Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В.Г. ПАК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

ЛЕКЦИЯ №5

АЛГЕБРА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Содержание

Тема 3. Булевы функции

Содержание (окончание)

Тема 3. Булевы функции

§1. Алгебра булевых функций

1.1. Понятие булевой функции. Таблицы истинности

Обозначим $B = \{0; 1\}$. Тогда B^n - множество всех двоичных (n)-векторов – называется n-*мерным булевым* (*единичным*) *кубом.* Двоичные векторы $\tilde{\alpha}^n = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ - *вершины* этого куба.

Каждому двоичному набору $\tilde{\alpha}^n$ сопоставляется число

$$\nu(\tilde{\alpha}^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i},$$

которое называется *номером набора* $\tilde{\alpha}^n$. Набор $\tilde{\alpha}^n$ является n-разрядным двоичным разложением своего номера $\nu(\tilde{\alpha}^n)$.

Определение. Функция $f\colon B^n \to B$ называется n-*местной булевой функцией.*

Обозначим $\tilde{x}^n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ вектор переменных. Тогда булева функция записывается

$$y = f(\tilde{x}^n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Булеву функцию можно задать таблицей, в которой наборы $\tilde{\alpha}^n$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ выписываются в порядке возрастания их номеров.

1.1. Понятие булевой функции

Такая таблица называется *таблицей истинности* (*истинностной таблицей*).

Двоичные наборы значений переменных располагаются в таблице в *стандартном порядке*.

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0	0	$\ldots$	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Сокращённая таблица истинности

Поскольку наборы аргументов идут в стандартном порядке, часть таблицы с ними можно опустить. Тогда получается *сокращённая таблица истинности* $f = \tilde{\alpha}_f^{2^n} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots . \alpha_{2^n-1} \rangle$, где координата α_i равна значению функции f на наборе $\tilde{\sigma}^n$ с номером i.

Теорема 1.1. Число n-местных булевых функций равно 2^{2^n}.

1.2. Элементарные булевы функции

Нульместные булевы функции – константы тождественный нуль (0) и тождественная единица (1).

Одноместные булевы функции:

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$f_1(x) = x$ – *тождественная функция*;
$f_2(x) = \neg x$ – *отрицание.*

Двухместные булевы функции:

x_1	x_2	0	1	$f_1(x_1)$	$f_1(x_2)$	$f_2(x_1)$	$f_2(x_2)$	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0

