§2. Операция умножения матриц и её свойства

Для прямоугольных матриц A и B произведение определено, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B, т.е. если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Определение 2.1. ***Произведением* матрицы *A* размера $m\times k$ на матрицу *B* размера $k\times n$ называется матрица *C* размера $m\times n$, элемент которой c_{ij}, стоящий в *i*-ой строке и в *j*-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-ой строки матрицы *A* и *j*-ого столбца матрицы *B*:**

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{\mu=1}^{k}a_{i\mu}b_{\mu j}\,.$$

Принято обозначение $C=AB$.

Рассмотрим частный случай произведения матриц. Пусть даны матрица-строка $A_{1\times n}=(a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n)$ и матрица-столбец $B_{n\times 1}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix}$. Матрица $C=AB$ имеет размер 1×1, причём её элемент $c_{11}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, или

$$(a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix}=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right).$$

Пример 2.1. Найти произведение матрицы-строки $A=\left(\sqrt{2}\ \ 0\ \ 1\ \ -3\right)$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$.

►

Правило для вычисления произведения матриц схематично проиллюстрировано на рис.2.1.

Замечание 2.1. При умножении матриц обычно говорят, что элемент c_{ij} матрицы $C=AB$, находящийся в i-ой строке и в j-ом столбце является «произведением i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы

$$AB=\left(\sqrt{2}\quad 0\quad 1\quad -3\right)\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 5\\ 1\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+0\cdot\pi+1\cdot 5+(-3)\cdot 1\right)=\left(4\right).\blacktriangleleft$$

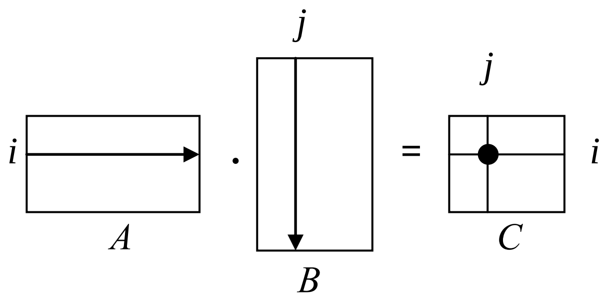

Рис. 2.1. К определению произведения матриц

Пример 2.2. Даны матрицы *A*, *B* из примера 2.1, а также матрицы $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ и $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Установить, для каких матриц определена операция умножения, найти эти произведения.

►Имеем: $A_{1\times 4}, B_{4\times 1}, C_{2\times 2}, D_{2\times 2}, F_{2\times 3}$. Сравнивая размеры данных матриц,

убеждаемся, что определены следующие произведения:

AB, BA, CD, DC, CF, DF. Произведение *AB* было найдено в примере 2.1.

Имеем:

$$BA=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 5\\ 1\end{pmatrix}\left(\sqrt{2}\quad 0\quad 1\quad -3\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} & \sqrt{2}\cdot 0 & \sqrt{2}\cdot 1 & \sqrt{2}\cdot(-3)\\ \pi\cdot\sqrt{2} & \pi\cdot 0 & \pi\cdot 1 & \pi\cdot(-3)\\ 5\cdot\sqrt{2} & 5\cdot 0 & 5\cdot 1 & 5\cdot(-3)\\ 1\cdot\sqrt{2} & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}\\ \pi\sqrt{2} & 0 & \pi & -3\pi\\ 5\sqrt{2} & 0 & 5 & -15\\ \sqrt{2} & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$CD=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 3\\ 3\cdot 1+4\cdot 5 & 3\cdot 2+4\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 23 & 18\end{pmatrix}.$$

$$DC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4\\ 5\cdot 1+3\cdot 3 & 5\cdot 2+3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 14 & 22\end{pmatrix}.$$

$$CF=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot(-1)+2\cdot 0\\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 0+4\cdot 2 & 3\cdot(-1)+4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 15 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

Произведение *DF* найдите самостоятельно.◄

Замечание 2.2. При перестановке матриц результат умножения может получиться различным (пример 2.2, сравните AB и BA, CD и DC). Легко заметить, что хотя произведение CF определено, произведение FC не определено. В общем случае свойство коммутативности при умножении матриц не имеет места.

Определение 2.2. Матрицы A и B, для которых $AB=BA$, называются *коммутирующими*.

Чтобы матрицы были коммутирующими, необходимо, чтобы они были квадратными матрицами одинакового порядка, однако, как показывают приведённые выше примеры, это условие не является достаточным, так матрицы C и D из примера 2.2 не коммутируют.

Пример 2.3. Показать, что матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ коммутируют.

$$\blacktriangleright\ AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot6 & 1\cdot4+2\cdot6\\ 3\cdot0+4\cdot6 & 3\cdot4+4\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 24 & 36\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4\cdot4\\ 6\cdot1+6\cdot3 & 6\cdot2+6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 24 & 36\end{pmatrix},$$

т. е. $AB=BA$, значит, матрицы A и B коммутируют. ◀

Свойства действия умножения матриц

1. $(AB)C=A(BC)$ (ассоциативность умножения).
2. $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$.
3. $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$.
4. $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$.
5. Если матрица A имеет размер $m\times n$, то справедливо равенство $E_mA=AE_n=A$, где E_m,E_n- единичные матрицы m-го и n-го порядка.

Все перечисленные свойства трактуются так, что если одна из частей равенства имеет смысл, то имеет смысл и другая, и они равны. Свойство 2 следует непосредственно из определений 1.3 и 2.1, распределительные свойства 3 и 4 – из определений 1.2 и 2.1, доказательство ассоциативности умножения (свойство 1) см. например, в [3]. Справедливость равенства из свойства 5 проверяется с помощью определения 2.1 и понятия единичной матрицы.

Теорема 2.1. Если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то

$$\det AB = \det A \cdot \det B\,. \tag{2.1}$$

Теорему 2.1 принимаем без доказательства. Для случая n=2 она может быть доказана непосредственным вычислением произведения определителей из правой части равенства (2.1) и сравнения полученного равенства с определителем из левой части этого равенства. Случай произвольного n рассмотрен в [3].