§3. Операция транспонирования матриц и её свойства

Определение 3.1. *Если в матрице* A *размера* т×п *заменить строки на столбцы, то получится матрица размера* п×т, *называемая* транспонированной *по отношению к матрице* A.

Транспонированная матрица обозначается A^T, *таким образом, если*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.1. *Дана матрица* $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Найти матрицу* A^T.

► *Имеем* $A^T=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$. ◄

Диагональная матрица совпадает со своей транспонированной. Для двух матриц A *и* A^T *всегда определена операция умножения.*

Свойства операции транспонирования

1. $(A^T)^T=A$.
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$.
3. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

Первые три свойства проверяется непосредственно с помощью определения 3.1 и определений 1.2, 1.3. Доказательство свойства 4 приведено, например, в [3]. Здесь справедливость свойства 4 мы проверим на следующем примере.

Пример 3.2. *Даны матрицы* $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Проверить справедливость равенства:* $(AB)^T=B^TA^T$.

► $AB=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $(AB)^T=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$B^TA^T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$ ◄