Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В.Г. ПАК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

ЛЕКЦИЯ №8

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Содержание

Тема 6. Основы теории графов

Содержание (окончание)

Тема 6. Графы

§1. Основы теории графов

1.1. Граф. Компоненты и виды графов

Определение. *Графом* называется пара $\mathrm{G} = \langle V, E \rangle$, где V - не более чем счётное множество, E – множество неупорядоченных пар элементов V, т.е. двухэлементных подмножеств V. Множество V называется *множеством вершин* (*узлов*), его элементы – *вершинами* (*узлами*). Множество E называется *множеством рёбер*, его элементы называются *рёбрами*. Число $n = |V|$ называется *порядком графа*.

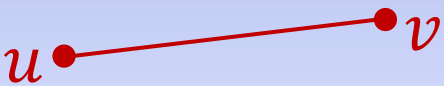
Определение. Граф $\mathrm{G} = \langle V, E \rangle$ называется *ориентированным* (*орграфом*), если элементы E – упорядоченные пары вершин, т.е. $E \subset V^2$ - бинарное отношение на V. Рёбра орграфа называются *дугами*.

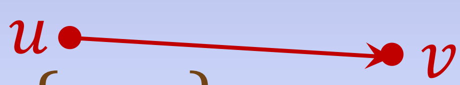
$$x = \{u, v\}$$

Вершины u, v *смежны.* Ребро x *инцидентно* вершинам u, v. Вершины u, v – концевые вершины ребра x. Ребро x *соединяет* вершины u и v.

$$x = \langle u, v \rangle$$

Вершины u, v *смежны.* Дуга x *инцидентна* вершинам u, v. Вершины u, v – концевые вершины дуги x. Вершина u – начальная, v – конечная для дуги x. Дуга x *исходит из* u и *входит в* v и *направлена* от u к v. Дуга x *соединяет* вершины u и v.





$$x = \{u, v\}, y = \{v, w\}$$

Рёбра (дуги) называются *смежными*, если они инцидентны общему узлу.

$$x = \{u, u\}\ (x = \langle u, u \rangle)$$

Петля

$$x = \{u, v\}, y = \{u, v\}$$
$$(x = \langle u, v \rangle, y = \langle u, v \rangle)$$

Кратные рёбра (дуги)

$$x = \langle u, v \rangle, y = \langle v, u \rangle$$

Противоположные дуги

Определение. Граф называется *пустым*, если $V = \emptyset$, $E = \emptyset$ (обозначается Λ). Граф называется *полным,* если его любые два несовпадающих узла смежны. Полный граф порядка n обозначается K_n.

Определение. Граф (орграф), содержащий петли, называется *псевдографом (псевдоорграфом)*, кратные рёбра (дуги) – *мультиграфом (мультиорграфом)*.

Определение. Граф (орграф) называется *бесконечным*, если хотя бы одно из множеств вершин или рёбер (дуг) бесконечно. В противном случае граф (орграф) называется *конечным*.

Определение. Конечный граф (орграф) без петель и кратных рёбер (дуг) называется *простым*.

1.2. Степень вершины графа

Определение. *Звездой узла* v называется множество инцидентных v рёбер (дуг). Обозначается $\delta(v)$.

Определение. *Степенью узла* v называется число $deg(v) = |\delta(v)|$, т.е. количество инцидентных v рёбер (дуг).

Определение. *Полустепенью захода* $\delta_+(v)$ *узла* v орграфа называется число дуг, для которых вершина v является конечной (входящих в v дуг), *полустепенью исхода* $\delta_-(v)$ - число дуг, для которых вершина v является начальной (исходящих из v дуг).

Очевидно: $\delta_+(v) + \delta_-(v) = deg(v)$.

