Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

В.Г. ПАК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Компьютерные интеллектуальные технологии»

ЛЕКЦИЯ №7

МИНИМИЗАЦИЯ И РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

СЛАЙДЫ ВИДЕОЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ II КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ БАКАЛАВРИАТА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
2018

Содержание

Содержание (продолжение)

Тема 4. Минимизация булевых функций

§1. Задача минимизации булевых функций

Определение. ДНФ булевой функции называется *минимальной*, если она реализует эту функцию и имеет минимальную сложность среди всех реализующих её ДНФ.

Напоминание

Сложностью ДНФ называется сумма рангов входящих в неё элементарных конъюнкций.

Ранг – количество букв в элементарной конъюнкции.

Задача.

Построить минимальную ДНФ данной булевой функции.

Возможны другие постановки задачи (КНФ, СФЭ и др.).

§2. Структура граней n-мерного единичного куба. Интервалы

Обозначим B^n - n-мерный единичный куб ($B = \{0, 1\}$).

Определение. *Гранью* единичного n-мерного куба B^n называется множество

$$B^{n;\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1,\dots,\sigma_k} = \left\{ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in B^n \middle| \alpha_{i_1} = \sigma_1, \dots, \alpha_{i_k} = \sigma_k \right\}.$$

Множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется *направлением,* число k называется *рангом,* а число $n - k$ – *размерностью* грани $B^{n;\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1,\dots,\sigma_k}$.

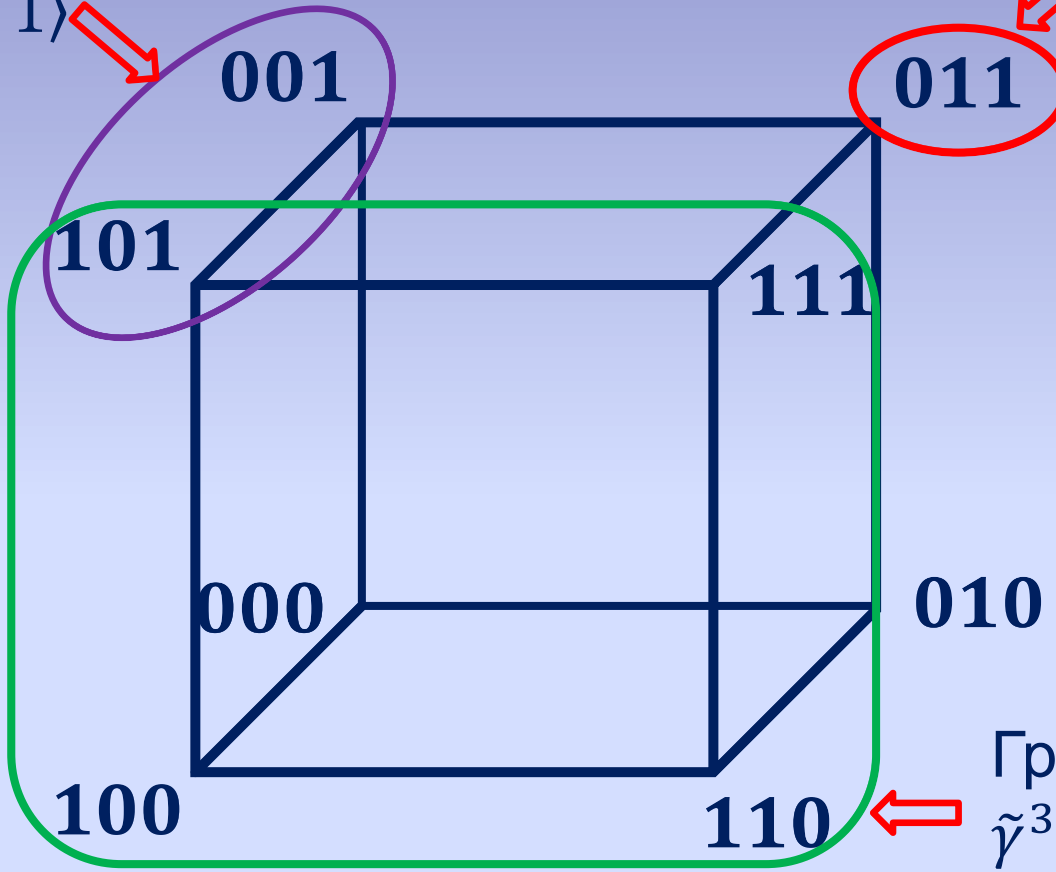
Определение. *Кодом* грани $G = B^{n;\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1,\dots,\sigma_k}$ называется вектор $\tilde{\gamma}^n(G)$, в котором $\gamma_{i_1} = \sigma_1, \dots, \gamma_{i_k} = \sigma_k$, а остальные координаты есть $-$.

