К/р 1, Вариант 12

1. Доказать: $C \subset B \cup A \Leftrightarrow C \setminus B \subset A$

Поскольку $C \subset B \cup A$, то разность множеств $C \setminus B$ будет равна либо $\varnothing$, либо новому множеству D. Из определения разности следует, что $D \subset C$, а если $C \subset B \cup A$ и $D \cap B = \varnothing$, то $D \subset A$.

Если же $B \cup A = \varnothing$, то $C = \varnothing$.

Таким образом все вышеописанные случаи удовлетв равносильности.

(5) Условие задачи можно представить как:
кол-во способов распределить 13 тетрадей между 6 детьми, где у каждого может быть любое кол-во тетрадей.
Представим тетради за „0", а границу между детьми - „1".
Имеем след. запись: 000 000 000 000 0 111 11, где решением является кол-во перестановок „0" и „1"

$$\frac{(13+5)!}{5!((13+5)-5)!} = \frac{14 \cdot \cancel{15} \cdot \overset{2}{\cancel{16}} \cdot 17 \cdot 18}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 8568$$

Ответ: 8568 способами

(6) $|A| = 12$; $|B| = 7$; $|C| = 5$. Кол-во спос. расставить ряд = ?

$$\binom{|A|+|B|+|C|}{|A|} \cdot \binom{|B|+|C|}{|B|} = \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{7} = \frac{24!}{12!(24-12)!} \cdot \frac{12!}{7!(12-7)!} =$$

$$= 2\,704\,156 \cdot 792 = 2\,141\,691\,552$$

Ответ: существует 2 141 691 552 способа расставить ряд

(9) Рассмотрим предлагаемую последовательность от 1 до 21

1 2 _ 4 5 _ _ 8 _ 10 11 _ 13 _ _ 16 17 _ 19 20 _ , далее последовательность будет повторяться. Мы имеем 12 значащих цифр и 9 пропусков.

След. На 70 месте будет число $\left[\frac{70}{12}\right] \cdot 21$, плюс число, стоящее на месте 70 mod 12 нашей последовательности.

<u>Ответ:</u> На 70 месте находится число $5 \cdot 21 + 17 = 122$

(3) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in [0, \infty)$ и $x^2 = y^2\}$

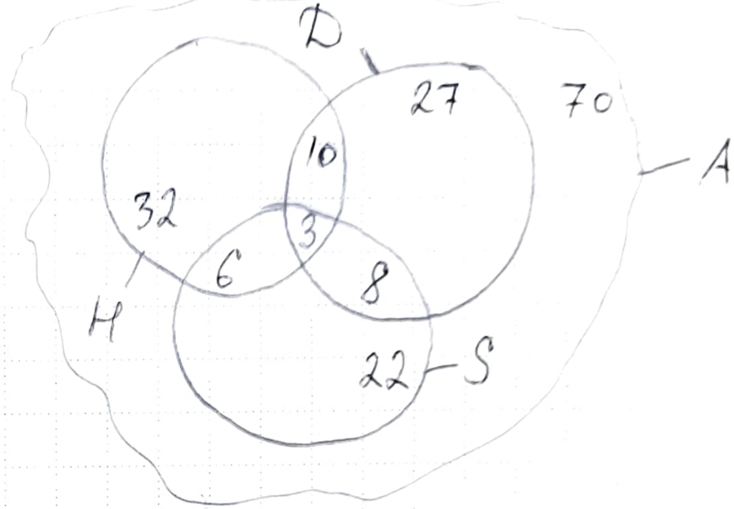
<u>Ответ:</u> Предпорядок, частичный порядок.

Рефлексивное $(\forall a \in A : aRa)$

Транзитивное $(\forall a, b, c \in A : aRb$ и $bRc \Rightarrow aRc)$

Антисимметрич. $(\forall a, b \in A : aRb$ и $bRa \Rightarrow a = b)$

(10) $|A| = 70$; $|Д| = 27$;
$|H| = 32$; $|S| = 22$;
$|Д \cap H| = 10$; $|H \cap S| = 6$;
$|Д \cap S| = 8$; $|Д \cap S \cap H| = 3$



$|Д \cup H \cup S| = (32+27+22)-(10-3)-(6-3)-(8-3)-(3\cdot 2) = 60$

Ответ: $|A \setminus (Д \cup H \cup S)| = 70-60 = 10$

(2) $R = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ и } y = x+b\}$

$\delta_R = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x = y-b\}$

$\rho_R = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ и } y = x+b\}$

$R^{-1} = \{\langle y,x \rangle \mid y,x \in \mathbb{R} \text{ и } x = y-b\}$

$R \circ R = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ и } x+b = y+b\}$

$R^{-1} \circ R = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ и } y-b = x+b\}$

$R \circ R^{-1} = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ и } x+b = y-b\}$

8. Все члены, не содерж. радикалов в разлож.: $\left(1 - x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

Для удобства перепишем: $(x+y+z)^6$, где $x = 1$; $y = (-x^3)$, $z = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Нас интересуют все члены без z или с z в четной степ.

$$(x+y+z)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (x+y)^{6-k} z^k =$$

$$= \overbrace{(x+y)^6}^{1} + 6(x+y)^5 z + \overbrace{15(x+y)^4 z^2}^{2} + 20(x+y)^3 z^3 + \overbrace{15(x+y)^2 z^4}^{3} + 6(x+y) z^5 + \overbrace{z^6}^{4}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Ответ:

1. $x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6$
2. $15x^4 z^2 + 60x^3 y z^2 + 90x^2 y^2 z^2 + 60x y^3 z^2 + 15y^4 z^2$
3. $15x^2 z^4 + 30xyz^4 + 15y^2 z^4$
4. z^6

④ $\binom{18}{3} = \frac{18!}{3!\,((18-3))!} = \frac{16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3} = 816$ Ответ: 816 способами

⑦ Доказать: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = -1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\,n-1\binom{n}{n-1} + (-1)^n n\binom{n}{n}$$

$$1\binom{n}{1} = n\binom{n}{n} = n\ ;\quad 2\binom{n}{2} = n-1\binom{n}{n-1}$$ т.к.

$$\frac{2n!}{1!\,\cancel{2!}\,(n-2)!} = \underline{\underline{\frac{n!}{1!\,(n-2)!}}}\ ;\quad \frac{\cancel{(n-1)}\,n!}{\underbrace{\cancel{(n-1)}!}_{(n-2)!}(n-n+1)!} = \underline{\underline{\frac{n!}{(n-2)!\,1!}}}\ ;$$ следовательно:

$$-n + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-2}3\binom{n}{3} + (-1)^{n-1}2\binom{n}{2} + (-1)^n n$$

<u>Ответ:</u> $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$, при $n > k$