§6. Формула Тейлора для многочлена. Бином Ньютона как частный случай формулы Тейлора для многочлена

Пусть дан многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{6.1}$$

a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, – коэффициенты многочлена. Положим: $x = (x - x_0) + x_0$, где x_0 – любое фиксированное число, получим: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k [(x - x_0) + x_0]^k$. Возведя сумму $(x - x_0) + x_0$ в степень *k*, после приведения подобных членов приходим к равенству:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k, \tag{6.2}$$

называемому *разложением многочлена* $P_n(x)$ *по степеням разности* $x - x_0$. Коэффициенты b_k, $k = 0,1, \ldots, n$, этого разложения зависят от x_0 и коэффициентов a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, например, $b_0 = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n$. Продифференцируем равенство (6.2) почленно *n* раз:

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) \ldots + nb_n(x - x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 b_2 + 3 \cdot 2 b_3 (x - x_0) + \ldots + n(n-1) b_n (x - x_0)^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(k)}(x) = k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 b_k + (k+1)k \cdot \ldots \cdot 2(x - x_0) + \ldots +$$
$$+ n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) b_n (x - x_0)^{n-k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_n,$$

прозводные многочлена $P_n(x)$ порядка выше *n* равны нулю. Положим в этих равенствах и в формуле (6.2) $x = x_0$, получим:

$P_n(x_0) = b_0$, $P_n'(x_0) = b_1$, $P_n''(x_0) = 1 \cdot 2 b_2, \ldots$, $P_n^{(k)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot b_k = k! b_k$, $\ldots$, $P_n^{(n)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot b_n = n! b_n$ или

$$b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1, \ldots, n, \tag{6.3}$$

где по определению принимаем 0!=1, 1!=1 и $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$. Итак, показано, что разложение (6.2) единственно, так как его коэффициенты b_k, $k = 0,1, \ldots, n$,
всегда определяются формулой (6.3). Подставим (6.3) в (6.2):

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) называется *формулой Тейлора* для многочлена $P_n(x)$.

Пример 6.1. Многочлен $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 13$ разложить по степеням разности $x - 2$.

►Запишем для данного многочлена формулу (6.4) при $x_0 = 2$:

$$P_3(x) = P_3(2) + \frac{P_3'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P_3''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P_3'''(2)}{3!}(x-2)^3. \qquad (6.5)$$

Имеем $P_3'(x) = 3x^2 - 14x + 18$, $P_3''(x) = 6x - 14$, $P_3'''(x) = 6$ и $P_3(2) = 3$, $P_3'(2) = 2$, $P_3''(2) = -2$, $P_3'''(2) = 6$. Подставив в (6.5) четыре последних равенства, приходим к соотношению: $P_3(x) = 3 + 2(x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3$.◄

Пример 6.2. Пусть $P_3(x)$ – многочлен третьей степени, $P_3(1) = 0$, $P_3'(1) = -4$, $P_3''(1) = 2$, $P_3'''(1) = 6$. Написать его разложение по степеням x.

►Напишем для данного многочлена формулу (6.4) при $n = 3$, $x_0 = 1$:

$$P_3(x) = P_3(1) + \frac{P_3'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P_3''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P_3'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Подставим в это равенство значение многочлена и его производных в точке $x = 1$, получим: $P_3(x) = 0 - 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к равенству $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.◄

Следствие. Вывод формулы бинома Ньютона.

►Рассмотрим многочлен: $P_n(x) = (a+x)^n$ и напишем его разложение по степеням x. Из (6.4) при $x_0 = 0$ имеем:

$$P_n(x) = (a+x)^n = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (6.6)$$

Последовательно находим производные $P_n^{(k)}(x)$ в точке $x = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$:

$P_n(0) = P_n^{(0)}(0) = a^n$; $P_n'(x) = n(a+x)^{n-1}$; $P_n'(0) = na^{n-1}$;

$P_n''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2}$; $P_n''(0) = n(n-1)a^{n-2}$;

. . . .

$P_n^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k}$; $P_n^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k}$;

. . . .

$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)a^{n-n} = n!$; $P_n^{(n)}(0) = n!$.

Подставим значения $P_n^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, в формулу (6.6), получим:

$$(a+x)^n =$$
$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + \ldots + x^n. \qquad (6.7)$$

Запишем соотношение (6.7) в более краткой форме:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k, \qquad (6.8)$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \; k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (6.9)$$

Для общности формулы (6.8) для всех указанных значений k полагают

$$C_n^0 = 0! = 1! = 1.$$

Каждое из равенств (6.7), (6.8) называется *формулой бинома Ньютона*, их правые части называются *разложением бинома*, коэффициенты C_n^k, $k = 0, 1, \ldots, n,$ формулы (6.8) называются *биномиальными коэффициентами*.

Замечание 6.2. Формулы (6.7) и (6.8) были приведены ранее в §10 главы 1 раздела 4 (формулы (10.1), (10.2)) без доказательства.

Свойства формулы бинома Ньютона

1. Число членов разложения бинома равно $n+1$.

2. Показатель степени *a* последовательно убывает от *n* до 0, а показатель степени *x* возрастает от 0 до *n*.

3. Сумма показателей степени при *a* и *x* постоянна в каждом члене разложения и равна *n*.

4. Для биномиальных коэффициентов справедлива формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (6.10)$$

►Умножим числитель и знаменатель в формуле (6.9) на $(n-k)!$, в результате приходим к формуле (6.10).◄

5. Биномиальные коэффициенты членов, равноудалённых от концов разложения, равны, т.е.

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (6.11)$$

►Заменим в формуле (6.11) k на $n-k$, при этом величины числителя и знаменателя не изменятся, что и доказывает справедливость формулы (6.11).◄

6. Биномиальные коэффициенты C_n^k сначала возрастают при $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$, а потом убывают при $\frac{n-1}{2} \le k \le n$.

►Найдём величину отношения двух последовательных биномиальных коэффициентов:

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!} \Bigg/ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Отсюда заключаем, что биномиальные коэффициенты возрастают при условии $\frac{n-k}{k+1} \ge 1 \Rightarrow k \le \frac{n-1}{2}$ и убывают при условии $\frac{n-k}{k+1} \le 1 \Rightarrow k \ge \frac{n-1}{2}$.◄

7. Разложение бинома Ньютона при чётном *n* содержит единственный член с максимальным биномиальным коэффициентом, находящийся посредине разложения, а при нечётном *n* – два члена с равными и максимальными биномиальными коэффициентами, находящиеся посредине разложения.

►В первом случае число членов разложения нечётно и, в соответствии со свойством 6, единственный член с максимальным коэффициентом находится посредине разложения. Во втором случае разложение имеет чётное число членов. В силу свойств 6 и 5 разложение имеет два члена с равными максимальными биномиальными коэффициентами.◄

8. Для биномиальных коэффициентов с последовательными верхними индексами выполняется следующее соотношение:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k,\ k = 0,1, \dots , n. \qquad (6.12)$$

►Биномиальные коэффициенты из левой части равенства (6.12) вычислим по формуле (6.9):

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}\left[1+\frac{n-k+1}{k}\right]=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}\cdot\frac{n+1}{k}=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!}=C_{n+1}^k.$$◄

9. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.

►Положим в формуле (6.89) $a = x = 1$, получим: $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.◄

10. В биноме $(a-x)^n$ знаки членов чередуются, а абсолютные величины коэффициентов те же, что и в формуле (6.8).