§6. Понятие об уравнении поверхности. Алгебраические поверхности. Теорема об инвариантности порядка

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ и задана некоторая поверхность (S), понимаемая как множество точек пространства, обладающих общим геометрическим свойством.

Определение 6.1. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y, z называется *уравнением данной поверхности* (S), если ему удовлетворяют координаты x, y, z любой точки (S) и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

Под функцией $F(x, y, z)$ в аналитической геометрии понимаются в основном многочлены.

Равенство $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ является уравнением сферы с центром в точке $A(a, b, c)$ и ра-диусом r (рис. 6.1), так как ему удовлетворяют координаты любой точки этой сферы и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

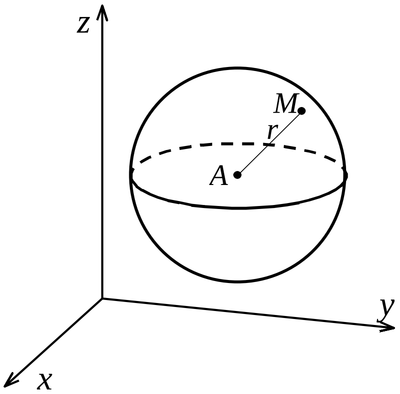

Рис. 6.1. Сфера с центром в точке A и радиусом r

Замечание 6.1. Уравнение вида $F(x, y, z) = 0$ не всегда задаёт поверхность. Так, уравнению $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ удовлетворяют координаты единственной точки $A(a,b,c)$, а уравнению $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = -1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Две основные задачи аналитической геометрии в пространстве

1. По описанию общего геометрического свойства точек поверхности (S) получить её уравнение в данной системе координат и с его помощью изучить такие её свойства, как форма, расположение в пространстве и т. д.

2. Данному уравнению сопоставить поверхность (S) и с его помощью изучить её свойства.

Для вышерассмотренной сферы решена первая из этих задач, а для уравнений $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ и $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = -1$ – вторая.

Определение 6.2. Поверхность (S) называется *алгебраической поверхностью n-го порядка*, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ она может быть задана уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0,$$

где все показатели степени – неотрицательные целые числа, а n – степень этого уравнения, равная наибольшей из сумм $k_i + l_i + m_i$, $i = 1, \ldots, s$, при этом отличен от нуля хотя бы один коэффициент A_i, для которого $k_i + l_i + m_i = n$.

(Для алгебраической поверхности, также как и для алгебраической плоской линии, справедлива теорема об инвариантности порядка.)

Теорема 6.1. Порядок алгебраической поверхности инвариантен по отношению к выбору прямоугольной декартовой системы координат.

Доказательство теоремы 6.1 аналогично доказательству теоремы 1.1 при наличии формул преобразования прямоугольных координат в пространстве, которые могут быть получены так же, как в плоском случае.

Замечание 6.2. Все поверхности, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.