§1. Условие постоянства функции на промежутке

В §5 главы 1 было установлено, что производная функции, являющейся постоянной на некотором промежутке X, равна нулю. Здесь рассматривается обратное утверждение.

Теорема 1.1 (*достаточное условие постоянства функции на промежутке*). Если производная функции $f(x)$ равна нулю в любой точке некоторого промежутка X, то функция $f(x)$ является постоянной на этом промежутке.

►Из условия теоремы имеем $f'(x)=0$ для $\forall x \in X$. Фиксируем некоторую точку x_0 из промежутке X и рассмотрим любую другую его точку x. На отрезке $[x_0, x]$ или $[x, x_0]$ для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа (см. §4 предыдущей главы), поэтому справедливо равенство:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0), \tag{1.1}$$

где c – некоторая точка между x_0 и x. Поскольку c принадлежит промежутку X, то $f'(c)=0$, так что для $\forall x \in X$ в силу (1.1) верно равенство $f(x)-f(x_0)=0$ или $f(x)=f(x_0)$. Итак, все значения данной функции на промежутке X равны одному и тому же числу $f(x_0)$, поэтому заключаем, что она постоянна на X.◄

Замечание 1.1. Равенство нулю производной функции на промежутке X – необходимое и достаточное условие её постоянства на этом промежутке.