

Вопросы и задачи для самоконтроля к §§4, 5 гл. 1, раздел 8

1. Сформулируйте теорему Барроу. Найдите $d \int_0^x \sin x^2 dx$.

2. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.

3. Вычислите интегралы

$$3.1. \int_0^1 x e^{-x^2} dx; \quad 3.2. \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx.$$

4. Запишите формулу интегрирования по частям.

5. Интегрируя по частям, вычислите интегралы

$$5.1. \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad 5.2. \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$$

Ответы, указания, решения к задачам для самоконтроля к §§4, 5 гл. 1, раздел 8

$$1. d \int_0^x \sin x^2 dx = \sin x^2 dx.$$

$$3.1. \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 d e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) = 0.5(1 - e^{-1}).$$

$$3.2. \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$5.1. \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

$$\begin{aligned} 5.2. \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right] = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] = \frac{\pi^2}{4} - 2 \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2. \end{aligned}$$