1.2. Элементарные булевы функции

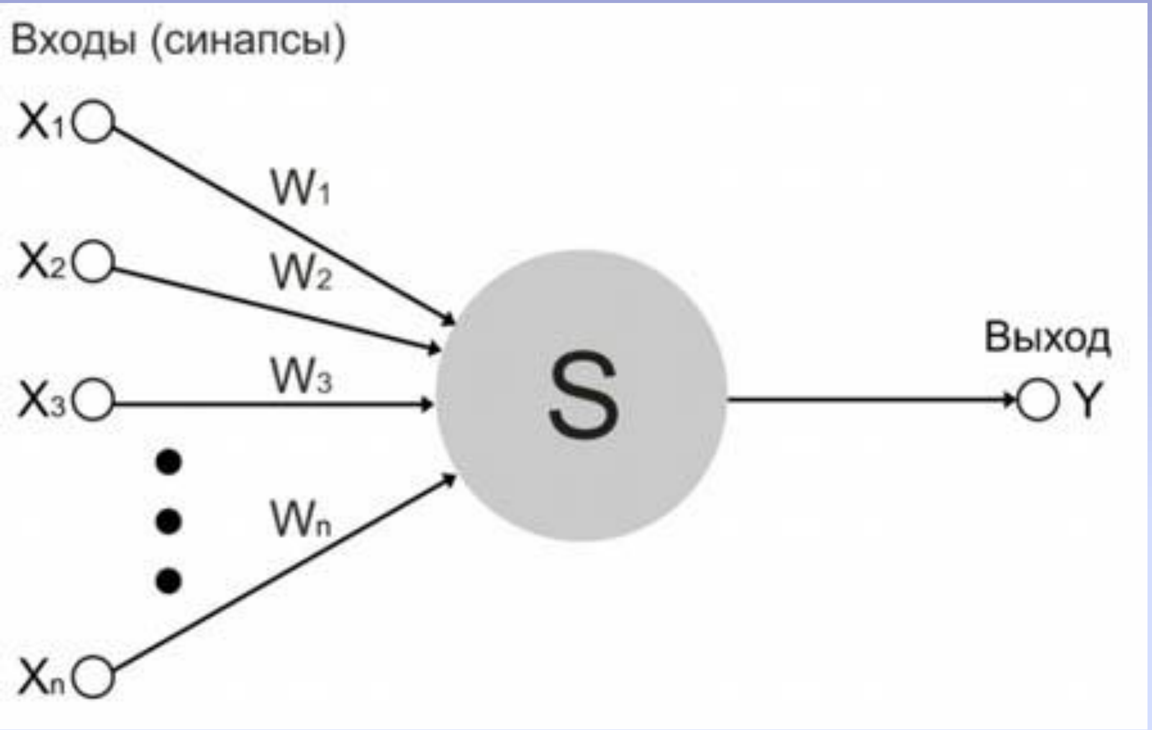
$f_3(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$ - *конъюнкция* x_1 и x_2;
$f_4(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ - *дизъюнкция* x_1 и x_2;
$f_5(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ - *сумма по модулю два* x_1 и x_2;
$f_6(x_1, x_2) = x_1 \equiv x_2$ - *эквиваленция* x_1 и x_2;
$f_7(x_1, x_2) = x_1 \supset x_2$ - *импликация* x_1 и x_2, x_1 - *посылка (антецедент*), x_2 - *следствие (консеквент*) импликации;
$f_8(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ - *штрих Шеффера* x_1 и x_2 (*антиконъюнкция*);
$f_9(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ - *стрелка Пирса* x_1 и x_2 (*антидизъюнкция, функция Даггера, функция Вебба*).

x_1	x_2	$\neg(x_1 \supset x_2)$	$\neg(x_2 \supset x_1)$	$x_2 \supset x_1$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Функции 0, 1, f_1-f_9 называются *элементарными булевыми функциями*, символы $\neg$, $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\equiv$, $\supset$, $|$, $\downarrow$ - *логическими связками.*

1.2. Элементарные булевы функции

Пример: модель нейрона.



1.3. Формулы алгебры булевых функций

Пусть $X = \{x_1;\ x_2; \dots\}$ – конечный или счётно-бесконечный алфавит переменных, $\Phi = \left\{f_i^{\,j}\right\}$ - множество функциональных символов (нижний индекс i означает номер символа, верхний j – его арность (число аргументов). Также включим в алфавит конструируемой алгебры специальные символы (,) и , .

Определение. *Формулой алгебры булевых функций над множеством* Φ называется слово, полученное по следующим правилам:

1. $f_i^0, f_i^{\,j}\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}\right)$ - формулы ($j \geq 1$).
2. $f_i^{\,j}(A_1, A_2, \dots, A_j)$, где $A_1, A_2, \dots, A_j$ - формулы или переменные из X, $j \geq 1$, также является формулой.
3. Других формул над Φ нет.

В формулах могут использоваться не обязательно все переменные из X или функциональные символы из Φ.

В качестве функциональных символов могут использоваться логические связки. Пусть $\mathfrak{S}$ –некоторое множество логических связок (оно может содержать все логические связки).

1.3. Формулы алгебры булевых функций

Определение. *Формулой над множеством* $\mathfrak{S}$ называется слово, полученное по правилам:

1. Любая переменная x_i из X является формулой над $\mathfrak{S}$.
2. $(\neg A)$ (если $\neg \in \mathfrak{S}$), $(A \circ B)$, где $\circ$ - бинарная логическая связка из $\mathfrak{S}$, а A, B - формулы над $\mathfrak{S}$, также являются формулами над $\mathfrak{S}$.
3. Других формул над множеством связок $\mathfrak{S}$ нет.

Таким образом, эти формулы используют только связки из $\mathfrak{S}$ (не обязательно все).

Аналогично можно определить формулы над множеством формул $\mathfrak{S}$.

