§1. Линейные операции с матрицами и их свойства

В главе 1 было введено понятие числовой матрицы A как прямоугольной таблицы чисел (см. гл.1, §1, п. 3°). Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

содержит m строк и n столбцов. Говорят, что она имеет *размер* $m\times n$, для неё принято также обозначение $A_{m\times n}$. Элементы матрицы A обозначают малыми латинскими буквами с двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, в которой стоит элемент, а второй – номер столбца, так, например, элемент a_{ij} стоит в i-ой строке и в j-ом столбце матрицы A.

Определение 1.1. Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны, т. е.

$$A_{m\times n}=B_{k\times l} \Leftrightarrow \begin{cases} m=k, \\ n=l, \\ a_{ij}=b_{ij}, i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

При $m=n$ матрица (1.1) называется *квадратной*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы равны нулю, кроме находящихся на главной диагонали (т.е. кроме элементов $a_{ii}, i=1,2,\ldots,n$). *Единичные* матрицы – частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* или *нуль-матрицей*. Единичную матрицу будем обозначать через E, а нуль-матрицу – через O.

Пример 1.1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Указать размер каждой матрицы; б) какие матрицы являются квадратными, диагональными?

►а) Размеры матриц: A – 2×2, B – 2×3, C – 3×2, D – 3×3; б) квадратными являются матрицы A и D, а диагональной – только матрица D. ◄

Определение 1.2. *Суммой* двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой суть суммы соответствующих элементов матриц слагаемых, т. е.

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$

Принято обозначение $C=A+B$.

Итак, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\text{, **то**}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

► $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+1 & 2+2 & 3+3 & -2+4 \\ 3+4 & -3+3 & 2+2 & 0+1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.◄

Определение 1.3. *Произведением* матрицы A размера $m\times n$ на вещественное число λ называется матрица того же размера, обозначаемая λA или $A\lambda$, элементы которой есть произведения соответствующих элементов матрицы A на число λ.

Таким образом, $\lambda A = A\lambda = \lambda\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Дана матрица A из примера 1.2. Найти $3A$.

► $3A=3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -6 \\ 9 & -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.◄

Определение 1.4. Операции сложения матриц и умножения матрицы на вещественное число называются *линейными операциями* с матрицами.

Свойства линейных операций с матрицами

1. $A+B=B+A$ – коммутативность (переместительный закон) сложения.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативность (сочетательный закон) сложения.
3. Для любой матрицы A существует единственная матрица, равная нуль-матрице O, такая что $A+O=A$.
4. Для любой матрицы A существует единственная матрица $(-A)$, называемая *противоположной*, такая что $A+(-A)=O$, где O – нуль-матрица.
5. $1\cdot A=A$.
6. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

7. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.
8. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Замечание 1.1. Во всех восьми свойствах λ, μ – произвольные вещественные числа, а *A*, *B*, *C*, *O* – матрицы, для которых осуществимы указанные в этих свойствах операции. При этом все вышеприведённые равенства понимаются так, что если определена правая часть равенства, то определена и левая, и наоборот, при этом матрицы в левой и правой частях равенств равны между собой. Все перечисленные свойства следуют непосредственно из определений 1.2, 1.3.

Замечание 1.2. Матрица (– *A*) из свойства 4 равна $(-1)\cdot A$.

Пример 1.4. Для матрицы *A* из примера 1.2 найти противоположную, а также проверить, что $2A+3A=5A$.

$$► \ -A=(-1)A=(-1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix},$$

$$2A+3A=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -4\\ 6 & -6 & 4 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & -6\\ 9 & -9 & 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 10 & 15 & -10\\ 15 & -15 & 10 & 0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=5A. ◄$$