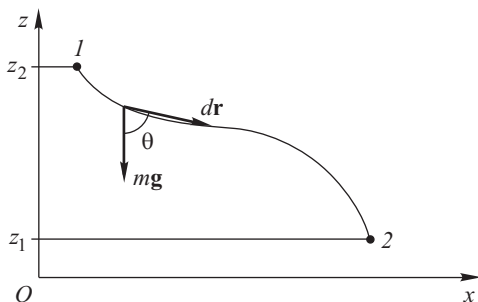


Рис. 56

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 mg \, dr = - \int_{z_1}^{z_2} mg \, dz = mg(z_1 - z_2). \quad (21.4)$$

Из полученной формулы видно, что работа однородной силы тяжести не зависит от формы траектории движения частицы, а определяется только ее координатой  $z$  в начальном и конечном положении.

**Вычисление работы гравитационной силы.** В точке  $O$  пространства (рис. 57) находится неподвижное тело (материальная точка) массы  $M$ , которое действует на частицу  $A$  массы  $m$  с силой  $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ :

$$\mathbf{F}_{\text{гр}} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — проведенный из точки  $O$  к частице  $A$  радиус-вектор,  $r$  — его модуль,  $\mathbf{e}_r$  — сонаправленный с  $\mathbf{r}$  единичный вектор,  $\gamma$  — гравитационная постоянная.

Частица  $A$  переместилась из точки  $1$  в точку  $2$  по некоторой траектории. Вычислим работу гравитационной силы  $\mathbf{F}_{\text{гр}}$  на этом пути в соответствии с (21.2):

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{гр}} d\mathbf{r} = - \int_1^2 \gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r d\mathbf{r}.$$

Работа  $\delta A$  гравитационной силы на элементарном перемещении  $d\mathbf{r}$  (одном из тех элементарных участков, на которые необходимо мысленно разделить всю траекторию при вычислении работы) равна:

$$\delta A = \mathbf{F}_{\text{гр}} d\mathbf{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r d\mathbf{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} |\mathbf{e}_r| |d\mathbf{r}| \cos \theta = -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr,$$

где величина  $dr = |d\mathbf{r}| \cos \theta$  приблизительно равна приращению

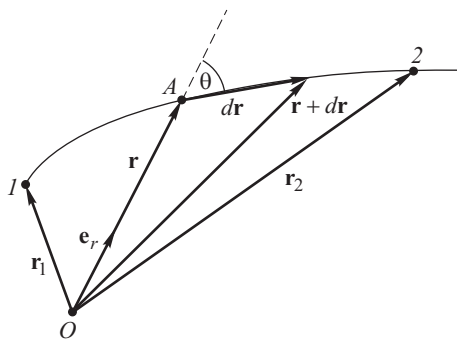


Рис. 57

$dr$  модуля радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  частицы (см. рис. 57). Как видно из полученного выражения, элементарная работа  $\delta A$  зависит только от расстояния  $r$  до центра поля. Поэтому вычисление интеграла по криволинейной траектории сводится к интегрированию по переменной  $r$ . При перемещении частицы из точки  $1$  в точку  $2$  модуль  $r$  ее радиуса-вектора изменяется от  $r_1$

до  $r_2$ . С учетом сказанного работа гравитационной силы на пути между точками  $1$  и  $2$  равна

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{гр}} d\mathbf{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (21.5)$$

Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением частицы, а именно, расстояниями  $r_1$  и  $r_2$  до силового центра (см. (21.5)).

**Работа кулоновской силы.** Кулоновская сила взаимодействия неподвижного точечного заряда  $q_1$  с точечным зарядом  $q_2$  равна:

$$\mathbf{F}_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

где  $\mathbf{r}$  — проведенный от первого заряда ко второму радиус-вектор,  $r$  — его модуль,  $\mathbf{e}_r$  — сонаправленный с  $\mathbf{r}$  единичный вектор. Работа кулоновской силы при перемещении заряда  $q_2$  из точки 1 в точку 2 траектории вычисляется аналогично работе гравитационной силы:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{кул}} d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r d\mathbf{r} = \\ = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (21.6)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния между зарядами, соответствующие положениям 1 и 2 движущегося заряда.

Как и в предыдущих случаях (см. (21.4), (21.5)), работа кулоновской силы (21.6) не зависит от формы траектории движения точечного заряда, а определяется только его начальным и конечным положением.

**Работа упругой силы.** Один конец спиральной пружины с жесткостью  $\kappa$  закреплен неподвижно, а другой может перемещаться горизонтально под действием внешней силы. Направим координатную ось  $x$  параллельно оси пружины и выберем начало отсчета координаты  $x$  ( $x = 0$ ) в положении незакрепленного конца недеформированной пружины (точка  $O$ ) (рис. 58).

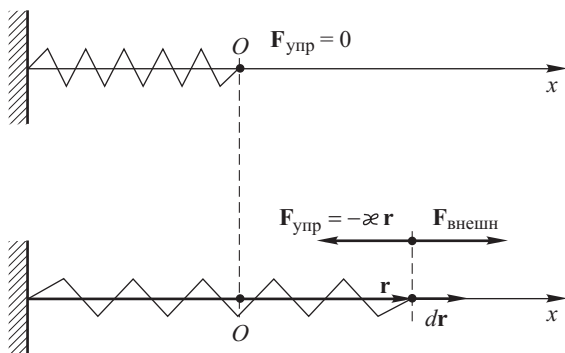


Рис. 58

При растяжении или сжатии пружины возникает упругая сила  $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\kappa \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к незакрепленному концу деформированной пружины.

Пусть под действием внешней силы  $F_{\text{внешн}}$ , работа которой нас интересует не будет, незакрепленный конец пружины, к



которому приложена также сила  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ , переместится вдоль оси  $x$  из точки 1 в точку 2 с координатами  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Всю траекторию точки приложения силы  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$  необходимо разбить на элементарные участки, вычислить элементарную работу на каждом из них и сложить (проинтегрировать в соответствии с (21.2)). Работа  $\delta A$  упругой силы  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$  на одном из таких элементарных участков  $d\mathbf{r}$  равна

$$\delta A = \mathbf{F}_{\text{упр}} d\mathbf{r} = -\kappa \mathbf{r} d\mathbf{r} = -\kappa x dx,$$

где скалярное произведение  $\mathbf{r} d\mathbf{r}$  выражено через произведение компонент  $x$  и  $dx$  перемножаемых векторов. Благодаря тому, что элементарная работа  $\delta A$  зависит только от координаты  $x$ , вычисление интеграла по траектории точки приложения упругой силы сводится к интегрированию по переменной  $x$  в пределах от  $x_1$  до  $x_2$ :

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{упр}} d\mathbf{r} = - \int_1^2 \kappa \mathbf{r} d\mathbf{r} = - \int_{x_1}^{x_2} \kappa x dx = -\frac{\kappa}{2} (x_1^2 - x_2^2). \quad (21.7)$$

Из полученного выражения видно, что работа упругой силы на конечном пути зависит только от начальной  $x_1$  и конечной  $x_2$  координат точки ее приложения.

**Работа силы трения.** Расположенный на шероховатой горизонтальной поверхности брусок массы  $m$ , который можно считать материальной точкой,

перемещается под действием некоторой горизонтальной силы  $\mathbf{F}$  по криволинейной траектории из точки 1 в точку 2 поверхности (рис. 59). Модуль приложенной к бруску силы трения скольжения равен:

$$F_{\text{тр}} = kN = kmg,$$

где  $N$  — модуль силы нормальной реакции опоры ( $N = mg$ ).

Для вычисления работы силы трения всю траекторию движения бруска

необходимо мысленно разбить на элементарные участки, рассчитать работу на каждом из них и сложить, то есть вычислить

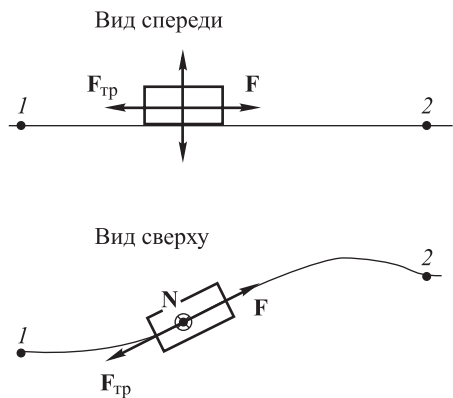


Рис. 59

интеграл (21.2). Работа силы трения на одном из элементарных участков равна

$$\delta A = \mathbf{F}_{\text{тр}} d\mathbf{r} = F_{\text{тр}} |d\mathbf{r}| \cos 180^\circ = -kmg ds,$$

где  $|d\mathbf{r}| = ds$  — модуль вектора элементарного перемещения, приблизительно равный элементарному пути  $ds$ ; в любой момент времени вектор  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  направлен противоположно вектору  $d\mathbf{r}$  элементарного перемещения бруска, поэтому угол между перемножаемыми векторами равен  $180^\circ$ . Благодаря тому, что элементарная работа  $\delta A$  зависит только от переменной  $s$  — пути бруска, вычисление интеграла по криволинейной траектории сводится к интегрированию по переменной  $s$ .

Работа силы трения на пути бруска из точки 1 в точку 2 равна:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{тр}} d\mathbf{r} = - \int_1^2 kmg ds = -kmg \int_1^2 ds = -kmg S, \quad (21.8)$$

где  $S$  — пройденный путь.

В отличие от работы силы тяжести, гравитационной, кулоновской и упругой сил (см. (21.4), (21.5), (21.6), (21.7)), работа силы трения (24.8) зависит от длины пройденного телом пути  $S$ , и, следовательно, от формы траектории.

Таким образом, среди рассмотренных нами сил можно выделить такие, работа которых не зависит от формы траектории и характера движения (например, от скорости) частицы, а определяется только ее начальным и конечным положением относительно других тел. Это — сила тяжести, гравитационная, кулоновская и упругая силы. Обладающие указанным свойством силы называются *консервативными*.

## § 22. Теорема о кинетической энергии

Частица массы  $m$  движется со скоростью  $\mathbf{V}$ .

*Кинетической энергией частицы* называется величина:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \quad (22.1)$$

*Кинетическая энергия системы частиц*, массы которых —  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ , а скорости —  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_i, \dots$ , равна сумме кинетических энергий каждой из частиц ( $i$  — номер частицы):

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}.$$

Пусть частица массы  $m$  движется под действием силы  $\mathbf{F}$ . Если к частице приложены несколько сил, то  $\mathbf{F}$  — их равнодействующая. Согласно *теореме о кинетической энергии: работа равнодействующей всех приложенных к частице сил равна приращению кинетической энергии частицы*. Утверждение справедливо как для элементарной работы, так и для работы на конечном пути:

$$\delta A = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dT,$$

$$A = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = T_2 - T_1,$$

где  $dT$  — приращение кинетической энергии на элементарном перемещении;  $V_1$  и  $V_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$  — скорости и кинетические энергии частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Работа силы  $\mathbf{F}$  на элементарном перемещении  $d\mathbf{r}$  равна

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\mathbf{r} = m d\mathbf{V} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \mathbf{V} d\mathbf{V} = mV dV. \quad (22.2)$$

В преобразованиях учли, что  $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt}$  по второму закону Ньютона;  $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  по определению скорости; кроме того,  $\mathbf{V} d\mathbf{V} = |\mathbf{V}| |d\mathbf{V}| \cos \theta = V dV$ , где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{V}$  и  $d\mathbf{V}$  (рис. 60).

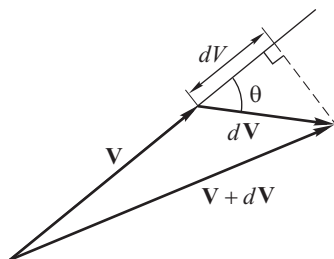


Рис. 60

В правой части (22.2) модуль  $V$  скорости внесем под знак дифференциала и окончательно получим:

$$\delta A = mV dV = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dT. \quad (22.3)$$

Согласно (22.3) элементарная работа  $\delta A$  силы  $\mathbf{F}$  равна бесконечно малому приращению  $dT$  кинетической энергии частицы.

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — скорости частицы в точках 1 и 2 траектории. Вычислим работу силы  $\mathbf{F}$  на пути частицы между точками 1 и 2:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 dT = \int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = T_2 - T_1 = \Delta T, \quad (22.4)$$

где  $T_2 - T_1 = \Delta T$  — приращение кинетической энергии частицы при ее перемещении из точки 1 в точку 2 траектории под действием силы  $\mathbf{F}$ . Согласно (22.4) работа  $A$  силы на конечном пути

равна приращению  $\Delta T$  кинетической энергии частицы. Теорема о кинетической энергии доказана.

При доказательстве теоремы не делалось каких-либо предположений о свойствах силы  $\mathbf{F}$ , например, о том, что она консервативна. Теорема справедлива для произвольной силы.

Рассмотрим систему частиц.

Фиксированное расположение частиц в пространстве, заданное набором координат всех частиц, будем называть положением или конфигурацией системы. Каждое положение системы, помимо набора координат, характеризуется набором скоростей  $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, i$  — номер частицы.

*Теорема о кинетической энергии для системы: при переходе системы частиц из произвольного начального в произвольное конечное положение работа  $A$  всех приложенных к частицам сил равна приращению  $\Delta T$  кинетической энергии системы:*

$$A = \Delta T.$$

Для доказательства учтем, что работа  $A$  всех приложенных к частицам сил равна сумме работ  $A_i$ , совершенных над каждой частицей системы:

$$A = \sum A_i.$$

Здесь  $A_i$  — работа равнодействующей всех приложенных к  $i$ -й частице сил. Чтобы вычислить  $A_i$ , применим к каждой частице теорему о кинетической энергии (22.4):

$$A_i = \frac{m_i V_{i\kappa}^2}{2} - \frac{m_i V_{i\text{н}}^2}{2},$$

где  $V_{i\kappa}, V_{i\text{н}}$  — скорости  $i$ -й частицы в конечном и начальном положениях системы.

Тогда работа  $A$  всех сил равна

$$\begin{aligned} A = \sum A_i &= \sum \left( \frac{m_i V_{i\kappa}^2}{2} - \frac{m_i V_{i\text{н}}^2}{2} \right) = \\ &= \sum \left( \frac{m_i V_{i\kappa}^2}{2} \right) - \sum \left( \frac{m_i V_{i\text{н}}^2}{2} \right) = T_{\kappa} - T_{\text{н}} = \Delta T, \end{aligned}$$

где  $T_{\kappa} = \sum \left( \frac{m_i V_{i\kappa}^2}{2} \right), T_{\text{н}} = \sum \left( \frac{m_i V_{i\text{н}}^2}{2} \right)$  — кинетическая энергия системы в конечном и начальном положениях. Теорема доказана.

**Пример 1.** По гладкой поверхности произвольной формы, плавно переходящей в гладкую горизонтальную плоскость, с высоты  $h$  с нулевой начальной скоростью спускается тело массой  $m$  (рис. 61). Найти скорость  $V$  тела на горизонтальном участке траектории.

В процессе движения на тело действуют направленная вертикально вниз сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , и сила нормальной реакции

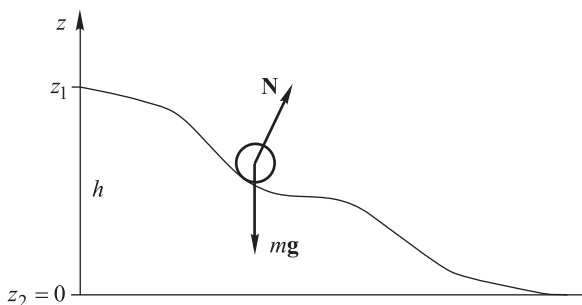


Рис. 61

опоры  $\mathbf{N}$ . По теореме о кинетической энергии работа всех приложенных к телу сил равна приращению кинетической энергии тела:

$$A_{mg} + A_N = mV^2/2, \quad (22.5)$$

где  $V$  — скорость тела на горизонтальном участке,  $A_{mg}$  и  $A_N$  — работа силы тяжести и силы нормальной реакции опоры соответственно.

Так как сила  $\mathbf{N}$  перпендикулярна скорости, работа этой силы равна нулю:

$$A_N = 0. \quad (22.6)$$

Работа силы тяжести равна (см. (21.4)):

$$A_{mg} = mg(z_1 - z_2) = mgh, \quad (22.7)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — вертикальная координата тела в начальном и конечном положениях.

Из (22.5)–(22.7) получим:

$$mgh = mV^2/2.$$

Отсюда находим скорость тела на горизонтальном участке траектории:

$$V = \sqrt{2gh}.$$

**Пример 2.** По шероховатой поверхности произвольной формы, плавно переходящей в шероховатую горизонтальную плоскость, с высоты  $h$  с нулевой начальной скоростью спускается тело массой  $m$  и останавливается на горизонтальном участке траектории (рис. 62). Найти работу силы трения.

В данном случае на тело, помимо силы тяжести  $mg$  и силы нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$ , действует сила трения скольжения  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ . По теореме о кинетической энергии работа всех сил за

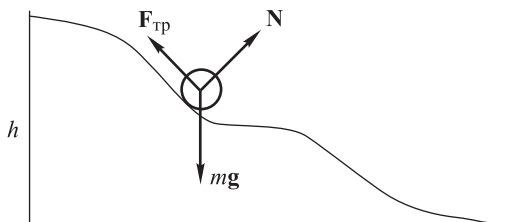


Рис. 62

время спуска равна приращению кинетической энергии тела, то есть — нулю, поскольку тело остановилось:

$$A_{mg} + A_N + A_{F_{\text{тр}}} = 0,$$

где  $A_{mg}$ ,  $A_N$ ,  $A_{F_{\text{тр}}}$  — работа сил тяжести, нормальной реакции опоры и трения соответственно.

Учитывая, что  $A_N = 0$ ,  $A_{mg} = mgh$  (см. предыдущий пример), получим

$$mgh + A_{F_{\text{тр}}} = 0.$$

Следовательно,

$$A_{F_{\text{тр}}} = -mgh.$$

### § 23. Преобразование кинетической энергии при переходе к другой системе отсчета. Теорема Кенига

При переходе от одной системы отсчета к другой скорость частицы, вообще говоря, меняется. Следовательно, меняется и величина кинетической энергии, которая зависит от скорости. Аналогично обстоит дело и с кинетической энергией системы частиц.

Рассмотрим систему частиц с массами  $m_i$  и скоростями  $\mathbf{V}_i$  ( $i$  — порядковый номер частицы) в некоторой неподвижной системе отсчета  $S_1$ . Точка  $O$  — начало другой, поступательно движущейся системы отсчета  $S$ ,  $\mathbf{V}_O$  — скорость системы  $S$  относительно системы  $S_1$ . Согласно закону преобразования скоростей (см. формулу (12.2)) скорость частицы  $\mathbf{V}_i$  в системе отсчета  $S_1$  связана со скоростью  $\mathbf{V}_{i\text{отн}}$  той же частицы в системе  $S$  соотношением:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{i\text{отн}}.$$

С учетом этого соотношения преобразуем выражение для кинетической энергии  $T$  системы частиц в системе отсчета  $S_1$ :

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\mathbf{V}_O + \mathbf{V}_{i \text{ отн}})^2}{2} = \\ &= \sum \frac{m_i V_O^2}{2} + \sum m_i \mathbf{V}_{i \text{ отн}} \mathbf{V}_O + \sum \frac{m_i V_{i \text{ отн}}^2}{2} = \\ &= \frac{(\sum m_i) V_O^2}{2} + \left( \sum m_i \mathbf{V}_{i \text{ отн}} \right) \mathbf{V}_O + \sum \frac{m_i V_{i \text{ отн}}^2}{2} = \\ &= \frac{m V_O^2}{2} + \mathbf{p}_{\text{отн}} \mathbf{V}_O + \sum \frac{m_i V_{i \text{ отн}}^2}{2} = \frac{m V_O^2}{2} + \mathbf{p}_{\text{отн}} \mathbf{V}_O + T_{\text{отн}}, \end{aligned}$$

где  $m = \sum m_i$  — масса системы частиц,  $\mathbf{p}_{\text{отн}} = \sum m_i \mathbf{V}_{i \text{ отн}}$  — импульс системы частиц в движущейся системе отсчета  $S$ ,  $T_{\text{отн}} = \sum \frac{m_i V_{i \text{ отн}}^2}{2}$  — кинетическая энергия системы частиц в движущейся системе отсчета  $S$ ; суммирование ведется по индексу  $i$ , который пробегает все возможные значения номеров частиц системы.

В результате показано, что кинетическая энергия  $T$  в системе отсчета  $S_1$  связана с кинетическими энергиями  $T_{\text{отн}}$  в поступательно движущейся системе отсчета  $S$  формулой:

$$T = \frac{m V_O^2}{2} + \mathbf{p}_{\text{отн}} \mathbf{V}_O + T_{\text{отн}}. \quad (23.1)$$

Пусть  $S$  является системой центра масс. Тогда скорость  $\mathbf{V}_O$  равна скорости  $\mathbf{V}_C$  центра масс системы частиц, импульс  $\mathbf{p}_{\text{отн}}$  равен нулю (см. (18.4)). В этом случае равенство (23.1) упрощается:

$$T = \frac{m V_C^2}{2} + T_{\text{отн}}. \quad (23.2)$$

Формула (23.2) подразумевает следующее (*теорема Кенига*): кинетическую энергию  $T$  системы частиц можно представить как сумму двух слагаемых: а) кинетической энергии  $m V_C^2/2$  воображаемой материальной точки, масса которой равна массе всей системы, а скорость совпадает со скоростью центра масс; б) кинетической энергии  $T_{\text{отн}}$  системы частиц, вычисленной в системе центра масс.

Пример. Рассчитаем с помощью теоремы Кенига кинетическую энергию тонкостенного цилиндра массы  $m$ , который катится без проскальзывания со скоростью  $V$  по горизонтальной поверхности (рис. 63).

Центр масс  $C$  цилиндра движется со скоростью  $V$ :

$$V_C = V.$$

Угловая скорость вращения цилиндра равна:

$$\omega = \frac{V}{R},$$

где  $R$  — радиус цилиндра.

В системе центра масс цилиндр вращается вокруг неподвижной оси, которая является его осью симметрии. В этой системе отсчета скорости  $V_{\text{отн}}$  всех точек стенок цилиндра одинаковы и равны  $V$ :

$$V_{\text{отн}} = \omega R = V.$$

Кинетическая энергия цилиндра в системе центра масс:

$$T_{\text{отн}} = \frac{mV_{\text{отн}}^2}{2} = \frac{mV^2}{2}.$$

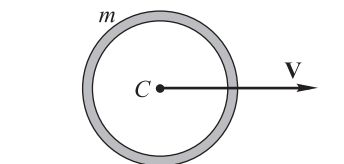


Рис. 63

Согласно теореме Кенига кинетическая энергия цилиндра равна:

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + T_{\text{отн}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = mV^2.$$

## § 24. Силовое поле. Консервативные силы и их свойства

**Силовое поле.** Если на частицу в каждой точке пространства действует определенная сила, то всю совокупность сил называют *силовым полем*.

Если силы не зависят от времени, силовое поле называется *стационарным*. В дальнейшем будем рассматривать только стационарные поля.

**Примеры.** Тело массой  $m$ , расположенное вблизи поверхности Земли, испытывает действие силы тяжести  $m\mathbf{g}$ . Величину и направление силы тяжести можно считать приблизительно одинаковыми во всех точках пространства вблизи земной поверхности. Говорят, что тело находится в однородном поле силы тяжести.

Планеты Солнечной системы находятся в гравитационном поле Солнца. Электрон в атоме водорода движется в кулоновском поле атомного ядра.

*Силовой линией* поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с действующей на частицу силой. Густота линий пропорциональна модулю силы.

Силовые линии однородного поля силы тяжести — это расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга вертикаль-



ные прямые (рис. 64 а). Силовые линии гравитационного поля, кулоновского поля — это семейство пересекающихся в одной точке (силовом центре) прямых (рис. 64 б).

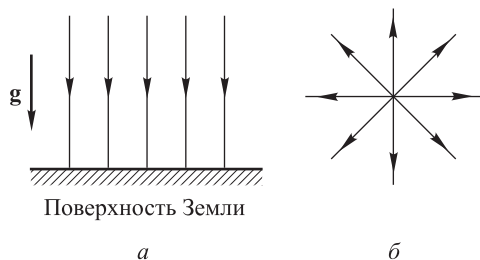


Рис. 64

### Консервативные силы и их свойства.

*Консервативным* называется поле, в котором совершаемая при перемещении частицы из произвольного начального произвольное конечное положение работа сил поля не зависит от формы

траектории и характера движения, а определяется только начальным и конечным положением частицы. Силы консервативного поля — *консервативные силы*.

Как показано выше (см. формулы (21.4)–(21.7)), консервативными являются однородное поле силы тяжести, поле гравитационной силы, кулоновское поле, поле упругих сил. Можно доказать, что всякое *центральное* поле является консервативным (в центральном поле действующая на частицу сила зависит только от расстояния до точки, называемой центром поля, и направлена вдоль прямой, проходящей через центр поля.)

Пример сил, которые не являются консервативными, — силы трения. Работа силы трения зависит, в частности, от длины пути (см. формулу (21.8)).

Покажем, что при перемещении тела в консервативном поле *работа консервативных сил на замкнутой траектории равна нулю*.

Пусть частица движется по замкнутой траектории  $1-a-2-b-1$ , где точка 1 — начальное положение тела, точка 2 — произвольное промежуточное положение, буквами  $a$  и  $b$  обозначены участки траектории между точками 1 и 2 (рис. 65). Работу сил поля на замкнутой траектории  $1-a-2-b-1$  можно представить как сумму работ на двух ее участках  $1-a-2$  и  $2-b-1$ :

$$A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1}. \quad (24.1)$$

Работа  $A_{2-b-1}$  сил поля при перемещении частицы из точки 2 в точку 1 по участку  $b$  равна по величине и противоположна по знаку работе сил поля при обратном перемещении из точки 1 в точку 2 по тому же участку  $b$ :

$$A_{2-b-1} = -A_{1-b-2}. \quad (24.2)$$

Равенство (24.2) следует из соответствующего равенства для элементарных работ. Действительно, при движении частицы из

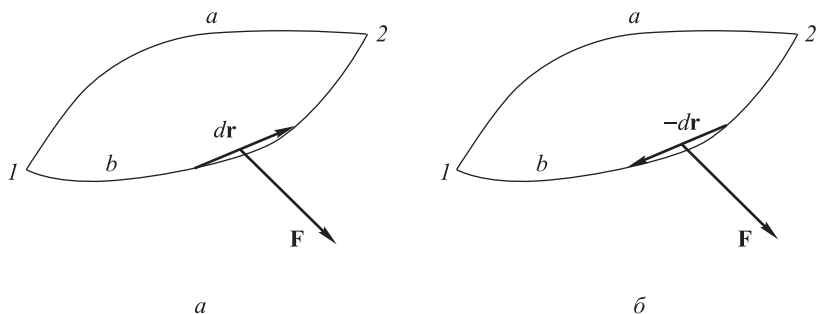


Рис. 65

точки 1 в точку 2 элементарная работа на некотором участке  $dr$  равна (рис. 65 а):

$$\delta A_{1-b-2} = \mathbf{F} dr.$$

При обратном движении частицы из точки 2 в точку 1 на том же участке траектории сила  $\mathbf{F}$  осталась прежней, а знак перемещения изменился на противоположный,  $-dr$  (рис. 65 б). Элементарная работа также изменит знак:

$$\delta A_{2-b-1} = \mathbf{F}(-dr) = -\mathbf{F} dr = -\delta A_{1-b-2}. \quad (24.3)$$

Сложив между собой равенства (24.3), записанные для всех элементарных участков траектории между точками 1 и 2, получим (24.2).

Преобразуем (24.1) с учетом (24.2) и равенства  $A_{1-a-2} = A_{1-b-2}$ , вытекающего из определения консервативного поля:

$$A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} - A_{1-b-2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается обратное утверждение: *если работа сил поля на замкнутой траектории равна нулю, поле является консервативным.*

## § 25. Потенциальная энергия частицы и ее свойства

Пусть имеется консервативное силовое поле. Частица расположена в точке  $P$  поля с координатами  $x, y, z$ . Выберем произвольную точку  $O$  поля (ее координаты  $x_0, y_0, z_0$ ), и назовем ее началом отсчета потенциальной энергии. В точке  $O$  потенциальная энергия частицы равна нулю.

*Потенциальной энергией*  $U$  частицы в точке  $P$  консервативного поля называется работа сил поля, совершаемая при перемещении частицы из данной точки  $P$  в точку  $O$ , принятую за начало отсчета потенциальной энергии:

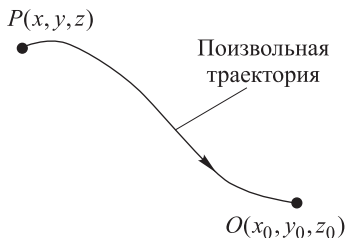


Рис. 66

$$U = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad (25.1)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила поля; интеграл вычисляется по произвольной траектории между точками  $P$  и  $O$  (рис. 66).

В силу свойств консервативного поля интеграл (25.1) не зависит от формы траектории и характера движения частицы, а определяется только положением точек  $P$  и  $O$  в пространстве.

**Свойства потенциальной энергии.** 1. Потенциальная энергия является функцией только координат  $x, y, z$  точки поля, в которой расположена частица:

$$U = U(x, y, z). \quad (25.2)$$

**Доказательство.** Поскольку поле консервативное, интеграл в (25.1) зависит только от положения точек  $P$  и  $O$ , то есть только от координат этих точек. Поэтому

$$U = U(x, y, z, x_0, y_0, z_0).$$

Положение точки  $O$  фиксировано, поэтому ее координаты  $x_0, y_0, z_0$  можно рассматривать в качестве параметров функции  $U$ . Следовательно  $U$  зависит только от трех переменных  $x, y, z$ .

2. Работа  $A_{12}$  сил поля при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна убыли потенциальной энергии частицы:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (25.3)$$

Здесь  $U_1, U_2$  — потенциальная энергия частицы в начальном и конечном положениях.

**Доказательство.** Пусть частица перемещается из начального (точка 1) в конечное (точка 2) положение по двум траекториям, одна из которых проходит через точку  $O$  — начало отсчета потенциальной энергии (рис. 67 а). Работу сил поля на этих траекториях обозначим через  $A_{12}$  и  $A_{1-O-2}$ . Поскольку поле консервативное, величины  $A_{12}$  и  $A_{1-O-2}$  равны друг другу:

$$A_{12} = A_{1-O-2}. \quad (25.4)$$

Представив  $A_{1-O-2}$  как сумму работ на участках  $1-O$  и  $O-2$  траектории  $1-O-2$ , получим

$$A_{1-O-2} = A_{1-O} + A_{O-2} = A_{1-O} - A_{2-O}. \quad (25.5)$$

По определению потенциальной энергии:

$$A_{1-O} = U_1, \quad A_{2-O} = U_2. \quad (25.6)$$

Из равенств (25.4), (25.5) с учетом (25.6) следует (25.3).

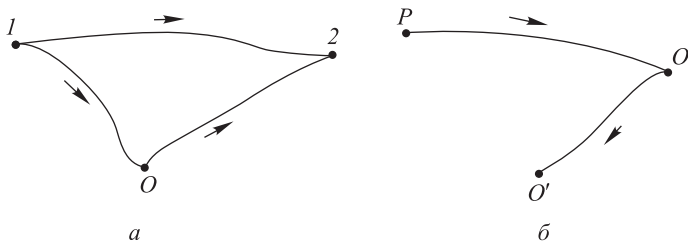


Рис. 67

3. Потенциальная энергия частицы определена с точностью до произвольной постоянной величины.

Поясним смысл этого утверждения. Заменим точку  $O$  начала отсчета потенциальной энергии на другую точку  $O'$  и выразим потенциальную энергию  $U'$ , начало отсчета которой находится в точке  $O'$ , через потенциальную энергию  $U$ , начало отсчета которой — в точке  $O$ . С этой целью вычислим работу сил поля  $A_{PO'}$  при перемещении частицы из произвольной точки  $P$  в точку  $O'$  по траектории  $P-O-O'$ , проходящей через точку  $O$  (рис. 67 б):

$$U' = A_{PO'} = A_{PO} + A_{OO'} = U + C. \quad (25.7)$$

Здесь  $U' = A_{PO'}$  — потенциальная энергия, начало отсчета которой находится в точке  $O'$ , равная работе сил поля при перемещении частицы по произвольной траектории из точки  $P$  в точку  $O'$ ;

$U = A_{PO}$  — потенциальная энергия, начало отсчета которой находится в точке  $O$ , равная работе сил поля при перемещении частицы по произвольной траектории из точки  $P$  в точку  $O$ ;

$$C = A_{OO'} = \int_O^{O'} \mathbf{F} d\mathbf{r} \text{ — работа сил поля, совершаемая при пе-}$$

ремещении частицы из точки  $O$  в точку  $O'$ ; величина  $C$  зависит только от положения точек  $O$  и  $O'$  и не зависит от траектории перехода.

Равенство (25.7) означает, что при изменении начала отсчета  $O$  на  $O'$  потенциальная энергия  $U$  частицы в произвольной точке  $P$  поля изменится на величину  $C$  и станет равна  $U'$ . Величина  $C$  не зависит от положения точки  $P$ . Следовательно, при изменении начала отсчета потенциальная энергия во всех точках поля меняется на одну и ту же величину  $C$ .

Поскольку начало отсчета потенциальной энергии выбирается произвольно, можно утверждать, что потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной величины.

## § 26. Вычисление потенциальной энергии частицы

Для вычисления потенциальной энергии частицы в консервативном силовом поле, в соответствии с определением (25.1), необходимо придерживаться следующей схемы: 1) выбрать положение начала отсчета потенциальной энергии, то есть точку, в которой потенциальная энергия частицы считается равной нулю (точка  $O$ ); 2) вычислить работу сил поля, совершаемую при перемещении частицы по произвольной траектории из точки  $P$  поля в начало отсчета потенциальной энергии — точку  $O$ . Полученная величина равна потенциальной энергии частицы в точке  $P$  поля.

**Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести.** Частица массой  $m$  находится в точке  $P$  однородного поля силы тяжести. Направим ось  $z$  декартовой системы координат вертикально вверх, координатную плоскость  $xy$  совместим с поверхностью Земли (рис. 68). В качестве начала отсчета потенциальной энергии выберем точку  $O$  — начало декартовой системы координат.

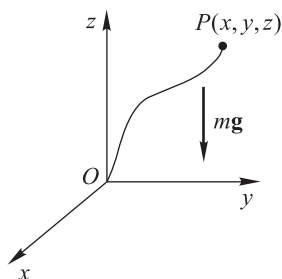


Рис. 68

Потенциальная энергия  $U$  частицы в точке  $P$  поля равна работе  $A_{PO}$  силы тяжести, совершаемой при перемещении частицы из точки  $P$  с координатами  $x, y, z$ , в точку  $O$  с координатами  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ . Воспользовавшись формулой (21.4) для вычисления работы силы тяжести, определим потенциальную энергию:

$$U = A_{PO} = mg(z - z_0) = mgz. \quad (26.1)$$

Работа силы тяжести  $mg(z - z_0)$ , а следовательно, и потенциальная энергия не изменятся, если перемещать частицу из точки  $P$  не в начало системы координат (точку  $O$ ), а в любую

другую точку плоскости  $xy$ , так как здесь везде  $z_0 = 0$ . Следовательно, в качестве начала отсчета потенциальной энергии в однородном поле силы тяжести можно рассматривать любую точку этой плоскости.

Согласно (26.1) потенциальная энергия частицы в однородном поле силы тяжести зависит только от одной, вертикальной координаты  $z$ . График зависимости  $U(z)$  представлен на рисунке 69.

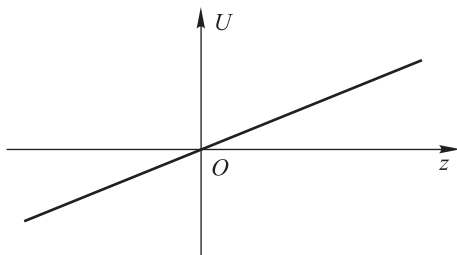


Рис. 69

**Потенциальная энергия тела в гравитационном поле.** Рассмотрим частицу массы  $m$ , расположенную в точке  $P$  на расстоянии  $r$  от неподвижного тела (материальной точки) массы  $M$  — источника гравитационного поля. В качестве начала

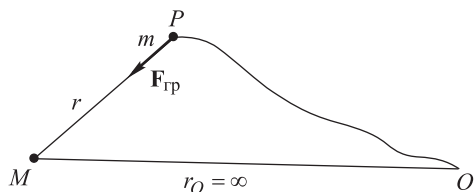


Рис. 70

отсчета потенциальной энергии выберем точку  $O$  на бесконечно большом удалении ( $r_O = \infty$ ) от тела массы  $M$ . Потенциальная энергия  $U$  частицы в точке  $P$  поля равна работе  $A_{PO}$  гравитационной силы, совершаемой при перемещении частицы из

точки  $P$  в точку  $O$  по произвольной траектории (рис. 70). Вычислив работу гравитационной силы по формуле (21.6), найдем потенциальную энергию частицы:

$$U = A_{PO} = \gamma M m \left( \frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_P} \right) = -\gamma \frac{M m}{r}. \quad (26.2)$$

Как следует из полученного выражения (26.2), если начало отсчета потенциальной энергии — точка  $O$  — выбрано «в бесконечности» ( $r_O = \infty$ ), потенциальная энергия тела во всех точках пространства отрицательна. График зависимости потенциальной энергии частицы

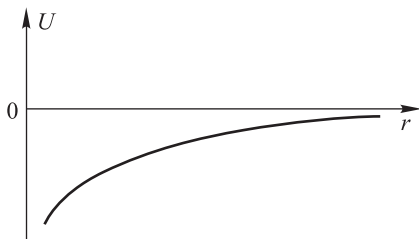


Рис. 71

от расстояния до центра гравитационного поля представлен на рис. 71.

