§5. Площадь поверхности тела вращения

Пусть дуга AB гладкой кривой с уравнением $y = f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$ вращается вокруг оси Ox (рис. 5.1). Найдем площадь S получающейся поверхности вращения. Площадь этой поверхности можно получить путем рассуждения совершенно аналогично предыдущему.

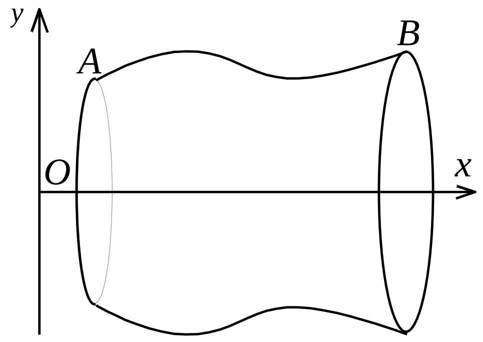

Рис. 5.1

Заменим сначала кривую вписанной ломаной линией и получим вместо кривой поверхности, геометрическую фигуру, состоящую из конечного числа усеченных круговых конусов. Руководствуясь интуицией, мы определим площадь поверхности вращения как предел суммы площадей боковых поверхностей этих конусов, когда длина наибольшего звена вписанной ломаной стремится к нулю. Но боковая поверхность усечённого конуса равняется, как известно, длине образующей, умноженной на длину среднего кругового сечения.

Складывая эти выражения и совершая затем предельный переход от ломаной линии к кривой при $\lambda = \max\limits_{k} \Delta x_k \to 0$ $(n \to \infty)$, мы получим для площади поверхности вращения выражение

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y_x'^2}\,dx \tag{5.1}$$

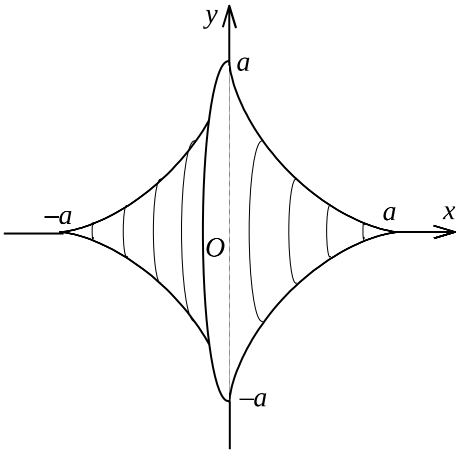

Рис. 5.2

Пример 5.1. Найти площадь S поверхности, образованной вращением астроиды $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$ вокруг оси Ox (рис. 5.2).

► Выше мы уже нашли (см. пример 4.1), что для той части дуги астроиды, которая лежит в первой четверти,

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \Rightarrow \sqrt{1 + y_x'^2} = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}.$$

Вращение этой дуги образует половину интересующей нас поверхности, откуда

$$S = 4\pi\int_0^a y\sqrt{1 + y_x'^2}\,dx = 4\pi\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} a^{1/3} x^{-1/3}\,dx.$$

Подстановка $x = at^3$ дает $dx = 3t^2 dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = a \Rightarrow t = 1$. Тогда

$$S = 12\pi a^2 \int_0^1 (1 - t^2)^{3/2} t\,dt = -6\pi a^2 \left(\frac{2}{5}\sqrt{(1 - t^2)^5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{12}{5}\pi a^2. \blacktriangleleft$$

Замечание 5.1. Если кривая задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то, введя параметр t в качестве новой переменной интегрирования в интеграл (5.1) при $y(t) \ge 0$, будем иметь

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt .$$

Таким образом, получается следующее выражение для площади S поверхности вращения дуги AB кривой, заданной параметрически:

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt , \tag{5.2}$$

где t_0 и t_1 – значения параметра t, соответствующие концам дуги AB.

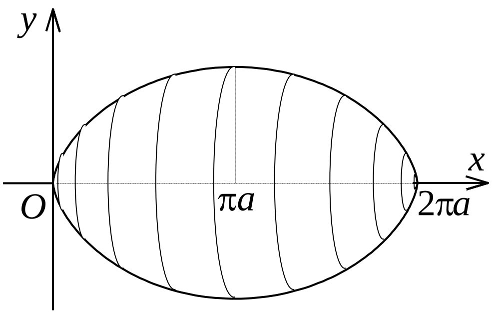

Рис. 5.3

Пример 5.2. Найти площадь поверхности вращения для одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 5.3).

► Очевидно, $dx = a(1-\cos t)$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2\pi a \Rightarrow t = 2\pi$. Значит,

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2$$