§ 1. Введение

Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена, можно использовать для нахождения пределов функций, приближенного вычисления значений функций, определенных интегралов и приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Напомним, что рядом Тейлора для функции $f(x)$, если функция определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке конечные производные, является степенной ряд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (1.1)$$

Чтобы функция $f(x)$ была суммой этого ряда для значений x из некоторого промежутка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad (1.2)$$

где $r_n(x) -$ остаток ряда:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2} + \cdots \quad (1.3)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (1.4)$$

Обычно в задачах на приближенные вычисления используются ряды Маклорена для следующих функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad |x| < \infty; \quad (1.5)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty; \quad (1.6)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty; \quad (1.7)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \le 1; \qquad (1.8)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\big(m-(n-1)\big)}{n!}x^n + \cdots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1;1], \text{если } m \ge 0 \\ (-1;1], \text{если } -1 < m < 0 \\ (-1;1), \text{если } m \le -1 \end{cases}; \qquad (1.9)$$

Из последней формулы при $m = -1$ получим два частных случая:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \ -1 < x < 1; \qquad (1.10)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \ -1 < x < 1; \qquad (1.11)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad -1 < x < 1; \qquad (1.12)$$

$$arcsinx = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

$$-1 \le x \le 1; \qquad (1.13)$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty; \qquad (1.14)$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty. \qquad (1.15)$$

§ 2. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ с заданной точностью $\delta > 0$.

Если известно разложение функции $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \qquad (2.1)$$

и $x_0 \in (-R;R)$, то точное значение $f(x_0)$ равно сумме этого бесконечного ряда при $x = x_0$, т.е.

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots \tag{2.2}$$

Приближенное значение $f(x_0)$ будет равно частичной сумме $S_n(x_0)$, т.е.

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) \approx a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n. \tag{2.3}$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n.

Ограничеваясь определенным числом членов ряда, находим значение функции с точностью δ, которую можно установить путем оценивания остатка числового ряда $r_n(x_0)$ либо остаточного члена $R_n(x_0)$ формулы Маклорена.

Если данный ряд знакопостоянный, то ряд составленный из отброшенных членов $r_n(x_0)$, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией или с помощью остаточного члена в формуле Маклорена в форме Лагранжа

$$|R_n(x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x_0^{n+1}\right|, \text{ где } 0 < \text{c} < x_0 . \tag{2.4}$$

В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка

$$|r_n(x)| < u_{n+1} , \tag{2.5}$$

где u_{n+1} – первый из отброшенных членов ряда.

Пример 1.

Вычислить значение $cos 18^0$ с точностью до $\delta = 0{,}0001$.

Решение.

Используем разложение функции $cosx$ в ряд Маклорена:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots , \qquad |x| < \infty.$$

Подставим в этот ряд $x = 18^0 = \frac{18 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{10}$:

$$cos 18^0 = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^8}{8!} - \cdots ;$$

$$\frac{\pi}{10} \approx 0{,}31416; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \approx 0{,}09870; \quad \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} \approx 0{,}00974; \quad \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^6}{6!} \approx 0{,}000032.$$

Для приближенного вычисления значения $cos18^0$ с заданной точностью воспользуемся свойством знакочередующегося сходящего ряда. Заметим, что абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше $0{,}0001$, т.е.

$$\left| - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^6}{6!} \right| < 0{,}0001.$$

Поэтому достаточно взять сумму трех первых членов ряда:

$$cos18^0 \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24} \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}04935 + 0{,}00040 \approx 0{,}95105 \approx 0{,}9511.$$

Ответ: $cos18^0 \approx 0{,}9511$ с точностью до $\delta = 0{,}0001$

Пример 2.

Вычислить значение $e^{1/2}$ с точностью до $\delta = 0{,}00001.$

Решение.

Используем разложение функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad |x| < \infty. \qquad (\text{п}2.1)$$

Оценим погрешность приближенного равенства

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\ . \qquad (\text{п}2.2)$$

Она определяется суммой членов , следующих после $\frac{x^n}{n!}$ в разложении e^x:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots,$$

или

$$r_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$$

Заметим, что $(n+1) < (n+2)$;

$(n+1) < (n+3),$

$(n+1) < (n+4),$

и так далее

Тогда можно записать

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \cdots\right).$$

В скобках стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, просуммировав которую $\left(S = \frac{b_1}{1-q} \text{ в нашем случае } b_1 = \frac{x}{n+1},\ \ q = \frac{x}{n+1}\right)$, получим:

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x/(n+1)}{1 - x/(n+1)} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

Таким образом погрешность приближенного равенства (п2.2) оценивается по формуле:

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}. \qquad (п2.3)$$

Теперь перейдем непосредственно к решению исходной задачи.

