§6. Преобразование прямоугольных координат на плоскости

Поскольку выбор прямоугольной системы координат произволен, то принципиальное значение имеет задача отыскания формул, осуществляющих переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой. Эту задачу можно решить с помощью скалярного произведения.

Рассмотрим на плоскости две прямоугольные декартовы системы координат: старую $O, \vec{i}, \vec{j}$ и новую $O', \vec{i}\,', \vec{j}\,'$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в этих системах через x, y и x', y' соответственно, а координаты точки O' в старой системе координат через a, b (рис. 6.1). Имеем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\,. \qquad (6.1)$$

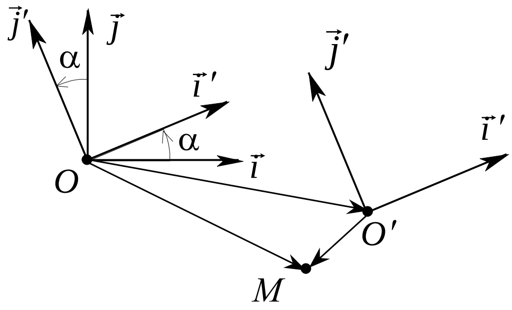

Рис. 6.1. Старый и новый прямоугольные базисы на

Заменив в (6.1) векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OO'}$ на их разложения в старом базисе, а вектор $\overrightarrow{O'M}$ – на его разложение в новом базисе, получим:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,'. \qquad (6.2)$$

Далее, умножив обе части равенства (6.2) скалярно на орты старой системы, приходим к соотношениям:

$$x(\vec{i}\cdot\vec{i}) = a(\vec{i}\cdot\vec{i}) + x'(\vec{i}\,'\cdot\vec{i}) + y'(\vec{j}\,'\cdot\vec{i}),$$
$$y(\vec{j}\cdot\vec{j}) = b(\vec{j}\cdot\vec{j}) + x'(\vec{i}\,'\cdot\vec{j}) + y'(\vec{j}\,'\cdot\vec{j}),$$

или

$$\begin{aligned} x &= a + x'(\vec{i}\,'\cdot\vec{i}) + y'(\vec{j}\,'\cdot\vec{i}),\\ y &= b + x'(\vec{i}\,'\cdot\vec{j}) + y'(\vec{j}\,'\cdot\vec{j}), \end{aligned} \qquad (6.3)$$

так как $(\vec{i}\cdot\vec{i}) = (\vec{j}\cdot\vec{j}) = 1$. Введём ориентированный как в тригонометрии угол α поворота вектора $\vec{i}$ до совмещения с вектором $\vec{i}\,'$ (рис. 6.1). Для векторов $\vec{i}\,', \vec{j}\,'$ в силу определений тригонометрических функций синус, косинус и формул приведения имеем следующие разложения по базису $\vec{i}, \vec{j}$:

$$\vec{i}\,' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha,$$
$$\vec{j}\,' = \vec{i}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \vec{j}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha.$$

Вычислим теперь скалярные произведения из правых частей равенств (6.3):

$$\vec{i}\,'\cdot\vec{i} = \cos\alpha,\ \ \vec{j}\,'\cdot\vec{i} = -\sin\alpha,\ \ \vec{i}\,'\cdot\vec{j} = \sin\alpha,\ \ \vec{j}\,'\cdot\vec{j} = \cos\alpha.$$

От системы (6.3) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a,\\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{aligned} \qquad (6.4)$$

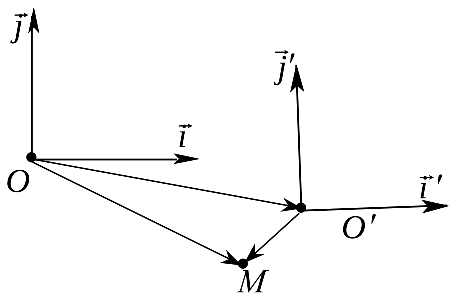

Рис. 6.2. Случай параллельного переноса

Система (6.4) – решение поставленной задачи, в ней старые координаты x, y произвольной точки M плоскости выражаются через её новые координаты

x', y'. Можно также получить формулы, выражающие новые координаты этой точки через старые. Во-первых, эти формулы можно получить, разрешая систему (6.4) относительно x', y'. Во-вторых, они также получаются в результате последовательного умножения обеих частей равенства (6.2) скалярно на орты $\vec{i}\,', \vec{j}\,'$ нового прямоугольного базиса. Имеем

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\cos\alpha - b\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + a\sin\alpha - b\cos\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то получаем случай так называемого параллельного переноса (рис. 6.2). Равенства (6.4) тогда принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned} \qquad (6.5)$$

Пример 6.1. Даны две точки $M_1(1,-7)$ и $M_2(3,-3)$. Новая ось абсцисс проходит через точку M_1, а новая ось ординат – через точку M_2. при этом старые и новые оси сонаправлены. Написать формулы преобразования координат и найти новые координаты этих точек.

