## Резюме к главе 1

Для решения основной задачи, поставленной в разделе, – отыскания неопределенного интеграла от заданной функции – рассмотрены 3 метода: 1) непосредственное интегрирование, состоящее в использовании таблицы интегралов, свойств линейности и инвариантности формул интегрирования; 2) интегрирования по частям; 3) интегрирование заменой переменной. Замена переменной в интеграле рассмотрена в двух вариантах.

## Вопросы и задачи для самоконтроля к §§1, 2 гл. 1, раздел 7

1. Что такое первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $X$?

2. Проверьте, будет ли функция $F(x)=\operatorname{tg}^2 x$ первообразной для функции $f(x)=2\sin x/\cos^3 x$.

3. Сформулируйте понятие неопределенного интеграла от функции $f(x)$.

4. Чему равняются:

4.1. $\int d\sin x$; 4.2. $d\int \sin x\,dx$?

5. С помощью таблицы интегралов найдите интегралы:

5.1. $\int x^3 dx$; 5.2. $\int \sqrt{x}\,dx$; 5.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6. С помощью свойства линейности и таблицы интегралов найдите интеграл $\int\left(4x^3-\sqrt{1-x^2}\right)dx$.

7. Подведите соответствующий множитель под дифференциал в подынтегральном выражении, после чего с помощью свойства инвариантности формул интегрирования сведите интеграл к табличному и возьмите его:

7.1. $\int 3\cos 3x\,dx$; 7.2. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$; 7.3. $\int x\sin x^2 dx$; 7.4. $\int \frac{dx}{1+x}$.

## Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§1, 2 гл. 1, раздел 7

2. Функция $F(x)=\operatorname{tg}^2 x$ является первообразной для функции $f(x)=2\sin x/\cos x$ на всей вещественной оси, так как $F'(x)=2\operatorname{tg} x/\cos^2 x=2\sin x/\cos^3 x$.

4.1. $\int d\sin x=\sin x+C$; 4.2. $d\int \sin x\,dx=\sin x\,dx$.

5.1. $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$; 5.2. $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{1/2}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$;

5.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C$.

6. $\int\left(4x^3-\sqrt{1-x^2}\right)dx=4\int x^3dx-\int\sqrt{1-x^2}\,dx=4\frac{x^4}{4}-\arcsin x+C=x^4-\arcsin x+C$.

7.1. $\int 3\cos 3x\,dx=\int\cos 3x\,d(3x)=\sin 3x+C$. 7.2. $\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int\sin^3 x\,d\sin x=\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

7.3. $\int x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int\sin x^2(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int\sin x^2dx^2=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$.

7.4. $\int\frac{dx}{1+x}=\int\frac{d(1+x)}{1+x}=\ln|1+x|+C$.

## Вопросы и задачи для самоконтроля к §§3, 4 гл. 1, раздел 7

1. Запишите формулу интегрирования по частям.

2. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям.

2.1. $\int x\sin x\,dx$ [$u=x$, $\sin x\,dx=dv$];

2.2. $\int x^2e^xdx$ [$u=x^2$, $e^xdx=dv$. Формулу интегрирования по частям примените 2 раза];

2.3. $\int\operatorname{arctg} x\,dx$ [$u=\operatorname{arctg} x$, $dx=dv$].

3. С помощью первого правила замены переменной найдите данные интегралы:

3.1. $\int\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$ [$\operatorname{tg} x=t$]; 3.2. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ [$1+x^2=t$].

4. С помощью второго правила замены переменной найдите данные интегралы:

4.1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$ [$x=t^2$]; 4.2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ [$x=\frac{1}{t}$].

## Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§3, 4 гл. 1, раздел 7

2.1. $\int x\sin x\,dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x & \sin x\,dx=dv \\ du=dx & v=-\cos x\end{array}\right]=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$.

2.2. $\int x^2e^xdx=\left[\begin{array}{c|c} u=x^2 & e^xdx=dv \\ du=2x\,dx & v=e^x\end{array}\right]=x^2e^x-2\int xe^xdx=\left[\begin{array}{c|c} u=x & e^xdx=dv \\ du=dx & v=e^x\end{array}\right]=$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

2.3. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x & dx = dv \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = x \end{array}\right] = x \operatorname{arctg} x - \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

3.1. $\int \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg} x\, d\operatorname{tg} x = [\operatorname{tg} x = t] = \int t\,dt = \dfrac{t^2}{2} + C = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C.$

3.2. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2} d(1+x^2) = \left[1+x^2 = t\right] = \dfrac{1}{2}\int t^{1/2} dt =$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C.$$

4.1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)} = \left[x = t^2,\ dx = 2t\,dt\right] = \int \dfrac{2t\,dt}{t(1+t)} = 2\int \dfrac{dt}{1+t} = 2\int \dfrac{d(1+t)}{1+t} =$

$$= 2\ln|1+t| + C = 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

4.2.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left[x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}\right] = -\int \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{1/t^2 - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

.