Примеры

Характеристики векторного поля.

<u>Пример 1</u>:

Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\bar{a}(M) = (x^2 + y) \cdot \bar{i} + (y^2 + z) \cdot \bar{j} + (z^2 + x) \cdot \bar{k}$$

Определить, что находится в точке $M_0(1;-2;3)$ - источник или сток.

<u>Решение:</u>

Дивергенция векторного поля находится по формуле:

$$div\,\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В нашем случае имеем:

$div\,\bar{a}(M) = (2x + 2x + 2z)\big|_{M_0} = 2 - 4 + 6 = 4 > 0$, следовательно в точке $M_0(1;-2;3)$ находится источник.

<u>Пример 2</u>:

Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = \{x - 2z; x + 3y + z; 5x + y\}$ вдоль кривой Γ, «пробегаемой» против часовой стрелки, если

Γ: треугольник ABC такой, что $A(1;0;0)$; $B(0;1;0)$ и $C(0;0;1)$.

<u>Решение:</u>

В нашем случае $\Gamma = \Gamma_{AB} \cup \Gamma_{BC} \cup \Gamma_{CA}$, где

Γ_{AB}: $y = 1 - x$; $z = 0$; $dz = 0$; $x \in [1; 0]$

Γ_{BC}: $z = 1 - y$; $x = 0$; $dx = 0$; $y \in [1; 0]$

Γ_{CA}: $z = 1 - x$; $y = 0$; $dy = 0$; $x \in [0; 1]$

Тогда циркуляция векторного поля $\bar{a}(M)$ в нашем случае равна:

$$circul_{\Gamma}\bar{a} = \oint_{\Gamma} (\,x - 2z)dx + (x + 3y + z)dy + (5x + y)dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{AB}} + \int\limits_{\Gamma_{BC}} + \int\limits_{\Gamma_{CA}} = \int\limits_{1}^{0} (x-0)dx + (x+3-3x)(-dx) +$$

$$+ \int\limits_{1}^{0} (0+3y+1-y)dy + (0+y)(-dy) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} (x - 2 + 2x)dx - (5x+0)(-dx) = \cdots = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.$$

<u>Пример 3</u>:

По формуле Стокса найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = \{y;\ x^2; -z\}$ вдоль кривой Γ, «пробегаемой» против часовой стрелки, если

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}.$$

<u>Решение:</u>

В качестве поверхности σ выбирем плоскость $z = 3$, ограниченную поверхностью $x^2 + y^2 = 4$.

Таким образом $\sigma: z = 3$.

$\Pi p_{xy}\sigma = D_{xy}: x^2 + y^2 = 4$; $\bar{n}_0 = \{0; 0; 1\}$ —нормаль к плоскости $z = 3$.

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (0-0)i + (0-0)\bar{\jmath} + (2x-1)\bar{k}.$$

Тогда

$$circul_{\Gamma}\bar{a}(M) = \iint\limits_{\sigma} rot\bar{a}(M) \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (2x-1)d\sigma =$$

т.к. нормаль $\bar{n}_0$ к поверхности σ $(z = 3)$ с положительным направлением оси Oz острый $(\bar{n}_0 || Oz)$, то перед двойным интегралом выбираем знак «+»

$$= + \iint\limits_{D_{xy}} (2x-1)\sqrt{1+0+0}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (2rcos\varphi - 1)rdr = -2\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$= -4\pi.$

<u>Пример 4</u>:

Найти направление и величину наибольшей плотности циркуляции векторного поля ***a****(M)* в точке M_0. Выяснить, что находиться в этой точке источник или сток , если

$$\bar{a}(M) = x^2\,\bar{\imath} - xy^2\bar{\jmath} + z^2\bar{k} \text{ и } M_0(0;1;-2).$$

<u>Решение:</u>

Направлению, вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность, соотвествует направление ротора векторного поля ***a****(M)*

в точке M_0

Найдем ротор векторного поля:

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -xy^2 & z^2 \end{vmatrix} = (0-0)\bar{\imath} + (0-0)\bar{\jmath} - y^2\bar{k}\,.$$

Т.о. направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность – это вектор с координатами $\{0;0;-y^2\}$. В точке M_0 этот вектор имеет координаты {0;0;-1} - направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность в точке M_0

Наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\bar{a}(M)$

равна $|rot\bar{a}(M_0)|$.

Следовательно, $|rot\bar{a}(M_0)| = \sqrt{0+0+1} = 1 -$ наибольшую плотность циркуляции векторного поля ***a****(M)* в точке M_0

Для ответа на вопрос, что находиться в этой точке источник или сток , надо найти дивергенцию векторного поля ***a****(M)* в точке M_0

$$div\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x - 2xy + 2z.$$

Тогда $div\bar{a}(M_0) = 0 + 0 - 4 = -4 < 0$, следовательно в точке M_0 векторное поле ***a***(M) имеет сток.