►В системе координат Oxy построим точки M_1 и M_2, затем через них проведём оси новой системы координат $O'x'y'$ (рис. 6.3). Старые абсциссы точек O' и M_2 совпадают, старые ординаты точек O' и M_1 совпадают, поэтому O' (1, –3). Теперь, используя соотношения (6.5), напишем формулы преобразования координат:

$$x = x' + 1,$$
$$y = y' - 3.$$

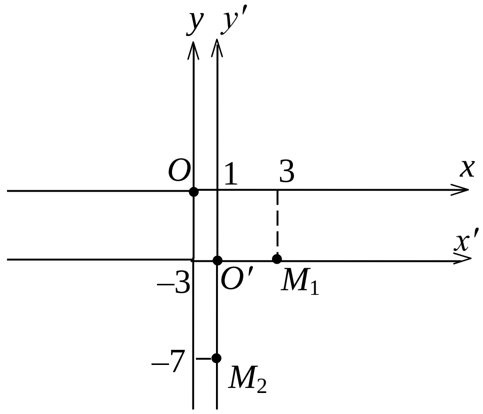

Рис. 6.3. К примеру 6.1

Подставим в эти равенства поочередно старые координаты точек M_1 и M_2. Для координат точки M_1 имеем систему: $3 = x' + 1, -3 = y' - 3$, из которой получаем x'=2, y'=0, $M_1(2, 0)$. Для координат точки M_2 имеем систему: $1 = x' + 1, -7 = y' - 3$, откуда следует: $x' = 0$, $y' = -4$, M_2 (0, – 4). ◄

Пример 6.2. Даны две точки $M_1(2,-1)$ и $M_2(5,3)$. Начало координат перенесено в точку M_1, а оси координат повернуты так, что положительная часть новой оси абсцисс проходит через точку M_2. Написать формулы преобразования координат и найти координаты точки M_2 в новой системе координат.

►В системе координат Oxy построим точки M_1 и M_2, за начало новой системы примем точку M_1 и построим оси новой системы координат согласно условиею задачи (рис. 6.4). Система координат $M_1x'y'$ получена из системы координат Oxy с помощью параллельного переноса старых

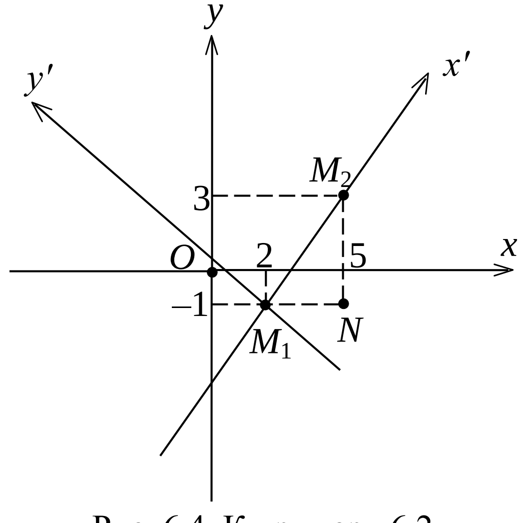

Рис. 6.4. К примеру 6.2

осей в точку M_1 и последующего поворота на некоторый угол α. Координаты одних и тех же точек в этих системах связаны соотношениями (6.4), причём координаты нового начала известны: $a=2, b=-1$, остаётся найти синус и косинус угла поворота, т.е. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. В прямоугольном треугольнике M_1M_2N найдём длины катетов M_1N, NM_2 и гипотенузы M_1M_2:

$M_1N = 5 - 2 = 3$, $NM_2 = 3 - (-1) = 4$,

$M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2 + NM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

Теперь вычислим $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{NM_2}{M_1M_2} = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{M_1N}{M_1M_2} = \frac{3}{5}.$$

Соотношения (6.4) в данном случае принимают вид: $\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 2, \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - 1. \end{cases}$

Подставим в эти равенства старые координаты точки M_2, получим:

$$\begin{cases} 5 = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 2, \\ 3 = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - 1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = 3, \\ \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = 4. \end{cases}$$

Разрешив последнюю систему относительно x', y' имеем: $x' = 5$, $y' = 0$. ◄