

Вопросы и задачи для самоконтроля к §§3, 4 гл. 4, раздел 7

1. Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов по промежутку $[a; +\infty)$.

2. С помощью признака сравнения установите:

2.1. сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ и

2.2. расходимость интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

3. Сформулируйте предельный признак сравнения для несобственных интегралов по промежутку $[a, +\infty)$.

4. Укажите, при каких значениях p интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится, а при каких значениях – расходится.

5. С помощью предельного признака сравнения исследуйте сходимость интегралов

5.1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3+1}}$; 5.2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$.

6. Сформулируйте определения абсолютной и неабсолютной сходимости несобственного интеграла.

7. Покажите, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ сходится абсолютно.

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§3, 4 гл. 2, раздел 8

2.1 $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ в промежутке $[1; +\infty)$. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = 1$, поэтому данный интеграл сходится.

2.2. $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x}$ в промежутке $[2, +\infty)$. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$, поэтому данный интеграл расходится.

5.1. Расходится, так как $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3+1}} \sim \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1}{x^{3/5}}$ при $x \rightarrow +\infty$; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/5}}$ расходится ($p = \frac{3}{5} < 1$).

5.2. Сходится, так как $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+1}} \sim \frac{1}{x^{5/3}}$ при $x \rightarrow +\infty$; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$ сходится ($p = \frac{5}{3}$).

7. Сравните интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ со сходящимся интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.