maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

**Интенсивный курс**

**«Учимся решать пределы»**

*Данная методичка предназначена* ***для студентов-заочников с начальным уровнем подготовки*** *и позволяет в кратчайшие сроки (буквально часы)* ***научиться решать*** *типовые пределы функций 1-й переменой и пределы числовых последовательностей. Обладая большим практическим опытом, я включил в курс именно те задания, которые реально встретятся в ваших контрольных работах – никакой «воды» и ничего лишнего!*

*С наилучшими пожеланиями, Александр Емелин*

# Оглавление

## 1. Понятие предела функции. Простейшие примеры

Теория пределов – это один из ключевых разделов математического анализа. Помимо своеобразия самого понятия, данная тема характеризуется обширной и разнообразной практикой. Существуют десятки приёмов решений пределов различных видов, десятки нюансов и хитростей, позволяющих решить тот или иной предел. И сейчас, в самые короткие сроки мы постараемся разобраться в основных типах пределов, которые наиболее часто встречаются на практике.

Начнем с самого понятия предела. Но сначала краткая историческая справка. Жил-был в 19 веке француз Огюстен Луи Коши, который заложил основы математического анализа и дал строгие определения, определение предела, в частности. Надо сказать, этот самый Коши снился, снится и будет сниться в кошмарных снах многим студентам физико-математических факультетов, так как доказал огромное количество теорем математического анализа, причем одна теорема убойнее другой. В этой связи мы не будем рассматривать строгое определение предела, а попытаемся сделать две вещи:

**1. Понять, что такое предел.**
**2. Научиться решать основные типы пределов.**

Прошу прощения за некоторую ненаучность объяснений, важно чтобы материал был понятен даже «чайнику», что, собственно, и является задачей этой книги.

Итак, что же такое предел?

А сразу пример, чего бабушку лохматить….

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

**Любой предел состоит из трех частей**:

1) Всем известного значка предела $\lim$. Иногда пределы так и называют – *лимитами*. Запомните и постарайтесь не употреблять =)

2) Записи под значком предела, в данном случае $x\to 1$. Запись читается *«икс стремится к единице»*. Чаще всего – именно $x$, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. На месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность *($+\infty$ либо $-\infty$; «плюс бесконечность» часто обозначают просто значком $\infty$).*

3) Функции под знаком предела, в данном случае $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Сама запись $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$ читается так: «предел функции $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$ при икс стремящемся к единице».

Теперь разберем следующий ВАЖНЫЙ ВОПРОС – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?

Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала $x = 1{,}1$, затем $x = 1{,}01$, $x = 1{,}001$, …, $x = 1{,}00000001$, ….

То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» принимает значения, **которые *бесконечно близко* приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

***! Примечание***: *строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.*

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, напрашивается просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$

Готово.

Итак, **правило первое**: **когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

**Пример с бесконечностью:**

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)$$

Разбираемся, что такое $x\to\infty$. Это тот случай, когда $x$ неограниченно возрастает, то есть: сначала $x=10$, потом $x=100$, потом $x=1000$, затем $x=10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $f(x)=1-x$?

$1-10=-9$;

$1-100=-99$;

$1-1000=-999$;

…

**Итак, если $x\to\infty$, то функция $f(x)=1-x$ стремится к «минус бесконечности»**:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$$

**Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $f(x)=1-x$ бесконечность и получаем ответ**.

## Снова пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$$

Опять начинаем увеличивать $x$ до бесконечности, и смотрим на поведение функции:

если $x=10$, то $10^2-2\cdot10-3=77$;
если $x=100$, то $100^2-2\cdot100-3=9797$;
если $x=1000$, то $1000^2-2\cdot1000-3=997997$;
…

**Вывод: при $x\to\infty$ функция $f(x)=x^2-2x-3$ неограниченно возрастает**:
$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty$$

## Серия примеров для самостоятельного изучения:

Пожалуйста, попытайтесь мысленно проанализировать и запомнить следующие виды пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-99}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{x^3}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^4+x-9}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{4^x}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{12}{\ln x}=0.$$

Для начала хватит =)

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.

В том случае, если $x\to\infty$, попробуйте построить последовательность $x=10$, $x=100$, $x=1000$. Если $x\to 0$, то $x=0{,}1$, $x=0{,}01$, $x=0{,}001$.

**Что нужно понять и запомнить из вышесказанного?**

**1) Когда дан ЛЮБОЙ предел, сначала просто пытаемся подставить число (или бесконечность) в функцию.**

**2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как** $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4+8x+10)=\infty$**,** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$**,** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ **и т.д.**

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000000}{x^2}$, то все равно $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000000}{x^2}=0$ – **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать** ТАКИЕ ГИГАНТСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ**, что миллион по сравнению с ними станет самым настоящим микробом.**

**И ещё один крайне важный момент!**

В процессе оформления примеров **ни в коем случае не допускайте неполной записи** а-ля $\lim\sqrt{x+4}$ – **это одна из самых скверных оплошностей**! Презумпция виновности студента утверждает, что он либо совсем не в теме, либо откуда-то впопыхах списал пример.

Здесь не указано, *куда* стремится «икс», и поэтому «а-ля» не имеет смысла:
$\cancel{\lim\sqrt{x+4}}$

**Иными словами, НЕТ такого понятия, как «просто предел»! Предел функции может существовать (или не существовать) <u>лишь в определённой точке</u>** (в частности, в точке $x=-\infty$ или $x=+\infty$).

Например:
$\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x+4}=\sqrt{-3+4}=\sqrt{1}=1$
$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+4}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+4}=+\infty$

А вот следующего предела не существует:
$\lim\limits_{x\to -5}\sqrt{x+4}$ – так как под корнем получается «минус»,

рАвно как не существует и такого предела:
$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x+4}$ – тут «икс» стремится к «минус бесконечности», и под корнем нарисуется *бесконечно большое* отрицательное значение.

Обращаю ваше внимание, что последние две записи совершенно корректны, и если что-то подобное встретится на практике, то нужно дать краткий ответ:

*Данного предела не существует.*

## 2. Линейность предела

Не пугаемся, под термином «линейность» скрывается два очень простых свойства. Пусть $x \to a$ *(значение «а» может быть любым, в том числе бесконечным)*. Тогда:

**1)** $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – константу-множитель $k$ можно **вынести за знак предела**, при этом **значение предела не изменится** *(если, конечно, предел вообще существует в данной точке)*.

Проверим данный факт на конкретном примере: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{2}x^2\right) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$,

и после выноса константы: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{2}x^2\right) = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 2}(x^2) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$.

**! Внимание! Никаких десятичных дробей!**

$$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{2}x^2\right) = \cancel{1{,}5\lim\limits_{x\to 2}(x^2)} = \cancel{1{,}5\cdot 4} = 6$$

**Аксиома: в высшей математике все действия стремимся проводить в правильных и неправильных обыкновенных дробях**

И будет вам счастье!

**2)** $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ – **предел суммы равен сумме пределов** *(если они, разумеется, существуют)*. То же самое касается и разности, ибо разность можно представить в виде суммы: $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

Например: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x} + 2x - 3\right) = \frac{1}{2} + 4 - 3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$,

и по правилу: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x} + 2x - 3\right) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 2}(2x-3) = \frac{1}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2}$.

Данное свойство справедливо и для бОльшего количества слагаемых. За примером далеко ходить не будем:

$$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x} + 2x - 3\right) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 2}(2x) - \lim\limits_{x\to 2} 3 = \frac{1}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2}$$

Отдельно выделю, что **предел константы равен этой же константе**:
$\lim\limits_{x\to a} k = k$ – вещь элементарная, но вызывает регулярные вопросы.

Следует отметить, что у пределов есть и другие свойства, и все они строго доказываются в курсе математического анализа.

До сих пор мы рассматривали пределы, которые решаются прямой подстановкой, однако «решение в лоб» зачастую приводит к так называемым *неопределенностям*, которые, как вы догадываетесь, нужно устранять. Поехали:

## 3. Типовые пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

В данном параграфе мы рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены.

**Пример 1**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty}=\infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить специальный приём решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как же решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим $x$ в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим $x$ в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ нужно разделить числитель и знаменатель на $x$ в старшей степени**.

Сначала чистовое оформление примера, затем комментарии:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на $x^2$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Вот оно как – ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

**Что принципиально важно в оформлении решения?**

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, это удобно сделать так:

$$\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.

Конечно, можно ничего этого не делать, но тогда, возможно, преподаватель отметит недочеты в решении либо начнет задавать дополнительные вопросы по заданию. А оно вам надо?

**Пример 2**

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим $x$ в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3
Максимальная степень в знаменателе: 4
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Итак, согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель нужно разделить на $x^4$.

Полное оформление задания должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на $x^4$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

И третий случай:

**Пример 3**

Вычислить предел функции $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$ при $x\to\infty$

Встречается и такая формулировка.

Максимальная степень «икса» в числителе: 2
Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 ( $x$ можно записать как $x^1$ )

Старшая степень равна двум, и поэтому для устранения неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель следует разделить на $x^2$. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на $x^2$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на *бесконечно малое* число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться либо *конечное число, не равное нулю*, либо ноль, либо бесконечность.

Следующие пределы для самостоятельного решения:

**Пример 4**

Вычислить пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3-4x+3}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+3x-2x^2-x^3}{2x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(4-7x^2)}{4x^5-7x^3+13x+28}$

Не ленимся и ОБЯЗАТЕЛЬНО прикладываемся карандашом к бумаге – иначе толку будет мало! Краткие решения и ответы в конце методички.

