§1. Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть функция f определена в области D m-мерного пространства, и $Y(a_1, a_2, \dots, a_m)$ – внутренняя точка этой области.

Определение 1.1. ***Говорят, что функция*** f ***имеет в точке*** $Y(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ***максимум, если в достаточно малой*** δ ***-окрестности этой точки***

$$f(X) \le f(Y). \tag{1.1}$$

В этом случае точка Y ***называется точкой максимума функции*** f ***.***

Определение 1.2. ***Говорят, что функция*** f ***имеет в точке*** $Y(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ***минимум, если в достаточно малой*** δ ***-окрестности этой точки***

$$f(X) \ge f(Y). \tag{1.2}$$

В этом случае точка Y ***называется точкой минимума функции*** f ***.***

Точки максимума и минимума функции f называются *точками экстремума* этой функции.

Если в неравенстве (1.1) и соответственно в (1.2) при $X \ne Y$ можно заменить знак ≤ на знак < (соответственно ≥ на >), то максимум (соответственно минимум) называется *строгим*.

В случае двумерного пространства, если $Y(a,b)$ – точка (строгого) максимума функции f, имеем согласно определению $f(x,y) < f(a,b)$ для достаточно малых положительных значений $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Если (a,b) – точка (строгого) минимума функции f, то $f(x,y) > f(a,b)$ для достаточно малых положительных $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Примеры 1.1 (рис. 1.1 и 1.2).

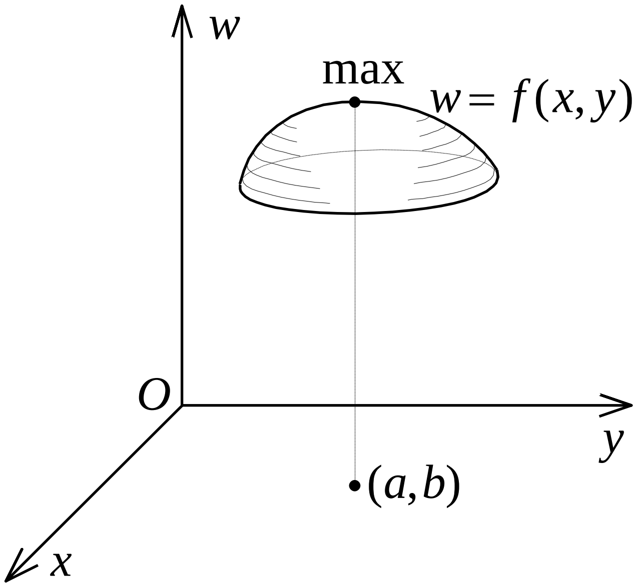

Рис. 1.1. Иллюстрация к определению максимума функции

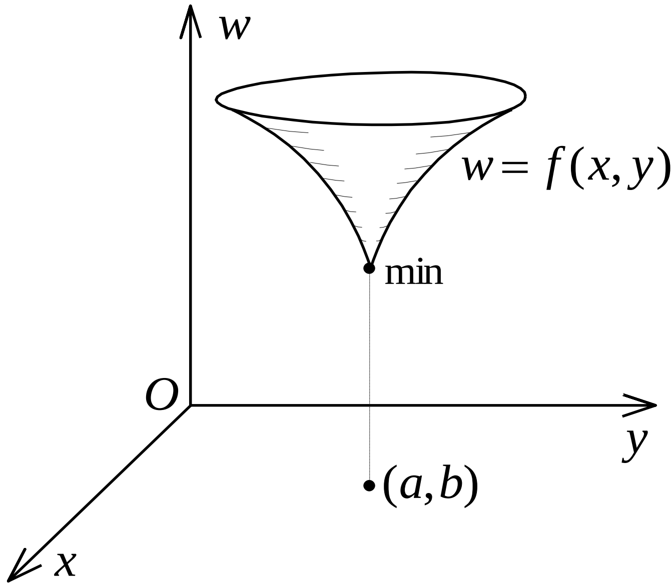

Рис. 1.2. Иллюстрация к определению минимума функции

Теорема 1.1. ***Пусть*** $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ***имеет в точке*** $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ***экстремум. Если в этой точке существуют и конечны частные производные*** f'_{x_1}, f'_{x_2}, $\dots$, f'_{x_m}***, то***

$$f'_{x_1}(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0, \quad f'_{x_2}(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0, \quad \dots, \quad f'_{x_m}(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0\,. \tag{1.3}$$

▶ Если имеет место максимум, то справедливо (1.1): $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \le f(a_1, a_2, \dots, a_m)$. В частности, $f(x_1, a_2, \dots, a_m) \le f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ для всех x_1, достаточно близких к a_1, т. е. a_1 есть точка максимума функции $f(x_1, a_2, \dots, a_m)$ одной переменной x_1. Отсюда следует первое из равенств (1.3). Остальные доказываются аналогично. ◀

Следствие. ***Точки, в которых функция*** $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ***имеет экстремум, следует искать среди точек, где либо одновременно***

$$\begin{aligned} &f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0,\\ &f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f'_{x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \end{aligned}$$

либо по меньшей мере одна из этих частных производных не существует или бесконечна.

