Резюме

Число $a \in \mathbf{C}$ называют корнем алгебраического многочлена $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$, если $P_n(a) = 0$.

Всякий алгебраический многочлен степени $n \geq 1$ имеет хотя бы один корень (теорема Гаусса).

Число $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq n$, называется кратностью корня a многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен без остатка делится на $(z-a)^m$ при $m = 1,\ 2,\ \dots,\ k$ и не делится на $(z-a)^m$ при $m > k$.

Если $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m$ – все попарно различные корни многочлена $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$, $p_0 \neq 0$, а $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_m$ – кратность этих корней, то

1) $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$;

2) $P_n(z) = p_0 (z-a_1)^{k_1} (z-a_2)^{k_2} \ldots (z-a_m)^{k_m}$.

Многочлен $P_n(z)$ называют вещественным многочленом, если все его коэффициенты – вещественные числа.

Если число a является корнем вещественного многочлена, то и $\bar{a}$ – также корень, причем той же кратности что и a.

Пусть $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_l$ – все попарно различные вещественные корни вещественного многочлена $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$, $p_0 \neq 0$, а $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_l$ – кратности этих корней. Пусть, далее, z_1 и $\bar{z}_1$, z_2 и $\bar{z}_2$, … , z_s и $\bar{z}_s$ – все пары мнимых корней, а $q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s$ – кратности корней, входящих в соответствующую пару. Тогда

1) $k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2q_1 + 2q_2 + \ldots + 2q_s = n$;

2) $P_n(z) = p_0 (z-x_1)^{k_1} (z-x_2)^{k_2} \ldots (z-x_l)^{k_l} (z^2 + b_1 z + c_1)^{q_1} (z^2 + b_2 z + c_2)^{q_2} \ldots (z^2 + b_s z + c_s)^{q_s}$,

где трехчлен $z^2 + b_j z + c_j$ имеет корнями числа z_j и $\bar{z}_j$, $j = 1,\ 2,\ \dots,\ s$.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Что такое корень алгебраического многочлена $P_n(z)$? Что называют кратностью корня? Определите кратность корня $a = 1$ многочлена $P_4(z) = z^4 - (2-i)z^3 + (3+2i)z^2 - (4+i)z + 2$.

2. Числа $a_1 = 1$, $a_2 = -i$, $a_3 = 2i$ – все попарно различные корни многочлена $P(z)$, причем a_1 – корень кратности 2, а a_2 и a_3 – простые корни. Запишите разложение $P(z)$ на линейные множители, если его старший коэффициент $p_0 = 1$; найдите его другие коэффициенты.

3. В чем состоит свойство корней вещественного многочлена? Число $a_1 = -1 + i$ является корнем многочлена $P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$; найти остальные корни $P_4(z)$, записать его разложение на вещественные множители первой и второй степени.

Ответы на контрольные вопросы

1. Кратность равна 2.
2. $P(z) = (z-1)^2(z+i)(z-2i) = z^4 - (2+i)z^3 + (3+2i)z^2 - (4+i)z + 2$.
3. $P_4(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$.