§1. Два определения предела функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Понятие предела функции в точке – одно из основных понятий математического анализа. С его помощью исследуется поведение функции в проколотой окрестности данной точки, результаты такого исследования применяются, например, при построении графика функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathring{U}(a)$ – некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение 1.1 (*по Гейне или на языке последовательностей*, Гейне Г. (1821-1881) – немецкий математик). Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathring{U}(a)$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Определение 1.2 (*по Коши или на языке* $\varepsilon-\delta$, Коши О. (1789-1857) – французский математик). Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для x: $0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Замечание 1.1. Неравенство $0 < |x-a| < \delta$ равносильно утверждению $x \in \mathring{U}_\delta(a)$, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ – утверждению $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. В символической форме определения 1.1 – 1.2 записываются так:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset \mathring{U}(a) \subset D(f):\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A,$$

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \subset D(f) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Замечание 1.2. Предел функции $f(x)$ в точке a является характеристикой поведения функции в некоторой проколотой окрестности точки a. Значение функции $f(a)$, если оно существует, не влияет ни на существование, ни на величину $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 1.1. Определения 1.1 и 1.2 эквивалентны, т.е. если число A – предел функции в точке в смысле определения 1.1, то оно же является и пределом этой функции в этой точке в смысле определения 1.2 и наоборот.

►Будем доказывать лишь одну часть теоремы. Доказательство другой части приведено, например, в [1]. Докажем, что «если число A – предел функции $f(x)$ в точке a по Коши, то предел $f(x)$ в точке a по Гейне также равен A». Для $\forall \varepsilon > 0°$ существует $\delta(\varepsilon)>0$: для $\forall x \in U_\delta(a) \subset D(f) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$ (определение 1.2). Пусть $\{x_n\} \subset U(a)$ – любая последовательность, сходящаяся к a. По $\delta(\varepsilon)$ можно найти число

$N(\delta(\varepsilon))$: при $n>N(\delta(\varepsilon))$ получим: $x_n \in U_\delta(a)$ (определение 2.1 глава 2). Тогда при $n>N(\delta(\varepsilon))=N_1(\varepsilon)$ имеем: $f(x_n)\in U_\varepsilon(A)$, поэтому число A – предел функции в точке a по Гейне (определение 1.1).◄

Пример 1.1. Используя определение 1.1 показать, что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)/(x+2)=-1/2.$

►Возьмём $\forall\{x_n\}$: $x_n\to 2$ при $n\to\infty$. Пусть $f(x)=(x^2-3x)/(x+2)$, тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n^2-3x_n)/(x_n+2)=(2\cdot 2-3\cdot 2)/(2+2)=-1/2$ (теорема 3.5 главы 2). В силу определения 1.1 заключаем, что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)/(x+2)=-1/2.$◄

Пример 1.2. Используя определение 1.2, показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

►Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ здесь имеет вид: $|\cos x-1|<\varepsilon$ или $2\sin^2(x/2)<\varepsilon$. Возьмём $\forall\varepsilon>0$ и найдём число $\delta(\varepsilon)>0$: для $\forall x: 0<|x-0|=|x|<\delta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство $2\sin^2(x/2)<\varepsilon$. Неравенство $|\sin x|<|x|$ верно для $\forall x\neq 0$ (см. независимое доказательство в §3, замечание 3.1), поэтому и неравенство $2\sin^2(x/2)<2\cdot(x/2)^2=x^2/2$ верно для $\forall x\neq 0$. Пусть $x: x^2/2<\varepsilon \Leftrightarrow$ $x: |x|<\sqrt{2\varepsilon}$. Для таких x справедливо неравенство $2\sin^2(x/2)<\varepsilon\Leftrightarrow|\cos x-1|<\varepsilon$, поэтому $\delta(\varepsilon)=\sqrt{2\varepsilon}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (определение 1.2).◄

Пример 1.3. Используя определение 1.1, показать, что $\nexists\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$.

