§4 Условные экстремумы.

Задача на отыскание экстремумов функций многих переменных часто возникает в форме, отличной от только что изученной. Пусть, например, требуется найти на кривой, заданной уравнением $\varphi(x,y)=0$, точку, ближайшую к началу координат. Для решения этой задачи придется определить наименьшее значение функции $w=\sqrt{x^2+y^2}$, где, однако, координаты x, y уже не являются независимыми переменными, а связаны между собой дополнительным условием: они должны удовлетворять уравнению кривой $\varphi(x,y)=0$.

Экстремумы функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, на аргументы которой наложено k $(k<m)$ дополнительных условий

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0,\\ &\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0, \end{aligned} \tag{1}$$

именуемых *уравнениями связи*, называются *условными экстремумами*. В отличие от них экстремумы, рассматривавшиеся ранее (без дополнительных условий), называются *безусловными экстремумами*.

Задача нахождения условного экстремума функции двух переменных ставится так: требуется найти экстремумы функции

$$w=f(x,y), \tag{2}$$

если аргументы x и y связаны дополнительным условием

$$\varphi(x,y)=0. \tag{3}$$

Наиболее простой способ нахождения условного экстремума заключается в следующем : используя уравнения связи k переменных выражаем через оставшиеся m-k , сводя тем самым исходную задачу к задаче нахождения безусловного экстремума функции m-k переменных.

Пример 1. Найти условный экстремум функции $f(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=1$.

► Из уравнения связи имеем $y=1-x$, следовательно, достаточно найти экстремум функции $f(x,y(x))=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$.

$(2x^2-2x+1)'=4x-2$, $4x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, причем в точке $x=\frac{1}{2}$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, в этой точке функция $f(x,y(x))$ имеет минимум. Согласно уравнению связи, значению $x=\frac{1}{2}$ соответствует $y=\frac{1}{2}$. Следовательно, в точке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ функция $f(x,y)=x^2+y^2$ достигает условного минимума относительно уравнения связи $x+y=1$, при этом $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ◄.

Пример 2 Найти экстремумы функции $z=x^2-y^2$ при условии, что $2x-y-3=0$.

► Из уравнения связи $2x-y-3=0$ выразим y: $y=2x-3$ и подставим его в выражение для функции z: $z=x^2-(2x-3)^2$. Мы получили функцию одной переменной – квадратный трёхчлен:

$$z=x^2-(4x^2-12x+9) \Leftrightarrow z=-3(x^2-4x-3) \Leftrightarrow z=-3[(x-2)^2-1],$$

откуда видно, что наибольшее значение функция z принимает при $x=2$ и это значение равно 3. Из уравнения связи следует, что если $x=2$, то $y=1$. Итак, $z_{max}=z(2, 1)=3$◄.

Замечание 1*. Продемонстрированный в рассмотренных примерах метод нахождения условного экстремума, когда из уравнения связи выражается одна из неизвестных и затем она подставляется в выражение исследуемой функции, в общем случае оказывается слишком громоздким, так как решение уравнения связи относительно одной из переменных или вызывает затруднения, или не имеет однозначного решения и т. д. В таких случаях используют *метод неопределённых множителей Лагранжа.* При этом задача сводится к отысканию безусловных экстремумов вспомогательной функции *функцией Лагранжа.*

Для задачи (2)-(3) функция Лагранжа $\Phi = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ – *множитель Лагранжа*

Пример 3. Найти условный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$.

► Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

и найдем ее критические точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y + \lambda = 0, \\ x + y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ y = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ -\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{2} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ \lambda = -1. \end{cases}$$

Составим второй дифференциал

$$d^2\Phi(x, y; \lambda) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(dy)^2 = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 > 0$$

при $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$, следовательно, функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ достигает условного минимума, причем $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. ◄

Пример 4 Найти экстремумы функции $z=xy$ при условии, что $x^2+y^2=1$.

►Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x, y)=xy+\lambda(x^2+y^2-1)$ и решим систему, состоящую из уравнений $\Phi'_x=0$, $\Phi'_y=0$ и уравнения связи:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0, \\ \Phi'_y = 0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2\lambda x = 0, \\ x+2\lambda y = 0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение

$$y-x+2\lambda(x-y)=0 \ \Leftrightarrow \ (x-y)\cdot(2\lambda-1)=0,$$

которое распадается на два:

$$x=y \text{ или } 2\lambda=1.$$

Система также распадается на две:

$$\begin{cases} x=y, \\ x+2\lambda y = 0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2\lambda=1, \\ x+2\lambda y = 0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений первой системы следует, что $2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}$ и поэтому

$$x_1=-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

и так как $x=y\neq 0$, то из второго уравнения первой системы находим: $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Итак при $\lambda=-\frac{1}{2}$ мы имеем две критические точки: $M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Переходя к решению второй системы, замечаем, что $\lambda=\frac{1}{2}$ и, подставляя это значение λ во второе уравнение, находим: $x+y=0$, т. е. $x=-y$. Тогда из последнего уравнения находим: $x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_4=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, при $\lambda=\frac{1}{2}$ мы получили еще две критические точки: $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ и $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Исследуем поведение функции z в окрестности критических точек.

Предварительно найдём второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d\Phi=ydx+xdy+2\lambda xdx+2\lambda ydy,$$

$$d^2\Phi=2dxdy+2\lambda dx^2+2\lambda dy^2. \qquad (*)$$

Если $\lambda=-\frac{1}{2}$, то $d^2\Phi=2dxdy-dx^2-dy^2 \Leftrightarrow d^2\Phi=-(dx-dy)^2$. Однако, *здесь dx и dy не являются независимыми*. Из уравнения связи $x^2+y^2=1$ следует, что эти дифференциалы связаны равенством: $2xdx+2ydy=0$, или:

$$xdx+ydy=0. \qquad (**)$$

Подставляя сюда координаты точки M_1, находим, что $-\frac{1}{\sqrt{2}}dx-\frac{1}{\sqrt{2}}dy=0 \Leftrightarrow dx=-dy$. А тогда отсюда и из выражения для второго дифференциала функции Лагранжа ($d^2\Phi=-(dx-dy)^2$) следует: $d^2\Phi=-4dy^2$ и так как dy – *независимый* дифференциал, а $d^2\Phi<0$ (при $dy\neq 0$), то в точке M_1 функция z имеет *локальный относительный максимум,* равный $z(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}$.

В окрестности точки M_2 (значение λ остаётся прежним) связь дифференциалов та же, что в окрестности точки M_1 поэтому в окрестности M_2 также *локальный относительный максимум* функции *z(x.y)*: $z(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}$.

Пусть теперь $\lambda=\frac{1}{2}$, тогда из (*): $d^2\Phi=2dxdy+dx^2+dy^2 \Leftrightarrow d^2\Phi=(dx+dy)^2$. Из (**) при $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ следует, что $dx=dy$, так что в окрестности точки M_3: $d^2\Phi=4dy^2>0$ и так как dy – независимый дифференциал, а $d^2\Phi>0$ (при $dy\neq 0$), то в точке M_3 функция z имеет *локальный относительный минимум,* равный $z(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2}$. Не составляет труда проверить, что и в точке M_4 функция *z(x,y)* также имеет локальный относительный минимум, причём
$z(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2}$ ◄.

Замечание 2*. В общем случае условного экстремума функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ при k $(k<m)$ дополнительных условиях

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0,\\ &\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0, \end{aligned} \tag{4}$$

функция Лагранжа имеет вид $\Phi=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ – *множители Лагранжа*.

Замечание 3. Заметим, что при нахождении наибольших и наименьших значений функции в замкнутой ограниченной области, задача о нахождении наибольших и наименьших значений на границе области сводится к определению условного экстремума. Уравнением связи будет уравнение границы.