Определение. *Формулой над множеством формул* $\mathfrak{S}$ называется слово, полученное по правилам:

1. Любая переменная x_i из X и любая формула из $\mathfrak{S}$ являются формулами над $\mathfrak{S}$.
2. $(\neg A)$, $(A \circ B)$, где $\circ$ - бинарная логическая связка, а A, B - формулы над $\mathfrak{S}$, также являются формулами над $\mathfrak{S}$.
3. Других формул над множеством формул $\mathfrak{S}$ нет.

Комбинируя эти определения, можно ввести формулы над множествами связок и формул.

1.3. Формулы алгебры булевых функций

Соглашения для сокращения записи формул над множеством связок и (или) формул $\mathfrak{S}$:

1. Внешние скобки формулы опускаются.
2. Формула $(\neg A)$ записывается в виде $\overline{A}$.
3. Формула $(A\&B)$ записывается в виде AB.
4. Связка $\neg$ считается сильнее любой бинарной связки.
5. Сязка $\&$ считается сильнее любой другой бинарной связки.
6. Связка ∨ считается сильнее любой другой, кроме &, бинарной связки.
7. Остальные бинарные связки считаются равноприоритетными.

Пусть каждому функциональному символу $f_i^{\,j} \in \Phi$ сопоставлена некоторая j-местная булева функция F_i: $B^j \to B$ $(B = \{0;1\})$, нульместным функциональным символам $f_1^{\,0}$, $f_2^{\,0}$ - константы 0, 1 (далее так их и будем записывать в формулах).

1.3. Формулы алгебры булевых функций

Определение. *Функцией* φ_A*, реализуемой формулой* A *над множеством* Φ, называется функция, вычисляемая по следующим правилам:

1. Если A есть формула $f_i^{\,j}\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}\right)$ $(j \geq 1)$, то $\varphi_A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F_i\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ для любого набора $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ двоичных значений переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_j}$ (если $j = 0$, то φ_A - двоичная константа).
2. Если $A = A(y_1, \dots, y_k)$ ($y_1, \dots, y_k$ - некоторые переменные из X) есть $f\left(A_1, A_2, \dots, A_j\right)$, где $f \in \Phi$, A_l, $l = 1, \dots, j$, - либо формула над Φ, либо переменная из X, то $\varphi_A(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = F\left(\beta_1, \dots, \beta_j\right)$, где F- функция, сопоставленная символу f, $\beta_p\left(\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_{s_p}}\right) = \varphi_{A_p}\left(\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_{s_p}}\right)$, $p = 1, \dots, j$, φ_{A_p} - функция, реализуемая формулой A_p, причём
$$\beta_p = \begin{cases} \alpha_q, \text{если } A_p = y_q, \\ \varphi_{A_p}\left(\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_{s_p}}\right), \text{если } A_p = A_p\left(\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_{s_p}}\right) \end{cases}$$
для любого набора $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ двоичных значений переменных $y_1, \dots, y_k$.
3. Других правил вычисления функции φ_A нет.

Функция φ_A, реализуемая формулой A над *множеством формул* $\mathfrak{S}$, определяется аналогично.

1.3. Формулы алгебры булевых функций

Определение. Формула алгебры булевых функций называется *выполнимой* (*опровержимой*), если существует набор значений входящих в неё переменных, на котором реализуемая ею функция принимает значение 1 (0).

Определение. Формула алгебры булевых функций называется *тождественно истинной* (*тавтологией*), если она реализует функцию 1 (тождественная единица).

Определение. Формула алгебры булевых функций называется *тождественно ложной* (*противоречием*), если она реализует функцию 0 (тождественный ноль).

1.4. Законы алгебры булевых функций

Определение. Булевы функции называются *равными*, если они принимают одинаковые значения на одних и тех же наборах значений переменных.

Определение. Формулы алгебры булевых функций A и B называются *эквивалентными*, если они реализуют равные булевы функции: $\varphi_A = \varphi_B$.

Обозначение эквивалентных формул: $A = B$.