**Потенциальная энергия тела в поле упругой силы.** Рассмотрим одномерное движение в поле упругой силы. Пусть левый конец горизонтально расположенной спиральной пружины

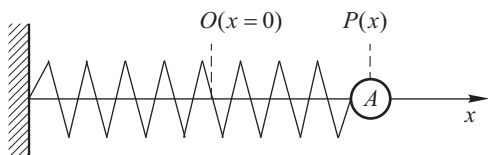


Рис. 72

закреплен, а с правым свободным концом связана частица  $A$ , которая может перемещаться вдоль оси  $x$ , совпадающей с осью симметрии пружины (рис. 72). Когда пружина не деформирована, частица  $A$  находится в точке  $O$  с координатой  $x = 0$ . Примем точку  $O$  за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия  $U$  частицы в произвольном положении  $P$  с координатой  $x$  равна работе  $A_{PO}$  упругой силы, совершаемой при перемещении частицы из точки  $P$  в точку  $O$ . Работу упругой силы вычислим по формуле (21.8):

$$U = A_{PO} = \frac{\kappa}{2} (x_P^2 - x_O^2) = \frac{\kappa x^2}{2}. \quad (26.3)$$

Здесь  $\kappa$  — жесткость пружины.

График зависимости от координаты  $x$  потенциальной энергии  $U$  частицы в поле упругой силы представлен на рис. 73. Модуль  $x$  равен величине удлинения или сжатия пружины.

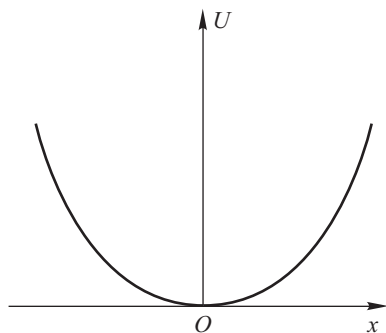


Рис. 73

## § 27. Связь потенциальной энергии и силы поля. Эквипотенциальные поверхности

Пусть частица находится в консервативном силовом поле. Если зависимость действующей на частицу силы  $\mathbf{F}$  от координат  $x, y, z$  точки поля  $P$ , в которой находится частица, известна, легко найти потенциальную энергию  $U$  (см. (25.1)):

$$U(x, y, z) = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r},$$

где интеграл вычисляется вдоль произвольной траектории между точкой  $P$  и точкой  $O$  — началом отсчета потенциальной энергии.

Поставим другую задачу. Пусть задана потенциальная энергия  $U$  как функция положения частицы в поле:

$$U = U(x, y, z).$$

Нужно определить силу, действующую на частицу в каждой точке пространства. Для этого достаточно определить компоненты  $F_x, F_y, F_z$  вектора силы  $\mathbf{F}$  в декартовой системе координат.

Как было показано выше (см. (25.3)), работа сил консервативного поля при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна убыли ее потенциальной энергии. Это свойство справедливо, в том числе, и для элементарной работы сил поля на перемещении  $d\mathbf{r}$ , то есть если начальное и конечное положения частицы расположены бесконечно близко друг к другу:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = -dU, \quad (27.1)$$

где  $dU$  — бесконечно малое приращение,  $(-dU)$  — убыль потенциальной энергии частицы.

Скалярное произведение  $\mathbf{F} d\mathbf{r}$  равно:

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (27.2)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  — компоненты вектора  $\mathbf{F}$ ,  $dx, dy, dz$  — компоненты вектора  $d\mathbf{r}$  в декартовой системе координат. Из (27.1) и (27.2) получим:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU(x, y, z). \quad (27.3)$$

Чтобы определить компоненты вектора силы, поступим следующим образом. Пусть, совершая элементарное перемещение, частица движется параллельно оси  $x$  (вектор  $d\mathbf{r}$  параллелен оси  $x$ ). В этом случае координаты  $y$  и  $z$  тела остаются неизменными ( $y = \text{const}, z = \text{const}$ ), поэтому  $dy = dz = 0$ . Равенство (27.3) при указанном условии имеет следующий вид:

$$F_x dx = -[dU(x, y, z)]_{y,z=\text{const}}.$$

Отсюда находим  $F_x$ :

$$F_x = - \left[ \frac{dU(x, y, z)}{dx} \right]_{y,z=\text{const}} = - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad (27.4)$$

где  $\partial U / \partial x$  — так называемая частная производная функции  $U(x, y, z)$  по переменной  $x$  (чтобы вычислить  $\partial U / \partial x$ , нужно найти производную функции  $U(x, y, z)$  по  $x$ , считая переменные  $y$  и  $z$  постоянными параметрами).



Аналогично можно показать, что компоненты силы  $F_y$  и  $F_z$  равны взятым со знаком минус частным производным функции потенциальной энергии по соответствующим координатам:

$$F_y = - \left[ \frac{dU(x, y, z)}{dy} \right]_{x, z = \text{const}} = - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad (27.5)$$

$$F_z = - \left[ \frac{dU(x, y, z)}{dz} \right]_{x, y = \text{const}} = - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}. \quad (27.6)$$

Зная зависимость потенциальной энергии тела от координат, по формулам (27.4)–(27.6) легко найти компоненты силы, действующей на частицу в любой точке пространства:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вектор силы  $\mathbf{F}$  можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right), \quad (27.7)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты осей  $x, y, z$  декартовой прямоугольной системы координат.

**Градиент скалярной функции.** *Градиентом* скалярной функции  $U(x, y, z)$  (обозначается  $\text{grad } U$ ) называется векторная функция, которая по определению равна:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Градиент представляет собой *оператор*, то есть правило, по которому всякой скалярной функции  $U(x, y, z)$  ставится в соответствие векторная функция тех же переменных.

Формально градиент функции  $U$  можно представить в виде произведения векторного оператора  $\nabla$  (называется *набла*) на саму функцию:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (27.8)$$

$$\text{grad } U = \nabla U = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (27.9)$$

С учетом введенных обозначений (27.8) и (27.9) связь потенциальной энергии и силы поля (27.7) можно представить компактной формой:

$$\mathbf{F} = - \text{grad } U = - \nabla U. \quad (27.10)$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Задана потенциальная энергия  $U$  частицы как функция ее координат  $U = -\alpha xy$ , где  $\alpha$  — постоянная. Найдем компоненты силы, действующей на частицу в точке пространства с координатами  $(x, y, z)$ :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha y, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \alpha x, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Вектор силы равен

$$\mathbf{F} = \alpha(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

**Пример 2.** Зная потенциальную энергию частицы массой  $m$  в гравитационном поле тела (материальной точки) массой  $M$ ,  $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$ , найти действующую на частицу силу.

Пусть начало неподвижной декартовой системы координат совпадает с центром гравитационного поля — телом массой  $M$ . Расстояние  $r$  от центра поля до частицы можно выразить через ее декартовы координаты  $x, y, z$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Зависимость потенциальной энергии  $U$  от декартовых координат  $x, y, z$  частицы имеет вид

$$U(x, y, z) = -\gamma \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Найдем компоненты действующей на частицу силы как функции координат  $x, y, z$ .

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -\gamma Mm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\gamma Mm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma Mm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Вектор силы  $\mathbf{F}$  выразим через компоненты  $F_x, F_y, F_z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\gamma Mm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} - \gamma Mm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \\ &- \gamma Mm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} = -\gamma Mm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\gamma Mm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из центра поля к частице.

**Эквипотенциальные поверхности.** Рассмотрим консервативное силовое поле с потенциальной энергией  $U(x, y, z)$ .

*Эквипотенциальной* называется поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и тоже значение (поверхность постоянной потенциальной энергии).

Получить уравнение эквипотенциальной поверхности можно, приравняв функцию потенциальной энергии некоторой постоянной величине:

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Уравнение эквипотенциальной поверхности в однородном поле силы тяжести:

$$U(x, y, z) = mgz = \text{const}, \\ z = \text{const.}$$

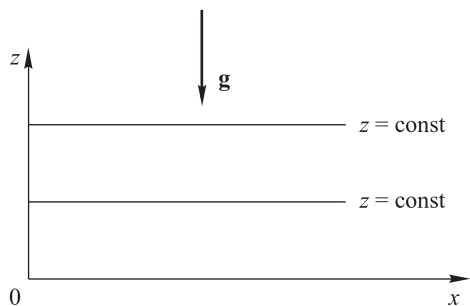


Рис. 74

Эквипотенциальные поверхности в однородном поле силы тяжести — горизонтальные плоскости  $z = \text{const}$  (рис. 74).

Найдем уравнение эквипотенциальной поверхности в центральном гравитационном поле:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}, \quad r = \text{const.}$$

Эквипотенциальные поверхности в центральном гравитационном поле — сферы ( $r = \text{const}$ , рис. 75).

*Вектор силы, действующей на помещенную в поле частицу, всегда направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциальной энергии.*

Докажем это утверждение. Пусть частица совершила бесконечно малое перемещение  $d\mathbf{r}$  вдоль эквипотенциальной поверхности. Поскольку во всех точках этой поверхности потенциальная энергия имеет одинаковое значение  $U = \text{const}$ , приращение потенциальной энергии частицы равно нулю:

$$dU = 0.$$

Гравитационный центр

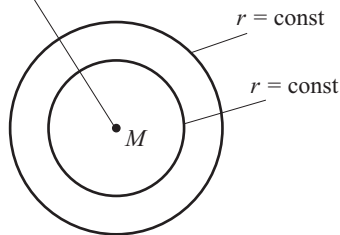


Рис. 75

Элементарная работа силы поля  $\mathbf{F}$ , которая в соответствии с (25.3) равна убыли потенциальной энергии, при перемещении

частицы вдоль эквипотенциальной поверхности также равна нулю:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = -dU = 0.$$

Из равенства нулю скалярного произведения  $\mathbf{F} d\mathbf{r}$  следует взаимная перпендикулярность векторов силы  $\mathbf{F}$  и перемещения  $d\mathbf{r}$ . Поскольку  $d\mathbf{r}$  принадлежит эквипотенциальной поверхности, вектор  $\mathbf{F}$  перпендикулярен к этой поверхности.

Из курса векторного анализа известно, что градиент скалярной функции указывает направление наиболее быстрого возрастания этой функции. Поскольку сила поля  $\mathbf{F}$  равна взятому со знаком минус градиенту потенциальной энергии (см. (27.10)):

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U,$$

то вектор  $\mathbf{F}$  направлен в сторону убывания потенциальной энергии.

## § 28. Закон сохранения полной механической энергии частицы

Пусть частица находится в консервативном силовом поле, ее скорость  $V$ , потенциальная энергия задана функцией  $U(x, y, z)$ .

*Полной механической энергией  $E$  частицы называется сумма ее кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергии:*

$$E = T + U = \frac{mV^2}{2} + U.$$

Сформулируем закон сохранения полной механической энергии частицы.

*Если на частицу действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия с течением времени не изменяется (сохраняется):*

$$E = T + U = \text{const.}$$

Доказательство этого утверждения основано на теореме о кинетической энергии и свойствах консервативных сил. Пусть частица переместилось из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2 (из точки 1 в точку 2 пространства). Согласно теореме о кинетической энергии (см. § 22, (22.4)) работа  $A_{12}$  сил поля равна приращению кинетической энергии частицы:

$$A_{12} = T_2 - T_1, \quad (28.1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — кинетическая энергия соответственно в начальном и конечном положениях.

В процессе перемещения на частицу действуют только консервативные силы, работа которых равна убыли потенциальной энергии (см. § 25, (25.3)):

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad (28.2)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — потенциальная энергия частицы в начальном и конечном положениях. Из (28.1) и (28.2) следует:

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= T_2 - T_1, \\ U_1 + T_1 &= U_2 + T_2. \end{aligned} \quad (28.3)$$

Равенство (28.3) означает, что полная механическая энергия частицы в начальном и конечном положениях одинакова. Поскольку начальное и конечное положения были выбраны произвольно, можно утверждать, что полная механическая энергия частицы в процессе движения сохраняется. Что и требовалось доказать.

Пусть на расположенную в консервативном силовом поле частицу, помимо сил этого поля, действуют любые другие силы, которые мы назовем *сторонними*. Например, для частицы, находящейся в гравитационном поле, сторонними можно считать силы кулоновского поля. Отнесем к сторонним силам действующие на частицу силы трения и сопротивления вязкой среды. (В отличие от консервативных силы трения и сопротивления называются *диссипативными*, поскольку они приводят к диссипации механической энергии — превращению ее в теплоту).

Закон изменения полной механической энергии частицы. *Работа сторонних сил  $A_{12\text{ стор}}$  при перемещении частицы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии частицы:*

$$A_{12\text{ стор}} = E_2 - E_1,$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  — полная механическая энергия частицы в начальном и конечном положениях.

Докажем это утверждение. Согласно теореме о кинетической энергии работа  $A_{12}$  всех приложенных к частице сил при ее перемещении из начального в конечное положения равна приращению кинетической энергии:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (28.4)$$

где  $T_2$ ,  $T_1$  — кинетическая энергия частицы в конечном и начальном положениях.

Работа  $A_{12}$  складывается из работы  $A_{12\text{ конс}}$  сил консервативного поля и работы  $A_{12\text{ стор}}$  сторонних сил:

$$A_{12} = A_{12\text{ конс}} + A_{12\text{ стор}}. \quad (28.5)$$

Работа  $A_{12 \text{ конс}}$  консервативных сил равна убыли потенциальной энергии тела:

$$A_{12 \text{ конс}} = U_1 - U_2, \quad (28.6)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — потенциальная энергия тела в начальном и конечном положениях. Подставим  $A_{12 \text{ конс}}$  из (28.6) в (28.5):

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12 \text{ стор}}. \quad (28.7)$$

Приравнявая правые части (28.4) и (28.7), получим

$$U_1 - U_2 + A_{12 \text{ стор}} = T_2 - T_1,$$

$$A_{12 \text{ стор}} = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = E_2 - E_1,$$

что и требовалось доказать.

## § 29. Потенциальная энергия и закон сохранения полной механической энергии системы частиц

До сих пор мы ограничивались рассмотрением движения одной частицы в силовом поле. Поле, в котором движется частица, возникает благодаря наличию других тел. Чтобы это поле было стационарным — независимым от времени, порождающие поле тела должны быть неподвижными. Рассмотренный выше закон сохранения полной механической энергии частицы относится именно к такому простейшему случаю: одна частица движется, а все остальные — покоятся. Закон сохранения энергии может быть сформулирован в общем случае, когда имеется несколько движущихся частиц (система частиц).

Рассмотрим замкнутую систему частиц, в которой действуют только консервативные силы. Примем произвольное положение системы (положение  $O$ ), которое характеризуется определенным набором координат всех частиц  $x_{01}, y_{01}, z_{01}, x_{02}, y_{02}, z_{02}, \dots, x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}, \dots$  ( $i$  — порядковый номер частицы), за начало отсчета потенциальной энергии. В положении  $O$  потенциальная энергия равна нулю.

Пусть система находится в произвольном положении  $P$ , в котором заданы координатами всех частиц  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots$

*Потенциальной энергией* системы частиц в положении  $P$  называется работа всех консервативных сил, совершаемая при переходе системы из положения  $P$  в принятое за начало отсчета потенциальной энергии положение  $O$ :

$$U = \sum A_i = \int_P^O \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2 + \dots + \int_P^O \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + \dots, \quad (29.1)$$

где  $\mathbf{F}_i$  — равнодействующая всех приложенных к  $i$ -й частице консервативных сил;  $A_i = \int_P^O \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i$  — работа силы  $\mathbf{F}_i$ , совершаемая над частицей с номером  $i$  при переходе системы из положения  $P$  в положение  $O$  (каждый интеграл суммы вычисляется вдоль траектории соответствующей  $i$ -й частицы); в сумму входят интегралы, вычисленные вдоль траектории движения всех частиц системы.

Рисунок 76 иллюстрирует определение (29.1) потенциальной энергии на примере системы, состоящей из двух частиц. Здесь

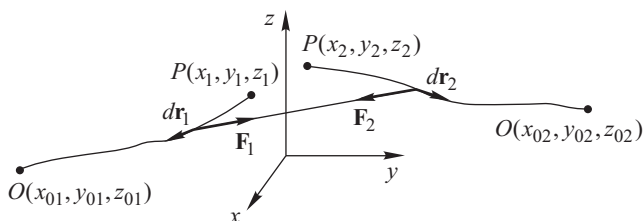


Рис. 76

$\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  — действующие на первую и вторую частицу силы (по третьему закону Ньютона они равны по величине и противоположно направлены). Интеграл  $A_1 = \int_P^O \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1$  равен работе силы  $\mathbf{F}_1$  при перемещении первой частицы по своей траектории из точки с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  в точку с координатами  $(x_{01}, y_{01}, z_{01})$ ; интеграл  $A_2 = \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2$  равен работе силы  $\mathbf{F}_2$  при перемещении второй частицы по своей траектории из точки с координатами  $(x_2, y_2, z_2)$  в точку с координатами  $(x_{02}, y_{02}, z_{02})$ . Потенциальная энергия системы равна сумме работ сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ :

$$U = A_1 + A_2 = \int_P^O \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2.$$

**Свойства потенциальной энергии.** 1. Потенциальная энергия системы частиц является функцией только координат всех частиц:

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots). \quad (29.2)$$

Это свойство, по существу, означает, что потенциальная энергия системы зависит только от взаимного расположения частиц.

2. Работа  $A_{12}$  всех консервативных сил при переходе системы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна убыли потенциальной энергии системы:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad (29.3)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — потенциальная энергия системы в начальном и конечном положениях.

3. Потенциальная энергия системы частиц определена с точностью до произвольной постоянной величины.

Доказательство свойств 1–3 для системы частиц аналогично их доказательству для потенциальной энергии одной частицы в консервативном силовом поле (см. § 25).

4. Потенциальную энергию системы можно выразить через потенциальную энергию входящих в эту систему частиц:

$$U = \frac{1}{2} (U_1 + U_2 + \dots + U_i + \dots) = \frac{1}{2} \sum U_i, \quad (29.4)$$

где  $U$  — потенциальная энергия системы;  $U_i$  — потенциальная энергия  $i$ -й частицы в силовом поле всех остальных частиц системы, кроме  $i$ -й; суммирование выполняется по всем частицам системы.

Проиллюстрируем свойство 4 на примере системы из двух частиц с консервативными силами взаимодействия. Пусть система переходит из некоторого положения  $P$  в положение  $O$ , принятое за начало отсчета потенциальной энергии (рис. 77). Согласно определению (29.1) потенциальная энергия системы равна:

$$U = A_1 + A_2 = \int_P^O \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2, \quad (29.5)$$

где  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  — действующие на первую и вторую частицу силы;

$A_1 = \int_P^O \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1$  — работа силы  $\mathbf{F}_1$ , совершаемая при переходе системы из положения  $P$  в положение  $O$ ;  $A_2 = \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2$  — работа

силы  $\mathbf{F}_2$ , совершаемая при переходе системы из положения  $P$  в положение  $O$ .

В соответствии с третьим законом Ньютона силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  взаимодействия двух частиц равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \quad (29.6)$$



С учетом (29.6) преобразуем выражение (29.5) потенциальной энергии  $U$  системы:

$$U = - \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_1 + \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2 = \int_P^O \mathbf{F}_2 d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_{2\text{отн}}, \quad (29.7)$$

где  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{2\text{отн}}$  — радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй (рис. 77).

При переходе системы из положения  $P$  в положение  $O$  радиус-вектор  $\mathbf{r}_{2\text{отн}}$  задает траекторию движения второй частицы в системе отсчета, связанной с первой частицей. Поэтому

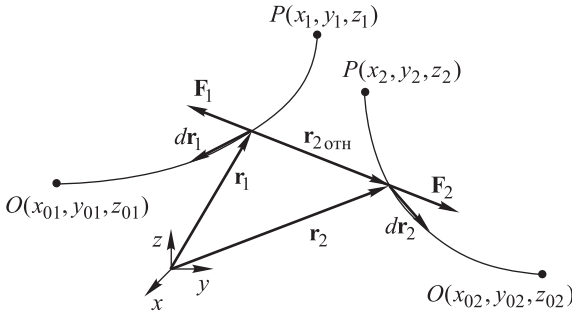


Рис. 77

интеграл в правой части (29.7) можно рассматривать как работу  $A_{2PO}$  действующей на вторую частицу силы  $\mathbf{F}_2$ , совершаемую при перемещении этой частицы в силовом поле неподвижной первой частицы:

$$\int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_{2\text{отн}} = A_{2PO}. \quad (29.8)$$

Работа  $A_{2PO}$ , по определению, представляет собой потенциальную энергию  $U_2$  второй частицы в силовом поле неподвижной первой частицы:

$$A_{2PO} = U_2. \quad (29.9)$$

Из (29.7)–(29.9) следует:

$$U = U_2, \quad (29.10)$$

то есть потенциальная энергия системы частиц равна потенциальной энергии второй частицы в силовом поле первой частицы.

Аналогично можно показать, заменив в (29.5)  $\mathbf{F}_2$  на  $-\mathbf{F}_1$ , что потенциальная энергия системы частиц равна потенциальной

ной энергии первой частицы в силовом поле второй частицы:

$$U = U_1. \quad (29.11)$$

Потенциальная энергия  $U$  может быть представлена в симметричном относительно  $U_1$  и  $U_2$  виде с помощью (29.10) и (29.11):

$$U = \frac{1}{2} (U_1 + U_2). \quad (29.12)$$

Полученное для системы из двух частиц равенство (29.12) является частным случаем выражения (29.4) потенциальной энергии системы с произвольным числом частиц, что подтверждает справедливость свойства 4.

Пример. Рассчитаем с помощью формулы (29.4) потенциальную энергию системы из трех частиц, между которыми действуют силы гравитационного притяжения (рис. 78).

Потенциальная энергия  $U_1$  первой частицы в поле второй и третьей частиц:

$$U_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}}.$$

Рис. 78

Потенциальная энергия  $U_2$  второй частицы в поле первой и третьей частиц:

$$U_2 = -\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{12}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

Потенциальная энергия  $U_3$  третьей частицы в поле первой и второй частиц:

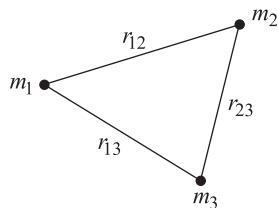
$$U_3 = -\gamma \frac{m_3 m_2}{r_{23}} - \gamma \frac{m_3 m_1}{r_{13}}.$$

Потенциальная энергия  $U$  системы в соответствии с (29.4) равна:

$$U = \frac{1}{2} (U_1 + U_2 + U_3) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

**Закон сохранения полной механической энергии для замкнутой системы частиц с консервативными силами взаимодействия.** Сформулируем закон сохранения полной механической энергии для замкнутой системы частиц, в которой действуют только консервативные силы. Затем обобщим его на незамкнутые системы и произвольные силы.

*Полная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой действуют только консервативные силы, с течени-*



ем времени не изменяется (сохраняется):

$$E = T + U = \text{const}, \quad (29.13)$$

где  $E$ ,  $T$ ,  $U$  — полная механическая, кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно.

Для доказательства предположим, что система перешла из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2. Согласно теореме о кинетической энергии работа  $A_{12}$  всех действующих на частицы системы сил равна приращению кинетической энергии системы:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (29.14)$$

Поскольку все силы консервативные, их работа, согласно (29.3), равна убыли потенциальной энергии системы:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (29.15)$$

Из (29.14) и (29.15) получим

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

— полная механическая энергия системы в положениях 1 и 2 одинакова. Поскольку эти положения были выбраны произвольно, можно утверждать, что полная механическая энергия системы сохраняется.

**Закон изменения полной механической энергии системы.** Пусть система частиц, вообще говоря, не является замкнутой. На частицы, помимо внутренних консервативных сил, действуют любые другие силы, которые будем называть сторонними. Отнесем к сторонним *все внешние силы* (например, силы внешнего консервативного поля — его источником служит не входящее в систему тело), а также *все диссипативные силы* (силы трения и сопротивления среды), как внутренние, так и внешние. Таким образом, будем называть сторонними силами все силы, кроме внутренних консервативных.

Сформулируем закон изменения полной механической энергии системы.

*Работа сторонних сил  $A_{12 \text{ стор}}$  при переходе системы частиц из произвольного начального в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии системы:*

$$A_{12 \text{ стор}} = E_2 - E_1, \quad (29.16)$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  — полная механическая энергия системы в начальном и конечном положениях.

**Доказательство.** Если система перешла из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение

2, в соответствии с теоремой о кинетической энергии работа всех приложенных к частицам сил равна приращению кинетической энергии системы:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (29.17)$$

Представим работу  $A_{12}$  как сумму работы  $A_{12 \text{ конс}}$  внутренних консервативных сил и работы  $A_{12 \text{ стор}}$  всех сторонних сил:

$$A_{12} = A_{12 \text{ конс}} + A_{12 \text{ стор}}. \quad (29.18)$$

Учтем свойство (29.3) потенциальной энергии системы, согласно которому работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{12 \text{ конс}} = U_1 - U_2. \quad (29.19)$$

Из (29.17)–(29.19) получим

$$A_{12 \text{ стор}} = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = E_2 - E_1,$$

где  $E_2$  и  $E_1$  — полная механическая энергия системы в положениях 2 и 1 соответственно. Формула (29.16) доказана.

Рассмотрим пример использования закона изменения полной механической энергии системы.

**Пример.** Два связанных недеформированной пружиной тела 1 и 2 с массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся на шероховатой горизонтальной поверхности (рис. 79). С какой минимальной постоянной силой  $F$ , направленной горизонтально, нужно тянуть второе тело, чтобы первое тело начало перемещаться? Коэффициент трения скольжения между телами и поверхностью равен  $k$ .

При перемещении тела 2 пружина растягивается. На оба тела будет действовать внутренняя консервативная упругая сила пружины. При движении тела 2 к нему приложены сторонние силы: горизонтальная сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = km_2g$ , внешняя постоянная горизонтальная сила  $F$ , уравновешивающие друг друга вертикальные сила тяжести  $m_2\mathbf{g}$  и сила нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$ . Работа сторонних сил за любой промежуток времени равна приращению полной механической энергии системы тел:

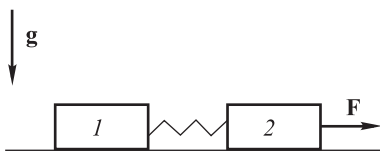


Рис. 79

$$A_{\text{стор}} = A_{\text{тр}} + A_F + A_{mg} + A_N = -km_2gx + Fx = E_k - E_n, \quad (29.20)$$

где  $x$  — перемещение тела 2 под действием силы  $F$ ;  $A_{\text{тр}} = -km_2gx$  — работа силы трения;  $A_F = Fx$  — работа силы  $F$ ; работа силы тяжести  $A_{mg}$  и работа силы нормальной реакции

опоры  $A_N$  равны нулю, поскольку силы перпендикулярны перемещению тела;  $E_n$ ,  $E_k$  — полная механическая энергия системы в начальном и конечном положениях.

Сила  $F$  минимальна, если в момент начала движения тела  $1$  скорость и кинетическая энергия тела  $2$  равны нулю. Следовательно, приращение полной механической энергии системы происходит только за счет увеличения потенциальной энергии пружины:

$$E_k - E_n = \frac{\kappa x^2}{2}, \quad (29.21)$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины.

Из (29.20) и (29.21) получим

$$-km_2gx + Fx = \frac{\kappa x^2}{2}.$$

Отсюда выразим  $F$ :

$$F = km_2g + \frac{\kappa x}{2}. \quad (29.22)$$

Учтем, что в момент начала движения тела  $1$  упругая сила пружины  $F_{\text{упр}}$  должна быть равна действующей на тело  $1$  наибольшей возможной силе трения покоя, приблизительно равной силе трения скольжения  $km_1g$ :

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}} &= F_{\text{тр.п}}, \\ \kappa x &= km_1g. \end{aligned} \quad (29.23)$$

Подставив (29.23) в (29.22), найдем силу  $F$ :

$$F = k(m_2 + m_1/2)g.$$

### § 30. Закон сохранения энергии при движении в гравитационном поле. Космические скорости

Рассмотрим частицу, которая движется в поле консервативных сил. Никакие другие силы, помимо сил консервативного поля, на частицу не действуют. Не все области пространства, где существует силовое консервативное поле, достижимы для частицы в процессе ее движения.

Если на частицу действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия сохраняется:

$$E = \text{const.}$$

Кинетическая энергия — величина неотрицательная:

$$T = \frac{mV^2}{2} \geq 0.$$

Следовательно, равная сумме кинетической энергии  $T$  и потенциальной энергии  $U$  полная механическая энергия  $E$  всегда больше или равна потенциальной энергии:

$$E = T + U(x, y, z) \geq U(x, y, z). \quad (30.1)$$

Если величина  $E$  фиксирована (энергия  $E$  сохраняется), неравенство (30.1) накладывает ограничения на возможные значения координат  $x, y, z$  частицы в процессе ее движения: частица может находиться лишь в тех областях пространства, где  $E \geq U(x, y, z)$ .

Пример. Пусть потенциальная энергия  $U$  частицы зависит только от одной координаты  $x$  и имеет вид, показанный на рис. 80 (одномерное движение). При некотором фиксированном

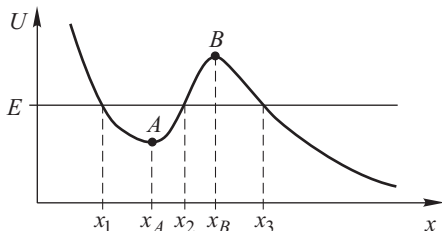


Рис. 80

значении энергии  $E$  частицы ее координата  $x$  может принимать значения  $x_1 \leq x \leq x_2$  и  $x \geq x_3$ .

Проекцию на ось  $x$  действующей на частицу силы  $F_x$  можно найти, вычислив производную потенциальной энергии по координате  $x$ :

$$F_x = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

В точках пространства с координатами  $x_A$  и  $x_B$ , соответствующих минимуму и максимуму функции  $U(x)$ , действующая на частицу сила равна нулю. Эти точки являются положениями равновесия частицы. Минимуму потенциальной энергии соответствует положение устойчивого равновесия: возникающая при смещении частицы сила стремится возвратить ее в положение равновесия. Точка максимума потенциальной энергии соответствует положению неустойчивого равновесия.

**Первая и вторая космические скорости.** Рассмотрим движение частицы в центральном гравитационном поле, например, движение космического корабля вокруг Земли при условии, что гравитационными полями других небесных тел мы прене-

брегаем. Гравитационное поле, как и всякое другое центральное поле, является консервативным. Если никакие другие силы, кроме гравитационной, на частицу не действуют, выполняется закон сохранения энергии: полная механическая энергия частицы в процессе движения сохраняется.

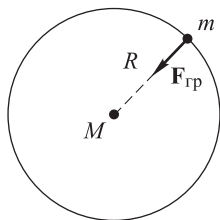


Рис. 81

*Первой космической скоростью* называется скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы вывести его на круговую околоземную орбиту.

Пусть  $R$  — радиус круговой орбиты,  $m$  — масса частицы (космического корабля),  $M$  — масса неподвижного центра гравитации (Земли) (рис. 81). Уравнение движения частицы по круговой орбите радиуса  $R$  с постоянной скоростью  $V$  под действием гравитационной силы  $F_{\text{гр}} = \gamma \frac{Mm}{R^2}$  имеет вид

$$m \frac{V^2}{R} = \gamma \frac{Mm}{R^2}.$$

Отсюда найдем скорость  $V$ :

$$V = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{gR}, \quad (30.2)$$

где  $g = \sqrt{\gamma \frac{M}{R^2}}$  — ускорение свободного падения на расстоянии  $R$  от центра Земли.

Первую космическую скорость  $V_1$  можно вычислить по формуле (30.2), если положить в ней  $R$  равным радиусу Земли ( $R = R_3 \approx 6400$  км), а  $g$  — ускорению свободного падения на земной поверхности ( $g \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup>). Первая космическая скорость приблизительно равна:

$$V_1 = \sqrt{gR_3} \approx 7,9 \text{ км/с}.$$

Найдем период обращения  $T$  частицы по круговой орбите:

$$T = \frac{2\pi R}{V_1} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}.$$

Квадрат периода обращения пропорционален кубу радиуса орбиты:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M}. \quad (30.3)$$

Соотношение (30.3) выражает *третий закон Кеплера*. Оно справедливо при движении космического тела не только по кру-

говой, но и по эллиптической орбите, однако в этом случае вместо радиуса  $R$  круговой орбиты нужно использовать длину большой полуоси эллипса.

Выразим радиус  $R$  круговой орбиты через величину полной механической энергии  $E$  частицы. Энергия  $E$  равна сумме кинетической энергии  $T = \frac{mV^2}{2}$ , где  $V$  рассчитывается по формуле (30.2), и потенциальной энергии  $U = -\gamma \frac{Mm}{R}$  (см. (26.2)):

$$E = \frac{mV^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{R} = \gamma \frac{Mm}{2R} - \gamma \frac{Mm}{R} = -\gamma \frac{Mm}{2R}.$$

Отсюда найдем  $R$ :

$$R = -\gamma \frac{Mm}{2E}. \quad (30.4)$$

Из (30.4) следует, что если полная механическая энергия  $E$  задана, радиус  $R$  орбиты определен однозначно. Соотношение (30.4) остается справедливым и при движении частицы по эллиптической орбите, если под  $R$  понимать длину большой полуоси эллипса.

*Второй космической скоростью* называется скорость, которую необходимо сообщить космическому телу вблизи земной поверхности, чтобы вывести его за пределы земного тяготения.

Согласно (30.1) частица может находиться лишь в тех областях пространства, где ее полная механическая энергия  $E$  больше или равна потенциальной энергии. Если частица вышла за пределы земного тяготения и оказалась на бесконечно большом удалении от центра поля ( $R \approx \infty$ ), ее потенциальная энергия равна нулю ( $U = -\gamma \frac{Mm}{R} = 0$ ). В соответствии с (30.1) наименьшее возможное значение энергии  $E$  частицы при этом

$$E_{\text{мин}} = U = 0.$$

Учитывая закон сохранения энергии и приравняв нулю полную механическую энергию  $E_{\text{мин}}$  частицы, когда она находится у поверхности Земли:

$$E_{\text{мин}} = \frac{mV_{\text{II}}^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{R_3} = 0,$$

найдем вторую космическую скорость  $V_{\text{II}}$ :

$$V_{\text{II}} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R_3}} = \sqrt{2gR_3}. \quad (30.5)$$

Вторая космическая скорость в  $\sqrt{2}$  раз превышает первую космическую скорость и составляет около 11,2 км/с.



**Условия финитности и инфинитности движения тела в центральном гравитационном поле.** График зависимости потенциальной энергии  $U$  частицы от расстояния  $R$  до центра гравитационного поля представлен на рис. 82. Здесь

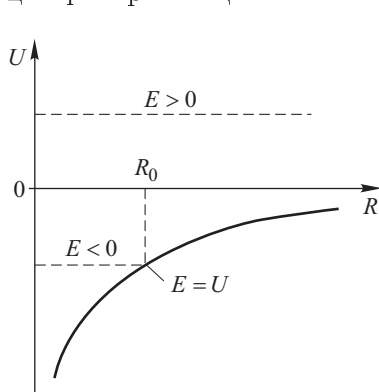


Рис. 82

$U = -\gamma \frac{Mm}{R}$ , где  $m$  — масса частицы,  $M$  — масса центра гравитационного притяжения. Заметим, что энергия  $U$  частицы при всех значениях  $R$  отрицательна ( $U < 0$ ). С помощью неравенства (30.1) и графика определим области пространства, в которых может находиться частица с фиксированным значением полной механической энергии  $E$ .

Если энергия  $E$  неотрицательна ( $E \geq 0$ ), неравенство (30.1) выполняется при любых значениях  $R$ , и частица может находиться в любой точке пространства — движение частицы не ограничено (*инфинитно*).

Если  $E < 0$ , то неравенство (30.1) выполняется не для всех значений  $R$ , ограничивая тем самым доступную для движения область пространства:

$$\begin{aligned} E &\geq -\gamma \frac{Mm}{R}, \\ R &\leq -\gamma \frac{Mm}{E}. \end{aligned} \quad (30.6)$$

Движение частицы в ограниченной области пространства называют *финитным*. Если энергия  $E$  отрицательная, наибольшее возможное удаление  $R_0$  частицы от центра поля можно определить из (30.6) или из условия равенства друг другу полной механической  $E$  и потенциальной  $U$  энергии (см. рис. 82):

$$E = U = -\gamma \frac{Mm}{R_0}.$$

Отсюда:

$$R_0 = -\gamma \frac{Mm}{E} \quad (30.7)$$

Когда частица с фиксированной отрицательной энергией  $E$  оказывается на наибольшем возможном удалении  $R_0$  от центра поля, ее кинетическая энергия и скорость равны нулю. При этом

расстояние  $R_0$  вдвое превышает радиус круговой орбиты частицы с такой же энергией  $E$  (ср. формулы (30.4) и (30.7)).

В начале XVII века немецким астрономом Кеплером было установлено, и в этом состоит *первый закон Кеплера*, что траекториями движения космических тел являются кривые второго порядка, а именно: гипербола, если полная механическая энергия  $E$  тела положительна (инфинитное движение); парабола, если  $E = 0$  (инфинитное движение); эллипс или окружность при отрицательных значениях  $E$  (финитное движение). Во всех случаях центр гравитационного притяжения располагается в одном из фокусов кривой второго порядка.