## 4. Пределы с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$

Группа следующих пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

**Пример 5**

Решить предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

Таким образом, у нас выявилась неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

***! Внимание****: Этот приём нам помог лишь выявить неопределённость. На самом деле «икс»* ***бесконечно близко*** *приближается к -1, но* ***вовсе не принимает*** *это значение! И поэтому здесь подразумевается не два нуля, а деление* ***бесконечно малого*** *числа на* ***бесконечно малое*** *число.*

**Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, то для её раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.**

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения *(см. Приложение* ***Горячие школьные формулы****).*

Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить соответствующее квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор (функция извлечения квадратного корня есть даже на простом калькуляторе).

**!** Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель $x+1$. В знаменателе раскладывать нечего, и решение продолжается:

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Сокращаем дробь на $(x+1)$:

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$(*)=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$$2x^2-3x-5=0$$

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$$

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$2x^2-3x-5=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

Развиваем тему:

**Пример 6**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала чистовой вариант решения:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

Знаменатель:

$$x^2+4x-12=0$$

$$D=16+48=64$$

$$\sqrt{D}=8$$

$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6,\ x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$

$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

**Что важного в этом примере?**

Во-первых, вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель: сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – уж эту-то формулу нужно знать и видеть!

Далее, согласно свойству линейности, «двойку» выносим за знак предела. Зачем? Да просто чтобы она не «мешались под ногами». Главное, только потом не потерять её по ходу решения.

**Рекомендация: во многих случаях множитель-константу удобно вынести за знак предела – это упрощает дальнейшие вычисления**

**! И ещё одно крайне важное пояснение для «чайников»**:

В практических заданиях фрагмент типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x-2}$ встречается очень часто. Сокращать такую дробь **НЕЛЬЗЯ**. Сначала нужно поменять знак у числителя (вынести -1 за скобки):

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(-1)=-1$$

как вариант, можно преобразовать знаменатель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{-(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(-1)}=-1$$

В результате здесь появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается, и терять его совсем не надо!

И снова ручку в руку:

**Пример 7**

Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$

Вообще, я заметил, что чаще всего при нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, и поэтому избавил вас от таких примеров – чтобы не развилась аллергия =)

## 5. Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни:

**Пример 8**

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела

Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике:

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Как Вы, наверное, заметили, у нас в числителе находится разность корней. А от корней в математике принято, по возможности, избавляться. …Зачем избавляться? А без них жизнь проще.

**Правило**: когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое в данном случае и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, его нужно разделить на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение. В известной степени это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*)=\lim_{x\to3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot3-21})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\frac{-9x+27}{5x-15}=(*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители. Собственно, это можно было сделать давным-давно:

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

Готово.

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте? Примерно так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)}=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)}=\frac{-9}{30}=-\frac{3}{10}$$

Следующий пример попробуйте решить самостоятельно:

**Пример 9**

Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

И наверняка найдётся немало желающих потягаться с более трудным пределом, где рассмотренный приём нужно использовать дважды – можно последовательно, а можно и «за один присест»:

**Пример 10**

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$$

Есть? Отлично! Не забываем свериться с образцом.

Ну а теперь пришло время познакомиться с так называемыми **замечательными пределами**. Это специальные пределы, которые доказаны в теории, и замечательность их состоит в том, что нам не придётся мучаться со страшным нагромождением тригонометрических функций, логарифмов, степеней.

Замечательных пределов существует несколько, но на практике у студентов-заочников в 95% случаев фигурируют два замечательных предела: **Первый замечательный предел** и **Второй замечательный предел**. Следует отметить, что это исторически сложившиеся названия, и, когда, например, говорят о «первом замечательном пределе», то подразумевают под этим вполне определенную вещь, а не какой-то случайный, взятый с потолка предел.

## 6. Первый замечательный предел

Для целей данного урока нам потребуется *Приложение* ***Тригонометрические формулы*** и воспоминания о следующих значениях:
$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \mathrm{tg}\, 0 = 0$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ – некоторая функция, которая стремится к нулю: $\alpha(x)\to 0$. Совершенно понятно, что здесь неопределённость $\dfrac{0}{0}$. И к счастью, устранять её не нужно. В курсе математического анализа, доказано, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \qquad (\alpha(x)\to 0)$$

Это и есть **первый замечательный предел**.

Нередко в практических заданиях он «перевёрнут»:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)} = 1$ – тот же самый замечательный предел.

**! Но произвольно переставлять числитель и знаменатель нельзя! Если предел дан в виде $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)}$, то и решать его нужно именно в таком же виде, ничего не переставляя**.

И особенно вкусно то, что функция $\alpha(x)$ может быть очень и даже очень сложной. **Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю**.

Примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5x}{3}}{\sin\frac{5x}{3}} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(arctgx)}{arctgx} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+x}{\sin(x^3-5x^2+x)} = 1$$

Здесь $3x\to 0, \quad \dfrac{5x}{3}\to 0, \quad arctgx\to 0, \quad (x^3-5x^2+x)\to 0$, и всё гуд – первый замечательный предел применим.

А вот следующее равенство неверно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5} \neq 1$$

Почему? Потому что многочлен $x^2-3x+5$ не стремится к нулю.

Кстати, вопрос на засыпку, а чему равен предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5}$?

Итак, **запомним наизусть**, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ *(если* $\alpha(x)\to 0$*)*, и **запомним «намертво»**, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. И здесь я вас не стращаю – элементарные математические определения и формулы лучше таки помнить «намертво». Это может оказать неоценимую помощь на зачете, когда вопрос будет решаться между «двойкой» и «тройкой», и преподаватель решит задать студенту какой-нибудь простой вопрос или предложить решить простейший пример *(«а может он(а) все-таки что-то знает?!»)*.

Переходим к рассмотрению практических примеров:

## Пример 11

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}$$

Таким образом, у нас неопределенность $\frac{0}{0}$, что мы сразу и указываем в оформлении решения. Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он: под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.

Что делать? В подобных случаях первый замечательный предел нужно организовать **искусственно**. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас $7x$, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить $7x$».

А делается это очень просто:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись приняла знакомые очертания.

Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел желательно пометить простым карандашом:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

Что произошло? По сути, обведённое выражение превратилось в единицу и исчезло в произведении:

(1-й замечательный предел) 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}$$

Осталось избавиться от трехэтажности дроби (*см.* ***Горячие школьные формулы***):

(1-й замечательный предел) 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Готово.

Если не хочется использовать карандаш, то решение можно оформить так:

“

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Используем первый замечательный предел:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

“

## Пример 12

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$

Действительно, у нас неопределенность $\frac{0}{0}$ и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. В пределах с многочленами мы рассматривали правило, что когда у нас есть неопределенность $\frac{0}{0}$, то нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{5\cdot2\cdot2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{5\cdot2\cdot2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{5\cdot2\cdot2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot2\cdot2=20$$

В следующих примерах, я не буду заниматься художествами в Пэйнте, думаю, как правильно оформлять решение в тетради – вам уже понятно.

**Пример 13**

Найти предел $\lim_{x\to0}\frac{tg2x}{2x^2}$

Подставляем ноль в выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}\overset{(3)}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}\overset{(4)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

(1) Используем формулу $tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

(2) Косинус нуля стремится к единице, и от него легко избавиться. **Если в пределе косинус является МНОЖИТЕЛЕМ, то его, грубо говоря, нужно превратить в единицу, которая исчезает в произведении**. Только не забываем пометить, что он стремится к единице!

(3) Дальше по накатанной схеме организуем первый замечательный предел, тут даже обошлось безо всяких домножений и делений.

(4) Первый замечательный предел тоже превращается в единицу и исчезает в произведении.

В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

**Пример 14**

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x}$

Поскольку косинус нуля стремится к единице, то у нас опять два бублика:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}\overset{(2)}{=}\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}\overset{(3)}{=}$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}\overset{(4)}{=}\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}\overset{(5)}{=}\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}\overset{(6)}{=}\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

(1) Используем тригонометрическую формулу $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$. **Возьмите её на заметку!** Пределы с применением этой формулы почему-то встречается очень часто.

(2) Постоянные множители выносим за значок предела (свойство линейности).

(3) Организуем первый замечательный предел.

(4) Здесь у нас получился только один замечательный предел, который превратился в единицу и исчез в произведении.

(5) Избавляемся от трехэтажности и выносим константу за знак предела.

(6) Предел фактически решен, указываем, что оставшийся синус стремится к нулю.

Следующие примеры для самостоятельного решения:

**Пример 15**

Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg3x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}$

Если возникают трудности технического характера *(использование формул, преобразование дробей и т.д.)*, пожалуйста, обратитесь к *Приложениям* данной методички или к этой веб странице.

И давайте запомним **полезный ориентир**: **если вам встретилась неопределённость $\dfrac{0}{0}$ и вы не знаете, «с какой стороны подойти» к решению, то нужно попытаться разложить числитель и знаменатель на множители**. После чего, как правило, что-нибудь сокращается / упрощается.

## 7. Метод замены переменной

Очень часто *(но не всегда)* этот метод используют для того, чтобы свести решение как раз к первому замечательному пределу, и сейчас мы разберём два каноничных примера с обратными тригонометрическими функциями:

**Пример 16**

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{7x}$

Решаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{7x}=\frac{0}{0}=(*)$$

В пределе находится арктангенс, от которого хорошо бы избавиться. Логично и очень удобно превратить «арк» в одну единственную букву. Проведём замену:

$arctg3x=t$.