Лемма 1.1.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

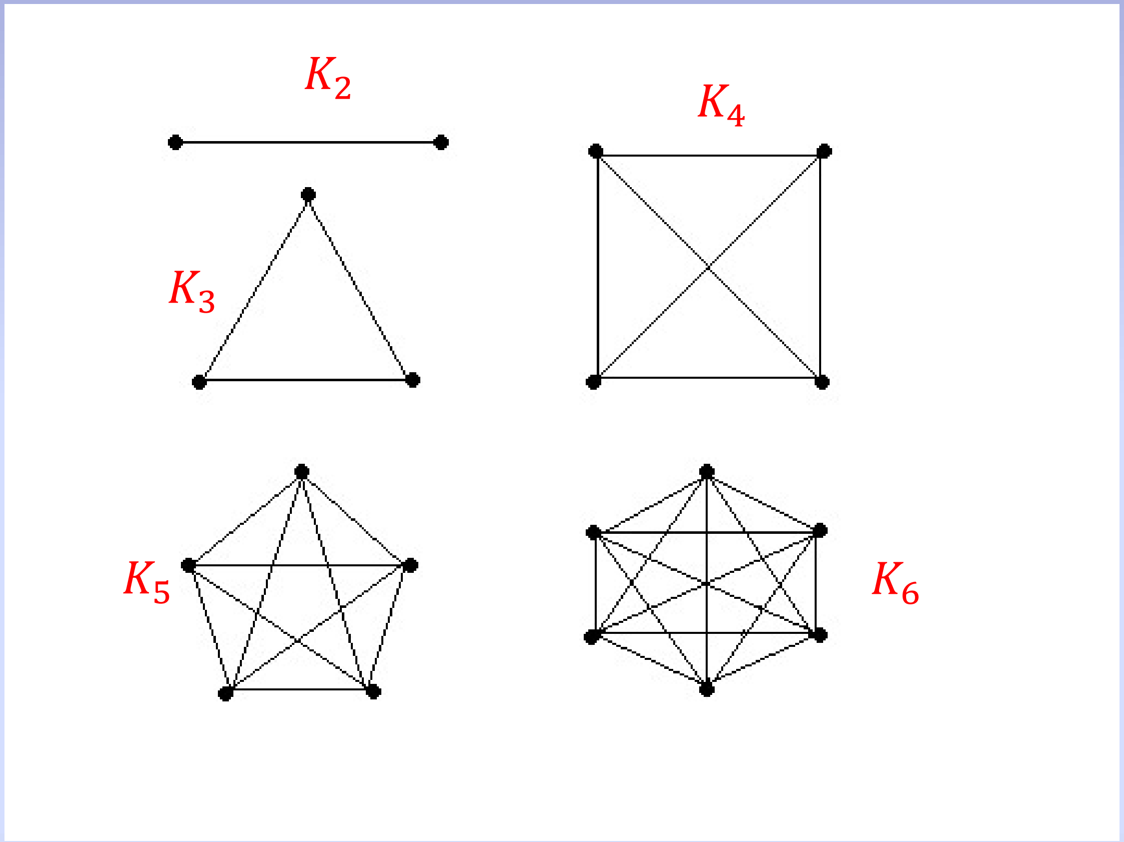
Следствие. Число вершин нечётной степени в любом графе чётно.

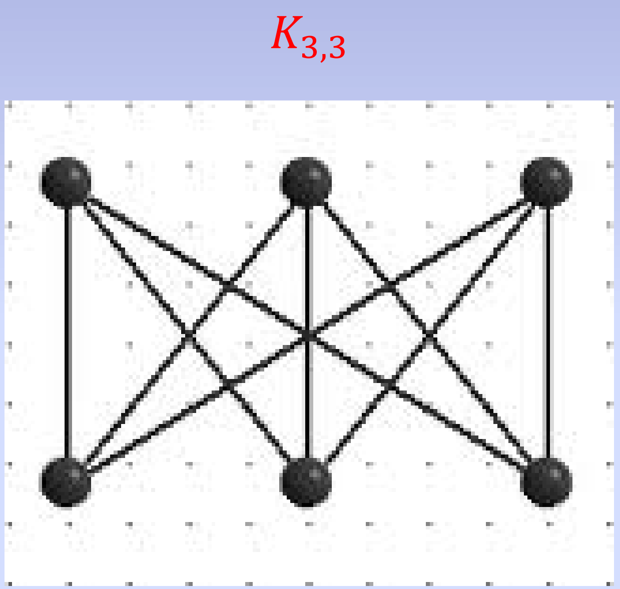
Определение. Узел v называется *концевым узлом графа* (*орграфа*), если $deg(v) = 1$, *изолированным*, если $deg(v) = 0$.