Определение. Одномерные грани называются *рёбрами,* нуль-мерные грани - *вершинами* куба.

§2. Структура граней единичного куба

Ребро $B_{0,1}^{3;2,3}$, код $\tilde{\gamma}^3 = \langle -, 0, 1 \rangle$

Вершина $B_{0,1,1}^{3;1,2,3}$, код $\tilde{\gamma}^3 = \langle 0, 1, 1 \rangle$



Грань $B_{1}^{3;1}$, код $\tilde{\gamma}^3 = \langle 1, -, - \rangle$

§2. Структура граней единичного куба

Поставим булевой функции $y = f(\tilde{x}^n)$ во взаимно-однозначное соответствие множество $N_f \subseteq B^n$:

$$N_f = \{\tilde{\alpha}^n \in B^n | f(\tilde{\alpha}^n) = 1\}.$$

Пусть K- элементарная конъюнкция ранга r.

Определение. *Интервалом ранга* r ЭК K называется множество

$$N_K = \{\tilde{\alpha}^n \in B^n | K(\tilde{\alpha}^n) = 1\}.$$

Очевидно, что интервал ранга r – грань ранга r или размерности $n - r$.

Теорема 2.1. Число всех интервалов ЭК от n переменных равно 3^n.

§2. Структура граней единичного куба

Все интервалы для ЭК от x_1, x_2, x_3
Ранг 3, размерность 0

ЭК	Интервал	Код
$x_1 x_2 x_3$	111	$\langle 1, 1, 1 \rangle$
$x_1 \bar{x}_2 x_3$	101	$\langle 1, 0, 1 \rangle$
$\bar{x}_1 x_2 x_3$	011	$\langle 0, 1, 1 \rangle$
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	001	$\langle 0, 0, 1 \rangle$
$x_1 x_2 \bar{x}_3$	110	$\langle 1, 1, 0 \rangle$
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	100	$\langle 1, 0, 0 \rangle$
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	010	$\langle 0, 1, 0 \rangle$
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	000	$\langle 0, 0, 0 \rangle$

Упражнение: найти количество интервалов ранга r.

Все интервалы для ЭК от x_1, x_2, x_3
Ранг 2, размерность 1

ЭК	Интервал		Код
$x_1 x_2$	111	110	$\langle 1, 1, -\rangle$
$\bar{x}_1 x_2$	011	010	$\langle 0, 1, -\rangle$
$x_1 \bar{x}_2$	101	100	$\langle 1, 0, -\rangle$
$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	001	000	$\langle 0, 0, -\rangle$
$x_1 x_3$	101	111	$\langle 1, -, 1\rangle$
$x_1 \bar{x}_3$	100	110	$\langle 1, -, 0\rangle$
$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	000	010	$\langle 0, -, 0\rangle$
$\bar{x}_1 x_3$	001	011	$\langle 0, -, 1\rangle$

§2. Структура граней единичного куба

Все интервалы для ЭК от x_1, x_2, x_3
Ранг 2, размерность 1
(окончание)

