§1. Проекция вектора на ось и её свойства

Определение 1.1. *Проекцией* точки P на ось $\vec{l}$ называется основание Q перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую $\vec{l}$ (рис. 1.1).

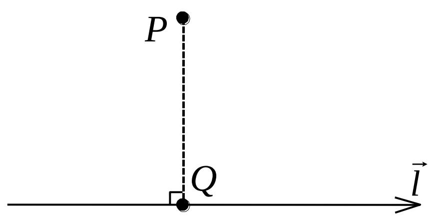

Рис. 1.1. Проекция точки на ось

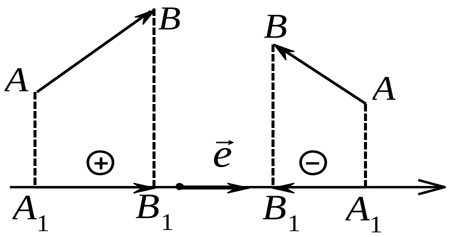

Рис. 1.2. Понятие компоненты вектора вдоль оси

Определение 1.2. *Компонентой* любого вектора $\overrightarrow{AB}$ вдоль оси $\vec{l}$ называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1, B_1 – проекции точек A и B на ось $\vec{l}$ (рис. 1.2).

Пусть $\vec{e}$ – орт оси (рис. 1.2), тогда

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \pm|\overrightarrow{A_1B_1}|\,\vec{e}. \tag{1.1}$$

Определение 1.3. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$ называется длина его компоненты $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если компонента сонаправлена с $\vec{e}$, и со знаком «–», если компонента и ось $\vec{l}$ противонаправлены.

Обозначение: $\text{пр}_{\vec{l}}\,\overrightarrow{AB}$ или $\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a}$.

Из определения 1.3 и соотношения (1.1) следует равенство

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \text{пр}_{\vec{l}}\,\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}. \tag{1.2}$$

Определение 1.4. *Углом* между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведёнными к общему началу, называется наименьший угол, на который надо повернуть один из этих векторов так, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора,***обозначение:*** $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$.

(Угол между векторами не является направленным углом (он не зависит от направления поворота) и принимает любое значение между 0 и π: $0 \le (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \le \pi$.*)*

Свойства проекций векторов

1. $\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a}$ есть координата на оси $\vec{l}$ компоненты вектора $\vec{a}$ на этой оси;

2. проекции вектора $\vec{a}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат являются координатами $\vec{a}$ в прямоугольном базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, определяющем эту систему;

3. $\text{пр}_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{b}$;

4. $\text{пр}_{\vec{l}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\cdot\text{пр}_{\vec{l}}\,\vec{a}$;

5. $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, $\vec{a}\ne\vec{0}$.

►**1.** Данное утверждение следует из равенства 1.2 и понятия координаты вектора на оси, введённого в §6 главы 1 (ср. (1.2) с формулой (6.1) из упомянутой главы).

2. Начало вектора $\vec{a}$ поместим в начале декартовой прямоугольной системы координат. Обозначим через *A* конец вектора $\vec{a}$, через *B* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *A* на плоскость *Oxy*, а через *C*, *D*, *E* – проекции точки *B* на оси *Ox*, *Oy*, *Oz* (рис. 1.3),

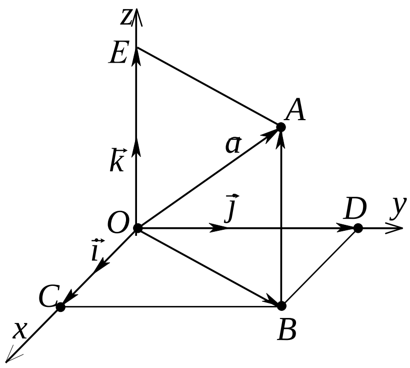

Рис. 1.3. Разложение вектора $\overrightarrow{OA}$ по компонентам вдоль осей координат

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BA}, \qquad (1.3)$$

где, как легко видеть, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OE}$ являются компонентами вектора $\vec{a}$ вдоль осей координат. Согласно (1.2) имеем:

$$\overrightarrow{OC} = (\text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a})\vec{i}\,,\ \overrightarrow{OD} = (\text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a})\vec{j}\,,\ \overrightarrow{BA} = (\text{пр}_{\vec{k}}\,\vec{a})\vec{k}\,.$$

Подставляя эти равенства в равенство (1.3), приходим к соотношению:

$$\vec{a} = (\text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a})\vec{i} + (\text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a})\vec{j} + (\text{пр}_{\vec{k}}\,\vec{a})\vec{k}\,. \qquad (1.4)$$

Равенство (1.4) есть разложение вектора $\vec{a}$ в прямоугольном базисе, поэтому $\text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a} = x$, $\text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a} = y$, $\text{пр}_{\vec{k}}\,\vec{a} = z$ – координаты $\vec{a}$ в этом базисе, что и требовалось доказать.

3, 4. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, один из базисных векторов которой совпадают с ортом оси $\vec{l}$. Тогда $\text{пр}_{\vec{l}}\,(\vec{a}+\vec{b})$ или $\text{пр}_{\vec{l}}\,(\lambda\vec{a})$ является, согласно свойству 2, одной из декартовых координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$ или $\lambda\vec{a}$. Свойства 3 и 4 теперь следуют из правил 1 и 2 действий с векторами, заданными разложениями в некотором базисе (см. §6 главы 1).

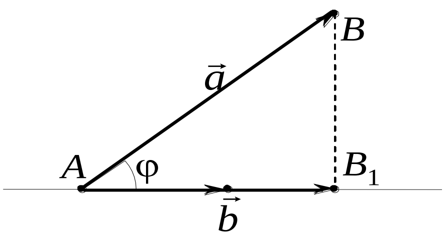

Рис. 1.4. Иллюстрация к доказательству св. 5 проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. Случай $0 \le \varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \le \dfrac{\pi}{2}$

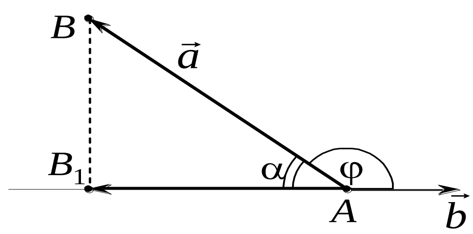

Рис. 1.5. Иллюстрация к доказательству св. 5 проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. Случай $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \le \pi$

5. Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяет условию: $0 \le \varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \le \pi$. Рассмотрим два случая: угол φ – острый или тупой (рис. 1.4, 1.5). В первом из них $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}}{|\vec{a}|}$, т.е. $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Во втором $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB}|} =$

$= -\dfrac{\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|}$, т.е. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = -|\vec{a}|\cos\alpha = -|\vec{a}|\cos(\pi-\varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. ◄

Пример 1.1. Дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где $A(1, -1, 0)$, $B(-1, 2, 3)$. Найти его проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат.

►По свойству 2 проекции $\vec{a}$ на оси координат – это его координаты в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В силу формулы (6.6) главы 1 имеем $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, отсюда $\text{пр}_{Ox}\vec{a} = -2, \text{пр}_{Oy}\vec{a} = 3, \text{пр}_{Oz}\vec{a} = 3$. ◄