§4. Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а также дифференцируема на интервале (a, b), то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, для которой будет справедливо равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) называется *формулой Лагранжа*.

Теорема Лагранжа не требует специального доказательства. Она следует из теоремы Коши при $g(x) = x$.

Замечание 4.1. Формулу Лагранжа (4.1) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = -x^2 + 2x$, заданной на отрезке [1, 3].

►Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [1, 3] как элементарная и дифференцируема на интервале (1, 3), $f'(x) = -2x + 2$, поэтому на интервале (1, 3) есть точка c, для которой будет справедлива формула (4.1), имеющая в данном случае вид: $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$ или $\frac{-3 - 1}{2} = f'(c)$, откуда следует равенство: $f'(c) = -2$. Сравнив его с выражением для производной $f'(x)$, получаем уравнение: $-2c + 2 = -2$, отсюда имеем $c = 2 \in (1, 3)$.◄

1°. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a,\ b]$ условиям теоремы Лагранжа, AB – хорда, соединяющая точки $A(a,\ f(a)), B(b,\ f(b))$ графика Г этой функции (рис. 4.1). Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ из равенства (4.1) есть угловой коэффициент хорды AB, а производная $f'(c)$ является угловым коэффициентом касательной T, проведённой к Г в точке $C(c,\ f(c))$. Итак, заключаем, что на графике данной функции существует хотя бы одна точка $C(c,\ f(c))$, *касательная T* в которой к графику функции Г *параллельна его хорде AB* (рис. 4.1).

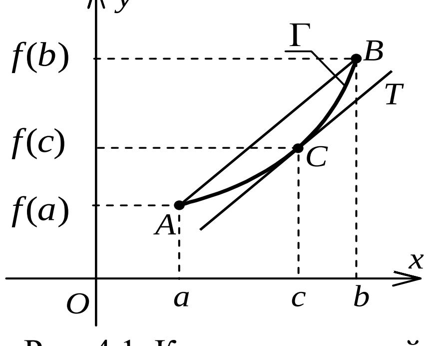

Рис. 4.1. К геометрической интерпретации теоремы Лагранжа

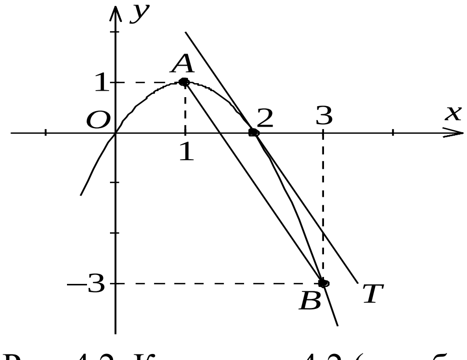

Рис. 4.2. К примеру 4.2 (парабола $y = -x^2 + 2x$ на отрезке [1,3])

Пример 4.2. На дуге параболы $y=-x^2+2x$ между точками $A(1,1)$, $B(3,-3)$ найти точку $C(c, y(c))$, касательная T в которой параллельна хорде AB. Написать уравнение этой касательной.

►В примере 4.1 показано, что функция $y=-x^2+2x$ на отрезке [1, 3] удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и найдена точка $c=2$. Так как $y(c)=y(2)=0$, то $C(2,0)$ (рис. 4.2). Уравнение T получим, подставив в равенство (2.2) из главы 1 координаты точки C и $y'(c)=-2$: $y-0=-2(x-2)$. После очевидных преобразований приходим к уравнению T: $2x+y-4=0$.◄

2º. Физическая интерпретация теоремы Лагранжа. Пусть функция $s=s(t)$, описывающая прямолинейное движение точки на промежутке $[t_1, t_2]$, удовлетворяет на этом промежутке условиям теоремы Лагранжа, тогда из (4.1) следует равенство:

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=s'(t^*), \tag{4.3}$$

где $t^*\in(t_1, t_2)$. Итак, на интервале (t_1, t_2) есть момент времени t^*, в который *мгновенная скорость* движения $s'(t^*)$ равна *средней скорости* движения на отрезке $[t_1, t_2]$.

Пример 4.3. Прямолинейное движение точки на промежутке времени [0, 2] задано уравнением $s(t)=2t^2-t+1$. Найти момент времени t^*, в который мгновенная скорость движения равна средней скорости движения на отрезке [0, 2].