ЭК	Интервал		Код
$x_2 x_3$	011	111	$\langle -, 1, 1 \rangle$
$x_2 \bar{x}_3$	010	110	$\langle -, 1, 0 \rangle$
$\bar{x}_2 x_3$	001	101	$\langle -, 0, 1 \rangle$
$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	000	100	$\langle -, 0, 0 \rangle$

Все интервалы для ЭК от x_1, x_2, x_3
Ранг 1, размерность 2

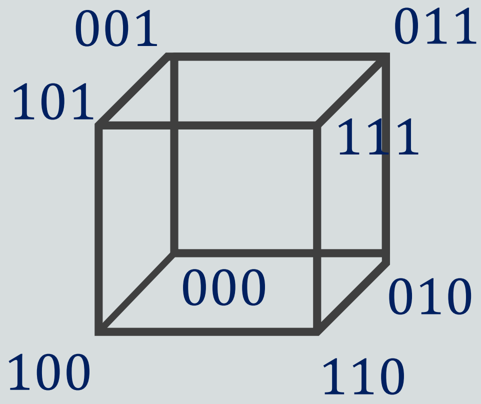
ЭК	Интервал	Код
x_1	101 111 100 110	$\langle 1, -, - \rangle$
x_2	111 011 110 010	$\langle -, 1, - \rangle$
x_3	001 101 011 111	$\langle -, -, 1 \rangle$

Все интервалы для ЭК от x_1, x_2, x_3
Ранг 1, размерность 2
(окончание)

ЭК	Интервал	Код
$\bar{x}_1$	001 011 000 010	$\langle 0, -, - \rangle$
$\bar{x}_2$	001 101 000 100	$\langle -, 0, - \rangle$
$\bar{x}_3$	000 100 010 110	$\langle -, -, 0 \rangle$

§2. Структура граней единичного куба

Все интервалы для ЭК от x_1, x_2, x_3
Ранг 0, размерность 3

ЭК	Интервал	Код
1		$\langle -, -, - \rangle$

Теорема 2.2.

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{i=1}^{t} K_i(\tilde{x}^n) \Leftrightarrow N_f = \bigcup_{i=1}^{t} N_{K_i}.$$

Следствие. Вместо реализующих данную булеву функцию ДНФ можно рассматривать покрытия множества N_f соответствующими интервалами.

Определение. Интервал N_K называется *допустимым* для функции f, если $N_K \subseteq N_f$. В этом случае ЭК K называется *допустимой* для f.

§3. Построение сокращённой ДНФ

3.1. Сокращённая ДНФ

Определение. Интервал N_K называется *максимальным* для функции f, а ЭК K *простой*, если не существует такого допустимого интервала $N_{K'}$ для f, отличного от N_K и *множества* N_f, что

$$N_K \subset N_{K'} \subset N_f.$$

Пусть $\{N_{K_1}, \dots, N_{K_s}\}$ - множество всех максимальных интервалов для f.

Определение. *Сокращённой ДНФ*, реализующей функцию f, называется дизъюнкция всех простых ЭК функции f, т.е.

$$f = K_1 \vee \dots \vee K_s.$$

Лемма 3.1. Если $N_K \subset N_{K'}$ (N_K, $N_{K'}$ - различные допустимые интервалы), то существует такая ЭК $L \not\equiv 1$, что $K = K'L$ и переменные L отличны от переменных K'.

Следствие. Если $N_K \subset N_{K'}$ (включение строгое), то ранг K' меньше ранга K.

Теорема 3.1. Минимальная ДНФ получается из сокращённой удалением некоторых простых ЭК.

3.2. Методы построения сокращённой ДНФ

3.2.1. Метод Блейка

К произвольной ДНФ слева направо применяются:

1) правило обобщённого склеивания

$$xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2;$$

2) правило поглощения

$$K_1 \vee K_1K_2 = K_1.$$

Этапы:

1) операция обобщённого склеивания до тех пор, пока это возможно;
2) операция поглощения также до тех пор, пока это возможно.

