§3. Интегральный признак сходимости Коши

Для исследования сходимости положительного ряда с монотонно убывающими членами часто оказывается полезным так называемый интегральный признак Коши.

Теорема 3.1 (интегральный признак Коши). ***Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна, неотрицательна и убывающая при $x \geq 1$, причём $f(n) = a_n$ при любых $n \in \mathbf{N}$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.***

Замечание 3.1. Начальным значением номера n вместо 1 может быть и любое другое натуральное число n_0. Тогда и функцию $f(x)$ следует рассматривать при $x \geq n_0$.

▶ Построим график функции $y = f(x)$ $x \geq 1$ (рис. 3.1). При этом значения функции $f(x)$ при $x = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ есть значения соответствующих членов ряда (3.1).

Рассмотрим площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью x, справа и слева прямыми $x = 1$, $x = n+1$. Эта площадь $S = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$.

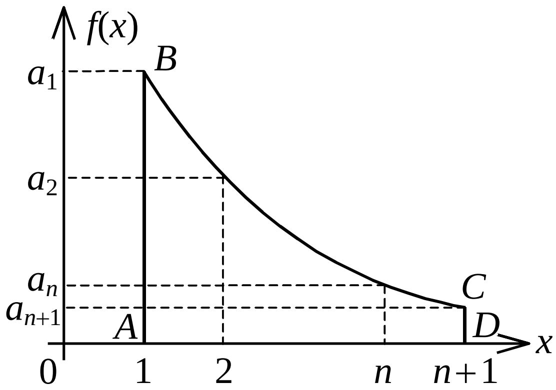

Рис. 3.1.

Рассмотрим одновременно площадь ступенчатых фигур, изображенных на рисунках 3.2 и 3.3.

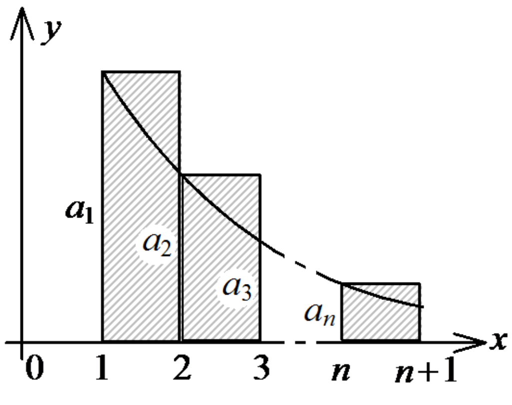

Рис. 3.2.

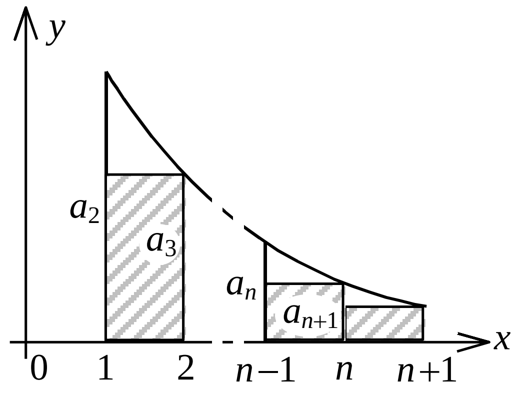

Рис. 3.3.

Площадь ступенчатой фигуры на рис. 3.2 равна $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = s_n$, а на рис. 3.3 – $a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \ldots + a_{n+1} \cdot 1 = s_{n+1} - a_1$, где s_n и s_{n+1} – частичные суммы ряда (3.1). При этом, что очевидно из рисунка,

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx, \tag{3.2}$$

$$s_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Предположим, что $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. имеет конечное значение. Но тогда $\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ в силу положительности и монотонности функции $f(x)$ и, следовательно, неравенство (3.3) можно записать в виде:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx > \int_1^{n+1} f(x)\,dx > s_{n+1} - a_1,$$

или

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx + a_1 > s_{n+1} > s_n. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что последовательность частичных сумм s_n ряда (3.1) ограничена и, следовательно, по теореме 1.1 ряд (3.1) сходится.

Пусть теперь $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$ (расходится). Но тогда в силу неравенства (3.2) следует, что частичная сумма ряда (3.1) неограниченно возрастает, т. е. ряд (3.1) расходится. ◀

Замечание 3.2. доказательство второй части теоремы опущено в силу того, что в теории рядов эта часть не применяется.

Рассмотрим примеры применения интегрального признака Коши.

Пример 3.1. С помощью этого признака легко устанавливается, что обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}. \tag{3.4}$$

сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \le 1$ (см. выпуск 4).

Замечание 3.3. Обобщенный гармонический ряд является наиболее часто применяемым «эталонным рядом» в признаках сравнения.

Пример 3.2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \tag{3.5}$$

▶ Производящей для ряда (3.5) будет функция

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x},\quad x\in[2;+\infty).$$

Имеем

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_{x=2}^{x=A}=\lim_{A\to+\infty}\ln(\ln A)-\ln(\ln 2)=+\infty,$$

поэтому $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ расходится, а, следовательно, и ряд (3.5) тоже расходится. ◀

***Замечание 3.4* об оценке суммы остатка сходящегося ряда.** С помощью интегрального признака Коши легко получается неравенство

$$R_n\le\int_n^{+\infty}f(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Это есть оценка сверху суммы остатка сходящегося ряда (3.1). Например, для обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$ при $\lambda>1$ оценка принимает вид:

$$R_n\le\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\int_n^{+\infty}x^{-\lambda}dx=\frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}\Big|_{x=n}^{x=+\infty}=\frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{n^{\lambda-1}}.$$