§1. Интегрирование рациональных функций

1°. Всякая рациональная функция после преобразований может быть представлена как сумма многочлена и конечного числа элементарных (простейших) дробей четырех типов:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n},\quad 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad 4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}.$$

Здесь A, B, a, p, q – вещественные числа, n – натуральное, $p^2-4q<0$, т. е. корни квадратного трехчлена – комплексные. Таким образом, интеграл от любой рациональной функции может быть сведен к интегралам от многочлена и элементарных дробей. В приложениях элементарные дроби четвертого типа встречаются редко. В опорном конспекте их не будем рассматривать.

2°. Интегралы от элементарных дробей.

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$.

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат и сделаем подстановку.

$$x^2+px+q = \left(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

$$x+\frac{p}{2}=t;\quad x=t-\frac{p}{2};\quad \frac{4q-p^2}{4}=a^2, \text{ так как } 4q-p^2>0.$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt = \frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Далее нужно возвратиться к старым величинам.

Пример 1.1. $J=\int\frac{4x+1}{x^2+6x+10}dx$.

$$x^2+6x+10=(x^2+2x\cdot 3+9)+1=(x+3)^2+1;\quad x+3=t;\quad dx=dt.$$

$$J=\int\frac{4(t-3)+1}{t^2+1}dt = 2\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}-11\int\frac{dt}{1+t^2} = 2\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-11\operatorname{arctg}t =$$

$$=2\ln(t^2+1)-11\operatorname{arctg}t+C = 2\ln(x^2+6x+10)-11\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

3°. Интегралы от правильных рациональных дробей.

Правильная рациональная дробь (степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена знаменателя) разлагается на сумму только элементарных дробей. Многочлен в разложении отсутствует. Предполагается, что многочлен знаменателя разложен на произведение линейных и квадратных множителей, порождающих соответствующие элементарные дроби. Принципы разложения правильной рациональной дроби на элементарные дроби рассмотрены в предыдущей главе.

Пример 1.2. $J=\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)}$.

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

Знаменатель дроби имеет только простые вещественные корни (1 и -2). Неизвестные коэффициенты A, B находим *методом частных значений*. Приводим дроби к одному знаменателю и приравниваем числители:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\quad\Rightarrow\quad x\equiv A(x+2)+B(x-1).$$

Полагаем в этом тождестве последовательно $x=1$ и $x=-2$.

$$\begin{array}{r|l} x=1 & 1=3A \;\;\Rightarrow\;\; A=1/3. \\ x=-2 & -2=-3B \;\Rightarrow\; B=2/3. \end{array}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{1/3}{x-1}+\frac{2/3}{x+2}.$$

$$J=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x+2|+C.$$

Пример 1.3. $J=\int\frac{dx}{x(x^2+4x+10)}$.

$$\frac{1}{x(x^2+4x+10)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+10}.$$

Приводим дроби к одному знаменателю и приравниваем числители.

$$1=A(x^2+4x+10)+(Bx+C)x\equiv(A+B)x^2+(4A+C)x+10A.$$

Применяем *метод сравнения коэффициентов*: если два многочлена тождественно равны, то равны их коэффициенты при степенях с одинаковыми показателями многочленов слева и справа в тождестве. Если соответствующая степень многочлена отсутствует, то это означает, что коэффициент при этой степени равен нулю.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0=A+B \;\;\Rightarrow\;\; B=-A; \\ x & 0=4A+C \;\Rightarrow\; C=-4A; \\ x^0 & 1=10A \;\;\Rightarrow\;\; A=1/10. \end{array}$$

$$B = -A = -1/10; \quad C = -4A = -4/10.$$

$$J = \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x} + \int\frac{(-1/10)x - 4/10}{x^2+4x+10}dx = \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{x+4}{(x+2)^2+6}dx =$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{x+2}{(x+2)^2+6}d(x+2) - \frac{1}{10}\int\frac{2}{(x+2)^2+6}d(x+2) =$$

$$(x+2=t)$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{t\,dt}{t^2+6} - \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{5\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}} - \frac{1}{20}\int\frac{d(t^2+6)}{t^2+6} =$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{5\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}} - \frac{1}{20}\ln(t^2+6) + C = \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{5\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{20}\ln(x^2+4x+10) + C$$

.

4°. Интегрирование неправильной рациональной дроби.

Сначала *неправильную рациональную дробь* следует представить в виде суммы многочлена (или одночлена) и правильной рациональной дроби. Этот процесс называется *выделением из дроби целой части*. В любом случае его можно осуществить делением числителя на знаменатель «углом». Правильная рациональная дробь далее разлагается на сумму элементарных дробей как указано в 3°.

Пример 1.4. $J = \int\frac{x^4+1}{x(x^2+1)}dx$. Сначала из неправильной дроби выделим целую часть делением «углом»:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4+1 & x^3+x \\ \cline{2-2} x^4+x^2 & x \\ \cline{1-1} -x^2+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^4+1}{x^3+x} = x + \frac{-x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

$$\frac{-x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}; \qquad -x^2+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

Для отыскания коэффициентов $A,\ B,\ C$ применяем метод сравнения коэффициентов.

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & -1 = A+B & \Rightarrow\ B = -1-A; \\ x & 0 = C & \Rightarrow\ C = 0; \\ x^0 & 1 = A & \Rightarrow\ A = 1;\ B = -1-1 = -2. \end{array}$$

$$\frac{x^4+1}{x(x^2+1)} = x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

$$J = \int x\,dx + \int\frac{dx}{x} - \int\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \ln(1+x^2) + C.$$