Теорема 3.2 (теорема Квайна). ДНФ, полученная в результате применения этапов 1-2 к произвольной ДНФ функции f, является её сокращённой ДНФ.

3.2.2. Метод Нельсона

Применяется к произвольной КНФ.

Этапы:

1. С помощью закона дистрибутивности раскрываются скобки.
2. Удаляются все возможные буквы и конъюнкции с использованием законов противоречия, идемпотентности и правила поглощения.

3.2.3. Алгоритм Квайна

Применяется к СДНФ.

Этапы:

1. Операция неполного склеивания $xK \vee \bar{x}K = K \vee xK \vee \bar{x}K$ применяется к каждой возможной паре ЭК.
2. С использованием правила поглощения $K \vee x^{\sigma}K = K$ удаляются все возможные ЭК ранга n.

Полученную ДНФ обозначим D_1. Если на каком-то шаге получена ДНФ D_k, то к ней применяются этапы 1-2, но только удаляются все возможные ЭК ранга $n - k$. В результате получается ДНФ D_{k+1}.

Алгоритм заканчивает работу, когда $D_{k+1} = D_k$.

3.2.4. Карты Карно

Также называются *минимизирующими картами* или *диаграммами Вейча*. Применяются при $n \leq 4$ и используют геометрическое представление N_K как граней. Таблицы значений функции составляются так, что смежные ячейки соответствуют соседним в смысле расстояния Хемминга вершинам B^n.

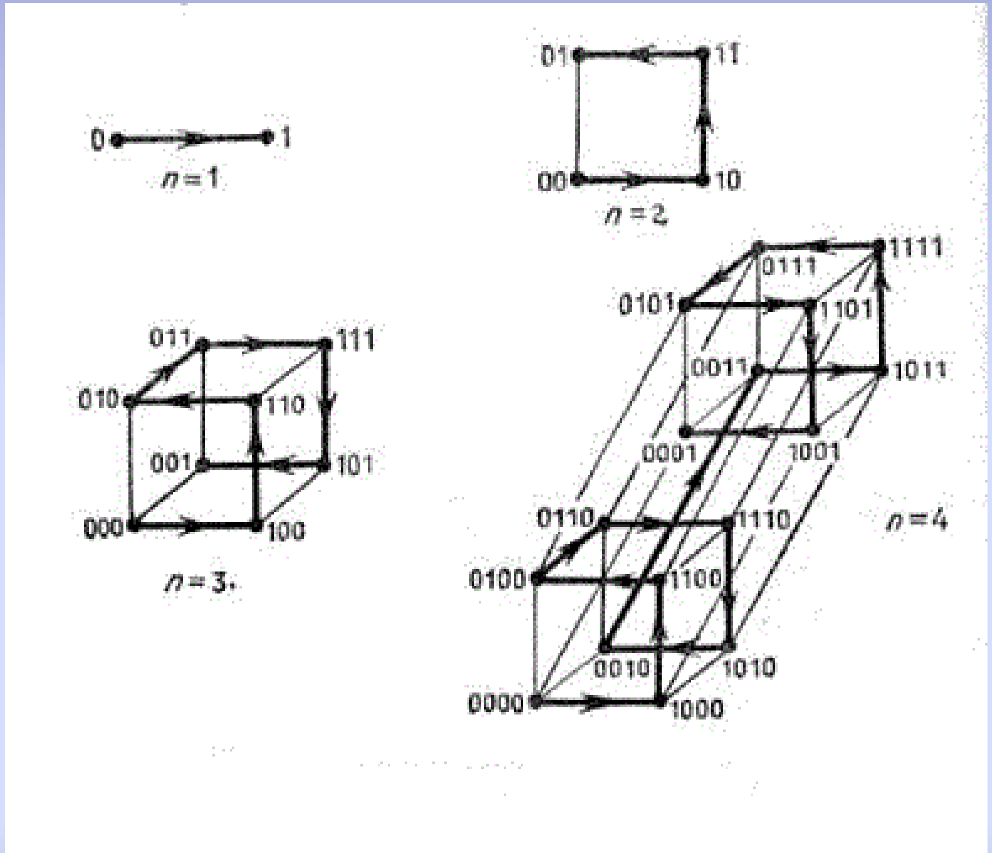
Определение. *Расстоянием Хемминга* между двоичными векторами $\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n \in B^n$ называется число

