Раздел 4
Введение в математический анализ

Вещественные числа

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

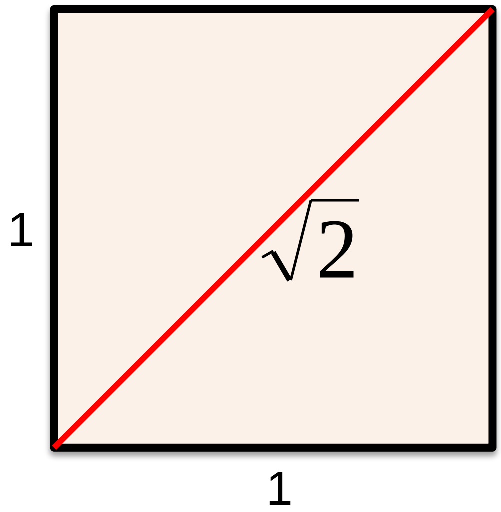
натуральные числа

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

целые числа

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

рациональные числа



$$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$$

► Пусть $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$

несократимая дробь

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow \boxed{m \vdots 2} \Rightarrow m = 2k$$

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow \boxed{n \vdots 2} \quad ◄$$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$ $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$

Математические кванторы

$\forall$ — квантор всеобщности

$\exists$ — квантор существования

A — ANY (любой)

E — to Exist (существовать)

Примеры

1

$$\forall x \in (5;+\infty) \Rightarrow x \geq 5$$

$$\neg(\forall x \in (5;+\infty) \Rightarrow x \geq 5) \leftrightarrow \exists x_0 \in (5;+\infty): x_0 < 5$$

2

$$\exists x \in \mathbf{N}: x+5=4$$

$$\neg(\exists x \in \mathbf{N}: x+5=4) \leftrightarrow \forall x \in \mathbf{N} \Rightarrow x+5 \neq 4$$

Аксиоматическое построение пространства вещественных (действительных) чисел R.

Множество **R** вещественных (действительных) чисел – множество математических объектов, на котором установлены две операции: сложение и умножение; установлено отношение порядка и выполняется аксиома о точной верхней грани.

$$\forall x,\ y \in \mathbf{R} \mapsto x + y \in \mathbf{R}$$

$$\forall x,\ y \in \mathbf{R} \mapsto x \cdot y \in \mathbf{R}$$

$1'.\ x + y = y + x$

$1''.\ x \cdot y = y \cdot x$

коммутативность

$2'.\ (x + y) + z = x + (y + z)$

$2''.\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

ассоциативность

$3'.\ \exists 0 \in \mathbf{R} : x + 0 = x$

$3''.\ \exists 1 \in \mathbf{R} : x \cdot 1 = x$

существование нейтрального элемента

$4'.\ \forall x \in R \quad \exists -x : \ -x + x = 0$

существование противоположного элемента

$4''.\ \forall x \in \mathbf{R}\ (x \neq 0) \quad \exists x^{-1} : \ x \cdot x^{-1} = 1$

существование обратного элемента

$$5.\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

дистрибутивность умножения относительно сложения

Отношение порядка

$$\forall x,\, y \in \mathbf{R} \quad x \le y \vee y \le x$$

Аксиомы порядка

1. $x \le x$ — *рефлексивность*

2. $(x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow (x = y)$ — *антисимметричность*

3. $(x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z)$ — *транзитивность*

4. $(x \le y) \Rightarrow (x + z \le y + z)$ — *связь порядка и сложения*

5. $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \Rightarrow (0 \le x \cdot y)$ — *связь порядка и умножения*

6. $0 \le 1,\ 0 \ne 1$

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1, \ldots$$

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

Ограниченные множества в пространстве **R**

$X \subset \mathbf{R}$ ограничено сверху, если $\quad \exists b \in \mathbf{R} : x \le b \quad \forall x \in X$

b – верхняя граница множества X

$X \subset \mathbf{R}$ ограничено снизу, если $\quad \exists a \in \mathbf{R} : a \le x \quad \forall x \in X$

a – нижняя граница множества X

$X \subset \mathbf{R}$ ограничено, если оно ограничено сверху и снизу.

$$\exists a, b \in \mathbf{R} : a \le x \le b \quad \forall x \in X$$

Аксиома о точной верхней грани

Всякое множество X вещественных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань $M \in \mathbf{R}$, то есть

1 $\forall x \in X \Rightarrow x \leq M$

M – верхняя граница множества X

2 $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow M - \varepsilon$ не является верхней границей, то есть

$\exists x_0 \in X \colon x_0 > M - \varepsilon$

M – наименьшая из верхних границ множества X

$$M = \sup X$$

супремум множества X

Теорема о точной нижней грани

Всякое множество X вещественных чисел, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань $m \in R$, то есть

1 $\forall x \in X \Rightarrow x \geq m$

m – нижняя граница множества X

2 $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow m + \varepsilon$ не является нижней границей, то есть

$\exists x_0 \in X \colon x_0 < m + \varepsilon$

m – наибольшая из нижних границ множества X

$$m = \inf X$$

инфимум множества X

Примеры: $1.\ X=\left\{x\in\mathbf{Q}: x^2\le 2\right\}$

X ограничено сверху, например, числом 2

$X\subset\mathbf{R}$ ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup X\in\mathbf{R}$

$$\sup X=\sqrt{2}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

$$2.\ Y=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$$

$$\inf Y=0\in\mathbf{R}$$

$$\sup X=1\in\mathbf{R}$$

Типы множеств пространства $\mathbf{R}$

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\} = (a, b)$$

интервал, или открытый промежуток

$$\{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\} = [a, b]$$

отрезок, сегмент, замкнутый промежуток

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x \le b\} = (a, b] \quad \{x \in \mathbf{R} : a \le x < b\} = [a, b)$$

полуинтервалы, или полусегменты

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x\} = (a, +\infty) \quad \{x \in \mathbf{R} : x < b\} = (-\infty, b)$$

бесконечные интервалы

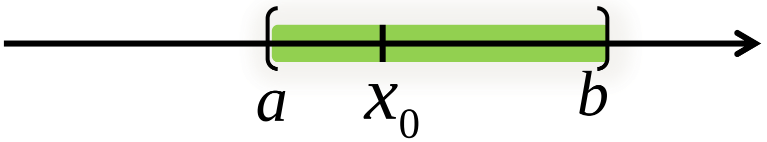
$$\{x \in \mathbf{R} : a \le x\} = [a, +\infty) \quad \{x \in \mathbf{R} : x \le b\} = (-\infty, b]$$

бесконечные полуинтервалы

Окрестности точки

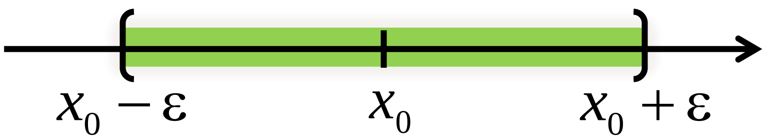
$x_0 \in \mathbf{R}$

$$U(x_0) = (a, b) \subset \mathbf{R} : x_0 \in (a, b)$$



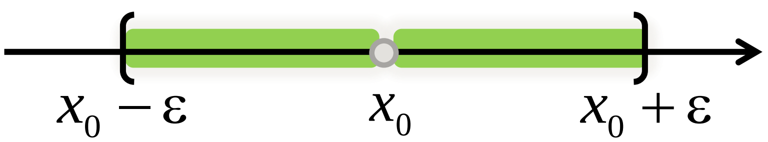
окрестность точки x_0

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$$



ε-окрестность точки x_0

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$$



проколотая ε-окрестность точки x_0