§3. Теоремы о среднем для интеграла.

Среднее значение функции на промежутке

Теорема 3.1. Пусть функция $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ удовлетворяет неравенствам $m \le f(x) \le M$. Тогда существует число μ, заключенное между теми же пределами *m* и *M*, $m \le \mu \le M$, такое, что имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \qquad (3.1)$$

► Рассмотрим сначала случай, когда $a < b$,тогда $b - a > 0$. Применим свойство 7 об оценках интеграла: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Разделим все части последнего неравенства на $b-a$: $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. Положив $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, найдём, что $m \le \mu \le M$ и $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$.

При $a = b$ формула (3.1) остаётся справедливой, так как тогда обе её части равны нулю. Если $a > b$, то $b < a$, и для промежутка $[b,a]$ по доказанному имеем $\int_b^a f(x)dx = \mu(a-b)$. Отсюда $-\int_a^b f(x)dx = -\mu(b-a)$ и далее $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Все случаи рассмотрены. Теорема доказана. ◄

Геометрический смысл равенства (3.1). Если функция $f(x)$ неотрицательна в промежутке интегрирования, то площадь криволинейной трапеции, выраженной рассматриваемым интегралом, равна площади прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой μ (рис. 3.1). Высота μ прямоугольника подбирается так, чтобы площадь части трапеции, находящейся вне прямоугольника, равнялась площади части прямоугольника, находящейся вне трапеции.

Теорема 3.2. Если функция $f(x)$ в промежутке интегрирования $[a,b]$ непрерывна то в этом промежутке существует такая точка *c*, что выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (3.2)$$

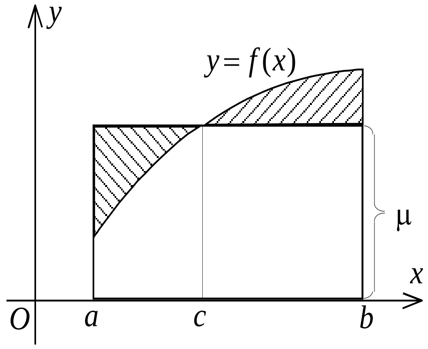

Рис. 3.1. Геометрическая иллюстрация теорем о среднем 3.1 и 3.2 для

Геометрическая интерпретация равенства (3.2) показана на рис. 3.1. В этом случае $\mu = f(c)$.

► Так как по условию функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она принимает на этом промежутке как свое наименьшее значение *m*, так и свое наибольшее значение *M*. Поэтому $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$. Тогда по предыдущей теореме 3.1 имеет место формула (3.1): $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, где μ – промежуточное число, лежащее между значениями функции m и M. По теореме Больцано – Коши, непрерывная функция $f(x)$ принимает это промежуточное значение в некоторой точке c промежутка $[a,b]$: $\mu = f(c)$ и формула (3.1) переходит в формулу (3.2). ◄

Определение 3.1. Число μ из теоремы о среднем 3.1 для интеграла, определяемое равенством

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx, \tag{3.3}$$

называется *средним* значением функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ (точнее, *интегральным средним* функции на промежутке).

***Замечание 3.1.*.** К формуле (3.3) можно прийти естественным путем, который и объясняет название «среднее» для величины μ. Разобьем промежуток $[a,b]$ на n частей равной длины $\Delta x = (b-a)/n$ точками $a{=}x_0, x_1, \ldots, x_n{=}b$. Рассмотрим среднее арифметическое значений функции в точках деления промежутка:

$$y_{\text{ср}} = \frac{f(x_0)+\ldots+f(x_{n-1})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

***Пример 3.1.*.** Найти среднее значение функции $y = x^2$ на промежутке $[0,2]$.

► $\mu = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{1}{6}\cdot 8 = \frac{4}{3}$. Здесь $m=0$; $M=4$; $0 < \frac{4}{3} < 4$. ◄

*** Теорема 3.3 (***обобщённая теорема о среднем для интеграла***).** Пусть функция $f(x)$ в промежутке интегрирования $[a,b]$ удовлетворяет неравенствам $m \le f(x) \le M$, а функция $\rho(x)$, называемая весовой, неотрицательна. Тогда между m и M существует число μ., $m \le \mu \le M$, такое, что имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx = \mu\int\limits_a^b \rho(x)dx. \tag{3.4}$$

► Умножим все части неравенств $m \le f(x) \le M$ на $\rho(x)$ и проинтегрируем получившиеся неравенства по промежутку $[a,b]$. Получаем

$$m\int\limits_a^b \rho(x)x \le \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \le M\int\limits_a^b \rho(x)dx. \tag{$*$}$$

Рассмотрим два случая.

1) $\int\limits_a^b \rho(x)dx = 0$. Тогда из последних неравенств $(*)$ заключаем, что и $\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx = 0$. В этом случае слева и справа в формуле (3.1) стоят нули, поэтому формула (3.1) верна.

2) $\int_a^b \rho(x)dx > 0$. Разделим все части неравенств $(*)$ на положительное число $\int_a^b \rho(x)dx$. Получаем

$$m \le \int_a^b \rho(x) f(x)dx \Big/ \int_a^b \rho(x)dx \le M . \qquad (**)$$

Положим $\mu = \int_a^b \rho(x) f(x)dx \Big/ \int_a^b \rho(x)dx$. Отсюда $\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \mu \int_a^b \rho(x)dx$. Из неравенств $(**)$ заключаем, что $m \le \mu \le M$. ◄

Определение 3.2. Число μ из обобщенной теоремы 3.3 о среднем для интеграла, определяемое равенством

$$\mu = \int_a^b \rho(x) f(x)dx \Big/ \int_a^b \rho(x)dx , \qquad (3.5)$$

называется *средневзвешенным* значением функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ при весовой функции $\rho(x)$. Предполагается при этом, что $\int_a^b \rho(x)dx > 0$.

***Замечание 3.2.*.** К формуле (3.5) можно прийти таким же естественным путем предельного перехода, как и для формулы (3.3). Она является более общей, чем (3.3). Формула (3.3) получается из (3.5) при $\rho(x) = C = \text{const}$. Формула (3.5) применяется в теории вероятностей для нахождения среднего значения случайной величины. Рассмотренные формулы (3.3) и (3.5) указывают еще на одну роль определённого интеграла как оператора усреднения значений функции.

Пример 3.2. $f(x) = x^2$; $\rho(x) = x$. Требуется найти μ по формуле (3.5) для промежутка $[0, 2]$.

► Заметим, что на $[0, 2]$ выполняются неравенства

$$0 \le x^2 \le 4; \quad \int_0^2 \rho(x)dx = \int_0^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2 > 0 .$$

Тогда

$$\mu = \int_0^2 x \cdot x^2 dx \Big/ \int_0^2 xdx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{4} = 2 .$$

Отметим, что $0 < 2 < 4$. ◄