*§8. Степенные ряды с комплексными членами

1°. Общие свойства степенных рядов с комплексными членами.

Определение 8.1. ***Функциональный ряд, общий член которого имеет вид $u_k(z) = c_k(z - z_0)^k$, где c_k – комплексные числа, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости, z – комплексное число, называется степенным рядом с комплексными членами.***

Для таких рядов существует теория, аналогичная теории степенных рядов

с действительными членами.

Теорема 8.1 (первая теорема Абеля). ***Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Кроме этого, в любой замкнутой подобласти (круге) вида $|z - z_0| \leq \rho \leq |z_1 - z_0|$ ряд сходится равномерно.***

Доказательство проводится по схеме доказательства первой теореме Абеля

для степенных рядов действительной переменной.

Из этой теоремы, как и в случае степенных рядов действительной

переменной, могут быть получены важные следствия.

Следствие 8.1. ***Если ряд расходится в точке z_2, то он расходится во всех точках внешности круга с радиусом $|z_2 - z_0|$ и с центром в z_0, т. е. для z, определённых условием $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.***

Следствие 8.2. ***Для всякого степенного ряда в комплексной области существует такое число R, что внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, вне круга, т. е. при $|z - z_0| > R$, ряд расходится.***

Это число называется *радиусом сходимости*, и из определения следует его единственность. А круг $|z - z_0| < R$ называют *кругом сходимости* (рис. 8.1).

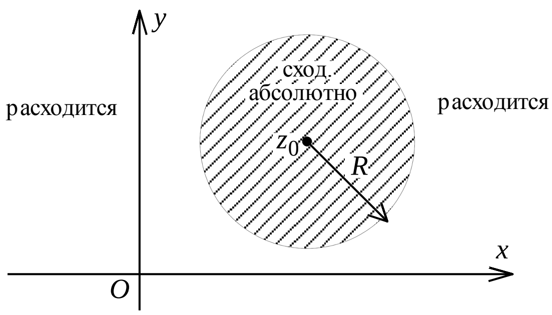

Рис. 8.1.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{8.1}$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{8.2}$$

если указанные пределы существуют.

Пример 8.1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n+i(n^2+1)}$.

▶ Воспользуемся формулой (8.1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1+i\left((n+1)^2+1\right)}{n+i(n^2+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+1)^2+(n^2+2n+2)^2}{n^2+(n^2+1)^2}} = 1.$$

Следовательно, радиус сходимости ряда равен 1. ◀

Замечание 8.1. Формулы (8.1) и (8.2) неприменимы, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю.

Пример 8.2. Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{4^n\left(n+i(n-1)\right)}. \tag{8.3}$$

▶ В рассматриваемый ряд входят только члены с чётными степенями $(z-2)$, следовательно, все нечётные коэффициенты ряда равны нулю. Это означает, что в данном случае нельзя пользоваться формулами (8.1), (8.2). Применим к этому ряду, например, радикальный признак Коши. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-2)^{2n}}{4^n\left(n+i(n-1)\right)}\right|} = \frac{|z-2|^2}{4},$$

то ряд будет абсолютно сходится, если

$$\frac{|z-2|^2}{4} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-2| < 2,$$

т. е. радиус сходимости ряда (8.3) равен 2. ◀

2°. Примеры функций, определяемых степенными рядами с комплексными членами. **Пусть степенной ряд**

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

сходится в круге $|z-z_0| < R$. Обозначим сумму этого ряда через $f(z)$. Это функция комплексной переменной, определённая внутри круга сходимости Приведём примеры функций, определённых степенными рядами с комплексными членами.

1. Показательная функция комплексной переменной

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ , \quad R = \infty. \tag{8.4}$$

2. Синус комплексной переменной

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\ , \quad R = \infty. \tag{8.5}$$

3. Косинус комплексной переменной

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\ , \quad R = \infty. \tag{8.6}$$

Замечание 8.2. Если в формулах (8.4) – (8.6) положить $z = x \in \mathbf{R}$, то они превращаются в известные разложения функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ по степеням x. Учитывая, что $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = (-1)^n i$, нетрудно показать, что

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \tag{8.7}$$

$$\cos z - i \sin z = e^{-iz}. \tag{8.8}$$

Это формулы Эйлера для комплексного z. При $z = x \in \mathbf{R}$ соотношения (8.7), (8.8) переходят в формулы Эйлера для действительной переменной:

$$\cos x + i \sin x = e^{ix},$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}.$$