§3. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где m и n – произвольные натуральные числа.

Обозначим через A и A^* матрицу и расширенную матрицу системы (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Система (3.1) всегда совместна, так как при любых значениях коэффициентов a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ она имеет так называемое *нулевое* (или *тривиальное*) решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Решение системы (3.1), не совпадающее с тривиальным, называется *ненулевым*. Система (3.1) является частным случаем произвольной системы линейных уравнений (2.1), она получается из этой системы при $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому к ней можно отнести результаты исследований упомянутой системы.

Расширенная матрица однородной системы при помощи конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к виду

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1r}^{(1)} & a_{1,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(1)} & a_{r,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{rn}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

при этом первые n столбцов матрицы A_1^* образуют матрицу A_1, получающуюся из матрицы A при выполнении указанных преобразований. Очевидно, число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* всегда совпадает, поэтому при решении однородной системы реализуется один из следующих двух случаев.

1) Нулевое решение системы (3.1) единственно, если число r ненулевых строк в матрице A_1^* совпадает с числом неизвестных ($r = n$). В этом случае рассматриваемая система является крамеровской или равносильна такой системе. Для квадратной однородной системы условие $r = n$ эквивалентно условию $\Delta \neq 0$, где Δ – главный определитель этой системы.
2) Система (3.1) имеет бесчисленное множество решений, если число ненулевых строк в матрице A_1^* меньше числа неизвестных ($r < n$). В этом случае кроме тривиального она имеет также и ненулевые решения. Общее

решение такой системы получаем из равенств (2.11) при условии $\beta_i = 0, i = 1, 2, \ldots, r$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}C_1 + \ldots + \alpha_{1,n-r}C_{n-r}, \\ x_2 = \alpha_{21}C_1 + \ldots + \alpha_{2,n-r}C_{n-r}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_r = \alpha_{r1}C_1 + \ldots + \alpha_{r,n-r}C_{n-r}, \\ x_{r+1} = C_1 \in \boldsymbol{R}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = C_{n-r} \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Для квадратной однородной системы условие $r < n$ эквивалентно равенству
$\Delta = 0$, где Δ – главный определитель этой системы.

Пример 3.1. Дана система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + \beta x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найти значения параметра β, при которых: а) нулевое решение этой системы единственно; б) данная система имеет ненулевые решения.

►Данная система является квадратной. Вычислим её главный определитель Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & \beta & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & \beta - 6 & 5 \end{vmatrix} = -25 - 5\beta + 30 = 5(1 - \beta).$$

а) Нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ единственно, если $\Delta \neq 0$. Это условие выполняется в случае $\beta \neq 1$.

б) Поскольку система имеет ненулевые решения при $\Delta = 0$, то для параметра β получаем условие $\beta = 1$.

Ответ: а) нулевое решение системы единственно в случае $\beta \neq 1$;
б) система имеет ненулевые решения при $\beta = 1$. ◄