§4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 4.1 (*первая теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на отрезке [a, b], то она ограничена на этом отрезке.

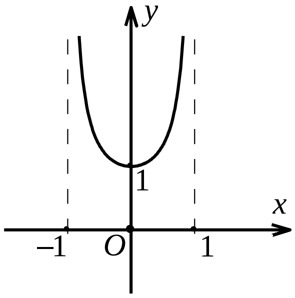

Рис. 4.1. График функции $f(x)=1/(1-x^2)$ на $x\in(-1, 1)$

Непрерывность функции именно на отрезке существенна для вывода об её ограниченности. Например, функция $f(x)=1/(1-x^2)$, непрерывная на интервале $(-1, 1)$, не является ограниченной на нём (рис. 4.1).

Ограниченность функции на отрезке является только необходимым, но не достаточным условием непрерывности, т.е. не любая функция, ограниченная на отрезке, непрерывна на этом отрезке. Так, функция из примера 2.3, ограниченная на отрезке [0, 2], не является непрерывной на нём.

Теорема 4.2. (*вторая теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке свои наименьшее и наибольшее значения.

Непрерывность функции именно на отрезке существенна для заключения теоремы 4.2. Функция $f(x)=1/(1-x^2)$, непрерывная на интервале $(-1, 1)$, принимает на нём наименьшее значение: $f(0)=1$, но не принимает на нём наибольшего значения (рис. 4.1).

Теорема 4.3. (*первая теорема Больцано-Коши,* Больцано Б. (1781-1848) – чешский математик, философ, логик). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в нуль, т.е. $f(c)=0$.

Замечание 4.1. Теорема 4.3 позволяет построить алгоритм вычисления корней уравнения $f(x)$=0, причём на функцию $f(x)$ не накладывается никаких условий, кроме условия непрерывности на некотором промежутке.

Пример 4.1. Найти действительный корень уравнения $x^3+x-1=0$ с точностью до 0.01.

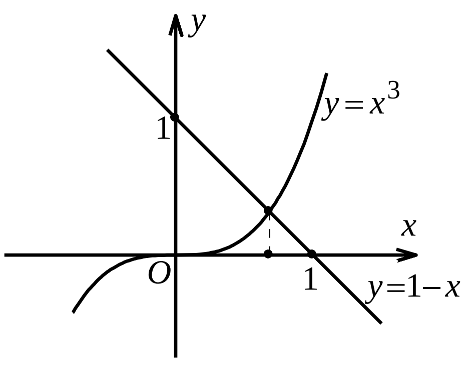

Рис. 4.2. К примеру 4.1

►Запишем данное уравнение в виде: $x^3=1-x$. Искомый корень – абсцисса точки пересечения графиков функций $y=x^3$ и $y=1-x$, он находится на отрезке [0,1] (рис. 4.2). Это следует и из теоремы 4.3: функция $f(x)=x^3+x-1$ непрерывна на отрезке [0,1], на его концах она имеет значения разных знаков: $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$, поэтому на интервале (0,1) найдётся точка, в которой $f(x)$ обратится в нуль. Разделим отрезок [0, 1] на 10 равных частей и вычислим значения $f(x)$ в точках деления: $f(0.1)=-0.899, \ldots$, $f(0.6)=-0.184$, $f(0.7)=0.043, \ldots$, $f(0.9)=0.629$. В силу теоремы 4.3 корень находится на отрезке

[0.6, 0.7], ибо функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков. Разделив этот отрезок на 10 равных частей и вычислив значения $f(x)$ в точках деления, заключаем, что корень находится на отрезке [0.68, 0.69] ($f(0.68)=-0.005,\ f(0.69)=0.018$). Итак, приходим к выводу, что с точностью до 0.01 корень данного уравнения равен 0.68.◄

Теорема 4.4. (*вторая теорема Больцано-Коши*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и $f(a)\neq f(b)$, то она принимает на $[a,\ b]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, для любого числа μ, расположенного между $f(a)$ и $f(b)$, на $[a,\ b]$ найдётся хотя бы одна точка c такая, что $f(c)=\mu$ (рис. 4.3).

Следствие из теоремы 4.4. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, то множество её значений $E(f)$ также представляет собой некоторый промежуток.

Например, функция $f(x)=\sin x$, непрерывная на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$, принимает на нём все промежуточные значения между $f(-\pi/2)=\sin(-\pi/2)=-1$ и $f(\pi/2)=\sin(\pi/2)=1$ (рис. 4.4), т.е. любое число из отрезка [–1, 1] будет значением этой функции для некоторой точки из промежутка $[-\pi/2,\ \pi/2]$.

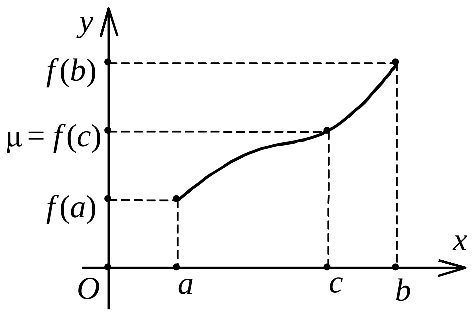

Рис. 4.3. К теореме 4.4

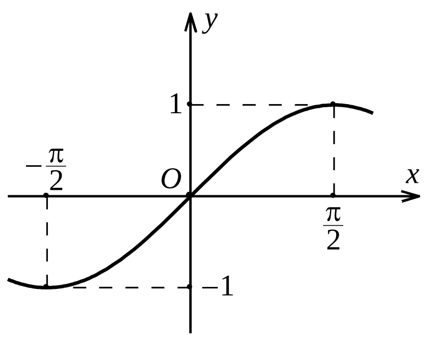

Рис. 4.4. График функции $f(x)=\sin x$

Теорема 4.5 (*теорема существования и непрерывности обратной функции*). Если функция $y=f(x)$ определена, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то на отрезке $[f(a),\ f(b)]$ ($[f(b),\ f(a)]$) существует обратная функция $f^{-1}(y)$, строго возрастающая (строго убывающая) и непрерывная на этом промежутке.

Так, функция $y=(x-1)^2$, $x\in[1,3]$, определена, строго возрастает на отрезке [1,3] (пример 7.2 главы 1) и непрерывна на этом промежутке в силу теоремы 1.1, так как $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=(x+\Delta x-1)^2-(x-1)^2\to 0$ при $\Delta x\to 0$ для $\forall x\in[0,3]$. Она имеет обратную функцию $y=1+\sqrt{x}$ (см. упомянутый пример), строго возрастающую и непрерывную на отрезке $[0,4]$.

Замечание 4.2. Доказательства теорем 4.1 – 4.5 приведены, например, в [1].