§5. Непрерывность функции в точке и в области

Пусть функция f задана в области D и X_0 – некоторая точка в этой области.

Определение 1. ***Функция*** f ***называется непрерывной в точке*** X_0***, если выполняется равенство***

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0). \tag{5.1}$$

Если $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_m^{(0)})$ – координаты точек соответственно X и X_0, то условие (5.1) можно записать так:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \ldots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} \left[f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \right] = 0. \tag{5.2}$$

Введя обозначения

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)}, \ \ldots, \ \Delta x_m = x_m - x_m^{(0)}, \ \Delta w = f(x_1, x_2, \ldots x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_m^{(0)}),$$

равенство (5.2) можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta w = 0. \tag{5.3}$$

Величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ называются *приращениями аргументов,* Δw – *приращением функции*.

Из равносильности (5.1) и (5.3) следует еще одно определение, равносильное приведенному выше.

Определение 2. ***Функция*** f ***называется непрерывной в точке*** X_0***, если в этой точке бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.***

Замечание. Если обозначить $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$, то равенство (5.3) можно записать так:

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta w = 0. \tag{5.4}$$

Определение. ***Функция*** f ***называется непрерывной в области*** D***, если она непрерывна во всех точках этой области.***

Легко показать, как и в случае функции одной переменной, что сумма, разность, произведение, частное, модуль, корень и суперпозиция непрерывных в области D функций нескольких переменных суть функции непрерывные в этой области (в случае частного знаменатель предполагается не обращающимся в нуль, а в случае корня – подкоренная функция неотрицательна).

Из высказанных утверждений как следствие вытекает следующая теорема: все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Основные теоремы о непрерывных на промежутке функциях от одной переменной, доказанные ранее, распространяются на непрерывные в ограниченной области функции от нескольких переменных. А именно:

I. Если функция f непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она ограничена в этой области, т. е. существует такое L, что $|f(X)| \le L$, $\forall X \in D$ (первая теорема Вейерштрасса).

II. Функция f ,непрерывная в ограниченной замкнутой области D, принимает в ней свое наибольшее и наименьшее значения (вторая теорема Вейерштрасса).

III. Пусть функция f непрерывна в области D и в некоторых двух точках этой области принимает значения разных знаков. Тогда внутри этой области найдется точка Y такая, что $f(Y) = 0$ (первая теорема Больцано – Коши).