Раздел 3

Аналитическая геометрия

Поверхности второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка

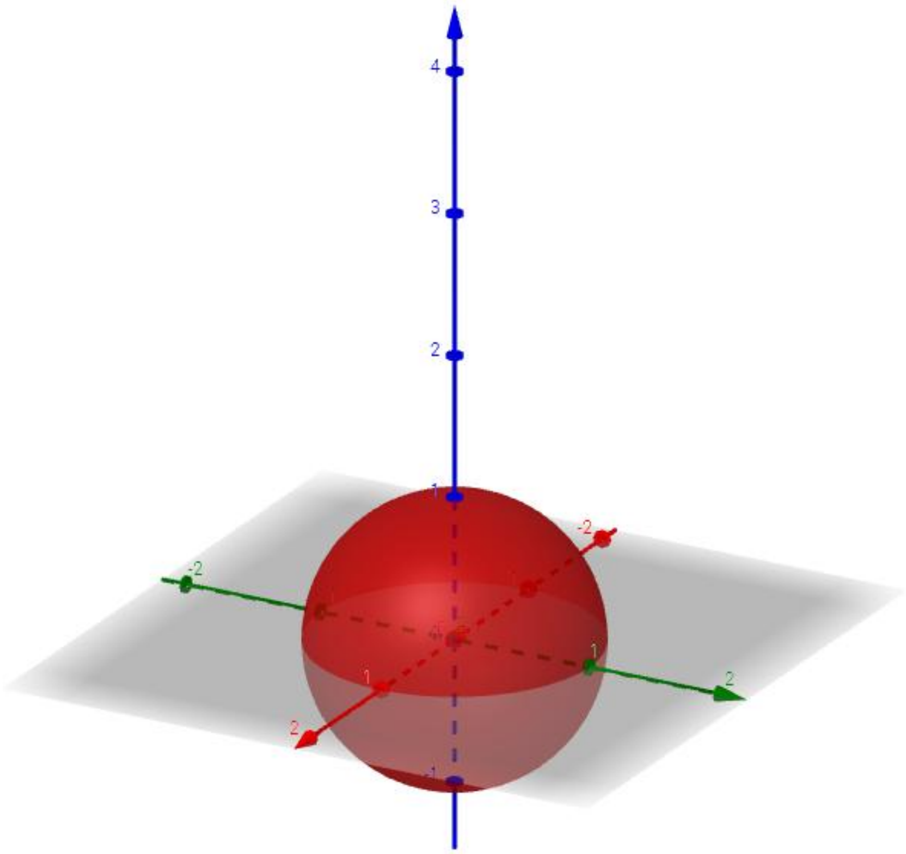
Уравнение

$$Ax^2 + 2By^2+2Cz^2+2Dxy+ 2Exz+2Fyz+$$
$$+2Gx+2Hy + 2Iz + J=0,$$

где $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2>0$, является уравнением поверхности второго порядка (ПВП).

