§5. Комплексная степень числа *e*. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Определение 5.1. Пусть $z = x + iy$. Число $e^x(\cos y + i\sin y)$ называют *комплексной степенью* числа *e* или *экспонентой* от *z* и обозначают через $\exp z$ или e^z. Таким образом, операция возведения числа *e* в комплексную степень $z = x + iy$ определяется формулой:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{5.1}$$

Например, $e^{2+3i} = e^2(\cos 3 + i\sin 3)$, $e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$,
$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

При $z = i\varphi$ из (5.1) следует равенство:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{5.2}$$

которое называется *формулой Эйлера*.

Свойства комплексной степени числа *e*

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.

2. Если $z = x + 0\cdot i$, то $e^z = e^{x+0\cdot i} = e^x$, т.е. для вещественных значений *z* комплексная степень числа *e* есть степень с вещественным показателем;

3. Для любого комплексного числа *z* справедливо равенство:

$$e^{z+2\pi ni} = e^z, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Предоставим читателю, используя определение 5.1, доказать эти свойства.

Пусть $z \in \boldsymbol{C}$, $z \neq 0$. Запишем это число в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Отсюда и из формулы Эйлера (5.2) вытекает следующее представление числа *z*:

$$z = re^{i\varphi},$$

которое называют *показательной формой* комплексного числа *z*.

Правила действий с комплексными числами, представленными в показательной форме

1. Пусть z_1 и z_2 – отличные от нуля комплексные числа, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ (здесь $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$). Тогда:

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

2. Пусть $z \in \boldsymbol{C}$, $z \neq 0$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $z^n = r^ne^{in\varphi}$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

3. Пусть $a \in \boldsymbol{C}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$. Тогда числа z_k,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\psi+2k\pi}{n}}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\rho = |a|$, $\psi = \arg a$, есть корни степени *n* из числа *a* (здесь $\sqrt[n]{\rho}$ есть арифметическое значение корня, т.е. $\sqrt[n]{\rho} > 0$).

Эти правила следуют из правил действий с комплексными числами записанных в тригонометрической форме.

Замечание 5.1. Формула Эйлера (5.2) позволяет получить выражения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, где $\varphi \in \boldsymbol{R}$, через чисто мнимую степень e. Действительно, заменив в (5.2) φ на $-\varphi$, с учетом свойства чётности косинуса и нечётности синуса имеем:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{5.3}$$

Рассмотрев равенства (5.2) и (5.3) как систему относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, найдём из неё $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \tag{5.4}$$