Подставим в ряд (п2.1) $x = 1/2$:

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 2^n} + \cdots.$$

Определим число n так, чтобы погрешность приближенного равенства

$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 2^n}. \qquad (п2.4)$$

не превышала $\delta = 0{,}00001$.

Для этого воспользуемся равенством (п2.3), полагая $x = 1/2$.

Тогда получим :

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} = \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{1/2}{n+1/2} = \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{1}{2n+1}. \qquad (п2.5)$$

Путем подбора определим, при каком значении n будет выполняться неравенство $r_n < 0{,}00001$.

Если , например, $n = 4$, получаем

$$r_4 < \frac{1}{24 \cdot 16 \cdot 9} = \frac{1}{3456} > \frac{1}{100000}.$$

Если $n = 5$, получаем

$$r_5 < \frac{1}{32 \cdot 120 \cdot 11} = \frac{1}{42240} > \frac{1}{100000}.$$

Если $n = 6$, получаем

$$r_6 < \frac{1}{64 \cdot 720 \cdot 13} = \frac{1}{599040} < \frac{1}{100000}.$$

Таким образом, подставляя в равенство (п2.4) $n = 6$, получим требуемый результат:

$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \frac{1}{4! \cdot 2^4} + \frac{1}{5! \cdot 2^5} + \frac{1}{6! \cdot 2^6} \approx$$

$$\approx 1{,}000000 + 0{,}500000 + 0{,}125000 + 0,020833 + 0{,}002604 + 0,000260 + 0{,}000022 \approx$$

$$\approx 1{,}648719.$$

Каждое слогаемое в последнем равенстве вычислено с точностью до 0, 000001, чтобы при суммировании не получить погрешности, превышающей заданную.

Замечание.

Оценку остатка ряда можно произвести с помощью остаточного члена в формуле Маклорена в форме Лагранжа (2.4):

$$|R_n(x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x_0^{n+1}\right|, \text{где } 0 < \mathrm{c} < x_0$$

В нашем случае $x_0 = 1/2$:

$$R_n(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad \text{где } 0 < \mathrm{c} < 1/2.$$

Так как $e^c < e^{1/2} < 2$, то

$$R_n(1/2) < \frac{2}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}$$

При $n = 5$ имеем:

$$R_5(1/2) < \frac{2}{6! \cdot 2^6} = \frac{1}{6! \cdot 2^5} = \frac{1}{720 \cdot 32} = \frac{1}{23040} > \frac{1}{100000}$$

При $n = 6$ имеем:

$$R_6(1/2) < \frac{2}{7! \cdot 2^7} = \frac{1}{7! \cdot 2^6} = \frac{1}{5040 \cdot 64} = \frac{1}{322560} < \frac{1}{100000}.$$

Таким образом, мы получили, что подставив в равенство (п2.4) $n = 6$, получим требуемый результат.

Ответ: $e^{1/2} \approx 1{,}648719$ с точностью до $\delta = 0{,}00001$.

Пример 3.

Вычислить значение $ln1{,}1$ точностью до $\delta = 0{,}0001$

Решение.

Рассмотрим ряд Маклорена для функции $\ln{(x+1)}$:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \le 1.$$

Подставим в этот ряд $x = 0{,}1$:

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + \cdots$$

Для приближенного вычисления значения $\ln 1{,}1$ с заданной точностью воспользуемся свойством знакочередующегося сходящего ряда. Заметим, что абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше $0{,}0001$, т.е.

$$\left| - \frac{0{,}1^4}{4} \right| < 0{,}0001.$$

Поэтому достаточно взять сумму трех первых членов ряда:

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} \approx 0{,}0953$$

Ответ: $\ln 1{,}1 \approx 0{,}0953$ с точностью до $\delta = 0{,}0001$

Пример 4

Вычислить значение $ln2$ с точностью до $\delta = 0{,}0001$.

Решение.

Рассмотрим ряд Маклорена для функции $\ln(x+1)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \le 1,$$

для которого известно, что при $x = 1$ этот ряд сходится условно.

