§6. Логарифм комплексного числа

Определение 6.1. *Логарифмом* числа z, $z \in \boldsymbol{C}$, $z \neq 0$, называется число w, $w \in \boldsymbol{C}$, такое, что $e^w = z$.

Запишем число z в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Пусть $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, таким образом, $w = u + iv$. Теперь равенство $e^w = z$ запишем в виде: $e^{u+iv} = re^{i\varphi}$ или $e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$. Приравняв модули левой и правой частей, получаем: $e^u = r$, значит, $u = \ln r$, где $\ln r$ – натуральный логарифм положительного числа r. Число v найдем из равенства $e^{iv} = e^{i\varphi}$: из свойства 3 степени с комплексным показателем следует, что $iv = i\varphi + i2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т.е. $v = \varphi + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

При всяком целом k положим $w_k = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$. Нетрудно увидеть, что каждое из чисел w_k, $k \in \boldsymbol{Z}$, является логарифмом числа z, и что только эти числа удовлетворяют определению 6.1.

Логарифм комплексного числа z, $z \neq 0$, обозначают через $\ln z$; он имеет бесконечное множество значений,

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{6.1}$$

Обычно под $\ln z$ понимают какое-либо одно число из этого множества.

Пример 6.1. Найти все значения $\ln 1$.

►Пусть $z = 1$. Тогда $r = |z| = 1$, $\varphi = \arg z = 0$. Значит, каждое из чисел $w_k = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = i2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является логарифмом единицы, $\ln 1 = i2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Среди этих чисел только одно вещественное: $w_0 = 0$.◄

Пример 6.2. Найти все значения $\ln x$, где $x < 0$.

►Пусть $z = x$, тогда $r = -x$, $\varphi = \pi$. Каждое из чисел $w_k = \ln|-x| + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является логарифмом отрицательного числа x. Среди этих чисел нет вещественных. Таким образом, известное утверждение школьной алгебры «отрицательные числа не имеют логарифмов» следует понимать так: логарифмы отрицательных чисел не имеют вещественных значений.◄