Теперь в пределе нужно выразить всё остальное через «тэ».

Во-первых, выясним, куда будет стремиться новая переменная «тэ»:
если $x\to 0$, то $(arctg3x)\to 0$, иными словами, новоиспеченная переменная тоже будет стремиться к нулю: $t\to 0$

Осталось в знаменателе выразить «икс» через «тэ». Для этого на обе части равенства $arctg3x = t$ «навешиваем» тангенсы:

$$tg(arctg3x) = tgt$$

Слева две взаимно обратные функции уничтожаются:

$3x = tgt$, откуда: $x = \frac{tgt}{3}$

Взмахи волшебной палочки закончены, остальное просто:

$$(*) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{7\cdot\frac{tgt}{3}} = \frac{3}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt} = \frac{3}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{(\cos t)^{\to 1}}} = \frac{3}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \frac{3}{7}\cdot 1 = \frac{3}{7}$$

Самостоятельно:

**Пример 17**

Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\arcsin\frac{x}{2}}$

Примерный образец чистового оформления примера, как обычно, в конце.

Перефразируя известную застольную присказку, спешу вас обрадовать, что «между первым и вторым перерывчик будет небольшим» =)

## 8. Второй замечательный предел

Пусть при $x \to \infty$ функция $\alpha(x)$ тоже стремится к бесконечности. Тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$$

в частности, если $\alpha(x) = x$, то:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

***Справка***: $e = 2{,}718281828...$ – *известное иррациональное число.*

Данный факт носит название **второго замечательного предела**, который, разумеется, тоже доказан в курсе математического анализа. Легко видеть, что при $\alpha(x) \to \infty$ в рассматриваемом пределе обнаруживается *неопределённость* $1^{\infty}$, и второй замечательный предел как раз предназначен для её устранения.

Функция $\alpha(x)$ может быть не только буковкой «хэ», но и достаточно сложной функцией – **важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

## Пример 18

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$. Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель: $4x\to\infty$, то есть, у нас имеется неопределенность вида $1^{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$$

Как это часто бывает, замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$ не лежит на блюдечке с голубой каёмочкой, и поэтому его нужно организовать искусственно. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере $\alpha(x)=3x$, значит, в показателе нам тоже нужно получить $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную степень $\dfrac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{\text{e (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву $e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{\text{e (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

Результат не возбраняется записать и красивее: $e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^4}$ *(см. Приложение **Горячие школьные формулы** – действия со степенями)*.

Далее отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен:

**Пример 19**

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

**Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример!**

Пробуем подставить *бесконечно большое* число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида $1^{\infty}$. Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Вроде бы основание стало напоминать $\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, но у нас знак «минус» да и тройка вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем дробь трехэтажной:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность $1^{\infty}$. Теперь организуем конструкцию $\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}$.

Для этого исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

Наконец-то долгожданное $\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}$ устроено, с чистой совестью превращаем его в букву $e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Но на этом приключения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Благо, раскрывать её мы давным-давно научились.

Делим числитель и знаменатель на $x$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}}{1+\underset{}{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

Готово. Эстеты могут сбросить экспоненту вниз: $\frac{1}{e^6}$

А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомню, что он выглядит следующим образом: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$ (если $\alpha(x)\to\infty$). Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$, если только $\alpha(x)\to 0$.

**Пример 20**

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}$

Сначала (мысленно или на черновике) устремляем «икс» к нулю:

$$(1+tg0)^{\frac{1}{2\cdot 0}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

В результате выявлена знакомая неопределенность $1^{\infty}$. Очевидно, что в данном примере $\alpha(x)=tgx$. Все действия закомментирую по шагам:

(1) С помощью знакомого искусственного приема организуем в показателе степени конструкцию $\frac{1}{\alpha(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}\overset{(2)}{=}e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}\overset{(3)}{=}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot(\cos x)^{\to 1}}}\overset{(4)}{=}e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\overset{(5)}{=}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

(2) Выражение $(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$ со спокойной душой превращаем в букву $e$.

(3) В показателе появилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем тангенс на синус и косинус *(ничего не напоминает?)*.

(4) Косинус нуля стремится к единице (не забываем помечать карандашом), поэтому он просто пропадает в произведении.

(5) Тот самый =)

Как Вы видите, в практических заданиях на вычисление пределов нередко требуется применять сразу несколько правил и приемов.

Тренируемся:

**Пример 21**

а) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x-1}$

б) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{3x+4}$

…ну что же, такое мучение должно быть вознаграждено! =)

## 9. Формула для устранения неопределённости $1^\infty$

Неопределённость $1^\infty$ *(и только её!)* можно устранить по формуле:

$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$, где $a$ – произвольное значение.

На самом деле данная формула является следствием второго замечательного предела, и её особое удобство состоит в том, что здесь икс» может стремиться к **любому значению** (а не только к $+\infty$ или нулю).

Вычислим, например, предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$ *(Пример 18)*. Для него $u(x)=1+\frac{1}{3x}$, $v(x)=4x$, и по формуле $\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$ получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)\cdot 4x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

Таким образом, **с помощью формулы очень удобно выполнять проверку** «классических» примеров на 2-й замечательный предел. Но вот на чистовике «размахивать дубиной» не советую, в традициях всё-таки применять «обычное» оформление решения, если его можно применить. Однако формула становится более чем актуальна, когда «икс» стремится к «минус бесконечности» или к конечному числу, отличному от нуля:

**Пример 22**

Вычислить предел $\lim_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}$

На первом шаге, не устану повторять, подставляем значение «икс» в выражение под знаком предела. А вдруг никакой неопределённости вообще нет? Так бывает! Но не в этот раз. Подставляя «тройку», приходим к выводу, что здесь неопределённость $1^\infty$

Используем формулу $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$

Чтобы не таскать за собой букву «е» и не мельчить, показатель $\lim\limits_{x\to a}((u(x)-1)\cdot v(x))$ удобнее вычислить отдельно:

В данном случае: $u(x)=\dfrac{19-4x}{5x-8}$, $\quad v(x)=\dfrac{16-3x}{2x-6}$

Таким образом:

$$\lim_{x\to a}((u(x)-1)\cdot v(x)) = \lim_{x\to 3}\left(\left(\frac{19-4x}{5x-8}-1\right)\cdot\frac{16-3x}{2x-6}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\left(\frac{19-4x-5x+8}{5x-8}\right)\cdot\frac{16-3x}{2x-6}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(27-9x)\cdot(16-3x)}{(5x-8)\cdot(2x-6)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)\cdot(16-3x)}{(5x-8)\cdot 2(x-3)} = -\frac{9}{2}\lim_{x\to 3}\frac{(16-3x)}{(5x-8)} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{7} = -\frac{9}{2}$$

С точки зрения техники вычислений всё рутинно: сначала приводим первое слагаемое к общему знаменателю, затем выносим константы и проводим сокращения, избавляясь от неопределённости $\dfrac{0}{0}$.

В результате:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}} = e^{-\frac{9}{2}}$$

Готово.

Ещё один типовой предел, который встречался в моей практике десятки раз:

**Пример 23**

Вычислить предел

$$\lim_{x\to -\infty}(5-2x)\cdot[\ln(1-x)-\ln(2-x)]$$

Здесь у нас встретилась новая *неопределённость*: $\infty\cdot(\infty-\infty)$ – суть $\infty-\infty$. Этой неопределённости и методам её устранения будет посвящён отдельный параграф, ну а пока сосредоточимся на конкретном примере. Сначала полное решение, потом комменты:

$$\lim_{x\to -\infty}(5-2x)[\ln(1-x)-\ln(2-x)] = \infty\cdot(\infty-\infty) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to -\infty}(5-2x)\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right) \overset{(2)}{=} \lim_{x\to -\infty}\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{5-2x} \overset{(3)}{=}$$

$$= \ln\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{5-2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} \overset{(4)}{=} \ln\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2-x-1}{2-x}\right)^{5-2x} \overset{(5)}{=} \ln\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{2-x}\right)^{5-2x} = 1^{\infty} \overset{(6)}{=}$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{2-x}-1\right)\cdot(5-2x)} \overset{(7)}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{5-2x}{x-2} = \frac{\infty}{-\infty} \overset{(8)}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{5-2x}{x}}{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{5}{x}}-2}{1-\underset{\to 0}{\frac{2}{x}}} = \frac{-2}{1} = -2$$

(1)-(2) На первых двух шагах используем формулы $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$, $a\ln x = \ln x^a$ *(см. Приложение **Горячие школьные формулы**)*.

(3) Значок предела перемещаем под логарифм. Это можно сделать, поскольку данный логарифм непрерывен на «минус бесконечности». Кроме того, предел же относится к «начинке» логарифма.

(4)-(5) Стандартным приёмом преобразуем неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ к виду $1^{\infty}$.

(6) Используем формулу $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$.

(7) Экспоненциальная и логарифмическая функция – взаимно обратные функции, поэтому и «е» и логарифм можно убрать. Действительно, согласно свойству логарифма: $\ln e^n = n\ln e = n\cdot 1 = n$. Минус перед дробью вносим в знаменатель: $-\frac{1}{2-x} = \frac{1}{-(2-x)} = \frac{1}{x-2}$

(8) Без комментариев.

