§2. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{2.1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т. е.

$$dU(x,y)\equiv P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\,. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) на интегральной кривой $y=y(x)$ запишется тогда в виде $dU(x,y)=0$, т. е. $dU\big(x,y(x)\big)\equiv 0$. По свойству инвариантности формы записи полного дифференциала имеем

$$U'_x dx+U'_y dy=0 \quad\Rightarrow\quad U'_x dx+U'_y y'_x dx=0 \quad\Rightarrow\quad (U'_x+U'_y y'_x)\,dx=0\,.$$

Так как $dx\neq 0$, то из последнего равенства следует $U'_x+U'_y y'_x=0 \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{d}{dx}U\big(x,y(x)\big)=0$, откуда $U\big(x,y(x)\big)=C$, где C – произвольная постоянная.

Таким образом,

$$U(x,y)=C \tag{2.3}$$

– общий интеграл уравнения (2.1). Равенство (2.3) определяет в неявном виде общее решение $y=y(x,C)$ уравнения (2.1).

Задача, таким образом, состоит в нахождении функции $U(x,y)$. Из (2.2) по определению полного дифференциала имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U(x,u)}{\partial x}&=P(x,y),\\ \frac{\partial U(x,u)}{\partial y}&=Q(x,y).\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Из первого уравнения системы (2.4) находим

$$U(x,y)=\int P(x,y)\,dx+C(y)\,,$$

где $C(y)$ – произвольная дифференцируемая функция от y.

В силу второго уравнения системы (2.4) получим

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\Big(\int P(x,y)\,dx\Big)'_y+C'(y)=Q(x,y)\,,$$

откуда

$$C'(y)=Q(x,y)-\Big(\int P(x,y)\,dx\Big)'_y\,. \tag{2.5}$$

Обозначая правую часть равенства (2.5) через $A(y)$, будем иметь $C'(y)=A(y) \quad\Rightarrow$ $C(y)=\int A(y)\,dy \quad\Rightarrow$

$$U(x,y)=\int P(x,y)\,dx+\int A(y)\,dy\,;$$

тогда в соответствии с (2.3) общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\int P(x,y)\,dx+\int A(y)\,dy=C\,,$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. Определим условие, при котором левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$.

В предположении непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области (D) из системы (2.4) получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial P}{\partial y},\\ \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad \forall(x,y)\in D$$

(здесь используется теорема о равенстве вторых смешанных производных).

Итак, если уравнение (2.1) является уравнением в полных дифференциалах, то выполнено следующее необходимое условие:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,. \tag{2.6}$$

Это условие является также и достаточным для того, чтобы левая часть уравнения (2.1) была полным дифференциалом. Достаточность будет доказана позже в разделе “Кратные и криволинейные интегралы”.

Пример. Решить уравнение

$$2x\sin y\,dx+(x^2+1)\cos y\,dy=0\,. \tag{2.7}$$

▶ Здесь $P(x,y)=2x\sin y$, $Q(x,y)=(x^2+1)\cos y$. Проверим, выполняется ли условие (2.6):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos y\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=2x\sin y,\\ \frac{\partial U}{\partial y}&=(x^2+1)\cos y.\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Из первого уравнения (2.8) следует

$$U=\int 2x\sin y\,dx=x^2\sin y+C(y)\,, \tag{2.9}$$

откуда в силу второго уравнения (2.8) получаем равенство

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2\cos y+C'(y)=(x^2+1)\cos y\quad\Rightarrow\quad C'(y)=\cos y\quad\Rightarrow\quad C(y)=\sin y\,.$$

Тогда из (2.9) следует

$$U = x^2 \sin y + \sin y \quad \Rightarrow \quad U = (x^2+1)\sin y,$$

откуда

$$(x^2+1)\sin y = C \tag{2.10}$$

– общий интеграл уравнения (2.7). Из (2.10) находим

$$y = \arcsin \frac{C}{x^2+1} \tag{2.11}$$

– общее решение дифференциального уравнения (2.7).

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=1} = \frac{\pi}{4}$. Подставляя в (2.10) или (2.11) $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}$, имеем $C=\sqrt{2}$, так что искомым частным решением будет

$$y = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x^2+1}. \tag{2.12}$$

График этой функции изображён на рис. 2.1. ◀

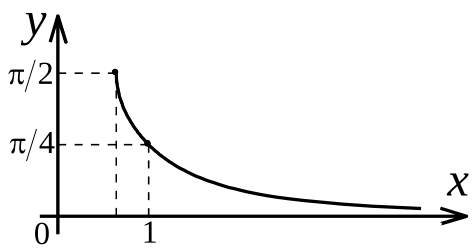

Рис. 2.1. Интегральная кривая (2.12)