1.2. Степень вершины графа

Определение. Граф называется *регулярным* (*равномерным*) *степени* d, если степени всех его вершин равны d.

Полный граф порядка n является регулярным степени $n - 1$.





Граф Куратовского, $d = 3$

1.3. Способы задания графа

1. Теоретико-множественные:
   a) по определению, т.е. перечислением множеств V, E;
   b) списки инцидентности.

v_1: $x_1, x_2, \ldots$ Списки инцидентных рёбер
v_2: $y_1, y_2, \ldots$ (исходящих и входящих дуг)

$\ldots$

2. Графический: *диаграмма.*
3. Матричные:
   a) матрица смежности вершин $\Omega(G)$. Для графа:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i, v_j \text{ смежны}, \\ 0, \text{если } v_i, v_j \text{ несмежны}. \end{cases}$$

Если есть кратные рёбра, то Ω_{ij} равно их числу.

Свойства матрицы смежности вершин графа:

1. Симметричность.
2. Если нет петель, то на главной диагонали – нули, в противном случае – ненулевые числа.
3. Если нет кратных рёбер, то матрица бинарная, в противном случае – есть числа, большие единицы.
4. Сумма элементов строки (столбца) равна степени соответствующей вершины, таким образом, изолированной вершине соответствует нулевой столбец (строка), концевой - единичный столбец (строка).
5. Для полного графа K_n

$$\Omega(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Способы задания графа

Для орграфа:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если есть дуга } \langle v_i, v_j \rangle, \\ 0, \text{если такой дуги нет.} \end{cases}$$

Если есть кратные дуги, то Ω_{ij} равно их числу.

Свойства матрицы смежности вершин графа:

1. Несимметричность в общем случае.
2. Если нет петель, то на главной диагонали – нули, в противном случае – ненулевые числа.
3. Если нет кратных дуг, то матрица бинарная, в противном случае – есть числа, большие единицы.
4. Противоположным дугам соответствуют одинаковые числа в симметричных относительно главной диагонали ячейках.
5. Сумма элементов строки равна полустепени исхода соответствующей вершины, столбца – полустепени захода, следовательно, сумма элементов i-й строки и i-го столбца равна $deg(v_i)$.
6. Для изолированной вершины v_i сумма элементов i-й строки и i-го столбца равна 0, для концевой – 1.

1.3. Способы задания графа

b) *матрица инцидентности* $\varepsilon(G)$. Для графа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если узел } v_i \text{ инцидентен ребру } x_j, \\ 0, \text{если } v_i \text{ не инцидентен } x_j. \end{cases}$$

Свойства матрицы инцидентности графа:

1. Матрица бинарная, при отсутствии петель в каждом столбце ровно по 2 единицы, при наличии петель им соответствуют единичные столбцы, нулевых столбцов нет.
2. Кратным рёбрам соответствуют одинаковые столбцы.
3. Сумма элементов строки равна степени соответствующей вершины, значит, изолированной вершине соответствует нулевая строка, концевой – единичная строка.
4. Для полного графа K_n матрица имеет n строк и C_n^2 столбцов, в каждой строке ровно $n-1$ единиц.

1.3. Способы задания графа

Для орграфа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \ - \text{конечный узел дуги } x_j, \\ -1, \text{если } v_i \ - \text{начальный узел } \ x_j, \\ 0, \text{если } v_i \text{ и } x_j \text{ неинцидентны.} \end{cases}$$

Для петель применяют какой-либо особый символ, например, ± 1.

Свойства матрицы инцидентности орграфа:

1. При отсутствии петель в матрице есть только 1, -1 и 0, в каждом столбце одна 1, одна -1, остальные нули, нулевых столбцов нет; петле соответствует столбец с одним особым символом, остальные – нули.
2. Кратным дугам соответствуют одинаковые столбцы, противоположным – столбцы, сумма которых равна нулевому.
3. В каждой строке сумма 1 равна полустепени захода соответствующей вершины, сумма -1 - полустепени исхода; таким образом, сумма абсолютных величин чисел в строке равна степени соответствующей вершины.