Следующий пример для самостоятельного решения:

**Пример 24**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{x}{10(x-1)}}$ двумя способами:

1) с помощью формулы;

2) путём замены и сведению ко второму замечательному пределу (который $\to 0$).

К слову, с помощью замены – к «классическому» виду *(когда переменная стремится к нулю либо плюс бесконечности)* можно свести любой «нестандартный» предел.

В 95-99% случаев на зачете, экзамене вам встретится первый замечательный предел и / или второй замечательный предел, однако иногда проскакиваются и более редкие кадры, в частности, если при $x\to 0$ функция $\alpha(x)\to 0$, то справедливы следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1$$

Как быть, если попался «экзотический» предел? Ничего страшного, для указанных выше пределов справедливы практически все выкладки, приёмы решения, что и для первого замечательного предела. Их нужно решать по аналогии.

**Поздравляю! Теперь вы сможете решить многие пределы!**

Но расслабляться ещё рано:

## 10. Порядок роста функции

В данном параграфе мы вернёмся к пределам с многочленами, когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Материал уже частично знаком, и настала пора разобраться в нём как следует. Давайте научимся находить решение в считанные секунды!

Вычислим следующий предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100}-200x^2-500x\right)$$

Проведём предварительный анализ. В самом начале я рекомендовал рассуждать не совсем корректным способом: сначала «икс» равно 10, потом, 100, затем 1000, миллион и т.д. до бесконечности. **В чём изъян такого подхода?** Построим данную последовательность:

$$x=10 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{10^3}{100}-200\cdot 10^2-500\cdot 10=10-20000-5000=-24990$$

$$x=100 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{100^3}{100}-200\cdot 100^2-500\cdot 100=10000-2000000-50000=-2040000$$

$$x=1000 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1000^3}{100}-200\cdot 1000^2-500\cdot 1000=10000000-200000000-500000=-190500000$$

...

Исходя из полученных результатов, складывается стойкое впечатление, что предел стремится к «минус бесконечности». Но на поверку **это впечатление кардинально ошибочно**:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100}-200x^2-500x\right)\neq-\infty$$

В этой связи необходимо знать теорию математического анализа, а именно, некоторые выкладки о **порядке роста функции**.

Применительно к нашему примеру можно сказать, что слагаемое $\frac{x^3}{100}$ обладает **более высоким порядком роста**, чем сумма $-200x^2-500x$. Иными словами, при *достаточно больших* значениях «икс» слагаемое $\frac{x^3}{100}$ «перетянет» на «плюс бесконечность» всё остальное:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100}-200x^2-500x\right)=+\infty$$

При небольших значениях «икс» – да, сладкая парочка $-200x^2-500x$ перетягивает канат в сторону «минус бесконечности», что и привело нас к неверному первоначальному выводу. Но уже при $x=1000000$ получается гигантское положительное число $f(x)=9799999500\,000000$ !

Если сильно уменьшить первое слагаемое, то от этого ничего не изменится: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{100000000}-200x^2-500x\right)=+\infty$, будет лишь отсрочен тот момент, когда бравая дробь $\dfrac{x^3}{100000000}$ «вытянет» весь предел на «плюс бесконечность». Не поможет и «усиление противовеса»:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100000000}-2000000000\,00x^2-5000000000\,00x\right)=+\infty.$$

Нулей можете приписать, сколько хотите (без шуток). Вот такая вот удивительная наука математический анализ – способна низвести любого монстра до мелочи пузатой.

Таким образом, **кубическая функция имеет более высокий порядок роста, чем**:

– квадратичная функция;
– линейная функция;
– сумма квадратичной и линейной функции.

На простейшем примере поясню геометрический смысл вышесказанного. Представьте графики линейной $f(x)=x$, квадратичной $g(x)=x^2$ и кубической $h(x)=x^3$ функций. Легко заметить, что при увеличении «икс», кубическая парабола $h(x)=x^3$ взмывает вверх гораздо быстрее и круче, чем парабола и, тем более, прямая.

Аналогичное правило можно сформулировать для любой степени:

<u>Степенная функция данной степени</u> **растёт быстрее**, чем любая степенная функция более низкой степени. **И быстрее**, чем сумма любого количества степенных функций более низкой степени.

Найдём предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^7+300x^6+65x^5-30x^4+25x+125)$

Значение данного предела зависит только от слагаемого $-2x^7$. Всё остальное МЫСЛЕННО отбрасываем: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^7)$, и теперь ясно как день, что предел стремится к «минус бесконечности»:

$$\lim_{x\to+\infty}(-2x^7+300x^6+65x^5-30x^4+25x+125)=-\infty$$

То есть, слагаемое $-2x^7$ **более высокого порядка роста**, чем всё остальное.

У «хвоста» $300x^6+65x^5-30x^4+25x+125$ могут быть сколь угодно большие константы, другие знаки, но результат от этого НЕ ИЗМЕНИТСЯ.

## 11. Сравнение бесконечно больших функций

В *Параграфе 3* мы вычислили три предела с неопределённостью $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью стандартного деления числителя и знаменателя на «икс» в старшей степени:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=+\infty$$

Понятно, что на практике всё нужно расписать подробно, **но почему бы не выяснить правильный ответ ещё до решения?** Тем более, это ОЧЕНЬ просто!

В первом примере $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$ в числителе и знаменателе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

В таких случаях говорят, что **функции числителя и знаменателя обладают одинаковым порядком роста**. Или короче – **числитель и знаменатель одного порядка роста**. Действительно, в данном пределе и вверху, и внизу находятся квадратичные функции. Мир, равенство, братство.

Во втором примере $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$ аналогично – в числителе и знаменателе МЫСЛЕННО уберём всех малышей:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3}{5x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{5x}=0$$

Здесь **знаменатель более высокого порядка, чем числитель**. Многочлен 4-й степени растёт быстрее кубической функции и «перетягивает» предел на ноль.

И, наконец, в пределе $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ карлики тоже идут лесом:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$$

А в этом примере всё наоборот – **числитель более высокого порядка, чем знаменатель.** Квадратичная функция растёт быстрее линейной и «перетягивает» предел на «плюс бесконечность».

**Сделаем краткую теоретическую выжимку**. Рассмотрим две произвольные функции $f(x), g(x)$, которые определены на бесконечности.

1) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, где $k$ – ненулевая константа, то функции имеют одинаковый порядок роста. Если $k=1$, то функции называют ***эквивалентными*** на бесконечности.

2) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то функция $f(x)$ более высокого порядка роста, чем $g(x)$.

3) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то функция $g(x)$ более высокого порядка роста, чем $f(x)$.

***! Примечание****: при $x\to-\infty$ суть выкладок не меняется.*

Подчеркиваю ещё раз, что данные факты относятся к произвольным функциям, определённым на бесконечности, а не только к многочленам. Но у нас ещё непаханое поле полиномов, поэтому, продолжаем работать с ними… да вы не грустите, для разнообразия я добавлю корней =)

**Пример 25**

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{4x^4+1}}$

В наличии неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и приём решения уже знаком – нужно разделить числитель и знаменатель на «икс» в старшей степени.

Старшая степень числителя равна двум. Знаменатель…. как определить старшую степень, если многочлен под корнем? МЫСЛЕННО отбрасываем все слагаемые, кроме самого старшего: $\sqrt{4x^4}$. Константу тоже отбрасываем и выясняем старшую степень знаменателя: $\sqrt{x^4}=x^2$. Она тоже равна двум. Таким образом, **числитель и знаменатель одного порядка роста, а значит, предел равен конечному числу, отличному от нуля**.

Почему бы сразу не узнать ответ? В числителе и знаменателе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{4x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1$. Таким образом, наши функции не только одного порядка роста, но ещё и ***эквивалентны*** на бесконечности.

Оформляем решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{4x^4+1}}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на $x^2$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-4}{x^2}}{\frac{\sqrt{4x^4+1}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-4}{x^2}}{\frac{\sqrt{4x^4+1}}{\sqrt{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-4}{x^2}}{\sqrt{\frac{4x^4+1}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}}{\sqrt{4+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^4}}}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$$

В действительности пару шагов можно пропустить, просто я подробно расписал, как в знаменателе под корень вносится $x^2$.

**Пример 26**

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{2x^3+x^2-5x+3}$

Это пример для самостоятельного решения. Постарайтесь провести рассуждения по образцу первого примера. Также заметьте, что здесь неопределённость $\frac{-\infty}{\infty}$, что необходимо отразить в решении.

Во избежание недочётов, всегда анализируйте, какая неопределённость получается в пределах рассматриваемого вида. Помимо неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ может встретиться неопределённость $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ либо $\frac{-\infty}{-\infty}$. Во всех четырёх случаях числитель и знаменатель необходимо разделить на «икс» в старшей степени.

На уроке Методы решения пределов я рассмотрел более трудные примеры с корнями: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{7x^6-3x^2}+\sqrt{x^5+3x+5}}{\sqrt[3]{x^7+1}-x^2-2x}$, $\dfrac{\sqrt[5]{2x^4+x}-3x}{\sqrt{5+3x^2}+\sqrt[3]{x}}$, но подобные пределы не столь актуальны для «чайников», и поэтому я не счёл нужным включить их в этот курс.

## 12. Если «икс» стремится к «минус бесконечности»

Призрак «минус бесконечности» уже давно витал в воздухе, и сейчас мы разберём пределы с многочленами, в которых $x\to-\infty$. Принципы и методы решения будут точно такими же за исключением ряда нюансов.

