§2. Свойства пределов функций

В силу определения 1.1 свойства пределов функций аналогичны свойствам сходящихся последовательностей (см. §3, глава 2).

Теорема 2.1. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то он единственный.

Теорема 2.2 (*теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел*). Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

1. $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B,$ 2. $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B,$

3. $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при условии, что функция $g(x)\neq 0$ на $\overset{\circ}{U}(a)$ и $B\neq 0$.

Теорема 2.3 (*о сжатой функции*). Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на $\overset{\circ}{U}(a)$ и для $\forall x\in \overset{\circ}{U}(a)$ справедливо неравенство $f(x)\le g(x)\le h(x)$, а также $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x)=A$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

Доказательство теорем 2.1– 2.3 можно провести, используя определение 1.1 и соответствующих теорем о свойствах сходящихся последовательностей –теорема о единственности предела числовой последовательности (теорема 3.1 глава 2), теорема об арифметических операциях над сходящимися последовательностями (теорема 3.5 глава 2) и теорема о сжатой последовательности (теорема 3.4 глава 2).

Замечание 2.1. Теоремы 2.1 – 2.3 верны также и в случае, когда под a понимается один из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 2.4 (*об ограниченности функции, имеющий предел в точке*). Если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то существует некоторая достаточно малая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

►Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Тогда для $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$: неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ или $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ верно для $\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\subset D(f)$ верно (определение предела функции в точке по Коши – определение 1.2). Положив $\varepsilon=1$, заключаем, что неравенство $A-1<f(x)<A+1$ выполняется для $\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, а это и означает, что функция $f(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ – проколотой окрестности точки a.◄

Теорема 2.5 (*о сохранении знака функции, имеющей предел в точке*). Если функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел в точке a, то существует некоторая достаточно малая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции сохраняют знак её предела.

►Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\neq 0$, для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$: неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ или $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ верно для $\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (определение 1.2). При $\varepsilon=|A|$ получаем неравенство: $A-|A|<f(x)<A+|A|$, справедливое для $\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. При $A<0$ из него следует: $2A<f(x)<0$, а при $A>0$ имеем: $0<f(x)<2A$.

Два последних неравенства выполняются для $\forall x \in U_\delta(a)$, т. е. найдена проколотая окрестность, а именно, $U_\delta(a)$, где функция имеет знак своего предела.◄

Теорема 2.6 (*о замене переменной при вычислении пределов или о пределе сложной функции*). Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ и $\lim\limits_{y\to b} f(y)=A$, при этом $\varphi(x)\neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, то на $\overset{\circ}{U}(a)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$, которая имеет предел при $x\to a$, при этом справедливо равенство: $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim\limits_{y\to b} f(y)=A$.

►Из существования пределов функций $\varphi(x)$ при $x\to a$ и $f(y)$ при $y\to b$ следует, что эти функции определены на некоторых проколотых окрестностях $\overset{\circ}{U}(a)$ и $\overset{\circ}{U}(b)$, причём для $x\in\overset{\circ}{U}(a)$ значение функции $y=\varphi(x)\in\overset{\circ}{U}(b)$. Таким образом, на $\overset{\circ}{U}(a)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$.

Пусть $\{x_n\}\subset\overset{\circ}{U}(a)$ – любая последовательность, сходящаяся к a. В силу определения предела функции в точке по Гейне (определение 1.1) последовательность $\{y_n\}$, где $y_n=\varphi(x_n)$, сходится к b, при этом $y_n\in\overset{\circ}{U}(b)$. Поэтому последовательность $\{f(y_n)\}=\{f(\varphi(x_n))\}$ сходится к A (определение 1.1), а это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim\limits_{y\to b} f(y)=A$.◄

Замечание 2.2. При вычислении пределов полезна теорема: “Любая элементарная функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке предел, равный $f(x_0)$ (т.е. $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$)”. Она выражает свойство непрерывности элементарной функции, определённой на некотором промежутке (теорема 5.1 главы 4).

Пример 2.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-8)/\log_2 x$.

►Пусть $f(x)=x^2-8$, $g(x)=\log_2 x$. Данные функции элементарные, определённые в некоторой окрестности точки $x=4$, поэтому в силу замечания 2.2, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)=8$, $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=g(4)=\log_2 4=2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 4} f(x)/g(x)=8/2=4$ (теорема 2.2).◄