Основные эквивалентности алгебры булевых функций:

1. $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \equiv, |, \downarrow\}$ (законы коммутативности);
2. $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \equiv\}$ (законы ассоциативности);
3. a) $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3$;
   b) $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$;
   c) $x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$ (законы дистрибутивности);
4. a) $\overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$;
   b) $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2$ (законы двойственности де Моргана);
5. a) $x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1$;
   b) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$ (правила склеивания);

1.4. Законы алгебры булевых функций

6. a) $x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$;
   b) $x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$ (правила поглощения);
7. $x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 = x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2$ (правило обобщённого склеивания);
8. a) $xx = x$;
   b) $x \vee x = x$ (законы идемпотентности);
9. $x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключённого третьего);
10. $x\bar{x} = 0$ (закон противоречия);
11. a) $x \equiv x = 1$;
    b) $x \supset x = 1$ (законы унипотентности);
12. $\bar{\bar{x}} = x$ (закон двойного отрицания);
13. a) $\bar{x} = x \oplus 1$;
    b) $x_1 \supset x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2$;
    c) $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$;
    d) $x_1 \equiv x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$ (приведение к базису Жегалкина);
14. a) $x_1 \supset x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$;
    b) $x_1 \equiv x_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$;
    c) $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ (приведение к стандартному базису);
15. $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2$.

§2. Специальные представления булевых функций

Специальные представления булевых функций – формулы специального вида, применяемые для записи реализуемых ими булевых функций. Специальные представления позволяют записывать произвольные булевы функции однотипными формулами, что, в свою очередь, реализовать их типовыми схемами (устройствами).

2.1. Нормальные формы

Нормальные формы – формулы особого вида над множеством связок $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee\}$. Имеются два вида нормальных форм: дизъюнктивные и конъюнктивные.

2.1.1. Элементарная конъюнкция и элементарная дизъюнкция

В силу ассоциативности в формулах $(x_i x_j)x_s$, $x_i(x_j x_s)$ скобки можно опустить, поэтому будем использовать формулу $x_i x_j x_s$ для сокращения обеих формул. По индукции примем формулу $x_i \cdots x_v$, в которой конъюнкции выполняются слева направо. Аналогично введём формулу $x_i \vee \cdots \vee x_v$.

2.1.1. Элементарная конъюнкция и элементарная дизъюнкция

Выражение $x_i^\sigma (x_i \in X,\ \sigma \in B)$ назовём *буквой*. При этом полагаем

$$x_i^\sigma = \begin{cases} x_i, \sigma = 1, \\ \bar{x}_i, \sigma = 0. \end{cases}$$

Тогда $x_i^{\sigma_i} \cdots x_v^{\sigma_v}$- конъюнкция букв (КБ), $x_i^{\sigma_i} \vee \cdots \vee x_v^{\sigma_v}$- дизъюнкция букв (ДБ).

Лемма 2.1. Конъюнкция букв тождественна ложна тогда и только тогда, хотя бы одна переменная входит в неё со своим отрицанием.

Лемма 2.2. Дизъюнкция букв тождественна истинна тогда и только тогда, хотя бы одна переменная входит в неё со своим отрицанием.

Определение. Конъюнкция букв (дизъюнкция букв) называется *элементарной*, если все переменные в её различных буквах различны. Количество букв в ЭК или ЭД называется её *рангом*.

Символ 1 считается ЭК ранга 0, 0 – ЭД ранга 0.

Любую КБ, не являющуюся тождественно ложной, и любую ЭД, не являющуюся тождественно истинной, можно привести к ЭК и ЭД соответственно.

2.1.2. Дизъюнктивная нормальная форма

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) называется дизъюнкция различных элементарных конъюнкций. Количество ЭК в ДНФ называется её *длиной*. Сумма рангов ЭК называется *сложностью* ДНФ.

Теорема 2.1. Число всех различных ДНФ от n переменных равно 2^{3^n}.

Пусть булева функция задана реализующей её формулой.

Алгоритм построения ДНФ, эквивалентной данной формуле:

1. С помощью эквивалентностей $x_1 \supset x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$, $x_1 \equiv x_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$, $x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$, $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ удалить все логические связки, кроме ¬, &, ∨.
2. С помощью законов двойственности удалить отрицания & и ∨, т.е. отнести отрицания только к переменным (получить тесное отрицание).
3. С помощью закона дистрибутивности & относительно ∨ перейти к дизъюнкции конъюнкций.
4. С помощью законов идемпотентности удалить повторы букв и ЭК.

