§2. Разложение алгебраического многочлена на линейные множители. Число корней многочлена

Пусть $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$ – многочлен степени не выше n, и пусть a – некоторое комплексное число.

Определение 2.1. Число a, $a\in \boldsymbol{C}$, называют *корнем* алгебраического многочлена $P_n(z)$, если $P_n(a)=0$, т.е. если $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k a^{n-k}=0$.

Теорема 2.1 (*теорема Гаусса*, Гаусс К. (1777-1855) – немецкий математик, астроном, физик). Всякий алгебраический многочлен степени n, $n\ge 1$, на множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Доказательство теоремы Гаусса проводится методами теории функций комплексной переменной.

Теорема 2.2. Если число $a\in \boldsymbol{C}$ – корень алгебраического многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на разность $z-a$ без остатка.

►Так как a – корень $P_n(z)$, то $P_n(a)=0$. Из формулы Тейлора для многочлена $P_n(z)$ (см. равенство (7.2), глава 1) имеем

$$P_n(z)=P_n'(a)(z-a)+\frac{P_n''(a)}{n!}(z-a)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n .$$

После вынесения разности $z-a$ за скобку получаем:

$$P_n(z)=(z-a)Q_{n-1}(z), \tag{2.1}$$

где $Q_{n-1}(z)=P_n'(a)+\frac{P_n''(a)}{n!}(z-a)+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$– многочлен степени n–1.

Равенство (2.1) доказывает теорему.◄

Теорема 2.3. Любой многочлен $P_n(z)$ степени $n\ge 1$ можно представить в виде:

$$P_n(z)=p_0(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n), \tag{2.2}$$

где $a_1, a_2,\ldots,a_n$ – корни многочлена, p_0– коэффициент при старшей степени z. Равенство (2.2) называется *разложением многочлена* $P_n(z)$ *на линейные мно-жители.*

► По теореме Гаусса (теорема 2.1) многочлен $P_n(z)$ на множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень a_1, тогда (см. (2.1)):

$$P_n(z)=(z-a_1)Q_{n-1}(z),$$

где $Q_{n-1}(z)$– многочлен степени n –1. По теореме Гаусса многочлен $Q_{n-1}(z)$ имеет хотя бы один корень a_2 поэтому в силу теоремы 2.2, представим в виде:

$$Q_{n-1}(z)=(z-a_2)T_{n-2}(z),$$

где $T_{n-2}(z)$– многочлен степени n –2. Продолжая этот процесс, через n шагов получим равенство:

$$S_1(z) = c(z - a_n),$$

где c – многочлен нулевой степени, т.е. некоторое комплексное число. Подставив каждое последующее равенство в предыдущее, начиная с последнего равенства, получим:

$$P_n(z) = c(z - a_1)\,(z - a_2)\ldots(z - a_n).$$

Последнее равенство верно при $\forall z \in \boldsymbol{C}$, поэтому в силу теоремы о тождественном равенстве двух многочленов (теоремы 1.2) заключаем, что $c = p_0$.◄

Следствие из теоремы 2.3. Алгебраический многочлен степени *n*, $n \geq 1$, имеет не более, чем *n* попарно различных корней.

►Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что кроме $a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлен $P_n(z)$ имеет ещё один корень a_{n+1}, причём

$$a_{n+1} \neq a_k,\ \ k = 1, \ldots, n. \qquad (2.3)$$

Подставим $z = a_{n+1}$ в разложение (2.2):

$$P_n(a_{n+1}) = p_0(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2)\ldots(a_{n+1} - a_n).$$

Отсюда, в силу (2.3) приходим к выводу: $P_n(a_{n+1}) \neq 0$. Полученное противоречие с предположением a_{n+1}– корень $P_n(z)$ доказывает теорему.◄

Пример 2.1. Многочлен $P_5(z) = z^5 + z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1$ разложить на $\boldsymbol{C}$ на произведение линейных множителей.

►Как нетрудно убедиться, число $z = -1$ является корнем $P_5(z)$, поэтому $P_5(z)$ делится на разность $z - (-1) = z + 1$. Произведя деление, получим:

$$P_5(z) = (z^4 + 2z^2 + 1)(z + 1) = (z^2 + 1)^2(z + 1) = (z + 1)\big((z - i)(z + i)\big)^2 =$$
$$= (z + 1)(z - i)^2(z + i)^2.$$

Пример 2.2. Многочлен $P_6(z) = z^6 + 64$ разложить на $\boldsymbol{C}$ на произведение линейных множителей.

►Корни данного многочлена совпадают со значениями $\sqrt[6]{-64}$. В соответствии с формулой (3.9) главы 1 имеем:

$$w_k = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right)\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Отсюда

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \qquad w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i, \qquad w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$w_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i, \qquad w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

В силу формулы (2.2) получаем разложение:

$$P_6(z) = z^6 + 64 = (z - 2i)(z + 2i)(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)(z + \sqrt{3} - i)(z + \sqrt{3} + i).◄$$