1.4. Маршруты, пути, цепи, циклы

Определение. *Маршрутом*, соединяющим вершины v_0, v_n ((v_0, v_n)-*маршрутом*), в графе (орграфе) называется последовательность вершин и рёбер (дуг) вида $v_0 x_1 v_1 x_2 \dots x_n v_n$, где $v_i \in V$, $x_i \in E$, x_i инцидентно v_{i-1}, v_i, $i = 1, \dots, n$. Узел v_0 называется *начальным*, v_n - *конечным* узлом, число n – *длиной* маршрута. Если $v_0 = v_n$, маршрут называется *замкнутым*, иначе – *открытым.*

Определение. Маршрут называется *простым*, если все рёбра (дуги) в нём различны. Простой маршрут с различными узлами называется *цепью*.

Теорема 1.1. Если в графе существует открытый (u, v)-маршрут, то из его рёбер можно составить (u, v)**-**цепь.

Следствие. Существование (u, v)-маршрута эквивалентно существованию (u, v)**-**цепи, поэтому без потери общности можно говорить о цепях.

Определение. Замкнутый простой маршрут с различными вершинами называется *циклом.*

Теорема 1.2. Если в графе существует замкнутый простой маршрут, то из его рёбер можно составить цикл.

Замечание. Условие простоты маршрута существенно.

Определение. Маршрут в орграфе, в котором $x_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, называется *путём*.

Определение. Замкнутый простой путь с различными вершинами называется *контуром*.

Теорема 1.3. Если в орграфе существует открытый (u, v)-путь, то из его дуг можно составить (u, v)-путь, являющийся цепью.

Теорема 1.4. Если в орграфе существует замкнутый простой путь, то из его дуг можно составить контур.

1.5. Связность

1.5.1. Компоненты связности

Определение. Граф называется *связным*, если между любыми его несовпадающими узлами существует цепь.

Определение. *Подграфом* G' графа $G = \langle V, E \rangle$ называется граф $G' = \langle V', E' \rangle$, у которого $V' \subset V$, $E' \subset E$ ($G' \subset G$). Подграфы Λ и G называется *несобственными подграфами* графа G, остальные подграфы – *собственными.*

Определение. Пусть $V' \subset V$, $V' \neq \emptyset$, $E(V')$ **-** множество всех рёбер $\{u, v\} \in E$, таких, что $u \in V'$, $v \in V'$. Подграф $G' = \langle V', E(V') \rangle \subset G$ называется *подграфом графа* G, *порождённым множеством вершин* V'.

Определим на множестве V бинарное отношение $\equiv$: $u \equiv v \iff u = v$ или существует (u, v)**-**цепь. Очевидно, что $\equiv$ - эквивалентность.

Определение. Пусть $V_1, \dots, V_d$ - классы эквивалентности V по эквивалентности $\equiv$. Подграфы $G_1 = \langle V_1, E(V_1) \rangle, \dots, G_d = \langle V_d, E(V_d) \rangle$ называются *компонентами связности графа* G, число d- *степенью связности*.

1.5.2. Мосты

Обозначение: $x \in E$, $G \backslash x = \langle V, E \backslash x \rangle$.

Теорема 1.5. В связном графе G ребро x принадлежит некоторому циклу тогда и только тогда, когда граф $G \backslash x$ также является связным.

Определение. Ребро x называется *мостом* (*перешейком*, *разделяющим ребром*), если его удаление ведёт к увеличению степени связности графа.

Теорема 1.6. Ребро является мостом тогда и только тогда, когда в графе нет содержащих его циклов.

1.5.3. Блоки

Определение. Узел $v \in V$ называется *точкой сочленения*, если его удаление вместе с рёбрами его звезды увеличивает степень связности графа.

Определение. Связный граф без точек сочленения называется *блоком.*

Теорема 1.7. В любом связном графе с не менее чем двумя вершинами найдутся по крайней мере две вершины, не являющиеся точками сочленения.