Рассмотрим 4 фишки, которые потребуются для решения практических заданий:

1) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+x^3+1)$

Значение предела зависит только от слагаемого $2x^4$, поскольку оно обладает самым высоким порядком роста. Если $x\to-\infty$, то ***бесконечно большое по модулю*** **отрицательное число в ЧЁТНОЙ степени** (в данном случае в четвёртой), равно «плюс бесконечности»: $(-\infty)^4=+\infty$. Константа («двойка») положительна, поэтому:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^4+x^3+1)=+\infty$$

2) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-3x-x^2)$

Здесь старшая степень опять **чётная**, поэтому: $(-\infty)^2=+\infty$. Но перед $x^2$ расположился «минус» (отрицательная константа –1), следовательно:

$$\lim_{x\to-\infty}(5-3x-x^2)=-\infty$$

3) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3+2x^2-x+4)$

Значение предела зависит только от $4x^3$. Как вы помните из школы, «минус» «выскакивает» из-под нечётной степени, поэтому ***бесконечно большое по модулю*** **отрицательное число в НЕЧЁТНОЙ степени** равно «минус бесконечности», в данном случае: $(-\infty)^3=-\infty$.

Константа («четвёрка») положительна, значит:

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^3+2x^2-x+4)=-\infty$$

4) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+x^4+4x^3+x^2-x-7)$

Первый парень на деревне $-2x^5$ снова обладает **нечётной** степенью, кроме того, за пазухой отрицательная константа, а значит: $-2\cdot(-\infty)^5=-2\cdot(-\infty)=+\infty$ Таким образом:

$$\lim_{x\to-\infty}(-2x^5+x^4+4x^3+x^2-x-7)=+\infty.$$

Как ваше настроение? ;)

## Пример 27

Найти предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x}{3-x+5x^2-2x^3}$

Используя вышеизложенные пункты, приходим к выводу, что здесь неопределённость $\dfrac{-\infty}{\infty}$. Числитель и знаменатель одного порядка роста, значит, в пределе получится конечное число. Узнаем ответ, отбросив всех малышей:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-2x^3}=-\frac{1}{2}$$

Решение тривиально:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+x}{3-x+5x^2-2x^3}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на $x^3$:

$$(*)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3}}{\dfrac{3-x+5x^2-2x^3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\overset{\to 0}{\dfrac{2}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x^3}}-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}+\overset{\to 0}{\dfrac{5}{x}}-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Для самостоятельного решения:

**Пример 28**

Найти предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+3}{-2x^4-x^3+7x^2-1}$

Вот и всё, а вы боялись =) На самом деле есть ещё один случай, но его я опять же оставлю за кадром. По той причине, что есть более актуальные вещи:

## 13. Устранение неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$

Под впечатлением недавно рассмотренного материала, можно прийти к ошибочному выводу о том, что неопределённость $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ непременно сводится к неопределённости $1^{\infty}$ с последующим применением второго замечательного предела либо формулы-следствия. На самом деле такое преобразование возможно далеко не всегда. А именно – оно осуществимо **лишь в том** случае, если **числитель и знаменатель основания степени – эквивалентные бесконечно большие функции**.

Например: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$ (*Пример 19*)

Отвлечёмся от показателя и вычислим предел основания:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x-2}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\overset{\to 0}{\dfrac{2}{x}}}{1+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}}=1$$

В пределе получена **единица**, значит, числитель и знаменатель **не просто одного порядка роста, а ещё и эквивалентны**.

Аналогичных пределов можно придумать очень много:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{4x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-2x+3}\right)^{4x-1}$ и т.п.

Дроби данных примеров объединяет вышеуказанная особенность: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

**В других случаях неопределённость $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ свести к неопределённости $1^{\infty}$ невозможно, и второй замечательный предел не применим!**

## Пример 29

Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+4}\right)^{3x-1}$

Как ни старайся, как ни крути, как ни верти, а неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ не удастся преобразовать в неопределённость $1^{\infty}$.

Здесь числители и знаменатели оснований хоть и одного порядка роста, однако **не эквиваленты**: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+3}=2\neq 1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{3x+4}=\frac{1}{3}\neq 1$

Таким образом, 2-й замечательный предел и тем более формулу – **ПРИМЕНЯТЬ НЕЛЬЗЯ**.

***! Примечание****: не путайте рассматриваемые примеры с пределом* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}$ *(Пример 22), в котором числитель и знаменатель основания тоже не эквивалентны. Там готовая неопределённость* $1^{\infty}$*, здесь же речь идёт о неопределённости* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$.

Метод решения пределов-«обманок» прост и знакОм: нужно числитель и знаменатель **основания** разделить на «икс» в старшей степени (невзирая на показатель):

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x+3}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{1+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}}\right)^{x}=2^{+\infty}=+\infty$$

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+4}\right)^{3x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x-2}{x}}{\frac{3x+4}{x}}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}}{3+\overset{\to 0}{\frac{4}{x}}}\right)^{3x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0$$

Если числитель и знаменатель основания разного порядка роста, то приём решения точно такой же:

**Пример 30**

Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2+3x+5}\right)^{4x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x-3}\right)^{5x+1}$

Это короткие примеры для самостоятельного решения.

И да, не забываем, неопределённости может не быть вообще! И сейчас наступил удачный момент, чтобы закрыть следующий вопрос:

## 14. Что является, а что не является неопределённостью?

Сначала перечислим неопределённости, которые нам уже встречались:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 1^{\infty},\quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty},\quad 0\cdot\infty$$

Что ещё? Один раз «проскочила» неопределённость $\infty-\infty$, и очень скоро мы разберём её подробно. Ну и совсем редко встречаются неопределённости $\infty^0$, $0^0$.

Для того чтобы устранить неопределённость, как вы знаете, необходимо использовать некоторые правила и методы решения пределов.

Теперь о том, что НЕ является неопределённостью.

**Неопределённостью не является:**

– Любая определённость =)

– *Бесконечно малое* число, делённое на ненулевую константу: $\dfrac{0}{-3}=0$. Сюда же можно отнести *бесконечно малое* число, делённое на *бесконечно большое* число: $\dfrac{0}{\infty}=0$

– Ненулевая константа, делённая на *бесконечно малое* число, например: $\dfrac{5}{0}=\infty$.

– Начинающие изучать математический анализ, часто пытаются устранить мифическую неопределённость $\dfrac{\infty}{0}$. Но все попытки тщетны, поскольку это определённость:

и в самом деле – представим «бесконечность делить на ноль» в виде произведения: $\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0}$. Согласно предыдущему пункту: $\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$. Приведу живой пример:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = \frac{+\infty}{0} = \lim_{x\to+\infty}(xe^{x}) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

– Число, не равное единице, в *бесконечно большой* степени не является неопределённостью. Например: $3^{+\infty} = +\infty,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$ – только что, кстати, подобные штуки были. В частности: $0^{+\infty} = 0$.

– Разность двух функций, каждая из которых стремится к нулю, например: $\lim_{x\to 0}(x^2 - x) = 0 - 0 = 0$. Таким образом, неопределённости «ноль минус ноль» тоже не существует – это определённость.

Многие из перечисленных неопределённостей и определённостей уже встречались и ещё неоднократно встретятся на практике. Причём, прямо сейчас =)

## 15. Неопределённость $\infty - \infty$

Популярная неопределённость $\infty - \infty$ устраняется следующими способами:

– приведением выражения под знаком предела к общему знаменателю;

– умножением / делением на сопряжённое выражение;

– преобразованием логарифмов *(см. Пример 23)*.

Начнём с первого случая, о котором я ещё не рассказывал:

**Пример 31**

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{3}{x^3 - 1}\right)$$

В данном пределе имеет место неопределённость $\infty - \infty$, и общий алгоритм решения незамысловат: необходимо привести выражение к общему знаменателю, а затем попытаться что-нибудь сократить:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{3}{x^3 - 1}\right) = (\infty - \infty) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right) \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3x}{x(x-1)(x^2+x+1)} \overset{(3)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{0}{0} \overset{(4)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x^2+x+1)} \overset{(5)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x^2+x+1)} = \frac{0}{1\cdot(1+1+1)} = \frac{0}{3} = 0$$

(1) Раскладываем знаменатели на множители; во втором знаменателе используем формулу разности кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Данный шаг можно было пропустить, но этим пришлось бы заниматься потом, и, на мой взгляд, разложение на множители удобнее провести сразу же.

(2) Приводим выражение к общему знаменателю.

(3) Приводим подобные слагаемые в числителе. Неопределённость $\infty-\infty$ трансформировалась в неопределённость $\frac{0}{0}$, которая стандартно раскрывается разложением числителя и знаменателя на множители.

(4) Знаменатель уже разложен на множители. Раскладываем на множители числитель, в данном случае использована формула $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

(5) Сокращаем числитель и знаменатель на $(x-1)$, устраняя неопределённость.

Как видите, новизны-то особой и нет.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

**Пример 32**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{8}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}\right)$

Не ленимся, не ленимся! – все задания здесь не просто так ;-)

Второй вид пределов с неопределённостью $\infty-\infty$ представляет собой разность, в которой присутствуют один или два корня:

**Пример 33**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})$

Каноничный образец. И новизны здесь тоже нет – нужно умножить и разделить на сопряженное выражение, чтобы потом воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})=(\infty-\infty)=(*)$$

Умножим и разделим на сопряженное выражение:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1})}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3-(x^2-3x+1)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Неопределённость $\infty - \infty$ превратилась в неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Узнаёте? Такие орешки мы щёлкали в *Примерах 25, 26*.

