§4. Однородные уравнения

Однородным уравнением называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.1}$$

Подстановкой $y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$ это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z + xz' = f(z).$$

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right). \tag{4.2}$$

▶ $y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$. Уравнение (4.1) примет вид $z + xz' = z(1 + \ln z) \Rightarrow$

$$xz' = z\ln z, \tag{4.3}$$

откуда $\dfrac{dz}{z\ln z} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{z\ln z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C \Rightarrow \int \frac{d(\ln z)}{\ln z} = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln\ln z = \ln Cx \Rightarrow$

$\ln z = Cx \Rightarrow z = e^{Cx} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = e^{Cx} \Rightarrow y = xe^{Cx}$ – общее решение. ◀

Замечание. Дифференциальное уравнение, записанное в форме

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{4.4}$$

может быть приведено к виду (4.1), если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения k, т. е. если

$$P(tx, ty) \equiv t^k P(x, y) \quad \text{и} \quad Q(tx, ty) \equiv t^k Q(x, y) \quad \forall t. \tag{4.5}$$

Подстановкой $y = zx \Rightarrow dy = z\,dx + x\,dz$ уравнение (4.4) после сокращения на x^k сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения

$$(x + y)\,dx - (y - x)\,dy = 0.$$

▶ Уравнение однородное, так как функции $P = x + y$ и $Q = x - y$ – однородные функции первого измерения. Положим $y = zx \Rightarrow dy = z\,dx + x\,dz$. Подставляя в уравнение, получим

$$x(1 + z)\,dx - x(z - 1)(z\,dx + x\,dz) = 0 \Rightarrow (1 + 2z - z^2)\,dx - (z - 1)x\,dz = 0,$$

$$\frac{(z - 1)\,dz}{1 + 2z - z^2} = \frac{dx}{x},$$

откуда

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 + 2z - z^2\right| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln C \Rightarrow x^2(1 + 2z - z^2) = C \Rightarrow x^2\left(1 + 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) = C,$$

откуда получим следующий вид общего интеграла исходного уравнения:

$$x^2 + 2xy - y^2 = C. \blacktriangleleft$$