Для того, чтобы вычислить $ln2$ с помощью данного ряда с точностью до $\delta = 0{,}0001$, необходимо взять очень многочленов этого ряда.

Поэтому воспользуеся разложением в ряд Маклорена функции

$$f(x) = ln\frac{x+1}{x-1},$$

которое получим в результате вычитания степенных рядов
для функций $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$.

Заметим, что

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 \le x < 1.$$

Тогда

$$ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots\right) =$$

$$= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots =$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right).$$

Таким образом, мы получили разложение функции $ln\frac{x+1}{x-1}$ в ряд Маклорена:

$$ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right), \quad -1 < x < 1. \qquad (п4.1)$$

Теперь для решения исходной задачи воспользуемся разложением (п4.1). Для этого положим $\frac{x+1}{x-1} = 2$ и найдем значение $x = 1/3$.

Подставляя значение $x = 1/3$ в ряд (п4.1), получим

$$ln2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} + \cdots\right).$$

Для вычисления $ln2$ с заданной точностью необходимо найти такое значение n , при котором $|r_n| < \delta$. В нашем случае

$$r_n = 2\left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5) \cdot 3^{2n+5}} + \cdots\right)$$

Заметим, что $(2n+1) < (2n+3)$,

$(2n+1) < (2n+5)$,

$(2n+1) < (2n+7)$,

и так далее.

Поэтому можно записать следующее неравенство:

$$r_n < \frac{2}{(2n+1)}\left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+5}} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \cdots\right) =$$

Здесь в скобках стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, просуммировав которую $\left(S = \frac{b_1}{1-q} \text{ в нашем случае } b_1 = 1,\ \ q = \frac{1}{9}\right)$, получим

$$= \frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\left(\frac{1}{1-1/9}\right) = \frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}$$

Таким образом, мы получили:

$$r_n < \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}\ .$$

Путем подбора определим n так, чтобы выполнялось неравенство $r_n < 0{,}0001$:

$$\text{если } n = 2, \text{то } \ r_2 \approx \frac{1}{540} \approx 0{,}00185 > 0{,}0001;$$

$$\text{если } \ n = 3, \ \text{ то } \ r_3 \approx \frac{1}{6804} \approx 0{,}00015 > 0{,}0001;$$

$$\text{если } n = 4, \ \text{ то } \ r_4 \approx \frac{1}{78732} \approx 0{,}00001 < 0{,}0001;$$

Итак, при $n = 4$ получим

$$ln2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}66667+0{,}02469+0{,}00165+0{,}00013=0{,}69314 \approx 0{,}6931$$

Ответ: $\ln 2 \approx 0{,}6931$ с точностью до $\delta = 0{,}0001$.

Пример 5.

Вычислить значение $\sqrt[4]{17}$ точностью до $\delta = 0{,}0001$.

Решение.

Возьмем ряд Маклорена для функции $(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n+\cdots, \qquad -1<x<1. \qquad (\text{п}5.1)$$

Для использования этого ряда при решении нашего примера преобразуем корень

$$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/4}$$

Полагая $x=\frac{1}{16}$ и $m=1/4$, применим ряд (п5.1):

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/4} = 2\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-\cdots\right)$$

Для приближенного вычисления значения $\sqrt[4]{17}$ с заданной точностью воспользуемся свойством знакочередующегося сходящего ряда. Заметим, что абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше $0{,}0001$, т.е.

$$\left|2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}\right| < 0{,}0001.$$

Поэтому достаточно взять сумму трех первых членов ряда:

$\sqrt[4]{17} \approx 2\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}\right) \approx 2(1+0{,}01562-0{,}00037) \approx 2{,}0305.$

Ответ: $\sqrt[4]{17} \approx 2{,}0305$ с точностью до $\delta = 0{,}0001$.

§ 3. Вычисление пределов с помощью степенных рядов

Для вычисления пределов при $x \to x_0$ используют разложение функций, в ряды Тейлора (или Маклорена) в окрестности точки x_0.

Пример 6.

$$\text{Вычислить} \quad \lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{3x^3}.$$

Решение.

Так как в нашем случае $x_0 = 0$, то используем разложение функции $sinx$ в ряд Маклорена:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty.$$

Тогда

$$\frac{sinx - x}{3x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots - x}{3x^3} =$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{3x^3} =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{x^2}{3\cdot 5!} - \frac{x^6}{3\cdot 6!} + \cdots$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{3x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{x^2}{3\cdot 5!} - \frac{x^6}{3\cdot 6!} + \cdots = -\frac{1}{18}$$

Ответ: $\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{3x^3} = -\frac{1}{18}$

Пример 7.

$$\text{Вычислить } \lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - sinx}.$$

Решение.

