Практика.

Потенциальные векторные поля

<u>Определение </u>(потенциального поля)

Векторное поле $\overline{a}\,(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$ называется *потенциальным*, если его можно представить следующим образом:

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall(\cdot)\ M \in A,$$

где $f(M)$- скалярное поле, называемое ***потенциалом*** *потенциального поля*.

Критерий потенциальности векторного поля

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$

Для того, чтобы векторное поле $\overline{a}\,(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор этого поля был равен $\overline{0}$, т.е.

$$\overline{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall\,(\cdot) M \in A \Leftrightarrow rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{0}\ \forall\,(\cdot) M \in A$$

Свойства потенциальных полей

1. Пусть $\overline{a}\,(M)$- потенциальное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$

$$\Rightarrow circul_{\Gamma}\,\overline{a}(M) = 0,$$

где $\Gamma -$ любой замкнутый контур и $\Gamma \subset A$.

2. Пусть $\overline{a}\,(M)$- потенциальное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Тогда линейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\Gamma_{AB} \subset A$, т.е.

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \overline{a}(M)\cdot d\overline{r} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz = \int\limits_{\Gamma_{AB}} df(M) = f(B) - f(A),$$

$f(M)$ – потенциал векторного поля $\bar{a}(M)$.

Замечание

Из определения потенциального поля ($\bar{a}\,(M) = grad\, f(M)\ \forall(\cdot)\, M \in A$) следует, что потенциальное векторное $\bar{a}\,(M)$ определяется заданием его потенциала.

Вычисление потенциала потенциального векторного поля

Первый способ

Пусть $\bar{a}\,(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$.

Тогда потенциал векторного поля может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) - произвольная точка из области определения функций P, Q *и* R.

Второй способ

Определение (звёздной области)

Область $A \subset R^3\ (R^2)$, называется *звёздной относительно некоторой точки* $M \in A$, если любой луч, выходящий из точки M, пересекает границу области A не более чем в одной точке.

Замечание:

Для плоскости звездными областями будут, например, сама плоскость, параллелограм, круг и т.д. В трехмерном пространстве – само пространство, параллелепипед, шар и т.д.

Теорема

Пусть $\overline{a}\,(M)$ - потенциальное поле $\forall\,(\cdot)M \in A \subset R^3$.

Пусть A - звёздная область относительно точки $O\,(\,0;0;0\,)$

(само $\overline{a}\,(M)$ в точке O может быть не определено).

Тогда потенциал $f(M)$ потенциального векторного поля $\overline{a}\,(M)$ в точке $M(x;y;z)$ находится по формуле:

$$f(M) = \int_0^1 (\bar{a}(M') \cdot \bar{r}(M))dt + C, \quad C = const,$$

где $\bar{r}(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} -$ радиус – вектор точки M, точка M' имеет координаты $(tx;ty;tz)$ $\forall t \in [0,1]$ и пробегает отрезок OM прямой, проходящей через точки O и M.

Третий способ

Третий способ аналогичен нахождению полного дифференциала при решении дифференциальных уравнений 1 порядка в полных дифференциалах (самостоятельно).