§4. Обратная матрица

1°. Понятие обратной матрицы. Существование и единственность обратной матрицы. Присоединенная матрица.

Определение 4.1. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица B называется *правой обратной* для матрицы A, если $AB = E_n$, где E_n–единичная матрица порядка n. Матрица C называется *левой обратной* для матрицы A, если $CA = E_n$. Матрица, являющаяся одновременно правой и левой обратной по отношению к матрице A, называется *обратной* к матрице A.

Для матрицы, обратной к матрице A, принято обозначение A^{-1}.

Таким образом, для матрицы A^{-1} справедливо равенство $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.

Пример 4.1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную.

►Пусть $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Найдём элементы матрицы B из условия: $BA=E$, где E – единичная матрица 2-го порядка, имеем: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Из определения произведения матриц (определение 2.1) и определения равных матриц (определение 1.1) для a, b, c, d получаем следующую систему: $a + 2b = 1$, $a + 3b = 0$, $c + 2d = 0$, $c + 3d = 1$. Решением этой системы являются следующие значения a, b, c, d: $a = 3$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 1$, следовательно, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – левая обратная матрица для матрицы A. Поскольку $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, то B является также и правой обратной матрицей для матрицы A. Таким образом, в соответствии с определением 4.1, B – обратная матрица для матрицы A.◄

Замечание 4.1. В силу определения 2.1 матрицы B и C из определения 4.1 также должны быть квадратными матрицами порядка n.

Определение 4.2. Квадратная матрица A называется *невырожденной* (*неособенной*), если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется *вырожденной* (*особенной*).

Теорема 4.1. Если матрица A имеет правую или левую обратную матрицу, то она невырожденная.

►Пусть B – правая обратная матрица для матрицы A, $AB = E$ (определение 4.1, E – единичная матрица), поэтому $\det(AB) = 1$. Имеем: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (теорема 2.1), значит, $\det A \cdot \det B = 1$. Отсюда следует, что $\det A \neq 0$, т.е. матрица A является невырожденной. Аналогично рассматривается случай, когда матрица A имеет левую обратную матрицу. ◄

Следствие из теоремы 4.1. Если матрица A вырожденная, то она не имеет обратной.

Теорема 4.2 **(о существовании и единственности обратной матрицы).** ***Всякая невырожденная квадратная матрица* A n*-го порядка имеет единственную обратную матрицу* A^{-1}*, для которой справедливо равенство***

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

►Для простоты выкладок ограничимся случаем, когда A – квадратная матрица 3-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Она образуется из матрицы A заменой её элементов их алгебраическими дополнениями и последующим транспонированием полученной матрицы. Покажем, что справедливо равенство:

$$AA^{\vee} = A^{\vee}A = \det A \cdot E, \tag{4.2}$$

где E – единичная матрица 3-го порядка. Имеем:

$$AA^{\vee} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение действия умножения матриц для элемента c_{ij} матрицы $C = AA^{\vee}$ приводит к соотношению:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3},\ i, j = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

При $i = j$ в соответствии с теоремой о разложении определителя по элементам какой-либо строки (§3, глава 1, свойство 7) из (4.3) следует: $c_{ii} = \det A$, а при $i \neq j$ в силу теоремы аннулирования (см. упомянутый параграф) – $c_{ij} = 0$. Таким образом, для произведения матриц A и $A^{\vee}$ получаем:

$$AA^{\vee} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } AA^{\vee} = \det A \cdot E.$$

Аналогично доказывается равенство $A^{\vee}A = \det A \cdot E$.

Поскольку по условию матрица A невырожденная, то $\det A \neq 0$. Пусть

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\vee}. \tag{4.4}$$

Очевидно, что введённая таким образом матрица A^{-1} совпадает с матрицей A^{-1} из (4.1). В силу (4.2) и свойств действий с матрицами имеем

$$AA^{-1} = A\left(\frac{1}{\det A} A^{\vee}\right) = \frac{1}{\det A} AA^{\vee} = \frac{1}{\det A} \det A \cdot E = E$$