Обращаем внимание, что числитель и знаменатель одного порядка роста, а значит, в пределе должно получиться конечное число. Разделим числитель и знаменатель на $x$:

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x+2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x+3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-3x+1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}+\sqrt{1-\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Не редкость, когда в разности всего один корень, но это не меняет алгоритма решения:

**Пример 34**

Вычислить пределы

а) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

б) $\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{x^3+4x^2})$

Это пара коротких примеров для самостоятельного решения.

Следует отметить, что пределы рассмотренного типа не обязаны равняться конечному числу, вполне может получиться и бесконечность, причём, как «плюс», так и «минус». Кстати, в пункте «бэ» можно проанализировать порядок роста членов, чтобы сразу выяснить ответ ;-)

Иногда на практике встречаются пределы-«обманки», в которых неопределённости «бесконечность минус бесконечность» нет вообще, вот простейший пример:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty-(-\infty) = +\infty+\infty = +\infty$$

Таким образом, **будьте предельно внимательны: перед решением предела необходимо убедиться, что неопределённость действительно есть!** Собственно, это касается вообще любого предела.

В заключительной части нашего интенсивного курса мы рассмотрим пределы числовых последовательностей, которые тоже достаточно часто встречаются на практике:

## 16. Понятие числовой последовательности и её предела

Пусть **каждому** натуральному номеру $n$ **по некоторому правилу** поставлено в соответствие действительное число $x_n$. Тогда говорят, что задана числовая последовательность $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots x_n, \ \ldots$. При этом:

$x_1$ называют *первым членом* последовательности;
$x_2$ – *вторым членом* последовательности;
$x_3$ – *третьим членом* последовательности;
…
$x_n$ – *энным* или **общим членом** последовательности;
…

На практике последовательность обычно задаётся формулой общего члена, например: $x_n = 2n$ – последовательность положительных чётных чисел:

$$x_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$x_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$x_3 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$x_4 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$x_5 = 2 \cdot 5 = 10$$
$$\ldots$$
$$x_{n-1} = 2 \cdot (n-1) = 2n-2$$
$$x_n = 2n$$
$$x_{n+1} = 2 \cdot (n+1) = 2n+2$$
$$\ldots$$

Таким образом, запись $x_n = 2n$ однозначно определяет все члены последовательности – это и есть то правило (формула), по которому натуральным значениям $1, 2, 3, 4, 5, \ldots n, \ \ldots$ в соответствие ставятся числа $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots x_n, \ \ldots$.
Поэтому последовательность часто коротко обозначают общим членом, причём вместо «икс» могут использоваться другие латинские буквы, например:

Последовательность положительных нечётных чисел $y_n = 2n-1$:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 5, \quad y_4 = 7, \quad y_5 = 9, \quad \ldots \quad y_{n-1} = 2n-3, \quad y_n = 2n-1, \quad y_{n+1} = 2n+1, \quad \ldots$$

Ещё одна распространённая последовательность $u_n = \dfrac{1}{n}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Как, наверное, многие подметили, переменная «эн» играет роль своеобразного счётчика.

В рамках данного курса мы ограничимся интуитивным пониманием предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(2n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(2n-1) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

В чём состоит **принципиальное отличие** предела последовательности от предела функции? Давайте запишем два «родственных» предела:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

В пределе последовательности «динамическая» переменная «эн» может стремиться **только к «плюс бесконечности»** – в сторону увеличения натуральных номеров $1, 2, 3, 4, 5, \ldots n, \ \ldots$. В пределе функции «икс» можно направить куда угодно – к «минус бесконечности» либо к произвольному действительному числу.

Последовательность *дискретна* (прерывна), то есть состоит из отдельных изолированных членов. Раз, два, три, четыре, пять, вышел зайчик погулять. У «традиционных» функций с «иксами» ничего подобного не наблюдается, для них характерна *непрерывность*.

По причине *дискретности* в пределах последовательностей встречаются свои «фирменные представители», такие как, «мигалки», факториалы и прогрессии.

**«Мигалкой»** на математическом жаргоне называют последовательность $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

***Надеюсь, все помнят****, что –1 в нечётной степени равно –1, а в чётной – единице.*

Таким образом, **члены последовательности могут повторяться**. Так, в рассмотренном примере последовательность состоит из двух бесконечно чередующихся чисел.

А бывает ли так, что последовательность состоит из одинаковых чисел? Конечно. Например, $x_n = 3$ задаёт бесконечное количество «троек». Для любителей есть случай, когда в формуле всё же формально фигурирует «эн»: $x_n = 1^n$

Следует отметить, что предела $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ **не существует** *(т.к. члены не стремятся к какому-то* ***одному*** *числу)*, но вот с последними двумя примерами полный порядок:

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3, \quad \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Тем не менее, само по себе присутствие «мигалки» ещё ничего не значит. Так, например, у последовательности $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ предел преспокойно себе существует – члены $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$ «скачут» вокруг нуля и *бесконечно близко* к нему приближаются:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

Другой «фирменный представитель» – это **факториал**: $x_n = n!$
Всего лишь свёрнутая запись произведения:

$$x_1 = 1! = 1$$
$$x_2 = 2! = 1\cdot 2 = 2$$
$$x_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$
$$x_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$
$$x_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$
$$x_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$$
$$\ldots$$
$$x_{n-2} = (n-2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)$$
$$x_{n-1} = (n-1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)$$
$$x_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$$
$$x_{n+1} = (n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)$$
$$x_{n+2} = (n+2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$
$$\ldots$$

Отнюдь не графомания – пригодится для задач ;-) Рекомендую осмыслить-запомнить и даже переписать в тетрадь.

Очевидно, что:

$$\lim_{n\to\infty} n! = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

На самом деле с числовыми последовательностями мы имели дело ещё в средних классах школы. Речь идёт об **арифметической** и **геометрической** прогрессиях. В курсе высшей математике особо важна **геометрическая прогрессия**, энный член которой задаётся формулой $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, где $b_1$ – первый член $(b_1 \neq 0)$, а $q$ – *знаменатель* прогрессии $(q \neq 0)$. В заданиях по матану первый член частенько равен единице.

**Примеры:**

прогрессия $b_n = 2^{n-1}$ задаёт последовательность $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ ;

прогрессия $b_n = (-7)^n = (-1)^n \cdot 7^n$ задаёт последовательность
$-7, 49, -343, 7^4, -7^5, \ldots$ ;

прогрессия $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5^{n-1}}$ задаёт последовательность
$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \ldots$ ;

прогрессия $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{3^n}$ задаёт последовательность
$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$ .

Прогрессию называют *бесконечно убывающей*, если $-1 < q < 1$ (последние два случая). Как ясно уже из названия, предел любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен нулю, в частности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 0$$

Если знаменатель геометрической прогрессии $q > 1$, то она наоборот – стремится к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty$$

Если же $q < -1$, то предела не существует. Так, члены последовательности $(-7)^n$ без устали прыгают то к «плюс бесконечности», то к «минус бесконечности». А здравый смысл и теоремы матана подсказывают, что если что-то куда-то и стремится, то это заветное место единственно.

## 17. Методы нахождения пределов числовых последовательностей

В теории математического анализа последовательность считается частным случаем функции, и поэтому многое будет похоже на пределы функций. В этой связи я постараюсь разобрать примеры, которые характерны именно для последовательностей. Продолжим тему с прогрессиями:

**Пример 35**

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$$

**Решение**: перед нами нечто похожее на бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, но она ли это? Для ясности распишем несколько первых членов:

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$$

$$x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$$

...

$$x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}$$

...

Так как $n \to \infty$, то речь идёт о **сумме** членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая рассчитывается по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Оформляем решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) = (*)$$

Используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$. В данном случае: $b_1 = \frac{1}{4}$ – первый член, $q = \frac{1}{4}$ – знаменатель прогрессии.

Главное, совладать с четырёхэтажностью дроби *(см. **Горячие школьные формулы**)*:

$$(*) = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Готово.

**Пример 36**

Записать первые четыре члена последовательности и найти её предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{3n^2}$$

Это пример для самостоятельного решения. Для устранения неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ в числителе потребуется применить формулу суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии: $S = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, где $a_1$ – первый, а $a_n$ – энный член прогрессии.

Рассмотрим ещё пару «чисто последовательных» пределов:

**Пример 37**

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$$

**Решение**: чтобы избавиться от неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ нужно расписать факториалы в виде произведений. Но прежде, чем приступить к математическому граффити, рассмотрим конкретный пример, например: $6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$.

Последним множителем в произведении идёт шестёрка. Что нужно сделать, чтобы получить предыдущий множитель? Вычесть единицу: 6 – 1 = 5. Чтобы получить множитель, который располагается ещё дальше, нужно из пятёрки ещё раз вычесть единичку: 5 – 1 = 4. И так далее.

Не беспокойтесь, это не урок в первом классе коррекционной школы, на самом деле **мы знакомимся с важным и универсальным алгоритмом** под названием «**как разложить любой факториал**». Давайте разделаемся с самым злостным «флудером»:

$$(2n+3)!$$

Очевидно, что последним множителем в произведении будет $(2n+3)$.

Как получить предыдущий множитель? Вычесть единицу: $2n+3-1=2n+2$

Как достать прадедушку? Ещё раз вычесть единицу: $2n+2-1=2n+1$.