### § 31. Момент импульса частицы и момент силы. Уравнение моментов

Пусть частица  $A$  массы  $m$  движется со скоростью  $\mathbf{V}$ . Положение частицы  $A$  в пространстве задается радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из некоторой неподвижной точки  $O$  (так называемого неподвижного начала) (рис. 83). Точка  $O$  не обязательно совпадает с началом неподвижной системы координат с осями  $x, y, z$ .

Моментом импульса частицы  $A$  относительно неподвижной точки  $O$  называется вектор  $\mathbf{L}$ , равный

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}], \quad (31.1)$$

где  $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$  — импульс частицы  $A$ .

В соответствии с определением векторного произведения модуль вектора  $\mathbf{L}$  равен:

$$L = rp \sin \alpha = l_p p,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ ,  $l_p$  — кратчайшее расстояние от точки  $O$  до линии, вдоль которой направлен вектор импульса  $\mathbf{p}$ . Расстояние  $l_p$  называется плечом импульса  $\mathbf{p}$  (рис. 83).

Вектор  $\mathbf{L}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ .

Моментом импульса  $L_z$  частицы относительно неподвижной оси  $z$  называется проекция на эту ось момента импульса  $\mathbf{L}$  частицы, вычисленного относительно произвольной точки  $O$

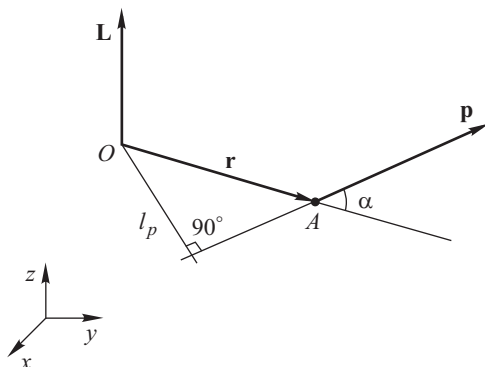


Рис. 83

оси  $z$ . Момент импульса  $L_z$  относительно оси, является скалярной величиной в отличие от момента импульса  $\mathbf{L}$  относительно точки. Можно показать, что значение  $L_z$  не зависит от выбора точки  $O$  на оси  $z$ , относительно которой рассчитывается момент импульса.

Пусть к частице  $A$  приложена сила  $\mathbf{F}$  (рис. 84).

Моментом силы  $\mathbf{F}$  относительно неподвижной точки  $O$  называется вектор, равный:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{F}]. \quad (31.2)$$

Модуль вектора  $\mathbf{M}$  момента силы равен:

$$M = r F \sin \alpha = l_F F,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ ,  $l_F = r \sin \alpha$  — кратчайшее расстояние от точки  $O$  до линии действия силы  $\mathbf{F}$ . Расстояние  $l_F$  называется плечом силы.

Вектор момента силы  $\mathbf{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ .

Моментом силы  $M_z$  относительно неподвижной оси  $z$  называется проекция на эту ось вектора  $\mathbf{M}$  момента силы, рассчитанного относительно произвольной точки  $O$  оси  $z$ . Момент силы  $M_z$  относительно оси является скалярной величиной. Его значение не зависит от выбора точки  $O$  на оси  $z$ .

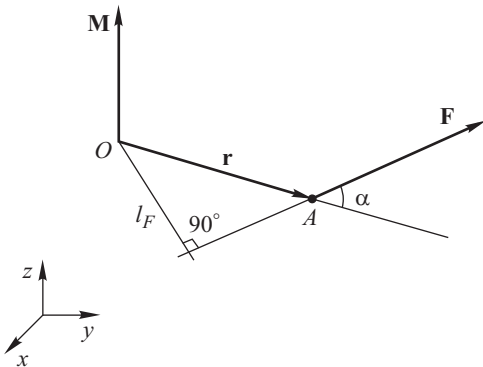


Рис. 84

Момент силы  $M_z$  относительно оси является скалярной величиной. Его значение не зависит от выбора точки  $O$  на оси  $z$ .

**Уравнение моментов.** Найдем производную по времени момента импульса  $\mathbf{L}$  частицы относительно неподвижной точки  $O$ , дифференцируя обе части равенства (31.1):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{p} \right] + \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = [\mathbf{V} \mathbf{p}] + [\mathbf{r} \mathbf{F}]. \quad (31.3)$$

При дифференцировании  $\mathbf{L}$  учли, что производная по времени импульса  $\mathbf{p}$  частицы равна действующей на нее силе ( $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ ), производная по времени вектора  $\mathbf{r}$  равна скорости  $\mathbf{V}$  частицы. Для доказательства последнего утверждения выразим  $\mathbf{r}$  через проведенные к точкам  $O$  и  $A$  из начала системы координат векторы  $\mathbf{r}_O$  и  $\mathbf{r}_A$  ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O$ , см. рис. 85), и заметим, что

производная по времени постоянного вектора  $\mathbf{r}_O$  равна нулю, производная по времени радиуса-вектора  $\mathbf{r}_A$  частицы по определению равна ее скорости  $\mathbf{V}$ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{V}.$$

Поскольку векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$  сонаправлены, первое слагаемое в правой части (31.3) равно нулю. Из (31.3) получаем *уравнение моментов*:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (31.4)$$

где  $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{F}]$ . Уравнение (31.4) показывает, что производная по времени момента импульса частицы равна моменту действующей на нее силы.

Из уравнения моментов (31.4) следует закон сохранения момента импульса

частицы: *если момент  $\mathbf{M}$  действующей на частицу силы относительно неподвижной точки пространства равен нулю, момент импульса  $\mathbf{L}$  частицы относительно этой точки с течением времени не изменяется (сохраняется)*. Действительно, если  $\mathbf{M} = 0$ , то  $d\mathbf{L}/dt = 0$  и  $\mathbf{L} = \text{const}$ .

Пример. Пусть движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности шайба (материальная точка) испытывает упругое столкновение с неподвижной гладкой стенкой (рис. 86). Найти все точки плоскости, для которых момент импульса шайбы остается неизменным до и во время столкновения.

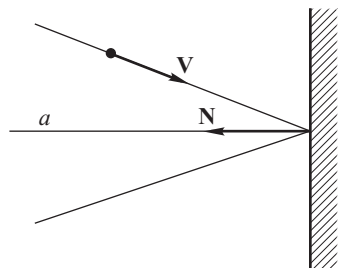


Рис. 86

Перед столкновением со стенкой сумма всех приложенных к шайбе сил (силы тяжести и силы нормальной реакции горизонтальной опоры) равна нулю. Момент  $\mathbf{M}$  перечисленных сил относительно любой точки плоскости равен нулю, поэтому момент импульса  $\mathbf{L}$  шайбы относительно любой точки плоскости сохраняется. Во время столкновения на шайбу со стороны вертикальной стенки действует горизонтальная сила реакции  $\mathbf{N}$ , перпендикулярная к стенке.

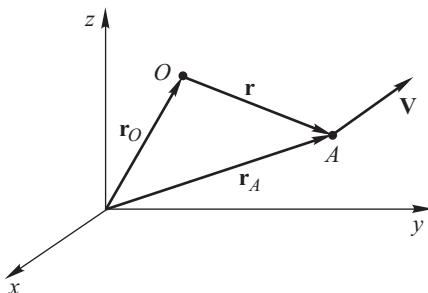


Рис. 85

Момент этой силы равен нулю относительно любой точки горизонтальной прямой  $a$ , проходящей через точку столкновения шайбы со стенкой и совпадающей по направлению с вектором  $\mathbf{N}$ . Следовательно, во время столкновения шайбы со стенкой момент импульса шайбы  $\mathbf{L}$  будет сохраняться относительно любой точки прямой  $a$ .

## § 32. Момент импульса частицы при движении в гравитационном поле. Закон площадей

Частица  $A$  массы  $m$  движется в поле неподвижного центра гравитации — тела  $C$  массы  $M$  (рис. 87). Действующая на частицу сила равна:

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

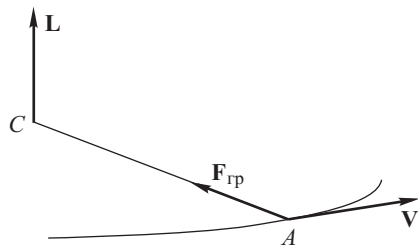


Рис. 87

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $r$  — расстояние от частицы до центра поля. В любой момент времени сила  $\mathbf{F}_{\text{гр}}$  направлена к центру поля, плечо силы и ее момент относительно центра поля —

точки  $C$  — равны нулю. Следовательно, момент импульса  $\mathbf{L}$  частицы  $A$  относительно точки  $C$  сохраняется.

Доказано важное свойство центрального гравитационного поля: *при движении в центральном гравитационном поле момент импульса частицы относительно центра поля сохраняется.*

Рассмотрим следствия, вытекающие из этого свойства:

1. Траектория движения частицы в центральном гравитационном поле является плоской кривой, плоскость движения проходит через центр поля.

При движении частицы ее момент импульса относительно центра поля равен  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из центра поля к частице,  $\mathbf{p}$  — импульс частицы. По свойству векторного произведения вектор  $\mathbf{r}$  перпендикулярен к вектору  $\mathbf{L}$ . Вектор  $\mathbf{L}$  сохраняется, его направление в пространстве остается неизменным. Следовательно, при движении частицы вектор  $\mathbf{r}$  остается в одной перпендикулярной к  $\mathbf{L}$  плоскости, которая проходит через центр поля. Что и требовалось доказать.

2. Радиус-вектор частицы при ее движении в центральном гравитационном поле за равные времена описывает равные площади (*второй закон Кеплера или закон площадей*).

Преобразуем выражение для момента импульса  $\mathbf{L}$  частицы:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}] = m [\mathbf{r} \mathbf{V}] = m \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = m \frac{[\mathbf{r} d\mathbf{r}]}{dt}. \quad (32.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из центра поля к частице  $A$ ,  $d\mathbf{r}$  — вектор элементарного перемещения частицы за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  (рис. 88). Как известно, модуль векторного произведения численно равен удвоенной площади треугольника, построенного на перемножаемых векторах. Модуль векторного произведения  $[\mathbf{r} d\mathbf{r}]$  равен удвоенной площади  $dS$  треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$ , и приблизительно равен удвоенной площади сектора, который описывает радиус-вектор  $\mathbf{r}$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . Обозначив площадь сектора  $dS$ , найдем с помощью (32.1) модуль  $L$  момента импульса:

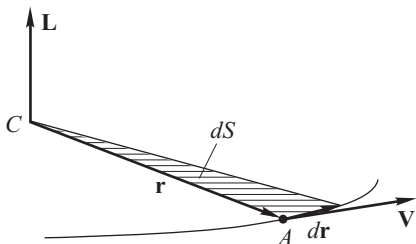


Рис. 88

$$L = m \frac{|[\mathbf{r} d\mathbf{r}]|}{dt} = 2m \frac{dS}{dt}. \quad (32.2)$$

Величина  $dS/dt$  называется *секториальной скоростью*. Численно секториальная скорость равна площади, описываемой за единицу времени радиусом-вектором частицы. Из (32.2):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (32.3)$$

Поскольку при движении в центральном гравитационном поле момент импульса  $\mathbf{L}$  частицы сохраняется, модуль  $L$  момента импульса и, согласно (32.3), секториальная скорость  $dS/dt$  являются постоянными величинами.

Совершая финитное движение в гравитационном поле, частица, вообще говоря, движется по эллиптической орбите, и с течением времени расстояние  $r$  до центра поля (фокуса эллипса) меняется. В силу доказанного постоянства секториальной скорости площади, описываемые радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  частицы за равные промежутки времени, одинаковы.

### § 33. Закон сохранения момента импульса системы частиц

Рассмотрим систему частиц, импульсы которых в некоторой системе отсчета равны  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, i$  — номер частицы. По-

ложения частиц в пространстве задаются радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots$ , проведенными из некоторой неподвижной точки  $O$  (неподвижного начала).

Моментом импульса  $\mathbf{L}$  системы частиц относительно неподвижной точки  $O$  называется векторная сумма моментов импульса  $\mathbf{L}_i$  всех частиц системы относительно той же точки:

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum \mathbf{L}_i, \quad (33.1)$$

суммирование выполняется по всем частицам системы.

Рисунок 89 иллюстрирует, как вычисляется момент импульса системы из двух частиц.

Чтобы найти физическую величину, которая определяет скорость изменения момента импульса системы частиц, продифференцируем обе части равенства (33.1) по времени.

Учтем, что для каждой частицы системы справедливо уравнение моментов  $d\mathbf{L}_i/dt = \mathbf{M}_i$ , где  $\mathbf{M}_i$  — сумма моментов всех сил, приложенных к  $i$ -й частице. Производная момента импульса системы по времени равна:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum \mathbf{M}_i. \quad (33.2)$$

На каждую частицу системы действуют внутренние и внешние силы. Поэтому  $\mathbf{M}_i$  можно представить как сумму моментов внутренних сил  $\mathbf{M}_{i \text{ внутр}}$  и внешних сил  $\mathbf{M}_{i \text{ внешн}}$ :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i \text{ внутр}} + \mathbf{M}_{i \text{ внешн}}. \quad (33.3)$$

Подставим (33.3) в (33.2):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{i \text{ внутр}} + \sum \mathbf{M}_{i \text{ внешн}}. \quad (33.4)$$

Рассмотрим любые две частицы системы, обозначив их цифрами 1 и 2 (рис. 90). По третьему закону Ньютона силы взаимодействия  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  частиц равны по величине и противоположны по направлению:  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ . Вычислим сумму моментов сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_2] = -[\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_2] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_2] = \\ &= [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{F}_2] = 0. \end{aligned} \quad (33.5)$$

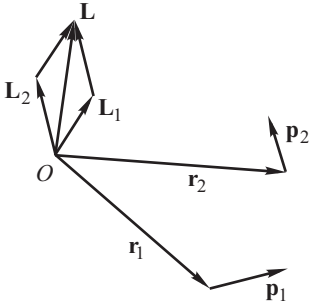


Рис. 89

Здесь  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — проведенные из точки  $O$  радиусы-векторы частиц. Вектор  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  направлен от первой частицы ко второй и коллинеарен силам  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , поэтому векторное произведение  $[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{F}_2]$  равно нулю. Из (33.5) следует, что сумма моментов сил взаимодействия  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  двух частиц системы равна нулю.

Поскольку все внутренние силы — это силы попарного взаимодействия частиц системы друг с другом, и момент сил взаимодействия каждой пары частиц друг с другом, согласно (33.5), равен нулю, то суммарный момент  $\sum \mathbf{M}_{i \text{ внутр}}$  всех внутренних сил, действующих в системе, равен нулю:

$$\sum \mathbf{M}_{i \text{ внутр}} = 0. \quad (33.6)$$

Из (33.4) с учетом (33.6) имеем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = \mathbf{M}_{\text{внешн}},$$

где через  $\sum \mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}$  обозначен суммарный момент всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Итак, получено *уравнение моментов для системы частиц*:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}, \quad (33.7)$$

в соответствии с которым производная по времени момента импульса  $\mathbf{L}$  системы равна сумме моментов всех внешних сил  $\mathbf{M}_{\text{внешн}}$ , действующих на частицы.

Из уравнения моментов (33.7) вытекает *закон сохранения момента импульса системы частиц*: *момент импульса  $\mathbf{L}$  замкнутой системы частиц с течением времени не изменяется (сохраняется)*.

Действительно, если система замкнута, то есть внешние силы отсутствуют, то  $\mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = 0$ ,  $\mathbf{M}_{\text{внешн}} = 0$ ,  $d\mathbf{L}/dt = 0$  и  $\mathbf{L} = \text{const.}$

В некоторых случаях момент импульса системы частиц или его проекция на некоторую ось могут сохраняться, даже если система не является замкнутой. Рассмотрим эти случаи.

1. Если система не замкнута, и моменты внешних сил  $\mathbf{M}_{i \text{ внешн}}$ , вообще говоря, отличны от нуля, но при этом сумма моментов всех внешних сил равна нулю,  $\sum \mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = \mathbf{M}_{\text{внешн}} = 0$ , то как следует из (33.7), момент импульса  $\mathbf{L}$  системы сохраняется:

$$\mathbf{M}_{\text{внешн}} = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \text{const.}$$

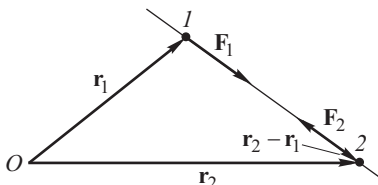


Рис. 90



**Пример.** Летевшая горизонтально со скоростью  $\mathbf{V}_0$  пуля массой  $m$  застряла в небольшом деревянном шарике массой  $M$ .

Шар подвешен на легком вертикальном стержне, который может свободно вращаться вокруг проходящей через точку подвеса  $O$  горизонтальной оси (рис. 91).

Рассмотрим незамкнутую систему тел, включающую пулю и шар со стержнем. На тела системы действуют внешние силы — вертикальные силы тяжести  $m\mathbf{g}$ ,  $M\mathbf{g}$ , сила реакции  $\mathbf{N}$ , возникающая в точке подвеса стержня (величина  $\mathbf{N}$  в момент удара пули может быть очень большой). Если за время удара пули стержень не успевает значительно отклониться от вертикали, моменты всех внешних сил относительно точки  $O$  равны нулю (линии

действия сил проходят через точку  $O$ ). Следовательно, за время соударения момент импульса системы относительно точки  $O$  сохраняется. Приравняв между собой момент импульса пули перед соударением  $[\mathbf{r}, m\mathbf{V}_0]$  и момент импульса шара с застрявшей в нем пулей сразу после соударения  $[\mathbf{r}, (M + m)\mathbf{V}]$ :

$$[\mathbf{r}, m\mathbf{V}_0] = [\mathbf{r}, (M + m)\mathbf{V}],$$

( $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки подвеса  $O$  к шару и пуле в момент соударения,  $\mathbf{V}$  — скорость шара сразу после соударения), можно определить, например, скорость шара после удара пули.

2. Если проекция на некоторую неподвижную ось  $z$  момента всех внешних сил равна нулю,  $M_{\text{внешн } z} = 0$ , то, как следует из уравнения (33.7) в проекции на ось  $z$ , момент импульса  $L_z$  системы относительно оси  $z$  сохраняется:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z = 0, \quad L_z = \text{const.}$$

**Пример.** Подвешенный на нити шарик вращается с постоянной скоростью в горизонтальной плоскости по окружности (рис. 92). Покажем, что проекция на проходящую через точку подвеса  $O$  вертикальную ось  $z$  момента импульса шарика сохраняется в процессе движения.

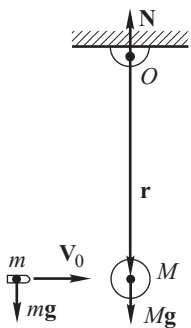


Рис. 91

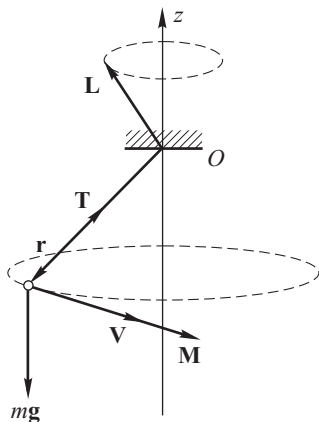


Рис. 92

На шарик действуют сила тяжести  $m\mathbf{g}$  и сила натяжения нити  $\mathbf{T}$ . Линия действия силы  $\mathbf{T}$  проходит через точку  $O$ , поэтому плечо силы и ее момент относительно точки  $O$  равны нулю. Вектор момента силы тяжести,  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}]$ , где  $\mathbf{r}$  — проведенный из точки  $O$  к шарiku вектор, горизонтален, так что момент силы тяжести относительно оси  $z$  равен нулю,  $M_z = 0$ . Согласно (33.8) момент импульса  $L_z$  шарика относительно оси  $z$  должен быть постоянным. На рис. 92 изображен вектор  $\mathbf{L}$  момента импульса шарика относительно точки  $O$ :  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{V}]$ , где  $\mathbf{V}$  — постоянная по модулю скорость шарика. Вектор  $\mathbf{L}$  имеет постоянную длину и вращается в пространстве вместе с шариком вокруг оси  $z$ , описывая поверхность кругового конуса. Проекция на ось  $z$  вектора  $\mathbf{L}$  является постоянной величиной.

3. Момент импульса системы приблизительно сохраняется, если момент  $\mathbf{M}_{\text{внешн}}$  ограниченной по модулю внешней силы действует в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$ , то есть  $\Delta t \approx 0$ . Из уравнения (33.7) при этих условиях следует:

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= \mathbf{M}_{\text{внешн}} dt, \\ \Delta\mathbf{L} &= \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}_{\text{внешн}} dt = \mathbf{M}_{\text{внешн, средн}} \cdot \Delta t \approx 0, \\ \mathbf{L} &\approx \text{const.} \end{aligned}$$

## § 34. Преобразование моментов импульса и силы при изменении неподвижного начала

**Преобразование момента импульса.** Рассмотрим систему частиц, обладающих импульсами  $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{V}_2$ ,

$\dots$ ,  $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{V}_i$ ,  $\dots$ , где  $i$  — номер частицы,  $\mathbf{V}_i$  — скорость  $i$ -й частицы. Выясним, как связаны между собой моменты импульса системы  $\mathbf{L}_O$  и  $\mathbf{L}_{O'}$  относительно двух различных неподвижных точек пространства  $O$  и  $O'$ . Пусть  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}'_i$  — радиусы-векторы, задающие положение в пространстве одной и той же  $i$ -й частицы системы относительно двух произвольных

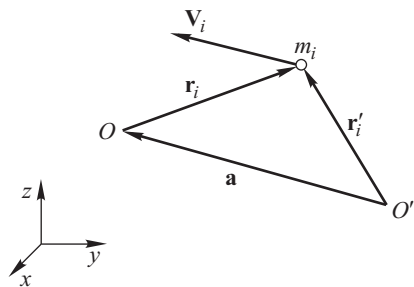


Рис. 93

неподвижных точек  $O$  и  $O'$  (рис. 93). Вектор  $\mathbf{a}$  определяет положение точки  $O$  относительно точки  $O'$ , поэтому:  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$ .

Момент импульса системы относительно точки  $O'$  равен:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{O'} &= \sum [\mathbf{r}'_i, m_i \mathbf{V}_i] = \sum [\mathbf{a} + \mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i] = \\ &= \sum [\mathbf{a}, m_i \mathbf{V}_i] + \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i] = \left[ \mathbf{a}, \sum m_i \mathbf{V}_i \right] + \mathbf{L}_O = [\mathbf{a}, \mathbf{p}] + \mathbf{L}_O,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{V}_i$  — импульс системы частиц,  $\mathbf{L}_O = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i]$  — момент импульса системы частиц относительно точки  $O$ , знак суммы везде предполагает суммирование по всем частицам системы. Получена формула преобразования момента импульса системы при изменении неподвижного начала:

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + [\mathbf{a} \mathbf{p}]. \quad (34.1)$$

Рассмотрим следствия полученной формулы.

**Следствие 1.** Если импульс  $\mathbf{p}$  системы равен нулю, момент импульса не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется.

Из (34.1) при  $\mathbf{p} = 0$  имеем:  $\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{O'}$ . Поскольку при выводе (34.1) точки  $O$  и  $O'$  были выбраны произвольно, из равенства моментов относительно этих двух точек следует, что момент импульса одинаков относительно всех неподвижных точек.

**Следствие 2.** В системе центра масс момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется.

Выше было показано (см. (18.3)), что в системе центра масс импульс системы частиц равен нулю. По следствию 1 момент импульса системы частиц в этом случае не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется.

**Преобразование момента силы.** Суммарный момент всех внутренних сил, действующих на частицы системы, равен нулю (см. (33.6)). Найдем формулу преобразования суммарного момента всех приложенных к частицам системы внешних сил при замене точки, относительно которой момент вычисляется (неподвижного начала). Пусть  $\mathbf{F}_i$  — результирующая внешняя сила, приложенная к  $i$ -й частице;  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}'_i$  — радиусы-векторы, проведенные к  $i$ -й частице из произвольно выбранных неподвижных точек  $O$  и  $O'$ , соответственно;  $\mathbf{a}$  — радиус-вектор точки  $O$  относительно точки  $O'$ ,  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$  (рис. 94).

Суммарный момент всех внешних сил относительно точки  $O'$  равен:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{O'} &= \sum [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{a} + \mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{a} \mathbf{F}_i] + \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = \\ &= \left[ \mathbf{a} \sum \mathbf{F}_i \right] + \mathbf{M}_O = [\mathbf{a} \mathbf{F}] + \mathbf{M}_O,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  — векторная сумма всех внешних сил, действующих на все частицы системы;  $\mathbf{M}_O = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]$  — суммарный момент внешних сил относительно точки  $O$ , суммирование выполняется по всем частицам системы. Формула преобразования момента внешних сил при изменении неподвижного начала имеет вид

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + [\mathbf{a}, \mathbf{F}]. \quad (34.2)$$

Следствие из (34.2): если векторная сумма  $\mathbf{F}$  внешних сил равна нулю, то суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется.

Действительно, если  $\mathbf{F} = 0$ , то из (34.2) имеем:  $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O$ . Поскольку точки  $O$  и  $O'$  были выбраны произвольно, из равенства моментов относительно этих двух точек следует, что суммарный момент внешних сил одинаков относительно всех неподвижных точек.

Если к абсолютно твердому телу приложена пара сил (две равные по величине, но противоположные по направлению силы, линии действия которых параллельны и смещены друг относительно друга), момент пары сил не зависит от выбора точки отсчета.

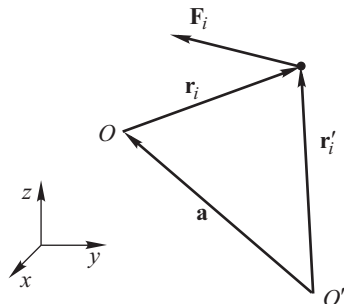


Рис. 94

**Собственный момент импульса системы частиц.** *Собственным моментом импульса* системы частиц называется момент импульса, рассчитанный относительно любой точки, которая неподвижна в системе центра масс. Согласно следствию 2 формулы (34.1), собственный момент импульса не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется (неподвижного начала). В частности, его можно вычислять относительно центра масс системы частиц.

Рассмотрим две системы отсчета — неподвижную с осями координат  $x_1, y_1, z_1$  и систему центра масс с осями  $x, y, z$ ; начало координат — точка  $C$  — совпадает с центром масс системы частиц (рис. 95). Найдем связь между моментом импульса  $\mathbf{L}_O$ , вычисленным в неподвижной системе отсчета относительно некоторой неподвижной точки  $O$  пространства, и собственным моментом импульса  $\mathbf{L}_{\text{соб}}$  системы частиц. В соответствии с определением момента импульса системы:

$$\mathbf{L}_O = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i], \quad (34.3)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный к  $i$ -й частице из неподвижной точки  $O$ ,  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы,  $\mathbf{V}_i$  — скорость  $i$ -й частицы в неподвижной системе отсчета (см. рис. 95).

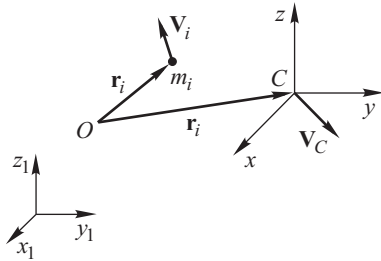


Рис. 95

Выразим скорость  $\mathbf{V}_i$  в неподвижной системе отсчета через скорость центра масс  $\mathbf{V}_C$  и скорость частицы  $\mathbf{V}_{i\text{отн}}$  в системе центра масс (см. закон преобразования скорости при изменении системы отсчета, формула (12.1)):

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{i\text{отн}}. \quad (34.4)$$

Преобразуем (34.3) с учетом (34.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum [\mathbf{r}_i, m_i (\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{i\text{отн}})] = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_C] + \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_{i\text{отн}}] = \\ &= \sum [m_i \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_C] + \mathbf{L}_{\text{соб}} = \left[ \sum m_i \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_C \right] + \mathbf{L}_{\text{соб}} = \\ &= [m \mathbf{r}_C, \mathbf{V}_C] + \mathbf{L}_{\text{соб}} = [\mathbf{r}_C, m \mathbf{V}_C] + \mathbf{L}_{\text{соб}} = [\mathbf{r}_C, \mathbf{p}] + \mathbf{L}_{\text{соб}}. \end{aligned}$$

В ходе преобразований выражения для  $\mathbf{L}_O$  были введены следующие обозначения.

1. Момент импульса  $\mathbf{L}_{\text{соб}}$  системы частиц, вычисленный в системе центра масс относительно точки  $O$  равен

$$\sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_{i\text{отн}}] = \mathbf{L}_{\text{соб}}.$$

Точка  $O$  неподвижна в неподвижной системе отсчета с осями координат  $x_1, y_1, z_1$ , но ее положение непрерывно меняется в системе центра масс с осями координат  $x, y, z$ . Поскольку в системе центра масс момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется, то, несмотря на изменение с течением времени положения точки  $O$ , величина  $\sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_{i\text{отн}}]$  будет оставаться неизменной и представляет собой собственный момент импульса системы частиц.

2. В соответствии с определением центра масс системы частиц имеет место равенство:

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C,$$

где  $m$  — масса всей системы,  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор, который задает положение центра масс относительно точки  $O$ .

3.  $m \mathbf{V}_C = \mathbf{p}$  — импульс системы частиц в неподвижной системе отсчета.

Итак, момент импульса системы частиц относительно произвольной неподвижной точки  $O$  пространства может быть представлен в виде:

$$\mathbf{L}_O = [\mathbf{r}_C \mathbf{p}] + \mathbf{L}_{\text{соб}}, \quad (34.5)$$

где  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к центру масс,  $\mathbf{p}$  — импульс системы,  $\mathbf{L}_{\text{соб}}$  — собственный момент импульса системы.

Рассмотрим пример применения формулы (34.5).

Шарик массы  $m$ , двигавшийся со скоростью  $V_0$ , испытывает упругое лобовое соударение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели (рис. 96 а). Масса каждого шарика гантели равна  $m/2$ , расстояние между ними  $l$ . Пренебрегая размерами шариков, найти угловую скорость гантели после соударения. Действие силы тяжести не учитывать.

После лобового соударения скорость налетающего шарика будет направлена вдоль той же прямой, что и до соударения. Движение гантели после соударения можно рассматривать как совокупность двух видов движения — поступательного вместе с центром масс со скоростью  $\mathbf{V}_C$ , параллельной скорости налетающего шарика, и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости, в которой располагаются все шарик. Обозначим через  $V'_0$  — скорость налетающего шарика после соударения,  $V_C$  — скорость центра масс гантели,  $V_{\text{отн}}$  — скорость каждого шарика гантели в системе центра масс (рис. 96 б).

Рассматриваемая система из трех шариков (налетающий шарик и гантель) является замкнутой, для нее выполняются законы сохранения импульса и момента импульса относительно любой точки пространства. Сохраняется также механическая энергия системы.

Закон сохранения импульса:

$$mV_0 = mV'_0 + mV_C; \quad (34.6)$$

закон сохранения энергии:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_0'^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2} + T_{\text{отн}} = \frac{mV_0'^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2} + 2 \frac{(m/2)V_{\text{отн}}^2}{2}, \quad (34.7)$$

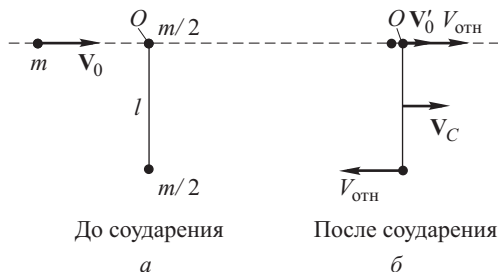


Рис. 96

где сумма  $mV_C^2/2 + T_{\text{отн}} = mV_C^2/2 + mV_{\text{отн}}^2/2$  — представляет собой кинетическую энергию гантели после соударения, которая с помощью теоремы Кенига (см. § 23) выражена в виде суммы кинетической энергии материальной точки массой  $m$ , равной массе гантели, и скоростью  $V_C$  центра масс, и кинетической энергии гантели в системе центра масс.

Для применения закона сохранения момента импульса выберем в качестве неподвижного начала точку  $O$  пространства, в которой произошло соударение двух шариков. Момент импульса налетающего шарика относительно этой точки равен нулю до и после соударения. Момент импульса гантели после соударения, в соответствии с формулой (34.5), можно представить в виде  $\mathbf{L}_O = [\mathbf{r}_C \mathbf{p}] + \mathbf{L}_{\text{соб}}$ , где  $\mathbf{r}_C$  — вектор, проведенный из точки соударения к центру гантели (модуль  $r_C$  равен  $l/2$ ),  $\mathbf{p} = m\mathbf{V}_C$ . Проекция вектора  $\mathbf{L}_O$  на перпендикулярную плоскости рисунка проходящую через точку  $O$  ось  $z$  равна:

$$L_{Oz} = \frac{l}{2} mV_C - 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{m}{2} V_{\text{отн}}. \quad (34.8)$$

Проекция на ось  $z$  момента импульса системы трех шариков до и после соударения одинакова (закон сохранения момента импульса):

$$0 = L_{Oz}.$$

Подставив в это равенство  $L_{Oz}$  из (34.8), получим

$$0 = \frac{l}{2} mV_C - 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{m}{2} V_{\text{отн}}. \quad (34.9)$$

Решая совместно уравнения, выражающие закон сохранения импульса (34.6), закон сохранения энергии (34.7) и закон сохранения момента импульса (34.9), найдем

$$V_{\text{отн}} = V_C = \frac{2}{3} V_0, \\ V_0' = \frac{1}{3} V_0.$$

В системе центра масс шарик гантели после соударения вращается вокруг центра масс, двигаясь по окружности радиуса  $l/2$  со скоростью  $V_{\text{отн}}$ . Отсюда определим угловую скорость  $\omega$  вращения гантели:

$$\omega = \frac{V_{\text{отн}}}{l/2} = \frac{4}{3} \frac{V_0}{l}.$$

## Задачи

**3.1.** Прикрепленное к горизонтальной пружине и лежащее на горизонтальной поверхности небольшое тело массы  $m$  находится в положении равновесия (пружина не деформирована). Справа от него поверхность шероховатая (коэффициент трения между телом и поверхностью  $\mu$ ), а слева — гладкая (рис. 3.1). На какое расстояние  $x_0$  влево от положения равновесия нужно сместить тело, чтобы оно остановилось в положении равновесия после того, как один раз побывает на шероховатой поверхности? Жесткость пружины  $k$ .

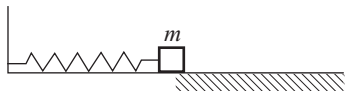


Рис. 3.1

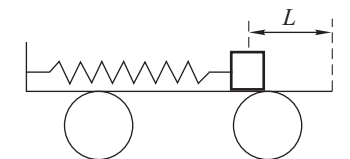


Рис. 3.2

**3.2.** На покоящейся тележке массы  $M$  укреплена пружина жесткости  $k$ , которая находится в сжатом состоянии, соприкасаясь с покоящимся небольшим грузом массы  $m$  (рис. 3.2). Длина сжатой пружины на  $x_0$  меньше ее длины в недеформированном состоянии. Расстояние от груза до правого края тележки  $L$  ( $x_0 < L$ ). Пружину освобождают. Какова скорость  $V$  груза в момент соскальзывания с тележки? Коэффициент трения груза о тележку  $\mu$ . Трением тележки о горизонтальную поверхность пренебречь.

**3.3.** На нити длины  $l$  подвешен груз массы  $m$ . Определить, на какую минимальную высоту  $h$  надо поднять груз  $m$ , чтобы падая он разорвал нить, если минимальный покоящийся груз массы  $M$ , разрывающий нить, растягивает ее перед разрывом на 1 %. Считать, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до ее разрыва.

**3.4.** Склон горки, плавно переходящей в горизонтальную поверхность, представляет собой в сечении одну двенадцатую часть окружности радиуса  $R$  (рис. 3.4). Какую минимальную работу надо затратить, чтобы втащить на горку санки массы  $m$ ? Первоначально санки находятся у подножия горки. Санки тянут за веревку, составляющую постоянный угол  $\alpha$  с направлением касательной к траектории в той точке, где находится груз в процессе подъема. Коэффициент трения скольжения между санками и горкой  $k$ .

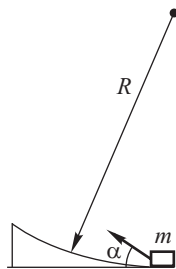


Рис. 3.4



**3.5.** Легкий стержень вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  по инерции вокруг перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину оси. По стержню без трения может двигаться тяжелая муфта массы  $m$ , к которой привязан конец перекинутой через блок нерастяжимой нити (рис. 3.5). Муфту подтягивают за нить так, что расстояние  $r$  от муфты до оси вращения меняется от  $R_0$  до  $R_0/2$ . Определить зависимость угловой скорости  $\omega$  системы и силы натяжения нити  $T$  от расстояния  $r$  между муфтой и осью вращения. Найти работу по подтягиванию муфты.

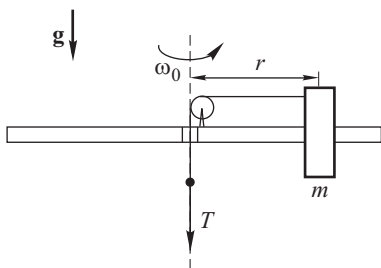


Рис. 3.5

**3.6.** Расположенная горизонтально система из трех одинаковых маленьких шариков, соединенных невесомыми жесткими стержнями длины  $l$ , падает вертикально вниз и упруго ударяется крайним шариком о горизонтальную поверхность массивного выступа (рис. 3.6). Скорость системы в момент удара  $V_0$ . Определить угловую скорость вращения системы сразу после удара.

