§1. Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Определение 1.1. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара (x, y) вещественных чисел. Первое число этой пары x называют *вещественной частью* комплексного числа $z=(x,y)$ и обозначают через $\operatorname{Re} z$: $x=\operatorname{Re} z$. Второе число y называют *мнимой частью* числа z и обозначают через $\operatorname{Im} z$: $y=\operatorname{Im} z$. Множество всевозможных упорядоченных пар $z=(x,y)$ вещественных чисел называют *множеством комплексных чисел* и обозначают буквой $\boldsymbol{C}$.

Определение 1.2. Два комплексных числа $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называются *равными* в том и только том случае, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Комплексное число, мнимая часть которого равна нулю, т. е. комплексное число вида $z=(x,0)$, отождествляют с вещественным числом x, при этом записывают: $(x,0)=x$. В частности, пару $(0,0)$ отождествляют с числом 0: $0=(0,0)$. Комплексное число, вещественная часть которого равна нулю, т. е. комплексное число вида $z=(0,y)$, называют *чисто мнимым* числом.

На множестве комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ вводят операции сложения и умножения в соответствии со следующим определением.

Определение 1.3. *Суммой* двух комплексных чисел $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называется комплексное число, обозначаемое z_1+z_2 и определяемое равенством:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2), \tag{1.1}$$

а *произведением* этих чисел – комплексное число, обозначаемое $z_1\cdot z_2$ и определяемое равенством:

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.2}$$

Для произведения комплексных чисел принято также обозначение: z_1z_2.

Среди комплексных чисел особую роль играет число (0,1). Его называют *мнимой единицей* и обозначают i: $i=(0,1)$. Своим названием число i обязано равенству $i^2=-1$. Действительно, из (1.2) при $x_1=x_2=0$, $y_1=y_2=1$ получим:

$$i^2=i\cdot i=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+0\cdot 1)=(-1,0)=-1.$$

Пусть $z=(x,y)$ – некоторое комплексное число. Опираясь на (1.1) и (1.2), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$(x,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0).$$

Так как $(x,0)=x$, $(y,0)=y$, а $(0,1)=i$, то отсюда вытекает следующее представление числа z:

$$z=x+iy.$$

Его называют *алгебраической формой* комплексного числа $z=(x,y)$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, записанные в алгебраической форме. Из равенств (1.1) и (1.2) следует:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.4}$$

Свойства действий сложения и умножения

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность).
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (ассоциативность).
3. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (дистрибутивность).
4. Для всякого $z \in \boldsymbol{C}$ справедливы равенства: $z + 0 = z$, $0 \cdot z = 0$, $1 \cdot z = z$.

Свойства 1 – 4 следуют из равенств (1.1) – (1.4). Очевидно, что они аналогичны свойствам действий сложения и умножения вещественных чисел, знакомых читателю по школьным учебникам.

Пусть z – некоторое комплексное число. Число $(-1) \cdot z$ обозначают через $-z$ и называют *противоположным* по отношению к z. Заметим, что $z + (-z) = z + (-1) \cdot z = (1 - 1) \cdot z = 0 \cdot z = 0$. Если $z = x + iy$, то

$$-z = (-1) \cdot (x + iy) = -x - iy.$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называют число $z_1 + (-z_2)$; его обозначают через $z_1 - z_2$. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) + \big((-x_2) + i(-y_2)\big) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2). \tag{1.5}$$

Пусть z_1 и z_2 – комплексные числа, причем $z_2 \neq 0$. *Частным* чисел z_1 и z_2 называют комплексное число z такое, что $z_1 = z z_2$. Его обозначают через $z_1 : z_2$ или через $\dfrac{z_1}{z_2}$. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, а $z = x + iy$, то из равенства $z_1 = z z_2$ следует: $x_2 x - y_2 y = x_1$, $y_2 x + x_2 y = y_1$. Отсюда: $x = \dfrac{x_1 x_2 + y_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$, $y = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$. Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Из (1.3), (1.4) и (1.5) вытекает, что арифметические выкладки с комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно производить, руководствуясь правилами из элементарной алгебры и учитывая значения степеней числа i:

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, \ldots.$$

Частное двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ можно найти, умножив числитель и знаменатель на число $z_2 = x_2 - iy_2$, называемое *сопряженным* знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 i^2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i}{(x_2)^2 - (iy_2)^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1.1. Найти произведение чисел $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 3 - i$.