Используем разложения функций $sinx$ и e^x в ряд Маклорена:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad |x| < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - sinx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2 + \frac{2x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!}\dots) - 2 - 2x - x^2}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{2x^5}{5!}\dots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\frac{2x^2}{5!}\dots\right)}{x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\cdots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\frac{2x^2}{5!}+\cdots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\cdots}=2$$

Ответ: $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-sinx}=2.$

§ 4. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов

Степенные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции либо нахождение первообразной сложно.

Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до $\delta > 0.$
Если известно разложение функции $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

и $[a;b]\subset(-R;R)$, то для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

используют свойство почленного интегрирования этого ряда, при этом интервал сходимости $(-R;R)$, полученного после интегрирования ряда, сохраняется.

Ошибку вычислений определяют так же, как при вычислении значений функций.

Пример 8.

Разложить в ряд Маклорена неопределенный интеграл

$$\int sinx^2dx.$$

Решение.

Используем разложение функции $sinx$ в ряд Маклорена:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots , \qquad |x| < \infty. \qquad (п8.1)$$

Разложим подынтегральную функцию $sinx^2$ в ряд Маклорена (п8.1), заменяя в нем x на x^2:

$$sinx^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \cdots , \qquad |x| < \infty. \qquad (п8.2)$$

Почленно интегрируя (п8.2), получим искомое разложение

$$\int sinx^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \cdots + C,$$

которое справедливо при $|x| < \infty$.

Ответ:

$$\int sinx^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \cdots + C, \qquad |x| < \infty.$$

Пример 9.

Разложить в ряд Маклорена неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{x} e^x dx.$$

Решение.

Запишем ряд Маклорена для функции e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots , \qquad |x| < \infty. \qquad (п9.1)$$

Почленно умножим ряд (п9.1) на $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}e^x = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right), \quad x \geq 0. \qquad (п9.2)$$

Почленно интегрируем ряд (п9.2):

$$\int \sqrt{x}e^x dx = \int x^{1/2}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \int \left(x^{1/2} + \frac{x^{3/2}}{1!} + \frac{x^{5/2}}{2!} + \frac{x^{7/2}}{3!} + \cdots + \frac{x^{(2n+1)/2}}{n!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{5/2}}{1!} + \frac{2}{7}\cdot\frac{x^{7/2}}{2!} + \frac{2}{9}\cdot\frac{x^{9/2}}{3!} + \cdots + \frac{2}{2n+3}\cdot\frac{x^{(2n+3)/2}}{n!} + \cdots + C.$$

Полученный ряд сходится к искомому интегралу при $x \geq 0$.

Ответ:

$$\int \sqrt{x}e^x dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{5/2}}{1!} + \frac{2}{7}\cdot\frac{x^{7/2}}{2!} + \frac{2}{9}\cdot\frac{x^{9/2}}{3!} + \cdots + \frac{2}{2n+3}\cdot\frac{x^{(2n+3)/2}}{n!} + \cdots + C, \ \ x \geq 0$$

Пример 10.

Разложить в ряд Маклорена неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{1 - x^4}dx.$$

Решение.

Возьмем ряд Маклорена для функции $(1 + x)^m$:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1. \qquad (п10.1)$$

Заменим в разложении (п10.1) x на $(-x^4)$ и возьмем $m = 1/2$:

$$\sqrt{1-x^4} = (1-x^4)^{1/2} = 1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^4 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^8 - \frac{1}{3!\cdot 2^3}x^{12} - \cdots, \quad |x| < 1. \qquad (\text{п}10.2)$$

Интегрируя почленно (п10.2), получим искомое разложение

$$\int \sqrt{1-x^4}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^4 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^8 - \frac{1}{3!\cdot 2^3}x^{12} - \cdots\right)dx =$$

$$= x - \frac{1}{1!\cdot 2\cdot 5}x^5 - \frac{1}{2!\cdot 2^2\cdot 9}x^9 - \frac{1}{3!\cdot 2^3\cdot 13}x^{13} - \cdots + C,$$

которое сходится к искомому интегралу при $|x| < 1$.