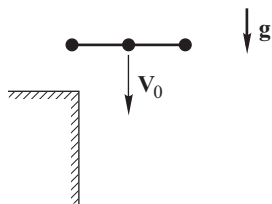


Рис. 3.6

**3.7.** Частица массы  $m_1$  испытала упругое соударение с покоившейся частицей массы  $m_2$ , причем  $m_1 > m_2$ . Найти максимальный угол, на который может отклониться налетающая частица в результате соударения.

**3.8.** Небольшое тело начинает падать на Солнце с расстояния, равного радиусу земной орбиты. Начальная скорость тела в гелиоцентрической системе отсчета равна нулю. Найти, сколько времени будет продолжаться падение.

**3.9.** Планета массы  $m$  движется по эллипсу вокруг Солнца массы  $M$  так, что наименьшее и наибольшее расстояния ее от Солнца равны соответственно  $r_1$  и  $r_2$ . Найти момент импульса  $L$  этой планеты относительно центра Солнца.

## ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для описания движения системы частиц имеются два уравнения — уравнение движения центра масс и уравнение моментов:

$$m \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}.$$

Здесь  $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс,  $\mathbf{L}$  — момент импульса системы,  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  — сумма всех внешних сил,  $\mathbf{M}_{\text{внешн}}$  — сумма моментов всех внешних сил.

Оба уравнения применимы для описания движения твердого тела, которое можно рассматривать как систему частиц, расстояния между которыми неизменны. Решение уравнений в случае произвольного движения твердого тела представляет собой весьма трудную задачу. Мы не будем решать ее в общем виде, а ограничимся лишь частными случаями. Рассмотрим один из видов движения твердого тела — вращение вокруг неподвижной оси.

### § 35. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции

**Связь момента импульса твердого тела с угловой скоростью вращения. Момент инерции.** Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг неподвижной оси  $OO'$ , вдоль которой направим ось  $z$  неподвижной декартовой системы координат (рис. 97). Положительное направление оси  $z$  совпадает с направлением вектора  $\boldsymbol{\omega}$ . Найдем проекцию на ось  $z$  момента импульса тела относительно произвольной точки  $O$  этой оси.

Мысленно разделим все тело на большое число частиц массами  $m_i$ ,  $i$  — номер частицы. Положение частицы в пространстве задается радиусом-вектором  $\mathbf{r}_i$ , проведенным к ней из точки  $O$ . Траекторией движения каждой частицы является окружность с центром на оси вращения, плоскость которой перпендикулярна к этой оси. Обозначим через  $r_{i\perp}$  радиус окружности, по которой движется частица с номером  $i$ ,  $\mathbf{V}_i$  — скорость частицы. По определению момент импульса  $\mathbf{L}_i$  частицы относительно точки

$O$  равен:  $\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i]$ . Момент импульса  $\mathbf{L}$  твердого тела относительно точки  $O$  равен сумме моментов импульса  $\mathbf{L}_i$  всех частиц:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i]. \quad (35.1)$$

Момент импульса  $\mathbf{L}_i$   $i$ -й частицы не направлен, вообще говоря, вдоль оси  $z$ , а составляет с ней некоторый угол  $\theta$  (см. рис. 97). Найдем проекцию на ось  $z$  вектора  $\mathbf{L}_i$ :

$$L_{iz} = L_i \cos \theta = |[\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i]| \cos \theta = r_i m_i V_i \cos \theta, \quad (35.2)$$

где  $L_i = |[\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i]| = r_i m_i V_i$  — модуль вектора  $\mathbf{L}_i$  (векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{V}_i$  перпендикулярны друг другу).

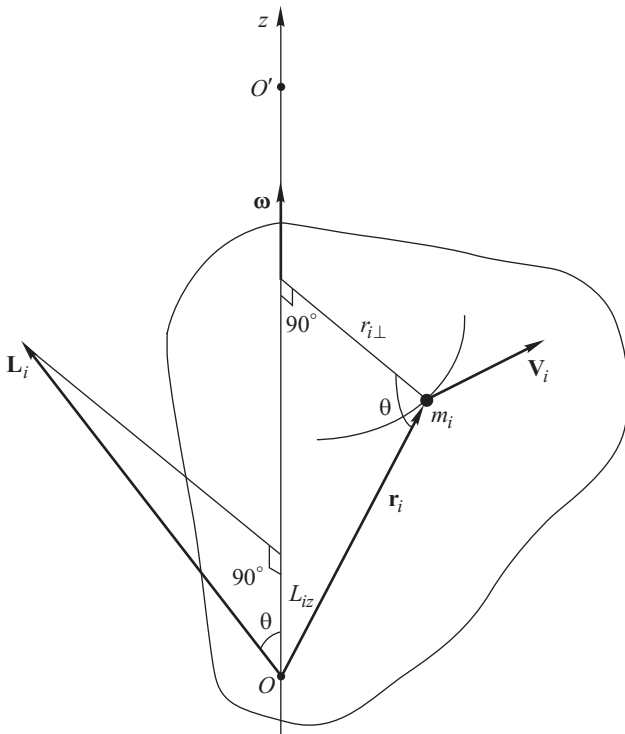


Рис. 97

Угловая скорость движения по окружности всех частиц одинакова и равна модулю  $\omega$  или проекции  $\omega_z$  вектора  $\boldsymbol{\omega}$  угловой скорости тела (в рассматриваемом случае  $\boldsymbol{\omega} = \omega_z$ ). Скорость  $V_i$  частицы можно представить в виде:

$$V_i = \omega_z r_{i\perp}. \quad (35.3)$$

Из геометрических соображений следует (см. рис. 97):

$$r_i \cos \theta = r_{i\perp}. \quad (35.4)$$

Подставим (35.3) и (35.4) в (35.2):

$$L_{iz} = m_i r_{i\perp}^2 \omega_z. \quad (35.5)$$

Проекция  $L_z$  на ось  $z$  момента импульса  $\mathbf{L}$  тела, представленного формулой (35.1), равна сумме проекций  $L_{iz}$  моментов импульса всех частиц, вычисляемых по формуле (35.5):

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i r_{i\perp}^2 \omega_z = \left( \sum m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega_z, \quad (35.6)$$

суммирование выполняется по всем частицам, на которые мысленно разделено тело.

*Моментом инерции* твердого тела относительно оси  $z$  называется величина:

$$I = \sum m_i r_{i\perp}^2, \quad (35.7)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы тела,  $r_{i\perp}$  — расстояние от этой частицы до оси  $z$ , суммирование выполняется по всем частицам, на которые мысленно разделено тело.

Всякое макроскопическое твердое тело представляет собой совокупность бесконечно большого числа частиц. Поэтому сумму в выражении (35.7), строго говоря, следует заменить пределом суммы при  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  — число частиц, или интегралом по объему тела, а момент инерции представить в виде:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 = \int_V r_{\perp}^2 dm = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV, \quad (35.8)$$

где  $r_{\perp}$  — расстояние от элементарной массы  $dm$  до оси  $z$ ,  $\rho$  — плотность тела в данной точке,  $dV$  — элементарный объем ( $dm = \rho dV$ ), интегрирование ведется по объему  $V$  тела (не путать объем  $V$  с какой-либо скоростью).

Момент инерции  $I$  характеризует распределение массы тела по его объему. Из определения следует, что момент инерции — величина *аддитивная*: момент инерции относительно некоторой оси составного тела равен сумме моментов инерции его частей, рассчитываемых относительно той же оси. Примеры вычисления моментов инерции будут даны ниже, а пока приведем их выражения для некоторых тел, плотность которых одинакова по всему объему тела (однородных тел).

Момент инерции однородного цилиндра (диска) массы  $m$  радиуса  $R$  относительно его оси симметрии равен  $\frac{1}{2}mR^2$ . Момент инерции однородного шара массы  $m$  радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через центр шара, равен  $\frac{2}{5}mR^2$ . Момент

инерции однородного тонкого стержня массы  $m$  и длины  $l$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, равен  $\frac{1}{12}ml^2$ . Момент инерции однородного тонкого стержня массы  $m$  и длины  $l$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, равен  $\frac{1}{3}ml^2$ .

С учетом определения (35.7) момента инерции проекция на ось  $z$  момента импульса тела (см. (35.6)) равна:

$$L_z = I\omega_z. \quad (35.9)$$

Согласно формуле (35.9) проекция на ось  $z$  момента импульса тела (или, что то же самое, момент импульса тела относительно оси  $z$ ), обозначаемая через  $L_z$ , пропорциональна проекции  $\omega_z$  на эту ось угловой скорости вращения тела. Коэффициентом пропорциональности служит момент инерции  $I$  тела относительно оси  $z$ .

Поскольку момент инерции  $I$  тела относительно оси  $z$  и проекция угловой скорости  $\omega_z$  на эту ось не зависят от выбора лежащей на оси вращения точки  $O$ , относительно которой рассчитывался момент импульса  $\mathbf{L}$  тела (см. (35.1)), величина  $L_z$  также не зависит от положения точки  $O$  на оси вращения (см. (35.9)).

Связь между вектором момента импульса  $\mathbf{L}$  тела и вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , подобная связи (35.9) для проекций этих векторов, вообще говоря, не существует, то есть  $\mathbf{L} \neq I\boldsymbol{\omega}$ . В общем случае вектор  $\mathbf{L}$  не направлен вдоль оси вращения тела и не коллинеарен вектору  $\boldsymbol{\omega}$ . Однако можно показать, что если тело вращается вокруг своей собственной оси симметрии (рис. 98 а)

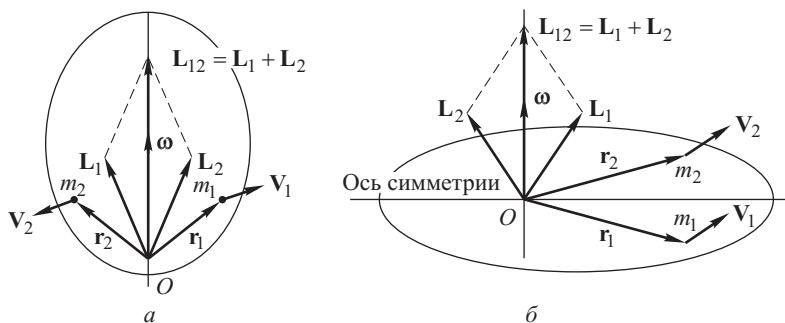


Рис. 98

или вокруг оси, перпендикулярной собственной оси симметрии (рис. 98 б), выполняется соотношение:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad (35.10)$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси, совпадающей с осью вращения.

Рассмотрим первый случай. Моменты импульса  $\mathbf{L}_1 = [\mathbf{r}_1, m_1 \mathbf{V}_1]$  и  $\mathbf{L}_2 = [\mathbf{r}_2, m_2 \mathbf{V}_2]$  любых двух симметрично расположенных частиц с равными массами  $m_1$  и  $m_2$  в сумме дают момент импульса  $\mathbf{L}_{12}$ , направленный вдоль оси вращения тела. Все обладающее осью симметрии тело может быть мысленно разделено на пары симметрично расположенных относительно этой оси частиц одинаковой массы. Момент импульса  $\mathbf{L}$  тела равен сумме моментов импульса всех пар таких частиц. Поскольку момент импульса каждой пары направлен вдоль оси вращения, также направлен и момент импульса тела (рис. 98 а).

Аналогично рассматривается случай вращения тела вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии (рис. 98 б).

**Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.** Твердое тело вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной оси  $OO'$ , совпадающей с осью  $z$  неподвижной декартовой системы координат. Обозначим через  $\mathbf{L}$  момент импульса тела относительно произвольной точки  $O$  оси  $z$ , а через  $\mathbf{M}$  — сумму моментов всех приложенных к телу внешних сил.

Для твердого тела как системы частиц справедливо уравнение моментов:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Запишем его в проекции на ось  $z$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Подставив  $L_z$  из уравнения (35.9), получим *уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*:

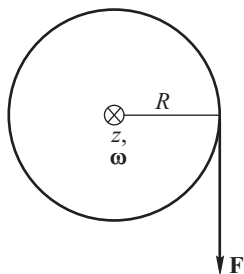
$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \quad \text{или} \quad I \beta_z = M_z \quad (35.11)$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ ;  $\omega_z$  и  $\frac{d\omega_z}{dt} = \beta_z$  — проекции на ось  $z$  угловой скорости и углового ускорения соответственно;  $M_z$  — момент внешних сил относительно оси  $z$ .

**Пример.** Покажем на примере, как уравнение (35.11) применяется при решении задач.

Однородный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $R$  может без трения вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с его осью симметрии. На цилиндр намотана тонкая нерастяжимая невесомая веревка, за которую начинают тянуть с постоянной силой  $F$ . Найдём угловую скорость и угловое ускорение цилиндра (рис. 99).

Направим ось  $z$  вдоль оси вращения и запишем уравнение вращения цилиндра:



$$I\beta_z = M_z,$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega_z}{dt} = R F,$$

где  $I = \frac{1}{2} m R^2$  — момент инерции цилиндра относительно оси  $z$ ,  $\beta_z = d\omega_z/dt$  — проекция на ось  $z$  углового ускорения,  $M_z = R F$  — момент силы  $F$  относительно оси  $z$ .

Угловое ускорение цилиндра равно

$$\beta_z = \frac{2F}{mR}.$$

Рис. 99

Чтобы найти угловую скорость  $\omega_z$ , проинтегрируем уравнение вращения, учитывая, что в начальный момент угловая скорость равна нулю. В результате получим

$$\omega_z = \frac{2Ft}{mR}.$$

### § 36. Кинетическая энергия твердого тела и работа внешних сил

**Кинетическая энергия твердого тела.** Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $OO'$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 100). Разделим мысленно все тело на большое число частиц с массами  $m_i$ , где  $i$  — номер частицы. Траекторией движения каждой частицы является окружность радиуса  $r_{i\perp}$  с центром на оси вращения, лежащая в перпендикулярной к оси вращения плоскости. Скорость  $i$ -й частицы обозначим через  $V_i$ .

Кинетическая энергия  $T$  твердого тела равна сумме кинетических энергий составляющих его частиц:

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}, \quad (36.1)$$

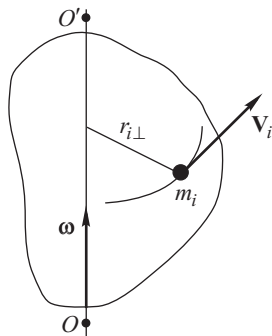


Рис. 100

где суммирование ведется по всем частицам тела.

Линейная  $V_i$  и угловая  $\omega$  скорости частицы связаны соотношением:

$$V_i = \omega r_{i\perp}. \quad (36.2)$$

Подставив (36.2) в (36.1), получим

$$T = \sum \frac{m_i \omega^2 r_{i\perp}^2}{2} = \frac{(\sum m_i r_{i\perp}^2) \omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (36.3)$$

Кинетическая энергия твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, равна

$$T = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (36.4)$$

где  $I = \sum m_i r_{i\perp}^2$  — момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  — угловая скорость.

**Работа внешней силы.** Пусть на вращающееся вокруг неподвижной оси  $z$  твердое тело действует внешняя сила  $\mathbf{F}$ , проекция на ось  $z$  момента  $\mathbf{M}$  которой равна  $M_z$  (рис. 101). Найдем выражение для работы силы, вновь рассматривая твердое тело как систему частиц. По теореме о кинетической энергии элементарная работа  $\delta A$  всех сил, действующих на частицу, равна бесконечно малому приращению  $dT$  кинетической энергии системы:

$$\delta A = dT. \quad (36.5)$$

Суммарная работа всех внутренних сил равна нулю, так что работа  $\delta A$  в (36.5) равна работе  $\delta A_F$  внешней силы  $\mathbf{F}$ :

$$\delta A = \delta A_F. \quad (36.6)$$

Чтобы доказать это, рассмотрим две произвольные частицы, обозначив их цифрами 1 и 2. Силы взаимодействия  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  частиц друг с другом равны по величине и противоположны по направлению в соответствии с третьим законом Ньютона:  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ .

Пусть в процессе движения твердого тела за бесконечно малый промежуток времени частицы 1 и 2 совершили перемещения  $d\mathbf{r}_1$  и  $d\mathbf{r}_2$ . Работа сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  равна:

$$\delta A_{\text{внутр}} = \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2 (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_{21},$$

где  $d\mathbf{r}_{21}$  — перемещение частицы 2 относительно частицы 1. Поскольку расстояния между любыми точками твердого тела не

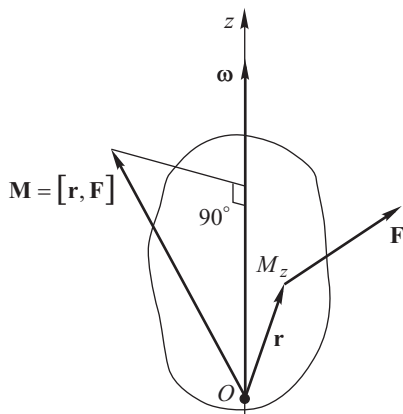


Рис. 101



изменяются,  $d\mathbf{r}_{21} = 0$ . Следовательно, работа сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  равна нулю:

$$\delta A_{\text{внутр}} = 0.$$

Поскольку все внутренние силы — это силы попарного взаимодействия частиц друг с другом, суммарная работа всех внутренних сил равна нулю, тем самым равенство (36.6) доказано.

С учетом равенства нулю работы внутренних сил *теорема о кинетической энергии* в применении к движению твердого тела формулируется так: *работа всех приложенных к телу внешних сил равна приращению его кинетической энергии.*

Из (36.5) и (36.6) получим

$$\delta A_F = dT. \quad (36.7)$$

Найдем  $dT$ , дифференцируя выражение (36.4) для кинетической энергии  $T$  твердого тела:

$$dT = d\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) = I\omega_z d\omega_z. \quad (36.8)$$

Здесь  $I$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ .

Согласно уравнению вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (35.11):

$$Id\omega_z = M_z dt,$$

где  $M_z$  — момент относительно оси  $z$  действующей на тело внешней силы  $\mathbf{F}$ . Тогда из (36.8) получим

$$dT = \omega_z M_z dt = \frac{d\phi}{dt} M_z dt = M_z d\phi, \quad (36.9)$$

где  $\phi$  — угловая координата тела,  $d\phi$  — угол, на который поворачивается тело за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ ,  $\omega_z = d\phi/dt$  — проекция на ось  $z$  угловой скорости.

С учетом (36.7) и (36.9) элементарная работа внешней силы  $\mathbf{F}$  равна:

$$\delta A_F = M_z d\phi.$$

Работу  $A$  силы  $\mathbf{F}$ , совершаемую при повороте тела на конечный угол  $\phi_0$ , найдем интегрированием (36.10):

$$A = \int_0^{\phi_0} M_z d\phi.$$

### § 37. Динамика плоского движения твердого тела

Напомним, что плоским называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются, оставаясь в параллельных друг другу неподвижных плоскостях. Так, тело

цилиндрической формы, скатывающееся с плоской наклонной поверхности, совершает плоское движение (рис. 102). Выше было показано, что плоское движение можно рассматривать как совокупность поступательно-го движения вместе с произвольной точкой тела и вращения вокруг оси, проходящей через эту точку; ось вращения перпендикулярна плоскости движения (см. § 8). В качестве точки, с которой связывают поступательное движение и через которую проходит ось вращения, удобно использовать центр масс тела (точка  $C$ ). В этом случае для описания движения используются два уравнения: уравнение движения центра масс и уравнение вращения тела вокруг оси, проходящей через центр масс (ось  $z$ ).

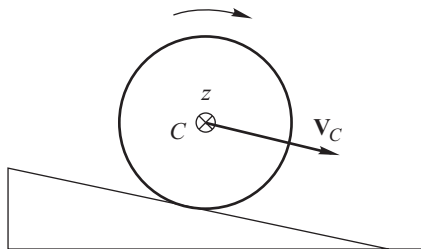


Рис. 102

В соответствии с теоремой о движении центра масс уравнение его движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}, \quad (37.1)$$

где  $m$  — масса тела,  $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс,  $\mathbf{F}$  — сумма всех внешних сил, приложенных к телу.

В системе центра масс выбранная ось вращения  $z$  неподвижна, движение твердого тела — вращение вокруг неподвижной оси. Для его описания можно использовать уравнение (35.11) вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I\beta_z = M_z, \quad (37.2)$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ , которая является осью симметрии тела,  $\beta_z$  — проекция на ось  $z$  углового ускорения,  $M_z$  — проекция на ось  $z$  суммы моментов всех внешних сил (момент сил относительно оси  $z$ ).

**Уравнение моментов и уравнение вращения в системе центра масс твердого тела.** Система центра масс представляет собой движущуюся поступательно систему отсчета, жестко связанную с центром масс тела. Эта система, вообще говоря, неинерциальная. Единственной силой инерции, возникающей во всякой поступательно движущейся системе отсчета, является поступательная сила инерции, пропорциональная ускорению  $\mathbf{a}$  системы (см. § 16). Покажем, что в системе центра масс сум-

марный момент всех поступательных сил инерции относительно центра масс равен нулю.

Рассмотрим в некоторой неподвижной системе отсчета с осями координат  $x_1, y_1, z_1$  произвольное (не обязательно плоское)

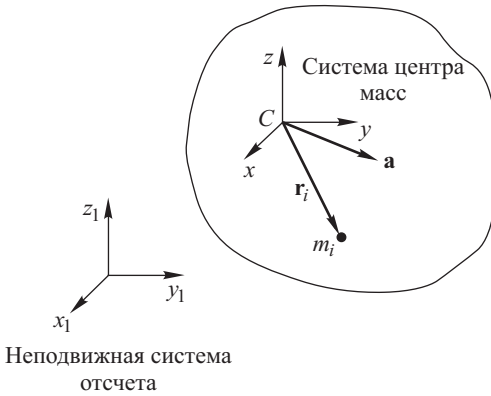


Рис. 103

движение твердого тела (рис. 103). Ускорение центра масс тела — точки  $C$  — равно  $\mathbf{a}$ . В системе центра масс точка  $C$  неподвижна и совпадает с началом системы координат с осями  $x, y, z$ . Мысленно разделим тело на большое число частиц с массами  $m_i$ , положение которых относительно точки  $C$  задается радиусами-векторами  $\mathbf{r}_i$ ,  $i$  — порядковый номер частицы (рис. 103).

В системе центра масс на каждую частицу действует только поступательная сила инерции  $-m_i\mathbf{a}$ . Момент этой силы относительно точки  $C$  равен  $\mathbf{M}_{i\text{ин}} = [\mathbf{r}_i, -m_i\mathbf{a}]$ . Вычислим суммарный момент  $\mathbf{M}_{\text{ин}}$  сил инерции:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{ин}} &= \sum \mathbf{M}_{i\text{ин}} = \sum [\mathbf{r}_i, -m_i\mathbf{a}] = \\ &= - \sum [m_i\mathbf{r}_i, \mathbf{a}] = - \left[ \sum m_i\mathbf{r}_i, \mathbf{a} \right] = - [m\mathbf{r}_C, \mathbf{a}], \quad (37.3) \end{aligned}$$

суммирование выполняется по всем частицам тела. В цепочке преобразований учли, что в соответствии с определением центра масс (см. (18.1)) имеет место равенство:

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_C,$$

в котором  $m_i$  — масса частицы,  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, задающий положение частицы относительно начала системы координат,  $m$  — масса всех частиц (масса тела),  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор, проведенный к центру масс из начала системы координат. Так как в рассматриваемом случае центр масс  $C$  совпадает с началом системы координат, то  $\mathbf{r}_C = 0$ . Отсюда следует, что правая часть (37.3) равна нулю:

$$\mathbf{M}_{\text{ин}} = 0. \quad (37.4)$$

Тем самым показано, что в системе центра масс суммарный момент сил инерции относительно центра масс равен нулю. Это утверждение справедливо не только для твердого тела, но и для любой системы частиц.

Доказанное свойство системы центра масс облегчает использование уравнения моментов. Если уравнение моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{L}$  — момент импульса твердого тела,  $\mathbf{M}$  — суммарный момент всех приложенных к телу сил, записывается в системе центра масс и моменты  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  вычисляются относительно центра масс, в правой части уравнения можно не учитывать момент сил инерции  $\mathbf{M}_{\text{ин}}$ , так как, согласно (37.4), он равен нулю.

Аналогично, если уравнение (35.11) вращения твердого тела вокруг неподвижной оси записано в системе центра масс и ось вращения проходит через центр масс, то в нем можно не учитывать момент сил инерции  $M_{\text{ин}}$ , так как он равен нулю. В частности, это справедливо для уравнения (37.2), которое мы применяем для описания плоского движения тела цилиндрической формы, изображенного на рис. 102.

**Роль силы трения при качении однородных цилиндрических тел.** Сплошной однородный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $r$  скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 104). Коэффициент трения скольжения между поверхностью цилиндра и наклонной плоскостью равен  $k$ . Найдем ускорение  $a$  центра масс — точки  $C$ , угловое ускорение  $\beta$  цилиндра и действующую на него силу трения покоя  $F_{\text{тр}}$  в зависимости от угла  $\alpha$ .

Направим оси  $x_1$  и  $y_1$  неподвижной системы координат вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней. Ось симметрии цилиндра, которая в системе центра масс является неподвижной осью вращения тела, обозначим через  $z$ . На цилиндр действуют сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , сила трения покоя  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  и сила нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$ .

Уравнение (37.1) поступательного движения центра масс в неподвижной системе отсчета имеет вид

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{N},$$

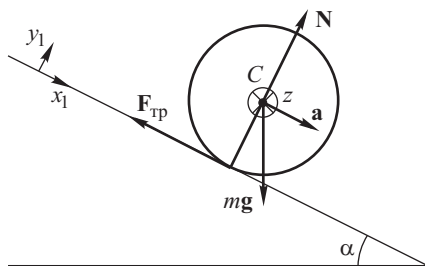


Рис. 104

где  $\mathbf{a} = d\mathbf{V}_C/dt$  — ускорение центра масс. Это векторное уравнение эквивалентно двум скалярным уравнениям в проекциях на оси  $x_1$  и  $y_1$  неподвижной системы координат:

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (37.5)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha. \quad (37.6)$$

Поскольку линии действия силы тяжести  $m\mathbf{g}$  и силы нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$  проходят через ось вращения  $z$ , моменты этих сил относительно оси  $z$  равны нулю. Как показано выше, момент сил инерции относительно оси  $z$  равен нулю. Уравнение (37.2) вращения цилиндра вокруг оси  $z$  в рассматриваемом примере имеет следующий вид:

$$I\beta = M_{\text{тр}}, \quad (37.7)$$

где  $M_{\text{тр}} = rF_{\text{тр}}$  — момент силы трения относительно оси  $z$ ,  $\beta$  — совпадающий с проекцией  $\beta_z$  модуль углового ускорения цилиндра ( $\beta_z = \beta$ ),  $I = \frac{1}{2}mR^2$  — момент инерции цилиндра относительно оси симметрии.

В отсутствие проскальзывания между цилиндром и наклонной плоскостью имеется кинематическая связь между линейным  $a$  и угловым  $\beta$  ускорениями:

$$a = \beta r. \quad (37.8)$$

Решив совместно уравнения (37.5)–(37.8), получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mr^2}, & \beta &= \frac{g \sin \alpha}{r(1 + I/mr^2)}, \\ N &= mg \cos \alpha, & F_{\text{тр}} &= \frac{mg \sin \alpha}{1 + mr^2/I}. \end{aligned} \quad (37.9)$$

При отсутствии проскальзывания между цилиндром и наклонной плоскостью действующая на цилиндр сила трения  $F_{\text{тр}}$ , являясь силой трения покоя, не может превысить величины  $kN$  (см. (15.8)). С помощью этого условия определим значения угла  $\alpha$ , при которых возможно качение без проскальзывания:

$$F_{\text{тр}} \leq kN,$$

$$\begin{aligned} \frac{mg \sin \alpha}{1 + mr^2/I} &\leq kmg \cos \alpha, \\ \text{tg } \alpha &\leq k(1 + mr^2/I). \end{aligned}$$

Как видно из полученного неравенства, скатывание цилиндра без проскальзывания возможно лишь при значениях  $\alpha$ , не превышающих определенной величины, которая зависит от коэффициента трения  $k$  и параметров тела (в частности, момента инерции).

Сила трения покоя приложена к точкам поверхности цилиндра, скорость которых в неподвижной системе отсчета равна нулю, эта сила не совершает работы и не вносит вклад в изменение кинетической энергии тела.

При больших значениях  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha > k(1 + mr^2/I)$ ) сила трения покоя становится недостаточной для обеспечения качения без проскальзывания, и чистое качение становится невозможным. В этих условиях на тело действует сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = kN = kmg \cos \alpha$ , направленная вдоль наклонной плоскости противоположно скорости центра масс цилиндра. Для расчета линейного и углового ускорения цилиндра снова необходимо применить формулы (37.1) и (37.2). Результатами (37.9) пользоваться нельзя.

Если угол наклона  $\alpha$  устремить к нулю, то, как следует из формул (37.9), ускорение центра масс  $a$ , угловое ускорение  $\beta$  и сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$  стремятся к нулю. Это означает, что при отсутствии скольжения однородное цилиндрическое тело катится по горизонтальной плоской поверхности равномерно и прямолинейно, не испытывая силы сопротивления. Очевидно, такое движение может продолжаться бесконечно долго.

**Трение качения.** Вывод о том, что однородное цилиндрическое тело катится по горизонтальной плоской поверхности равномерно и прямолинейно, не испытывая силы сопротивления, относится к идеализированным моделям тел — тело и горизонтальная поверхность считаются абсолютно твердыми. В реальных условиях цилиндрическое тело и поверхность деформируются. На поверхности в месте контакта с телом возникают углубление и небольшой бугорок (рис. 105). Тело соприкасается с поверхностью не в

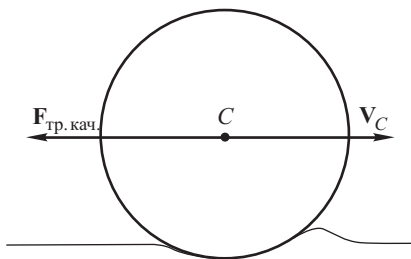


Рис. 105

одной точке, а на участке конечной площади. Возникает сила сопротивления, замедляющая движение. Как отмечалось выше, горизонтальная составляющая этой силы называется *силой трения качения*.

В реальных условиях из-за силы трения качения движение цилиндра по горизонтальной поверхности не может продолжаться бесконечно долго. Кинетическая энергия цилиндра будет израсходована на работу против сил деформации, и в конечном

счете цилиндр остановится. Из опыта известно, что сила трения качения приблизительно на порядок меньше силы трения скольжения, так что при решении многих задач ею можно пренебречь.

## § 38. Гироскопы

*Гироскопом* называется обладающее осью симметрии массивное твердое тело, которое способно вращаться вокруг этой оси с большой угловой скоростью. В дальнейшем ось симметрии гироскопа будем называть *осью гироскопа* или *собственной осью гироскопа*. Примеры гироскопов разнообразны — детская игрушка волчок, маяховики гироскопических компасов, роторы турбин различного назначения и др. Движение гироскопа представляет собой вращение твердого тела вокруг одной неподвижной точки. Рассмотрим поведение гироскопа на примере волчка.

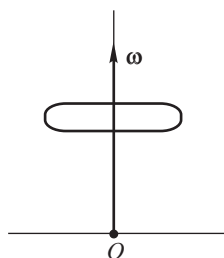


Рис. 106

Из опыта известно, что если ось быстро вращающегося волчка расположена вертикально, вращение может продолжаться довольно продолжительное время (рис. 106).

Если ось отклонить от вертикали, волчок не упадет, а будет совершать так называемое прецессионное движение: его ось опишет поверхность кругового конуса с вершиной в точке опоры  $O$  (рис. 107). *Прецессия* — это сложное движение, которое представляет собой вращение гироскопа вокруг двух пересекающихся осей — вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega$  и вокруг неподвижной вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega'$ . Точка пересечения двух осей является единственной неподвижной точкой гироскопа. В рассматриваемом примере — это точка опоры  $O$  волчка о горизонтальную поверхность. В общем случае прецессионного движения неподвижной может быть любая точка оси гироскопа, в частности, его центр масс.

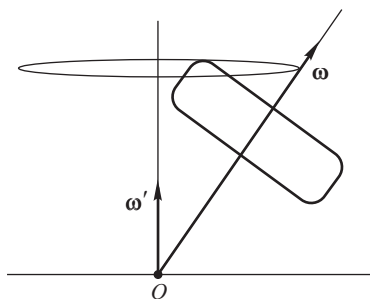


Рис. 107

Угловая скорость  $\omega$  вращения гироскопа вокруг собственной оси называется *угловой скоростью собственного вращения*.

Угловая скорость  $\omega'$ , с которой ось гироскопа вращается вокруг неподвижной оси, называется *угловой скоростью прецессии*. Обычно угловая скорость собственного вращения намного превышает угловую скорость прецессии:  $\omega \gg \omega'$ .

Из опыта известно, что чем больше угловая скорость собственного вращения  $\omega$ , тем меньше угловая скорость прецессии  $\omega'$ .

Наша задача состоит в том, чтобы получить уравнение, с помощью которого можно объяснить особенности движения гироскопа, в частности, прецессию.

Ранее было показано, что момент импульса  $\mathbf{L}$  симметричного тела, которое вращается вокруг неподвижной собственной оси симметрии, направлен вдоль оси вращения и пропорционален угловой скорости  $\omega$  тела (см. формулу (35.10)):

$$\mathbf{L} = I\omega, \quad (38.1)$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси симметрии. В прецессионном движении ось гироскопа (волчка) не является неподвижной — она вращается с угловой скоростью  $\omega'$  вокруг неподвижной вертикальной оси (см. рис. 107). При этом равенство (38.1), строго говоря, не выполняется. В теории гироскопов доказывается, что при выполнении условия  $\omega \gg \omega'$  равенство (38.1) выполняется приближенно, и можно считать, что вектор  $\mathbf{L}$  момента импульса гироскопа направлен вдоль его оси симметрии (*приближенная теория гироскопа*).

В дальнейшем полагаем равенство (38.1) выполненным: вектор  $\mathbf{L}$  момента импульса во время движения гироскопа направлен вдоль его собственной оси. Определив движение вектора  $\mathbf{L}$ , мы найдем, как с течением времени изменяет свое положение в пространстве ось гироскопа.

Зависимость от времени момента импульса  $\mathbf{L}$  твердого тела относительно неподвижной точки описывается уравнением моментов:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (38.2)$$

где  $\mathbf{M}$  — суммарный момент внешних сил. Применим (38.2) в двух случаях: а) собственная ось симметрии вращающегося волчка вертикальна (прецессии нет); б) ось отклонена от вертикали (прецессионное движение).

**Вращение уравновешенного гироскопа.** Если ось вращающегося волчка расположена вертикально, момент внешних сил — силы тяжести  $m\mathbf{g}$  и силы нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$  — относительно точки опоры  $O$  равен нулю,  $\mathbf{M} = 0$  (рис. 108). В этом случае из уравнения (38.2) следует, что вектор  $\mathbf{L}$  момента



импульса с течением времени не изменяется,  $\mathbf{L} = \text{const}$ . Следовательно, ось волчка, вдоль которой направлен вектор  $\mathbf{L}$ , сколько угодно долго будет оставаться в вертикальном положении. Волчок не падает.

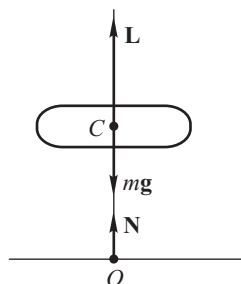


Рис. 108

Если суммарный момент действующих на гироскоп внешних сил относительно его неподвижной точки равен нулю, гироскоп называется *уравновешенным* или *ненагруженным*. В противном случае гироскоп называют нагруженным. Мы показали на примере волчка, что момент импульса  $\mathbf{L}$  ненагруженного гироскопа постоянен, его ось сохраняет свое направление в пространстве, прецессия не возникает.

**Прецессия нагруженного гироскопа.** Если ось вращающегося волчка отклонена от вертикали на некоторый угол (обозначим его буквой  $\theta$ , см. рис. 109), момент силы тяжести  $m\mathbf{g}$  относительно точки опоры  $O$  равен:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}], \quad (38.3)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к центру масс гироскопа,  $m$  — масса гироскопа. Вектор  $\mathbf{M}$  направлен горизонтально и перпендикулярен к вектору  $\mathbf{L}$ . Точка приложения силы реакции опоры  $\mathbf{N}$  является неподвижной точкой волчка, момент силы  $\mathbf{N}$  относительно точки  $O$  равен нулю. Отметим, что сила  $\mathbf{N}$  направлена под некоторым углом к вертикали и имеет две составляющие: горизонтальную (сила трения) и вертикальную (сила нормальной реакции опоры).

