§5. Производная по направлению. Градиент.

П1. **Производная по направлению.** Пусть функция $u(M)$ определена в некоторой окрестности точки *M*.. Из точки M_0 проведем луч, направление которого определяется вектором ***s***. На луче возьмем точку $M \neq M_0$ и составим отношение $\dfrac{u(M)-u(M_0)}{|M_0M|}$, которое можно рассматривать как среднюю скорость изменения функции на отрезке M_0M. Устремим точку *M* вдоль луча к точке M_0 ($M \to M_0$). Если при этом существует конечный $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{u(M)-u(M_0)}{|M_0M|}$, то он называется производной функции $u(M)$ по направлению ***s*** в точке M_0 и обозначается

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{|M_0M|}. \qquad (1)$$

Эту производную можно трактовать как скорость изменения функции в точке M_0 в направлении вектора ***s***. Если $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}>0$, то в достаточно малой окрестности точки M_0 функция возрастает в направлении вектора ***s***. Вычисление производной $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ в прямоугольной декартовой системе координат основано на **теореме**:

Если функция $u(x,y,z)$ имеет в области *D* непрерывные производные первого порядка, по всем переменным, то в любой точке $M \in D$ и для любого направления ***s*** справедлива формула

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s}=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора ***s***, т.е. $\boldsymbol{s}^0=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma$ – орт вектора ***s***.

▶ Пусть $u(M_0)=u(x,y,z)$, $u(M)=u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ и $\overrightarrow{M_0M}=\Delta\boldsymbol{s}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$. Тогда из определения (1) следует

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}=\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta u}{|\Delta \boldsymbol{s}|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}, \qquad (3)$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ и $\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-u(x,y,z)$ – полное приращение функции $u(M)$. Как известно, полное приращение Δu функции u можно представить в виде

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\gamma\rho, \qquad (4)$$

где $\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$. Так как $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{s}$, по направлению которого вычисляется производная (1), то из (3) и (4) следует

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}} = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s} + \gamma\rho\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ . \blacktriangleleft \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что производная по направлению является линейной комбинацией частных производных. Причем направляющие косинусы являются как бы весовыми множителями, показывающим вклад в производную по направлению соответствующей частной производной.

П2. **Градиент. Определение**. *Градиентом* функции $u(M)$ в точке M_0 называется вектор, в направлении которого производная $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ принимает наибольшее значение, и длина которого равна $\max\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}$.

Обозначается этот вектор: $\operatorname{grad} u(M_0)$. В любой точке *M* скалярного поля $u(M) = u(x,y,z)$ (которое с самого начала предполагалось непрерывно дифференцируемым в области *D*) $\operatorname{grad} u(M)$ существует и может быть вычислен в декартовой прямоугольной системе координат по формуле

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (6)$$

Отметим основные соотношения, связанные с градиентом скалярного поля.

1. $\frac{\partial u}{\partial s} = \text{пр}_s \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{s}^0 = |\operatorname{grad} u|\cdot\cos\varphi$, где $\boldsymbol{s}^0$ – орт вектора **s**, φ – угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и **s**.

2. В любой точке M_0 скалярного поля $u(M)$ $\operatorname{grad} u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля, проходящей через точку M_0, т.е. к поверхности $u(M) = u(M_0)$, в сторону возрастания поля.

3. $\operatorname{grad} C = \boldsymbol{0}$, C – постоянное поле.

4. $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$.

5. $\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v$.

6. $\operatorname{grad}\frac{u}{v} = \frac{v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v}{v^2}$, $v \neq 0$.

7. Градиент сложной функции: $\operatorname{grad} u(v) = u'(v)\operatorname{grad} v$.

Пример. Найти производную функции $u = x^2y^2 + z^2$ в точке *A*(5,1,2) в направлении к точке *B*(9,4,14).

▶ $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AB} = (4, 3, 12)$, $\boldsymbol{s}^0 = \dfrac{\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|} = \dfrac{(4, 3, 12)}{13}$, $\operatorname{grad} u = \left(2xy^2, 2x^2y, 2z\right)$, $\operatorname{grad} u(A) = (10, 50, 4)$;

$$\frac{\partial u(A)}{\partial s} = \operatorname{grad} u(A) \cdot \boldsymbol{s}^0 = \frac{40 + 150 + 36}{13} = \frac{226}{13}.$$ ◀