§4. Вещественные алгебраические многочлены и их разложение на неприводимые множители на множестве вещественных чисел

Алгебраический многочлен $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$ называют *вещественным многочленом*, если все его коэффициенты – вещественные числа: $p_k \in \boldsymbol{R}$, $k=0,1,\ldots,n$. Значения, принимаемые вещественным многочленом в точках вещественной оси, являются вещественными числами:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}x^k \in \boldsymbol{R}, \quad \forall\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Важная особенность таких многочленов отражена следующей теоремой.

Теорема 4.1. Если число $z=\alpha+i\beta$ является корнем кратности k алгебраического вещественного многочлена $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами, то сопряженное число $\bar{z}=\alpha-i\beta$ также является корнем $P_n(z)$ той же кратности.

► В силу признака кратности корня $P_n(z)$ (теорема 3.1) имеем:

$$P(\alpha+i\beta)=P'(\alpha+i\beta)=P''(\alpha+i\beta)=\ldots=P^{(k-1)}(\alpha+i\beta)=0,\ \ P^{(k)}(\alpha+i\beta)\neq 0\,.\qquad(4.1)$$

Перейдём в (4.1) к сопряжённым числам. Поскольку $\bar{p}_k=p_k$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, то этот переход сводится к замене $\alpha+i\beta$ на $\alpha-i\beta$. В силу свойств операции сопряжения (глава 1, §4) с учётом равенства $\overline{0}=0$ из (4.1) получаем:

$$P(\alpha-i\beta)=P'(\alpha-i\beta)=P''(\alpha-i\beta)=\ldots=P^{(k-1)}(\alpha-i\beta)=0,\ \ P^{(k)}(\alpha-i\beta)\neq 0\,.$$

Отсюда, в силу признака кратности корня многочлена (теорема 3.1), следует, что число $\bar{z}=\alpha-i\beta$ является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$.◄

Пусть $P_n(z)$ – вещественный многочлен степени n, $n\geq 1$; $a_1,a_2,\ldots,a_m$, $m\leq n$, – все его попарно различные корни, а $k_1,k_2,\ldots,k_m$ – кратности этих корней. Допустим, что $a_1=\alpha+i\beta$, где $\beta\neq 0$. По теореме 4.1 число $\bar{a}_1=\alpha-i\beta$ также является корнем $P_n(z)$ кратности k_1. Значит, в разложении (3.6) среди множителей $(z-a_2)^{k_2}(z-a_3)^{k_3}\ldots(z-a_m)^{k_m}$ имеется множитель $(z-\bar{a}_1)^{k_1}$. Заметим, что

$(z-a_1)^{k_1}(z-\bar{a}_1)^{k_1}=(z^2+bz+c)^{k_1}$, где $b=-a_1-\bar{a}_1=-2\alpha;\ c=a_1\bar{a}_1=|\,a_1\,|^2=\alpha^2+\beta^2$. Итак, объединив множители, отвечающие паре комплексных сопряжённых корней, получаем квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами в степени, равной кратности каждого из этих корней. Дискриминант D этого трёхчлена отрицателен: $D=b^2-4c=4\alpha^2-4(\alpha^2+\beta^2)=-4\beta^2<0$, так как $\beta\neq 0$.

Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_l$ – все вещественные числа в ряду $a_1,a_2,\ldots,a_m$ попарно различных корней рассматриваемого многочлена $P_n(z)$, k_j – кратность x_j, $j=1,2,\ldots,l$. Остальные числа этого ряда – комплексные с ненулевой мнимой частью. Поскольку их чётное количество (теорема 4.1), то они разбиваются на некоторое количество пар сопряжённых друг другу корней: z_1 и $\bar{z}_1$, z_2 и

$\bar{z}_2$, … , z_s и $\bar{z}_s$, q_j – кратность каждого из корней z_j и $\bar{z}_j$, $j=1,2,\ldots,s$. Тогда из (2.1) получим:

$$P_n(z)=p_0(z-x_1)^{k_1}\ldots(z-x_l)^{k_l}\big((z-z_1)(z-\bar{z}_1)\big)^{q_1}\ldots\big((z-z_s)(z-\bar{z}_s)\big)^{q_s},$$
$$k_1+\ldots+k_l+2q_1+\ldots+2q_s=n.$$

Отсюда

$$P_n(z)=p_0(z-x_1)^{k_1}\ldots(z-x_l)^{k_l}(z^2+b_1z+c_1)^{q_1}\ldots(z^2+b_sz+c_s)^{q_s}, \quad (4.2)$$
$$k_1+\ldots+k_l+2q_1+\ldots+2q_s=n.$$

Это представление вещественного многочлена называют его разложением на вещественные множители, линейные и квадратные. Квадратные множители представляют собой квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами и отрицательными дискриминантами; каждый из них имеет пару комплексных сопряженных корней с ненулевыми мнимыми частями. Разложение (4.2) называют разложением на *неприводимые множители на множестве вещественных чисел* в том смысле, что квадратные трёхчлены в (4.2) не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами.

Пример 4.1. Многочлен $P_5(z)$ из примера 2.1 является вещественным многочленом, он имеет простой вещественный корень $z_1=-1$ и пару комплексных сопряженных корней $z_2=i$, $z_3=-i$ кратности 2. Справедливо представление:

$$P_5(z)=(z+1)(z-i)^2(z+i)^2=(z+1)\big((z-i)(z+i)\big)^2=(z+1)(z^2+1)^2, \ \forall z\in\boldsymbol{C}.$$

так что разложение вида (4.2) для $P_5(z)$ выглядит так: $P_5(z)=(z+1)(z^2+1)^2$.

Пример 4.2. Многочлен $P_6(z)=z^6+64$ является вещественным многочленом, у него 3 пары комплексных сопряженных корней: $z_{1,2}=\pm 2i$, $z_{3,4}=\sqrt{3}\pm i$, $z_{5,6}=-\sqrt{3}\pm i$ (пример 2.2). Объединив в разложении этого многочлена множители, соответствующие сопряжённым корням, получаем разложение вида (4.2):

$$P_6(z)=z^6+64=(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4).◄$$