§5. Правила дифференцирования

Правилами дифференцирования называют формулы, по которым вычисляются производная функции, являющейся постоянной на некотором множестве, производная от произведения постоянного множителя на функцию, производные от суммы, произведения и частного двух функций.

Теорема 5.1. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x, а C – некоторое постоянное число, то справедливы следующие формулы:

$$(C)'=0,\ (Cu(x))'=Cu'(x). \tag{5.1}$$

►Пусть $y=C$, тогда $\Delta y=0$ и $(C)'=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$. Если $y=Cu(x)$, то

$$\Delta y=Cu(x+\Delta x)-Cu(x)=C(u(x+\Delta x)-u(x))=C\Delta u,$$

а $(Cu(x))'=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C\Delta u}{\Delta x}=C\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=Cu'(x)$.◄

Замечание 5.1. Вторая из формул (5.1) эквивалентна следующему утверждению: постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Теорема 5.2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то

1. функции $u(x)+v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ дифференцируемы в этой точке и справедливы формулы:

$$(u(x)+v(x))'=u(x)'+v(x)'; \tag{5.2}$$

$$(u(x)\cdot v(x))'=u(x)'\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)'; \tag{5.3}$$

2. функция $u(x)/v(x)$ дифференцируема в этой точке при условии $v(x)\neq 0$ и справедлива формула:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^{/}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}. \tag{5.4}$$

►Докажем, например, формулу (5.3). Имеем $(uv)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta(uv)}{\Delta x}$ (формула (1.1)), где $\Delta(uv)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)$. Заменим в этом равенстве $u(x+\Delta x)$ на $u(x)+\Delta u$, а $v(x+\Delta x)$ на $v(x)+\Delta v$, получим:

$$\Delta(uv)=(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v)-u(x)v(x)\ \text{или}$$

$$\Delta(uv)=u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

Тогда $(uv)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x)\Delta v+v(x)\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta v\dfrac{\Delta u}{\Delta x})$. В силу теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (теорема 2.2 главы 3 раздела 4), последнее равенство принимает вид:

$$(uv)'=u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.5}$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$, а $\Delta v\to 0$ при $\Delta x\to 0$ как приращение дифференцируемой и, следовательно, непрерывной функции, то при $\Delta x\to 0$ из (5.5) получаем формулу (5.3).◄

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции x. Из равенств (5.1) – (5.4), (3.4) следуют правила вычисления дифференциалов:

$$dC = 0, \text{ где } C - \text{const.} \tag{5.6}$$

$$dCu = Cdu, \text{ где } C - \text{const.} \tag{5.7}$$

$$d(u+v) = du + dv. \tag{5.8}$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv, \tag{5.9}$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}. \tag{5.10}$$

Получим, например, формулу (5.8). Имеем

$d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = u'dx + v'dx = du + dv.$