§4. Конус второго порядка

Определение 4.1. Алгебраическая поверхность *n*-го порядка называется *конической поверхностью* (*конусом*), если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* она может быть задана уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (4.1)$$

где $F(x, y, z)$– многочлен относительно переменных *x*, *y*, *z* такой, что сумма показателей степени при *x*, *y*, *z* в каждом его члене постоянна и равна *n*:

$$F(x, y, z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s},$$

где $k_1 + l_1 + m_1 = \ldots = k_s + l_s + m_s = n,\ k_i,\ l_i,\ m_i,\ n \in \mathbf{N},\ \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Начало системы координат $O(0,0,0)$, очевидно, принадлежит конусу. Если точка $M(x, y, z)$ лежит на конусе (рис. 4.1), то прямая, проходящая через точки *O* и *M*, лежит на этом конусе (рис. 4.1). Действительно, пусть $M'(x', y', z')$ – произвольная точка этой прямой. Так как векторы $\overrightarrow{OM'}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, то найдется действительное число λ такое, что будут справедливы равенства $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$. В силу условия, наложенного на многочлен $F(x, y, z)$ в определении 4.1, имеем:

$$F(x', y', z') = F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z).$$

Из последнего равенства с учетом (4.1) приходим к соотношению $F(x', y', z') = 0$, из которого следует, что координаты x', y', z' точки M' удовлетворяют уравнению (4.1). А это означает, что она принадлежит данному кону-

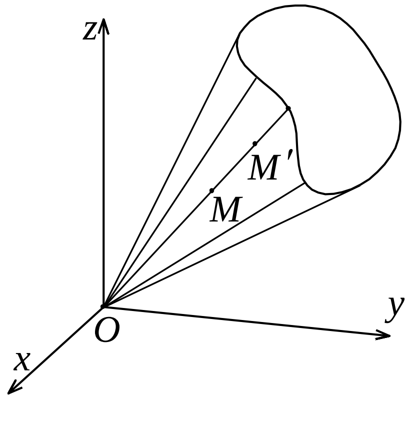

Рис. 4.1. К понятию конической поверхности

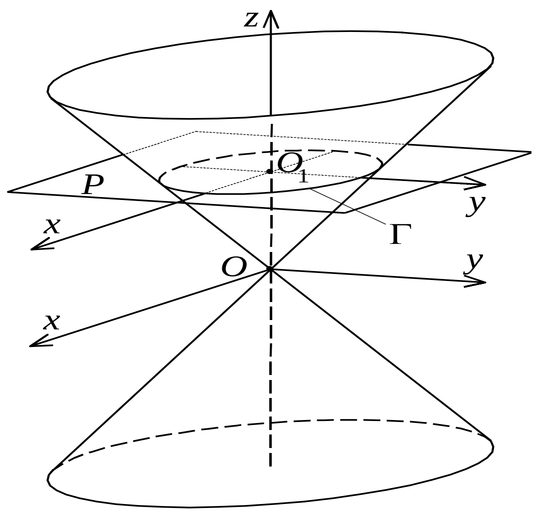

Рис. 4.2. Конус второго порядка

су. Таким образом, установлено, что любая коническая поверхность, определяемая уравнением вида (4.1), образована прямыми, проходящими через одну и ту же точку *O* (начало координат). Эти прямые называются её *образующими*, а точка *O* – её *вершиной*.

Определение 4.2. Поверхность второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ a,b,c>0, \tag{4.2}$$

называется *конусом второго порядка*.

Характер симметрии этой поверхности такой же, как у эллипсоида. Ее сечение плоскостью $P: z=z_0$ $(z_0 \neq 0)$ представляет собой эллипс Γ (рис. 4.2). *Образующими* конуса второго порядка, определяемого уравнением (4.2), являются прямые, проходящие через начало координат – *вершину* этого конуса и пересекающие эллипс Г, называемый его *направляющей*.