

§6. Ограниченные и неограниченные числовые множества.

Точные грани числовых множеств

Определение 6.1. Непустое множество $X \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если найдётся некоторое число A такое, что для $\forall x \in X$ будет выполняться неравенство $x \leq A$ ($x \geq A$). Число A при этом называется *верхней (нижней) гранью* множества X . Множество X , ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*. Множества, не относящиеся к ограниченному, называют *неограниченными множествами*.

Множество X является ограниченным тогда и только тогда, когда существует число $M > 0$ такое, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|x| \leq M$.

Определение 6.2. Пусть X – ограниченное сверху (снизу) множество. *Точной верхней (нижней) гранью* множества X называется наименьшая из его верхних граней (наибольшая из его нижних граней). Обозначается это число символами $\sup X$ и $\sup_{x \in X} x$ ($\inf X$ и $\inf_{x \in X} x$).

Точные грани множества могут как принадлежать ему, так и не принадлежать. Так, если $X = (0, 2]$, то $\inf X = 0$, а $\sup X = 2$, при этом $\inf X \notin X$, а $\sup X \in X$.