и аналогично

$$A^{-1}A = E.$$

Итак, матрица A^{-1} из (4.4) (и, следовательно, из (4.1)) является обратной к матрице A. Покажем, что A^{-1} – единственная обратная матрица для невырожденной матрицы A. Предположим противное, что существует матрица $B : BA = E,\ B \neq A^{-1}$. Умножим последнее равенство справа на A^{-1}, получим:

$$BAA^{-1} = EA^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = A^{-1} \Rightarrow BE = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Полученное равенство противоречит предположению $B \neq A^{-1}$, следовательно, это предположение неверно и A^{-1} – единственная левая обратная матрица для матрицы A. Аналогично доказывается, что A^{-1} – единственная правая обратная матрица для A. Таким образом, приходим к выводу, что A^{-1} – единственная обратная матрица для матрицы A.◄

Определение 4.3. Матрица

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

из правой части соотношения (4.1), называется *присоединённой* по отношению к матрице A и обозначается $A^{\vee}$.

Формула (4.1) с помощью присоединённой матрицы переписывается в виде (4.4).

Пример 4.2. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

► $\det A = -5 \neq 0 \Rightarrow$ матрица A неособенная и имеет обратную. Вычислим алгебраические дополнения её элементов:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3.$$

Теперь в силу формулы (4.1) для обратной матрицы имеем:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2 & -6\\ 1 & -1 & -2\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Покажем, например, что $A^{-1}A=E$.

$$A^{-1}A=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2 & -6\\ 1 & -1 & -2\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3-2-6 & 0+6-6 & 6+0-6\\ 1+1-2 & 0-3-2 & 2+0-2\\ -4+1+3 & 0-3+3 & -8+0+3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E. \blacktriangleleft$$

Свойства обратной матрицы

1. $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$.

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3. $(A^{-1})^{-1}=A$.

4. $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

►**1.** Это свойство следует из равенства $A\,A^{-1}=A^{-1}A=E$ и теоремы об определителе произведения двух матриц (теорема 2.1).

2. Используя ассоциативное свойство умножения матриц, покажем, что

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=E. \qquad (4.5)$$

Действительно, $(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$. Из равенства (4.5) следует, что $B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$.

3. Умножим обе части верного равенства $(A^{-1})^{-1}A^{-1}=E$ справа на матрицу A: $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A=EA$. Теперь, использовав ассоциативное свойство умножения матриц, приходим к соотношению:
$(A^{-1})^{-1}(A^{-1}A)=A\Rightarrow(A^{-1})^{-1}E=A\Rightarrow(A^{-1})^{-1}=A$, что и требовалось доказать.

4. Перейдём в равенстве $A\,A^{-1}=E$ к транспонированным матрицам, получим:

$(A^{-1})^{T}A^{T}=E$, откуда и следует доказываемое равенство.◄

2°. Обращение матрицы методом элементарных преобразований. Для матрицы большого размера вычисление обратной матрицы по формуле (4.1) связано с трудоёмкими вычислениями. В этом случае используется *метод элементарных преобразований*. Вместо данной квадратной матрицы A

порядка n рассматривается прямоугольная матрица $(A\,|\,E)$размера $n\times 2n$, первые n столбцов которой есть столбцы матрицы A, а вторые n столбцов – столбцы единичной матрицы E того же порядка (обычно она отделяется от исходной матрицы чертой). При помощи элементарных преобразований над строками, эта матрица приводится к виду $(E|B)$. Тогда A^{-1}=B. В самом деле, приведение матрицы A указанным способом к единичной матрице эквивалентно её умножению слева на матрицу A^{-1}. Но тогда и вся матрица $(A\,|\,E)$ умножается слева на A^{-1}, в результате получаем матрицу: $(E\,|\,A^{-1})$, откуда следует доказываемое равенство.

Пример 4.3. Методом элементарных преобразований найти матрицу, обратную к матрице A из примера 4.2.

►Припишем к матрице A справа единичную матрицу 3-го порядка, получим матрицу C и проведём последовательно такие элементарные преобразования:

1. из третьей строки матрицы C вычтем первую, а ко второй строке прибавим первую и после этого поменяем местами вторую и третью строки:

$$C=\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

2. из последней строки вычтем вторую, умноженную на 3 и после этого последнюю строку разделим на 5:

$$C\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right);$$

3. ко второй строке прибавим последнюю строку, а из первой строки вычтем последнюю строку, умноженную на 2:

$$C\to\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right).$$

Элементы, находящиеся справа от черты, и составят обратную матрицу к матрице A. Следовательно, имеем

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3/5 & -2/5 & 6/5 \\ -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получен тот же результат, что и в примере 4.2.◄