§2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

В этом параграфе рассматриваются знакопеременные ряды общего вида, когда знаки членов ряда не обязательно чередуются (или знаки чередуются, но теорема Лейбница неприменима из-за немонотонного убывания абсолютных величин членов ряда).

***1°. Общий признак сходимости рядов (критерий Коши).** Будем опять записывать ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{2.1}$$

Здесь через a_n обозначен n-й член ряда вместе со своим знаком.

Для того, чтобы ряд (2.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ ***отвечал номер*** N ***такой, что как только*** $n > N$, ***так сейчас же***

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{для любого } p \in \mathbb{N}.$$

Это и есть общий признак (критерий Коши) сходимости рядов.

2°. Абсолютная сходимость и условная сходимость. Наряду с рядом (2.1) рассмотрим ещё ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2.2}$$

(ряд (2.2) составлен из модулей членов ряда (2.1)).

Определение 2.1. ***Ряд (2.1) с членами любых знаков называется а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится ряд (2.2), составленный из модулей членов ряда (2.1).***

Теорема 2.1. ***Абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.***

▶ По условию, ряд (2.1) абсолютно сходящийся. Это означает, что сходится ряд (2.2). Составим два вспомогательных ряда:

$$\text{ряд } A\text{:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{и} \quad \text{ряд } B\text{:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2} .$$

Ряды A и B – положительные ряды, так как в силу свойств абсолютных величин имеем $|a_n| \ge a_n$ и $|a_n| \ge -a_n$. С другой стороны, $0 \le \dfrac{|a_n| + a_n}{2} \le |a_n|$ и $0 \le \dfrac{|a_n| - a_n}{2} \le |a_n|$. Но тогда по признаку сравнения ряды A и B сходятся, поскольку сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, и, следовательно, по свойству 2 рядов (§3, гл. 1) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|+a_n}{2}-\frac{|a_n|+a_n}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. ◄

Замечание 2.1. Доказанная теорема необратима. Может оказаться, что ряд (2.1) с членами разных знаков сходится, а ряд (2.2), составленный из модулей членов ряда (2.1), расходится.

Так, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится (он – знакочередующийся, удовлетворяющий условиям признака Лейбница). Ряд же, составленный из модулей членов этого ряда, а именно $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится (это гармонический ряд).

Определение 2.2. ***Ряд (2.1) с членами разных знаков называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд (2.2), составленный из модулей членов ряда (2.1), расходится.***

Изложенное выше приводит к разделению всех сходящихся рядов на два класса:

ряды абсолютно сходящиеся и ряды условно сходящиеся.

Отметим, что все сходящиеся *положительные* ряды входят в класс абсолютно сходящихся рядов.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ к ряду, составленному из модулей членов этого ряда, могут быть применены все признаки сходимости, установленные для положительных рядов. Но нужно быть осторожным с признаками расходимости. Было отмечено: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ оказывается расходящимся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ может все же сходиться (условно).

Замечание 2.2. Абсолютно сходящиеся ряды обладают целым рядом свойств, присущих конечным суммам (доказательство можно найти, например, в [1]):

1. Сходимость не нарушается и сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при произвольной перестановке его членов. Иначе говоря, для абсолютно сходящихся рядов справедлив переместительный закон сложения.
2. Два абсолютно сходящихся ряда можно перемножать как обыкновенные многочлены, т.е. каждый член одного ряда умножать на каждый член другого и результаты складывать в любом порядке; получающийся ряд тоже будет абсолютно сходящимся, и его сумма будет равна произведению сумм перемножаемых рядов.
3. Для абсолютно сходящегося ряда остается в силе свойство: «абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых»:

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (для доказательства достаточно взять неравенство $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots |a_n|$ и перейти в нём к пределу при $n \to \infty$).

Условно сходящиеся ряды этими свойствами не обладают. Например, в рядах, сходящихся условно, перестановка членов ряда недопустима. Перестановка членов в таких рядах может изменить сумму ряда или привести к нарушению сходимости ряда.