§2. Классификация точек разрыва непрерывности

Исследование функции в окрестности точки, где она не является непрерывной, играет важную роль в изучении функции. Оно особенно важно для построения графика функции.

Определение 2.1. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в ней нарушено хотя бы одно из трёх условий определения функции, непрерывной в точке (определения 1.1).

При этом различают следующие случаи.

1°. Существует конечный предел функции $f(x)$ в точке $x=x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но либо $f(x)$ не определена при $x=x_0$, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. В этом случае x_0 называют точкой *устранимого разрыва* данной функции.

Пример 2.1. Показать, что функция $f(x)=(\sin x)/x$ имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв.

► $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}((\sin x)/x)=1$, но функция не определена в точке $x=0$, поэтому точка $x=0$ – точка устранимого разрыва данной функции.◄

Пример 2.2. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+x)/(x+1), & \text{при } x\neq -1,\\ -2, & \text{при } x=-1,\end{cases}$$

имеет в точке $x=-1$ устранимый разрыв и построить её график.

► $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1} x=-1$, но $f(-1)=-2\neq -1$, поэтому $x=-1$ – точка устранимого разрыва. Для построения графика $f(x)$ преобразуем задающее её выражение:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{при } x\neq -1,\\ -2, & \text{при } x=-1.\end{cases}$$

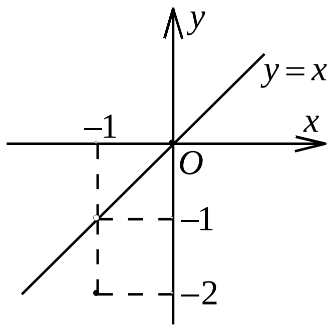

Рис. 2.1. График функции $f(x)$ из примера 2.2

График данной функции приведён на рис. 2.1, точка (–1, –2) принадлежит графику.◄

Замечание 2.1. Функцию $f(x)$ с устранимым разрывом в точке x_0 можно доопределить или переопределить, приняв за её значение в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Построенная таким образом функция

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{при } x\neq x_0,\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{при } x=x_0\end{cases}$$

будет непрерывной в точке x_0. В этой связи точку x_0 и называют точкой устранимого разрыва.

Так, для функции $f(x)$ из примера 2.2

$$f^*(x)=\begin{cases}(x^2+x)/(x+1), \text{ при } x\neq -1,\\ -1, \qquad\qquad\qquad\; \text{при } x=-1\end{cases} \quad \text{или} \quad f^*(x)=x.$$

Эта функция непрерывна в точке $x=-1$.

2°. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но при этом существуют оба односторонних конечных предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, которые, очевидно, не равны друг другу. Точка x_0 называется точкой *разрыва 1–го рода*, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 2.3. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}0, \qquad\;\; \text{при } x<1,\\ 2-x, \text{ при } x\geq 1,\end{cases}$$

имеет в точке $x=1$ разрыв 1-го рода и построить её график.

►Не существует $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (пример 1.5 главы 3), но существуют $f(1-0)=0,\ f(1+0)=1$. Скачок функции $f(x)$ в данной точке равен $f(1+0)-f(1-0)=1$. График $f(x)$ приведён на рис. 2.2.◄

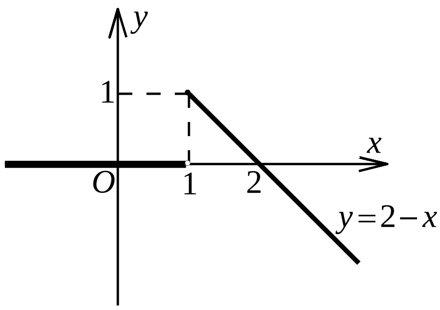

Рис. 2.2. График функции $f(x)$ из примера 2.3

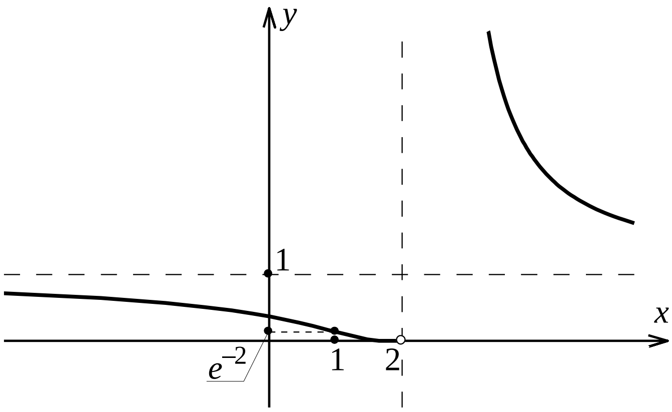

Рис. 2.3. График функции $f(x)=e^{2/(x-2)}$

3°. В точке x_0 функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен. Точка x_0 называется точкой *разрыва 2–го рода*.

Пример 2.4. Показать, что функция $f(x)=e^{2/(x-2)}$ имеет в точке x=2 разрыв 2-го рода.

► $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} e^{2/(x-2)}=\left|z=-2/(x-2)\right|=\lim\limits_{z\to+\infty} e^{-z}=0$ (пример 4.2 и теорема 4.4 главы 3), $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} e^{2/(x-1)}=\left|z=2/(x-2)\right|=\lim\limits_{z\to+\infty} e^{z}=+\infty$

(пример 4.2 главы 3). График данной функции приведён на рис. 2.3.◄