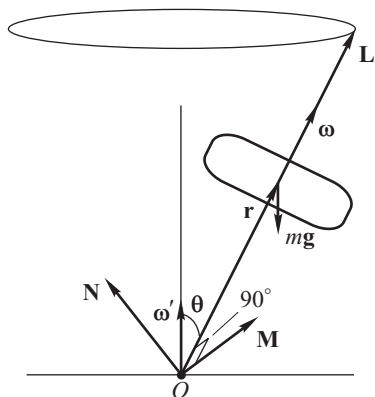


Рис. 109

Воспользуемся уравнением (38.2). Из него следует:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt, \quad (38.4)$$

то есть вектор приращения момента импульса  $d\mathbf{L}$  совпадает по направлению с вектором момента силы  $\mathbf{M}$ . Так как в рассматриваемом примере вектор  $\mathbf{M}$  — момент силы тяжести — горизонтален и перпендикулярен к вектору  $\mathbf{L}$ , вектор  $d\mathbf{L}$  также направлен горизонтально и перпендикулярно к вектору  $\mathbf{L}$  (см. рис. 110). Это означает, что с течением времени будет изменяться только

направление вектора  $\mathbf{L}$  в пространстве, а его длина — оставаться неизменной (аналогично вектор  $\mathbf{V}$  скорости частицы, которая равномерно движется по окружности, меняет свое направление, сохраняя постоянную длину). Конец вектора  $\mathbf{L}$  движется по окружности в горизонтальной плоскости, сам вектор  $\mathbf{L}$ , а с ним и ось гироскопа, описывает поверхность кругового конуса, ось которого вертикальна и проходит через точку опоры волчка (рис. 110).

Записанное в форме (38.4) уравнение моментов позволяет объяснить прецессию нагруженного гироскопа: прецессия возникает благодаря действию момента  $\mathbf{M}$  внешних сил.

Найдем связь между моментом импульса  $\mathbf{L}$  гироскопа, моментом внешней силы  $\mathbf{M}$  и угловой скоростью прецессии  $\boldsymbol{\omega}'$ . Согласно формуле (11.1) производная по времени вектора  $\mathbf{L}$ , длина которого постоянна, а направление в пространстве меняется (вектор вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}'$  вокруг неподвижной вертикальной оси), равна:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}', \mathbf{L}]. \quad (38.5)$$

Приравняв правые части (38.2) и (38.5), получим так называемое *уравнение прецессии нагруженного гироскопа*:

$$[\boldsymbol{\omega}', \mathbf{L}] = \mathbf{M}. \quad (38.6)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}'$  — угловая скорость прецессии,  $\mathbf{L}$  — момент импульса гироскопа,  $\mathbf{M}$  — суммарный момент внешних сил относительно неподвижной точки.

Воспользуемся уравнением (38.6), чтобы найти угловую скорость прецессии волчка. Подставим в это уравнение  $\mathbf{L}$  из (38.1) и  $\mathbf{M}$  из (38.3) и приравняем модули правой и левой частей получившегося уравнения:

$$|[\boldsymbol{\omega}', I\boldsymbol{\omega}]| = |[\mathbf{r}, mg]|,$$

$$\omega' I \omega \sin \theta = r m g \sin \theta.$$

Отсюда угловая скорость прецессии равна

$$\omega' = \frac{m g r}{I \omega}.$$

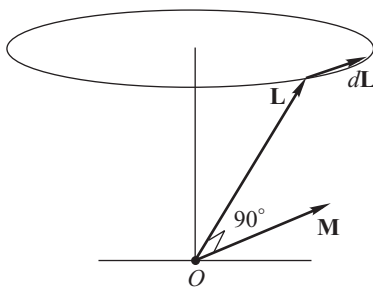


Рис. 110

Из полученного выражения видно, что  $\omega'$  не зависит от угла наклона оси гироскопа к вертикали  $\theta$  и уменьшается с увеличением частоты собственного вращения  $\omega$ .

**Гироскопические силы и моменты сил.** Рассмотрим гироскоп в виде массивного маховика, который вращается с постоянной по модулю большой угловой скоростью  $\omega$  вокруг закрепленной в подшипниках горизонтальной оси (рис. 111). Будем

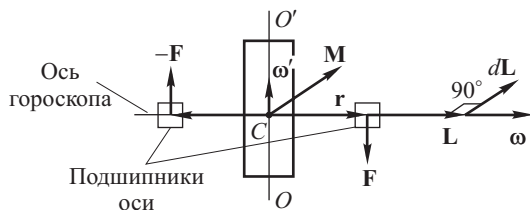


Рис. 111

поворачивать горизонтальную ось гироскопа вокруг проходящей через его центр масс вертикальной оси  $OO'$  с постоянной угловой скоростью  $\omega'$  (такое движение называется *вынужденной прецессией*). Из опыта известно, что со стороны оси гироскопа на подшипники будут действовать силы, момент которых относительно неподвижной точки  $C$  гироскопа — его центра масс — отличен от нуля.

*Гироскопическими* называются силы, возникающие в подшипниках оси гироскопа при ее вынужденном вращении. Момент гироскопических сил, действующий со стороны оси гироскопа на подшипники и удерживающее их устройство (держатель), называют *гироскопическим моментом*.

Объяснить возникновение гироскопических сил и выяснить их направление можно с помощью уравнения моментов (38.2). Пусть угловые скорости собственного вращения  $\omega$  и прецессии  $\omega'$  связаны неравенством  $\omega' \gg \omega$ , так что можно пользоваться приближенной теорией, считая что  $\mathbf{L} = I\omega$  и момент импульса  $\mathbf{L}$  направлен вдоль оси гироскопа. Поскольку  $\omega$  — величина постоянная, модуль вектора  $\mathbf{L}$  также постоянен.

Если ось гироскопа равномерно поворачивать вокруг вертикальной оси  $OO'$ , вектор  $\mathbf{L}$ , имея постоянную длину, будет равномерно вращаться в горизонтальной плоскости. За промежуток времени  $dt$  вектор  $\mathbf{L}$  получит приращение  $d\mathbf{L}$ ; вектор  $d\mathbf{L}$  лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к вектору  $\mathbf{L}$ . Как следует из уравнения моментов (38.2), записанного

в форме  $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$ , векторы  $d\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  сонаправлены. Следовательно вектор  $\mathbf{M}$  момента внешних сил горизонтален и перпендикулярен к  $\mathbf{L}$  и к оси гироскопа (рис. 111). Для возникновения момента  $\mathbf{M}$  указанного направления со стороны подшипников к оси гироскопа должны быть приложены вертикальные равные по величине и противоположные по направлению силы  $\mathbf{F}$  и  $-\mathbf{F}$ . (Отметим, что возникающие в результате вынужденной прецессии вертикальные силы равны по модулю друг другу в силу симметрии рассматриваемой механической системы относительно неподвижной точки  $C$ .) Такие же силы действуют со стороны оси гироскопа на подшипники (гироскопические силы).

Пусть известны угловая скорость собственного вращения гироскопа  $\omega$ , угловая скорость вращения горизонтальной оси  $\omega'$  (скорость вынужденной прецессии), масса  $m$  и момент инерции  $I$  маховика относительно собственной оси симметрии, расстояние  $r$  от центра масс  $C$  гироскопа до точек закрепления его оси в подшипниках. Найдем величину  $F$ .

Воспользуемся уравнением прецессии (38.6):

$$[\omega' \mathbf{L}] = \mathbf{M}.$$

Подставим в него величину  $\mathbf{M} = 2[\mathbf{r} \mathbf{F}]$  — суммарный момент действующих со стороны подшипников на ось гироскопа сил  $\mathbf{F}$  и  $-\mathbf{F}$  (здесь  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный из неподвижной точки  $C$  к точке приложения силы  $\mathbf{F}$ ) и величину  $\mathbf{L} = I\omega$ :

$$[\omega', I\omega] = 2[\mathbf{r}, \mathbf{F}].$$

Векторы  $\omega$  и  $\omega'$ , а также  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  попарно взаимно перпендикулярны; с учетом этого приравняем модули левой и правой частей

$$\omega' I \omega = 2rF.$$

Отсюда найдем  $F$ :

$$F = \frac{I\omega'\omega}{2r}.$$

Гироскопический эффект — появление дополнительного давления в подшипниках, обусловленного гироскопическими силами, и возникновение гироскопических моментов, — распространенное явление в технике. Он наблюдается у роторов турбин на кораблях при поворотах и качке, на винтовых самолетах при выполнении виражей и т.п.

### § 39. Вычисление моментов инерции однородных тел

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси можно вычислять по одной из следующих формул (см. (35.8)):

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV.$$

где  $r_i$  и  $r$  — расстояния от частицы массой  $m_i$  и элементарной массы  $dm$  до оси,  $\rho$  — плотность тела в данной точке,  $dV$  — элементарный объем, суммирование выполняется по всем частицам, на которые мысленно разделено тело, интегрирование ведется по объему  $V$  тела.

#### Момент инерции сплошного однородного диска.

Пусть масса сплошного однородного диска (цилиндра) равна  $m$ ; плотность материала, из которого изготовлен диск, равна  $\rho$ ; радиус —  $R$ ; высота —  $h$  (рис. 112). Вычислим момент инерции диска относительно его оси симметрии. Выделим мысленно из диска тонкое кольцо с внутренним радиусом  $r$  и внешним радиусом  $r + dr$ . Поскольку все части кольца расположены на одинаковом расстоянии  $r$  от оси диска, его момент инерции равен:

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho \cdot 2\pi r h dr = 2\pi \rho h r^3 dr,$$

где масса кольца  $dm$  выражена через плотность материала  $\rho$  и его объем.

Момент инерции диска, равный сумме моментов инерции всех составляющих диск тонких колец, подобных рассмотренному, найдем интегрированием  $dI$  при изменении  $r$  от нуля до  $R$ :

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 = \frac{1}{2} (\rho \pi R^2 h) R^2 = \frac{1}{2} m R^2, \quad (39.1)$$

где  $m = \rho \pi R^2 h$  — масса диска, выраженная через плотность материала  $\rho$  и его объем.

**Момент инерции шара.** Вычислим момент инерции шара массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно проходящей через его центр оси  $z$ . Разделим шар на бесконечно тонкие слои перпендикулярными к оси  $z$  плоскостями. Каждый слой близок по форме к тонкому диску радиуса  $r$  и высотой  $dz$ . Все параметры

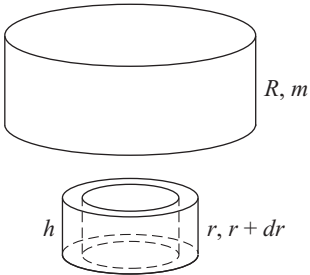


Рис. 112

диска — радиус  $r$ , толщину  $dz$ , массу  $dm$  — можно выразить через угол  $\theta$  между отрицательным направлением оси  $z$  и проведенным к краю диска радиусом шара  $R$  (рис. 113):

$$r = R \sin \theta,$$

$$z = -R \cos \theta,$$

$$dz = R \sin \theta d\theta,$$

$$dm = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi R^3 \sin^3 \theta d\theta,$$

где  $\rho$  — плотность материала шара. Всей совокупности тонких слоев (дисков), на которые разделен шар, соответствует изменение угла  $\theta$  в пределах от нуля до  $\pi$ .

Выразим момент инерции диска радиуса  $r$  и массы  $dm$  через параметры  $\rho$ ,  $R$  и  $\theta$ :

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \sin^5 \theta d\theta.$$

Момент инерции шара найдем интегрированием  $dI$  при изменении параметра интегрирования  $\theta$  в пределах от нуля до  $\pi$ :

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \int_0^\pi \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \sin^5 \theta d\theta = -\frac{1}{2} \rho \pi R^5 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta) = \\ &= \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} \left( \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \right) R^2 = \frac{2}{5} m R^2, \quad (39.2) \end{aligned}$$

где  $m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$  — масса шара, выраженная через его объем.

**Момент инерции тонкого однородного стержня.** Вычислим момент инерции стержня массы  $m$  и длины  $l$  относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню. Толщина стержня много меньше его длины. Рассмотрим два элементарных участка стержня массами  $dm$ , расположенные симметрично на одинаковом расстоянии  $r$  от центра масс  $C$ . Длина каждого участка равна  $dr$ , площадь поперечного сечения стержня равна  $s$  (рис. 114). Момент инерции двух

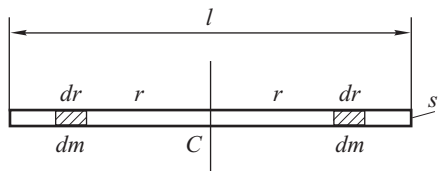


Рис. 114

рассматриваемых участков равен:

$$dI = 2r^2 dm = 2r^2 \rho s dr,$$

где  $\rho$  — плотность материала стержня.

Момент инерции стержня, равный сумме моментов инерции всех пар симметрично расположенных элементарных участков, подобных рассмотренному, найдем интегрированием  $dI$  при изменении расстояния  $r$  в пределах от нуля до  $l/2$ :

$$I = \int dI = \int_0^{l/2} 2\rho s r^2 dr = \frac{1}{12} \rho s l^3 = \frac{1}{12} (\rho s l) l^2 = \frac{1}{12} m l^2, \quad (39.3)$$

где  $m = \rho s l$  — масса стержня, выраженная через плотность материала  $\rho$  и его объем  $s l$ .

Аналогично вычисляется момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Пусть элементарный участок стержня массой  $dm$  и длины  $dr$  расположен на расстоянии  $r$  от оси,  $\rho$  — плотность материала стержня,  $s$  — площадь поперечного сечения. Момент инерции участка

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho s dr.$$

Момент инерции стержня найдем интегрированием  $dI$  при изменении расстояния  $r$  от оси до участка в пределах от нуля до  $l$ :

$$I = \int r^2 dm = \int_0^l r^2 \rho s dr = \frac{1}{3} \rho s l^3 = \frac{1}{3} (\rho s l) l^2 = \frac{1}{3} m l^2. \quad (39.4)$$

**Аддитивность момента инерции.** Момент инерции тела относительно оси обладает свойством *аддитивности*: момент инерции составного тела равен сумме моментов инерции его частей. Проиллюстрируем это свойство на нескольких примерах.

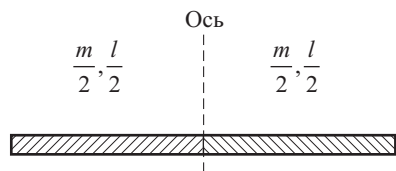


Рис. 115

Момент инерции  $I$  стержня длины  $l$  и массы  $m$  относительно оси, проходящей через центр масс, можно представить как сумму моментов инерции относительно той же оси двух его

частей — одинаковых стержней длины  $l' = l/2$  и массы  $m' = m/2$  каждый (рис. 115). Применив формулу (39.4) для расчета

момента инерции каждой части стержня, найдем  $I$ :

$$I = 2 \cdot \frac{1}{3} m' l'^2 = \frac{2}{3} \frac{m}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m l^2. \quad (39.5)$$

Выражение (39.5) совпадает с формулой (39.3), полученной выше без использования свойства аддитивности момента инерции.

Свойство аддитивности позволяет вычислить момент инерции  $I_{1/2}$  части тела цилиндрической формы, которая образуется при его делении проходящей через ось симметрии плоскостью («полено») (рис. 116). Пусть  $m$  — масса,  $R$  — радиус,  $I = \frac{1}{2} m R^2$  — момент

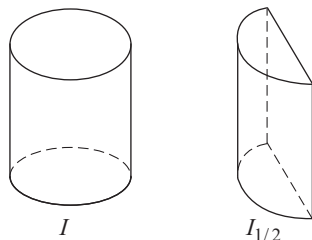


Рис. 116

инерции «нерассеченного» тела. В силу аддитивности момента инерции и симметрии тела величина  $I_{1/2}$  вдвое меньше  $I$ :

$$I_{1/2} = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) = \frac{1}{4} m R^2.$$

#### § 40. Теорема Гюйгенса–Штейнера о параллельном переносе оси момента инерции

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Ось  $z_C$  проходит через центр масс тела, ось  $z$  параллельна  $z_C$  и находится от нее на расстоянии  $a$ ,  $\mathbf{a}$  — перпендикулярный к обеим осям вектор, проведенный от  $z$  к  $z_C$  (рис. 117). Мысленно разделим все тело на частицы массой  $m_i$ , где  $i$  — порядковый номер. К каждой частице проведем от осей  $z_C$  и  $z$  перпендикулярные к этим осям векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}'_i$ . Учтем в дальнейших вычислениях, что  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$ .

В соответствии с определением момент инерции тела относительно оси  $z$  равен:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i \mathbf{r}'_i{}^2 = \sum m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{a})^2 = \sum (m_i \mathbf{r}_i^2 + 2m_i \mathbf{r}_i \mathbf{a} + m_i \mathbf{a}^2) = \\ &= \sum m_i \mathbf{r}_i^2 + 2\mathbf{a} \sum m_i \mathbf{r}_i + \mathbf{a}^2 \sum m_i = I_C + 2\mathbf{a} m \mathbf{r}_C + m \mathbf{a}^2. \end{aligned} \quad (40.1)$$

В этом выражении суммирование ведется по всем частицам, на которые разделено тело;  $I_C = \sum m_i r_i^2$  — момент инерции



тела относительно проходящей через центр масс оси  $z_C$ ;  $m = \sum m_i$  — масса тела. В преобразованиях использовали равенство  $\sum m_i r_i = m r_C$ , где  $r_C$  — перпендикулярный оси  $z_C$  вектор,

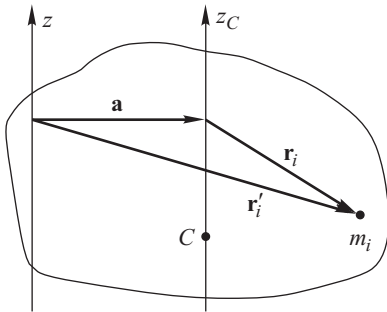


Рис. 117

проведенный от этой оси к центру масс тела — точке  $C$ , это равенство является следствием определения центра масс (см. формулу (18.1)). Поскольку центр масс тела лежит на оси  $z_C$ , то  $r_C = 0$ . С учетом этого из (40.1) получим

$$I = I_C + m a^2. \quad (40.2)$$

Это равенство выражает теорему Гюйгенса–Штейнера о параллельном переносе оси момента инерции: *момент*

*инерции  $I$  тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_C$  относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и величины  $m a^2$ , где  $m$  — масса тела,  $a$  — расстояние между осями.*

Рассмотрим примеры использования доказанной теоремы.

1. Зная момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр масс,  $I_C = \frac{1}{12} m l^2$ , где  $m$  — масса,  $l$  — длина стержня, можно найти момент инерции  $I$  относительно параллельной оси, проходящей через конец стержня. Расстояние между осями в данном случае равно половине длины стержня ( $l/2$ ). Поэтому искомый момент инерции равен

$$I = I_C + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

Результат совпадает с ранее полученным без использования теоремы Гюйгенса–Штейнера (см. (39.4)).

2. Момент инерции шара массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно прямой, которая является касательной к поверхности шара, равен

$$I = I_C + m R^2 = \frac{2}{5} m R^2 + m R^2 = \frac{7}{5} m R^2, \quad (40.3)$$

где  $I_C = \frac{2}{5} m R^2$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр шара.

Момент инерции цилиндра массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно прямой, которая параллельна оси симметрии и касается по-

верхности цилиндра, равен:

$$I = I_C + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \quad (40.4)$$

### § 41. Тензор инерции

**Тензор инерции.** Пусть декартова система координат с осями  $x$ ,  $y$  и  $z$  жестко связана с телом, а начало системы координат — точка  $C$  — совпадает с центром масс тела (рис. 118).

Найдем выражение для момента инерции тела относительно произвольной прямой  $CA$ , направление которой в теле задается единичным вектором  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы между вектором  $\mathbf{s}$  и осями координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты координатных осей.

Момент инерции тела относительно оси  $CA$  равен:

$$I = \int r_{\perp}^2 dm, \quad (41.1)$$

где  $r_{\perp}$  — расстояние от элементарной массы  $dm$  до оси  $CA$ ; интеграл вычисляется по объему тела.

Разложим вектор  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , проведенный к элементарной массе  $dm$  из начала координат, на составляющие  $\mathbf{r}_{\parallel}$  — параллельную оси  $CA$  и  $\mathbf{r}_{\perp}$  — перпендикулярную этой оси:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}.$$

Из прямоугольного треугольника, образованного векторами  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_{\parallel}$  и  $\mathbf{r}_{\perp}$  следует:

$$r_{\perp}^2 = r^2 - r_{\parallel}^2. \quad (41.2)$$

Выразим длину вектора  $\mathbf{r}$  через его декартовы координаты:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (41.3)$$

Величину  $r_{\parallel}^2$  можно представить в виде:

$$r_{\parallel}^2 = (\mathbf{r}\mathbf{s})^2 = (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2. \quad (41.4)$$

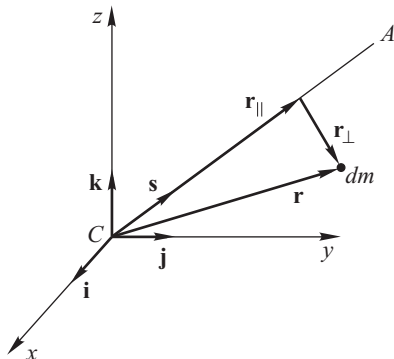


Рис. 118

Подставив (41.3) и (41.4) в (41.2) с учетом тождества:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

получим

$$\begin{aligned} r_{\perp}^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = \\ &= x^2(1 - \cos^2 \alpha) + y^2(1 - \cos^2 \beta) + z^2(1 - \cos^2 \gamma) - \\ &\quad - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma = \\ &= x^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + z^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - \\ &\quad - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma = \\ &= (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha - \\ &\quad - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma. \quad (41.5) \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение для  $r_{\perp}^2$  в (41.1), найдем момент инерции  $I$  тела относительно оси  $CA$ :

$$\begin{aligned} I &= \int r_{\perp}^2 dm = \int (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma dm + \int (x^2 + z^2) \cos^2 \beta dm + \\ &\quad + \int (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha dm + 2 \int (-xy) \cos \alpha \cos \beta dm + \\ &\quad + 2 \int (-xz) \cos \alpha \cos \gamma dm + 2 \int (-yz) \cos \beta \cos \gamma dm = \\ &= I_{zz} \cos^2 \gamma + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{xx} \cos^2 \alpha + \\ &\quad + 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (41.6) \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm, \quad (41.7)$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm, \quad (41.8)$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm, \quad (41.9)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int (-xy) dm, \quad (41.10)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int (-xz) dm, \quad (41.11)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int (-yz) dm. \quad (41.12)$$

(напомним, что интегрирование везде выполняется по объему тела).

*Тензором инерции* тела называется совокупность девяти величин, определяемых формулами (41.7) — (41.12). Если начало

декартовой системы координат, в которой вычисляются величины (41.7) — (41.12), совпадает с центром масс тела, то тензор инерции называется *главным тензором инерции*. Величины  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  представляют собой моменты инерции тела относительно координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно, и называются *осевыми моментами инерции*. Величины  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$ ,  $I_{yz} = I_{zy}$  называются *центробежными моментами инерции*. Тензор инерции может быть представлен в виде симметричной матрицы размером  $3 \times 3$ :

$$T = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Итак, момент инерции тела относительно произвольной оси, направление которой в теле задано углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , можно выразить через компоненты тензора инерции по формуле (см. 41.6)):

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (41.13)$$

**Главные оси тела.** Можно доказать, что для всякого твердого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в центре масс (оси декартовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), для которых недиагональные компоненты тензора инерции (центробежные моменты инерции) обращаются в нуль:

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0. \quad (41.14)$$

Оси жестко связанной с твердым телом декартовой системы координат, пересекающиеся в центре масс, для которых выполняется условие (41.14), называются *главными осями* тела. Главные оси обладают следующим свойством, которое доказывается с помощью уравнения моментов: если тело привести во вращение вокруг главной оси и предоставить самому себе, ось вращения будет сохранять свое положение в пространстве сколь угодно долго в отсутствие воздействия на нее каких-либо сил извне.

Моменты инерции тела, вычисленные относительно главных осей, называются *главными моментами инерции* тела. Если оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  декартовой системы координат являются главными осями тела, то компоненты тензора инерции  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  являются главными моментами инерции, при этом момент инерции тела относительно произвольной оси (см. (41.13)) имеет наиболее простой вид:

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma. \quad (41.15)$$

Методы определения положения главных осей в теле (методы диагонализации тензора инерции) выходят за рамки данного курса. Приведем лишь несколько конкретных примеров.

Главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда представляют собой три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в центре масс и параллельные его ребрам (рис. 119).

Если тело обладает осью симметрии (например, имеет цилиндрическую форму), одной из главных осей тела является его

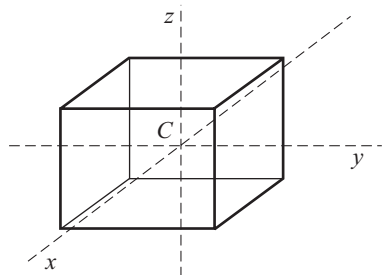


Рис. 119

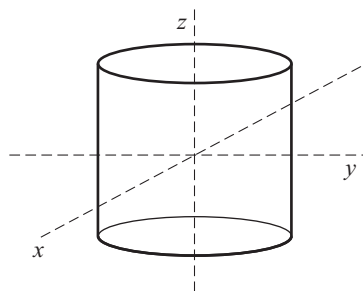


Рис. 120

осью симметрии. Всякая прямая, к ней перпендикулярная, также является главной осью (рис. 120).

Для шара любая ось, проходящая через его центр, будет главной осью.

### Связь момента импульса и угловой скорости тела.

Допустим, твердое тело вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг некоторой неподвижной оси  $CA$ , проходящей через точку  $C$  — начало жестко связанной с телом декартовой системы координат  $Cxyz$ . Найдем момент импульса  $\mathbf{L}$  тела относительно начала координат. Мысленно разделив тело на большое (в пределе — бесконечно большое) число частиц массой  $m_i$ ,  $i$  — порядковый номер частицы, представим момент импульса тела как момент импульса системы частиц, заменив суммирование по всем частицам интегрированием по объему тела:

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i] = \int [\mathbf{r} \mathbf{V}] dm. \quad (41.16)$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный из начала системы координат к частице с массой  $m_i$ ,  $\mathbf{V}_i$  — скорость частицы,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из начала системы координат к элементу тела массой  $dm$ ,  $\mathbf{V}$  — скорость этого элемента. Подставим

в (41.16) выражение для скорости произвольной точки вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела  $\mathbf{V} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$  (см. (5.2)) и воспользуемся формулой двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{r} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] = r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) \mathbf{r}.$$

Тогда получим:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \int r^2 dm - \int (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) \mathbf{r} dm. \quad (41.17)$$

В декартовой системе координат, жестко связанной с телом, векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}$  выразим через орты  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  координатных осей:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \quad (41.18)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (41.19)$$

и с помощью (41.18) и (41.19) преобразуем комбинации, которые входят в формулу (41.17):

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (41.20)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) \mathbf{r} = (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) x \mathbf{i} + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) y \mathbf{j} + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) z \mathbf{k}. \quad (41.21)$$

Подставим (41.20) и (41.21) в (41.17) и раскроем скобки. Сгруппировав все слагаемые, которые содержат в качестве общего множителя вектор  $\mathbf{i}$ , найдем проекцию на ось  $x$  момента импульса  $\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \int (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) x dm = \\ &= \omega_x \int (y^2 + z^2) dm + \omega_y \int (-yx) dm + \omega_z \int (-zx) dm = \\ &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \end{aligned} \quad (41.22)$$

Аналогично, все слагаемые в (41.17), содержащие в качестве общего множителя вектор  $\mathbf{j}$ , определяют проекцию вектора  $\mathbf{L}$  на ось  $y$ :

$$\begin{aligned} L_y &= \omega_y \int (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) y dm = \\ &= \omega_x \int (-xy) dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm + \omega_z \int (-yz) dm = \\ &= I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \end{aligned} \quad (41.23)$$

Аналогично, все слагаемые в (41.17), содержащие в качестве общего множителя вектор  $\mathbf{k}$ , определяют проекцию вектора  $\mathbf{L}$  на ось  $z$ :

$$\begin{aligned} L_z &= \omega_z \int (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) z dm = \\ &= \omega_x \int (-xz) dm + \omega_y \int (-yz) dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm = \\ &= I_{xz} \omega_x + I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (41.24)$$

Здесь  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  — осевые,  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$ ,  $I_{yz} = I_{zy}$  — центробежные моменты инерции твердого тела (компоненты тензора инерции).

Из (41.22)–(41.24) видно, что компоненты  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  вектора момента импульса тела являются линейными однородными функциями компонент  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  вектора угловой скорости. Связь между моментом импульса  $\mathbf{L}$  тела и его угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  можно записать в компактном виде:

$$L = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} = T \boldsymbol{\omega}, \quad (41.25)$$

где  $T$  — матрица тензора инерции. тела

Формулы (41.22)–(41.24) и (41.25) подразумевают, что в общем случае вращения твердого тела вокруг произвольной оси направления векторов  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  не совпадают.

Если оси декартовой системы координат являются главными осями тела, центробежные моменты инерции равны нулю ( $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ ), и формулы (41.22)–(41.24) упрощаются:

$$L_x = I_{xx} \omega_x, \quad L_y = I_{yy} \omega_y, \quad L_z = I_{zz} \omega_z. \quad (41.26)$$

Пусть тело вращается вокруг одной из главных осей, например, вокруг оси  $x$ . Тогда вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  сонаправлен с осью  $x$ ,  $\omega_y = \omega_z = 0$ , и из (41.26) следует:

$$L_x = I_{xx} \omega_x = I_{xx} \omega, \quad L_y = L_z = 0. \quad (41.27)$$

Связь (41.27) между  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{L} = I_{xx} \boldsymbol{\omega}. \quad (41.28)$$

Выражение (41.28) показывает, что если твердое тело вращается вокруг одной из своих главных осей, направления векторов момента импульса  $\mathbf{L}$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  тела совпадают (ср. со свойством гироскопа, выраженным равенством (38.1)).

## Задачи

**4.1.** Однородный цилиндр массы  $M$  и радиуса  $R$  вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза весом  $P$ , прикрепленного к намотанный на цилиндр легкой нити (рис. 4.1). Найти зависимость от времени угла  $\varphi$  поворота цилиндра, если при  $t = 0$   $\varphi = 0$ .

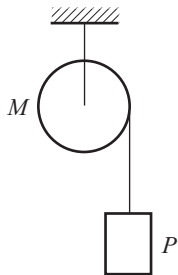


Рис. 4.1

**4.2.** К концу веревки, намотанной на цилиндр и переброшенной через блок, привязан груз массы  $M$  (рис. 4.2). Найти значения коэффициента трения  $k$ , при которых качение цилиндра по горизонтальной поверхности будет происходить без скольжения и со скольжением. Определить ускорение груза в этих условиях. Массой веревки, блока и трением в оси блока пренебречь.

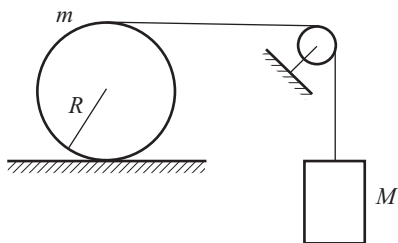


Рис. 4.2

**4.3.** На покоящемся однородном горизонтальном диске массы  $M$  и радиуса  $R$  находится человек массы  $m$ . Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по окружности радиуса  $r$ , concentric disk, со скоростью  $V$  относительно диска. С какой угловой скоростью  $\omega$  будет вращаться диск?

**4.4.** Тонкий обруч радиуса  $r$  скатился без скольжения

на горизонтальную плоскую поверхность с горки высоты  $nr$  (рис. 4.4). Пренебрегая потерями на трение, найти скорости и

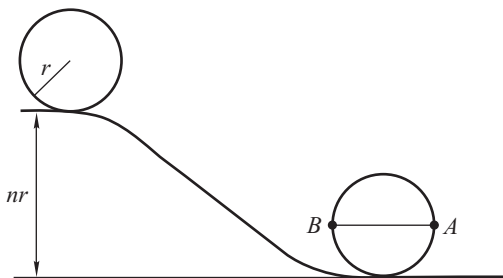


Рис. 4.4



ускорения точек  $A$  и  $B$  — концов горизонтального диаметра обруча.

**4.5.** Вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$  сплошной однородный цилиндр массы  $m_1$  поставили боковой поверхностью на длинную доску массы  $m_2$ , лежащую на гладкой горизонтальной плоской поверхности. В начальный момент времени скорость оси цилиндра и скорость доски равны нулю. Пренебрегая трением качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение.

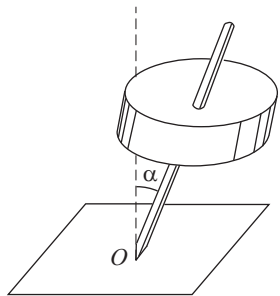


Рис. 4.6

**4.6.** Симметричный волчок массы  $m$ , ось симметрии которого наклонена под углом  $\alpha$  к вертикали, совершает прецессию под действием силы тяжести. Расстояние между неподвижной точкой опоры  $O$  волчка и его центром масс равно  $a$ . Определить, под каким углом  $\beta$  к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на горизонтальную плоскость опоры. Момент инерции волчка относительно собственной оси симметрии равен  $I$ .

## МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### § 42. Гармонические колебания. Колебания тела под действием упругой силы

Физические процессы, которые характеризуются той или иной степенью повторяемости, называются *колебательными процессами*.

В зависимости от природы повторяющегося процесса различают механические, электрические, электромагнитные колебания и т.д. Качания маятника часов, движение струны музыкального инструмента, изменение напряжения на обкладках конденсатора в электрической цепи — все это примеры колебательных процессов. Колебательные процессы лежат в самой основе различных отраслей техники, например, радиоэлектроники, оптики, вычислительной техники и т.д.

Колебания широко распространены, но не всегда они приносят пользу. Так, колебания моста, возникающие из-за толчков колес передвигающихся по нему автомобилей, вибрация корпуса корабля, вызванная вращением гребного винта, или вибрация крыльев самолета, связанная с работой двигателей и взаимодействием с воздушным потоком могут привести к разрушительным последствиям. В подобных случаях задача состоит в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или воспрепятствовать тому, чтобы колебания достигли опасных размеров.

**Кинематика и динамика гармонических колебаний.** Простейшим типом колебательного движения являются гармонические колебания — движение, при котором колеблющаяся величина (например, угол отклонения нити маятника от вертикали или координата прикрепленного к пружине груза) изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.

*Гармоническим колебательным движением (гармоническим колебанием)* называется движение, при котором координата тела (материальной точки) изменяется по закону:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (42.1)$$

где  $A$ ,  $\omega_0$  и  $\alpha$  — постоянные величины.

Здесь  $A$  — амплитуда колебания,  $\omega_0$  — циклическая частота,  $\omega_0 t + \alpha$  — фаза колебания,  $\alpha$  — начальная фаза. Единица циклической частоты — обратная секунда ( $\text{с}^{-1}$ ).

Поскольку наибольшее значение косинуса равно единице, в (42.1) наибольшее по модулю значение координаты  $x$  тела равно  $A$ . Отсюда и название  $A$  — амплитуда колебания. Амплитуда представляет собой величину наибольшего отклонения тела от положения равновесия. По определению амплитуда  $A$  положительна.

В момент времени  $t = 0$  координата тела равна:

$$x_0 = A \cos \alpha.$$

Следовательно, начальная фаза  $\alpha$  определяет положение тела в начальный момент времени.

Гармоническая функция (42.1) является периодической с периодом  $T$ , равным:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Величина  $T$  называется *периодом колебания*.

*Частотой* колебания  $\nu$  называется число колебаний в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

где  $T$  — период колебания. Единица частоты — герц (Гц); 1 герц — это частота колебания, период которого равен 1 с.

При гармонических колебаниях скорость тела (в проекции на ось  $x$ ) равна:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (42.2)$$

При изучении колебаний, имея дело, как правило, с одномерным движением, проекции на направление движения скорости, ускорения и силы ( $V_x$ ,  $a_x$ ,  $F_x$ ) будем называть скоростью, ускорением, силой.

Колебания скорости происходят по гармоническому закону и опережают по фазе колебания координаты на  $\pi/2$ . Амплитуда скорости равна  $A\omega_0$ .

При гармонических колебаниях ускорение тела (в проекции на ось  $x$ ) равно:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (42.3)$$

Колебания ускорения опережают по фазе колебания координаты тела на  $\pi$ , амплитуда ускорения равна  $A\omega_0^2$ . Ускорение  $a_x$

может быть выражено через координату  $x$  тела:

$$a_x = -\omega_0^2 x. \quad (42.4)$$

Силу, действующую на тело при гармонических колебаниях, можно определить по второму закону Ньютона через ускорение (42.4):

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x. \quad (42.5)$$

Как видно из (42.5), для того чтобы тело совершало гармонические колебания, действующая на него сила  $F_x$  должна быть пропорциональна величине смещения  $x$  и направлена в сторону, противоположную смещению. Примером подобной силы служит упругая сила пружины, которая пропорциональна величине деформации  $x$  и направлена так, что пружина стремится принять нормальную длину:

$$F_x = -\kappa x,$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины.

Из (42.5) следует, что уравнение движения тела, совершающего гармонические колебания, имеет вид

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x, \\ ma_x &= -m\omega_0^2 x. \end{aligned}$$

Будем обозначать производную по времени точкой над дифференцируемой величиной, вторую производную — двумя точками. Тогда ускорение тела  $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$ , и уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (42.6)$$

Уравнение (42.6) называется *уравнением гармонических колебаний*. Мы показали, что если тело совершает гармонические колебания, закон движения тела (42.1) является решением уравнения (42.6). В теории линейных дифференциальных уравнений доказывается, что это решение является общим и других решений уравнения гармонических колебаний не существует.

