§ 6. Ротор (вихрь) векторного поля

<u>Определение 1</u> (ротора векторного поля)

Пусть $\overline{a}\,(M)$ - векторное поле $\forall\, M \in A \subset R^3$.

Пусть векторное поле $\overline{a}\,(M)$ имеет координаты $\{P(M), Q(M), R(M)\}$.

Пусть $P, Q, R \in C^1\,(A)$.

Ротором векторного поля $\overline{a}\,(M)$ в точке M называется **вектор** $\overline{W}$:

$$rot\,\overline{a}\,(M) = \overline{W} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot \bar{k}$$

<u>Замечание:</u>

Если для некоторого векторного поля $rot\,\overline{a}\,(M) = \bar{0}\ \forall(\cdot)M \in A \subset R^3$, говорят, что векторное поле является *безвихревым*.

Физический смысл ротора

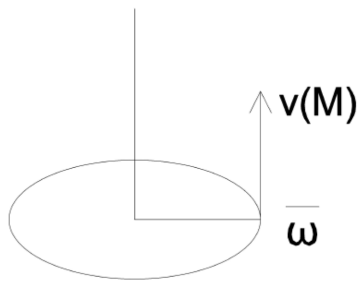
Пусть имеется ось, вокруг которой вращается твёрдое тело с угловой скоростью

$$\overline{\omega} = const = \{\omega_x;\, \omega_y;\, \omega_z\}.$$

Пусть $\overline{\upsilon}(M)$ - линейная скорость твёрдого тела, которая находится по формуле:

$$\bar{v}(M) = \overline{\omega} \times \bar{r},$$

где $\bar{r} = \{x; y; z\}$ –радиус-вектор точки *M*.



$$\overline{\upsilon}(M)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\underbrace{(z\omega_y-y\omega_z)}_{P}\cdot\bar{i}+\underbrace{(x\omega_z-z\omega_x)}_{Q}\cdot\bar{j}+\underbrace{(y\omega_x-x\omega_y)}_{R}\cdot\bar{k}$$

Тогда $rot\,\overline{\upsilon}(M)=(\omega_x-(-\omega_x))\cdot\bar{i}+(\omega_y-(-\omega_y))\cdot\bar{j}+(\omega_z-(-\omega_z))\cdot\bar{k}=2\overline{\omega}$

Следовательно, $rot\,\overline{\upsilon}(M)$ параллелен оси вращения и $|rot\,\overline{\upsilon}(M)|=2|\overline{\omega}|$,

т.е. с точностью до числового множителя ротор поля скоростей $rot\,\overline{\upsilon}(M)$

представляет собой мгновенную скорость вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Свойства ротора векторного поля

1) $rot\,\overline{a}(M)=\bar{0}\ \forall(\cdot)M\in A\subset R^3 \Rightarrow \bar{a}(M)=\bar{c},\ где\ \bar{c}-$ постоянный вектор $\forall(\cdot)M\in A\subset R^3$.

2) $rot\,(\lambda\bar{a})=\lambda\cdot rot\bar{a}$, где $\lambda=const$

3) $rot\,(\lambda_1\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\overline{a_2}(M))=\lambda_1\cdot rot\,\overline{a_1}(M)\pm\lambda_2\cdot rot\,\overline{a_2}(M),\ где\ \lambda_1,\lambda_2=const$

4) $rot\,(\varphi(M)\cdot\overline{a_1}(M))=grad\,\varphi(M)\times\bar{a}(M)+\varphi(M)\cdot rot\,\bar{a}(M)$ (доказать самостоятельно).

Векторная форма записи формулы Стокса

Пусть выполнены условия теоремы Стокса, тогда справедлива формула:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dxdy$$

С учетом введенных выше понятий, эту формулу можно записать следующим образом:

$$\oint_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot d\overline{r} = \iint_{\sigma} rot\,\overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) \cdot d\sigma$$

или

$$\oint_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot \overline{\tau_0} dl = \iint_{\sigma} \varPi p_{\overline{n_0}(M)} rot\,\overline{a}(M) \cdot d\sigma$$

Инвариантные определения ротора векторного поля.

Плотность циркуляции векторного поля

Пусть задано $\overline{a}\,(M)$ - векторное поле $\forall (\cdot) M \in A \subset R^3$.

Пусть плоскость P и $(\cdot) M \in P$.