Точки этих двух типов называют *критическими*. Не всякая критическая точка будет точкой экстремума.

В частности, для функции f двух переменных x, y критические точки следует искать среди точек, где либо одновременно

$$f'_x(x,y)=0, \quad f'_y(x,y)=0,$$

либо хотя бы одна из частных производных не существует или бесконечна.

Пример 1.2. Для функции $f(x,y)=xy$ точка $(0,0)$ будет критической, так как $f'_x=y$ и $f'_y=x$ обращаются в нуль в этой точке. Однако экстремума нет. Действительно, $f(0,0)=0$, а в любой близости от $(0,0)$ найдутся как положительные, так и отрицательные значения функции. Соответствующая поверхность $w=xy$ (гиперболический параболоид) имеет вид седла.

Далее будут даны признаки, позволяющие во многих случаях судить о наличии экстремума.

Теорема 1.2. ***Если*** $f'_x(a,b)=0$, $f'_y(a,b)=0$ ***и*** $d^2f(x,y)$ ***не меняет своего знака в некоторой*** δ***-окрестности точки*** (a,b)***, то экстремум имеется, причем в случае*** $d^2f(x,y)<0$ ***– максимум, а в случае*** $d^2f(x,y)>0$ ***– минимум.***

▶ Пусть точка $(a+\Delta x, b+\Delta y)$ попадает в упомянутую окрестность. Чтобы установить, имеет ли $f(x,y)$ экстремум в точке (a,b), рассмотрим разность

$$\Delta f(a,b)=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a,b).$$

По формуле Тейлора для $n=1$

$$\Delta f(a,b)=df(a,b)+\frac{1}{2}d^2f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y)=\frac{1}{2}d^2f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y),$$

так как

$$df(a,b)=f'_x(a,b)\Delta x+f'_y(a,b)\Delta y=0.$$

Следовательно, знак $\Delta f(a,b)$ совпадает со знаком $d^2f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y)$. Если в окрестности точки (a,b) выполняется условие $d^2f(x,y)<0$, то, в частности, и $d^2f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y)<0$, а поэтому $\Delta f(a,b)<0$. Иными словами, в окрестности точки (a,b)

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y)<f(a,b),$$

т. е. в точке (a,b) имеется максимум. Аналогично показывается, что в случае $d^2f(x,y)>0$ имеется минимум. ◀

Пример 1.3. $w=3x^2+y^4-32y$. Исследовать эту функцию на экстремум.

▶ Здесь $\dfrac{\partial w}{\partial x}=6x$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}=4y^3-32$. Находим критические точки из системы $6x=0$, $4y^4-32=0$. Оказывается, что $x=0$, $y=2$ – единственная критическая точка. Исследуем ее:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 12y^2,$$

откуда $d^2 w = 6dx^2 + 12y^2 dy^2$. Отсюда видно, что $d^2 w > 0$ в любой окрестности точки $(0, 2)$, т. е. при любых dx и dy. По теореме заключаем, что в точке $(0, 2)$ имеется минимум. ◀

Замечание. В общем случае функции $f(x_1, x_2, \dots x_m)$ от m переменных теорема формулируется совершенно аналогично и доказывается тем же путем.

Хотя установленный нами признак наличия экстремума и прост по формулировке, пользоваться им часто бывает трудно, так как трудно бывает судить о знаке $d^2 f$. Следующая теорема, которую мы докажем, в этом отношении более удобна.

Предположим, что функция f двух переменных x, y определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки (a,b), в которой $f'_x(a,b) = 0$, $f'_y(a,b) = 0$. Введем для краткости обозначения $A = f''_{x^2}(a,b)$, $B = f''_{xy}(a,b)$, $C = f''_{y^2}(a,b)$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. ***Если*** $AC - B^2 > 0$***, то в точке*** (a,b) ***имеется экстремум, причем при*** $A < 0$ ***– максимум, при*** $A > 0$ ***– минимум. Если же*** $AC - B^2 < 0$***, то в точке*** (a,b) ***экстремума нет.***

▶ Так как по условию $f'_x(a,b) = 0$ и $f'_y(a,b) = 0$, то по формуле Тейлора при достаточно малых Δx и Δy будем иметь

$$\Delta f(a,b) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[f''_{x^2}(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y)\Delta x\,\Delta y + f''_{y^2}(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y)\Delta y^2 \Big].$$

