§2. Прямая как линия первого порядка.
Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору

Введём на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy и рассмотрим уравнение первой степени относительно x, y:

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0. \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1. Любая прямая на плоскости может быть задана в произ-вольной прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (2.1).

►Пусть L – любая прямая на плоскости. Введём на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпала с L (рис. 2.1). Равенство $y = 0$ есть уравнение L в выбранной системе координат, ибо ему удовлетворяют координаты любой точки L и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих L. Кроме того, это уравнение первой степени, так как оно получается из (2.1) при A =0, B=1, C=0. При выборе любой другой прямоугольной декар-товой системы координат порядок алгебраической линии не изменяется (теорема 1.1), поэтому и в новой системе координат прямая L будет задана уравнением первой степени, т.е. уравнением вида (2.1).◄

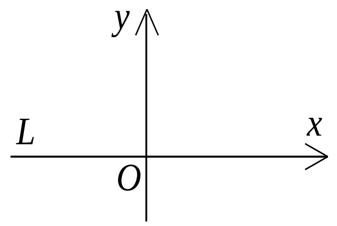

Рис. 2.1. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.1

Теорема 2.2. Любое уравнение вида (2.1) определяет на плоскости прямую.

►Уравнение (2.1) в силу условия $A^2 + B^2 \neq 0$ имеет хотя бы одно решение. Например, если $A \neq 0$, то $x = -C/A$, $y = 0$ – решение этого уравнения. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ – любое решение (2.1), имеем

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (2.2)$$

Вычтем из уравнения (2.1) почленно последнее равенство. После перегруппировки слагаемых получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2.3)$$

Левую часть уравнения (2.3) можно считать скалярным произведением векторов $\vec{n} = (A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $M_0\,(x_0, y_0)$, $M(x, y)$. Это скалярное произведение равно нулю, поэтому векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны. Рассмотрим прямую L, проходящую через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (рис. 2.2). Координаты любой точки $M(x, y)$ этой прямой удовлетворяют уравнению (2.3), ибо векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны, а координаты любой точки $M'(x', y')$, не принадлежащей L, ему не удовлетворяют, так как векторы $\overrightarrow{M_0M'}$ и $\vec{n}$ неорто-гональны (рис. 2.2). Итак, равенство (2.3) по определению является уравнением прямой L. Покажем, что и уравнение (2.1) является уравнением этой же прямой. Раскроем скобки в левой части (2.3) и перегруппируем слагаемые:

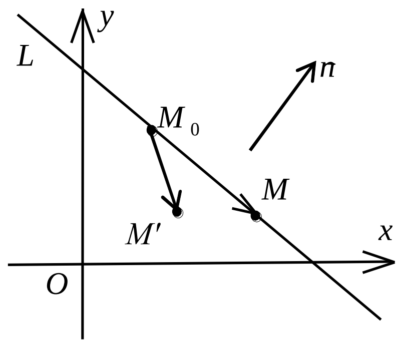

Рис. 2.2. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.2

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

Заменив $-Ax_0 - By_0$ в силу (2.2) на *C*, приходим к уравнению (2.1). ◄

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что прямая на плоскости и только она является линией первого порядка.

Уравнение (2.1) называется *общим уравнением* прямой на плоскости. Его коэффициенты *A* и *B* имеют определённый геометрический смысл, а именно, они являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного прямой, определяемой этим уравнением. Этот вектор называется *вектором нормали*, или *нормальным вектором* к данной прямой.

Уравнение (2.3) при различных значениях коэффициентов *A, B* задаёт все прямые плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0)$. Оно называется *уравнением пучка прямых с центром в точке* M_0. Выбор конкретных значений *A* и *B* в (2.3) соответствует выбору той прямой пучка, которая проходит через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$ (рис. 2.3).

В случае, когда один из коэффициентов *A* или *B* равен нулю, уравнение (2.1) задаёт прямую, параллельную одной из осей координат, а именно, при $A = 0$ – прямую, параллельную оси *Ox*, а при $B = 0$ – оси *Oy*. При $C = 0$ уравнение (2.1) задаёт прямую, проходящую через начало координат.

Пример 2.1. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(-1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, -2)$.

► Напишем уравнение пучка прямых с центром в точке $M_0(-1, 2)$:

$$A(x+1) + B(y-2) = 0. \qquad (2.3)$$

Коэффициентами уравнения (2.3), как отмечено выше, являются координаты вектора нормали к прямой L, каковым здесь можно считать вектор $\vec{n} = (3, -2)$ из условия задачи. Подставив в (2.3) вместо *A* и *B* координаты вектора $\vec{n}$, после очевидных преобразований получаем уравнение прямой $L: 3x - 2y + 7 = 0$. ◄

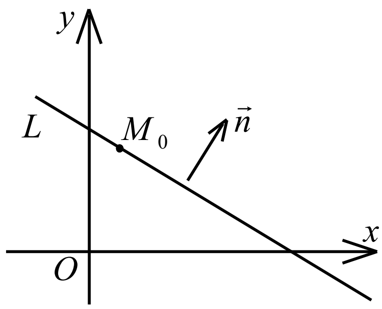

Рис. 2.3. К уравнению пучка прямых

Пример 2.2. При каком значении параметра α прямая $L: (\alpha^2 - 4)x + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)y + \alpha - 4 = 0$: 1) параллельна оси абсцисс? 2) параллельна оси ординат? 3) проходит через начало координат?

► Параметр $\alpha \neq 2$, иначе коэффициенты при x и y в данном уравнении обращаются одновременно в нуль, и оно не определяет никакой прямой.

1. $\alpha^2 - 4 = 0$ и $\alpha \neq 2$, отсюда $\alpha = -2$. Уравнение L имеет вид $y = 1/2$.
2. $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, $\alpha \neq 2$, отсюда $\alpha = 1$. Уравнение L имеет вид $x = -1$.
3. $\alpha = 4$, её уравнение имеет вид $2x + y = 0$. ◄