**Геометрическая интерпретация колебательного движения.** Пусть геометрическая точка  $M$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  по окружности радиуса  $A$  с центром в точке  $O$  (рис. 121). Ось  $x$  совпадает с одним из диаметров окружности;  $x = 0$  в точке  $O$ . Положение точки  $M$  на плоскости в любой момент времени задается радиусом-вектором  $\mathbf{A}$ , проведенным к ней из точки  $O$ . Точка  $N$  — проекция на ось  $x$  точки  $M$  — будет совершать гармонические колебания между двумя

крайними положениями, координаты которых равны  $-A$  и  $A$ . Действительно, зависимость от времени координаты  $x$  точки  $N$  описывается функцией:

$$x_N = A \cos \varphi = A \cos (\omega_0 t + \alpha), \quad (42.7)$$

где  $\varphi = (\omega_0 t + \alpha)$  — угол, который составляет к моменту времени  $t$  радиус-вектор  $\mathbf{A}$  с осью  $x$ ; при  $t = 0$   $\varphi = \alpha$ .

Из (42.7) следует, что движение точки  $N$  вдоль оси  $x$  имеет характер гармонического колебания. При этом длина радиуса-

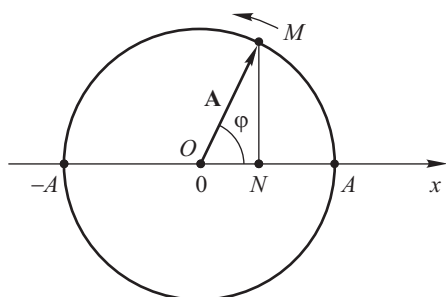


Рис. 121

вектора  $\mathbf{A}$  равна амплитуде колебания, угловая скорость  $\omega_0$  его вращения — циклической частоте колебания, угол  $\varphi = (\omega_0 t + \alpha)$  между радиусом-вектором  $\mathbf{A}$  и осью  $x$  в момент времени  $t$  представляет собой фазу колебания, в начальный момент времени  $t = 0$  угол  $\varphi$  равен начальной фазе  $\alpha$ . Таким образом, всякое гармоническое колеба-

ние имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Его можно представить с помощью вращающегося на плоскости радиуса-вектора.

**Гармонические колебания под действием упругой силы.** Рассмотрим спиральную пружину, один конец которой закреплен неподвижно, а к другому прикреплено тело (материальная точка) массы  $m$ , которое может двигаться в горизонтальном направлении вдоль оси пружины, не испытывая действия силы трения или сопротивления среды (рис. 122). Составим уравнение движения тела вдоль оси  $x$ , совпадающей с осью пружины. Если за начало отсчета координаты  $x$  принять положение системы, в котором пружина не деформирована (положение равновесия), то, согласно закону Гука, проекция на ось  $x$  силы упругости  $F_x$ , возникающей при смещении тела на величину  $x$ , равна:

$$F_{\text{упр } x} = -\kappa x,$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины (см. формулу (15.4), в которой по-

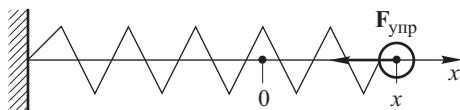


Рис. 122

ложили  $x_0 = 0$ ). Напомним, что закон Гука выполняется, если величина деформации пружины не слишком велика.

Уравнение движения тела в проекции на ось  $x$ :

$$ma_x = F_{\text{упр}} x,$$

$$m\ddot{x} = -\kappa x.$$

Это уравнение можно привести к виду

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m} x = 0. \quad (42.8)$$

Сравнивая (42.8) с уравнением гармонических колебаний (42.6), приходим к выводу, что движение тела под действием упругой силы представляет собой гармоническое колебание с циклической частотой  $\omega_0$ , зависящей от жесткости пружины и массы тела:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (42.9)$$

Частота  $\omega_0$  называется *собственной частотой* механической системы, в данном случае — тела, движущегося под действием упругой силы пружины

Решение уравнения (42.8):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (42.10)$$

Гармоническая функция (42.10) представляет собой закон движения тела — зависимость координаты  $x$  от времени.

Зависимость скорости тела от времени получим дифференцированием (42.10):

$$V_x = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (42.11)$$

Амплитуда колебания  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  могут быть определены, если заданы начальные условия движения, то есть в начальный момент времени  $t = 0$  известны координата  $x_0$  тела и его скорость  $V_0$ . Записав начальные условия в виде системы уравнений:

$$x_0 = A \cos \alpha,$$

$$V_0 = -A\omega_0 \sin \alpha,$$

найдем  $A$  и  $\text{tg } \alpha$ :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}},$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{V_0}{\omega_0 x_0}.$$

**Энергия гармонических колебаний.** В данной главе, посвященной колебаниям, потенциальную и кинетическую энергию тела будем обозначать соответственно через  $E_{\text{п}}$  и  $E_{\text{к}}$ , поскольку буквой  $T$  здесь обозначен период. Зависимость от времени потенциальной энергии  $E_{\text{п}}$  тела, совершающего гармонические колебания под действием упругой силы, найдем, воспользовавшись формулой потенциальной энергии растянутой (сжатой) пружины и законом движения (42.10):

$$E_{\text{п}} = \frac{\kappa x^2}{2} = \frac{\kappa A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{\kappa A^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha)]. \quad (42.12)$$

Кинетическая энергия  $E_{\text{к}}$  тела, совершающего гармонические колебания, с учетом формулы (42.11) скорости тела, равна:

$$E_{\text{к}} = \frac{mV_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\alpha)]. \quad (42.13)$$

Из (42.12) и (42.13) видно, что потенциальная и кинетическая энергия изменяются с течением времени по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$ , вдвое превышающей собственную частоту системы.

Наибольшее возможное значение потенциальной энергии:

$$E_{\text{п макс}} = \frac{\kappa A^2}{2}. \quad (42.14)$$

Наибольшее возможное значение кинетической энергии:

$$E_{\text{к макс}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (42.15)$$

С учетом выражения (42.9) для  $\omega_0$  видно, что  $E_{\text{п макс}}$  и  $E_{\text{к макс}}$  равны между собой:

$$E_{\text{к макс}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{mA^2 \left(\sqrt{\kappa/m}\right)^2}{2} = \frac{\kappa A^2}{2} = E_{\text{п макс}}. \quad (42.16)$$

Колебания величин  $E_{\text{п}}$  и  $E_{\text{к}}$  происходят около средних за период значений, обозначаемых через  $\langle E_{\text{п}} \rangle$  и  $\langle E_{\text{к}} \rangle$  (см. (42.12), (42.13)):

$$\langle E_{\text{п}} \rangle = \frac{\kappa A^2}{4}, \quad (42.17)$$

$$\langle E_{\text{к}} \rangle = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}. \quad (42.18)$$

Средние за период колебания значения потенциальной и кинетической энергии равны между собой:

$$\langle E_{\text{к}} \rangle = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} = \frac{mA^2 \left(\sqrt{\kappa/m}\right)^2}{4} = \frac{\kappa A^2}{4} = \langle E_{\text{п}} \rangle. \quad (42.19)$$

Вычислим с помощью (42.12), (42.13) и с учетом выражения (42.9) для  $\omega_0$  полную механическую энергию  $E$  тела, совершающего гармонические колебания под действием упругой силы:

$$\begin{aligned} E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} &= \frac{\kappa A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= \frac{\kappa A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{mA^2 \left(\sqrt{\kappa/m}\right)^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{\kappa A^2}{2}. \end{aligned} \quad (42.20)$$

Полная механическая энергия  $E$  тела, совершающего гармонические колебания, равна

$$E = \frac{\kappa A^2}{2} = \text{const}, \quad (42.21)$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины,  $A$  — амплитуда колебания.

Энергия  $E$  — постоянная величина. Этот результат предсказуем, поскольку упругая сила, под действием которой движется тело, является консервативной, следовательно, выполняется закон сохранения энергии — полная механическая энергия тела сохраняется.

При постоянной величине полной энергии  $E$  происходит непрерывное превращение потенциальной энергии  $E_{\text{п}}$  в кинетическую  $E_{\text{к}}$  и обратно в соответствии с (42.12) и (42.13).

Как следует из сравнения (42.21) с формулами (42.14)–(42.16), полная механическая энергия тела  $E$  при гармонических колебаниях равна наибольшему возможному значению потенциальной энергии и наибольшему возможному значению кинетической энергии:

$$E = E_{\text{п макс}} = E_{\text{к макс}}. \quad (42.22)$$

Из сравнения (42.21) с (42.17)–(42.19) видно, что средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергии равны половине полной механической энергии тела:

$$\langle E_{\text{п}} \rangle = \langle E_{\text{к}} \rangle = \frac{1}{2} E. \quad (42.23)$$



### § 43. Колебания математического и физического маятников. Теорема Гюйгенса о центре качания

**Колебания математического маятника.** Под *математическим маятником* понимают подвешенное на невесомой нерастяжимой нити тело (материальную точку), способное под действием приложенных к нему сил совершать колебания около положения равновесия. Обычно маятник совершает колебания под действием силы тяжести. В положении равновесия нить вертикальна (рис. 123). Реальное тело можно считать математическим маятником, если его размеры малы по сравнению с длиной подвеса (нити), масса велика по сравнению с массой нити, и нить можно считать практически нерастяжимой. Движение маятника в процессе колебания — вращение материальной точки вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса.

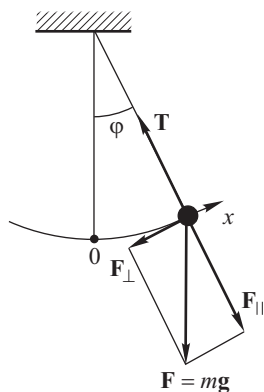


Рис. 123

Выведем маятник, масса которого  $m$  и длина нити  $l$ , из положения равновесия, отклонив нить от вертикали на некоторый малый угол  $\varphi$ , и затем отпустим ее (рис. 123). На тело действуют силы тяжести  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  и натяжения нити  $\mathbf{T}$ . Разложим силу тяжести на две составляющие:  $\mathbf{F}_{||}$  — направленную вдоль

нити и  $\mathbf{F}_{\perp}$  — перпендикулярную к нити. Составляющая  $\mathbf{F}_{||}$  вместе с силой натяжения  $\mathbf{T}$  вызывает изменение направления скорости тела и определяет величину центростремительного ускорения. Составляющая  $\mathbf{F}_{\perp}$  приводит к изменению модуля скорости тела и определяет его тангенциальное ускорение. Пусть  $x$  — измеренное вдоль траектории движения смещение тела из положения равновесия. Иначе говоря,  $x$  — это дуговая координата, начало отсчета которой соответствует положению равновесия тела. Проекция силы тяжести  $\mathbf{F}$  на направление касательной к траектории движения тела в рассматриваемом случае малых колебаний равна:

$$F_{\perp} = -mg \sin \varphi \approx -mg \frac{x}{l}. \quad (43.1)$$

Здесь мы воспользовались приближенным равенством  $\sin \varphi \approx \frac{x}{l}$  для малого угла  $\varphi$ , см. рис. 123.

Запишем уравнение движения тела (второй закон Ньютона) в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{T},$$

где  $\mathbf{a}$  — ускорение тела.

Проекция этого уравнения на направление касательной к траектории:

$$m\ddot{x} = F_{\perp} = -mg\frac{x}{l}.$$

Приведем это уравнение к виду уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \quad (43.2)$$

Из сопоставления уравнений (43.2) и (42.6) следует, что движение математического маятника представляет собой гармоническое колебание. Зависимость от времени координаты  $x$  колеблющегося тела описывается выражением (42.1). Циклическая частота  $\omega_0$  равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (43.3)$$

Период колебания математического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (43.4)$$

Циклическая частота и период колебания зависят только от длины подвеса  $l$  и величины ускорения свободного падения  $g$ .

**Колебания физического маятника.** Твердое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси и способное совершать колебания около положения равновесия под действием силы тяжести, называется *физическим маятником*. Движение физического маятника представляет собой вращение твердого тела вокруг неподвижной горизонтальной оси, которую будем называть осью подвеса и обозначать буквой  $z$  (рис. 124). Точку  $O$  на оси  $z$ , расположенную в плоскости движения центра масс  $C$  тела, назовем *точкой подвеса маятника*. Обозначим буквой  $a$  расстояние между центром масс  $C$  и точкой  $O$  (осью  $z$ ). Положение тела в пространстве задается углом  $\varphi$  откло-

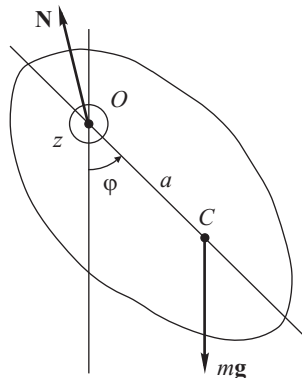


Рис. 124

нения прямой  $OC$  от вертикали. Рассмотрим малые колебания физического маятника (угол  $\varphi$  мал).

Выведем тело из положения равновесия, отклонив его на малый угол  $\varphi$ , и предоставим самому себе. Пусть трение отсутствует. Дальнейшее движение описывается уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (см. (35.11)):

$$I\beta_z = M_z,$$

где  $\beta_z = \ddot{\varphi}$  — проекция на ось  $z$  углового ускорения тела,  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения,  $M_z$  — момент всех внешних сил относительно оси  $z$ . Внешних сил две: сила тяжести  $mg$  и сила реакции  $\mathbf{N}$ , действующая на маятник в точке подвеса. Момент силы  $\mathbf{N}$  относительно оси  $z$  равен нулю, поскольку равно нулю плечо силы. Величина  $M_z$  в уравнении вращения равна моменту силы тяжести:

$$M_z = -mga \sin \varphi \approx -mga\varphi. \quad (43.5)$$

(Воспользовались приближенным равенством  $\sin \varphi \approx \varphi$  для малого угла  $\varphi$ .)

Подставив  $M_z$ , преобразуем уравнение вращения к виду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \varphi = 0. \quad (43.6)$$

Уравнение (43.6) по форме совпадает с уравнением (42.6). Следовательно, рассматриваемое движение тела представляет собой гармоническое колебание. Угловая координата  $\varphi$  зависит от времени по следующему закону (ср. с (42.1)):

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Здесь амплитуда колебания  $A$  — это угол наибольшего отклонения прямой  $OC$  от вертикали.

Циклическая частота  $\omega_0$  равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}. \quad (43.7)$$

Период колебания физического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}, \quad (43.8)$$

Период зависит от величины  $I$  момента инерции тела относительно оси вращения, массы  $m$  тела, расстояния  $a$  между точкой подвеса и центром масс, а также от величины ускорения свободного падения  $g$ .

**Приведенная длина.** По определению, *приведенная длина* физического маятника  $l_{\text{пр}}$  равна длине такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

В соответствии с определением, если известна приведенная длина  $l_{\text{пр}}$  физического маятника, период его колебаний рассчитывается по формуле:

$$T_{\text{физ}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}. \quad (43.9)$$

В этом случае не требуются какие-либо другие, помимо  $l_{\text{пр}}$ , параметры маятника — момент инерции  $I$ , масса  $m$ , расстояние  $a$  от точки подвеса до центра масс. Знание приведенной длины  $l_{\text{пр}}$  равносильно возможности вычислить период колебания физического маятника.

Выражение для приведенной длины  $l_{\text{пр}}$  найдем, приравняв периоды колебания физического (43.8) и математического (43.4) маятников:

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}.$$

Отсюда следует:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \quad (43.10)$$

Выразим в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера (см. (40.2)) момент инерции  $I$  маятника относительно оси вращения, проходящего через точку подвеса, через момент инерции  $I_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс:

$$I = I_C + ma^2.$$

Подставив  $I$  в (43.10), получим

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{I_C}{ma}. \quad (43.11)$$

Из (43.11) видно, что приведенная длина, и, следовательно, период колебания физического маятника, зависят только от расстояния  $a$  между точкой подвеса и центром масс. Следовательно, геометрическое место точек в плоскости движения центра масс  $C$ , расположенных на одинаковом расстоянии  $a$  от точки  $C$ , то есть окружность радиуса  $a$  с центром в точке  $C$ , представляет собой множество точек подвеса, для которых период колебания физического маятника одинаков.

На рис. 125 показан построенный в соответствии с (43.11) график зависимости  $l_{\text{пр}}$  от  $a$ . Из графика видно, что фиксированному значению  $l_{\text{пр}}$  соответствуют, вообще говоря, два раз-

личных значения  $a$ . Действительно, равенство (43.11) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно  $a$ :

$$a^2 - l_{\text{пр}}a + \frac{I_C}{m} = 0. \quad (43.12)$$

Это уравнение, вообще говоря, имеет два корня:

$$a_{1,2} = \frac{l_{\text{пр}}}{2} \pm \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}^2}{4} - \frac{I_C}{m}}. \quad (43.13)$$

Физический смысл существования двух различных корней  $a_1$  и  $a_2$  квадратного уравнения (43.12) состоит в том, что для двух точек подвеса, расположенных на разных расстояниях  $a_1$  и  $a_2$  от центра масс  $C$ , приведенная длина физического маятника имеет одинаковое значение. Одинаковыми являются и периоды колебания маятников, подвешенных за эти точки.

Существует минимальная величина периода колебания твердого тела, которое служит физическим маятником. Заметим, что когда дискриминант квадратного уравнения (43.12) обращается

в нуль и его корни совпадают друг с другом, приведенная длина и период колебания маятника принимают наименьшее возможное значение (см. рис. 125). Из условия равенства нулю дискриминанта найдем наименьшую приведенную длину  $l_{\text{пр мин}}$ :

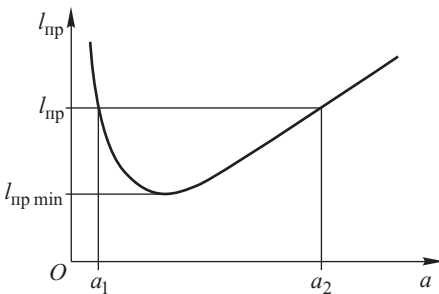


Рис. 125

$$l_{\text{пр мин}} = 2\sqrt{\frac{I_C}{m}}.$$

С помощью (43.9) определим наименьший возможный период колебания  $T_{\text{мин}}$ :

$$T_{\text{мин}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр мин}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{I_C}{m}}.$$

Период колебания равен  $T_{\text{мин}}$ , когда расстояние  $a$  от центра масс до оси подвеса, согласно (43.13), равно:

$$a_{T_{\text{мин}}} = a_{1,2} = \frac{l_{\text{пр мин}}}{2} = \sqrt{\frac{I_C}{m}}.$$

Если точку подвеса приближать или удалять от центра масс  $C$  (то есть, уменьшать или увеличивать расстояние  $a$  по срав-

нению с  $a_{T_{\min}}$ ), период колебания маятника будет возрастать по сравнению с  $T_{\min}$ .

**Теорема Гюйгенса о центре качания.** На проходящей через точку подвеса  $O$  и центр масс  $C$  физического маятника прямой  $OC$  отложим в направлении от  $O$  к  $C$  отрезок  $OO'$  длины  $l_{\text{пр}}$ . Поскольку  $l_{\text{пр}} = a + \frac{I_C}{ma} > a$ , точки  $O$  и  $O'$  окажутся по разные стороны от центра масс (рис. 126). Точки  $O$  и  $O'$  называются сопряженными.

Центром качания физического маятника называется точка  $O'$ , расположенная на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от точки подвеса  $O$  на прямой, соединяющей точку  $O$  и центр масс  $C$ .

Представим себе, что маятник подвешивается за ось, проходящую через центр качания — точку  $O'$ . Приведенная длина полученного таким образом нового маятника будет равна:

$$l'_{\text{пр}} = a' + \frac{I_C}{ma'}, \quad (43.14)$$

Рис. 126

где  $a'$  — расстояние от точки  $O'$  до центра масс  $C$ .

Заметим, что по построению:

$$a' = l_{\text{пр}} - a = a + \frac{I_C}{ma} - a = \frac{I_C}{ma}. \quad (43.15)$$

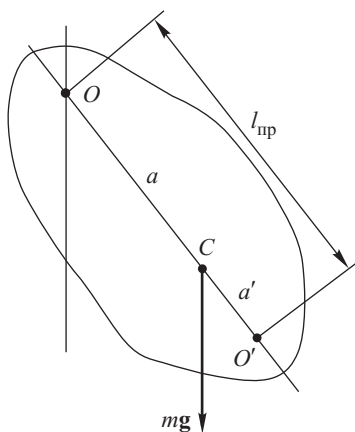
Подставив (43.15) в (43.14), получим

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_C}{ma} + \frac{I_C}{mI_C/ma} = \frac{I_C}{ma} + a = l_{\text{пр}}. \quad (43.16)$$

Из (43.16) видно, что приведенные длины  $l_{\text{пр}}$  и  $l'_{\text{пр}}$  маятников, подвешенных за проходящие через точки  $O$  и  $O'$  параллельные оси, одинаковы. Следовательно, одинаковыми являются и периоды колебаний этих маятников.

Мы доказали *теорему Гюйгенса о центре качания: приведенные длины и периоды колебаний маятников, подвешенных на параллельных осях, расположенных на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  друг от друга, одинаковы.*

**Оборотный маятник.** Свойство сопряженных точек подвеса физического маятника, расположенных на расстоянии при-



веденной длины, используется для точных измерений ускорения свободного падения с помощью *оборотного маятника*. Обратный маятник состоит из стального стержня, на котором жестко

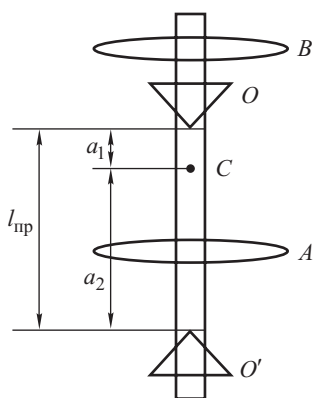


Рис. 127

закреплены опорные призмы  $O$  и  $O'$  и стальная чечевица  $A$ , расположенная между ними (рис. 127). Другая стальная чечевица  $B$  находится на одном из концов стержня (не между призмами), она может перемещаться по стержню и закрепляться в нужном положении. Перемещением этой чечевицы достигают совпадения периодов колебаний маятника, когда точками подвеса являются ребра опорных призм  $O$  и  $O'$ . При совпадении периодов колебаний расстояние между точками подвеса равно приведенной длине  $l_{\text{пр}}$  физического маятника при условии, что центр масс  $C$  рас-

положен между призмами, а расстояния  $a_1$  и  $a_2$  от центра масс до точек подвеса не равны друг другу (см. рис. 127). Измерив  $l_{\text{пр}}$  и соответствующий этому расстоянию период колебаний  $T$ , можно вычислить ускорение свободного падения  $g$  по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}}}{T^2},$$

которая следует из (43.9).

## § 44. Затухающие колебания

В предыдущих параграфах рассмотрены гармонические колебания механических систем. Понятие механических колебаний является широким и включает в себя, наряду с гармоническими колебаниями, другие виды колебательного движения. *Колебательным* называется такое движение, которое многократно повторяется или приблизительно повторяется через определенные промежутки времени. *Периодом колебаний* называется минимальный промежуток времени, через который движение механической системы повторяется. *Амплитуда колебания* — это величина наибольшего отклонения механической системы от положения равновесия.

*Свободными* называются колебания, которые механическая система совершает около положения устойчивого равновесия (см. § 30) после того, как она была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе.

Свободные колебания в отсутствие трения (сопротивления среды) являются гармоническими. Примерами свободных гармонических колебаний служат рассмотренные выше малые колебания тела под действием упругой силы пружины, колебания математического и физического маятников в поле силы тяжести, совершаемые в отсутствие трения и сопротивления среды. Как уже упоминалось при изучении гармонических колебаний, частота свободных колебаний в отсутствие сил трения и сопротивления среды называется *собственной частотой* механической системы.

*Затухающими* называются свободные колебания механической системы при наличии сил трения или сопротивления среды.

Колебания называются *малыми*, если возникающая при отклонении тела от положения равновесия сила, которая стремится вернуть тело в положение равновесия и называется *восстанавливающей*, пропорциональна величине отклонения. При колебаниях связанного с пружиной тела упругая сила  $F_x = -\kappa x$  пропорциональна смещению  $x$  тела из положения равновесия. На математический маятник во время движения действует пропорциональная смещению  $x$  тела из положения равновесия восстанавливающая сила, в качестве которой выступает проекция силы тяжести  $F_{\perp} = -(mg/l)x$  (см. (43.1)). Момент восстанавливающей силы (силы тяжести) физического маятника  $M_z = -mga\varphi$  пропорционален углу  $\varphi$  отклонения маятника от равновесного положения (см. (43.5)). Таким образом, все рассматриваемые колебания являются малыми.

Перейдем к собственно затухающим колебаниям. Во всякой реальной колебательной системе имеются силы трения и сопротивления среды, в которой движется тело. Действие этих сил приводит к уменьшению механической энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания затухают. При этом механическая энергия будет переходить в теплоту. Уравнение затухающих колебаний получим на примере тела (материальной точки), колеблющегося в вязкой среде под действием упругой силы пружины (рис. 128).

Выведем тело из положения равновесия, растянув или сжав пружину, по-

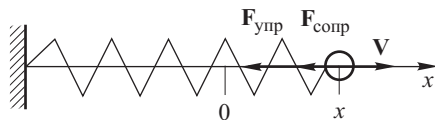


Рис. 128

сле чего предоставим механическую систему самой себе. В процессе дальнейшего движения на тело действует сила упругости



пружины и сила сопротивления среды, которая в простейшем случае пропорциональна модулю скорости тела и направлена противоположно скорости:

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -b\mathbf{V},$$

где  $b$  — коэффициент сопротивления среды. Уравнение движения тела в проекции на ось  $x$ , параллельную оси пружины, имеет вид

$$m\ddot{x} = F_{\text{упр } x} + F_{\text{сопр } x},$$

$$m\ddot{x} = -\kappa x - b\dot{x},$$

где  $F_{\text{сопр } x} = -b\dot{x}$  — проекции на ось  $x$  силы сопротивления,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  — скорость и ускорение тела соответственно. Уравнение движения можно преобразовать к виду

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x = 0,$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (44.1)$$

где введены обозначения  $\beta = b/2m$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$  — собственная частота системы. Уравнение (44.1) называется *уравнением затухающих колебаний*.

Используя методы решения дифференциальных уравнений можно показать, что в зависимости от соотношения между величинами  $\beta$  и  $\omega_0$  существуют три типа решений уравнения (44.1). Рассмотрим эти случаи.

**Затухающие колебания.** Если  $\beta < \omega_0$ , решение уравнения (44.1) имеет вид

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (44.2)$$

где

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (44.3)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (44.4)$$

Функция  $A(t)$ , заданная выражением (44.3), называется *амплитудой затухающих колебаний*, числовой коэффициент  $A_0$  — *начальной амплитудой*. В отличие от гармонических колебаний, амплитуда затухающих колебаний зависит от времени — уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону.

Выражение (44.4) определяет *циклическую частоту затухающих колебаний*  $\omega$ , которая не совпадает с циклической частотой  $\omega_0$  гармонических колебаний (собственной частотой механической системы).

Несмотря на то, что функция (44.2) не является периодической, вводится понятие *периода затухающих колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (44.5)$$

График зависимости (44.2) координаты тела от времени при затухающих колебаниях представлен на рис. 129. На рис. 130 для сравнения представлен график зависимости от времени координаты тела, совершающего гармонические колебания.

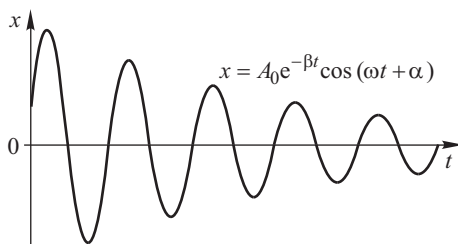


Рис. 129

Скорость тела при затухающих колебаниях равна

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x} &= A_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= A_0 e^{-\beta t} \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right] = \\ &= A_0 e^{-\beta t} \omega_0 [\cos \varphi \cos(\omega t + \alpha) - \sin \varphi \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= A_0 e^{-\beta t} \omega_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi), \end{aligned}$$

где введен вспомогательный угол  $\varphi$ , для которого  $\cos \varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega}{\beta}$ . Поскольку  $\cos \varphi < 0$ ,

а  $\sin \varphi > 0$ , значение  $\varphi$  заключено в пределах от  $\pi/2$  до  $\pi$ . Следовательно, при наличии затухания скорость тела  $V_x$  опережает по фазе смещение  $x$  более чем на  $\pi/2$  (при гармонических колебаниях опережение составляет ровно  $\pi/2$ ).

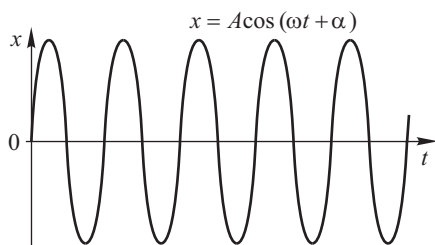


Рис. 130

### Слабое затухание.

Зависимость (44.3) амплитуды затухающих колебаний от времени можно получить путем строгого решения дифференциального уравнения (44.1).

Покажем, как можно приближенно определить вид функции  $A(t)$ , используя физические соображения.

Рассмотрим случай *слабого затухания*. Будем считать, что среда оказывает слабое сопротивление движению тела, так что потеря энергии тела за период колебания  $T$  мала:

$$\frac{|\Delta E_T|}{E} \ll 1. \quad (44.6)$$

Здесь  $E$  — полная механическая энергия тела;  $\Delta E_T$  — приращение энергии тела за период  $T$ ,  $\Delta E_T = E(t+T) - E(t) < 0$ ;  $|\Delta E_T|$  — величина энергии, которую тело теряет за период колебания  $T$ .

Ниже покажем, что *условие слабого затухания* (44.6) эквивалентно следующему соотношению между коэффициентом затухания  $\beta$  и собственной частотой системы  $\omega_0$ :

$$\beta \ll \omega_0. \quad (44.7)$$

Если затухание слабое, то движение тела можно приблизительно рассматривать как гармоническое колебание  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ . Отличия затухающих колебаний от гармонического движения состоит в том, что из-за потерь механической энергии амплитуда  $A$  не является постоянной величиной. Будем искать решение уравнения затухающих колебаний (44.1) в виде

$$x = A(t) \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $A(t)$  — зависящая от времени амплитуда.

В рассматриваемом примере на движущееся в вязкой среде тело действуют две силы: консервативная сила упругости пружины и сила сопротивления среды, которая приводит к превращению механической энергии в теплоту (диссипации энергии). Согласно закону изменения энергии (см. § 28) работа силы сопротивления (сторонней силы) равна приращению полной механической энергии тела. Применим этот закон к элементарной работе  $\delta A_{\text{сопр}}$  силы сопротивления и элементарному приращению  $dE$  полной механической энергии тела:

$$\begin{aligned} dE = \delta A_{\text{сопр}} &= \mathbf{F}_{\text{сопр}} d\mathbf{r} = -b\mathbf{V}d\mathbf{r} = -b\mathbf{V} \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \\ &= -b\mathbf{V}^2 dt = -\frac{2b}{m} \frac{m\mathbf{V}^2}{2} dt = -\frac{2b}{m} E_{\text{к}} dt. \end{aligned}$$

В процессе преобразований скорость тела  $\mathbf{V}$  была представлена в виде производной по времени радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  тела ( $\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt$ ) и введена кинетическая энергия  $E_{\text{к}} = m\mathbf{V}^2/2$ . Из полученного выражения найдем производную по времени полной механической энергии тела и выразим ее через коэффициент затухания  $\beta$ :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2b}{m} E_{\text{к}} = -4\beta E_{\text{к}}. \quad (44.8)$$

В условиях слабого затухания, когда энергия системы изменяется медленно и потеря энергии  $|\Delta E_T|$  за один период колебания является малой величиной, производную  $dE/dt$  можно приближенно заменить отношением конечного приращения энергии  $\Delta E_T$  к промежутку времени  $T$ , в течение которого это приращение произошло:

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\Delta E_T}{T}, \quad (44.9)$$

где  $T$  — период колебаний.

С другой стороны, отношение  $\frac{\Delta E_T}{T}$  представляет собой среднее за период колебания  $T$  значение производной  $dE/dt$ :

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dE}{dt} dt = \frac{E(t+T) - E(t)}{T} = \frac{\Delta E_T}{T}. \quad (44.10)$$

Из (44.9) и (44.10) получим

$$\frac{dE}{dt} \approx \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle. \quad (44.11)$$

Здесь и ниже угловые скобки означают усреднение соответствующей величины за время  $T$  периода колебаний. Равенство (44.11) подразумевает, что благодаря слабому затуханию производная по времени полной механической энергии равна своему среднему за период колебания значению.

Усредним по времени обе части уравнения (44.8):

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -4\beta \langle E_{\kappa} \rangle,$$

где  $\langle E_{\kappa} \rangle$  — среднее за период  $T$  значение кинетической энергии тела.

Заменим левую часть полученного уравнения на  $dE/dt$  в соответствии с (44.11), а в правую подставим  $\langle E_{\kappa} \rangle = \frac{1}{2}E$ , поскольку благодаря слабому затуханию колебания являются почти гармоническими, и в этих условиях среднее за период значение кинетической энергии  $\langle E_{\kappa} \rangle$  тела равно половине полной механической энергии  $E$  (см. (42.19)). В результате получим

$$\frac{dE}{dt} \approx -2\beta E. \quad (44.12)$$

Интегрируя это уравнение, найдем зависимость энергии затухающих колебаний от времени:

$$E \approx E_0 e^{-2\beta t}, \quad (44.13)$$

где  $E_0$  — значение энергии в начальный момент времени  $t = 0$ . Как видно из (44.13), полная механическая энергия тела при затухающих колебаниях уменьшается со временем по экспоненциальному закону.

Для определения зависимости от времени амплитуды  $A$  затухающих колебаний вновь воспользуемся предположением, что в условиях слабого затухания колебания мало отличаются от гармонических. Как следует из соотношения (42.21), амплитуда гармонических колебаний пропорциональна корню квадратному из величины полной механической энергии:

$$A = \sqrt{\frac{2}{\kappa} E},$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины. Подставив  $E$  из (44.13), получим

$$A = \sqrt{\frac{2}{\kappa} E_0 e^{-2\beta t}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa} E_0} e^{-\beta t} = A_0 e^{-\beta t},$$

или окончательно:

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (44.14)$$

где  $A_0$  — начальная амплитуда.

Выражение (44.14) совпадает с формулой (44.3) для амплитуды затухающих колебаний. Таким образом, не прибегая к методам решения дифференциальных уравнений, а используя физические соображения, в частности, закон изменения полной механической энергии, удалось определить зависимость от времени амплитуды затухающих колебаний в условиях слабого затухания (44.14).

### Величины, характеризующие затухание.

1.  $\beta = \frac{b}{2m}$  — коэффициент затухания (здесь  $b$  — коэффициент сопротивления среды,  $m$  — масса тела). Коэффициент затухания определяет, насколько быстро уменьшается амплитуда колебаний с течением времени (см. (44.3)).

2. *Время жизни* колебаний  $\tau$  — это промежуток времени, в течение которого амплитуда колебания уменьшается в  $e$  раз ( $e$  — основание натурального логарифма), то есть:

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = e.$$

Подставим в это соотношение  $A(t)$  из (44.3):

$$\frac{A_0 e^{-\beta(t)}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (44.15)$$

3.  $N_e$  — число колебаний за промежуток времени, в течение которого их амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Поскольку время одного колебания — это период  $T$ , а промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, равен  $\tau$  (см. (44.15)), разделив  $\tau$  на  $T$ , найдем  $N_e$ :

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}. \quad (44.16)$$

4. *Логарифмическим декрементом* затухания  $\lambda$  называется натуральный логарифм отношения амплитуд затухающего колебания в моменты времени, разделенные промежутком в один период  $T$ :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (44.17)$$

5. *Добротностью*  $Q$  называется умноженное на число  $\pi$  количество колебаний за время, в течение которого их амплитуда уменьшается в « $e$ » раз:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T}. \quad (44.18)$$

Определим, какими должны быть параметры механической системы, чтобы выполнялось условие (44.6) слабого затухания.

Продифференцируем по времени выражение (44.13) энергии затухающих колебаний:

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -2\beta.$$

Будем считать условие (44.6) слабого затухания выполненным, и, согласно (44.9), заменим производную энергии по времени отношением  $\Delta E_T$  к  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \frac{\Delta E_T}{T} &= -2\beta, \\ \frac{\Delta E_T}{E} &= -2\beta T, \\ \frac{|\Delta E_T|}{E} &= 2\beta T. \end{aligned} \quad (44.19)$$

Выразим из (44.19) относительное уменьшение энергии за один период  $\frac{|\Delta E_T|}{E}$  через параметр  $N_e$  (см. (44.16)):

$$\frac{|\Delta E_T|}{E} = \frac{2}{N_e}, \quad (44.20)$$

и через параметр  $Q$  — добротность (см. (44.18)):

$$\frac{|\Delta E_T|}{E} = \frac{2\pi}{Q}. \quad (44.21)$$

Подставляя последовательно в условие слабого затухания (44.6) величины  $\frac{|\Delta E_T|}{E}$  из (44.19), (44.20) и (44.21), найдем критерии слабого затухания.

Постановка (44.19) дает:

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta E_T|}{E} = 2\beta T &= \frac{4\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{(\omega_0/\beta)^2 - 1}} \ll 1, \\ 16\pi^2 &\ll \left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1, \\ 1 &< 1 + 16\pi^2 \ll \left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда критерий слабого затухания:

$$\beta \ll \omega_0, \quad (44.22)$$

то есть коэффициент затухания  $\beta$  должен быть много меньше собственной частоты системы  $\omega_0$ , что совпадает с (44.7).

Подстановка в (44.6) выражения (44.20) приводит к неравенству:

$$\frac{|\Delta E_T|}{E} = \frac{2}{N_e} \ll 1.$$

Отсюда критерий слабого затухания:

$$N_e \gg 1, \quad (44.23)$$

то есть число колебаний, совершенных за время их жизни, должно быть велико.

