§1. Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка

Определение 1.1. *Линией второго порядка* называется множество точек, координаты которых в произвольной прямоугольной декартовой системе координат $O'x'y'$ удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени, т.е. уравнению вида

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0, \qquad (1.1)$$

где $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Используя формулы преобразования прямоугольных координат из §6 главы 2 раздела 2, можно доказать [3], что путём подходящего выбора системы координат уравнение (1.1) можно привести к одному из следующих девяти видов:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad (1.2) \qquad y^2=2px; \quad (1.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \quad (1.3) \qquad y^2-a^2=0; \quad (1.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0; \quad (1.4) \qquad y^2+a^2=0; \quad (1.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad (1.5) \qquad y^2=0. \quad (1.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0; \quad (1.6)$$

Предполагается, что $a, b, p>0$ в каждом из уравнений (1.2) – (1.9). Уравнения (1.3) и (1.9) не задают никакого множества точек; говорят, что они определяют мнимые линии второго порядка. Уравнение (1.4) задаёт одну точку – начало координат. Уравнения (1.6), (1.8), (1.10) определяют пару пересекающихся прямых, пару параллельных и пару совпадающих прямых соответственно. Эти пары прямых называются *вырожденными линиями второго порядка*. Остаются три уравнения: (1.2), (1.5) и (1.7), которые определяют *невырожденные линии второго порядка* (или *невырожденные кривые второго порядка*), называемые *эллипсом, гиперболой и параболой*. Именно эти кривые и будут изучаться в настоящей главе. При этом будет решаться вторая из двух основных задач аналитической геометрии на плоскости – каждому из этих уравнений будет сопоставлена линия и с его помощью будут изучены её свойства.