$$\rho\left(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n\right) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Вершины $\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n \in B^n$ назовём *соседними*, если $\rho\left(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n\right) = 1$. Наборы значений переменных на каждой из сторон таблицы расположены по *коду Грея*.

3.2.4. Карты Карно

Двоичным кодом Грея порядка n называется последовательность всех n-разрядных кодов, в которой любые два соседних кода различаются ровно в одном разряде, т.е. расстояние Хемминга между любыми соседними кодами равно 1.



3.2.4. Карты Карно

Карты Карно

$n = 2$

x_1	x_2	
	0	1
0	$f(0,0)$	$f(0,1)$
1	$f(1,0)$	$f(1,1)$

$n = 3$

x_1	$x_2\ x_3$			
	0 0	0 1	1 1	1 0
0	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
1	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

$n = 4$

$x_1\ x_2$	$x_3\ x_4$			
	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
0 1	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$
1 1	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
1 0	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$

3.2.4. Карты Карно

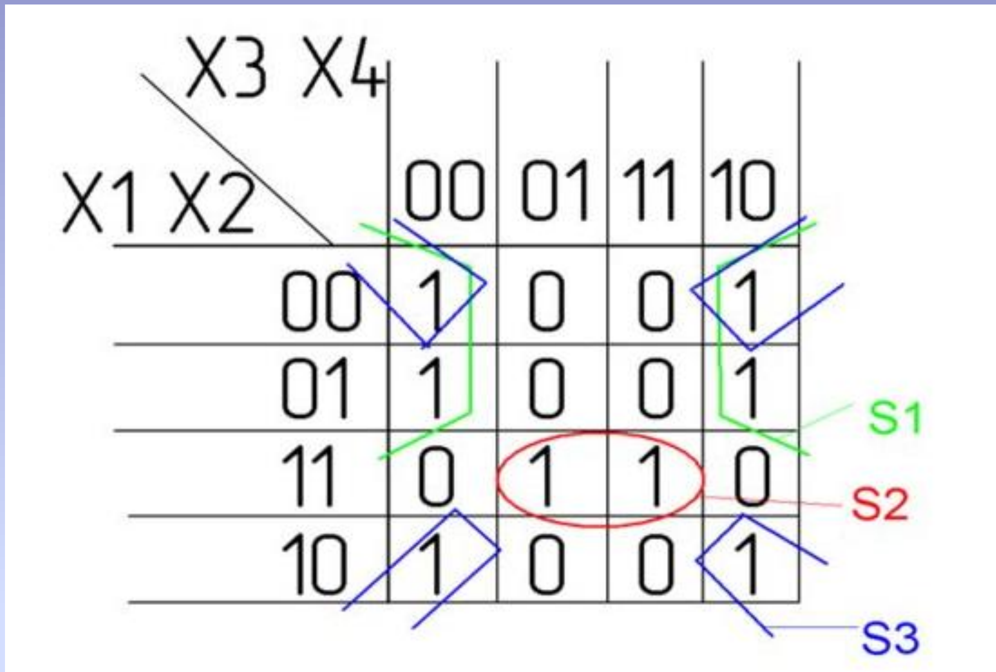
Для построения сокращённой ДНФ производится процедура склеивания единичных клеток. Склеивающимся клеткам соответствуют соседние клетки, т.е. клетки отличающиеся лишь значением одной переменной (на карте они находятся на одной горизонтали или вертикали, крайние клетки горизонтали или вертикали являются также соседними).

