§2. Интегрирование функций, зависящих рационально от синуса и косинуса

Рассматриваются интегралы вида

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\, dx}. \tag{2.1}$$

Здесь $R(u,v)$ – функция, рационально зависящая от аргументов u, v. Это означает, что для нахождения значения функции над аргументами производятся только 4 арифметических действия.

Для отыскания интегралов вида (1.1) можно применить 4 типа подстановок, которые сводят интеграл (1) к интегралу от рациональной функции нового аргумента z:

$$\boxed{z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{(универсальная)}}. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos z = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}. \tag{2.3}$$

$$\boxed{z = \sin x}. \tag{2.4}$$

В этом случае подынтегральная функция должна обладать свойством $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

$$\boxed{z = \cos x}. \tag{2.5}$$

В этом случае подынтегральная функция должна обладать свойством $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

$$\boxed{z = \operatorname{tg} x}. \tag{2.6}$$

Тогда

$$x = \operatorname{arctg} z; \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}. \tag{2.7}$$

В этом случае подынтегральная функция должна обладать свойством $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ или рационально зависеть от $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.

Пример 2.1.

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left[z = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx = \frac{2dz}{1+z^2} \right] = \int \frac{2dz/(1+z^2)}{2+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} =$$

$$= \int \frac{2dz}{2+2z^2+1-z^2} = 2\int \frac{dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Пример ***2.2***.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \left[\sin x = z;\ \ dz = \cos x\, dx\right] = \int \frac{dz}{z^3} = \int z^{-3}dz = \frac{z^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C\,.$$

Пример 2.3.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \left[z = \operatorname{tg} x;\ \ \frac{dx}{\cos^2 x} = dz \right] = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x \cos^6 x} = \int \frac{(\sec^2 x)^2}{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^3 x}\, d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int \frac{(1+z^2)^2}{z^3}dz = \int\left(z^{-3} + \frac{2}{z} + z\right)dz = \frac{z^{-2}}{-2} + 2\ln|z| + \frac{z^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2z^2} + 2\ln|z| + \frac{1}{2}z^2 + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 2\ln\left|\operatorname{tg} x\right| + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z + C\,.$$

Определение 2.1. Если в результате выполненной подстановки данный интеграл становится интегралом от рациональной функции, то говорят, что данный интеграл *рационализировался*