§5. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=q(x), \tag{5.1}$$

т. е.

$$L[y]=q(x). \tag{5.2}$$

Уравнение

$$L[y]=0 \tag{5.3}$$

однородное, соответствующее неоднородному уравнению (5.1).

Как строится общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения?

Теорема 5.1. ***Общее решение линейного неоднородного уравнения (5.1) равно сумме общего решения*** $Y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ ***соответствующего ему однородного уравнения (5.3) и частного решения*** $\tilde{y}$ ***неоднородного уравнения, т. е.*** $y=Y+\tilde{y}$ ***– общее решение уравнения (5.1).***

▶ $L[y]\equiv 0$, ибо Y – решение уравнения (5.3), $L[\tilde{y}]\equiv q(x)$, ибо $\tilde{y}$ – решение уравнения (5.1). Отсюда по первому свойству линейного дифференциального оператора имеем

$$L[Y+\tilde{y}]=L[Y]+L[\tilde{y}]\equiv 0+q(x)=q(x),$$

т. е. $L[Y+\tilde{y}]\equiv q(x)$. Таким образом, $y=Y+\tilde{y}$ – решение уравнения (5.1).

Для того, чтобы показать, что это решение общее, надо установить, что $C_1, C_2, \ldots, C_n$ существенные произвольные постоянные, т. е. что из решения

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n+\tilde{y}. \tag{5.4}$$

можно найти любое частное решение, удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}, \tag{5.5}$$

где x_0 – точка непрерывности коэффициентов $p_i(x)$, а $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ – любые заданные числа.

Из (5.4) и (5.5) получаем

$$\left.\begin{array}{l}C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0-\tilde{y}(x_0),\\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_0'-\tilde{y}'(x_0),\\ \cdot\\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}-\tilde{y}^{(n-1)}(x_0).\end{array}\right\} \tag{5.6}$$

Эта система уравнений с неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$ имеет по теореме Крамера единственное решение, так как определитель системы (5.6), равный определителю Вронского $W(x_0)$, не равен нулю вследствие того, что $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ – фундаментальная система уравнения (5.3). ◀

Теорема 5.2 (о суперпозиции решений). ***Если $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ – частные решения неоднородных уравнений, соответственно,***

$$L[y] = q_1(x), \quad L[y] = q_2(x),$$

то $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ – частное решение неоднородного уравнения

$$L[y] = q_1(x) + q_2(x). \tag{5.7}$$

▶ По условию теоремы

$$L[\tilde{y}_1] \equiv q_1(x), \quad L[\tilde{y}_2] \equiv q_2(x).$$

Следовательно,

$$L[\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2] \equiv L[\tilde{y}_1] + L[\tilde{y}_2] \equiv q_1(x) + q_2(x)$$

т. е. $L[\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2] \equiv q_1(x) + q_2(x)$, а это и значит, что функция $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ есть решение неоднородного уравнения (5.7). ◀