§10. Вычисление производных высших порядков от функций, заданных неявно и параметрически

1°. Вычисление производных высших порядков от функций, заданных неявно. При вычислении производной 2-го порядка от функции, заданной неявно, сначала вычисляют её производную y'_x, а затем дифференцируют по *x* обе части полученного равенства с последующей подстановкой выражения для y'_x.

Пример 10.1. Найти y''_{x^2}, если $y = x + \operatorname{arctg} y$.

►В примере 8.1 для y'_x было получено равенство: $y'_x = (1+y^2)/y^2$. Преобразуем его к виду: $y'_x = y^{-2} + 1$ и возьмём производные по *x* от обеих частей, считая *y* функцией *x*: $(y'_x)'_x = (y^{-2}+1)'_x$ или $y''_{x^2} = -2y^{-3}y'_x$. Поставим в последнее равенство выражение для y'_x: $y''_{x^2} = -2y^{-3}(y^{-2}+1) = -2(1+y^2)/y^5$.◄

Аналогичным образом могут быть вычислены и производные более высоких порядков от функций, заданных неявно.

2°. Вычисление производных высших порядков от функций, заданных параметрически. Производная y'_x от функции, заданной параметрически, вычисленная по формуле (8.4), в свою очередь является функцией, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y'_x = y'_t/x'_t = g(t), \\ \quad x = x(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

и, следовательно, её производная $(y'_x)'_x = y''_{x^2}$, если она существует, может быть также вычислена по формуле (8.4):

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{10.1}$$

Пример 10.2. Найти y''_{x^2}, если $x = \cos^{-1} t,\ y = \operatorname{tg} t - t$.

►В примере 8.4 были получены равенства: $x'_t = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, $y'_t = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$ и $y'_x = \sin t$. В силу равенства (10.1), имеем: $y''_{x^2} = \dfrac{(\sin t)'_t}{\sin t/\cos^2 t} = \dfrac{\cos^3 t}{\sin t}$.◄

Возможен и другой подход к вычислению производной второго порядка от функции, заданной параметрически. Подставим в формулу (10.1) вместо y'_x правую часть формулы (8.4), получим: $y''_{x^2} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{(y'_t/x'_t)'_t}{x'_t}$. Вычислив $(y'_t/x'_t)'_t$ как производную дроби, приходим к равенству:

$$y''_{x^2} = \frac{y''_{t^2}x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^3}. \tag{10.2}$$

Упражнение. Найти y''_{x^2} по формуле (10.2) для функции из примера 10.2.

Аналогичным образом могут быть вычислены и производные более высоких порядков от функций, заданных параметрически.