Векторные поля

§ 3. Основные понятия

<u>Определение</u> (векторного поля)

Пусть $\bar{a}(M)$ – векторная функция для всякой точки $M \in A \subset R^3$.
Тогда говорят, что на множестве A задано *векторное поле* $\bar{a}(M)$.
Векторное поле называется *нестационарным*, если $\bar{a}(M,t)$ – зависит от времени, в противном случае векторное поле $\bar{a}(M)$ – называется стационарным.

<u>Определение</u> (векторной линии)

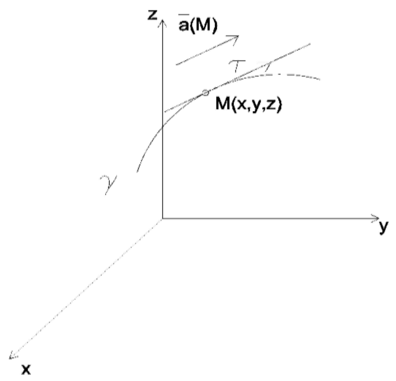
Пусть $\bar{a}(M)$ – векторное поле для всякой точки $M \in A \subset R^3$.
Векторной линией векторного поля $\bar{a}(M)$, проходящей через точку M, называется линия, в каждой точке которой, векторное поле коллинеарно направляющему вектору касательной, проведенной к этой линии в точке M.

<u>Теорема</u> (о векторных линиях векторного поля)

Пусть $\bar{a}(M)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ – векторное поле
для любой точки $M \in A \subset R^3$.
Пусть функции $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z) \in C^1(A)$
Тогда уравнения, описывающие векторные линии векторного поля $\bar{a}(M)$, являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

Доказательство:



По условию: $\overline{a}(M) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$.

Пусть γ – векторная линия векторного поля $\overline{a}(M)$.

Пусть $\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$ – радиус-вектор линии γ.

Тогда касательный вектор к кривой γ в точке M имеет вид:

$$\overline{\tau} = d\overline{r} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k}$$

По определению векторной линии γ векторное поле $\overline{a}(M)$ коллинеарно касательному вектору $\overline{\tau}(M)$ к кривой γ в точке M, т.е. $d\overline{r} || \overline{a}(M)$.

Следовательно,

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Замечание:

Из теоремы о векторных линиях и задачи Коши для системы дифференциальных уравнений следует, что через точку проходит одна векторная линия.

§ 4. Поток векторного поля

Поток векторного поля через незамкнутую поверхность

Определение (поток векторного поля)

Пусть $\overline{a}(M)$ – векторное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Пусть σ – двухсторонняя, гладкая, незамкнутая поверхность: $\sigma \subset A$.

Пусть $\overline{n}_0$ – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности σ в точке M

Потоком векторного поля $\overline{a}(M)$ через поверхность σ в направлении нормали $\overline{n}_0$ называется число, равное

$$\iint_{\sigma} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma .$$

Обозначение:

$$П_{\sigma} \overline{a}(M) = \iint_{\sigma} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma$$

Замечания:

1) Для записи потока векторного поля могут быть использованы ещё следующие варианты:

$$П_{\sigma} \overline{a}(M) = \iint_{\sigma} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \iint_{\sigma} Пр_{\overline{n_0}(M)} \overline{a}(M) d\sigma = \iint_{\sigma} \overline{a}(M)_{\overline{n_0}(M)} d\sigma$$

2) Пусть $\overline{a}(M) = P(x,y,z) \cdot \overline{i} + Q(x,y,z) \cdot \overline{j} + R(x,y,z) \cdot \overline{k}$

Пусть $\overline{n_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Тогда

$$П_{\sigma} \overline{a}(M) = \iint_{\sigma} [P(x,y,z) \cdot \cos\alpha + Q(x,y,z) \cdot \cos\beta + R(x,y,z) \cdot \cos\gamma] d\sigma =$$

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dxdz + R(x,y,z) dxdy$$

3) Если в качестве векторного поля рассмотреть поле скоростей частиц, движущейся несжимаемой жидкости, то поток векторного поля через σ можно трактовать как количество жидкости, протекающее через σ в направлении нормали $\overline{n_0}$ в единицу времени.

Основные свойства потока векторного поля

1) При смене направления нормали к поверхности σ поток векторного поля меняет знак на противоположный;

2) $\Pi_\sigma\left(\lambda_1 \cdot \overline{a_1}(M) \pm \lambda_2 \cdot \overline{a_2}(M)\right) = \lambda_1 \cdot \Pi_\sigma\left(\overline{a_1}(M)\right) \pm \lambda_2 \cdot \Pi_\sigma\left(\overline{a_2}(M)\right)$;

3) Пусть $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2 \ \left(\mu(\sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0\right)$

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \Pi_{\sigma_1} \overline{a}(M) + \Pi_{\sigma_2} \overline{a}(M)$$

<u>Доказательство 3):</u>

По свойству поверхностного интеграла

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \iint_\sigma \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \iint_{\sigma_1} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma + \iint_{\sigma_2} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \Pi_{\sigma_1} \overline{a}(M) + \Pi_{\sigma_2} \overline{a}(M)$$

Способы вычисления потока векторного поля через незамкнутую поверхность

1) Пусть поверхность σ:

$$z = f(x,y) \ \forall \ (x,y) \in D_{xy} = \Pi p_{xy}\sigma \subset R^2 .$$

Тогда

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \iint_\sigma \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \left[|\cos\gamma| d\sigma = dxdy\right] = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{\overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)} dxdy$$

$$\overline{n_0} = \pm \frac{grad\left(z - f(x,y)\right)}{\left|grad\left(z - f(x,y)\right)\right|} = \pm \frac{-f'_x(x,y) \cdot \overline{i} - f'_y(x,y) \cdot \overline{j} + 1 \cdot \overline{k}}{\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}}$$

Для косинуса выбираем знак «+», если $\left(\widehat{\overline{n_0};\overline{k}}\right)$ – острый.

