Тема 6. Сопряженные комплексные числа

Пусть $z = a + bi$. Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным числу z. Например, $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$; $\bar{i} = -i$.

Любое действительное число a равно своему сопряженному $\bar{a}$, т.к. $a = a + 0i = a - 0i = \bar{a}$.

Для комплексного числа $z = a + bi$ имеем

1) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

2) $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$

т.е. сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.

Важное свойство операции сопряжения выражаются следующей леммой.

Лемма. Пусть p и q два комплексных числа. Тогда $\overline{p * q} = \bar{p} * \bar{q}$, где знак $*$ означает любую из операций: сложение, вычитание, умножение и деление.

Разберем случай, когда $*$ есть сложение; остальные операции рассматриваются аналогично.

Необходимо доказать справедливость равенства $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$.

Пусть $p = a + bi,\ q = c + di$, тогда $p + q = (a + c) + (b + d)i$ и, следовательно, $\overline{p + q} = (a + c) - (b + d)i$. С другой стороны, $\bar{p} + \bar{q} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$; видим, что $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$.

Операция сопряжения очень удобна при делении комплексных чисел. Для нахождения частного $\frac{v}{u}$, где $u \neq 0$, следует умножить числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{v}{u} = \frac{v\bar{u}}{u\bar{u}} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i$$

Сравните с формулой (6).

Вычислить

$$а)\ \frac{1-i}{1+i}, \qquad б)\ \frac{1}{i}, \qquad в)\ \frac{1-i}{3+4i}$$

Решение

$$а)\ \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{0-2i}{2} = -i \quad \bullet$$

$$б)\ \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \quad \bullet$$

$$в)\ \frac{1-i}{3+4i} = \frac{(1-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4-i(3+4)}{25} = -\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i \quad \bullet$$

Записать в алгебраической форме

$$a)\ \frac{1+i}{(2-i)(1-i)}, \qquad b)\ \sqrt{4+3i}$$

Решение

$$а)\ \frac{1+i}{(2-i)(1-i)} = \frac{1+i}{2-i-2i-1} = \frac{(1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-2+4i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \bullet$$

б) *Замечание*. Смысл радикала здесь— найти все значения квадратного корня. (обычно радикалом обозначается арифметическое значение корня из неотрицательного числа).

Пусть $z = x + yi$ искомое число, тогда $4+3i = z^2$ или

$4+3i = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$, что равносильно системе $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \end{cases}$

Подставляя $y = \dfrac{3}{2x}$ в первое уравнение, получаем биквадратное уравнение $4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$; сделав подстановку $x^2 = u > 0$, перейдем к квадратному уравнению $4u^2 - 16u - 9 = 0$, откуда $u = \dfrac{9}{2}$.

Окончательно получаем $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\quad y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $z_{1,2} = \pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\bullet$

Разложить действительные числа
на комплексные множители

а) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$, *б*) 20

Решение

а) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}=\frac{1}{2}-i^2\sqrt{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\sqrt[4]{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\sqrt[4]{2}i\right)$ •

б) $20=19-i^2=\left(\sqrt{19}-i\right)\cdot\left(\sqrt{19}+i\right)$ или $20=16-i^2 4=(4-2i)\cdot(4+2i)$ •

Найти все решения уравнения

а) $z^2=i$, *б*) $z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0$

(т.е. найти алгебраическую форму корней уравнения)

Решение

а) Пусть $z=x+yi$ из равенства $z^2=i$ имеем $x^2+2xyi-y^2=0+1i$, что равносильно системе $\begin{cases}x^2-y^2=0\\2xy=1\end{cases}$. Подставляя $y=\frac{1}{2x}$ в первое уравнение, получим

$x^2-\frac{1}{4x^2}=0$ или $x^2=\frac{1}{2}$, откуда $\begin{cases}x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\y_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$; следовательно,

$z_{1,2}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ •

б) $z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0$

$$z_{1,2}=\frac{2+i\pm\sqrt{4+4i-1-4(-1+7i)}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{7-24i}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{16-9-24i}}{2}=$$

$$\frac{2+i\pm\sqrt{(4-3i)^2}}{2}=\frac{2+i\pm(4-3i)}{2}$$

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=\frac{6-2i}{2}=3-i$$

$$z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$ •

Замечание: $\sqrt{(4-3i)^2}$ имеет тот же смысл, что и в примере 2 *б*).

Вычислить

$(1+i)^{2005}$

Р е ш е н и е

Заметим, что $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, тогда

$$(1+i)^{2005} = (1+i)^{2\cdot 1002}(1+i) = (2i)^{1002}(1+i) = 2^{1002} i^{1002}(1+i) =$$

$$2^{1002} i^{(4k+2)}(1+i) = 2^{1002}(-1)(1+i) = -2^{1002}(1+i) \bullet$$

Здесь использовался тот факт, что $1002 = 4\cdot 500 + 2 = 4k+2$, где k=500, и для всех целых значений k справедливо соотношение

$$i^n = \begin{cases} 1 & при \quad n = 4k \\ i & при \quad n = 4k+1 \\ -1 & при \quad n = 4k+2 \\ -i & при \quad n = 4k+3 \end{cases} .$$