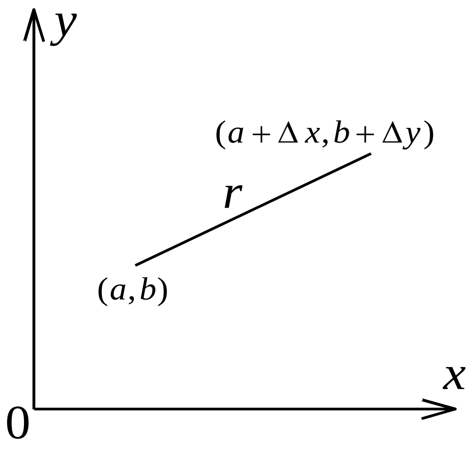

Рис. 1.3

По условию вторые частные производные функции $f(x,y)$ непрерывны в точке (a,b), поэтому

$$f''_{x^2}(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y) = A + \alpha;$$

$$f''_{xy}(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y) = B + \beta;$$

$$f''_{y^2}(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y) = C + \gamma,$$

где α, β, γ – бесконечно малы при $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Тогда $\Delta f(a,b)$ запишется так:

$$\Delta f(a,b) = \frac{1}{2}\Big[A\Delta x^2 + 2B\Delta x\,\Delta y + C\Delta y^2 + \alpha\Delta x^2 + 2\beta\Delta x\,\Delta y + \gamma\Delta y^2 \Big]$$

.

Положим теперь $\Delta x = r\cos\varphi$, $\Delta y = r\sin\varphi$, где $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (рис. 1.3), тогда

$$\Delta f(a,b) = \frac{r^2}{2}\left[(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + (\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi)\right],$$

и окончательно

$$\Delta f(a,b) = \frac{r^2}{2}(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + \alpha^*), \tag{1.4}$$

где

$$\alpha^* = \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{1.5}$$

1. Пусть $AC - B^2 > 0$. В этом случае $AC > 0$, так что $A \neq 0$ и тригонометрический трехчлен в (1.4) может быть представлен следующим образом:

$$\frac{1}{A}\left[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi\right]. \tag{1.6}$$

Отсюда ясно, что в (1.6) выражение в квадратных скобках всегда положительно, так что трехчлен

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi. \tag{1.7}$$

при всех значениях $\varphi \in [0, 2\pi]$, не обращаясь в нуль, сохраняет знак коэффициента A. Абсолютная величина трехчлена (1.7) как непрерывная в промежутке $[0, 2\pi]$ функция от φ имеет положительное наименьшее значение m:

$$\left|A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi\right| \geq m > 0.$$

С другой стороны ввиду (1.5) $|\alpha^*| < m$, если только $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ достаточно мало. Но тогда все выражение в скобках в правой части равенства (1.4), а значит, и $\Delta f(a,b)$ будет сохранять тот же знак, что и трехчлен (1.7), знак числа A.

Итак, если $A > 0$, то и $\Delta f(a,b) > 0$, т. е. функция в рассматриваемой точке (a,b) имеет минимум, а при $A < 0$ будет и $\Delta f(a,b) < 0$, т. е. в (a,b) максимум.

2. Пусть теперь $AC - B^2 < 0$. Остановимся сначала на случае $A \neq 0$; тогда можно и здесь использовать преобразование (1.6) трехчлена (1.7). При $\varphi = 0$ выражение в квадратных скобках в (1.6) будет положительным и равным A^2, а тогда знак трехчлена (1.7) совпадает со знаком A. Если же φ_0 определить из условия $A\cos\varphi_0 + B\sin\varphi_0 = 0$, то выражение в квадратных скобках в (1.6) будет отрицательным и равным $(AC - B^2)\sin^2\varphi_0$, тогда знак трехчлена (1.7) противоположен знаку A. Величина же α^* при достаточно малом $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (как при $\varphi = 0$, так и при $\varphi = \varphi_0$), будет сколь угодно мала, и знак

$\Delta f(a,b)$ определится знаком трехчлена (1.7). Таким образом, в любой близости от точки (a,b) в лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ разность $\Delta f(a,b)$ будет иметь значения противоположных знаков. Следовательно, в этой точке экстремума нет.

Если $A = 0$, $B \neq 0$, то трехчлен (1.7) сведется к выражению

$$2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi),$$

которое, очевидно, меняет знак при переходе φ через значение $\varphi = \pi$, а тогда, как мы только что установили, экстремума нет. $\blacktriangleleft$

Пример 1.4. Найти экстремумы функции $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$.

$\blacktriangleright$ Найдем сначала критические точки:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 6x - 6y = 0 \\ f'_y &= -6x + 6y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & y = x, \\ & -6x + 6y^2 = 0,\ \ x(x-1) = 0; \end{aligned}$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1.$$

Следовательно, $(0,0)$ и $(1,1)$ – критические точки.

$$f''_{x^2} = 6, \quad f''_{xy} = -6, \quad f''_{y^2} = 12y.$$

Исследуем на экстремум критические точки:

1) $(0,0)$: $A = 6$, $B = -6$, $C = 0$; $AC - B^2 = -36 < 0$, значит, в критической точке $(0,0)$ экстремума нет;

2) $(1,1)$: $A = 6$, $B = -6$, $C = 12$; $AC = B^2 = 36 > 0$, значит, в критической точке $(1,1)$ есть экстремум, причем это минимум, так как $A = 6 > 0$. $\blacktriangleleft$