Определение. *Блоком связного графа* называется его максимальный (в смысле включения) нетривиальный (порядок не менее двух) связный подграф, являющийся блоком.

§2. Метрические характеристики графа

Определение. *Расстоянием между вершинами* u и v называется длина кратчайшей (u, v)-цепи ($d(u, v)$). Если в графе нет цепи, соединяющей u и v, то есть эти вершины принадлежат разным компонентам связности, то расстояние между ними считается бесконечным ($d(u, v) = \infty$).

Очевидно, что $d(u, v)$ удовлетворяет всем аксиомам расстояния:

1. $d(u, v) \geq 0$, $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Определение. *Эксцентриситетом* вершины v называется

$$e(v) = \max_{u \in V} d(v, u).$$

Вершина с наименьшим эксцентриситетом называется *центральной*, а с наибольшим - *периферийной*. Множество всех центральных вершин называется *центром* графа.

§2. Метрические характеристики графа

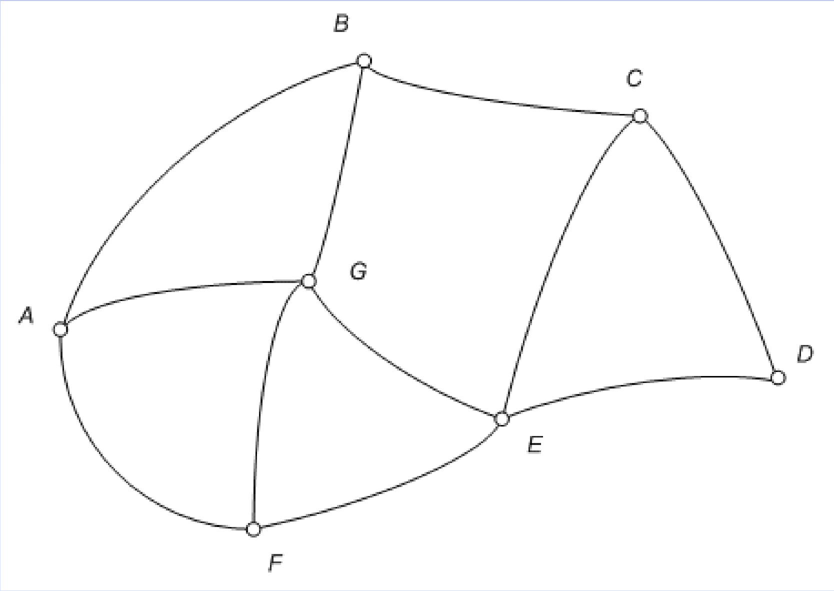
Определение. *Радиусом графа* G называется величина
$$r(G) = \min_{v \in V} e(v) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(v, u).$$
Определение. *Диаметром графа* G называется величина
$$d(G) = \max_{v \in V} e(v) = \max_{v \in V} \max_{u \in V} d(v, u).$$
Определение. Если расстояние между двумя вершинами равно диаметру графа, то кратчайшая цепь, соединяющая эти вершины, называется *диаметральной цепью*.

Задача нахождения центральных вершин графа постоянно возникает на практике. Пусть, например, граф представляет сеть дорог, т.е. вершины его соответствуют отдельным населенным пунктам, а ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины, школы. В подобных ситуациях критерий оптимальности часто заключается в оптимизации «наихудшего» случая, т.е. в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа.

§3. Планарность

Определение. Диаграмма графа (орграфа), в которой изображающие рёбра (дуги) линии не пересекаются нигде, кроме вершин, называется *топологической реализацией графа*.

Определение. Граф (орграф), допускающий топологическую реализацию, называется *планарным*. Его диаграмма называется *плоским графом* (*орграфом*).

