

# **Дискретная математика**

## **Семестр III**

**Группа 3530903/80001**

### **Программа зачёта**

#### **Часть I. Теория множеств**

1. Понятие множества. Основные определения. Способы задания множеств. Операции над множествами;
2. Алгебра множеств, её основные законы;
3. Декартово произведение множеств, его свойства;
4. Бинарные отношения, их свойства;
5. Функции, их виды и свойства;
6. Специальные бинарные отношения. Эквивалентности. Теорема об эквивалентности;
7. Отношения порядка. Наибольший (наименьший), максимальный (минимальный) элементы, грани множеств, их свойства;
8. Эквивалентность и мощность множеств. Теорема Кантора-Бернштейна. Конечные множества, их свойства;
9. Бесконечные множества, их свойства;
10. Счётные множества, их свойства. Примеры счётных множеств;
11. Бессчётные множества, примеры бессчётных множеств. Теорема Кантора. Кардинальные числа. Шкала кардинальных чисел.

#### **Часть II. Комбинаторика**

1. Выборки. Правила суммы и произведения. Размещения с повторениями и без повторений;
2. Перестановки с повторениями и без повторений;
3. Сочетания без повторений, свойства чисел сочетаний;
4. Сочетания с повторениями;
5. Бином Ньютона, свойства биномиальных коэффициентов;
6. Полиномиальная формула;
7. Формула включений и исключений;
8. Применение формулы включений и исключений: число элементов объединения множеств;
9. Применение формулы включений и исключений: число беспорядочных перестановок;
10. Применение формулы включений и исключений: число преобразований множества без неподвижных элементов;
11. Применение формулы включений и исключений: число сюръективных отображений множеств;
12. Применение формулы включений и исключений: функция Эйлера.

### **Часть III. Булевы функции**

1. Понятие булевой функции. Таблицы истинности. Теорема о числе  $n$ -местных булевых функций. Элементарные булевы функции. Логические связки;
2. Формулы алгебры булевых функций. Функции, реализуемые формулами. Виды формул. Законы алгебры булевых функций;
3. Специальные представления булевых функций. Нормальные формы. Элементарная конъюнкция и элементарная дизъюнкция. Дизъюнктивная нормальная форма. Теорема о числе ДНФ. Приведение булевой функции к ДНФ;
4. Теорема о дизъюнктивном разложении булевой функции и следствия из неё;
5. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Теорема о числе СДНФ. Приведение булевой функции к СДНФ;
6. Специальные представления булевых функций. Нормальные формы. Элементарная конъюнкция и элементарная дизъюнкция. Конъюнктивная нормальная форма. Теорема о числе КНФ. Приведение булевой функции к КНФ;
7. Теорема о конъюнктивном разложении булевой функции и следствия из неё;
8. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Теорема о числе СКНФ. Приведение булевой функции к СКНФ;
9. Специальные представления булевых функций. Полином Жегалкина. Теорема о числе полиномов Жегалкина. Приведение булевой функции к полиному Жегалкина;
10. Двойственные функции. Принцип двойственности;
11. Операция суперпозиции и замыкание множества булевых функций. Свойства замыкания. Замкнутые классы;
12. Функциональная полнота. Теорема о полноте класса. Базисы;
13. Классы функций, сохраняющих константы. Класс самодвойственных функций;
14. Класс монотонных функций. Класс линейных функций;
15. Лемма о несамодвойственной функции. Лемма о немонотонной функции;
16. Лемма о нелинейной функции. Лемма о несамодвойственной функции;
17. Теорема Поста о функциональной полноте и следствия из неё;
18. Предполные и замкнутые классы. Теорема Поста о предполных классах. Выделение базисов в полной системе.

### **Часть IV. Минимизация булевых функций**

1. Структура граней  $n$ -мерного булева куба. Интервалы, допустимые интервалы;
2. Задача минимизации булевой функции в классе ДНФ. Сокращённая ДНФ;
3. Методы Блейка, Нельсона и Квайна построения сокращённой ДНФ;
4. Карты Карно. Построение сокращённой ДНФ с помощью карт Карно;
5. Кратчайшая, минимальная и тупиковая ДНФ. Алгоритм перехода от сокращённой ДНФ к тупиковой (критерий поглощения);
6. Построение тупиковых ДНФ с помощью карт Карно и таблиц Квайна.