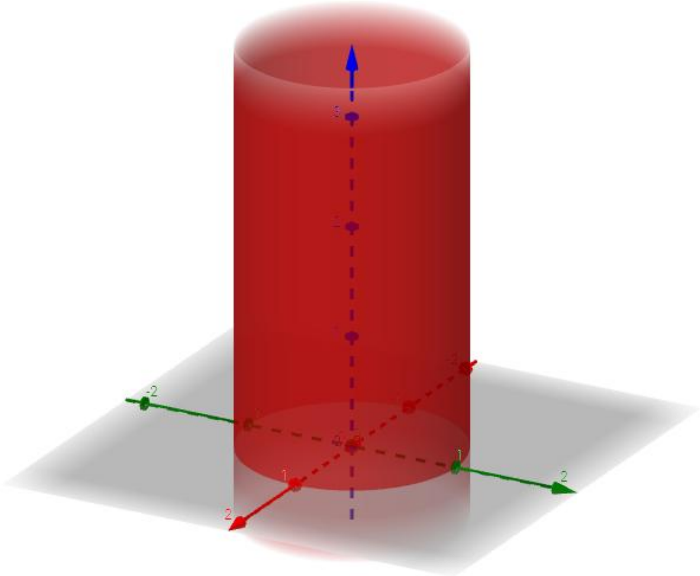
Примеры

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$ уравнение сферы



$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

уравнение прямого кругового цилиндра



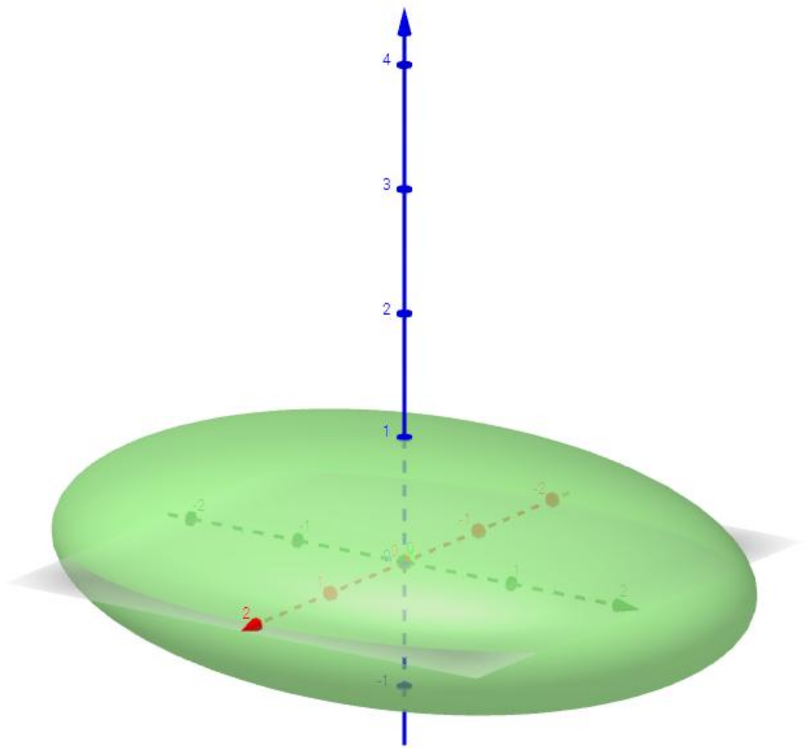
Эллипсоид

Эллипсоид – поверхность второго порядка, уравнение которой в подходящей системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

каноническое уравнение эллипсоида

Изображение эллипсоида



Эллипсоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.
- В сечении плоскостью, перпендикулярной любой координатной оси, получается эллипс.

Гиперболоиды

Гиперболоиды – поверхности второго порядка, уравнения которых в подходящей системе координат имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

однополостный гиперболоид

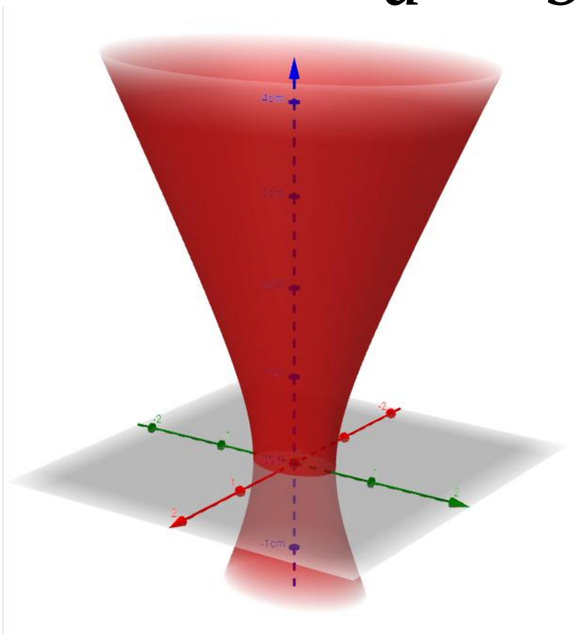
двуполостный гиперболоид

Гиперболоиды обладают:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.

однополостный гиперболоид

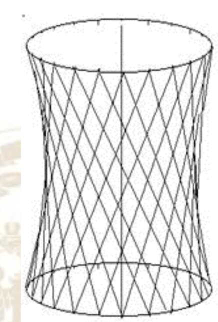
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получается эллипс.

- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получается гипербола.

- Однополостный гиперболоид – линейчатая поверхность.

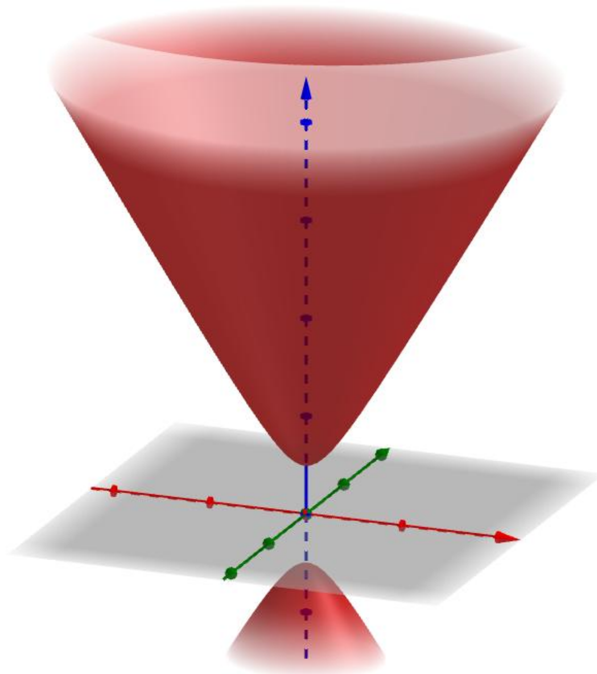


Шуховская башня в Москве
строительство 1920 – 1922
высота 160 м

Телебашня в Гуанчжоу (Китай)
строительство 2005 – 2009
высота 600 м

двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



- $|z| \geq c.$
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получаются эллипсы.
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получаются гиперболы.

Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=d$$

$d>0$ → однополостный гиперболоид

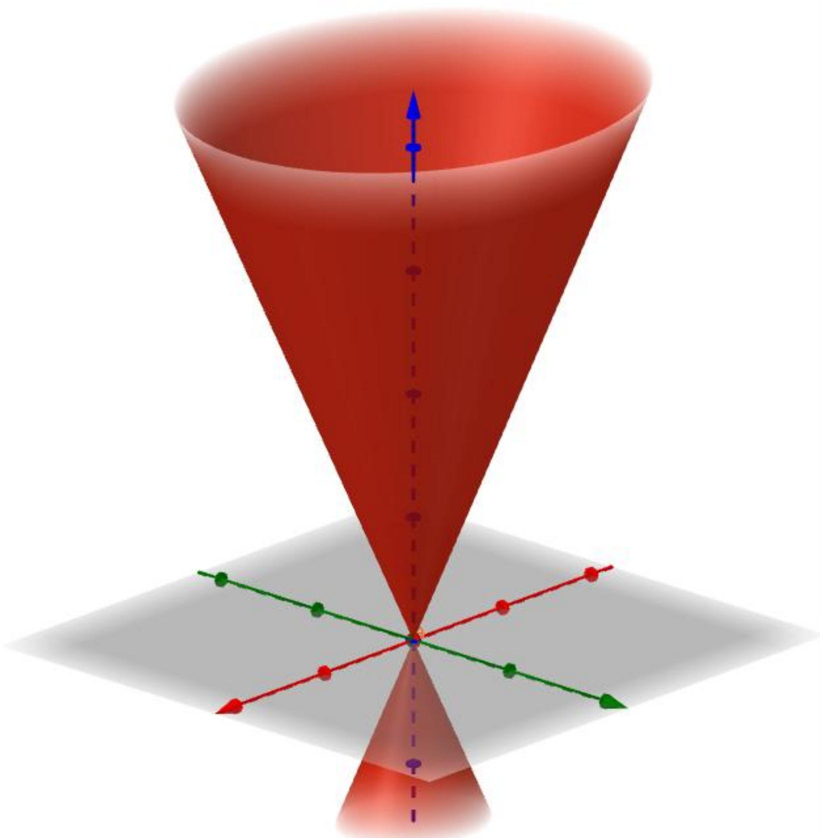
$d<0$ → двуполостный гиперболоид

$d=0$ → ?

