КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА.

Рассмотрим пространственную кусочно-гладкую кривую L, ограниченную точками *A* и *B* (рис. 4.1), и определенную на ней непрерывную функцию f(*x,y,z*)=f(M), где M(*x,y,z*) - точка кривой.

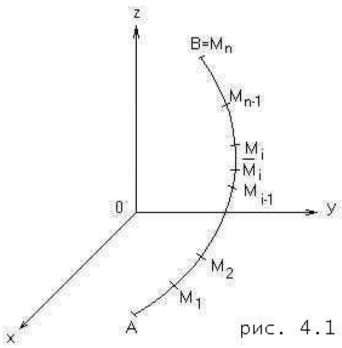

рис. 4.1

Дугу AB разобьем точками M_1, M_2, ..., M_{n-1} на *n* элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ (i= 1, 2, 3, ... , *n*), где M_0 = A,...., M_n = B, длины которых обозначим соответственно через

$$\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n.$$

На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta l_i \tag{1.1},$$

называемую *интегральной суммой Римана* по кривой L функции f(x,y,z).

Криволинейным интегралом первого типа от функции $f(x, y, z)$ по кривой L называется предел интегральной суммы (1.1) при $n \to \infty$ и max $\Delta l_i \to 0$:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta l_i \tag{1.2}$$

Если кривая L, целиком лежит в плоскости Oxy и функция $f(x, y)$, то по определению

$$\int_L f(x,y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i \tag{1.3}$$

<u>Замечание</u> (о физическом смысле криволинейного интеграла 1 рода)
Если подынтегральную функцию $f(x, y) > 0$ рассматривать как плотность кривой *L,* то криволинейный интеграл первого рода представляет собой *массу этой кривой L*.

Вычисление криволинейный интеграл первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая *L* задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (t_1 \le t \le t_2)$$

то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt \qquad (1.4)$$

так как в этом случае дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt.$$

Если кривая *L* лежит в плоскости *Oxy,* то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2}dt \qquad (1.5)$$

Для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, имеем

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

поэтому

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1 + y'^2}dt \qquad (1.6)$$

Для плоской кривой, заданной уравнением $x = x(y)$, имеем

$$dl = \sqrt{1 + (x_y')^2}dy.$$

Тогда

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[x(y),y]\sqrt{1 + \left(x_y'\right)^2}dy \qquad (1.7)$$

Если плоская кривая задана в полярной системе координат уравнением

$$\rho = \rho(\phi)(\alpha \le \phi \le \beta),$$

то

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\phi.$$

Тогда

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\phi \qquad (4.8)$$

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

1) по определению криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl$$

;

2)

$$\int\limits_{L} [f_1(M) \pm f_2(M)]dl = \int\limits_{L} f_1(M)dl \pm \int\limits_{L} f_2(M)dl$$

;

3)

$$\int\limits_{L} cf(M)dl = c\int\limits_{L} f(M)dl$$

, где (c=const);

4) если путь интегрирования L разбит на части L_1, L_2, ... , L_n, то

$$\int\limits_{L} f(M)dl = \int\limits_{L_1} f(M)dl + \int\limits_{L_2} f(M)dl + ... + \int\limits_{L_n} f(M)dl$$

.