§5. Ряды Тейлора

Только что сформулированные свойства позволяют решить важный для дальнейшего вопрос о том, как связаны коэффициенты степенного ряда с его суммой. Нам будет удобнее рассматривать степенной ряд общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ и обозначать его сумму через $f(x)$.

Теорема 5.1. ***Пусть функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, т.е.***

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \ x \in (a-\rho, a+\rho). \tag{5.1}$$

Тогда коэффициенты этого ряда выражаются через $f(x)$ и число a следующим образом:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

(Здесь, ради общности записи, считается условно, что $f^{(0)}(a) = f(a)$; $0! = 1$).

► По условию, равенство (5.1) имеет место при любом x из промежутка $(a-\rho, a+\rho)$. Положив в этом равенстве $x = a$, получим $c_0 = f(a)$.

Знаем, что для любого x из $(a-\rho, a+\rho)$:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots .$$

Полагаем в этом равенстве $x = a$, получаем $c_1 = f'(a)$.

Имеем далее для любого $x \in (a-\rho, a+\rho)$:

$$f''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots,$$

откуда при $x = a$ находим $f''(a) = 2!\cdot c_2 \ \Rightarrow \ c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$.

Продолжая так далее, получим требуемое. ◄

Замечание 5.1. Если функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, то этот ряд может быть записан в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n . \tag{5.2}$$

Заметим здесь же, что ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ может быть построен формально для каждой функции $f(x)$, имеющей в точке a производные любого порядка. Этот ряд называют рядом Тейлора функции $f(x)$ (причём он называется так не зависимо от того, сходится он или нет, и не зависимо от того, равна его сумма $f(x)$ или нет).

При $a = 0$ будем иметь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, который называют также рядом Маклорена функции $f(x)$. Непосредственным следствием из теоремы 5.1 является следующая, важная для дальнейшего теорема:

Теорема 5.2 (о тождественном равенстве двух степенных рядов). ***Пусть имеются два степенных ряда*** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ***и*** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$. ***Если эти ряды в некотором промежутке*** $(a-\rho, a+\rho)$ ***имеют одну и ту же сумму*** $f(x)$, ***то они тождественны, т. е.***

$$a_0 = b_0; \quad a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad \ldots; \quad a_n = b_n; \quad \ldots .$$

► По теореме 4.1 имеем:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \; b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \Rightarrow \quad a_n = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \blacktriangleleft$$