►Пусть $f(x)=\sin(1/x)$. Возьмём последовательности: $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$: $x_n^{(1)}=1/(\pi n)$ и $x_n^{(2)}=1/(\pi/2+2\pi n)$, обе они стремятся к нулю при $n\to\infty$. Имеем:

$$f(x_n^{(1)})=\sin\frac{1}{1/(\pi n)}=\sin\pi n=0\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

$$f(x_n^{(2)})=\sin\frac{1}{1/(\pi/2+2\pi n)}=\sin(\pi/2+2\pi n)=1\to 1 \text{ при } n\to\infty.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(1)})\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(2)})$, то $\nexists\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ (определение 1.1).◄

Определение 1.3 (*по Гейне*)**.** Число A называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x\to a-0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a_1,a) и для любой последовательности $\{x_n\}\subset(a_1,a)$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Обозначение: $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $A=f(a-0)$.

Определение 1.4 (*по Коши*)**.** Число A называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x\to a-0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a_1, a) и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для x: $a_1 < a - \delta(\varepsilon) < x < a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $A = f(a-0)$.

Аналогично определяется правый предел функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a+0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a, a_2).

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $A = f(a+0)$.

Теорема 1.2. Для того чтобы $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия: 1. $\exists f(a-0)$ и $\exists f(a+0)$; 2. $f(a-0) = f(a+0)$.

►Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, поэтому функция $f(x)$ определена, по крайней мере, на $\overset{\circ}{U}(a)$. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \subset U(a)$ будет верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$ (определение 1.2). Поскольку $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ есть объединение промежутков $(a - \delta, a)$ и $(a, a + \delta)$, то заключаем, что $\exists f(a-0)$, $f(a+0)$ и выполняется равенство $f(a-0) = f(a+0) = A$ (определение 1.4).

Пусть $\exists f(a-0)$, $f(a+0)$, при этом $f(a-0) = f(a+0) = A$. Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$: $x \in (a - \delta_1, a)$, $x \in (a, a + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (определение 1.4). Если $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то для $\forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \overset{\circ}{U}(a)$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, а это и значит, что $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (определение 1.2 и замечание 1.1). ◄

Следствие из теоремы 1.2. Если $f(a-0) \neq f(a+0)$, то функция $f(x)$ не имеет предела в точке a. Доказательство от противного.

Пример 1.4. Показать, что $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, если $f(x) = |x-1|$.

►Из определения модуля имеем $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ при } x < 1, \\ x - 1 \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$ Для $\forall \{x_n\} \subset (0, 1)$: $x_n \to 1$ последовательность $f(x_n) = 1 - x_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $f(1-0) = 1$ (определение 1.3), а для $\forall \{x_n\} \subset (1, 2)$: $x_n \to 1$ имеем $f(x_n) = x_n - 1 \to 0$ при $n \to \infty$, отсюда $f(1+0) = 1$. Так как $f(1-0) = f(1+0) = 0$, то $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ (теорема 1.2).◄

Пример 1.5. Показать, что $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 2 - x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

►Для $\forall \{x_n\} \subset (0, 1)$: $x_n \to 1$ последовательность $f(x_n) = 0 \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $f(1-0) = 0$ (определение 1.3), а для $\forall \{x_n\} \subset (1, 2)$: $x_n \to 1$ последовательность $f(x_n) = 2 - x_n \to 1$ при $n \to \infty$, следовательно $f(1+0) = 1$. Так как $f(1-0) \neq f(1+0)$, то $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ не существует (следствие из теоремы 1.2).◄

Определение 1.5. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если $f(x)$ определена на множестве $X = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a – некоторое положительное число, и для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\} \subset X$ последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Пример 1.6. Показать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x^p = 0$ для $\forall p > 0$ и $\forall x > 0$.

►Возьмём $\forall \{x_n\}$: $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ и $\forall \varepsilon > 0$. Положим $f(x) = 1/x^p$, тогда $f(x_n) = 1/x_n^p$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} 1/x_n = 0$ (теорема 4.4 главы 2), то по определению предела числовой последовательности (определение 2.1 глава 2) для $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/p}$ можно найти номер $N(\varepsilon_1) = N(\varepsilon)$ такой, что для $n > N(\varepsilon)$ верно неравенство $|1/x_n| < \varepsilon_1 = \varepsilon^{1/p}$ или $|1/x_n^p| < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} 1/x_n^p = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x^p = 0$ (упомянутое определение и определение 1.4).◄

Замечание 1.3. Определение 1.5 сформулировано “на языке последовательностей” (см. определение 1.1). Можно сформулировать его аналогично определению 1.2 (см. например, [1]).

Упражнение. Сформулировать определения, соответствующие следующим обозначениям: $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.