Ответ:

$$\int \sqrt{1-x^4}dx = x - \frac{1}{1!\cdot 2\cdot 5}x^5 - \frac{1}{2!\cdot 2^2\cdot 9}x^9 - \frac{1}{3!\cdot 2^3\cdot 13}x^{13} - \cdots + C, \quad |x| < 1 \; .$$

Пример 11.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx.$$

Решение.

Этот интеграл называется функцией Лапласа (или интегралом вероятностей) и широко используется в теории вероятностей.

Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена (1.5) и заменяя x на $-\frac{x^2}{2}$, получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n + \cdots, \quad |x| < \infty. \qquad (\text{п}11.1)$$

Так как ряд (п11.1) имеет радиус сходимости $R=\infty$, то на любом замкнутом промежутке $[0;x]$ ряд (п11.1) так же сходится и на промежутке $[0;x]$ его можно почленно проинтегрировать

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+\cdots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n\cdot n!}+\cdots\right),\ \ x\geq 0.$$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n\cdot n!}+\cdots\right),\ \ x\geq 0$$

Пример 12.

Вычислить интеграл

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

с точностью до $\delta=0{,}0001$.

Решение:

Возьмем ряд Маклорена для функции $(1+x)^m$:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n+\cdots, \qquad -1<x<1. \qquad (п12.1)$$

Заменим в разложении (п12.1) x на (x^4) и возьмем $m=-1/2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=(1+x^4)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12}+\cdots, \qquad |x|<1. \qquad (п12.2)$$

Так как ряд (п12.2) имеет радиус сходимости $R=1$, то его можно почленно проинтегрировать на промежутке [0;1/2].

Интегрируя почленно ряд (п12.2) от 0 до $\frac{1}{2}$, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12}+\cdots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^9}{9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{13}}{13}+\cdots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}}+\cdots$$

Для приближенного вычисления значения определенного интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}}+\cdots \qquad (п12.3)$$

с заданной точностью воспользуемся свойством знакочередующегося сходящего ряда. Для этого вычислим несколько первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда (п12.3):

$$u_1=0{,}50000; \quad u_2\approx-0{,}00313; \quad u_3\approx 0{,}00008.$$

Таким образом, мы получили, что абсолютное значение третьего члена этого ряда меньше $0{,}0001$, т.е.

$$\left|\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9}\right| < 0{,}0001.$$

Поэтому достаточно взять сумму двух первых членов ряда:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} \approx 0{,}50000 - 0{,}00313 \approx 0{,}4969.$$

Ответ:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx 0{,}4969 \quad \text{с точностью до } \ \delta = 0{,}0001.$$

Пример 13.

Вычислить интеграл

$$\int_0^{1/2} \frac{1-cosx}{x^2}dx$$

с точностью до $\delta = 0{,}0001$.

Решение.

Используем разложение функции $cosx$ в ряд Маклорена:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty.$$

Тогда получим

$$\frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1-\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \cdots, |x| < \infty. \quad (\text{п}13.1)$$

Так как полученный ряд (п13.1)имеет радиус сходимости $R = \infty$, то на промежутке $[0; 1/2]$ его можно почленно проинтегрировать

$$\int_0^{1/2} \frac{1-cosx}{x^2}dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!\cdot 3} + \frac{x^5}{6!\cdot 5} - \frac{x^7}{8!\cdot 7} + \cdots\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2!\cdot 2} - \frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5} - \frac{1}{8!\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots$$

Для приближенного вычисления значения определенного интеграла

$$\int_0^{1/2} \frac{1-cosx}{x^2}dx = \frac{1}{2!\cdot 2} - \frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5} - \frac{1}{8!\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots \qquad (п13.2)$$

с заданной точностью воспользуемся свойством знакочередующегося сходящего ряда.

Для этого вычислим несколько первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда (п13.2):

$$u_1 \approx 0{,}25000; \quad u_2 \approx -0{,}00174; \quad u_3 \approx 0{,}00001.$$

Таким образом, мы получили, что абсолютное значение третьего члена этого ряда меньше 0,0001, т.е.

$$\left|\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}\right| < 0{,}0001.$$

Поэтому достаточно взять сумму двух первых членов ряда:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-cosx}{x^2}dx \approx \frac{1}{2!\cdot 2} - \frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3} \approx 0{,}25000 - 0{,}00174 \approx 0{,}2483.$$

Ответ:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-cosx}{x^2}dx \approx 0{,}2483 \quad \text{с точностью до } \delta = 0{,}0001$$

§ 5. Приближенное решение дифференциальных уравнений.

