§4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми

Две прямые на плоскости могут либо совпадать, либо пересекаться в одной точке, либо не иметь ни одной общей точки, т.е. быть параллельными.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями с угловым коэффициентом: $L_1: y = k_1 x + b_1$, $\quad L_2: y = k_2 x + b_2$.

Условие параллельности таких прямых следует из условия равенства углов наклона φ_1 и φ_2 этих прямых к оси *Ox*. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$, то приходим к следующему утверждению:

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \qquad (4.1)$$

Выведем формулу для угла φ между прямыми L_1 и L_2, понимаемого как угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2 (рис. 4.1). Из планиметрии следует равенство $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi$ или $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, где под φ понимается угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2 (рис. 4.1). По известной формуле тригонометрии имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Замечая, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (4.2)$$

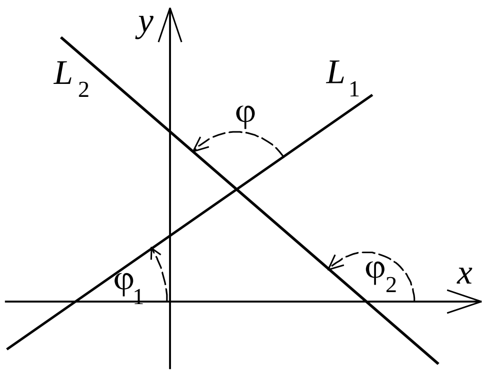

Рис. 4.1. К формуле для тангенса угла между прямыми

Необходимо отметить, что с помощью соотношения (4.2) вычисляется тангенс угла φ, понимаемого в вышеописанном смысле.

Если $1 + k_1 k_2 = 0$, то $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, следовательно, $\varphi = \pi/2$, и данные прямые перпендикулярны. Итак, любое из следующих равенств

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \text{ или } k_1 = -1/k_2 \qquad (4.3)$$

является *условием перпендикулярности* прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

Пример 4.1. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку $(2,3)$, если она: а) параллельна прямой $L_1: y = -2x + 5$; б) перпендикулярна прямой
$L_2: y = 3x - 1$; в) перпендикулярна прямой $L_3: y = 1$; г) образует угол $\pi/4$ с прямой $L_4: y = 3x + 5$.

►Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 – угловые коэффициенты прямых L_1, L_2, L_3, L_4, $k_1 = -2$,

$k_2 = k_4 = 3$, $k_3 = 0$, а k – угловой коэффициент прямой L. Используя равенства (3.3) – (3.4), напишем уравнение пучка прямых с центром в точке $(2,3)$: $y-3=k(x-2)$, $x=2$ и определим k так, чтобы удовлетворить условиям а) – г).

а) $k = k_1 = -2$, тогда $L: y-3=-2(x-2) \Rightarrow L: y=-2x+7$.

б) $k=-1/k_2=-1/3$, тогда: $L: y-3=-(x-2)/3 \Rightarrow L: y=-x/3-7/3$.

в) Прямая L_3 параллельна оси Ox, следовательно, прямая L перпендикулярна этой оси и не имеет углового коэффициента. Данному условию удовлетворяет прямая $L: x=2$ из рассматриваемого пучка.

г) Из (4.2) имеем равенства $\operatorname{tg}\varphi = 1 = \dfrac{k-3}{1+3k}$ или $\operatorname{tg}\varphi = 1 = \dfrac{3-k}{1+3k}$, откуда для k получаем два уравнения: $\left[\begin{array}{l} 1+3k=k-3, \\ 1+3k=3-k, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=-2, \\ k=1/2. \end{array}\right.$ Таким образом, данному условию удовлетворяют две прямые:

$L: y-3=-2(x-2) \Rightarrow L: y=-2x+7$, $L: y-3=\dfrac{1}{2}(x-2) \Rightarrow L: y=\dfrac{1}{2}x+2$. ◄