Практика

Соленоидальные поля

Определение

Векторное поле $\overline{a}(M) \forall\ M \in A \subset R^3$, называется *соленоидальным*, если

$$div\ \overline{a}(M) = 0\ \forall(\cdot)\ M \in A$$

Свойства соленоидальных полей

1) $div\ \overline{a}(M)=0 \Rightarrow$ поток векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю,т.е. $\Pi_\sigma\, \overline{a}(M)=0$;

2) $div\ \overline{a}(M)=0 \Rightarrow$существует некоторое поле $\overline{b}(M)$, такое что

$$\overline{a}(M) = rot\, \overline{b}(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A.$$

Тогда вектор $\overline{b}$ называется *векторным потенциалом* поля $\overline{a}(M)$.

Замечания:

1) Векторный потенциал определяется неоднозначно
(это следует из свойства 2);

2) Векторное поле $rot\, \overline{a}(M)$ - это соленоидальное поле, то есть

$$div\, rot\, \overline{a}(M) = 0.$$

Вычисление векторного потенциала соленоидального поля

1 способ

Для вычисления векторного потенциала соленоидального поля используется понятие звёздной области.

Определение (звёздной области)

Область $A \subset R^3$ (R^2), называется *звёздной относительно некоторой точки* $M \in A,$ если любой луч, выходящий из точки M, пересекает границу области A не более чем в одной точке.

Примеры звёздных областей:

Для R^2: плоскость R^2; круг; параллелограмм и т.д.

Для R^3:пространство R^3; шар; куб и т.д.

Теорема

Пусть $\bar{a}\,(M)$- соленоидальное поле $\forall\,(\cdot)M \in A \subset R^3$.

Пусть A- звёздная область относительно точки $O(\,0;0;0\,)$. ($\bar{a}\,(M)$в точке O может быть не определено).

Тогда

$$\bar{b}\,(M) = \int_0^1 \left(\bar{a}(M') \times \bar{r}(M)\right) \cdot t \cdot dt,$$

где M' имеет координаты $(tx; ty; tz)$ $\forall t \in [0,1]$, $\bar{r}(M) = \{x, y, z\}$.

2 способ

Пусть $\overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k} -$ соленоидальное поле $\forall\, M(x; y; z) \in A \subset R^3$

Векторный потенциал векторного поля - это вектор

$$\bar{b}\,(M) = P_1(x, y, z)\cdot\bar{i} + Q_1(x, y, z)\cdot\bar{j} + R_1(x, y, z)\cdot\bar{k}\,,$$

удовлетворяющий условию:

$$rot\,\bar{b}(M) = \bar{a}(M) \quad \forall\, M(x; y; z) \in A \subset R^3 \qquad (1)$$

В координатной форме равенство (1) запишется так:

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R \qquad (2)$$

Для нахождения $\bar{b}\,(M)$ дотаточно найти частное решение системы (2). Так как вектор $\overline{b}(M)$ любой вектор, удовлетворяющий равенству (1), то для упрощения положим , например, $P_1(x, y, z) \equiv 0\; \forall\, M(x; y; z) \in A$,

т.е. вектор $\overline{b}(M)$ будем искать в виде

$$\bar{b}\,(M) = Q_1(x, y, z)\cdot\bar{j} + R_1(x, y, z)\cdot\bar{k}\,.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (2) для нахождения неизвестных функций $Q_1(x; y; z)$ и $R_1(x; y; z)$ примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial z} = P \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial x} = -Q \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = R \end{cases} \qquad (3) \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} + P \\ R_1(x; y; z) = -\int Q(x; y; z)dx + C_1(y; z), \\ Q_1(x; y; z) = \int R(x; y; z)dx + C_2(y; z) \end{cases}$$

где $C_1(y; z)$ и $C_2(y; z) -$ любые дифференцируемые функции y и z.

Пусть для упрощения $C_2(y;z) \equiv 0$ и выбирем функцию$C_1(y;z)$ так, чтобы удовлетворялось и первое уравнение системы (3). Для этого подставляем в первое уравнение (3) найденные выражения для Q_1 и R_1:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx+\frac{\partial C_1}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx=P(x,y,z).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial C_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx+P(x,y,z)$$

Легко проверить, что правая часть этого уравнения не зависит от x, так как

$$div\,\overline{a}\,(M)=0\ \ \forall\, M(x;y;z)\in A\ .$$

Интегрируя последнее равенство по y, получим

$$C_1(y,z)=\int\left[\ \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx+P(x,y,z)\ \right]\cdot dy+C_3(z)\,. \qquad (4)$$

Полагая в (4) $C_3(z) \equiv 0$ и подставляя (4) в выражение для $R_1(x;y;z)$, получим частное решение системы (3) :

$$P_1(x;y;z) \equiv 0\ , \qquad (5)$$

$$Q_1(x,y,z)=\int R(x,y,z)dx\ , \qquad (6)$$

$$R_1(x,y,z)=\int\left[\ \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx+P(x,y,z)\ \right]\cdot dy-\int Q(x,y,z)dx\,. \qquad (7)$$

Вектор $\overline{b}(M)$, координаты $P_1(x;y;z)$, $Q_1(x;y;z)$ и $R_1(x;y;z)$ которго определяются формулами (5), (6), (7), являются векторным потенциалом , так как он удовлетворяет условию $rot\,\overline{b}(M)=\overline{a}(M)$.

Замечание 1:

В виду произвола, допустимого при выборе вектора $\overline{b}$, вместо условия $P_1(x;y;z) \equiv 0$ можно потребовать, чтобы $Q_1(x;y;z) \equiv 0$ или $R_1(x;y;z) \equiv 0$. Система уравнений (3) и формулы (5), (6) и (7) соответственно изменятся.

Замечание 2:

Из (1) следует, что $\overline{b}(M)$ определяется не однозначно (например, условию (1) удовлетворяет так же вектор $\overline{B}(M) = \overline{b}(M) + gradf(M)$, т.к. $rot\big(gradf(M)\big) = \overline{0}$.

Замечание 3:

Если $\overline{b_1}(M)$ и $\overline{b_2}(M)$ два векторных потенциала соленоидального векторного поля $\overline{a}(M)$, найденные разными способами, то

$$\begin{cases} \overline{b_1}(M) - \overline{b_2}(M) = gradf(M) \\ rotgradf(M) = \overline{0} \end{cases},$$

где $f(M)$ – некоторое скалярное поле

Замечание 4:

Заметим , что для вектоного поля $(\overline{b_1} - \overline{b})$ функция $f(M)$ являетя потенциалом, так как $\overline{b_1} - \overline{b} = gradf(M)$, а поле $\left(\overline{b_1} - \overline{b}\right)$ – потенциальное поле. Поэтому для нахождения скалярного поля $f(M)$ следует воспользоваться формулой

$$f(M) = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y;z_0)dx + \int_{z_0}^{z} R(x;y;z)dx + C$$

где точка $(x_0;y_0;z_0)$ - любая точка из области определения функций $P(x;y;z); Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$.