Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В.Г. ПАК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

ЛЕКЦИЯ №2

КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Содержание

§3. Кардинальные числа

3.1. Эквивалентность и мощность множеств. Теорема Кантора-Бернштейна

Определение. Множества A и B называются *эквивалентными*, если между ними существует взаимно-однозначное соответствие: $A \sim B$.

Очевидно, что отношение эквивалентности между множествами как бинарное отношение является эквивалентностью. По теореме 2.1 все множества разбиваются на классы эквивалентности.

Определение. Классы эквивалентности множеств называются *мощностями множеств*. Множества равной мощности называются *равномощными.*

Обозначение мощности множества A: $card(A)$. Если A эквивалентно некоторому подмножеству множества B, будем писать $card(A) \leq$ $\leq card(B)$.

Теорема 3.1 (Кантора-Бернштейна). Если $card(A) \leq card(B)$ и $card(B) \leq card(A)$, то $card(A) = card(B)$.

3.2. Конечные и бесконечные множества

Определение. Множество A называется *конечным*, если существует такое конечное натуральное число n, что $card(A) = card(\{0; 1; \dots; n-1\})$.

Для конечных множеств мощность эквивалентна числу элементов. Мощность конечного множества A обозначается $|A|$.

Свойства конечных множеств:

1. Подмножество конечного множества конечно.
2. Объединение конечного числа конечных множеств конечно.
3. Декартово произведение конечного числа конечных множеств конечно.

Теорема 3.2. Множество конечно тогда и только тогда, когда оно не эквивалентно собственному подмножеству.

Теорема 3.2 даёт эквивалентное определение конечного множества.

Определение. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным.*

Определение. Множество A называется *счётным*, если оно либо конечно, либо бесконечно и эквивалентно $\mathbb{N}_0$. Счётные бесконечные множества называются *счётно-бесконечными*.

Теорема 3.3. Бесконечное множество содержит счётно-бесконечное подмножество.

Теорема 3.4. Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно собственному подмножеству.

Теорема 3.4 даёт эквивалентное определение бесконечного множества.

3.3. Счётные множества

Свойства счётных множеств:

1. Если A счётно-бесконечно, B конечно, то $A \backslash B \sim A$.
2. Если A бесконечно, B счётно, то $A \cup B \sim A$.

Теорема 3.5. Объединение счётного числа счётных множеств счётно.

Теорема 3.6. Всякое подмножество счётного множества счётно.

Примеры счётных множеств: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

3.4. Бессчётные множества. Теорема Кантора

Определение. Множество, не являющееся счётным, называется *бессчётным.*

Лемма 3.1. Если A бессчётно, B счётно, то $A \backslash B \sim A$.

Теорема 3.7(теорема Кантора). Множество счётных кортежей нулей и единиц бессчётно.

Примеры бессчётных множеств: $(0;1)$, $[0;1]$, $[a;b]$, $[0;1]^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$.

Определение. Множество, равномощное множеству $\mathbb{R}$, называется *континуальным.*

3.5. Шкала кардинальных чисел

3.5. Шкала кардинальных чисел

Определение. *Кардинальными числами* множеств называются их мощности.

0- кардинальное число пустого множества

$1, 2, 3, \ldots$ - кардинальные числа конечных множеств

$\mathfrak{a}$- кардинальное число счётно-бесконечных множеств
Также обозначается $\aleph_0$ (алеф-нуль)

$\mathfrak{c}$- кардинальное число континуальных множеств
$\mathfrak{c} = \aleph_1$ - *континуум-гипотеза*

$$\aleph_\omega \Rightarrow \aleph_{\omega+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \aleph_{\omega_1} \Rightarrow \cdots$$

Конечные кардиналы

Счётные кардиналы

Бесчётные кардиналы

Бесконечные кардиналы