§4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона – Лейбница

Предварительно заметим, что величина определенного интеграла зависит от вида подынтегральной функции $f(x)$, от пределов интегрирования $a,\ b$ и не зависит от обозначения переменной интегрирования. Ее можно обозначить буквами $x,\ u,\ t,\ z$ и т. д. Поэтому имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (4.2)$$

Он является функцией верхнего предела x. Эта функция обладает более простыми свойствами, чем подынтегральная, поэтому операцию интегрирования можно рассматривать как операцию сглаживания функции.

Теорема 4.1 (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом). ***Если функция*** $f(x)$ ***интегрируема по промежутку*** $[a, b]$ ***и*** $x \in [a, b]$***, то функция*** $\Phi(x)$ ***непрерывна в промежутке*** $[a, b]$**.**

▶ Доказательство теоремы опирается на ряд свойств интеграла, которые справедливы для любой интегрируемой функции, но в нашем курсе обоснованы лишь для класса кусочно-непрерывных функций, наиболее важного для практических приложений, которым мы и ограничиваемся в наших рассмотрениях Доказательство свойств интеграла, а стало быть и теоремы 4.1, для общего случая интегрируемых функций можно найти в более подробных курсах, например, в [1, 7].

Теорема 4.2 (Барроу, 1630–1677, английский математик, учитель Ньютона). ***Если подынтегральная функция*** $f(x)$ ***непрерывна в промежутке*** $[a, b]$***, то во всем промежутке*** $[a, b]$ ***справедливо равенство*** $\Phi'(x) = f(x)$***:***

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \qquad (4.3)$$

Таким образом, производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна подынтегральной функции, взятой на верхнем пределе интеграла.

▶ Рассмотрим

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\Delta x\,.$$

Здесь к последнему интегралу применена теорема о среднем 3.2 (формула (3.2)). При этом точка c принадлежит промежутку $[x,\,x+\Delta x]$. Далее находим $\Delta\Phi(x)/\Delta x=f(c)$. Отсюда

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

так как при $\Delta x\to 0$ точка c стремится к точке x, и по непрерывности подынтегральной функции $f(c)$ стремится к $f(x)$. ◀

*** *Замечание.*** В более общем случае, когда подынтегральная функция не является везде непрерывной в промежутке интегрирования, равенство (4.3) сохраняется во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

▶ Используем обозначения и результаты доказательства теоремы 4.1.

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt;\quad \Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\mu\cdot\Delta x,\text{ где } m'\le\mu\le M'.$$

Отсюда $\Delta\Phi(x)/\Delta x=\mu$. По определению непрерывности функции $f(t)$ в точке $t=x$ для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, такое, что при $|\Delta x|<\delta$ будут выполняться неравенства

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon$$

для всех значений t из промежутка $[x,\,x+\Delta x]$. Так как m' и M' – точные границы $f(t)$ в этом промежутке, то для них эти неравенства принимают вид: $f(x)-\varepsilon\le m'\le M'\le f(x)+\varepsilon$. Тогда $f(x)-\varepsilon\le\mu\le f(x)+\varepsilon$. Последние неравенства означают, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mu=f(x)$. Отсюда следует, что

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x)/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\mu=f(x).\ ◀$$

Следствие из теоремы Барроу. ***Для всякой непрерывной функции $f(x)$ в промежутке $[a,\,b]$ существует в этом промежутке первообразная. Одной из первообразных для $[a,\,b]$ является интеграл с переменным верхним пределом (4.2).***

Теорема Барроу имеет огромное теоретическое и практическое значение. С одной стороны, она устанавливает связь между двумя самостоятельно развитыми разделами математического анализа – теориями неопределенного и определенного интегралов. С другой стороны, она дает важнейший способ вычисления определенного интеграла с помощью первообразной подынтегральной функции. Этот способ известен как формула Ньютона – Лейбница, рассматриваемая ниже. Формула Ньютона – Лейбница в средней школе служила определением определенного интеграла. Здесь она выводится, так как определенный интеграл определялся иначе, как предел интегральной суммы.

Теорема 4.3. Формула Ньютона – Лейбница. ***Определенный интеграл равен разности значений любой первообразной для подынтегральной функции, взятых на верхнем и нижнем пределах интеграла:***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b . \qquad (4.4)$$

Здесь $F'(x) = f(x)$.

▶ Теорема Барроу установила, что интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является одной из первообразных для подынтегральной функции $f(t)$. Пусть $F(x)$ – еще одна из первообразных. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, так как две любые первообразные для одной и той же функции $f(x)$ отличаются лишь на постоянную. Найдем эту постоянную C, положив в последнем равенстве $x = a$. Получаем $\Phi(a) = F(a) + C$. Отсюда $C = \Phi(a) - F(a) = -F(a)$, так как $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Итак, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C = F(x) - F(a)$. Отсюда при $x = b$ находим $\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Это и есть иначе записанная формула (4.4). ◀

Примеры.

4.1. $\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$.

4.2. $\int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$.