§6. Формула Тейлора

Как известно, для всякой функции f, имеющей в некотором интервале X непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $x,a\in X$ и ξ лежит между a и x. Если в формуле Тейлора заменить x на $x+\Delta x$, а a на x, то она примет вид

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},$$

откуда

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=d f(x)+\frac{d^2 f(x)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(x)}{n!}+\frac{d^{n+1} f(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1).$$

Обобщим теперь формулу Тейлора на случай функции двух и большего числа переменных. Пусть функция $w=f(x,y)$ имеет в некоторой области D непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно и $(a,b)\in D$. Положим, что точка $(a+\Delta x,b+\Delta y)\in D$. Фиксируем значения Δx и Δy и рассмотрим вспомогательную сложную функцию одной переменной t

$$\Phi(t)=f(x,y),$$

где $x=a+t\Delta x$ и $y=a+t\Delta y$ $(0\le t\le 1)$. Для этой сложной функции с промежуточными переменными x и y имеем:

$$\Phi(0)=f(a,b),\quad \Phi(1)=f(a+\Delta x,b+\Delta y). \tag{6.1}$$

При изменении t от 0 до 1 соответствующая точка (x,y) перемещается вдоль отрезка, соединяющего точки (a,b) и $(a+\Delta x,b+\Delta y)$ и не выходит из области, в которой функция $f(x,y)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно. По этой причине и в силу линейности промежуточных переменных x и y дифференциалы функции $\Phi(t)$ могут быть вычислены по формуле

$$d^k\Phi(t)=d^k f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+t\Delta x\\ y=b+t\Delta y}}=d^k f(a+t\Delta x,b+t\Delta y). \tag{6.2}$$

Представим $\Phi(t)$ по формуле Тейлора

$$\Delta\Phi(t)=\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)=d\Phi(t)+\frac{d^2\Phi(t)}{2!}+\ldots+\frac{d^n\Phi(t)}{n!}+\frac{d^{n+1}\Phi(t+\theta\Delta t)}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1).$$

и положим здесь $t=0$, $\Delta t=1$. Получим

$$\Phi(1)-\Phi(0)=d\Phi(0)+\frac{d^2\Phi(0)}{2!}+\ldots+\frac{d^n\Phi(0)}{n!}+\frac{d^{n+1}\Phi(\theta)}{(n+1)!},$$

или, если воспользоваться равенствами (6.1) и (6.2),

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=df(a,b)+\frac{d^2 f(a,b)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(a,b)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)}{(n+1)!},$$

т. е.

$$\Delta f(a,b)=df(a,b)+\frac{d^2 f(a,b)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(a,b)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)}{(n+1)!}.$$

Изложенный здесь способ вывода формулы Тейлора, очевидно, пригоден для функции $w=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ от m переменных.