§4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{4.1}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$.

Введем линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n\,,$$

тогда уравнение (4.1) запишется так:

$$L[y] = 0\,. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) всегда интегрируется в конечном виде, и интегрирование, как будет показано ниже, сводится к алгебраическим операциям. Для нахождения общего решения уравнения (4.1) достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему.

Будем искать частное решение уравнения (4.1) в виде

$$y = e^{\lambda x}\,, \tag{4.3}$$

где λ – некоторое число.

Очевидно следующее тождество:

$$L[e^{\lambda x}] \equiv e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)\,. \tag{4.4}$$

Если обозначить

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$

то тождество (4.4) примет вид

$$L[e^{\lambda x}] \equiv e^{\lambda x}\varphi(\lambda)\,. \tag{4.5}$$

Многочлен $\varphi(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение $\varphi(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением*.

Из (4.4), (4.5) следует, что если $\lambda = \lambda_1$ является корнем характеристического многочлена, то функция $y = e^{\lambda_1 x}$ будет частным решением уравнения (4.1) или, что то же самое, уравнения (4.2).

Характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ – это многочлен n-й степени относительно λ, и поэтому он имеет n корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность. Рассмотрим возможные случаи.

1. Корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ характеристического многочлена – вещественные различные. Тогда

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}\,, \tag{4.6}$$

есть частные решения уравнения (4.1). Покажем, что (4.6) будет фундаментальной системой уравнения (4.1).

Составим определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель – это известный определитель Вандермонда, который равен $\prod_{j<i}(\lambda_i-\lambda_j)$.

Таким образом, получаем окончательно

$$W(x)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}\prod_{j<i}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0 \quad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

Следовательно, система решений (4.6) будет фундаментальной на промежутке $(-\infty,+\infty)$, а тогда функция

$$Y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\dots+C_ne^{\lambda_n x}$$

будет общим решение уравнения (4.1).

2. Корни характеристического уравнения вещественные кратные.

Если среди корней характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ есть вещественные кратные корни, то число различных решений вида $e^{\lambda x}$ меньше n. Чтобы найти недостающие частные решения, вернемся к тождеству (4.5). Продифференцируем обе части этого тождества по λ:

$$L[xe^{\lambda x}]\equiv\frac{d}{d\lambda}\left[e^{\lambda x}\varphi(\lambda)\right].$$

Осуществим это дифференцирование k раз:

$$L[x^ke^{\lambda x}]\equiv\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[e^{\lambda x}\varphi(\lambda)\right]. \tag{4.7}$$

Преобразуем правую часть тождества (4.7), используя формулу Лейбница для производной k-го порядка от произведения функций:

$$(uv)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^ju^{(k-j)}v^{(j)}.$$

Используя эту формулу, перепишем тождество в виде

$$L[x^ke^{\lambda x}]\equiv\sum_{j=0}^{k}C_k^jx^{k-j}e^{\lambda x}\varphi^{(j)}(\lambda),$$

откуда

$$L[x^ke^{\lambda x}]\equiv e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{k}C_k^jx^{k-j}\varphi^{(j)}(\lambda). \tag{4.8}$$

Пусть $\lambda=\lambda_1$ является корнем кратности m_1 характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$. Тогда

$$\varphi(\lambda_1)=\varphi'(\lambda_1)=\varphi''(\lambda_1)=\dots=\varphi^{(m_1-1)}(\lambda_1)=0, \quad \varphi^{(m_1)}(\lambda_1)\neq 0. \tag{4.9}$$

Действительно, если λ_1 – корень кратности m_1, то, как известно из алгебры, многочлен $\varphi(\lambda)$ делится без остатка на $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$, т. е. $\varphi(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ – многочлен, не обращающийся в нуль при $\lambda=\lambda_1$, т. е. $\psi(\lambda_1)\neq 0$. Из равенств

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\psi(\lambda),\quad \varphi^{(k)}(\lambda)=\left[(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\psi(\lambda)\right]^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\psi^{(k-j)}(\lambda)\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$$

при условии $\psi(\lambda_1)\neq 0$ и следует, что (4.9) – необходимые и достаточные условия для того, чтобы λ_1 был m_1-кратным корнем характеристического многочлена.

