Тема 9. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

С понятием модуля и аргумента связан еще один важный способ записи комплексных чисел — тригонометрическая форма.

Пусть $z = a + bi$ имеет модуль $|z| = r$ и Arg z = φ (не обязательно главное значение). Тогда, используя формулы $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, из пункта 8 получаем

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (10)$$

- *Представление комплексного числа z в виде* (10), *где r, φ – действительные числа, причем* $r \geq 0$*, называется тригонометрической формой комплексного числа.*

Если z – действительное, т.е. $z = a + 0i$, то $z = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$\varphi = 0$ при $a > 0$,

$\varphi = \pi$ при $a < 0$,

аргумент φ – не определен при $a = 0$.

Представить в тригонометрической форме

а) –2, *б*) i, *в*) –3i, *г*) 1+i.

<u>Р е ш е н и е</u>

а) $-2=|2|\,(\cos\pi+i\sin\pi)$ •

б) $i=0+1i=|1|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ •

в) $-3i=0-3i=|3|\left[\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})\right]$ или $-3i=|3|\left[\cos(\frac{3}{2}\pi)+i\sin(\frac{3}{2}\pi)\right]$ •

г) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ •

Числа $z_1=-5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и $z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ не являются тригонометрической формой комплексного числа.

Тригонометрической формой для z_1 и z_2 будут:

$$z_1=5\left[\cos(\pi+\frac{\pi}{6})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{6})\right]=5\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

или $z_1=5\left[\cos(-\frac{5}{6}\pi)+i\sin(-\frac{5}{6})\pi\right]$ •

$$z_2=\left[\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})\right]=\left[\cos(\frac{5}{3}\pi)+i\sin(\frac{5}{3}\pi)\right]$$ или

$$z_2=\left[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]$$ •

Тригонометрическая форма комплексного числа очень удобна для умножения и деления комплексных чисел. Отметим, что если комплексные числа заданы в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то они равны тогда и только тогда, когда равны их модули $r_1=r_2$, а аргументы отличаются на $2\pi k$, т.е. $\varphi_1=\varphi_2+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Найдем произведение $z=z_1z_2$:

$$z=z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=$$

$$r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

следовательно, $r=r_1r_2$, $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Таким образом, при умножении двух комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Найдем частное $z = \dfrac{z_1}{z_2}$:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Следовательно, $r = \dfrac{r_1}{r_2}$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k$ где $k \in \wedge$.

Таким образом, при делении двух комплексных чисел модуль частного равен частному модулей. Аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

Найти произведение $z_1 z_2$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}),\ z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)$$

Р е ш е н и е

$$r = r_1 r_2 = \sqrt{2}\sqrt{8} = 4,\quad \varphi = \frac{11\pi}{4} + \frac{3}{8}\pi = \frac{25\pi}{8},$$

$$z = 4\left(\cos\frac{25}{8}\pi + \sin\frac{25}{8}\pi\right) = 4\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right) \bullet$$

Записать число $z = \dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е

$$z_1 = i - 1 = -1 + i \Rightarrow\quad r_1 = \sqrt{2},\quad \arg z_1 = arctg(-1) + \pi = \frac{3}{4}\pi \quad \text{(см. формулу (9))}$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow\quad r_2 = 1,\quad \arg z_2 = \frac{\pi}{3},$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3})\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \bullet$$

Перейти от алгебраической формы
к тригонометрической форме

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

Р е ш е н и е

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi) \Rightarrow a = 1 - \cos\alpha\,, \quad b = \sin\alpha\,,$$

$$r = |z| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = +2\sin\frac{\alpha}{2} > 0, \quad \text{т.к. } 0 < \alpha < 2\pi;$$

и, замечая, что $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$, находим $\sin(\arg z) = \dfrac{b}{r} = \dfrac{\sin\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) + i\sin\frac{(\pi-\alpha)}{2}\right] \bullet$$