Ну и ещё на один шаг продвинемся вглубь: $2n+1-1=2n$

Таким образом, наше чудовище распишется следующим образом:

$$(2n+3)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)$$

С факториалами числителя всё проще, так, мелкие хулиганы.

Оформляем решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}\overset{(1)}{=}\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)\cdot[1+(2n+2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)}\overset{(4)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+2)(2n+3)}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2}=0$$

(1) Расписываем факториалы

(2) В числителе ДВА слагаемых. Выносим за скобки всё, что можно вынести, в данном случае это произведение $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2n(2n+1)$.

(3) Сокращаем числитель и знаменатель на $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2n(2n+1)$. …да уж, флуда тут и впрямь много.

(4) Упрощаем числитель

(5) Сокращаем числитель и знаменатель на $2n+3$. Надо сказать, повезло. В общем случае вверху и внизу получаются заурядные многочлены, после чего приходится выполнять стандартное действие – делить числитель и знаменатель на «эн» в старшей степени.

Более подготовленные читатели, которые легко раскладывают факториалы в уме, могут решить пример значительно быстрее. На первом шаге делим почленно числитель на знаменатель и мысленно выполняем сокращения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}+\frac{(2n+2)!}{(2n+3)!}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}}^{\to0}+\overbrace{\frac{1}{(2n+3)}}^{\to0}\right)=0+0=0$$

Но способ с разложением всё-таки более основателен и надёжен.

**Пример 38**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Поскольку в пределах последовательностей «эн» всегда стремится к «плюс бесконечности», то неудивительно, что неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ – одна из самых популярных. **И многие примеры решаются точно так же, как пределы функций**.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{1+n+3n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{7n^3+15n^2+9n+1}{5n^4+6n^2-3n-4},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{n+1}$$

Как вычислить эти пределы? Смотрите *Примеры 1, 2, 3*. А может быть что-нибудь посложнее наподобие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2-n-n^6}}{2n^3+n^2-5n+3}$? Ознакомьтесь с *Примером 26*.

**С формальной точки зрения разница будет лишь в одной букве** – там «икс», а здесь «эн». Приём тот же самый – числитель и знаменатель надо разделить на «эн» в старшей степени.

Чтобы разобраться с пределом $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n+3}$, обратитесь к *Примеру 19*. Решение снова будет как под копирку с различием в единственной букве.

Также в пределах последовательностей достаточно распространена неопределённость $\infty-\infty$. Как решать пределы вроде $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+3}-\sqrt{n^2-3n+1})$ можно узнать из *Примеров 33, 34*.

Оставшиеся примеры тоже «двулики», но на практике почему-то больше характерны для пределов последовательностей, чем для пределов функций:

**Пример 39**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3+(1-3n)^3}{8n^3-2n}$$

Сначала полное **решение**, потом пошаговые комментарии:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3+(1-3n)^3}{8n^3-2n}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-12n^2+6n-1+1-9n+27n^2-27n^3}{8n^3-2n}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-19n^3+15n^2-3n}{8n^3-2n}=\frac{-\infty}{\infty}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-19n^3+15n^2-3n}{n^3}}{\frac{8n^3-2n}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-19+\overset{\to 0}{\frac{15}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{3}{n^2}}}{8-\overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}}=-\frac{19}{8}$$

(1) В числителе дважды используем формулу $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

(2) Приводим подобные слагаемые в числителе.

(3) Для устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на $n^3$ («эн» в старшей степени).

Как видите, ничего сложного.

**Пример 40**

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-(1+2n)^3}{(1+2n)^2+4n^2}$$

Это пример для самостоятельного решения – формулы сокращенного умножения в помощь.

В пределах с *показательными* последовательностями применяется похожий метод деления числителя и знаменателя:

**Пример 41**

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2\cdot 4^{n}}{4^{n+1}-5}$$

**Решение** оформим по той же схеме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2\cdot 4^{n}}{4^{n+1}-5}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^{n}+2\cdot 4^{n}}{4\cdot 4^{n}-5}\overset{(2)}{=}\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3\cdot 3^{n}+2\cdot 4^{n}}{4^{n}}}{\dfrac{4\cdot 4^{n}-5}{4^{n}}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\overset{\to 0}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}}+2}{4-\overset{\to 0}{\dfrac{5}{4^{n}}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(1) Используя свойства степеней *(см. Приложение* ***Горячие школьные формулы****)*, вынесем из показателей всё лишнее, оставив там только «эн».

(2) Смотрим, какие показательные последовательности есть в пределе: $3^{n}, 4^{n}$ и выбираем последовательность с **наибольшим** основанием: $4^{n}$. В целях устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на $4^{n}$.

(3) В числителе и знаменателе проводим почленное деление. Поскольку $\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией $(-1<q<1, \quad q\neq 0)$, то она стремится к нулю. И тем более к нулю стремится константа, делённая на растущую прогрессию: $\frac{5}{4^{n}}\to 0$. Делаем соответствующие пометки и записываем ответ.

**Пример 42**

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n}+10\cdot 9^{n+1}}{5\cdot 10^{n-1}+7^{n+2}}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Как и в любом обществе, среди числовых последовательностей попадаются экстравагантные личности.

**Теорема: если одна последовательность стремится к нулю, а другая ограничена, то их произведение стремится к нулю.**

Аналогичный факт справедлив и для «обычных» функций с «иксами».

## Пример 43

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n!)}{n^2}$$

**Решение**: последовательность $\sin(n!)$ – ограничена: $-1\le\sin(n!)\le 1$, а последовательность $\frac{1}{n^2}$ стремится к нулю, значит, по соответствующей теореме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n!)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin(n!)\right)=0$$

Просто и со вкусом. Да-да, так и оформляем.

А почему бы и нет?

## Пример 44

Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(2e^{-n}\cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right)\right)$$

Это пример для самостоятельного решения. Решение и ответ уже близко.

Ещё две распространённые ограниченные функции – арктангенс и арккотангенс:

$$-\frac{\pi}{2}<arctg\alpha<\frac{\pi}{2}$$
$$0<arcctg\alpha<\pi$$

Аргументы всех перечисленных тригонометрических функций могут быть заполнены знатной абракадаброй, но это не должно приводить в панику – существенно то, что последовательности ограничены!

**Поздравляю Вас с прохождением интенсивного курса!**
**Надеюсь, он оказался познавательным, интересным и, главное – полезным!**

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в соответствующем разделе портала mathprofi.ru *(ссылка на аннотацию к разделу)*.

Из учебной литературы рекомендую К.А. Бохана *(попроще)*, Г.М. Фихтенгольца *(посложнее)*, Н.С. Пискунова *(для ВТУЗов)*.

**Желаю успехов!**

# 18. Решения и ответы

***Пример 4. Решение:***

*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3-4x+3}=\dfrac{\infty}{\infty}=(*)$

*Разделим числитель и знаменатель на* $x^3$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^3}}{\dfrac{x^3-4x+3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}^{\to 0}}{1-\dfrac{4}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}}=\frac{0}{1}=0$$

*б) Почленно делим числитель на знаменатель:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+3x-2x^2-x^3}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{2x}^{\to 0}+\frac{3}{2}-x^{\to\infty}-\frac{x^{2\,\to\infty}}{2}\right)=0+\frac{3}{2}-\infty-\infty=-\infty$$

*в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(4-7x^2)}{4x^5-7x^3+13x+28}=\dfrac{\infty}{\infty}=(*)$

*В числителе раскрываем скобки, делим числитель и знаменатель на* $x^5$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-7x^5}{4x^5-7x^3+13x+28}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^3-7x^5}{x^5}}{\dfrac{4x^5-7x^3+13x+28}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x^2}^{\to 0}-7}{4-\dfrac{7}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{13}{x^4}^{\to 0}+\dfrac{28}{x^5}^{\to 0}}=-\frac{7}{4}$$

***Пример 7. Решение:***

*а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}=\dfrac{0}{0}=(*)$

*Разложим числитель и знаменатель на множители:*

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ *(формула разности кубов)*

$5x^2-4x-1=0$

$D=16+20=36$

$\sqrt{D}=6$

$x_1=\dfrac{4-6}{10}=\dfrac{-2}{10}=-\dfrac{1}{5},\quad x_2=\dfrac{4+6}{10}=1$

$5x^2-4x-1=5\left(x+\dfrac{1}{5}\right)(x-1)=(5x+1)(x-1)$

$$(*)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(5x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{5x+1}=\frac{1+1+1}{5+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

*б)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x}=\dfrac{0}{0}=(*)$

*В числителе используем формулу квадрата суммы:* $x^2+6x+9=(x+3)^2$, *в знаменателе выносим* $x$ *за скобки:*

$$(*)=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{x(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x}=\frac{-3+3}{-3}=\frac{0}{-3}=0$$

***Пример 9. Решение:***

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\frac{0}{0}=(*)$$

*Разложим числитель на множители:*

$x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$\sqrt{D}=3$

$x_1=\dfrac{-1-3}{2}=-2$

$x_2=\dfrac{-1+3}{2}=1$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

*А также умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:*

$$(*)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\overset{\to 2}{\sqrt{x+6}}+2)}{x+6-4}=4\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=$$

$$=4\lim_{x\to -2}(x-1)=4\cdot(-3)=-12$$

***Пример 10. Решение:***

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}=\frac{0}{0}=(*)$$

*Умножим числитель и знаменатель на сопряженн**ые** выражени**я**:*

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(1+\overset{\to 1}{\sqrt{3-x}})}{(\overset{\to 3}{\sqrt{x+7}}+3)(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7-3^2)\cdot 2}{6\cdot(1^2-(3-x))}=\frac{2}{6}\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{1-3+x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=\frac{1}{3}$$