Учитывая равенства (4.9), из (4.8) при $\lambda=\lambda_1$ получим

$$\begin{aligned}
&L[e^{\lambda_1 x}]\equiv e^{\lambda_1 x}\varphi(\lambda_1)=0,\\
&L[xe^{\lambda_1 x}]\equiv e^{\lambda_1 x}\sum_{j=0}^{1}C_1^j x^{1-j}\varphi^{(j)}(\lambda_1)=0,\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&L[x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}]\equiv e^{\lambda_1 x}\sum_{j=0}^{m_1-1}C_{m_1-1}^j x^{m_1-1-j}\varphi^{(j)}(\lambda_1)=0,
\end{aligned}$$

откуда следует, что корню $\lambda=\lambda_1$ кратности m_1 отвечает m_1 частных решений уравнения (4.1):

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=xe^{\lambda_2 x},\quad \ldots,\quad y_{m_1}=x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}. \tag{4.10}$$

Если, решая характеристическое уравнение, мы найдем еще корни: λ_2 – кратности m_2, … , λ_r – кратности r, то аналогично им будут соответствовать частные решения

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_2 x},\quad xe^{\lambda_2 x},\quad \ldots,\quad x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x},\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&e^{\lambda_r x},\quad xe^{\lambda_r x},\quad \ldots,\quad x^{m_r-1}e^{\lambda_r x}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Совокупность решений (4.10) и (4.11) даст $m_1+m_2+\ldots+m_r=n$ частных решений.

Можно показать, что полученные таким образом частные решения будут линейно независимы на $(-\infty,+\infty)$, т. е. образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.1).

Тогда общее решение уравнения (4.1) запишется так:

$$Y=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x+\ldots+C_{m_1}x^{m_1-1})+e^{\lambda_2 x}(C_{m_1+1}+C_{m_1+2}x+\ldots+C_{m_1+m_2}x^{m_2-1})+$$
$$+\ldots+e^{\lambda_r x}(C_{n-m_r+1}+C_{n-m_r+2}x+\ldots+C_n x^{m_r-1}),$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{VI}}+y^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}-y^{\mathrm{III}}=0.$$

▶ Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^6+\lambda^5-\lambda^4-\lambda^3=0\quad\Rightarrow\quad\lambda^3(\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1)=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \lambda^3\left[\lambda^2(\lambda+1)-(\lambda+1)\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^3(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\quad \lambda_4=\lambda_5=-1,\quad \lambda_6=1.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет один трехкратный корень, один двукратный корень и один простой. Корню $\lambda=0$ отвечают три частных решения: $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$. Корню $\lambda=-1$ отвечают два частных решения: $y_4=e^{-x}$, $y_5=xe^{-x}$. Корню $\lambda=1$ отвечает одно частное решения $y_6=e^x$. Тогда

$$Y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_6y_6 \quad\Rightarrow\quad Y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+C_5xe^{-x}+C_6e^x$$

есть общее решение исходного уравнения. ◀

3. Корни характеристического уравнения комплексные.

Если характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет комплексный корень $\lambda_1=\alpha+i\beta$, то сопряженное число $\lambda_2=\alpha-i\beta$ также будет корнем многочлена $\varphi(\lambda)$. Чтобы доказать это, составим произведение

$$\left[\lambda-(\alpha+i\beta)\right]\left[\lambda-(\alpha-i\beta)\right]=\left[(\lambda-a)-i\beta\right]\left[(\lambda-a)+i\beta\right]=(\lambda-\alpha)^2+\beta^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left[\lambda-(a+i\beta)\right]\left[\lambda-(a-i\beta)\right]=(\lambda-\alpha)^2+\beta^2.$$

Разделим многочлен $\varphi(\lambda)$ на это произведение, получим тождество

$$\varphi(\lambda)\equiv\left[(\lambda-\alpha)^2+\beta^2\right]\psi(\lambda)+A\lambda+B,$$

где $A\lambda+B$ – остаток. Положим в этом тождестве $\lambda=\lambda_1=\alpha+i\beta$; в силу того, что λ_1 есть корень $\varphi(\lambda)$, получим

$$0=0+A(\alpha+i\beta)+B \quad\Rightarrow\quad A\beta=0,$$

$$A\alpha+B=0 \quad\Rightarrow\quad A=0,\ B=0.$$

Следовательно,

$$\varphi(\lambda)=\left[\lambda-(\alpha+i\beta)\right]\left[\lambda-(\alpha-i\beta)\right]\psi(\lambda),$$

откуда и вытекает, что $\lambda=\lambda_2=\alpha-i\beta$ – корень характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$.