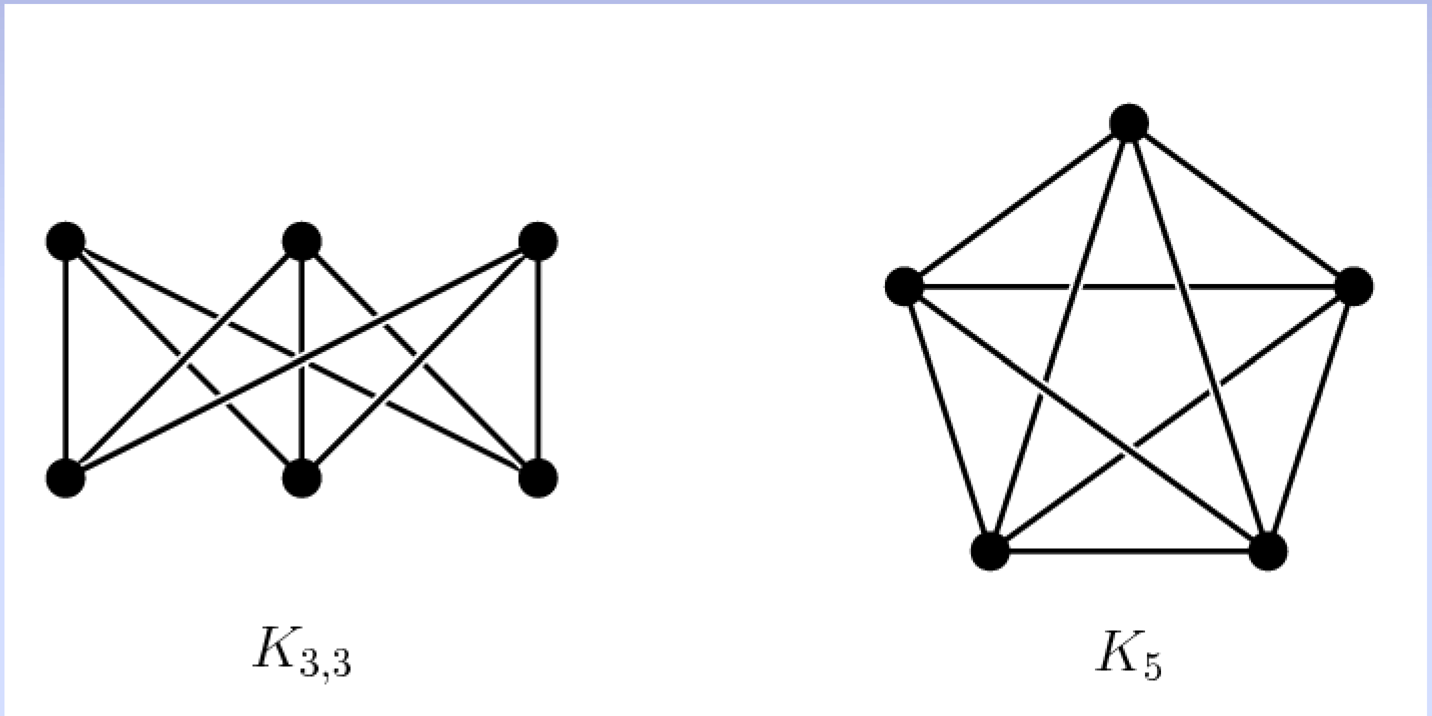


Плоский граф

§3. Планарность

Задача о трёх колодцах. Есть три дома и три колодца. Можно ли так проложить дорожки между домами и колодцами, чтобы от каждого дома к каждому колодцу вела дорожка, и никакие две дорожки не пересекались бы?

Графы, не допускающие топологической реализации



§3. Планарность

Теорема Вагнера. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягивающихся в K_5 или $K_{3,3}$.

Определение. *Изоморфным отображением* одного графа на другой называется пара взаимно однозначных отображений множества вершин и множества рёбер одного графа соответственно на множество вершины и множество рёбра другого графа, при которых сохраняется отношение инцидентности. Два графа называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одного из этих графов на другой. В случае орграфов изоморфное отображение должно также сохранять отношение направленности дуг: если в орграфе дуга x направлена от u к v, то в изоморфном орграфе отображение x направлено от отображения u к отображению v.

Очевидно, что отношение изоморфизма является эквивалентностью.