Подстановка в (44.6) выражения (44.21) дает:

$$\frac{|\Delta E_T|}{E} = \frac{2\pi}{Q} \ll 1.$$

Отсюда критерий слабого затухания:

$$Q \gg 1, \quad (44.24)$$

то есть добротность системы должна быть высокой.

Формула (44.21) поясняет энергетический смысл добротности  $Q$  механической системы. Из нее следует:

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{E}{|\Delta E_T|}$$

— добротность  $Q$  равна (с точностью до коэффициента  $2\pi$ ) отношению энергии  $E$  колебаний к величине потерь энергии за один

период  $|\Delta E_T|$ . Величина  $Q$  дает грубую оценку числа периодов, в течение которых практически вся механическая энергия системы превращается в теплоту.

**Апериодическое движение.** При увеличении коэффициента сопротивления среды  $b$  и, соответственно, коэффициента затухания  $\beta$  период затухающих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$  воз-

растает. При приближении  $\beta$  к  $\omega_0$  период  $T$  должен был бы стремиться к бесконечности. Это означает, что при достаточно большом коэффициенте затухания  $\beta$  колебания в механической системе невозможны. При этом выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе механическая система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Характер движения системы таков, что в нем отсутствует основной признак колебаний — повторяемость. Такое движение называют *апериодическим*.

С помощью методов решения линейных дифференциальных уравнений несложно найти точные решения уравнения затухающих колебаний (44.1) при сильном затухании. Приведем результаты.

Если коэффициент затухания  $\beta$  превышает собственную частоту системы  $\omega_0$  ( $\beta > \omega_0$ ), то решение имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (44.25)$$

где  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий движения. Поскольку параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются отрицательными числами, а функция  $x(t)$  представляет собой сумму убывающих экспонент, величина  $x$  — отклонение системы от положения равновесия — быстро приближается к нулевому значению (рис. 131).

Если выполнено условие  $\beta = \omega_0$ , решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}, \quad (44.26)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные коэффициенты, значения которых можно определить из начальных условий. При выполнении условия  $\beta = \omega_0$  поведение механической системы называется *критическим режимом*, а параметр  $\beta$  — *критическим коэффициентом затухания*.

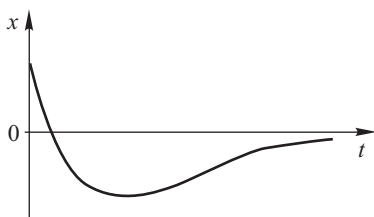


Рис. 131



Описываемое функциями (44.25) и (44.26) движение является аperiodическим.

## § 45. Сложение гармонических колебаний одинакового направления. Метод векторных диаграмм

Напомним (см. § 42), что всякое гармоническое колебание  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$  можно представить на плоскости в виде вращающегося вокруг неподвижной точки  $O$  вектора  $\mathbf{A}$ , модуль которого равен амплитуде колебания  $A$ , угловая скорость вращения — циклической частоте колебания  $\omega$ , угол между вектором  $\mathbf{A}$  и проведенной через точку  $O$  осью  $x$  численно равен фазе колебания  $\omega t + \alpha$ . Зависимость от времени проекции на ось  $x$  вектора  $\mathbf{A}$  описывается гармонической функцией:

$$A_x = x = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Точка  $N$ , которая является проекцией на ось  $x$  точки  $M$  — конца радиуса-вектора  $\mathbf{A}$  (рис. 121), совершает гармоническое колебание вдоль этой оси. Движение точки  $N$  может соответствовать колебательному движению реально существующего физического тела, например, груза на пружине. В то же время вектор  $\mathbf{A}$  никакой реально существующей физической величине не соответствует, это только геометрический образ, позволяющий наглядно представить гармоническое колебание.

Часто на чертеже, который называется *векторной диаграммой колебания*, изображают положение вектора  $\mathbf{A}$  в момент времени  $t = 0$ . При этом угол между вектором  $\mathbf{A}$  и осью  $x$  равен начальной фазе колебания  $\alpha$ .

Пусть имеются два гармонических колебания одинакового направления (движение происходит вдоль оси  $x$ ) и одинаковой частоты:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad (45.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (45.2)$$

Амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  и начальные фазы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  колебаний, вообще говоря, различны. Найдем сумму колебаний  $x = x_1 + x_2$ , не прибегая к тригонометрическим преобразованиям.

Поставим в соответствие колебаниям  $x_1$  и  $x_2$  векторы  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ , которые вращаются на плоскости с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  вокруг общего начала — точки  $O$ . Модули векторов  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  равны амплитудам соответствующих колебаний. На рис. 132 показано положение векторов  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  в момент времени  $t = 0$ . Временная зависимость проекций  $A_{1x}$  и  $A_{2x}$  векторов

на ось  $x$  описывается функциями (45.1) и (45.2):

$$A_{1x} = x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_{2x} = x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Угловая скорость вращения векторов  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  одинакова. Поэтому угол между ними остается неизменным в любой момент времени и равен разности фаз колебаний  $(\alpha_2 - \alpha_1)$ . Построим на векторах  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  параллелограмм, одна из диагоналей которого представляет собой векторную сумму  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ . Вектор  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$  вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ . Длина вектора  $\mathbf{A}$  остается неизменной. Ее можно найти с помощью теоремы косинусов из векторной диаграммы на рис. 132:

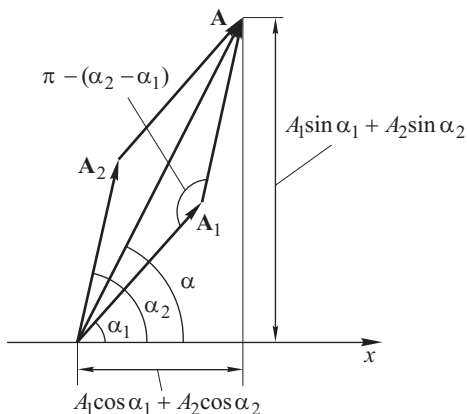


Рис. 132

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (45.3)$$

Как видно из рисунка, в момент времени  $t = 0$  вектор  $\mathbf{A}$  составляет с осью  $x$  угол  $\alpha$ , определяемый условием:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (45.4)$$

Вектор  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$  соответствует гармоническому колебанию с циклической частотой  $\omega$ , амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\alpha$ , вычисляемым по формулам (45.3) и (45.4). Проекция вектора  $\mathbf{A}$  на ось  $x$  есть гармоническая функция времени:

$$A_x = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (45.5)$$

С другой стороны, проекция  $A_x$  равна:

$$A_x = A_{1x} + A_{2x} = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2), \quad (45.6)$$

и представляет собой сумму колебаний  $x_1$  и  $x_2$ .

Сравнивая (45.5) и (45.6), получим

$$x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $A$  и  $\alpha$  определяются по формулам (45.3) и (45.4).

Таким образом, сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты  $\omega$  представляет собой гармоническое колебание той же частоты.

Чтобы найти сумму гармонических колебаний  $x_1$  и  $x_2$ , достаточно сложить векторы этих колебаний  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  описанным выше способом, определив амплитуду и начальную фазу результирующего колебания по формулам (45.3) и (45.4). Такой метод сложения колебаний широко используется в разных областях физики и называется *методом векторных диаграмм*.

## § 46. Вынужденные колебания. Резонанс

Мы рассмотрели закономерности свободных колебаний механических систем, то есть колебаний, которые возникают в системе после того, как она была выведена из положения устойчивого равновесия и предоставлена самой себе. Как уже подчеркивалось ранее, в результате действия сил трения и сопротивления, которые всегда присутствуют в реальных колебательных системах, механическая энергия системы в процессе свободных колебаний убывает, превращаясь в тепло. Поэтому свободные колебания, возникшие под влиянием начального толчка, с течением времени затухают. Для того чтобы возбудить в системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные трением и сопротивлением среды. Такая компенсация может производиться за счет внешних по отношению к колебательной системе источников энергии. В частности, энергия может восполняться за счет работы внешней силы  $F$ .

Рассмотрим простейший случай, когда на систему действует переменная внешняя сила  $F$ , изменяющаяся со временем по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

где  $F_0$  — положительная постоянная (амплитуда силы),  $\omega$  — циклическая частота.

*Вынужденными колебаниями* называются колебания, возникающие в механической системе под действием внешней периодической силы и происходящие в такт с изменением этой силы.

Если внешняя сила описывается гармонической функцией с циклической частотой  $\omega$ , вынужденными являются колебания механической системы, совершаемые в такт с внешней силой, то есть на частоте  $\omega$ .

Получим уравнение вынужденных колебаний, вновь воспользовавшись моделью физической системы в виде тела (материальной точки) массы  $m$ , связанного со спиральной пружиной

жесткости  $\kappa$  и движущегося в вязкой среде вдоль параллельной оси пружины оси  $x$ . Кроме силы упругости  $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\kappa \mathbf{r}$ , на тело действует сила сопротивления среды  $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -b\mathbf{V}$ , пропорциональная скорости  $\mathbf{V}$  тела ( $b$  — коэффициент сопротивления среды), и внешняя сила  $\mathbf{F} = F_0 \cos \omega t$ , направленная вдоль оси  $x$  (рис. 133). В положении равновесия тела координата  $x = 0$ ; радиус-вектор  $\mathbf{r}$  проведен к телу из точки  $x = 0$ . Уравнение движения в проекции на ось  $x$  имеет вид

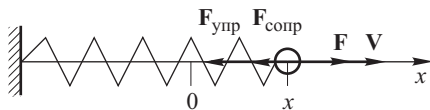


Рис. 133

$$m\ddot{x} = -\kappa x - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Отсюда получим *уравнение вынужденных колебаний*:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (46.1)$$

где  $\beta = b/(2m)$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$  — собственная частота системы.

В теории линейных дифференциальных уравнений показывается, что решение уравнения (46.1) имеет следующий вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + B \cos(\omega t - \varphi). \quad (46.2)$$

Первое слагаемое является решением уравнения затухающих колебаний и представляет собой свободное затухающее колебание с частотой  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , начальной амплитудой  $A_0$  и начальной фазой  $\alpha$ . Второе слагаемое — это вынужденное колебание с циклической частотой  $\omega$ , равной частоте вынуждающей силы. Постоянный коэффициент  $B$  называется амплитудой вынужденного колебания,  $\varphi$  — сдвиг по фазе между внешней вынуждающей силой и вызываемым этой силой колебанием.

Движение тела под влиянием внешней гармонической силы является наложением (суммой) двух колебаний — свободного затухающего с частотой  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  и вынужденного с частотой, равной частоте внешней силы  $F$ . Подобный вид решения уравнения затухающих колебаний (46.1) можно ожидать и на основании физических соображений. Действительно, внешняя сила выводит механическую систему из положения равновесия и тем самым инициирует затухающие колебания. С другой стороны, вынужденные колебания должны происходить в такт с изменениями внешней силы  $F$  и, следовательно, описываются гармонической функцией одинаковой с силой частоты.

Из формулы (46.2) видно, что затухающие колебания играют заметную роль только в начальной стадии колебательного процесса. С течением времени из-за экспоненциально убывающего множителя амплитуда затухающих колебаний  $A_0 e^{-\beta t}$  быстро уменьшается. По прошествии достаточного времени  $t$ , определяемого из условия  $A_0 e^{-\beta t} \ll B$ , затухающими колебаниями можно пренебречь, сохраняя в решении (46.2) уравнения вынужденных колебаний только второе слагаемое. Промежуток времени, по истечении которого можно пренебречь затухающими колебаниями, называется *временем установления колебаний*.

Определим амплитуду  $B$  и сдвиг по фазе  $\varphi$  в условиях, когда решение уравнения вынужденных колебаний можно представить в виде

$$x = B \cos(\omega t - \varphi), \quad (46.3)$$

то есть по истечении времени установления колебаний.

Дифференцируя выражение (46.3) по времени, найдем скорость  $\dot{x}$  и ускорение  $\ddot{x}$  тела:

$$\dot{x} = B\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (46.4)$$

$$\ddot{x} = B\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi). \quad (46.5)$$

Колебания скорости  $\dot{x}$  опережают по фазе колебания смещения  $x$  на  $\pi/2$ , колебания ускорения  $\ddot{x}$  опережают колебания скорости на ту же величину.

Подставив выражения для  $x$ ,  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  из формул (46.3)–(46.5) в уравнение вынужденных колебаний (46.1):

$$B\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta B\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 B \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (46.6)$$

найдем сумму трех гармонических колебаний левой части полученного уравнения с помощью *векторной диаграммы*.

Представим колебание  $\omega_0^2 B \cos(\omega t - \varphi)$  в виде вектора длиной  $\omega_0^2 B$ ; колебание  $2\beta B\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$  — в виде вектора длиной  $2\beta B\omega$ , повернутого на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки относительно первого вектора; колебание  $\omega^2 B \cos(\omega t - \varphi + \pi)$  — в виде вектора длиной  $\omega^2 B$ , повернутого в том же направлении на угол  $\pi/2$  относительно второго вектора (рис. 134). Сумма трех построенных векторов должна быть равна вектору колебания  $\frac{F_0}{m} \cos \omega t$  правой части уравнения (46.6). Из геометрических со-

ображений следует (см. рис. 134):

$$(\omega_0^2 - \omega^2) B^2 + 4\beta^2 \omega^2 B^2 = \frac{F_0^2}{m^2}.$$

Отсюда определим амплитуду  $B$  вынужденного колебания:

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (46.7)$$

Амплитуда  $B$  зависит от частоты  $\omega$  вынуждающей силы.

Из векторной диаграммы на рис. 134 можно определить тангенс угла  $\varphi$ , который представляет собой разность фаз колебаний внешней силы  $F = F_0 \cos \omega t$  и смещения тела  $x = B \cos(\omega t - \varphi)$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (46.8)$$

При наличии в механической системе затухания ( $\beta \neq 0$ ) угол  $\varphi$  всегда положителен. Это означает, что колебание смещения  $x$  отстает по фазе от колебания вынуждающей силы  $F$  (напомним, что на рассматриваемой векторной диаграмме положительное направление отсчета углов выбрано против часовой стрелки). В зависимости от соотношения между частотами  $\omega_0$  и  $\omega$  угол  $\varphi$  изменяется в пределах от нуля до  $\pi$ .

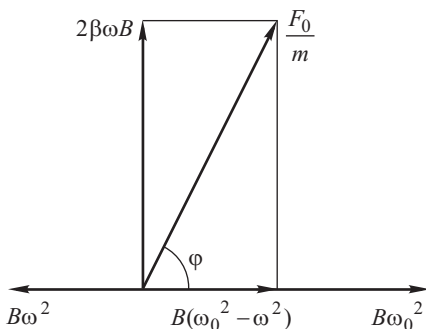


Рис. 134

**Резонанс.** Всякая механическая колебательная система — груз на пружине, маятник и т.д. — характеризуется собственной частотой  $\omega_0$  и коэффициентом затухания  $\beta$ . При заданных значениях  $\omega_0$  и  $\beta$  амплитуда вынужденных колебаний механической системы зависит от частоты  $\omega$  вынуждающей силы (см. формулу (46.7)).

Явление *резонанса* состоит в том, что при определенном значении частоты вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний механической системы достигает максимального значения. Соответствующая частота называется *резонансной частотой*.

На рис. 135 в соответствии с формулой (46.7) построен график зависимости амплитуды  $B$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. Этот график называется *амплитудной резонансной кривой*. Рассмотрим параметры, характеризующие резонансную кривую.

1. *Резонансная частота.* На резонансной частоте  $\omega_{\text{рез}}$  функция  $B(\omega)$  достигает максимума. Выражение для  $\omega_{\text{рез}}$  легко найти, приравняв нулю производную подкоренного выражения в (46.7):

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (46.9)$$

Резонансная частота отличается от собственной частоты  $\omega_0$  механической системы. Однако при малых значениях коэффициента затухания  $\beta$  ( $\beta \ll \omega_0$ ) это отличие незначительно.

2. *Резонансная амплитуда.* Значение функции  $B(\omega)$  в максимуме резонансной кривой представляет собой амплитуду вынужденных колебаний в условиях резонанса  $B_{\text{рез}}$ . Формулу для  $B_{\text{рез}}$  получим подстановкой  $\omega_{\text{рез}}$  из (46.9) в выражение (46.7) для  $B(\omega)$ :

$$B_{\text{рез}} = B(\omega_{\text{рез}}) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{рез}}^2}} = \frac{F_0/m}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

При слабом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) резонансная амплитуда приблизительно равна:

$$B_{\text{рез}} \approx \frac{F_0/m}{2\beta \omega_0}. \quad (46.10)$$

В идеализированной механической системе с коэффициентом затухания  $\beta$ , стремящимся к нулю, резонансная амплитуда стремится к бесконечности.

3. *Амплитуда при стремлении частоты  $\omega$  к нулю.* Стремление  $\omega$  к нулю означает, что внешняя сила  $F = F_0 \cos \omega t$  с течением времени изменяется очень медленно, ее можно считать постоянной величиной  $F \approx F_0$ . В этих условиях тело смещено из положения равновесия, и его координата  $x$  мало меняется со временем. Амплитуда  $B_0$  вынужденного колебания равна величине смещения тела из положения равновесия:

$$B_0 = B(\omega)_{\omega=0} = \left[ \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \right]_{\omega=0} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2}. \quad (46.11)$$

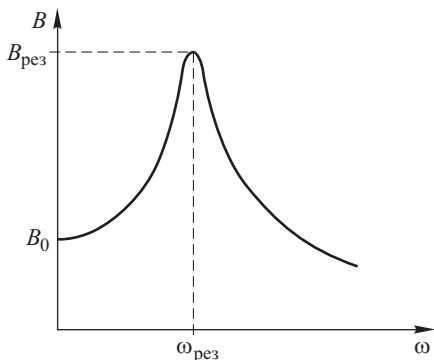


Рис. 135

Поскольку сила  $F \approx F_0$  приложена к телу, связанному с пружиной жесткости  $\kappa$ , и собственная частота системы равна  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ , то из (46.11) следует:

$$B_0 = \frac{F_0}{\kappa}. \quad (46.12)$$

Равенство (46.12) означает, что амплитуда  $B_0$  вынужденного колебания совпадает с удлинением пружины под действием постоянной силы  $F_0$ .

4. *Относительная высота максимума резонансной кривой.*

Найдем отношение  $B_{\text{рез}}$  к  $B_0$  при слабом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ). Для этого поделим равенства (46.10) и (46.11) одно на другое:

$$\frac{B_{\text{рез}}}{B_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = Q, \quad (46.13)$$

где  $T = 2\pi/\omega_0$  — период свободных затухающих колебаний системы, которые мало отличаются от гармонического колебания,  $Q$  — добротность.

Из (46.13) видно, что отношение  $B_{\text{рез}}$  к  $B_0$  равно добротности механической системы. Следовательно, добротность  $Q$  показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при резонансе  $B_{\text{рез}}$  больше величины  $B_0$  смещения системы из положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$ , равной амплитуде вынуждающей силы. Добротность механической системы характеризует относительную высоту максимума резонансной кривой.

5. *Ширина резонансной кривой.* Вновь рассмотрим колебательную систему со слабым затуханием, когда  $\beta \ll \omega_0$ . В этих условиях резонансная частота практически не отличается от собственной частоты механической системы:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0.$$

Оценим ширину  $\Delta\omega$  резонансной кривой на такой ее высоте, где амплитуда вынужденного колебания  $B(\omega)$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше резонансной амплитуды  $B_{\text{рез}}$  (рис. 136). Значение  $\omega$ , соответствующее указанной высоте, определяется равенством

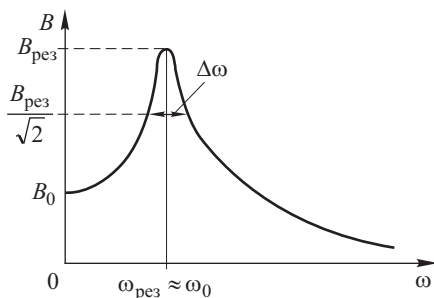


Рис. 136

$$B(\omega) = \frac{B_{\text{рез}}}{\sqrt{2}}.$$



Подставим выражения для  $B(\omega)$  из (46.7) и  $B_{\text{рез}}$  из (46.10) и выполним преобразования:

$$\begin{aligned}\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 &= 8\beta^2\omega_0^2, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= 4\beta^2(2\omega_0^2 - \omega^2).\end{aligned}$$

Будем считать, что ширина  $\Delta\omega$  резонансной кривой мала по сравнению с величиной  $\omega_0$ :

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \quad (46.14)$$

Ниже будет показано, что неравенство (46.14) эквивалентно условию слабого затухания  $\beta \ll \omega_0$ , которое мы считаем выполненным. В этих условиях  $\omega \approx \omega_0$ ,  $\omega_0^2 \approx \omega^2$ , и множитель в правой части последнего равенства можно представить в следующем виде:

$$2\omega_0^2 - \omega^2 \approx \omega_0^2.$$

Продолжим преобразования с учетом этого соотношения:

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= 4\beta^2(2\omega_0^2 - \omega^2) \approx 4\beta^2\omega_0^2, \\ [(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)]^2 &\approx 4\beta^2\omega_0^2.\end{aligned} \quad (46.15)$$

Подставив в (46.15) выражения

$$\begin{aligned}\omega_0 + \omega &\approx 2\omega_0, \\ |\omega_0 - \omega| &= \frac{\Delta\omega}{2},\end{aligned}$$

получим

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 (2\omega_0)^2 \approx 4\beta^2\omega_0^2.$$

Отсюда найдем ширину резонансной кривой  $\Delta\omega$ :

$$\Delta\omega \approx 2\beta. \quad (46.16)$$

Из (46.16) видно, что ширина резонансной кривой приблизительно равна удвоенному коэффициенту затухания  $\beta$  механической системы. Чем меньше коэффициент затухания, тем уже резонансная кривая.

При анализе амплитудной резонансной кривой мы считали выполненным условие слабого затухания  $\beta \ll \omega_0$ . С учетом этого соотношения из (46.16) получим

$$\Delta\omega \approx 2\beta \ll \omega_0,$$

то есть ширина резонансной кривой  $\Delta\omega$  много меньше собственной частоты  $\omega_0$  системы. Следовательно, соотношение (46.14),

которое использовалось в преобразованиях, действительно имеет место.

Зависимость от частоты  $\omega$  разности фаз  $\varphi$  колебаний вынуждающей силы  $\mathbf{F}$  и смещения  $x$  тела называется уравнением фазовой резонансной кривой:

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

В условиях резонанса, когда  $\omega \approx \omega_0$ , разность фаз  $\varphi = \pi/2$ .

### Задачи

**5.1.** На доске лежит груз массы  $m$ . Доска совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом  $T$  и амплитудой  $A$ . Определить величину силы давления  $F$  груза на доску. С какой амплитудой  $A_1$  должна колебаться доска с грузом, чтобы груз начал отскакивать от доски?

**5.2.** На гладком столе находится брусок массы  $M$ , с которым соединен математический маятник, состоящий из невесомого стержня и точечной массы  $m$  на его конце (рис. 5.2). Ось вращения маятника проходит через центр бруска. В первом случае брусок закреплен на столе, во втором — его отпустили, и он может свободно перемещаться по столу. Определить отношение частот малых колебаний в этих двух случаях.

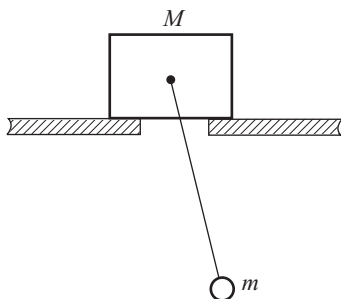


Рис. 5.2

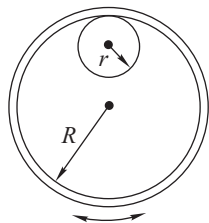


Рис. 5.3

**5.3.** Определить период малых колебаний тонкого кольца массы  $M$  и радиуса  $R$ , надетого на неподвижный горизонтальный цилиндр радиуса  $r$  (рис. 5.3). Проскальзывания нет.

**5.4.** Найти период колебаний физического маятника массы  $m$ , к центру масс которого — точке  $C$  — прикрепена горизонтальная спиральная пружина жесткости  $\kappa$ . Другой конец пружины закреплен в неподвижной стенке (рис. 5.4). Момент инерции маятника относительно проходящей через точку подвеса оси равен  $I$ .

Расстояние между точкой подвеса и центром масс равно  $a$ . В положении равновесия пружина не деформирована.

**5.5.** Однородный диск радиуса  $R$  может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический коэффициент затухания равен  $\lambda$ .

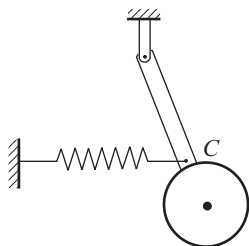


Рис. 5.4

**5.6.** Под действием внешней вертикальной силы  $F_x = F_0 \cos \omega t$  тело, подвешенное на вертикальной пружине, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону  $x = a \cos(\omega t - \varphi)$ . Найти работу силы  $F$  за период колебания.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

- 1.1.  $\varphi = \pi/8$ .
- 1.2. а)  $\cos \alpha = 1/\eta^{1/3}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ; б)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ ,  $\alpha = 54,8^\circ$ .
- 1.3. а)  $y = x - x^2\beta/\alpha$ ; б)  $V = \alpha\sqrt{1 + (1 - 2\beta t)^2}$ ,  $a = 2\beta\alpha = \text{const}$ ;
- в)  $t_0 = 1/\beta$ .
- 1.4.  $\rho = (V_0^2 + \omega^2 R^2)^{3/2}/(\omega^3 R^2)$ .
- 1.5. Мгновенная ось вращения располагается от оси первого диска на расстоянии  $r = \omega_2 R/(\omega_1 + \omega_2)$ ;  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .
- 2.1.  $t = R(e^{\pi k} - 1)/(V_0 k)$ .
- 2.2.  $V = V_0 - rS/m$ .
- 2.3.  $\alpha = 0$ , если  $\omega^2 < kg/(ml_0(g/l_0 + k/m))$ ; иначе  $\cos \alpha = g(k - m\omega^2)/(\omega^2 kl_0)$  ( $\omega < \sqrt{k/m}$ ).
- 2.4.  $V = \sqrt{g(l^2 - l_0^2)/l}$ ,  $x = l_0 \operatorname{ch}\left(t\sqrt{g/l}\right)$ .
- 2.5.  $\tau = \omega^{-1} \ln(2 + \sqrt{3})$ .
- 2.6.  $A = kmL\sqrt{4\omega^2 V^2 + g^2} + (1/2)m\omega^2 L^2$ .
- 3.1.  $x_0 = 2\sqrt{2}\mu mg/k$ .
- 3.2.  $V = \sqrt{\frac{2M}{m(M+m)}\left(\frac{kx_0^2}{2} - \mu mgL\right)}$ .
- 3.3.  $h = 0,005lM/m$ .
- 3.4.  $A_{\text{мин}} = mgR(k/2 + 1 - \sqrt{3}/2)/(1 + k \operatorname{tg} \alpha)$ .
- 3.5.  $\omega = \text{const}/r^2$ ;  $T = \text{const}/r^3$ ;  $A = (3/2)m\omega_0^2 R_0^2$ .
- 3.6.  $\omega = 6V_0/5l$ .
- 3.7.  $\sin \theta_{\text{макс}} = m_2/m_1$ .
- 3.8.  $\tau = T/\sqrt{32}$ , где  $T$  — период обращения Земли вокруг Солнца.
- 3.9.  $L = m\sqrt{2\gamma M r_1 r_2/(r_1 + r_2)}$ .
- 4.1.  $\varphi = gt^2/(2R(1 + mg/2P))$ .
- 4.2. Скольжения не будет при  $k \geq (8 + 3m/M)^{-1}$ , при этом  $a = g/(1 + 3m/(8M))$ ; если  $k < (8 + 3m/M)^{-1}$  качение происходит со скольжением, при этом  $a = g(1 - km/3M)(1 + m/3M)^{-1}$ .
- 4.3.  $\omega = mrv/(mR^2/2 + mR^2)$ .
- 4.4.  $V_A = V_B\sqrt{2gnr}$ ;  $a_A = a_B = gn$ .
- 4.5.  $\omega = \omega_0(m_1 + m_2)/(m_1 + 3m_2)$ .
- 4.6.  $\operatorname{tg} \beta = a^3 m^2 g \sin \alpha / (I^2 \omega^2)$ .
- 5.1.  $F = mg + mA\omega^2 \cos \omega t$ , где  $\omega = 2\pi/T$ ;  $A_1 = g/\omega^2$ .
- 5.2.  $\omega_0/\omega = \sqrt{M/(M+m)}$ .
- 5.3.  $T = 2\pi R\sqrt{2/(g(R-r))}$ .
- 5.4.  $T = 2\pi\sqrt{I/(mga + \chi a^2)}$ .
- 5.5.  $T = \sqrt{(3R/2g)(4\pi^2 + \lambda^2)}$ .
- 5.6.  $A = \pi a F_0 \sin \varphi$ .

## ПРИЛОЖЕНИЯ

---

### I. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ МЕХАНИКИ

#### Кинематика

**Кинематика материальной точки.** *Механическим движением* называется изменение положения тела в пространстве с течением времени.

*Пространственно-временная система отсчета:*

- а) тело отсчета и связанная с ним система координат;
- б) прибор для измерения длин отрезков (линейка);
- в) устройство для измерения промежутков времени (часы);
- г) метод синхронизации часов.

*Кинематика* — раздел механики, в котором изучают способы описания движения тел, не интересуясь порождающими это движение причинами.

*Материальная точка (частица)* — макроскопическое тело, размеры которого малы по сравнению с характерными для изучаемого движения расстояниями.

Проведенный из неподвижного начала координат радиус-вектор  $\mathbf{r}$  движущейся частицы является функцией времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

*Мгновенной скоростью* называется вектор, равный производной по времени радиуса вектора  $\mathbf{r}$  частицы:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

*Ускорением* называется вектор, равный производной по времени скорости частицы:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  выражается через декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  частицы:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат скорости  $\mathbf{V}$  и ускорения  $\mathbf{a}$ :

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt};$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Связь модуля скорости  $V$  и пути  $S$ :

$$V = \frac{dS}{dt},$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt.$$

Дуговая координата  $l$ , скорость  $\mathbf{V}$  и ускорение  $\mathbf{a}$  частицы при естественно-параметрическом способе описания движения:

$$l = l(t),$$

$$\mathbf{V} = \frac{dl}{dt} \boldsymbol{\tau} = V_{\tau} \boldsymbol{\tau},$$

$$\mathbf{a} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \mathbf{n},$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к траектории,  $\rho$  — радиус кривизны траектории.

**Кинематика твердого тела.** При движении *твердого тела* расстояния между его любыми двумя точками остаются неизменными.

При *поступательном движении* любая прямая, жестко связанная с твердым телом, остается параллельной своему начальному положению.

*Вращением вокруг неподвижной оси* называется движение, при котором существуют по крайней мере две жестко связанные с твердым телом неподвижные точки.

При *плоском движении* все точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях.

*Вращение вокруг неподвижной точки* представляет собой вращение твердого тела вокруг проходящей через эту точку мгновенной оси. С течением времени мгновенная ось, вообще говоря, меняет свое положение как в пространстве, так и в теле.

При *свободном движении* твердого тела никаких кинематических ограничений не накладывается.

Количество независимых величин, которые необходимо задать для определения положения тела в пространстве, называется *числом степеней свободы тела*.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси положение тела в пространстве определяется *угловой координатой (углом поворота)  $\varphi$* . Положительное направление отсчета  $\varphi$  связано правилом правого винта с положительным направлением координатной оси  $z$ , лежащей на оси вращения.

*Вектором элементарного поворота* называется вектор  $d\varphi$ , модуль которого равен модулю угла поворота  $d\varphi$ :

$$|d\varphi| = |d\varphi|;$$

$d\varphi$  лежит на оси вращения твердого тела, направление  $d\varphi$  связано правилом правого винта с направлением вращения тела.

Вектор *угловой скорости*  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  направлен вдоль оси вращения твердого тела и связан правилом правого винта с направлением вращения; проекция  $\omega_z$  угловой скорости на координатную ось  $z$ , совпадающую с осью вращения, равна:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

*Угловое ускорение  $\beta$* :

$$\beta = \frac{d\omega}{dt};$$

проекция углового ускорения на координатную ось  $z$ , совпадающую с осью вращения, равна:

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

При вращении вокруг неподвижной оси линейная скорость  $\mathbf{V}_A$  произвольной точки  $A$  твердого тела связана с его угловой скоростью  $\omega$  соотношением:

$$\mathbf{V}_A = [\omega \mathbf{r}],$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $A$ , проведенный из произвольной точки на оси вращения;

линейное ускорение  $\mathbf{a}_A$  точки  $A$  твердого тела связано с его угловым ускорением  $\beta$ :

$$\mathbf{a}_A = [\beta \mathbf{r}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]],$$

где  $[\beta \mathbf{r}]$  — тангенциальное ускорение,  $[\omega [\omega \mathbf{r}]]$  — нормальное ускорение.

При плоском движении скорость  $\mathbf{V}_A$  произвольной точки  $A$  твердого тела равна векторной сумме скоростей: скорости  $\mathbf{V}_O$  любой точки  $O$  тела и относительной скорости  $\mathbf{V}_{отн} = [\omega \mathbf{r}_A]$ , обусловленной вращением тела с угловой скоростью  $\omega$  вокруг проходящей через точку  $O$  оси:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_O + [\omega \mathbf{r}_A],$$

где  $\mathbf{r}_A$  — вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ .

При плоском движении всегда существует жестко связанная с телом точка  $M$ , не обязательно расположенная внутри тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю и через которую проходит мгновенная ось вращения:

$$\mathbf{r}_M = \frac{[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_O]}{\omega^2},$$

где  $\mathbf{r}_M$  — вектор, проведенный из произвольной точки  $O$  к точке  $M$ ,  $\mathbf{V}_O$  — скорость точки  $O$ .

При свободном движении твердого тела скорость произвольной точки  $A$  твердого тела равна векторной сумме скоростей: скорости  $\mathbf{V}_O$  любой точки  $O$  тела и относительной скорости  $\mathbf{V}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_A]$ , обусловленной вращением тела с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг проходящей через точку  $O$  мгновенной оси:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_A],$$

где  $\mathbf{r}_A$  — радиус-вектор точки  $A$ , проведенный из точки  $O$ .

При вращении твердого тела вокруг пересекающихся осей угловые скорости складываются:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Производная по времени радиуса-вектора  $\mathbf{a}$  постоянной длины и изменяющегося направления равна:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}],$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения вектора  $\mathbf{a}$ .

*Преобразование скорости и ускорения* частицы  $A$  при переходе от одной системы отсчета  $(Ox_1y_1z_1)$  к другой  $(Oxyz)$ :

а) система отсчета  $Oxyz$  движется поступательно:

$$\mathbf{V}_{\text{абс}} = \mathbf{V}_{\text{пер}} + \mathbf{V}_{\text{отн}}, \quad \mathbf{V}_{\text{пер}} = \mathbf{V}_O;$$

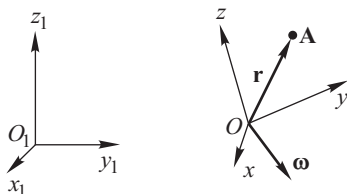
$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{отн}}, \quad \mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_O;$$

б) система отсчета  $Oxyz$  движется произвольно ( $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения системы  $Oxyz$  вокруг проходящей через точку  $O$  мгновенной оси):

$$\mathbf{V}_{\text{абс}} = \mathbf{V}_{\text{пер}} + \mathbf{V}_{\text{отн}}, \quad \mathbf{V}_{\text{пер}} = \mathbf{V}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}];$$

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{отн}}, \quad \mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_O + [\boldsymbol{\beta} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]],$$

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}_{\text{отн}}].$$





## Динамика

**Законы Ньютона.** Первый закон Ньютона: *существует система отсчета, называемая инерциальной, в которой не подверженное внешним воздействиям тело (материальная точка) находится в состоянии покоя, либо движется равномерно и прямолинейно.* Существует бесконечно много инерциальных систем отсчета.

*Неинерциальной* системой отсчета называется всякая система, движущаяся ускоренно по отношению к инерциальной системе отсчета.

Принцип относительности Галилея: *все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.* Во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы, законы механики имеют одинаковую математическую форму.

*Преобразования Галилея* (формулы преобразования координат материальной точки и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой):

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

*Инертность* — свойство тела оказывать сопротивление при попытках привести его в движение или изменить величину и направление его скорости. *Масса* есть мера инертности тела.

Количественное определение массы. Отношение масс двух тел равно обратному отношению ускорений, сообщаемых телам равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Выраженная в килограммах масса тела равна:

$$m_x = m_{\text{эт}} \frac{a_{\text{эт}}}{a_x},$$

где  $m_{\text{эт}} = 1$  кг.

*Сила* есть мера интенсивности взаимодействия тел.

Количественное определение силы: действующая на тело сила **F** равна произведению массы тела на его ускорение **F** = **ma**.

Содержание *второго закона Ньютона*:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

— произведение массы тела (материальной точки) на его ускорение, которое называется силой **F**, зависит только от положения тела относительно других тел и, возможно, от скорости тела.

*Принцип суперпозиции сил.* Действующая на материальную точку сила равна векторной сумме сил, с которыми каждое из

окружающих тел действует на нее в отсутствие остальных тел:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i + \dots$$

*Третий закон Ньютона.* Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

**Законы сил.** *Сила гравитационного притяжения.* Две материальные точки притягиваются друг к другу с силой  $F_{\text{гр}}$ , пропорциональной произведению масс  $m_1$  и  $m_2$  и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ .

*Кулоновская сила.* Сила взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга, равна:

$$F_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$ .

*Упругая сила (закон Гука).* Сила, возникающая при упругом растяжении (сжатии) пружины с жесткостью  $\kappa$  на величину  $\Delta l$ , равна:

$$F_{\text{упр}} = \kappa \Delta l.$$

Отнесенная к единице площади поперечного сечения сила  $F/S$ , возникающая при упругом растяжении (сжатии) стержня длиной  $l_0$  на величину  $\Delta l$ , пропорциональна относительной деформации  $\Delta l/l_0$  стержня:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0},$$

где  $E$  — модуль Юнга.

*Сила трения.* Трение между поверхностями двух твердых тел называется *сухим*, между поверхностью твердого тела и жидкой или газообразной средой — вязким трением. Применительно к сухому трению различают трение *покоя*, *скольжения* и *качения*.

*Сила трения покоя*  $F_{\text{тр.п}}$  препятствует попыткам переместить соприкасающиеся тела одно относительно другого. Модуль силы трения покоя:

$$0 \leq F_{\text{тр.п}} \leq F_0,$$

где  $F_0$  — наибольшая возможная величина силы трения покоя, приблизительно равная силе трения скольжения:  $F_0 \approx F_{\text{тр.ск}}$ .

Сила трения *скольжения*  $\mathbf{F}_{\text{тр.ск}}$  возникает при перемещении (скольжении) соприкасающихся тел друг относительно друга, направлена вдоль поверхности соприкосновения. Модуль силы трения скольжения равен:

$$F_{\text{тр.ск}} = kF_n,$$

где  $k$  — коэффициент трения скольжения,  $F_n$  — сила нормального давления.

Сила трения *качения* возникает при качении тел цилиндрической или шарообразной формы по гладкой поверхности вследствие деформации соприкасающихся поверхностей.

*Уравнение движение частицы в неинерциальной системе отсчета:*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{пост}} - m \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right] + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{кор}},$$

где  $\mathbf{r}$  — проведенный из начала системы координат радиус-вектор частицы,  $\mathbf{r}_{\perp}$  — составляющая  $\mathbf{r}$ , перпендикулярная к оси вращения системы отсчета;

$\mathbf{F}$  — равнодействующая всех приложенных к частице сил;

$\mathbf{F}_{\text{пост}} = -m\mathbf{a}_0$  — поступательная сила инерции;

$\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r} \right]$  — сила инерции, обусловленная неравномерностью вращения неинерциальной системы отсчета;

$\mathbf{F}_{\text{цб}} = -m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$  — центробежная сила инерции;

$\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{V}_{\text{отн}} \boldsymbol{\omega}]$  — сила Кориолиса.

## Законы сохранения

**Закон сохранения импульса.** *Импульсом* частицы (количеством движения) называется вектор, равный произведению ее массы на скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V}.$$

*Импульсом силы*  $\mathbf{F}$ , действовавшей на частицу в течение времени  $t$ , называется величина:

$$\mathbf{F}_{\text{сп}} t = \int_0^t \mathbf{F} dt.$$

*Импульс системы частиц* — векторная сумма импульсов всех частиц:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{V}_i.$$

*Закон изменения импульса*  $\mathbf{p}$  системы частиц:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

где  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  — сумма всех внешних сил.

*Закон сохранения импульса системы частиц.* Импульс замкнутой системы частиц сохраняется:

$$\mathbf{F}_{i \text{ внешн}} = 0, \quad F_{\text{внешн}} = \sum F_{i \text{ внешн}} = 0, \quad \Rightarrow \\ \mathbf{p} = \text{const},$$

где  $\mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$  — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к частице с порядковым номером  $i$ .

Частные случаи сохранения импульса системы частиц.

1. Если система не замкнута, но сумма внешних сил равна нулю, импульс системы сохраняется:

$$\mathbf{F}_{i \text{ внешн}} \neq 0, \quad \mathbf{F}_{\text{внешн}} = \sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}} = 0, \quad \Rightarrow \\ \mathbf{p} = \text{const}.$$

2. Импульс системы *приблизительно* сохраняется, если ограниченная по модулю внешняя сила действует в течение очень короткого промежутка времени:

$$\Delta \mathbf{p} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{\text{внешн}} dt = F_{\text{внешн, средн}} \Delta t \approx 0, \quad \Rightarrow \\ \mathbf{p} \approx \text{const}.$$

3. Если проекция на некоторое направление суммы внешних сил равна нулю, проекция на это направление импульса системы сохраняется:

$$F_{\text{внешн } x} = 0, \Rightarrow \\ p_x = \text{const}.$$

*Центр масс (центр инерции)* системы частиц — геометрическая точка, положение которой в пространстве задается проведенным к ней из начала координат радиусом-вектором  $\mathbf{r}_C$ :

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m},$$

где  $m_i$  — масса,  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -й частицы,  $m = \sum m_i$  — масса системы.

Свойства центра масс.

1. Импульс системы частиц равен произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{V}_C.$$

2. Центр масс замкнутой системы частиц движется равномерно и прямолинейно.

3. *Теорема о движении центра масс.* Центр масс системы частиц движется как материальная точка, в которой заключена масса всей системы, и к которой приложена сила, равная сумме всех внешних сил:

$$m \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн.}}$$

*Системой центра масс* называется система отсчета, жестко связанная с центром масс, и которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе отсчета.

Свойства системы центра масс.

1. Импульс системы частиц в системе центра масс равен нулю.

2. Если система состоит из двух частиц, в системе центра масс импульсы частиц равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2.$$

*Уравнение Мещерского* движения тела с переменной массой:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{V}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} + \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}$  — внешняя сила,  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  — относительная скорость истечения вещества,  $\mathbf{V}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt}$  — *реактивная сила*.

**Закон сохранения энергии.** *Элементарная работа:*

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

*Работа силы на конечном пути* между точками 1 и 2:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

*Мощность* (работа в единицу времени):

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{V},$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость частицы, к которой приложена сила  $\mathbf{F}$ .

Работа силы тяжести:

$$A = mg(z_1 - z_2),$$

где  $z_1, z_2$  — вертикальная координата частицы в начальном и конечном положениях, соответственно.

Работа гравитационной силы:

$$A = \gamma M m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса центра гравитационного притяжения,  $m$  — масса перемещаемой частицы,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояние от частицы до центра гравитационного притяжения в начальном и конечном положениях частицы.

Работа кулоновской силы:

$$A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

где  $q_1, q_2$  — величина точечных зарядов,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния между зарядами в начальном и конечном положениях.

Работа упругой силы:

$$A = \frac{\kappa}{2} (x_1^2 - x_2^2),$$

где  $\kappa$  — жесткость пружины;  $x_1, x_2$  — величина деформации пружины в начальном и конечном положении.

Работа силы трения на горизонтальном пути:

$$A = -kmgS,$$

где  $k$  — коэффициент трения скольжения,  $m$  — масса тела,  $S$  — длина пройденного телом пути.

*Кинетическая энергия* частицы:

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

*Кинетическая энергия системы частиц:*

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}.$$

*Теорема о кинетической энергии.* Работа равнодействующей всех сил, приложенных к частице, равна приращению ее кинетической энергии:

$$\delta A = dT,$$

$$A = T_2 - T_1.$$

*Теорема Кенига.* Кинетическая энергия системы частиц равна сумме двух слагаемых: кинетической энергии воображаемой точки с массой, равной массе всей системы, скорость которой равна скорости центра масс, и кинетической энергии системы частиц, вычисленной в системе центра масс:

$$T = \frac{m\mathbf{V}_C^2}{2} + T_{\text{отн}}.$$

Если на частицу в каждой точке пространства действует определенная сила, всю совокупность сил называют *силовым полем*.

*Стационарным* называется независящее от времени силовое поле.

*Силовой линией* поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с действующей на частицу силой. Густота линий пропорциональна модулю силы.

*Консервативным* называется силовое поле, в котором работа сил поля, совершаемая при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение, не зависит от формы траектории и характера движения, а определяется только начальным и конечным положением частицы.

*Работа консервативных сил при перемещении частицы по замкнутой траектории равна нулю.*

*Потенциальной энергией*  $U$  частицы, расположенной в произвольной точке  $P$  консервативного силового поля, называется работа сил поля, совершаемая при перемещении частицы из точки  $P$  в точку  $O$ , принятую за начало отсчета потенциальной энергии:

$$U = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Свойства потенциальной энергии.

1. Потенциальная энергия является функцией только координат частицы:

$$U = U(x, y, z).$$

2. Работа сил поля при перемещении частицы из произвольного начального в произвольное конечное положение равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

3. Потенциальная энергия частицы определена с точностью до произвольной постоянной величины:

$$U' = U + C,$$

где  $U = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r}$  — потенциальная энергия, начало отсчета которой соответствует нахождению частицы в точке  $O$ ;  $U' = \int_P^{O'} \mathbf{F} d\mathbf{r}$  — потенциальная энергия, начало отсчета которой соответствует нахождению частицы в точке  $O'$ ,  $C = \int_O^{O'} \mathbf{F} d\mathbf{r}$  — работа сил поля при перемещении частицы из точки  $O$  в точку  $O'$ .

Потенциальная энергия частицы в поле силы тяжести:

$$U = mgz,$$

где  $z$  — вертикальная координата частицы.

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r},$$

где  $r$  — расстояние от частицы до центра поля.

Потенциальная энергия точечного заряда  $q_2$  в кулоновском поле заряда  $q_1$ :

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $r$  — расстояние между зарядами.

Потенциальная энергия тела в поле упругой силы:

$$U(x) = \frac{\kappa x^2}{2},$$

где  $x$  — величина деформации пружины,  $\kappa$  — жесткость пружины.

Связь потенциальной энергии  $U(x, y, z)$  и силы  $\mathbf{F}$  поля:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

или:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}\right) = -\text{grad } U = -\nabla U,$$

где  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  — оператор набла.

Эквипотенциальной называется поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одинаковое значение:

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Полная механическая энергия  $E$  частицы равна сумме кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергии:

$$E = T + U = \frac{mV^2}{2} + U.$$

Закон сохранения полной механической энергии частицы. Если на частицу действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия сохраняется:

$$E = T + U = \text{const.}$$

Закон изменения полной механической энергии частицы. Если на частицу, помимо консервативных сил, действуют сторонние силы (трения или сопротивления среды, консервативные



силы другого поля и т.д.), работа сторонних сил  $A_{12 \text{ стор}}$  при перемещении частицы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии тела:

$$A_{12 \text{ стор}} = E_2 - E_1.$$

*Положение (конфигурация)* системы частиц задана, если известны координаты всех частиц  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots)$ , где  $i$  — порядковый номер частицы.

*Потенциальная энергия системы частиц.* Если на частицы замкнутой системы действуют только консервативные силы, потенциальной энергией  $U$  системы в положении  $P$  называется работа всех консервативных сил, совершаемая при переходе системы из положения  $P$  в положение  $O$ , принятое за начало отсчета потенциальной энергии:

$$U = \sum A_i = \int_P^O \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \int_P^O \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2 + \dots + \int_P^O \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + \dots,$$

где  $A_i = \int_P^O \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i$  — работа равнодействующей всех консервативных сил, приложенных к  $i$ -й частице, суммирование выполняется по всем частицам системы.

Свойства потенциальной системы частиц.

1. Потенциальная энергия системы является функцией только координат всех входящих в систему частиц:

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots).$$

2. Работа  $A_{12}$  всех консервативных сил при переходе системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна убыли потенциальной энергии системы:

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

3. Потенциальная энергия системы частиц определена с точностью до произвольной постоянной величины.

4. Потенциальную энергию системы частиц можно представить в виде:

$$U = \frac{1}{2} (U_1 + U_2 + \dots + U_i + \dots) = \frac{1}{2} \sum U_i,$$

где  $U_i$  — потенциальная энергия  $i$ -й частицы в поле, созданном всеми частицами, кроме  $i$ -й; суммирование выполняется по всем частицам системы.

*Закон сохранения полной механической энергии замкнутой системы частиц с консервативными силами взаимодействия.* Полная механическая энергия замкнутой системы частиц, на

которые действуют только консервативные силы, сохраняется:

$$E = T + U = \text{const},$$

где  $E$ ,  $T$ ,  $U$  — полная, кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно.

*Закон изменения полной механической энергии системы частиц.* Если помимо внутренних консервативных сил на частицы системы действуют сторонние силы (силы трения или сопротивления среды, внешние консервативные силы и т.д.), работа сторонних сил  $A_{12 \text{ стор}}$  при переходе системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии системы:

$$A_{12 \text{ стор}} = E_2 - E_1.$$

*Область возможных значений координат частицы в поле консервативных сил.* Частица может находиться лишь в той области пространства, где полная механическая энергия  $E$  больше или равна ее потенциальной энергии  $U$ :

$$E \geq U(x, y, z).$$

*Первая космическая скорость* — скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы вывести его на круговую околоземную орбиту:

$$V_I = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3}} = \sqrt{g R_3} \approx 7,9 \text{ км/с},$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Земли,  $R_3$  — радиус Земли,  $g = \gamma \frac{M}{R_3^2}$  — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли.

*Вторая космическая скорость* — скорость, которую необходимо сообщить телу вблизи поверхности Земли, чтобы вывести его за пределы земного тяготения:

$$V_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R_3}} = \sqrt{2} V_I \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

**Закон сохранения момента импульса.** Момент импульса частицы относительно неподвижной точки  $O$  (неподвижного начала):

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}],$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный из точки  $O$  к частице,  $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$  — импульс частицы.

Моментом импульса частицы относительно неподвижной оси  $z$  называется проекция  $L_z$  на эту ось момента импульса  $\mathbf{L}$  относительно произвольной точки оси  $z$ .

*Момент силы*  $\mathbf{F}$  относительно неподвижной точки  $O$  (неподвижного начала):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}],$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный из точки  $O$  к точке приложения силы  $\mathbf{F}$ .

*Моментом силы относительно неподвижной оси  $z$*  называется проекция на эту ось вектора момента силы  $\mathbf{F}$  относительно произвольной точки на оси  $z$ .

*Уравнение моментов.* Производная по времени момента импульса  $\mathbf{L}$  частицы равна моменту приложенной к ней силы  $\mathbf{F}$ :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

*Закон сохранения момента импульса частицы.* Если момент действующей на частицу силы относительно неподвижной точки пространства равен нулю, момент импульса частицы относительно этой точки сохраняется:

$$\mathbf{M} = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{L} = \text{const.}$$

*Движение частицы в центральном гравитационном поле.*

При движении в центральном гравитационном поле момент импульса частицы относительно центра поля сохраняется. Траектория движения частицы лежит в плоскости, проходящей через центр поля. Радиус-вектор частицы за равные времена описывает равные площади (*закон площадей*).

*Момент импульса системы частиц* равен векторной сумме моментов импульса всех частиц системы, вычисленных относительно одной и той же неподвижной точки  $O$  пространства:

$$\mathbf{L}_O = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = \sum \mathbf{L}_i,$$

где  $\mathbf{r}_i$  — вектор, проведенный из точки  $O$  к  $i$ -й частице,  $\mathbf{p}_i$  — импульс  $i$ -й частицы.

*Уравнение моментов для системы частиц:*

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}$$

— производная по времени момента импульса  $\mathbf{L}$  системы равна сумме моментов всех внешних сил.

*Закон сохранения момента импульса системы частиц.* Момент импульса замкнутой системы частиц сохраняется:

$$\mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = 0, \quad \mathbf{M}_{\text{внешн}} = \sum_i \mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{L} = \text{const.},$$

где  $\mathbf{M}_{i \text{ внешн}}$  — суммарный момент всех внешних сил, приложенный к частице с порядковым номером  $i$ .

Частные случаи сохранения момента импульса системы частиц.

1. Если система не является замкнутой, но суммарный момент внешних сил относительно некоторой точки равен нулю, момент импульса системы относительно этой точки сохраняется:

$$\mathbf{M}_{i \text{ внешн}} \neq 0, \quad \mathbf{M}_{\text{внешн}} = \sum \mathbf{M}_{i \text{ внешн}} = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \\ \mathbf{L} = \text{const.}$$

2. Если момент внешних сил относительно неподвижной оси  $z$  равен нулю, момент импульса системы относительно этой оси сохраняется:

$$M_{z \text{ внешн}} = 0, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z = 0, \quad \Rightarrow \\ L_z = \text{const.}$$

3. Момент импульса системы приблизительно сохраняется, если момент ограниченной по модулю внешней силы действует в течение короткого промежутка времени:

$$\Delta \mathbf{L} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}_{\text{внешн}} dt = \mathbf{M}_{\text{внешн, средн}} \cdot \Delta t \approx 0, \quad \Rightarrow \\ \mathbf{L} \approx \text{const.}$$

*Формула преобразования момента импульса системы частиц при изменении неподвижного начала:*

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + [\mathbf{a}, \mathbf{p}],$$

где  $\mathbf{L}_O$  и  $\mathbf{L}_{O'}$  — моменты импульса относительно неподвижных точек  $O'$  и  $O$  соответственно;  $\mathbf{a}$  — вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $O'$ ,  $\mathbf{p}$  — импульс системы.

Следствия:

1. Если импульс  $\mathbf{p}$  системы равен нулю, момент импульса не зависит от выбора неподвижного начала (при  $\mathbf{p} = 0$   $\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{O'}$  для любых точек  $O$  и  $O'$ ).

2. В системе центра масс момент импульса системы частиц не зависит от выбора неподвижного начала.

*Формула преобразования суммарного момента сил, действующих на частицы системы, при изменении неподвижного начала:*

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + [\mathbf{a}, \mathbf{F}],$$

где  $\mathbf{M}_O$  и  $\mathbf{M}_{O'}$  — суммарный момент сил относительно неподвижных точек  $O$  и  $O'$ , соответственно;  $\mathbf{a}$  — вектор, проведенный из  $O$  в  $O'$ ,  $\mathbf{F}$  — сумма всех сил.

Следствия:

1. Если сумма  $\mathbf{F}$  всех сил равна нулю, суммарный момент сил не зависит от выбора неподвижного начала.

2. Момент *пары сил* (двух равных по величине и противоположных по направлению сил, параллельные линии действия которых смещены друг относительно друга) не зависит от выбора неподвижного начала.

*Собственный момент импульса* системы частиц — это момент импульса, вычисленный в системе центра масс. Собственный момент импульса не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется (неподвижного начала).

Связь момента импульса  $\mathbf{L}_O$  системы частиц относительно неподвижной точки  $O$  и собственного момента импульса  $\mathbf{L}_{\text{соб}}$ :

$$\mathbf{L}_O = [\mathbf{r}_C, \mathbf{p}] + \mathbf{L}_{\text{соб}},$$

где  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  к центру масс,  $\mathbf{p}$  — импульс системы.

### Динамика твердого тела

Для описания движения твердого тела используются уравнение движения центра масс и уравнение моментов:

$$m \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}},$$

где  $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс,  $\mathbf{L}$  — момент импульса системы,  $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$  и  $\mathbf{M}_{\text{внешн}}$  — сумма всех внешних сил и сумма моментов внешних сил соответственно.

*Момент инерции* твердого тела относительно оси  $z$ :

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2,$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы,  $r_{i\perp}$  — расстояние от  $i$ -й частицы до оси  $z$ , суммирование ведется по всем частицам, на которые мысленно разделено твердое тело (число частиц  $N$  стремится к бесконечности).

Другие представления момента инерции относительно оси  $z$ :

$$I = \int_V r_{\perp}^2 dm = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV,$$

где  $r_{\perp}$  — расстояние от элементарной массы  $dm$  до оси  $z$ ,  $\rho$  — плотность тела в данной точке,  $dV$  — элементарный объем, интегрирование ведется по объему  $V$  тела.

*Моменты инерции однородных тел.*

Момент инерции диска массой  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси симметрии:

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции шара массой  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси симметрии:

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

Момент инерции тонкого стержня массой  $m$  и длины  $l$  относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

Момент инерции тонкого стержня массой  $m$  и длины  $l$  относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его конец:

$$I = \frac{1}{3} ml^2.$$

*Теорема Гюйгенса–Штейнера о параллельном переносе оси момента инерции.* Момент инерции  $I$  тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_C$  относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и величины  $ma^2$ , где  $m$  — масса тела,  $a$  — расстояние между осями:

$$I = I_C + ma^2.$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  его момент импульса  $L_z$  относительно оси  $z$  связан с проекцией на эту ось угловой скорости  $\omega_z$ :

$$L_z = I\omega_z,$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ .

*Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:*

$$I\beta_z = M_z,$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ ,  $\beta_z$  — проекция на ось  $z$  углового ускорения,  $M_z$  — момент внешних сил относительно оси  $z$ .

*Кинетическая энергия  $T$  твердого тела* при вращении вокруг неподвижной оси:

$$T = \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  — угловая скорость.

*Элементарная работа* внешней силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$ :

$$\delta A = M_z d\varphi,$$

где  $d\varphi$  — угол поворота твердого тела за промежуток времени  $dt$ ,  $M_z$  — момент внешней силы относительно оси  $z$ .

*Работа* внешней силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$ :

$$A = \int_0^{\Phi_0} M_z d\varphi,$$

где  $\Phi_0$  — угол поворота тела.

**Гироскопы. Гироскопические силы и моменты сил.** *Гироскопом* называется массивное тело, обладающее осью симметрии, вокруг которой оно способно вращаться с большой угловой скоростью.

*Прецессия гироскопа* — вращение вокруг двух пересекающихся осей: вокруг собственной оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$  (угловая скорость собственного вращения) и вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega'$  (угловая скорость прецессии).

Если  $|\omega| \gg |\omega'|$ , то приблизительно выполняется равенство:

$$\mathbf{L} = I\omega,$$

где  $\mathbf{L}$  — момент импульса гироскопа,  $I$  — момент инерции тела относительно собственной оси симметрии (приближенная теория гироскопа).

*Уравновешенным (ненагруженным)* называется гироскоп, для которого момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю; прецессии нет.

*Неуравновешенным (нагруженным)* называется гироскоп, для которого момент внешних сил относительно неподвижной точки отличен от нуля; нагруженный гироскоп прецессирует.

*Уравнение прецессии:*

$$[\omega' \mathbf{L}] = \mathbf{M},$$

или:

$$[\omega', I\omega] = \mathbf{M},$$

где  $\omega'$  — угловая скорость прецессии,  $\omega$  — угловая скорость собственного вращения,  $\mathbf{L}$  — момент импульса гироскопа,  $\mathbf{M}$  — момент внешних сил относительно неподвижной точки гироскопа.

*Гироскопическими* называются силы, возникающие в подшипниках оси гироскопа при ее вынужденном вращении. Момент гироскопических сил — *гироскопический момент*.

## Механические колебания

**Классификация колебаний.** *Колебательным* называется движение, которое многократно повторяется или приблизительно повторяется через определенные промежутки времени.

*Период колебания* — минимальный промежуток времени, через который движение механической системы повторяется.

*Амплитуда колебания* — величина наибольшего отклонения механической системы от положения равновесия (отклонение характеризуется координатой тела).

*Свободными* называются колебания, которые механическая система совершает около положения устойчивого равновесия после того, как она была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе.

Свободные колебания в отсутствие трения и сопротивления среды являются *гармоническими*.

Частота свободных колебаний в отсутствие сил трения и сопротивления среды называется *собственной частотой* механической системы.

*Затухающими* называются свободные колебания механической системы при наличии сил трения или сопротивления среды. В процессе колебаний механическая энергия системы превращается во внутреннюю энергию колеблющегося тела и окружающей среды (теплоту).

Колебания считаются *малыми*, если в процессе движения отклонение тела от положения равновесия мало, так что *восстанавливающая сила* пропорциональна величине отклонения.

*Вынужденными* называются колебания, возникающие в механической системе под действием внешней периодической силы и происходящие в такт с изменением этой силы.

**Гармонические колебания.** *Гармоническим колебательным движением* называется движение, при котором координата тела (материальной точки) изменяется по закону:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где  $A$  — амплитуда колебания,  $\omega_0$  — циклическая (круговая) частота,  $(\omega_0 t + \alpha)$  — фаза колебания,  $\alpha$  — начальная фаза,  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  — период колебания.

Скорость тела:

$$V_x = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$



Ускорение:

$$a_x = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) = -\omega_0^2 x.$$

Действующая на тело сила:

$$F_x = -m\omega_0^2 x.$$

Уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Гармонические колебания под действием *упругой силы* ( $\kappa$  — жесткость пружины,  $m$  — масса совершающего колебания тела):

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m} x = 0 \text{ — уравнение колебаний,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \text{ — циклическая частота,}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \text{ — период колебания.}$$

Энергия гармонических колебаний:

$$E_{\text{полн}} = \frac{\kappa A^2}{2} = \frac{mV_{\text{макс}}^2}{2} \text{ const.}$$

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle = \langle E_{\text{пот}} \rangle = \frac{1}{2} E_{\text{полн}} = \frac{\kappa A^2}{4}$$

(угловые скобки означают усреднение за время одного периода колебания).

Колебания *математического маятника*:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0 \text{ — уравнение колебаний,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ — циклическая частота,}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ — период колебания.}$$

Колебания *физического маятника* ( $m$  — масса маятника,  $I$  — момент инерции относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса,  $a$  — расстояние от оси вращения до центра масс):

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \varphi = 0 \text{ — уравнение колебаний,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \text{ — циклическая частота,}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \text{ — период колебания.}$$

*Приведенная длина* физического маятника  $l_{\text{пр}}$  равна длине такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебания физического маятника:

$$T_{\text{физ}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}},$$

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{I_C}{ma},$$

где  $I_C$  — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс;  $a$  — расстояние от оси вращения до центра масс.

*Теорема Гюйгенса о центре качания:* приведенные длины и периоды колебания маятников, подвешенных на осях, расстояние между которыми равно  $l_{\text{пр}}$ , одинаковы.

**Затухающие колебания.** Уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x = 0,$$

или:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $b$  — коэффициент сопротивления среды,  $m$  — масса тела (материальной точки),  $\kappa$  — жесткость пружины,  $\beta = b/(2m)$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$  — собственная частота системы.

*Три типа решений уравнения затухающих колебаний.*

I. Если  $\beta < \omega_0$ , тело совершает затухающие колебания.

Зависимость координаты  $x$  от времени:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \alpha) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $A_0$  — начальная амплитуда,  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  — амплитуда затухающих колебаний,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — циклическая частота затухающих колебаний,  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$  — период затухающих колебаний,  $\alpha$  — начальная фаза.

*Скорость* тела при затухающих колебаниях:

$$V_x = A_0 e^{-\beta t} (-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega(\omega t + \alpha)) =$$

$$= A_0 e^{-\beta t} \omega_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi),$$

где  $\cos \varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$ ,  $\text{tg } \varphi = -\frac{\omega}{\beta}$ .

Величины, характеризующие затухание:

1.  $\beta = \frac{b}{2m}$  — коэффициент затухания.

2. Время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз (*время жизни колебаний*):  $\tau = 1/\beta$ .

3. Количество колебаний за промежуток времени, в течение которого их амплитуда уменьшается в  $e$  раз:

$$N_e = \frac{1}{\beta T}.$$

4. *Логарифмический декремент затухания*  $\lambda$  — логарифм отношения амплитуд затухающих колебаний в моменты времени, разделенные промежутком в один период  $T$ :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

5. *Добротность*  $Q$  — умноженное на число  $\pi$  количество колебаний за время, в течение которого их амплитуда уменьшается в  $e$  раз:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T}.$$

II. Если  $\beta > \omega_0$ , то выведенное из равновесия тело возвращается в исходное состояние, не совершая колебаний (*апериодический процесс*).

Зависимость от времени координаты  $x$  тела:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий движения.

III. Если  $\beta = \omega_0$ , то выведенное из равновесия тело возвращается в исходное состояние, не совершая колебаний (*апериодический процесс*).

Зависимость от времени координаты  $x$  тела:

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий движения;  $\beta = \omega_0$  — критический коэффициент затухания.

Зависимость от времени *энергии затухающих колебаний*:

$$E \approx E_0 e^{-2\beta t},$$

где  $E_0$  — значение энергии в начальный момент времени  $t = 0$ .

Энергетический смысл добротности: добротность  $Q$  равна (с точностью до коэффициента  $2\pi$ ) отношению энергии  $E$  затухающих колебаний к величине  $|\Delta E_T|$  потерь энергии за один

период колебания  $T$ :

$$\frac{E}{|\Delta E_T|} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Величина  $Q$  приблизительно равна числу периодов, в течение которых вся механическая энергия совершающей затухающие колебания системы превращается в теплоту.

**Вынужденные колебания.** Уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

где  $\beta = \frac{b}{2m}$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$  — собственная частота системы,  $F_x = F_0 \cos \omega t$  — внешняя вынуждающая гармоническая сила.

Решение уравнения вынужденных колебаний:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + B \cos(\omega t - \varphi),$$

где первое слагаемое — решение уравнения затухающих колебаний ( $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — циклическая частота,  $A_0$  — начальная амплитуда,  $\alpha$  — начальная фаза); второе слагаемое — вынужденное колебание с частотой  $\omega$ , равной частоте вынуждающей силы ( $B$  — амплитуда вынужденного колебания,  $\varphi$  — сдвиг по фазе между внешней вынуждающей силой и вызываемым этой силой колебанием).

По истечении достаточного времени первым слагаемым можно пренебречь, в этом случае:

$$x = B \cos(\omega t - \varphi).$$

Зависимость от частоты  $\omega$  амплитуды  $B$  вынужденных колебаний (уравнение *амплитудной резонансной кривой*):

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Амплитуда  $B$  достигает максимального значения при  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  (резонанс).

Ширина амплитудной резонансной кривой:  $\Delta\omega \approx 2\beta$ .

Зависимость от частоты  $\omega$  разности фаз  $\varphi$  колебаний внешней вынуждающей силы  $\mathbf{F}$  и смещения  $x$  тела (уравнение *фазовой резонансной кривой*):

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

## II. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

*Единица физической величины* — это конкретная физическая величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице. Единицы физических величин воспроизводятся *мерами* — средствами измерений, предназначенными для получения физических величин заданного размера.

*Система единиц физических величин* — это совокупность единиц физических величин, образованная в соответствии с принятыми принципами и построенная на основе физических теорий, отражающих существующую в природе взаимосвязь физических величин. Все системные единицы делятся на *основные*, выбираемые произвольно (метр, килограмм, секунда и др.) и *производные*, образуемые по уравнениям связи между физическими величинами (ньютон, джоуль и др.). Обычно в качестве основных выбирают единицы, которые могут быть воспроизведены эталонами или эталонными установками с наивысшей точностью, соответствующей уровню развития науки и техники в данный исторический период. Физические величины, единицы которых являются основными в данной системе единиц, называются *основными величинами* системы.

Система единиц называется *абсолютной*, если ее основными физическими величинами являются длина, масса и время, а электрические и магнитные величины рассматриваются как производные механических.

*Размерностью физической величины* называется выражение, которое устанавливает связь этой физической величины с основными величинами данной системы единиц. Так, если символ длины  $L$ , символ времени  $T$ , то размерность скорости  $LT^{-1}$ . Физическая величина является *безразмерной*, если в выражение ее размерности все основные величины входят в нулевой степени.

**Международная система единиц.** С 1982 г. в России применяется Международная система единиц (СИ). Определения и обозначения 7 основных и 2 дополнительных единиц этой системы приведены в таблицах 1 и 2, производные единицы СИ — в табл. 3.

Т а б л и ц а 1

## Основные единицы СИ

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Определение единицы физической величины
Длина	L	метр	м	<i>Метр</i> — единица длины, равная расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299792458$ долей секунды.
Масса	M	килограмм	кг	<i>Килограмм</i> — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.
Время	T	секунда	с	<i>Секунда</i> — единица времени, равная $9\,192\,631\,770$ периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.
Сила электрического тока	I	ампер	A	<i>Ампер</i> — сила постоянного тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.
Термодинамическая температура	$\theta$	кельвин	K	<i>Кельвин</i> — единица термодинамической температуры, равная $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды.
Количество вещества	N	моль	моль	<i>Моль</i> — единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и др.), сколько содержится атомов в углероде-12 массой $0,012$ кг.
Сила света	J	кандела	кд	<i>Кандела</i> — единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $0,54 \cdot 10^{15}$ Гц ( $555$ нм), сила излучения которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.

Т а б л и ц а 2

## Дополнительные единицы СИ

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Определение единицы физической величины
Плоский угол	—	радиан	рад	<i>Радиан</i> — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.
Телесный угол	—	стерадиан	ср	<i>Стерадиан</i> — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу этой сферы.

Производные единицы СИ пространства и времени, а также механических величин приведены в таблице 3.

Т а б л и ц а 3

## Производные единицы СИ

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
<i>Производные единицы пространства и времени</i>				
Площадь	$L^2$	квадратный метр	$m^2$	
Объем, вместимость	$L^3$	кубический метр	$m^3$	
Скорость	$LT^{-1}$	метр в секунду	$m/c$	
Ускорение	$LT^{-2}$	метр на секунду в квадрате	$m/c^2$	
Частота	$T^{-1}$	герц	Гц	
Частота вращения	$T^{-1}$	секунда в минус первой степени	$c^{-1}$	
Угловая скорость	$T^{-1}$	радиан в секунду	рад/с	
Угловое ускорение	$T^{-2}$	радиан на секунду в квадрате	рад/с <sup>2</sup>	
<i>Производные единицы механических величин</i>				
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	
Момент инерции	$L^2M$	килограмм-метр в квадрате	$кг \cdot м^2$	

Продолжение таблицы 3

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Примечание
<i>Производные единицы механических величин</i>				
Импульс	$\text{ЛМТ}^{-1}$	килограмм-метр в секунду	$\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$	
Момент импульса	$\text{Л}^2\text{МТ}^{-1}$	килограмм-метр в квадрате в секунду	$\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$	
Сила	$\text{ЛМТ}^{-2}$	ньютон	Н	
Момент силы	$\text{Л}^2\text{МТ}^{-2}$	ньютон-метр	$\text{Н}\cdot\text{м}$	
Импульс силы	$\text{ЛМТ}^{-1}$	ньютон-секунда	$\text{Н}\cdot\text{с}$	
Давление, напряжение механическое, модуль упругости (Юнга, в частности)	$\text{Л}^{-1}\text{МТ}^{-2}$	паскаль	Па	
Поверхностное натяжение	$\text{МТ}^{-3}$	ньютон на метр	$\text{Н}/\text{м}$	
Работа, энергия	$\text{Л}^2\text{МТ}^{-2}$	джоуль	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$
Мощность	$\text{Л}^2\text{МТ}^{-3}$	ватт	Вт	$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж}/\text{с}$
Динамическая вязкость	$\text{Л}^{-1}\text{МТ}^{-1}$	паскаль-секунда	$\text{Па}\cdot\text{с}$	
Кинематическая вязкость	$\text{Л}^2\text{Т}^{-1}$	квадратный метр на секунду	$\text{м}^2/\text{с}$	

**Система единиц СГС.** Кроме единиц СИ допускается в некоторых случаях применение системы единиц СГС (например, в научных работах по физике). В системе СГС в рамках механики использованы 3 основные единицы: длины — сантиметр (см), массы — грамм (г), времени — секунда (с) и 2 дополнительных единицы: плоского угла — радиан (рад), телесного угла —стерадиан (ср). Основные и дополнительные единицы системы СГС либо совпадают с соответствующими единицами СИ, либо являются дольными от них:  $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ ,  $1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$ .

Производные единицы СГС механических величин и их связь с единицами СИ приведены в таблице 4.

Производные единицы СИ и СГС тепловых, электрических, магнитных и др. физических величин (кроме механических) приведены в соответствующих разделах настоящего курса «Физики».



Т а б л и ц а 4

## Производные единицы СГС механических величин

Наименование физической величины	Размерность	Наименование единицы физической величины	Обозначение	Значение единицы СГС в единицах СИ
Плотность	$L^{-3}M$	грамм на кубический сантиметр	г/м <sup>3</sup>	$10^3$ кг/м <sup>3</sup>
Момент инерции	$L^2M$	грамм-сантиметр в квадрате	г·см <sup>2</sup>	$10^{-7}$ кг·м <sup>2</sup>
Импульс	$LM T^{-1}$	грамм-сантиметр в секунду	г·см/с	$10^{-5}$ кг·м/с
Момент импульса	$L^2MT^{-1}$	грамм-сантиметр квадрат в секунду	г·см <sup>2</sup> /с	$10^{-7}$ кг·м <sup>2</sup> /с
Сила	$LM T^{-2}$	дина	дин	$10^{-5}$ Н
Момент силы	$L^2MT^{-2}$	дина-сантиметр	дин·см	$10^{-7}$ Н·м
Импульс силы	$LM T^{-1}$	дина-секунда	дин·с	$10^{-5}$ Н·с
Давление, напряжение механическое, модуль упругости (Юнга, в частности)	$L^{-1}MT^{-2}$	дина на сантиметр в квадрате	дин/см <sup>2</sup>	$10^{-1}$ Па
Поверхностное натяжение	$MT^{-3}$	дина на сантиметр	дин/см	$10^{-3}$ Н/м
Работа, энергия	$L^2MT^{-2}$	эрг	эрг	$10^{-7}$ Дж
Мощность	$L^2MT^{-3}$	эрг в секунду	эрг/с	$10^{-7}$ Вт
Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	пуаз	П	$10^{-1}$ Па·с
Кинематическая вязкость	$L^2T^{-1}$	стокс	Ст	$10^{-4}$ м <sup>2</sup> /с