Точно так же можно показать, что, если $\lambda=\alpha+i\beta$ является корнем m-й кратности $\varphi(\lambda)$, то $\lambda=\alpha-i\beta$ будет также корнем m-й кратности $\varphi(\lambda)$.

Определим теперь производную от комплексной функции $w(x)=u(x)+iv(x)$, где x, $u(x)$ и $v(x)$ – вещественные переменные, следующим образом:

$$w'(x)=u'(x)+iv'(x). \tag{4.12}$$

Отсюда $w^{(k)}(x)=u^{(k)}(x)+iv^{(k)}(x)$ и, следовательно,

$$L\left[w(x)\right]=L\left[u(x)\right]+iL\left[v(x)\right]. \tag{4.13}$$

Из (4.13) очевидным образом следует, что если комплексная функция $w(x)$ является решением линейного однородного уравнения с вещественными коэффициентами, то вещественная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ этой функции также будут решениями этого уравнения. Действительно, из тождества $L[w(x)] \equiv 0$ в силу (4.13) следует $L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0$, откуда $L[u(x)] \equiv 0$ и $L[v(x)] \equiv 0$.

По определению показательная функция e^{λ} с комплексным показателем степени $\lambda = \alpha + i\beta$ есть комплексное число, определяемое следующим образом:

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Используя это определения а формулу (4.12), докажем, что при $\lambda = \alpha + i\beta$ справедливо равенство

$$(e^{\lambda x})'_x = \lambda e^{\lambda x}. \tag{4.14}$$

Действительно,

$$(e^{\lambda x})' = \left[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right]' = (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' =$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) = (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Из формулы (4.14) следует, что тождество (4.8) справедливо и при λ комплексном, а следовательно, комплексным корням $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности m отвечает $2m$ комплексных частных решений

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha \pm i\beta)x}, \quad \ldots, \quad x^{m-1}e^{(\alpha \pm i\beta)x},$$

которые могут быть записаны так:

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x), \quad xe^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x), \quad \ldots, \quad x^{m-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x),$$

откуда получаем $2m$ вещественных частных решений

$$\left.\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}\right\} \tag{4.15}$$

Итак, паре комплексных сопряженных корней m-й кратности отвечает $2m$ линейно независимых решений.

Аналогично (4.15) строятся частные решения и для остальных комплексных корней характеристического многочлена.

Таким образом, мы получим фундаментальную систему решений, число которых будет равно порядку характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$, т. е. порядку дифференциального уравнения (4.1).

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

▶ Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda^2+\lambda+1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где λ – корень 2-й кратности.

Согласно формуле (4.15) получим четыре линейно независимых частных решения

$$y_1=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2},\quad y_2=e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2},\quad y_3=xe^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2},\quad y_4=xe^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Общее решение исходного уравнения будет

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_3x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+e^{-\frac{x}{2}}(C_2+C_4x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}. \blacktriangleleft$$

Правило. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в постоянными коэффициентами является линейной комбинацией n частных решений этого уравнения с произвольными постоянными коэффициентами: $Y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$. При этом:

1) Каждому простому вещественному корню λ характеристического уравнения соответствует частное решение вида $e^{\lambda x}$.

2) Каждому m-кратному корню λ характеристического уравнения соответствует m частных решений вида $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}$.

3) Каждой паре простых комплексно сопряженных корней $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения соответствует два частных решения вида $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

4) Каждой паре m-кратных комплексно сопряженных корней $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения соответствует $2m$ частных решений вида

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таблица. Вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

№	Корни характеристического уравнения $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$	Вид общего решения уравнения $y''+a_1y'+a_2y=0$
1	λ_1 и λ_2 – вещественные и различные	$Y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
2	$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ – двукратный корень	$Y=e^{\lambda x}(C_1+C_2x)$
3	$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ – комплексно сопряженные	$Y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$