§3. Свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 3.1 (о единственности предела). Если данная последовательность имеет предел, то он единственный.

►Пусть число a – предел последовательности $\{x_n\}$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В противоположность тому, что требуется доказать, предположим, что существует число b такое, что $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, при этом $a \neq b$. Для определённости будем считать, что $a < b$. Выберем положительное число $\varepsilon < (b-a)/2$, тогда ε – окрестности точек a и b не будут иметь общих точек, $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (рис. 3.1, $(a+b)/2$ – середина отрезка [a, b]). Из определения 2.1 следует, что существуют натуральные числа $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что при $n > N_1(\varepsilon)$ справедливо утверждение $x_n \in U_\varepsilon(a)$, а при $n > N_2(\varepsilon)$ – утверждение $x_n \in U_\varepsilon(b)$. Обозначим через $N(\varepsilon)$ максимальное из чисел $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$, для $n > N(\varepsilon)$ члены последовательности x_n будут одновременно принадлежать двум непересекающимся промежуткам $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$, что невозможно. Это противоречие доказывает теорему.◄

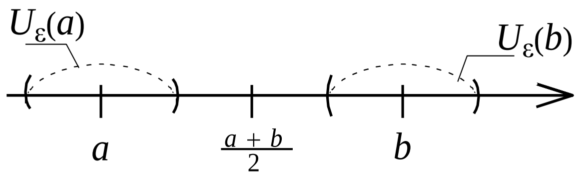

Рис. 3.1. К доказательству теоремы 3.1

Теорема 3.2 (об ограниченности сходящейся последовательности). Сходящаяся последовательность ограничена.

►Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмём любое число $\varepsilon > 0$. Из определения предела числовой последовательности (определение 2.1) следует, что найдётся натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ верно утверждение $x_n \in U_\varepsilon(a)$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. За пределами окрестности $U_\varepsilon(a)$ остались члены последовательности с номерами, меньшими или равными $N(\varepsilon)$: $x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)}$. Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N(\varepsilon)}|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$. При указанном выборе числа M неравенство $|x_n| \le M$ выполняется для любого натурального n, а это и означает, что данная последовательность ограничена (определение 1.3).◄

Замечание 3.1. Теорема, обратная к теореме 3.2, неверна, и ограниченная последовательность может не иметь предела (см. пример 2.2).

Теорема 3.3 (о предельном переходе в неравенстве). Пусть даны последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и для $\forall n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le y_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \le b$.

►Доказывая от противного, предположим, что $a > b$ и возьмём положительное число $\varepsilon < (a-b)/2$. Из определения предела числовой последовательности (определение 2.1) следует, что найдутся натуральные числа $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что при $n > N_1(\varepsilon)$ имеем: $x_n \in U_\varepsilon(a)$, а при $n > N_2(\varepsilon)$ – $y_n \in U_\varepsilon(b)$. Пусть $N(\varepsilon) = \max\{ N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \}$, для $n > N(\varepsilon)$ члены последовательности x_n будут принадлежать промежутку $U_\varepsilon(a)$, а члены последовательности y_n – промежутку $U_\varepsilon(b)$, при этом $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$, так как $b + \varepsilon < b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$; $a - \varepsilon > a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ (рис. 3.2). Отсюда при $n > N(\varepsilon)$ имеем неравенство: $x_n > y_n$, противоречащее условию теоремы: $x_n \le y_n$ для $\forall n \in N$. Полученное противоречие доказывает теорему.◄

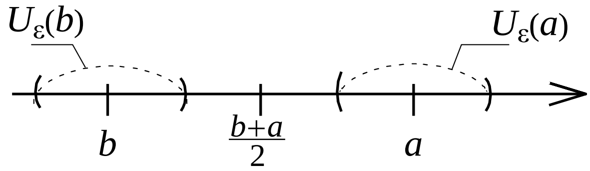

Рис. 3.2. К доказательству теоремы 3.3

Замечание 3.2. Из утверждения: неравенство $x_n < y_n$ верно для $\forall n \in N$, вообще говоря, не следует неравенство $a < b$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Так, например, неравенство $1/n < 2/n$ верно для $\forall n \in N$, а $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2/n) = 0.$

Теорема 3.4 (о сжатой последовательности). Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, при этом для $\forall n \in N$ выполняется неравенство
$x_n \le y_n \le z_n$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

►Возьмём любое число $\varepsilon > 0$. Из определения предела числовой последовательности (определение 2.1) следует, что можно найти натуральные числа $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что при $n > N_1(\varepsilon)$ верно неравенство $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, а при $n > N_2(\varepsilon)$– неравенство $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Пусть $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, при $n > N(\varepsilon)$ одновременно выполняются вышеприведённые неравенства для x_n и z_n. Используя эти неравенства, а также неравенство из условия теоремы, приходим к утверждению: неравенство $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$ верно при $n > N(\varepsilon)$. Итак, показано, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что для $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. А это и означает, в силу определения предела числовой последовательности, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.◄

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Определение 3.1. Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ называются суммой и произведением данных последовательностей, а последовательность $\{x_n/y_n\}$. – их частным при условии, что $y_n \neq 0$ при $\forall\, n \in N$.

Теорема 3.5 (об арифметических операциях над сходящимися последовательностями). Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$, а если при этом $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n/y_n\right) = a/b$.

►Докажем, что верно второе равенство из заключения теоремы. Доказательства справедливости остальных приведены, например, в [1]. Рассмотрим разность $x_n y_n - ab$. Прибавив к ней и вычтя из неё произведение $y_n a$, после группировки слагаемых получим: $x_n y_n - ab = y_n(x_n - a) + a(y_n - b)$. В силу свойств абсолютных величин (§5 глава 1) для модуля этой разности имеем:

$$|x_n y_n - ab| \leq |y_n(x_n - a)| + |a(y_n - b)| \Rightarrow$$

$$|x_n y_n - ab| \leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|. \qquad (3.1)$$

Последовательность $\{y_n\}$ ограничена как сходящаяся (теорема 3.2), поэтому существует положительное число M такое, что неравенство $|y_n| < M$ выполняется для $\forall\, n \in N$ (определение 1.3).

Возьмём любое число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то по выбранному ε можно найти натуральные числа $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$, такие, что для $n > N_1(\varepsilon)$ верно неравенство: $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, а для $n > N_2(\varepsilon)$ – неравенство $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$. Пусть $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, для $n > N(\varepsilon)$ одновременно выполняются выше приведённые неравенства для x_n и y_n. В правой части (3.1) заменим $|y_n|$ на M, $|x_n - a|$ на $\dfrac{\varepsilon}{2M}$, $|y_n - b|$ на $\dfrac{\varepsilon}{2|a|}$, имеем: $|x_n y_n - ab| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \dfrac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$.

Итак, для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдено число натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что для $n > N(\varepsilon)$ верно неравенство $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$ (определение 2.1).◄

Пример 3.1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3}{2^n - 1}$.

►Оба члена дроби под знаком предела поделим на 2^n, получим: $\dfrac{2^{n+1} + 3}{2^n - 1} = \dfrac{2 + 3/2^n}{1 - 1/2^n} = \dfrac{2 + 3(1/2)^n}{1 - (1/2)^n}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$ (пример 2.1), то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3}{2^n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + 3(1/2)^n}{1 - (1/2)^n} = 2$ в силу теоремы 3.5.◄