## **Часть V. Реализации булевых функций**

1. Схемы из функциональных элементов. Функции (системы функций), реализуемые СФЭ. Сложность и глубина СФЭ;
2. Реализация  $n$ -разрядного двоичного сумматора с помощью СФЭ;
3. Релейно-контактные схемы. Виды и характеристики РКС;
4. Функция проводимости РКС. Реализация булевой функции с помощью РКС.  $\pi$ -схемы.
5. Метод Шеннона;
6. Метод каскадов.

## **Часть VI. Основы теории графов**

1. Граф. Компоненты и виды графов. Степень вершины графа;
2. Способы задания графа;
3. Маршруты, пути, цепи, циклы;
4. Связный граф. Компоненты и степень связности. Мосты;
5. Точки сочленения и блоки;
6. Метрические характеристики графа;
7. Планарность графа. Теоремы о планарности;
8. Деревья. Теоремы о деревьях;
7. Цикломатическое число графа.

## **Примеры задач**

1. Теория множеств [1]:
  - a. Алгебра множеств (с. 9, №3, с. 12-13, №1-5, 7-9);
  - b. Бинарные отношения (с. 20, №6, с. 21-22, №1-2, с. 24-26, №6-9, 13, с. 27-29, №1-2, 10);
  - c. Эквивалентность множеств (с. 30, №3);
2. Комбинаторика:
  - a. Основные правила и формулы ([1], с. 82-87, №7-11, №13, №15, №17-18, №21-27, №31-59);
  - b. Бином Ньютона и полиномиальная формула ([1], с. 89, №4, 5а-з, л-м, с.90, №11, №16-17, с. 92, №5-6, №8-19);
  - c. Формула включений и исключений ([1], с. 92-94, №5-6, №8-19);
  - d. Все формулы и правила ([2], с. 137-184, №1-8, №13-15, №18, №20-24, №27-30, №35-38, №40-69, №72-73, №79-99, №103-107, №110-112, №114, №117-119(а, в), №120-124, №126-132, №134-140, №153-155, №160-162, №167-169, №171, №178-190, №194-198, №200-203, №222-225, №227-230, №232-233, №247-250, №256-261, №265-267, №270-276, №279-282, №297-307, №309, №313-319);
3. Булевы функции [3]:
  - a. Основы теории булевых функций (глава I, §1, №1.19-1.21, №1.25, №1.27);
  - b. Специальные представления (глава I, §2, №2.3-2.4, №2.10-2.13, №2.15, №2.22-2.24);
  - c. Замкнутые классы и полнота (глава II, §2, №2.1-2.2, №2.8, §3, №3.1-3.2, §4, №4.1-4.2 (1-8), №4.3, №4.5 (1-9), §5, №5.1-5.2, №5.6, §6, №6.1-6.2, №6.4-6.5);
4. Минимизация булевых функций [3]:
  - a. Сокращённая ДНФ (глава IX, §2, №2.2-2.4, №2.6);

- b. Тупиковая, кратчайшая и минимальная ДНФ (глава IX, §3, №3.6);
- 5. Реализации булевых функций [3]:
  - a. РКС (функция проводимости,  $\pi$ -схемы, методы Шеннона и каскадов) (глава X, §2, №2.1-2.7, №2.13-2.14);
  - b. СФЭ (глава X, §1, №1.1-1.7, №1.18);
- 6. Основы теории графов [4]:
  - a. Задание графов (часть I, глава 3, п. 3.9, №3.9.1-3.9.3);
  - b. Метрические характеристики графа (часть I, глава 3, п. 3.9, №3.9.6, №3.9.9).

## Литература

1. Пак В.Г. Сборник задач по дискретной математике. Теория множеств и комбинаторика;
2. Пак В.Г. Сборник задач по дискретной математике. Комбинаторный анализ;
3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике;
4. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий.

В билете 2 вопроса и 3 задачи. Все формулы, утверждения, теоремы *можно* давать в ответе *без доказательств*.

Время на письменный ответ – 1 час 30 мин. с перерывом 10 мин.