§7. Понятие функции комплексной переменной

На множестве комплексных чисел вводится понятие функции, аналогично тому, как это было сделано при введении понятия функции на множестве вещественных чисел (определение 7.1, глава 1, раздел 4).

Определение 7.1. Пусть $D \subset \boldsymbol{C}$ – некоторое непустое множество комплексных чисел. Если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие по некоторому закону комплексное число $w \in E \subset \boldsymbol{C}$, то говорят, что на D задана *функция комплексной переменной* z и пишут $w = f(z)$.

Числа $z = x + iy$ и $w = u + iv$ будем интерпретировать как точки плоскостей Oxy и Ouv. Функция $w = f(z)$ каждой точке z множества D плоскости Oxy ставит в соответствие точку w множества E плоскости Ouv (рис. 7.1).

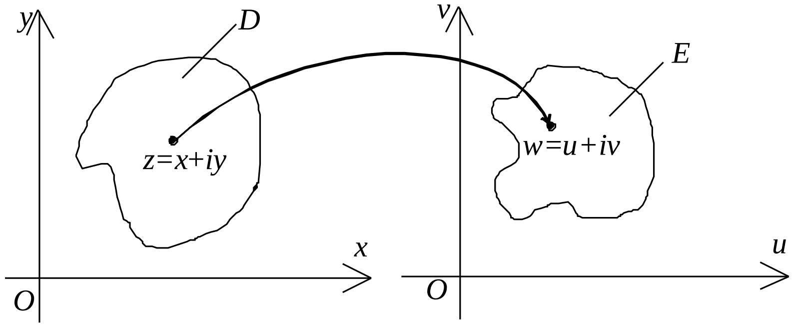

Рис. 7.1. К понятию функции комплексной переменной

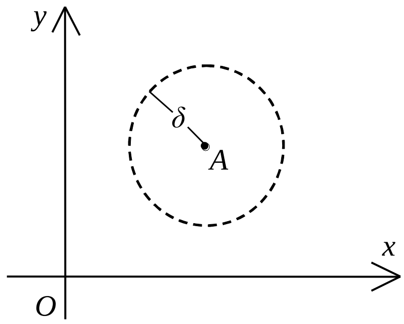

Рис. 7.2. К определению 7.2

Степенная функция $w = z^n$, многочлен $P_n(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n$, где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$ – комплексные числа, показательная функция $w = e^z$, логарифмическая функция $w = \ln z$ являются простейшими функциями комплексной переменной.

Для функций комплексной переменной можно ввести многие из понятий, введённых в разделах 4, 5 для функции вещественного аргумента, например, такие, как предел, производная и т. п.

Определение 7.2. δ - *окрестностью* точки $a \in \boldsymbol{C}$ называется множество комплексных чисел z, обозначаемое символом $U_\delta(a)$ и определяемое равенством $U_\delta(a) = \{z : |z - a| < \delta\}$.

Проколотая δ *– окрестность* точки $a \in \boldsymbol{C}$ обозначается символом $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и определяется равенством: $\overset{\circ}{U}_\delta(a) = \{z : 0 < |z - a| < \delta\}$.

Геометрически δ - окрестность точки $a \in \boldsymbol{C}$ интерпретируется как часть комплексной плоскости, ограниченная окружностью $|z - a| = \delta$, при этом точки самой окружности не принадлежат δ - окрестности точки a (рис. 7.2, точка A соответствует комплексному числу a).

Определение 7.3. Комплексное число b называется пределом функции $w = f(z)$ при $z \to a$, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно найти действительное число $\delta > 0$ такое, что если $z \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то $f(z) \in U_\varepsilon(b)$.

Очевидно, определение 7.3 аналогично определению предела функции вещественного аргумента на языке $\varepsilon - \delta$ (определение 1.2, глава 3, раздел 4). Определение производной функции $w = f(z)$ также вводится по аналогии с определением производной функции действительного аргумента.

Определение 7.4. Пусть функция $w = f(z)$ определена на некоторой δ-окрестности точки z_0. Предел отношения $\dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, если он существует и конечен, называется *производной* этой функции в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$. Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (7.1)$$

Для функции комплексной переменной остаются справедливыми правила дифференцирования, рассмотренные в разделе 5, а также формулы таблицы производных. Так, например, $\left(z^n\right)' = nz^n$. Для многочлена $P_n(z)$ можно обосновать формулу:

$$P_n(z) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \qquad (7.2)$$

Равенство (7.2) называется *формулой Тейлора* для многочлена $P_n(z)$. Формула (7.2) является аналогом формулы Тейлора для многочлена $P_n(x)$ от вещественной переменной x с вещественными коэффициентами (формула (6.4), глава 2, раздел 5). При $a = 0$ соотношение (7.2) принимает вид:

$$P_n(z) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!} z + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} z^n. \qquad (7.3)$$

Равенство (7.3) называется *формулой Маклорена* для многочлена $P_n(z)$.