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения этого уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Рассмотрим два способа приближенного решения дифференциального уравнения с помощью степенных рядов на примере дифференциального уравнения второго порядка

Метод последовательного дифференцирования.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x; y; y') \qquad (5.1)$$

с начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0 \ ; y|_{x=x_0} = y_0'. \qquad (5.2)$$

Решение $y = y(x)$ уравнения (5.1) ищем в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \qquad (5.3)$$

Первые два коэффициента находим из начальных условий (5.2) .

Третий коэффициент

$$y''(x_0) = f(x_0, y_0, y_0') \qquad (5.4)$$

находим, подставив $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$ в уравнение (5.1).

Значения производных

$$y'''(x_0),\ y^{(4)}(x_0), \dots ,\ y^{(n)}(x_0), \dots \qquad (5.5)$$

находим путем последовательного диффренцирования уравнения (5.1) по x и вычисления производных при $x = x_0$.

Найденые значения производных (5.2) , (5.4) и (5.5) подставляем в равенство (5.3)

Полученный таким образом ряд является искомым частным решением дифференциального уравнения (5.1) для тех значений x, при которых этот ряд сходится. Частичная сумма $S_n(x_0)$ этого ряда является приближенным решением дифференциального уравнения (5.1).

Замечания

1. Рассмотренный выше способ применим и для построения общего решения уравнения (5.1) , если y_0 и $y_0{}'$ рассматривать как произвольные постоянные.

2. Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциального уравнения любого порядка, если оно разрешимо относительно производной высшего порядка и если путем его последовательного дифференцирования возможно получить производную любого порядка.

Пример 14.

Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от 0) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' = x^2 + y^2, \qquad (п14.1)$$

если

$$y(-1) = 2, \quad y'(-1) = \tfrac{1}{2}. \qquad (п14.2)$$

Решение.

Из начальных условий задачи Коши (п14.2) следует, что

$$y(-1) = 2, \quad y'(-1) = \frac{1}{2}.$$

Согласно равенству (5.3), решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \cdots \qquad (14.3)$$

Значение $y''(-1)$ найдем, подставив $x=-1$ в исходное уравнение (п14.1):

$$y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5.$$

Значения $y''', y^{(4)}, \ y^{(5)}, \dots$ находим с помощью последовательго дифферецирования уравнение (п14.1)

$$y''' = 2x + 2yy' \ ,$$

$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''' \ ,$$

и так далее.

Подставим в полученные равенства $x=-1$:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 0 \ ,$$

$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22{,}5 \ ,$$

$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15 \ ,$$

и так далее.

Найденные значения производных подставим в ряд (п14.3):

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \cdots$$

Ответ:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \cdots$$

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов для решения задачи Коши дифференциального уравнения заключается в том, что решение можно искать в виде разложения в степенной ряд Тейлора

$$y(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots + C_n(x - x_0)^n \ldots \tag{5.6}$$

с неопределенными коэффициентами $C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_n, \ldots$

Рассмотрим, например, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{5.7}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0\,;\, y'(x_0) = y_0{}'. \tag{5.8}$$

Пусть коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ дифференциального уравнения раскладываются в ряды по степеням $(x - x_0)$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R\,; x_0 + R)$.

Искомое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (5.7) с начальными условиями (5.8) будем искать в виде степенного ряда

$$y = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots + C_n(x - x_0)^n \ldots \tag{5.9}$$

с неопределенными коэффициентами $C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_n, \ldots$

Коэффициенты C_0 и C_1 находятся из начальных условий (5.8):

$$C_0 = y_0\,; \quad C_1 = y_0'.$$

Далее дифференцируем ряд (5.9) два раза (каков порядок дифференциального уравнения (5.7)) и находим y' и y''.

Коэффициенты $C_2,\ C_3,\ C_{4,}$ … находим, подставляя значение y из (5.7) и найденные значения y' и y'' в дифференциальное уравнения (5.7), заменив в нем

$$p_1(x), \quad p_2(x) \text{ и } f(x)$$

их разложениями в ряд Тэйлора.

В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим оставшиеся коэффициенты.

Построенный ряд сходится в том же интервале $(x_0 - R\,; x_0 + R)$ и служит решением дифференциального уравнения (5.7) .