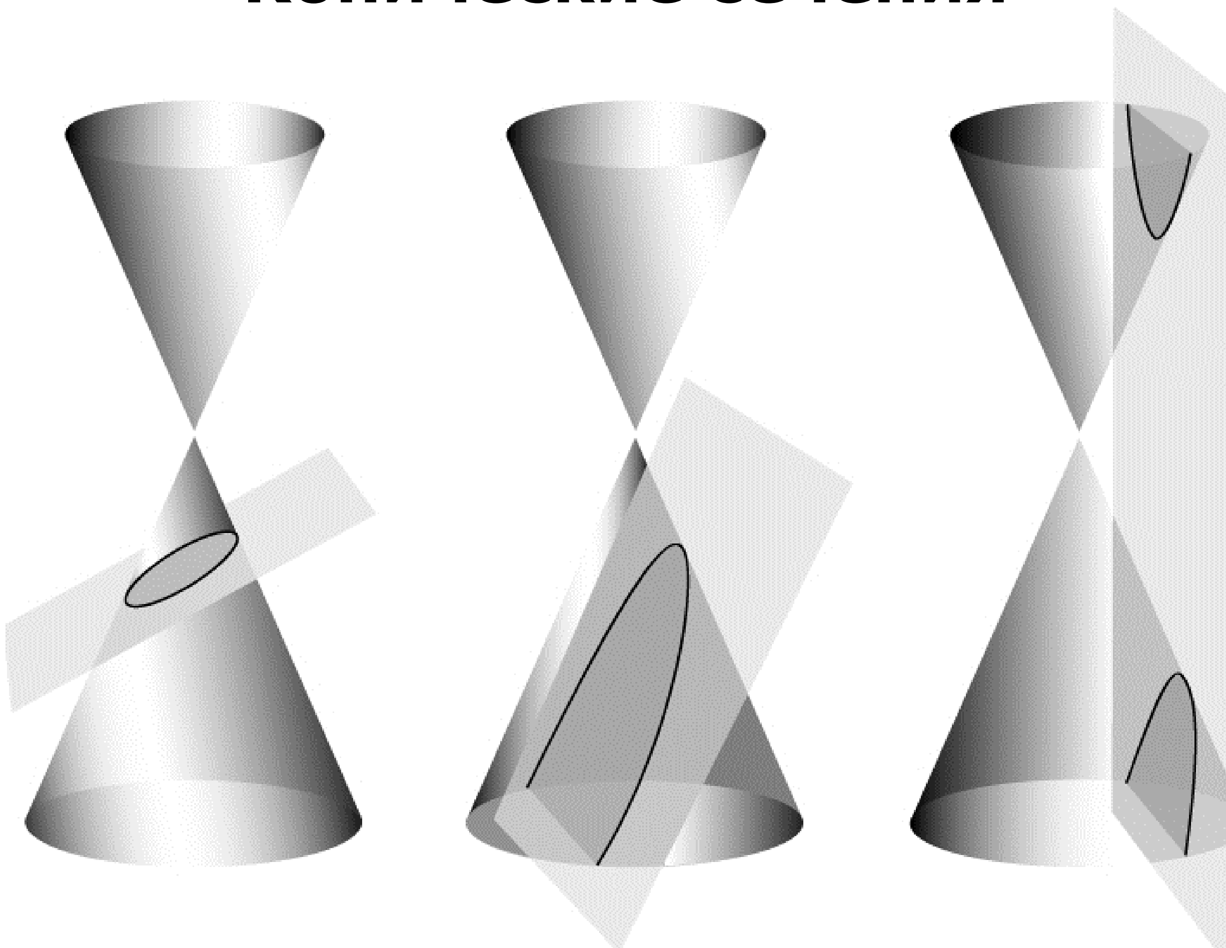
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Конические сечения



эллипс　　парабола　　гипербола

Параболоиды

Параболоиды – поверхности второго порядка, уравнение которых в подходящей системе координат имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