►Напишем формулу (4.3) для данной функции: $\frac{s(2)-s(0)}{2-0}=4t^*-1$, отсюда получаем уравнение для t^*: $3=4t^*-1$. Следовательно, $t^*=1$.◄

3º. Формула конечных приращений. Формула Лагранжа (4.2) справедлива как для случая $a<b$, так и для случая $a>b$. Запишем её в другой форме. Возьмём любое значение $x_0\in(a,b)$ и придадим ему приращение Δx такое, чтобы $x_0+\Delta x\in[a,b]$. Напишем формулу (4.2) для промежутка $[x_0, x_0+\Delta x]$ при $\Delta x>0$ или для промежутка $[x_0+\Delta x, x_0]$ при $\Delta x<0$:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=f'(c)\Delta x, \tag{4.4}$$

c – число, заключённое между x_0 и $x_0+\Delta x$. Положим: $c=x_0+\theta\cdot\Delta x$, $\theta\in(0,1)$, при этом равенство (4.4) принимает вид:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0+\theta\cdot\Delta x)\Delta x. \tag{4.5}$$

Соотношения (4.4) и (4.5) являются точными равенствами и справедливы для конечных значений Δx. Каждое из них называется *формулой конечных приращений* в отличие от приближённого равенства

$$\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x, \tag{4.6}$$

называемого *формулой бесконечно малых приращений*. Формулы (4.5) и (4.6) можно переписать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0 + \theta\cdot\Delta x), \tag{4.7}$$
$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0). \tag{4.8}$$

Пример 4.4. Используя формулу конечных приращений, для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке [1, 5] найти точку *c*, в которой дифференциал совпадает с приращением функции на этом отрезке.

►Напишем формулу (4.4) для данной функции: $f(5) - f(1) = (2c-2)\cdot 4$, отсюда находим *c*: $16 = 8(c-1) \Rightarrow c = 3$.◄

***4°. Вычисление односторонних производных.**

Следствие из теоремы Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (*a*, *b*), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a,b)$, где она непрерывна. Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = A$, то $\exists f'_-(x_0)$ и $f'_-(x_0) = A$. Аналогично, если существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = B$, то $f'_+(x_0) = B$.

►На интервале (*a*, *b*) рассмотрим точку $x_0 + \Delta x$, тогда на отрезке, концами которого служат точки $x_0 + \Delta x$ и x_0 для функции $f(x)$ выполнены условия теоремы Лагранжа. Формулу Лагранжа (4.1) здесь можно переписать так:
$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta\Delta x), \tag{4.9}$$
где $\theta -$ некоторое число из интервала $(0, 1)$. Так как существует $\lim\limits_{\Delta x\to -0} f'(x_0 + \theta\Delta x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = A$, то при $\Delta x \to -0$ существует предел и левой части равенства (4.9), по определению равный $f'_-(x_0)$, при этом $f'_-(x_0) = A$.◄

Замечание 4.3. Для функции $y = f(x)$, удовлетворяющей на интервале (*a*, *b*) условиям следствия из теоремы Лагранжа справедливы равенства:
$$f'(x_0 - 0) = f'_-(x_0),\ f'(x_0+0) = f'_+(x_0),\ x_0 \in (a,b). \tag{4.10}$$

Пример 4.5. Найти $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ и $f'(0)$, если $f(x) = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

► $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = \begin{cases} 2/(1+x^2), & x<0, \\ -2/(1+x^2), & x>0 \end{cases}$ (пример 7.6 главы 1). Имеем: $f'_-(0) = f'(-0) = \lim\limits_{x\to -0} 2/(1+x^2) = 1$, $f'_+(0) = f'(+0) = \lim\limits_{x\to +0}(-2/(1+x^2)) = -1$ (см. (4.10)). Так как $f'_-(0) \ne f'_+(0)$, то в силу замечания 1.3 предыдущей главы заключаем, что в точке $x = 0$ данная функция не имеет производной.◄

Пример 4.6. Найти $f'_-(2)$ и $f'_+(2)$, если $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

► $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$, $x \ne 2$. Из (4.9) имеем: $f'_-(2) = f'(2-0) =$

$= \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} = -\infty$ и $f'_+(2) = f'(2+0) = \lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} = +\infty$.◄

5º. Применение теоремы Лагранжа для доказательства неравенств.

Пример 4.7. Используя теорему Лагранжа, доказать неравенство $|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| \le |b - a|$ для любых действительных значений a и b.

►При $a = b$ данное соотношение верно и является равенством. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на промежутке $[a, b]$ (при $a < b$) или на промежутке $[b, a]$ (при $a > b$) удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому из формулы (4.1) следует равенство $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \dfrac{b-a}{1+c^2}$ или $|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| = \dfrac{|b-a|}{1+c^2}$, где c – число, находящееся между a и b. Заменяя в этом равенстве дробь $\dfrac{1}{1+c^2}$ $\left(0 < \dfrac{1}{1+c^2} \le 1\right.$ для $\left.\forall c \in (a, b)\right)$ на 1, приходим к доказываемому неравенству.◄