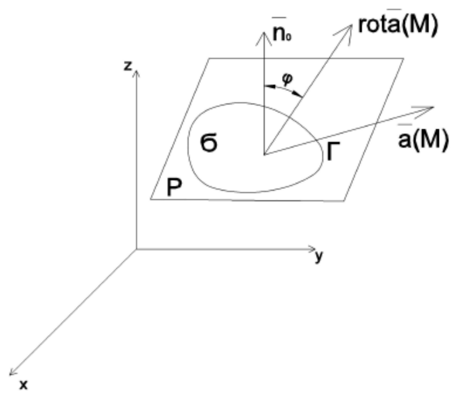
Пусть σ - плоская поверхность, лежащая в плоскости P.

Пусть Γ – замкнутый контур,ограничивающий плоскую поверхность σ

и точка $M \in \sigma$ и лежит внутри контура Γ.

Пусть $\bar{n}_0$ – единичный вектор нормали к плоской поверхности σ.

Выбирем на контре Γ напрвление обхода, соответствующее теореме Стокса.



Тогда по теореме Стокса можно записать

$$\oint_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot d\overline{r} = \iint_{\sigma} rot\, \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) \cdot d\sigma = rot\, \overline{a}(M_1) \cdot \overline{n_0}(M_1) \cdot \mu\sigma$$

(последнее равенство получено по теореме о среднем значении поверхностного интеграла, где точка $M_1 \in \sigma$ и $\mu\sigma -$ площадь повехности σ).

Таким образом, имеем:

$$\oint_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot d\overline{r} = rot\, \overline{a}(M_1) \cdot \overline{n_0}(M_1) \cdot \mu\sigma$$

Разделим обе части последнего равенства на площадь ($\mu\sigma$) и перейдём к пределу при $diam\,\sigma \to 0 \; u \; M_1 \to M$:

$$\lim_{diam\sigma \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \overline{a}(M) \cdot d\overline{r}}{\mu\sigma} = rot\, \overline{a}(M) \cdot \overline{n_0}(M) = \text{Пр}_{\bar{n}_0} rot\bar{a}(M),$$

где $\mu\sigma -$ площадь плоской поверхности σ с границей Γ и нормальным вектором $\bar{n}_0$.

Определение (плотности циркуляции векторного поля**)**

Предел

$$\lim_{diam\sigma\to 0}\frac{\oint\limits_{\Gamma}\bar{a}(M)\cdot d\bar{r}}{\mu\sigma}$$

называется (удельной) *плотностью циркуляции* по кривой Г векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M_0.

Обозначение: $\Pi\left(\bar{a}(M);\overline{n_0}\right)$.

Замечание 1:

$$\frac{\oint_{\Gamma}\ \bar{a}(M)d\bar{r}}{\mu\sigma} -$$ называется средней плотностью циркуляции по кривой Г векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке М.

Замечание 2:

Если задано векторное поле $\bar{a}(M)=\{P(M);Q(M);R(M)\}$, то плотность циркуляции в точке M_0 в направлении $\overline{n}_0$ можно найти по формуле.

$$\Pi(\bar{a}(M_0);\ \bar{n}_0)=\begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(M_0) & Q(M_0) & R(M_0) \end{vmatrix}$$

Определение 2 (инвариантное определение ротора векторного поля)

Ротором векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M называется вектор $\overline{W}$, проекция которого на любое направление $\overline{n_0}$ равна плотности циркуляции векторного поля.

Обозначение:

$$Пр_{\overline{n_0}}\overline{W} = П\left(\bar{a}(M); \overline{n_0}\right)$$

или

$$Пр_{\overline{n_0}} rot\, \bar{a}(M) = \lim_{diam\sigma\to 0} \frac{\oint\limits_{\Gamma} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r}}{\mu\sigma},$$

где $\mu\sigma -$ площадь плоской поверхности σ с границей Γ и нормальным вектором $\bar{n}_0$.

Замечание:

Из определения $rot\bar{a}(M)$ вытекает, что направление ротора – это направление вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность по сравнению с циркуляцией вокруг любого другого напрвления и величина наибольшей плотности циркуляции равна $|rot\bar{a}(M_0)|$.

Определение 3 (инвариантное определение ротора векторного поля)

Ротором (вихрем) векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M называется **вектор** $\overline{W}$, в направлении которого плотность циркуляции векторного поля принимает максимальное значение (длина этого вектора численно равна максимальной плотности циркуляции).

Обозначение:

$$rot\bar{a}(M) = \overline{W}, \quad \text{где} \quad |\overline{W}| = \Pi(\bar{a}(M_0);\ \overline{W})$$