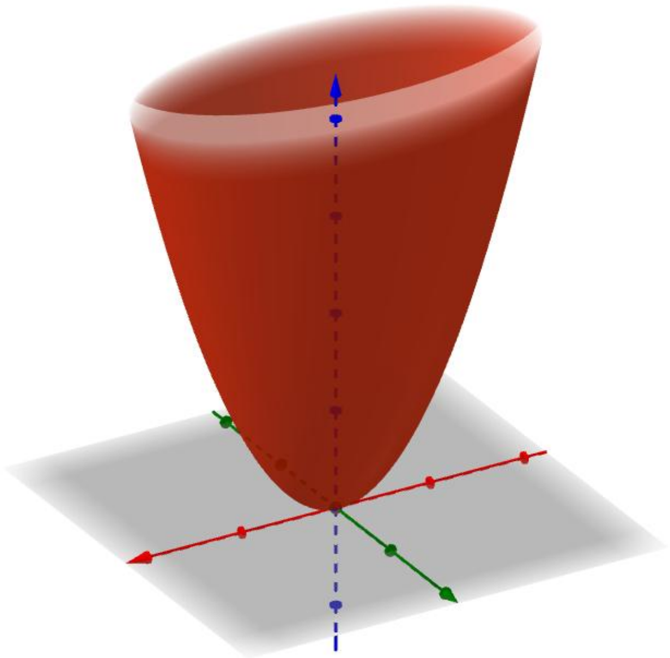
эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

гиперболический параболоид

эллиптический параболоид

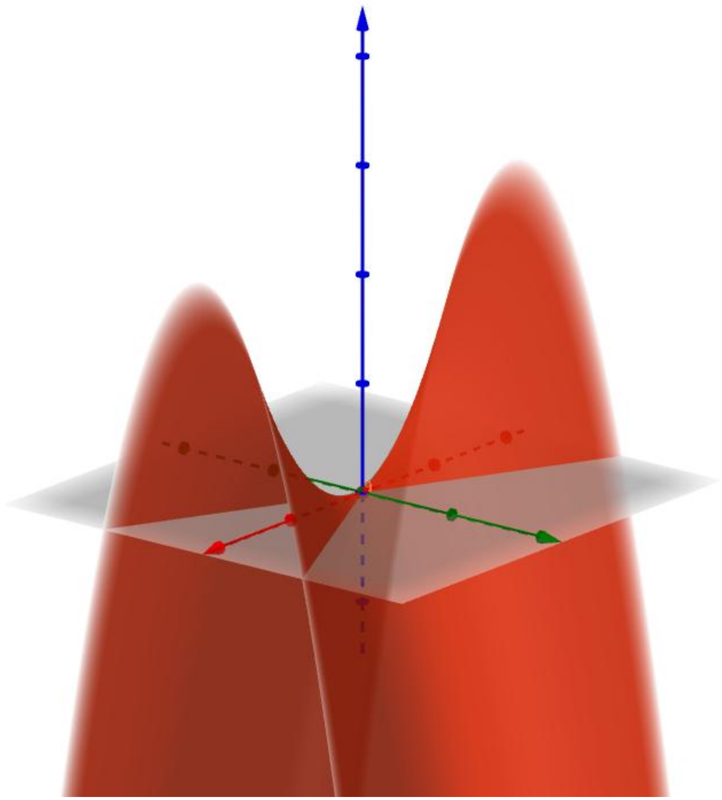
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$$



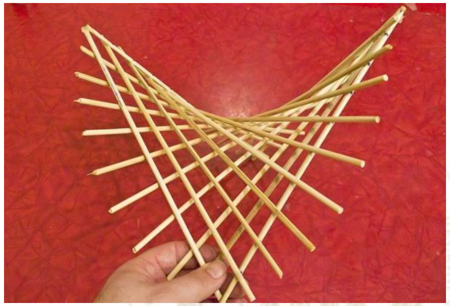
- $z \geq 0$
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получается эллипс.
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получается парабола.

гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



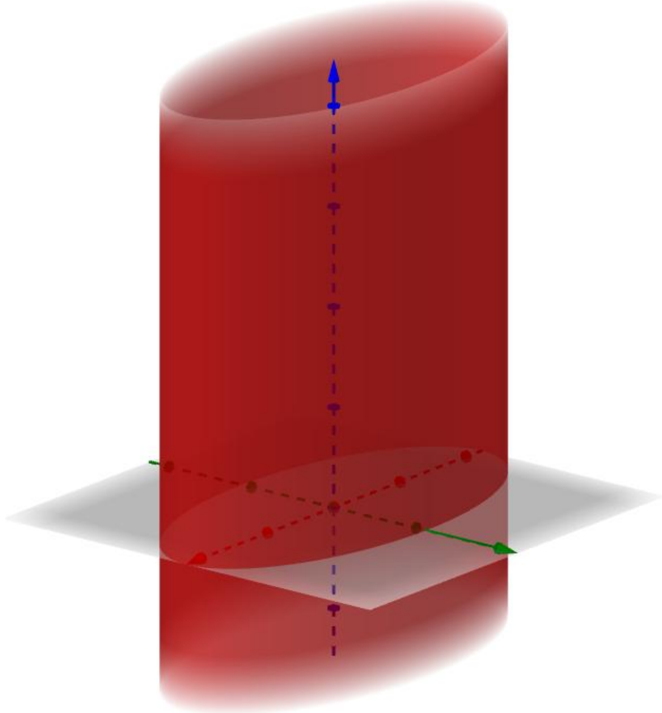
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получается гипербола.
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получается парабола.
- Гиперболический параболоид – линейчатая поверхность.



Цилиндрические поверхности

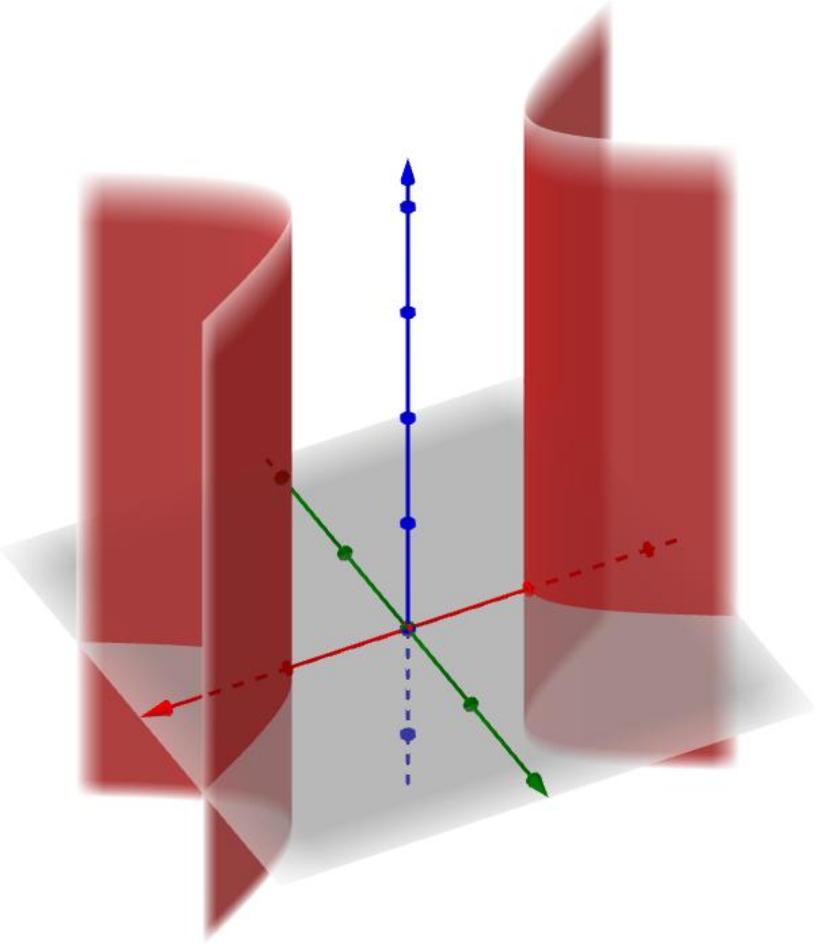
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллиптический цилиндр



гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



параболический цилиндр

$$y^2=2px$$