§3. Полный дифференциал функции

Пусть функция $w = f(x,y)$ задана в области D и рассматриваемая точка $(x,y) \in D$. Придадим значениям x и y приращения соответственно Δx и Δy, тогда функция w получит приращение $\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, которое называют *полным приращением* функции w.

Теорема 3.1. ***Если в рассматриваемой окрестности точки*** (x,y) ***функция*** $w = f(x,y)$ ***имеет конечные частные производные*** f'_x ***и*** f'_y***, непрерывные в этой точке, то полное приращение функции в рассматриваемой точке может быть представлено в виде***

$$\Delta w = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{3.1}$$

где α ***и*** β ***– бесконечно малые при*** $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$**.**

▶ Применяя формулу Лагранжа, будем иметь:

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$= \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right] =$$

$$= f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y.$$

В силу непрерывности f'_x и f'_y в точке (x,y) имеем

$$f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) \to f'_x(x,y),$$

$$f'_y(x, y+\theta_1\Delta y) \to f'_y(x,y),$$

поэтому по свойству пределов (переменная отличается от своего предела на величину бесконечно малую) будем иметь

$$f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha,$$

$$f'_y(x, y+\theta_1\Delta y) = f'_y(x,y) + \beta,$$

где α и β – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ ($\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$). Тогда $\Delta w = \left[f'_x(x,y) + \alpha\right]\Delta x + \left[f'_y(x,y) + \beta\right]\Delta y$, откуда и следует (3.1). ◀

Замечание. Так как

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \beta\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho = \gamma\rho,$$

где $\gamma = \alpha\dfrac{\Delta x}{\rho} + \beta\dfrac{\Delta y}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$, то формулу (3.1) можно записать так:

$$\Delta w = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \gamma\rho,$$

где $\gamma \to 0$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Определение 3.1. ***Функция*** $w = f(x, y)$ ***называется дифференцируемой в точке*** (x, y)***, если для этой точки существуют числа*** A ***и*** B ***такие, что полное приращение в этой точке может быть представлено в виде:***

$$\Delta w = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{3.2}$$

где $\alpha \to 0$ ***и*** $\beta \to 0$ ***при*** $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$**.**

Если функция дифференцируема в точке (x, y), то в этой точке: 1) она непрерывна: 2) имеет конечные частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{y}$; 3) числа A и B определяются единственным образом, а именно:

$$A = \frac{\partial w}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad B = \frac{\partial w}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Утверждение 1 следует из того, что согласно (3.2) $\Delta w \to 0$ при $\rho \to 0$; утверждения 2 и 3 следуют из (3.2); например, при $\Delta y = 0$ будет $\Delta w = \Delta_x w$, $\frac{\Delta_x w}{\Delta x} = A + \alpha$, и так как правая часть имеет предел при $\rho = |\Delta x| \to 0$, то имеет предел и левая часть, т. е. $\frac{\partial w}{\partial x}$ существует и равна A.

Так как формула (3.1) имеет вид (3.2), то из предыдущей теоремы непосредственно вытекает следствие.

Следствие. ***Если функция в окрестности точки*** (x, y) ***имеет конечные частные производные, непрерывные в точке*** (x, y)***, то функция дифференцируема в этой точке.***

Можно показать (в отличие от случая функции одной переменной), что одного существования конечных частных производных (без предположения об их непрерывности) недостаточно для дифференцируемости.

Подведем итог: если функция $w = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то в этой точке она непрерывна и имеет конечные частные производные, причем справедлива формула (3.1), где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$; условия же существования в окрестности точки конечных частных производных, непрерывных в самой точке, достаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

Определение 3.2. ***Если функция*** $w = f(x, y)$ ***дифференцируема в точке*** (x, y)***, то выражение***

$$dw = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \qquad (3.3)$$

называют полным дифференциалом функции $w = f(x, y)$ ***в этой точке.***

Пример 3.1. Найти полный дифференциал функции $w = x$.

▶ По определению полного дифференциала имеем $dw = dx \Rightarrow dw = \Delta x$, т. е. полный дифференциал независимой переменной x совпадает с произвольным приращением этой переменной. Аналогично получаем, что $dy = \Delta y$. ◀

Тогда формула (3.3) может быть записана так:

$$dw = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy\,. \qquad (3.4)$$

Замечание. Произведения $f'_x(x, y)\,dx$ и $f'_y(x, y)\,dy$ называют *частными дифференциалами*.