Резюме

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, записанные в алгебраической форме. Тогда

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

если $z_2 \neq 0$, то $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Если $z = x + iy$ – комплексное число, записанное в алгебраической форме, то число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют модулем комплексного числа z.

Пусть $z = x + iy$, $z \neq 0$. Число φ, такое, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

называют аргументом комплексного числа z и обозначают через $\arg z$. Справедливо представление $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Это представление называют тригонометрической формой комплексного числа.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; при всяком $n \in \mathbf{Z}$ справедлива формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Пусть $a = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, а n – натуральное число, $n \geq 2$. При $k = 0, 1, \ldots, n-1$ числа z_k,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right)$$

составляют совокупность корней степени n из числа a.

$\lim z_k = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такое, что при $k > k_\varepsilon$ справедливо $|z_k - a| < \varepsilon$.

Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $a = x_0 + iy_0$. Тогда $a = \lim z_k$ в том и только в том случае, когда $x_0 = \lim x_k$, $y_0 = \lim y_k$.

Пусть $z = x + iy$; тогда $\lim\left(1+\frac{z}{k}\right)^k = \exp z$, где $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Дайте определение множества **C** комплексных чисел. Какие геометрические интерпретации этого множества вам известны?

2. Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -4 + i3$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$, $\frac{z_1}{z_2}$.

3. Что называют модулем комплексного числа $z = x + iy$?

4. Что называют аргументом комплексного числа $z = x + iy$, $z \neq 0$? Что такое тригонометрическая форма этого числа?

5. Числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{1-i}{1+i}$, $z_3 = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ записать в тригонометрической форме.

6. Вычислить (т. е. записать в алгебраической форме) числа $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$, $z_2 = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ (использовать формулу Муавра).

7. Найти все значения следующих выражений: а) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

8. Числа z_1, z_2 и z_3 из п. 5 записать в показательной форме.

9. $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$. Записать в алгебраической форме числа $z_1 \cdot \bar{z}_2$; $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$.

10. Найти $z_1 = \lim\left(\frac{\sin n}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n i\right)$, $z_2 = \lim\frac{(n+2i)(3+7ni)}{(2-i)n^2+1}$.

Ответы на контрольные вопросы

2. $z_1 + z_2 = -3 + i4$; $z_1 - z_1 = 5 - i2$; $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = -7 + i26$; $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{25} - i\frac{7}{25}$.

5. $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, $z_3 = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$.

6. $z_1 = 512 - 512\sqrt{3}i$; $z_2 = 2$.

7. а) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

8. $z_1 = 2e^{-\frac{5\pi}{3}}$; $z_2 = e^{-\frac{3\pi}{2}}$; $z_3 = 2\cos\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{14}}$.

9. $z_1\bar{z}_2 = -4i$; $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

10. $z_1 = 1 + ie$; $z_2 = -\frac{7}{5} + \frac{14}{5}i$.