§3. Теорема Коши

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$,
2. дифференцируемы на интервале (a,b),
3. $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b),

то на интервале (a,b) найдётся хотя бы одна точка c такая, для которой будет справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad (3.1)$$

называемое *формулой Коши*.

►Из условия теоремы следует, что $g(b) \neq g(a)$, иначе бы, в силу теоремы Ролля, на интервале (a,b) нашлась бы хотя бы одна точка x_0, в которой бы $g'(x_0) = 0$, что противоречит условию $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

Она обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ как алгебраическая сумма непрерывных функций;

2) $F(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) как алгебраическая сумма дифференцируемых функций, при этом

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x); \qquad (3.2)$$

3) $F(a) = F(b) = 0$.

Итак, для функции $F(x)$ выполнены условия теоремы Ролля, поэтому на интервале (a,b) найдётся хотя бы одна точка c такая, что $F'(c) = 0$. При $x = c$ из (3.2) получаем: $0 = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$, отсюда следует равенство (3.1).◄

Пример 3.1. Проверить справедливость теоремы Коши для функций $f(x) = x^3 - 8x$ и $g(x) = x^2/2 - 2x$, заданных на отрезке [2, 4].

►Для $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке [2,4] выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому на интервале (2, 4) есть хотя бы одна точка c, для которой справедлива формула Коши, имеющая в данном случае вид: $\dfrac{f(4)-f(2)}{g(4)-g(2)} = \dfrac{3c^2-8}{c-2}$ или $\dfrac{40}{2} = \dfrac{3c^2-8}{c-2}$. Отсюда для c получаем уравнение: $3c^2 - 20c + 32 = 0$, которое имеет два корня: $c_1 = 4, c_2 = 8/3$. Так как $c_1 = 4 \notin (2,4)$, то заключаем, что $c = 8/3$.◄

Замечание 3.1. Как и в случае теоремы Ролля, можно привести примеры, показывающие, что условия теоремы Коши существенны для её заключения.

1°. Геометрическая интерпретация теоремы Коши. Пусть дуга Γ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, а функции $x(t), y(t)$ удовлетворяют на отрезке $[\alpha, \beta]$ условиям теоремы Коши, поэтому: $\dfrac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \dfrac{y'_t(\gamma)}{x'_t(\gamma)}$, где $\gamma \in (\alpha, \beta)$ (см. (3.1)). Правая часть этого равенства $\dfrac{y'_t(\gamma)}{x'_t(\gamma)} = y'_x(x(\gamma))$ – угловой коэффициент касательной, проведённой в точке $C(x(\gamma),(y(\gamma))$ к кривой Γ, а левая – угловой коэффициент хорды AB, $A(x(\alpha),(y(\alpha)),B(x(\beta),(y(\beta))$.
Итак, на кривой Γ есть точка C такая, что проведённая в ней касательная T к Γ *параллельна* хорде, соединяющей концы дуги Γ (рис. 4.1).

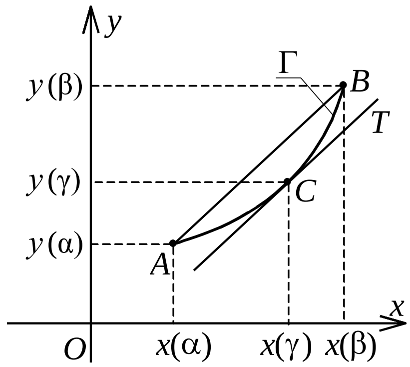

Рис. 4.1. К геометрической интерпретации теоремы Коши

2°. Физическая интерпретация теоремы Коши. Пусть материальная точка движется по дуге Γ, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $[t_1, t_2]$. Параметр t трактуется как время, а функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют на этом про
межутке условиям теоремы Коши. В силу формулы (3.1) получаем равенство: $\dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{x(t_2) - x(t_1)} = \dfrac{y'(t^*)}{x'(t^*)}$, $t^* \in (t_1, t_2)$. Итак, на интервале (t_1, t_2) есть момент времени t^*, в который *вектор скорости* движения точки $v(x'(t^*), y'(t^*))$ будет *коллинеарен вектору* $\overrightarrow{AB}$, где $A(x(t_1), y(t_1))$, $B(x(t_2), y(t_2))$ – концы дуги Γ.