§7. Полярная система координат

Прямоугольная декартова система координат не является единственным способом установления взаимно однозначного соответствия между точками плоскости и упорядоченными парами вещественных чисел. Во многих задачах более удобна так называемая полярная система координат.

При введении полярной системы координат на плоскости выбирают некоторую точку O, называемую *полюсом*, и исходящий из нее луч OP с выбранным на нём масштабом, называемый *полярной осью*. *Полярными координатами* точки M называются *полярный радиус* $r = |OM|$ и *полярный угол* φ, определяемый как угол поворота полярной оси до совмещения с лучом OM (рис. 7.1). Очевидно, для любой точки плоскости $r \geq 0$. Полярный угол φ обычно измеряется в радианах и считается положительным, если поворот осуществлён в направлении против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном случае. Таким образом, определение полярного угла совпадает с определением угла в тригонометрии. Очевидно, что любая пара вещественных чисел (r,φ) при условии $r \geq 0$ определяет на плоскости единственную точку. Обратное утверждение неверно. Так, две различные пары $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(2, \frac{9\pi}{4}\right)$ определяют на плоскости одну и ту же точку. Однако, если условиться брать полярный угол φ в границах $-\pi < \varphi \leq \pi$ или $0 \leq \varphi < 2\pi$ (так называемое *главное значение* полярного угла), то тогда между точками плоскости (кроме полюса) и упорядоченными парами вещественных чисел (r,φ) устанавливается взаимно однозначное соответствие (при условии $r > 0$). В полюсе $r = 0$, а φ – любое.

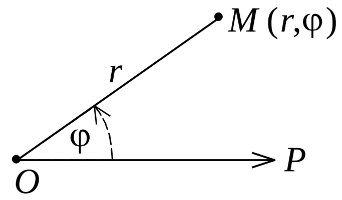

Рис. 7.1. Полярная система координат

Пример 7.1. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось – сторону, через неё проходящую (рис. 7.2), найти полярные координаты остальных пяти вершин.

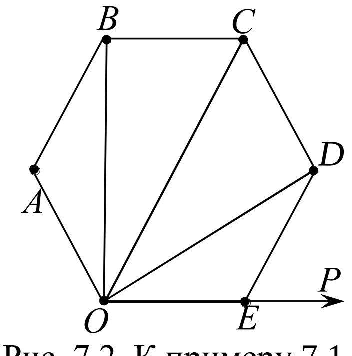

Рис. 7.2. К примеру 7.1

►r_E = OE = a, φ_E = 0, $E(a,0)$. Внутренние углы правильного шестиугольника равны $2\pi/3$, поэтому в рав нобедренном ΔODE (рис. 7.2) $\widehat{OED} = 2\pi/3$, а $\widehat{DOE} = =\pi/6$. Итак, $\varphi_D = \pi/6$, а $r_D = OD$ найдём по теореме косинусов: $OD^2 = 2OE^2 - 2OE^2\cos(2\pi/3) = 2a^2 - 2a^2(-1/2) = 3a^2$, отсюда имеем: $OD = a\sqrt{3}$, $D(a\sqrt{3}, \pi/6)$.

$r_C = OC = 2a$, $\varphi_C = \pi/3$, $C(2a, \pi/3)$;

$r_B = OB = OD = a\sqrt{3}$, $\varphi_B = \pi/2$, $B(a\sqrt{3}, \pi/2)$;

$r_A = OA = a$, $\varphi_A = 2\pi/3$, $A(a, 2\pi/3)$.◄

Для установления связи между полярными и прямоугольными координатами одной и той же точки плоскости введём прямоугольную систему координат специальным образом. А именно, поместим её начало в полюс O, а ось Ox направим вдоль полярной оси OP (рис. 7.3). Определения тригонометрических функций синус и косинус приводят к следующим соотношениям:

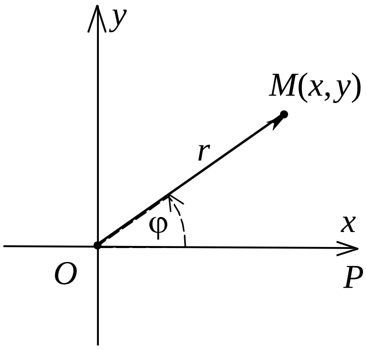

Рис. 7.3. К установлению связи между прямоугольными и полярными координатами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (7.1)$$

По формулам (7.1), выражающим прямоугольные координаты (x, y) точки M через её полярные координаты (r, φ), можно осуществить переход от полярных к прямоугольным координатам.

Пример 7.2. Точки M_1 и M_2 заданы полярными координатами: $M_1(2, \pi/3)$, $M_2\left(\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$. Найти их прямоугольные координаты.

►Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 – прямоугольные координаты данных точек M_1 и M_2. По формулам (7.1) имеем

$$x_1 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1, \quad y_1 = 2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$x_2 = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1, \quad y_2 = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1;$$

$$M_1\left(1, \sqrt{3}\right),\ M_2(-1, 1).◄$$

Разрешив равенства (7.1) относительно r и φ, получим формулы перехода от прямоугольных координат точки M к её полярным координатам:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (7.2)$$

Угол φ с помощью второго из равенств (7.2) определяют с учётом четверти, в которой находится данная точка или выбирают его значение так, чтобы $\sin\varphi$ имел тот же знак, что и ордината y.

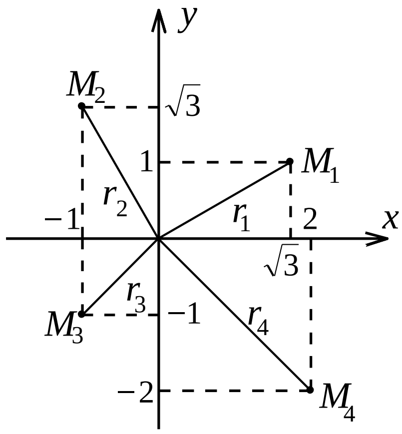

Рис. 7.4. К примеру 7.3

Пример 7.3. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 заданы их прямоугольными координатами: $M_1\left(\sqrt{3}, 1\right)$, $M_2\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4(2, -2)$ (рис.7.4). Найти их полярные координаты.

►Пусть r_i, φ_i – полярные координаты точки M_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Для r_i и φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, из равенства (7.2) имеем:

$$r_1 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = \pi/6;$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \ \operatorname{tg}\varphi_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2 = 2\pi/3;$$

$$r_3 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \ \operatorname{tg}\varphi_3 = 1 \Rightarrow \varphi_3 = 5\pi/4;$$

$$r_4 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \ \operatorname{tg}\varphi_4 = -1 \Rightarrow \varphi_4 = 7\pi/4,$$

при этом значения полярных углов данных точек выбраны с учётом четверти, в которых они находятся. Таким образом, $M_1(2, \pi/6)$, $M_2(2, 2\pi/3)$, $M_3\left(\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$, $M_4\left(2\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$.◄