Процесс склеивания сводится к объединению в группы (прямоугольники) единичных клеток карты Карно, при этом необходимо соблюдать следующие правила:

1. Количество клеток, входящих в одну группу, должно выражаться числом 2^m, где $m = 0, 1, 2, \ldots$.
2. Каждая клетка, входящая в группу из 2^m клеток, должна иметь m соседних в группе.
3. Каждая единичная клетка должна входить хотя бы в одну группу.
4. В каждую группу должно входить максимальное число клеток, т.е. ни одна группа не должна содержаться в другой группе.
5. Число групп должно быть минимальным.

Тогда прямоугольники покрытия единичных клеток будут соответствовать простым ЭК.

3.2.4. Карты Карно



$$B^{4;1,4}_{0,0}, \tilde{\gamma}^4 = \langle 0, -, -, 0 \rangle$$

$$B^{4;1,2,4}_{1,1,1}, \tilde{\gamma}^4 = \langle 1, 1, -, 1 \rangle$$

$$B^{4;2,4}_{0,0}, \tilde{\gamma}^4 = \langle -, 0, -, 0 \rangle$$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4$$

§4. Тупиковые и минимальные ДНФ

4.1. Тупиковая ДНФ

Правило удаления ЭК из ДНФ (в том числе сокращённой)

Пусть $f = K_1 \vee \dots \vee K_s$. Тогда $N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s}$. Если

$$N_{K_1} \subseteq N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s},$$

то N_{K_1} можно удалить из покрытия N_f, при этом снова получится покрытие: $N_f = N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s}$. Тогда $f = K_2 \vee \dots \vee K_s$.

Если же $N_{K_1} \not\subset N_{K_2} \cup \dots \cup N_{K_s}$, то K_1 нельзя удалить из ДНФ.

Определение. Сокращённая ДНФ называется *тупиковой*, если отбрасывание любой ЭК приводит к не эквивалентной функции f ДНФ. Соответствующее покрытие N_f называется *неприводимым.*

Минимальная ДНФ является тупиковой, но не наоборот.

Определение. ДНФ называется *кратчайшей*, если она имеет минимальную длину среди всех эквивалентных функции f ДНФ.

Кратчайшая ДНФ является тупиковой, но не наоборот.

4.2. Алгоритм перехода от сокращённой ДНФ к тупиковой

Пусть $f = K \vee K_1 \vee \cdots \vee K_s$ - сокращённая ДНФ. Тогда

$$N_f = N_K \cup N_{K_1} \cup \cdots \cup N_{K_s}.$$

Для отбрасывания ЭК K, т.е. перехода к тупиковой или кратчайшей ДНФ, необходимо уметь проверять условие $N_K \subseteq N_{K_1} \cup \cdots \cup N_{K_s}$.

Можно считать, что $N_K \cap N_{K_i} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, s$. Если $N_K \cap N_{K_i} \neq \emptyset$, то $KK_i \not\equiv 0$ (очевидно, что $N_K \cap N_L = \emptyset \iff KL \equiv 0$), тогда общие переменные K и K_i входят в них в одинаковых степенях. Если удалить из K_i общие с K переменные, то оставшиеся в K_i переменные образуют конъюнкцию, которую обозначим C_i (если все переменные K_i входят в K, то $C_i = 1$).

Теорема 3.3 (критерий поглощения).

$$N_K \subseteq N_{K_1} \cup \cdots \cup N_{K_s} \iff \bigvee_{i=1}^{s} C_i \equiv 1.$$