Замечание.

Этот метод приближенного решения применим для интегрирования не только линейных дифференциальных уравнений .

Пример 15.

Методом неопределенных коэффициентов найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения

$$y' - y^2 = x - 1, \tag{п15.1}$$

если

$$y = 2, \text{ при } \ x = 1\ . \tag{п15.2}$$

В ответе записать четыре первых члена этого разложения (отличных от нуля).

Решение.

Решение дифференциального уравнения (п15.1) будем искать в виде ряда

$$y = C_0 + C_1(x-1) + C_2(x-1)^2 + C_3(x-1)^3 + \cdots \qquad \text{(п15.3)}$$

Из начальных условий (п15.2) находим $C_0 = 2$.

Затем продифференцируем (п15.3):

$$y' = C_1 + 2C_2(x-1) + 3C_3(x-1)^2 + 4C_4(x-1)^3 + \cdots$$

и подставим полученную производную y' и y (п15.3) в данное дифференциальное уравнение (п15.1) :

$$C_1 + 2C_2(x-1) + 3C_3(x-1)^2 + 4C_4(x-1)^3 + \cdots -$$

$$-(C_0 + C_1(x-1) + C_2(x-1)^2 + C_3(x-1)^3 + \cdots)^2 = x - 1 \qquad \text{(п15.4)}$$

В равенстве (п15.4) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $(x-1)$.

Получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов $C_1, C_2, C_3, \ldots$:

$$\begin{cases} C_1 - {C_0}^2 = 0 \\ 2C_2 - 2C_0C_1 = 1 \\ 3C_3 - {C_1}^2 - 2C_0C_2 = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, находим :

$$C_1 = 4, \qquad C_2 = \frac{17}{2}, \quad C_3 = \frac{50}{3}.$$

Таким образом, искомое разложение решения дифференциального уравнения (п15.1) имеет вид

$$y = 2 + 4(x-1) + \frac{17}{2}(x-1)^2 + \frac{50}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

Ответ:

$$y = 2 + 4(x-1) + \frac{17}{2}(x-1)^2 + \frac{50}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

Пример 16.

Методом неопределенных коэффициентов найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения.

$$y'' + xy' + y = x \cdot cosx, \qquad (п16.1)$$

если

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1\ . \qquad (п16.2)$$

В ответе записать четыре первых члена этого разложения (отличных от нуля).

Решение.

Разложим коэффициенты и правую часть дифференциального уравнения (п16.1) в степенные ряды:

$$p_1(x) = x\ ; \quad p_2 = 1 \qquad (п16.3)$$

$$f(x) = x \cdot cosx = x \cdot (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) \qquad (п16.4)$$

Решение дифференциального уравнения (п16.1) будем искать в виде ряда

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots \qquad (п16.5)$$

Продифференцируем дважды (п16.5) и найдем значения y' и y'' :

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \cdots \qquad (п16.6)$$

$$y'' = 2C_2 + 2 \cdot 3 \cdot C_3 x + 3 \cdot 4 \cdot C_4 x^2 + \cdots \qquad (п16.7)$$

Из начальных условий (п16.2) находим $C_0 = 0$; $C_1 = 1$.

Подставляем полученные ряды (п16.3) – (п16.5) и значения y' (п16.6) и y'' (п16.7) в дифференциальное уравнение (п16.1) :

$$(2C_2 + 2 \cdot 3 \cdot C_3 x + 3 \cdot 4 \cdot C_4 x^2 + \cdots) + x(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \cdots) +$$

$$+(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots) = x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^0: $2C_2 = 0$

x^1: $2 \cdot 3 \cdot C_3 + 2 = 1$

x^2: $3 \cdot 4 \cdot C_4 + 2C_2 + C_2 = 0$

x^3: $4 \cdot 5 \cdot C_5 + 3C_3 + C_3 = -\frac{1}{2}$

x^4: $5 \cdot 6 \cdot C_6 + 4C_4 + C_4 = 0$

и так далее

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим что

$$C_2 = C_4 = C_6 = \cdots = 0,$$

$$C_3 = -\frac{1}{3!},\ C_5 = \frac{1}{5!},\ C_7 = -\frac{1}{7!} \dots$$

Таким образом, получаем решение дифференциальноного уравнения (п16.1) в виде

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Замечание

Можно заметить, что полученное выше решение является разложением в ряд функции $y = \sin x$.

Ответ: $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = sinx$