2.1.3. Теорема о дизъюнктивном разложении булевой функции

Теорема 2.2 (о дизъюнктивном разложении булевой функции). Любую n-местную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде формулы:

$$f(\tilde{x}^n) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\langle\sigma_1,\dots,\sigma_s\rangle \\ \sigma_i \in B}} x_{i_1}^{\sigma_1}\ x_{i_2}^{\sigma_2} \cdots x_{i_s}^{\sigma_s} f\left(x_1, \dots, x_{i_1-1}, \sigma_1, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2-1}, \sigma_2, x_{i_2+1}, \dots, x_{i_s-1}, \sigma_s, x_{i_s+1}, \dots, x_n\right),$$

где $f\left(x_1, \dots, x_{i_1-1}, \sigma_1, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2-1}, \sigma_2, x_{i_2+1}, \dots, x_{i_s-1}, \sigma_s, x_{i_s+1}, \dots, x_n\right)$ - формула, реализующая функцию, получающуюся из $f(\tilde{x}^n)$ при $x_{i_1} = \sigma_1$, $x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_s} = \sigma_s$.

Следствие 1 (дизъюнктивное разложение по переменной). При $s = 1$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \bar{x}_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

2.1.3. Теорема о дизъюнктивном разложении

Следствие 2 (дизъюнктивное разложение по двум переменным). При $s = 2$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i x_j f\big(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n\big) \vee$$
$$\vee\, x_i \bar{x}_j f\big(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n\big) \vee$$
$$\vee\, \bar{x}_i x_j f\big(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n\big) \vee$$
$$\vee\, \bar{x}_i\, \bar{x}_j f\big(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n\big).$$

Следствие 3 (дизъюнктивное разложение по n переменным). При $s = n$:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\substack{\langle\sigma_1, \dots, \sigma_n\rangle \\ \sigma_i \in B \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Следствие 4. Любую булеву функцию, не являющуюся тождественным нулём, можно реализовать формулой над множеством связок $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee\}$ с только тесными отрицаниями.

2.1.4. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Определение. ДНФ называется *совершенной* (СДНФ), если все её ЭК имеют один и тот же ранг, равный числу переменных, от которых она зависит.

Теорема 2.3. Число всех различных СДНФ от n переменных равно 2^{2^n}.

Теорема 2.4. Для каждой n-местной булевой функции, не являющейся тождественным нулём, существует единственная реализующая её СДНФ.

Следствие 3 из теоремы 2.2 даёт алгоритм реализации булевой функции в виде СДНФ по её таблице истинности.

Алгоритм алгебраического приведения ДНФ к СДНФ:

1. В каждой ЭК добавить недостающие переменные по эквивалентности $x_i \vee \bar{x}_i = 1$.
2. С помощью закона дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции привести к дизъюнкции ЭК.
3. С помощью закона идемпотентности удалить повторы ЭК.

2.1.5. Конъюнктивная нормальная форма

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция различных элементарных дизъюнкций. Количество ЭД в КНФ называется её *длиной*. Сумма рангов ЭД называется *сложностью* КНФ.

Теорема 2.5. Число всех различных КНФ от n переменных равно 2^{3^n}.

Пусть булева функция задана реализующей её ДНФ.

Алгоритм построения КНФ, эквивалентной данной ДНФ:

1. Пусть дана ДНФ $K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_m$, где K_i - ЭК, по закону двойного отрицания $K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_m = \overline{\overline{K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_m}}$, привести $\overline{K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_m}$ к ДНФ и получить $K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_m = \overline{K_1' \vee K_2' \vee \cdots \vee K_s'}$, где K_i'- ЭК.
2. С помощью законов двойственности получить $\overline{K_1' \vee K_2' \vee \cdots \vee K_s'} = \overline{K_1'}\,\overline{K_2'} \cdots \overline{K_s'} = D_1 D_2 \cdots D_s$, где D_i - ЭД.
3. Удалить двойные отрицания переменных и с помощью закона идемпотентности удалить повторы ЭД.