***Пример 15. Решение:***

*а) После преобразования тангенса искусственно домножаем числитель и знаменатель на* $2x$ *(можно на* $3x$*):*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tg3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x^{\to1}}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\sin 2x}{2x\cdot\sin 3x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 3x}=2\lim_{x\to0}\frac{3x}{3\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

*б) Используем триг. формулу* $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$*:*

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{5x+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{5x-x}{2}\right)}{4x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 2x}{2x}=-\lim_{x\to0}(\sin 3x)=0$$

***! Примечание****: пределы с разностью/суммой косинусов или синусов также часто встречаются на практике.*

*в) Используем тригонометрические формулы:*

$$\lim_{x\to0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x^{\to1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

***Пример 17. Решение:***

$$\lim_{x\to0}\frac{5x}{\arcsin\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=(*)$$

*Проведём замену:* $\arcsin\dfrac{x}{2}=t$

*Если* $x\to0$*, то* $t\to0$.

$$\arcsin\frac{x}{2}=t$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=\sin t$$

$$\frac{x}{2} = \sin t \quad \Rightarrow \quad x = 2\sin t$$

$$(*) = \lim_{t \to 0} \frac{5 \cdot 2\sin t}{t} = 10$$

***Пример 21. Решение:***

*а)* $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{x^2+5}{x^2-5} \right)^{x-1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty} = \lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{x^2-5+10}{x^2-5} \right)^{x-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \left( 1 + \frac{10}{x^2-5} \right)^{x-1} = 1^{\infty} = (*)$

*Используем второй замечательный предел:*

$$(*) = \lim_{x \to \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2-5}{10}} \right)^{\frac{x^2-5}{10}} \right)^{\frac{10(x-1)}{(x^2-5)}} = e^{10 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2-5}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{10 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{x^2-5}{x^2}}} = e^{10 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}{1 - \overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}}} = e^0 = 1$$

*б)* $\lim\limits_{x \to 0} \left( \frac{x+2}{x+3} \right)^{3x+4} = \left( \frac{0+2}{0+3} \right)^{0+4} = \left( \frac{2}{3} \right)^4 = \frac{16}{81}$

***Пример 24. Решение:***

*а)* $\lim\limits_{x \to 1} (5x-4)^{\frac{x}{10(x-1)}} = 1^{\infty} = (*)$

*Используем формулу* $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}$

$$(*) = e^{\lim\limits_{x \to 1} \left[ (5x-4-1) \cdot \frac{x}{10(x-1)} \right]} = e^{\frac{1}{10} \lim\limits_{x \to 1} \frac{x(5x-5)}{(x-1)}} = e^{\frac{1}{10} \lim\limits_{x \to 1} \frac{5x(x-1)}{(x-1)}} = e^{\frac{5}{10} \lim\limits_{x \to 1} (x)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

*б)* $\lim\limits_{x \to 1} (5x-4)^{\frac{x}{10(x-1)}} = 1^{\infty} = (*)$

*Проведём замену* $t = x - 1$
*Если* $x \to 1$, *то* $t \to 0$
*Из* $t = x - 1$ *выразим* $x = t + 1$

*Используем второй замечательный предел* $\lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$:

$$(*) = \lim_{t \to 0} (5(t+1)-4)^{\frac{t+1}{10(t+1-1)}} = \lim_{t \to 0} (1+5t)^{\frac{t+1}{10t}} = \lim_{t \to 0} \left( (1+5t)^{\frac{1}{5t}} \right)^{\frac{t+1}{2}} = e^{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\overset{\to 0}{t} + 1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

***Пример 26. Решение:***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{2x^3+x^2-5x+3}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

*Старшая степень числителя: 2; старшая степень знаменателя: 3.*
*Разделим числитель и знаменатель на* $x^3$*:*

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{x^3}}{\dfrac{2x^3+x^2-5x+3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{\sqrt[3]{x^9}}}{\dfrac{2x^3+x^2-5x+3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\overset{\to 0}{\dfrac{2}{x^9}}-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^8}}-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^3}}}}{2+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}-\overset{\to 0}{\dfrac{5}{x^2}}+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x^3}}}=\frac{0}{2}=0$$

***Пример 28. Решение:***

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+3}{-2x^4-x^3+7x^2-1}=\frac{\infty}{-\infty}=(*)$$

*Разделим числитель и знаменатель на* $x^4$*:*

$$(*)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+3}{x^4}}{\dfrac{-2x^4-x^3+7x^2-1}{x^4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^3}}+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x^4}}}{-2-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{7}{x^2}}-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^4}}}=\frac{0}{-2}=0$$

***Пример 30. Решение:***

*а) Разделим числитель и знаменатель на* $x^2$*:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+3x+5}\right)^{4x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x+2}{x^2}}{\dfrac{x^2+3x+5}{x^2}}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{2}{x^2}}}{1+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{5}{x^2}}}\right)^{4x}=\left(\frac{0}{1}\right)^{+\infty}=0^{+\infty}=0$$

*б) Разделим числитель и знаменатель на* $x^2$*:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-3}\right)^{5x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x^2+1}{x^2}}{\dfrac{2x-3}{x^2}}\right)^{5x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}}{\overset{\to +0}{\dfrac{2}{x}}-\overset{\to +0}{\dfrac{3}{x^2}}}\right)^{5x+1}=\left(\frac{1}{+0}\right)^{+\infty}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$$

***Пример 32. Решение:***

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{8}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{8}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{8-(x+4)}{(x-4)(x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{8-x-4}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)}{(x-4)(x+4)}=-\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)}=-\frac{1}{(4+4)}=-\frac{1}{8}$$

***Пример 34. Решение:***

*а)* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\infty-\infty=(*)$

*Умножим и разделим на сопряженное выражение:*

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

*б)* $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{x^3+4x^2})=\infty-\infty=(*)$

*Умножим и разделим на сопряженное выражение:*

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{x^3+4x^2})(2x+\sqrt{x^3+4x^2})}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^2-(x^3+4x^2)}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x^3-4x^2}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

*Разделим числитель и знаменатель на* $x^3$*:*

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^3}{x^3}}{\frac{2x+\sqrt{x^3+4x^2}}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\frac{2x}{x^3}+\sqrt{\frac{x^3+4x^2}{x^6}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to+0}+\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to+0}+\underbrace{\frac{4}{x^4}}_{\to+0}}}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

***Пример 36. Решение:*** *запишем первые четыре члена:*

$$x_1=\frac{1}{3\cdot1^2}$$

$$x_2=\frac{1+3}{3\cdot2^2}$$

$$x_3=\frac{1+3+5}{3\cdot3^2}$$

$$x_4=\frac{1+3+5+7}{3\cdot4^2}$$

*Найдём предел последовательности:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+...+(2n-1)}{3n^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

*Используем формулу суммы* $n$ *первых членов арифметической прогрессии* $S=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. *В данном случае* $a_1=1,\ a_n=2n-1$*:*

$$(*)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n\cdot n}{2}}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2}=\frac{1}{3}$$

***Пример 38. Решение:***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}=\frac{\infty-\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)\cdot\left[(n+3)(n+4)-1\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)-1}{n+3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+11}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+7n+11}{n^2}}{\frac{n+3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\overset{\to0}{\frac{7}{n}}+\overset{\to0}{\frac{11}{n^2}}}{\overset{\to0}{\frac{1}{n}}+\overset{\to0}{\frac{3}{n^2}}}=\frac{1}{0}=\infty$$

***Пример 40: Решение:***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-(1+2n)^3}{(1+2n)^2+4n^2}=\frac{\infty-\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-(1+12n^2+6n+8n^3)}{1+4n+4n^2+4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-1-12n^2-6n-8n^3}{1+4n+8n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-12n^2-6n-1}{1+4n+8n^2}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-12n^2-6n-1}{n^2}}{\frac{1+4n+8n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-12-\overset{\to0}{\frac{6}{n}}-\overset{\to0}{\frac{1}{n^2}}}{\overset{\to0}{\frac{1}{n^2}}+\overset{\to0}{\frac{4}{n}}+8}=\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}$$

***Пример 42. Решение:***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+10\cdot9^{n+1}}{5\cdot10^{n-1}+7^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+10\cdot9\cdot9^n}{5\cdot10^{-1}\cdot10^n+49\cdot7^n}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^n+90\cdot9^n}{10^n}}{\frac{5\cdot10^{-1}\cdot10^n+49\cdot7^n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^n}{10^n}+\frac{90\cdot9^n}{10^n}}{\frac{5\cdot10^n}{10\cdot10^n}+\frac{49\cdot7^n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\left(\frac{7}{10}\right)^n}_{\to0}+90\cdot\underbrace{\left(\frac{9}{10}\right)^n}_{\to0}}{\frac{1}{2}+49\cdot\underbrace{\left(\frac{7}{10}\right)^n}_{\to0}}=\frac{0}{\frac{1}{2}}=0$$

***Пример 44. Решение****: последовательность* $\cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right)$ *– ограничена:*

$0\le\cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right)\le1$, *а последовательность* $e^{-n}=\frac{1}{e^n}\to0$, *значит, по соответствующей теореме:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(2e^{-n}\cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right)\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^n}\cdot\cos^2\left(\frac{3n-5}{1+n^3}\right)\right)=2\cdot0=0$$