►Имеем $z_1 z_2 = (2 + i)(3 - i) = 2 \cdot 3 + 3i - 2i - i^2 = 7 + i$.◄

Пример 1.2. Вычислить $z = (1 - 2i)^3$.

► Задача заключается в том, чтобы получить алгебраическую форму числа z. Воспользуемся формулой сокращенного умножения:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3,$$

положив в ней $a = 1,\ b = 2i$:

$$z = 1 - 3 \cdot (2i) + 3 \cdot (2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i - 12 - 8(-i) = -11 + 2i. \text{ ◄}$$

Пример 1.3. Вычислить $\dfrac{5(2+3i)}{1-2i}$ и записать в алгебраической форме.

►Умножим оба члена дроби на число $1 + 2i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{5(2+3i)}{1-2i} = \frac{5(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5(2+7i+6i^2)}{1^2-(2i)^2} = \frac{5(-4+7i)}{5} = -4+7i. \text{◄}$$

Замечание 1.2. Неравенства $z_1 > z_2$ или $z_1 < z_2$ можно записывать только в том случае, когда оба эти числа вещественны; в противном случае эти записи лишены смысла. Например, если $z_1 = 1$, а $z_2 = 2 - 3i$, то справедливы неравенства $\operatorname{Re} z_2 < \operatorname{Re} z_2$ $(1 < 2)$ и $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Im} z_2$ $(1 > -3)$, но неравенства $1 > 2 - 3i$ или $1 < 2 - 3i$ смысла не имеют.

Геометрической интерпретацией множества ***C*** является *комплексная плоскость*. Так называют плоскость, на которой введена декартова прямоугольная система координат. Точку z этой плоскости с абсциссой x и ординатой y считают изображением комплексного числа $z = (x, y)$ (рис. 1.1). Таким образом, каждая точка этой плоскости изображает одно из комплексных чисел, и, обратно, каждое комплексное число можно представить точкой, лежащей на такой плоскости, причём два различных между собой комплексных числа изображаются двумя несовпадающими точками.

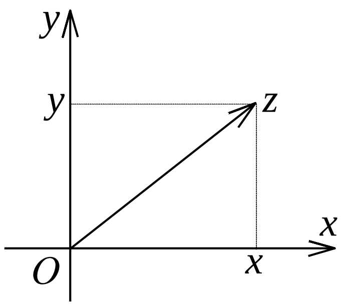

Рис. 1.1. К изображению комплексного числа на комплексной плоскости

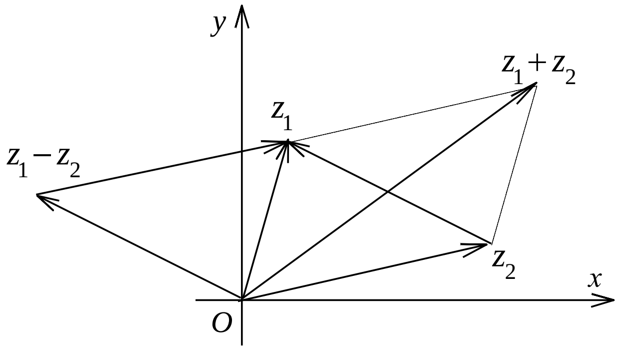

Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

Вещественные числа $z = (x, 0)$ представлены точками оси абсцисс (в частности, числу $0 = (0, 0)$ соответствует начало координат), поэтому ось абсцисс называют *вещественной осью* комплексной плоскости. Ось ординат называют *мнимой осью*; точки этой оси изображают чисто мнимые числа $z = (0, y),\ y \neq 0$.

Другая возможная интерпретация комплексного числа $z=(x,y)$ состоит в том, что ему сопоставляют радиус-вектор точки, изображающей число z (рис. 1.1). Этот взгляд на комплексное число удобен в ряде случаев, например, при геометрической интерпретации действий сложения и вычитания комплексных чисел. В приложениях комплексное число $z=(x,y)$ изображают также свободным вектором с координатами x, y.

Пусть числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$, представлены радиусами-векторами точек z_1 и z_2 на комплексной плоскости (рис. 1.2). Тогда число z_1+z_2 будет представлено вектором, совпадающим с диагональю параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 (рис. 1.2). Другая диагональ этого параллелограмма совпадает с вектором, являющемся разностью радиусов-векторов точек z_1 и z_2. Равный ему вектор, построенный в начале координат, является радиусом-вектором точки, соответствующей числу $z_1 - z_2$ (рис. 1.2).