

§2. Геометрический и механический смысл двойного интеграла

1°. Геометрический смысл. Рассмотрим тело (рис. 2.1), ограниченное плоскостью Oxy , цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , и поверхностью (S) : $z = f(x, y)$. Такое тело назовём *цилиндрическим бруском*, ориентированным по оси Oz . Основанием его служит некоторая область D на плоскости Oxy . Если функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D , то объём V этого бруса равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D :

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.1)$$

Итак, двойной интеграл с непрерывной неотрицательной подынтегральной функцией можно рассматривать как объём некоторого цилиндрического бруса.

2°. Механический смысл. Пусть дана плоская пластина D , на которой распределена масса m (рис. 2.2). Возьмём на пластине точку M и некоторую частичную область (ΔS) , содержащую эту точку, ΔS и Δm – площадь и масса (ΔS) . Отношение $\Delta m / \Delta S$ называют *средней поверхностной плотностью* пластины D в точке $M(x, y)$. Если $\exists \lim_{(\Delta S) \rightarrow M} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \mu(M)$, то его называют *поверхностной плотностью пластины* в точке $M(x, y)$ (запись $(\Delta S) \rightarrow M$ означает, что элемент (ΔS) , уменьшаясь, стягивается в точку M). Масса распределена по пластине, вообще говоря, неоднородно, потому поверхностная плотность есть функция точки M на области D .

Предположим теперь, что масса m распределена на плоской пластине D с поверхностной плотностью $\mu = f(x, y)$, непрерывной на области D . Тогда для массы материальной пластины, имеющей форму области D (рис. 2.2), справедливо равенство

$$m = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.2)$$

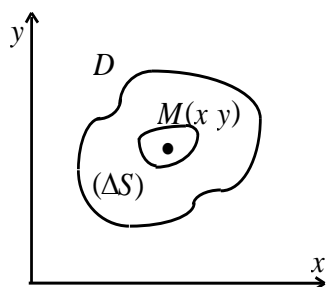


Рис. 2.2. Материальная пластина

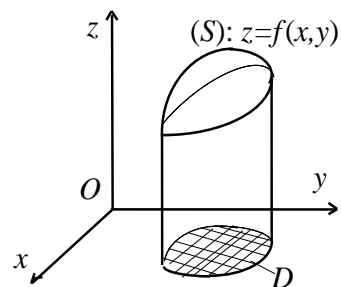


Рис. 2.1. К понятию цилиндрического

Итак, если подынтегральную функцию трактовать как поверхностную плотность в точке $M(x, y)$ пластины, имеющей форму области D , то двойной интеграл выражает *массу* этой пластины. Такая трактовка двойного интеграла возможна для любой непрерывной и неотрицательной функции. Заметим, что вместо плотности вещества можно говорить о плотности электрического заряда $q(x, y)$ в данной точке пластины. В этом случае заряд всей пластины выразится двойным интегралом вида (2.2).