# §7. Гамма-функция Эйлера

*Гамма-функцией* (иначе – *интегралом Эйлера второго рода*) называется функция, выраженная несобственным интегралом

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\,. \qquad (7.1)$$

Этот интеграл зависит от параметра $p$, а потому является функцией этого параметра в случае сходимости интеграла. Особыми точками подынтегральной функции являются $x=0$ при $p<1$ и $x=\infty$.

Исследование с помощью предельного признака сравнения показывает, что интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p>0$.

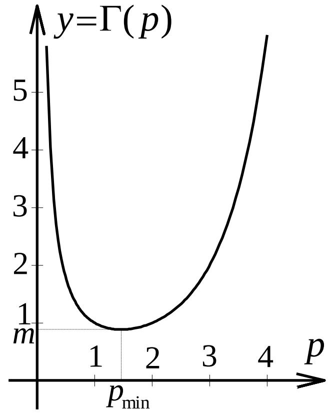


Рис. 7.1. График гамма-функции при $p>0$

**Свойства гамма-функции**.

1. Гамма-функция в промежутке $(0,+\infty)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка.

2. $\Gamma(1)=1$.

3. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. Эта рекуррентная формула позволяет свести вычисление любого значения гамма-функции к значениям из промежутка $[1,2]$, для которого обычно и составляются таблицы $\Gamma(p)$.

4. Если $n\in\mathbf{N}$, то $\Gamma(n+1)=n!$.

5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\pi/\sin(p\pi)$ – формула дополнения.

6. $\Gamma\left(1/2\right)=\sqrt{\pi}$.

7. График $\Gamma(p)$ вогнут вверх (рис. 7.1).

8. $\Gamma(p)$ убывает в промежутке $(0,\,p_{\min})$ от $+\infty$ до $m=\min\Gamma(p)=\Gamma(p_{\min})=0.8856\ldots$ ($p_{\min}=1.4616\ldots$), а затем возрастает до $+\infty$.

***Пример 7.1.*** Интеграл Эйлера – Пуассона.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \qquad (7.2)$$

▶ В интеграле Эйлера – Пуассона выполняем подстановку $x^2=t$; $x=\sqrt{t}$; $2x\,dx=dt$; $x=0\Rightarrow t=0$; $x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{-1}e^{-x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$