Определение. *Подразбиением ребра* $\{u, v\}$ графа G называется операция, состоящая в добавлении новой вершины w, удалении ребра $\{u, v\}$ и добавлении двух рёбер $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$. Граф G' называется *подразбиением графа* G, если он может быть получен из G путем применения некоторого числа раз операции подразбиения рёбер.

§3. Планарность

Определение. Графы G_1 и G_2 называются *гомеоморфными*, если существуют такие их подразбиения, которые являются изоморфными.

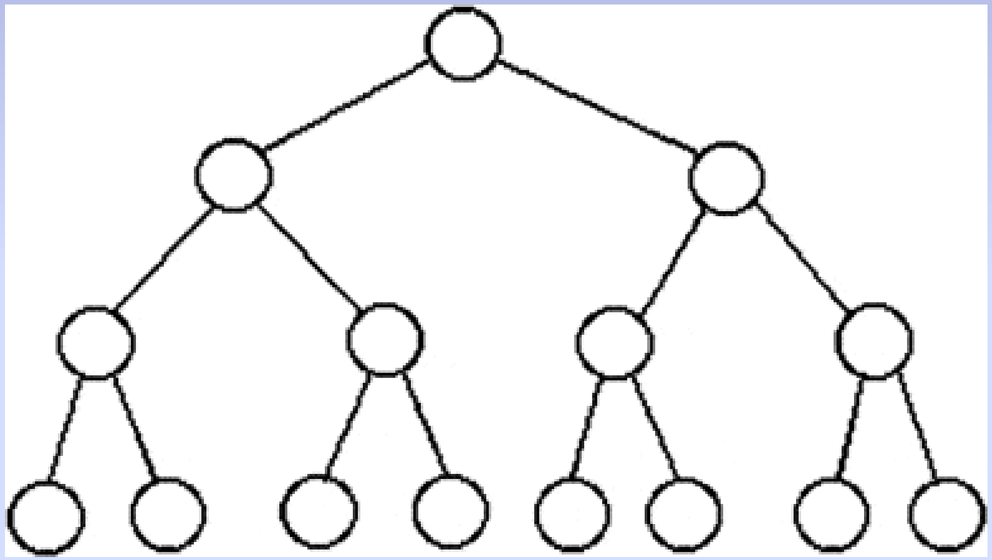
Отношение гомеоморфизма характеризует геометрические свойства диаграмм графов. Очевидно, что оно также есть эквивалентность.

Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

§4. Деревья

4.1. Теоремы о деревьях

Определение. Граф без циклов называется *лесом.* Связный граф без циклов называется *деревом.*



Бинарное дерево

4.1. Теоремы о деревьях

Теорема 4.1. Граф является деревом тогда и только тогда, когда между любыми его двумя несовпадающими вершинами существует одна и только одна цепь.

Теорема 4.2. Дерево, содержащее не менее двух вершин, имеет по крайней мере две концевые вершины.

Лемма 4.1. Если удалить из дерева одну из его концевых вершин вместе с инцидентным ей ребром, то получившийся граф также будет деревом.

Теорема 4.3. Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда $m = n - 1$, где $n = |V|$, $m = |E|$.

Следствие. Для любого связного графа $m - n + 1 \geq 0$.

Определение. *Остовным подграфом* графа называется его подграф, содержащий все его вершины.

Определение. *Остовным поддеревом* (*остовом*, *покрывающим поддеревом, каркасом*, *скелетом*) графа называется его остовный подграф, являющийся деревом.

Теорема 4.4. В любом связном графе существует остовное поддерево.

4.2. Цикломатическое число

Определение. *Цикломатическим числом графа* называется число

$$\mu = m - n + d,$$

где $n = |V|$, $m = |E|$, d – степень связности.

Пусть $G_1, \dots, G_d$ - компоненты связности G, $n_i = |V_i|$, $m_i = |E(V_i)|$, $i = 1, \dots, d$. Обозначим $\mu_i = m_i - n_i + 1$. Очевидно, что

$$\mu = \sum_{i=1}^{d} \mu_i \,.$$

Теорема 4.5.

1. Для любого графа $\mu \geq 0$.
2. Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда $\mu = 0$.
3. Для любого графа $\mu = 1$ тогда и только тогда, когда в нём существует единственный цикл.