Векторное поле.

Примеры

Векторные линии

Пример 1.

Найти векторные линии векторного поля $\bar{a}(M) = y \cdot \bar{j} + 8z \cdot \bar{k}$.

Решение:

Векторные линии векторного поля $\bar{a}(M)$, являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

В нашем случае получаем:

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{8z}$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений, получим:

$$\begin{cases} dx = 0 \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{8z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 \\ y^8 = c_2 z \end{cases}.$$

Вычисление потока векторного поля

Вычисление потока векторного поля сводится к вычислению поверхностных интегралов, которые мы подробно изучали раньше.

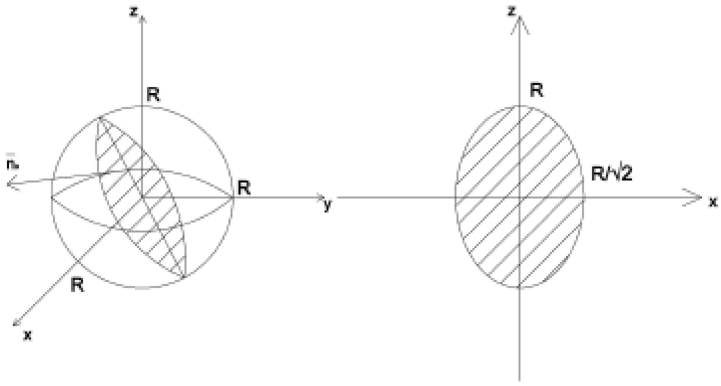
Пример 2.

Найти поток векторного поля $\bar{a}(M) = \bar{i} - \bar{j} + xyz \cdot \bar{k}$ через поверхность, полученную в результате пересечения шара плоскостью.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le R^3 \\ y = x \end{cases}$$

Взять ту сторону поверхности, которая обращена к положительному направлению оси Ох.

Решение:



В нашем случае поверхность σ - это часть плоскости $y = x$.

Поэтому, используем формулы, приведенные для случая 2)

и рассмотрим задание поверхности σ как $y = \varphi(x; z) = x$

Тогда

$$\overline{n}_0 = \pm \frac{grad(y - \varphi(x; z))}{|grad(y - \varphi(x; z))|} = \pm \frac{grad(y - x)}{|grad(y - x)|} =$$

$$= \pm \frac{-1 \cdot \overline{i} + 1 \cdot \overline{j} - 0 \cdot \overline{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \pm \left(-\frac{\overline{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\overline{j}}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как по условию угол β тупой, то берем знак «−« и тогда

$$\overline{n}_0 = \frac{\overline{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\overline{j}}{\sqrt{2}}, \text{т. е.} \quad cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем $\quad \overline{a}(M)\Big|_{y=x} = \overline{i} - \overline{j} + x^2 z \cdot \overline{k}$

Тогда поток векторного поля равен:

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \iint\limits_\sigma \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \left[|\cos\beta| d\sigma = dxdz\right] = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{\overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M)}{|\cos\beta|}\Bigg|_{y=x} dxdz =$$

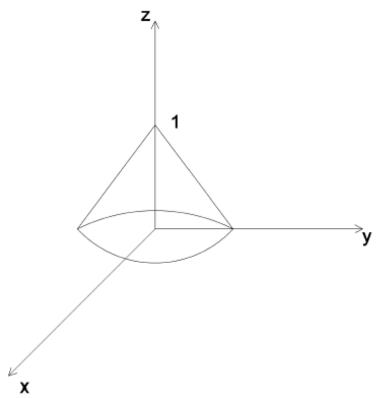
$$= \iint\limits_{D_{xz}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} dxdz = 2\iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot R^2$$

Здесь учли, что проекцией σ на плоскость XOZ является эллипс с полуосями $a = R/\sqrt{2}$ и $b = R$, площадь которого равна πab, т.е. $\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 3</u>:

Найти поток векторного поля $\overline{a}(M) = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$

через замкнутую поверхность $\sigma : \begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases}$, $(0 \le z \le 1)$ в сторону внешней нормали.



<u>Решение:</u>

Здесь $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$, $0 \le z \le 1)$.

Тогда по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\Pi_\sigma \overline{a}(M) = \oiint\limits_{\sigma_{внеш}} \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) d\sigma = \iiint\limits_T (1 + 1 + 1) dxdydz = \ldots = \pi,$$

т.к.

$$3 \iiint\limits_T dV = 3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{1-r} dz = 3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r(1 - r) dr = 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi$$