2.1.6. Теорема о конъюнктивном разложении булевой функции

Теорема 2.6 (о конъюнктивном разложении булевой функции). Любую n-местную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде формулы:

$$f(\tilde{x}^n) =$$
$$= \bigwedge_{\substack{\langle\sigma_1,\dots,\sigma_s\rangle \\ \sigma_i \in B}} \Big(x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee x_{i_2}^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_{i_s}^{\bar{\sigma}_s} \vee$$
$$\vee f\big(x_1, \dots, x_{i_1-1}, \sigma_1, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2-1}, \sigma_2, x_{i_2+1}, \dots, x_{i_s-1}, \sigma_s, x_{i_s+1}, \dots, x_n\big)\Big),$$

где $f\big(x_1, \dots, x_{i_1-1}, \sigma_1, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2-1}, \sigma_2, x_{i_2+1}, \dots, x_{i_s-1}, \sigma_s, x_{i_s+1}, \dots, x_n\big)$ - формула, реализующая функцию, получающуюся из $f(\tilde{x}^n)$ при $x_{i_1} = \sigma_1$, $x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_s} = \sigma_s$.

Следствие 1 (конъюнктивное разложение по переменной). При $s = 1$:

$$f(\tilde{x}^n) = (\bar{x}_i \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n))(x_i \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)).$$

Следствие 2 (конъюнктивное разложение по двум переменным). При $s = 2$:

$$f(\tilde{x}^n) = \big(\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n)\big)\&$$
$$\&\big(\bar{x}_i \vee x_j \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)\big)\&$$
$$\&\big(x_i \vee \bar{x}_j \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n)\big)\&$$
$$\&\big(x_i \vee x_j \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)\big).$$

Следствие 3 (конъюнктивное разложение по n переменным). При $s = n$:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{\substack{\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \\ \sigma_i \in B \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}\right).$$

2.1.7. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Определение. КНФ называется *совершенной* (СКНФ), если все её ЭД имеют один и тот же ранг, равный числу переменных, от которых она зависит.

Теорема 2.7. Число всех различных СКНФ от n переменных равно 2^{2^n}.

Теорема 2.8. Для каждой n-местной булевой функции, не являющейся тождественной единицей, существует единственная реализующая её СКНФ.

Следствие 3 из теоремы 2.6 даёт алгоритм реализации булевой функции в виде СКНФ по её таблице истинности.

Алгоритм алгебраического приведения КНФ к СКНФ:

1. В каждой ЭД добавить недостающие переменные по эквивалентности $x_i \bar{x}_i = 0$.
2. С помощью закона дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции привести к конъюнкции ЭД.
3. С помощью закона идемпотентности удалить повторы ЭД.

§2. Специальные представления булевых функций

2.2. Полином Жегалкина

Определение. ЭК называется *монотонной* (МЭК), если она не содержит отрицаний переменных.

Теорема 2.9. Число всех различных МЭК от n переменных равно 2^n.

Определение. *Полиномом Жегалкина* называется сумма по модулю два различных МЭК.

Теорема 2.10. Число всех различных (с точностью до перестановок МЭК и букв в них) полиномов Жегалкина равно 2^{2^n}.

Теорема 2.11. Любую булеву функцию можно реализовать в виде полинома Жегалкина единственным образом с точностью до коммутативности $\&$ и $\oplus$.

Алгоритм реализации булевой функции, заданной произвольной формулой, полиномом Жегалкина:

1. Реализовать функцию в виде ДНФ или КНФ.
2. С помощью эквивалентностей $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$, $\bar{x} = x \oplus 1$ привести к *базису Жегалкина* $\{\&, \oplus, 1\}$.

2.2. Полином Жегалкина

3. С помощью законов дистрибутивности конъюнкции относительно суммы по модулю два, идемпотентности и эквивалентности $x \oplus x = 0$ привести к полиному Жегалкина.

Если функция задана таблицей истинности, то её можно реализовать полиномом Жегалкина *методом неопределённых коэффициентов.*