Для косинуса выбираем знак «–», если $\left(\widehat{\overline{n_0};\overline{k}}\right)$ – тупой.

2) Пусть поверхность σ:

$$y = \varphi(x,z)\ \forall\ (x,z) \in D_{xz} = \varPi p_{xz}\sigma \subset R^2 .$$

Тогда

$$\varPi_\sigma \overline{a}(M) = \iint\limits_\sigma \overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \left[|\cos\beta|d\sigma = dxdz\right] = \iint\limits_{D_{xz}} \left.\frac{\overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)}{|\cos\beta|}\right|_{y=\varphi(x,z)} dxdz$$

$$\overline{n_0} = \pm\frac{grad\left(y-\varphi(x,z)\right)}{\left|grad\left(y-\varphi(x,z)\right)\right|} = \pm\frac{-\varphi'_x(x,z)\cdot\overline{i} + 1\cdot\overline{j} - \varphi'_z(x,z)\cdot\overline{k}}{\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x,z)\right)^2 + \left(\varphi'_z(x,z)\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x,z)\right)^2 + \left(\varphi'_z(x,z)\right)^2}}$$

Для косинуса выбираем знак «+», если $\left(\widehat{\overline{n_0};\overline{j}}\right)$ – острый.

Для косинуса выбираем знак «–», если $\left(\widehat{\overline{n_0};\overline{j}}\right)$ – тупой.

3) Пусть поверхность σ:

$$x = \psi(y,z)\ \forall\ (y,z) \in D_{yz} = \varPi p_{yz}\sigma \subset R^2 .$$

Тогда

$$\varPi_\sigma \overline{a}(M) = \iint\limits_\sigma \overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \left[|\cos\alpha|d\sigma = dydz\right] = \iint\limits_{D_{yz}} \left.\frac{\overline{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)}{|\cos\alpha|}\right|_{z=\psi(y,z)} dydz$$

$$\overline{n_0} = \pm\frac{grad\left(x-\psi(y,z)\right)}{\left|grad\left(x-\psi(y,z)\right)\right|} = \pm\frac{1\cdot\overline{i} - \psi'_y(y,z)\cdot\overline{j} - \psi'_z(y,z)\cdot\overline{k}}{\sqrt{1+\left(\psi'_y(y,z)\right)^2 + \left(\psi'_z(y,z)\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\psi'_y(y,z)\right)^2+\left(\psi'_z(y,z)\right)^2}}$$

Для косинуса выбираем знак «+», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\bar{i}\right)$ – острый.

Для косинуса выбираем знак «–», если $\left(\overline{n_0}\,\hat{;}\,\bar{i}\right)$ – тупой.

Вычисление потока векторного поля через замкнутую поверхность

Теорема Остроградского – Гаусса (в векторной форме)

(для потока векторного поля через замкнутую поверхность)

Пусть σ – двухсторонняя, кусочно-гладкая. замкнутая поверхность, ограничивающая тело T и $\sigma \subset R^3$

Пусть $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(Q); R(M)\}$ – векторное поле $\forall\ M \in \sigma \cup T$

Пусть $P(M); Q(Q); R(M) -$ дифференцируемы $\forall\ M \in \sigma \cup T$

Тогда поток векторного поля через замкнутую поверхность σ в сторону внешней нормали равен

$$\Pi_\sigma \bar{a}(M) = \oiint_\sigma \bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma = \iiint_T\ div\,\bar{a}(M)dxdydz\ ,$$

где $\overline{n_0}$ – единичный вектор внешней нормали, в направлении которого вычисляется векторное поле.

Доказательство:

$$\Pi_\sigma \bar{a}(M) = \oiint_\sigma \bar{a}(M)\cdot\overline{n_0}(M)d\sigma =$$

$$= \oiint_\sigma (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)d\sigma = \oiint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= [\text{ по теореметеореме Остроградского} - \text{Гаусса}] =$$

$$= \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint_T div\,\bar{a}(M)dxdydz$$

Замечание:

Если векторное поле представляет собой поле скоростей частиц жидкости, движущейся через замкнутую поверхность σ в сторону внешней нормали, то $\Pi_\sigma \bar{v}(M)$ характеризует количество жидкости, вытекающей из поверхности σ и втекающей в неё.

Если $\Pi_\sigma \bar{v}(M) > 0$, то говорят, что внутри поверхности σ имеется источник векторного поля.

Если $\Pi_\sigma \bar{v}(M) < 0$, то говорят, что внутри поверхности σ имеется сток векторного поля.

Если внутри поверхности σ нет ни источников, ни стоков векторного поля, то $\Pi_\sigma \bar{v}(M) = 0$. Обратное утверждение не верно.