4.2. Алгоритм перехода от сокращённой ДНФ к тупиковой

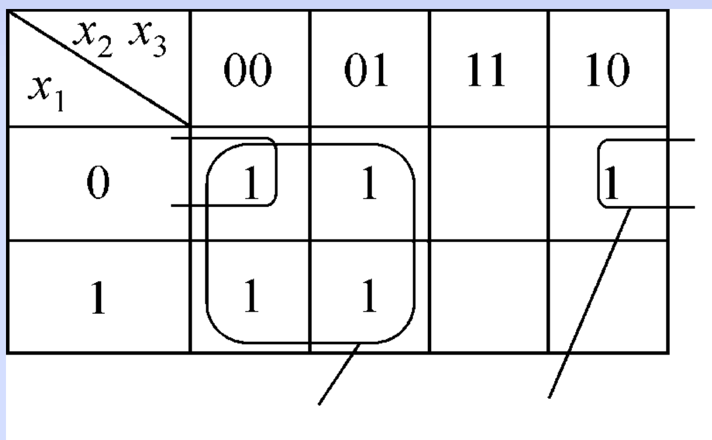
<u>Алгоритм перехода к тупиковой ДНФ</u>

Последовательно применяется критерий поглощения. Те ЭК, для которых не выполняется условие $\bigvee_{i=1}^{s} C_i \equiv 1$, включаются в тупиковую ДНФ.

<u>Другие алгоритмы</u>

<u>Карты Карно</u>

Применяются для построения кратчайших ДНФ при $n \leq 4$. Находится минимальное по числу прямоугольников покрытие множества N_f по правилам склеивания клеток на карте Карно.



$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$

4.2. Алгоритм перехода от сокращённой ДНФ к тупиковой

Таблица Квайна

	0000	0001	0010	0101	0111	1100	1101	1111	1001
$K_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$	1	0	1	0	0	0	0	0	0
$K_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$K_3 = \overline{x}_3 x_4$	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$K_4 = x_2 x_4$	0	0	0	1	1	0	1	1	0
$K_5 = x_1 x_2 \overline{x}_3$	0	0	0	0	0	1	1	0	0

$$K = (K_1 \vee K_2)(K_2 \vee K_3)K_1(K_3 \vee K_4)K_4K_5(K_3 \vee K_4 \vee K_5)K_4K_3 = K_1K_3K_4K_5$$

Тупиковая ДНФ:

$$K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3.$$

Она же является кратчайшей и минимальной.

4.2. Алгоритм перехода от сокращённой ДНФ к тупиковой

Замечание. В простых случаях тупиковые ДНФ можно найти непосредственно по таблице Квайна. Находятся подмножества строк, удовлетворяющие условиям:

1. В каждом столбце есть хотя бы одна единица в строках подмножества.
2. Удаление любой строки приводит к невыполнению условия 1, т.е. появляется нулевой столбец в оставшихся строках.

Тема 5. Реализация булевых функций схемами из функциональных элементов и релейно-контактными схемами

§1. Реализация булевых функций схемами из функциональных элементов

1.1. Схемы из функциональных элементов

Определение. *Схемой из функциональных элементов* (*СФЭ*) называется ориентированная бесконтурная сеть. Полюса делятся на *входные* (*входы*) и *выходные* (*выходы*). Входные полюса помечаются символами переменных, или отрицаний переменных, или констант. Каждая отличная от входа вершина помечается функциональным символом или символом логической связки. Эти вершины представляют собой *функциональные элементы* (*ФЭ*) и называются *внутренними*. Некоторые внутренние вершины объявляются выходами.

1.1. Схемы из функциональных элементов

<u>Сведения из теории графов</u>

Ориентированный граф (орграф)– пара $\langle V, E\rangle$, где V- не более чем счётное множество (*множество вершин* (*узлов*)), $E \subseteq V^2$ - *множество дуг.*

Ориентированная сеть – орграф с помеченными вершинами – *полюсами*.

Контур в орграфе – замкнутый путь, т.е. последовательность вершин и дуг вида $v_0 x_1 v_1 x_2 \ldots x_{n-1} v_n = v_0$, где $v_i \in V$, $x_i \in E$, $x_i = \langle v_{i-1}, v_i\rangle$.

При этом выполняются условия:

1. Полустепень захода каждого входного полюса равна нулю.
2. Полустепень захода каждой внутренней вершины равна числу мест функционального символа или логической связки, которым эта вершина помечена.

Сведения из теории графов

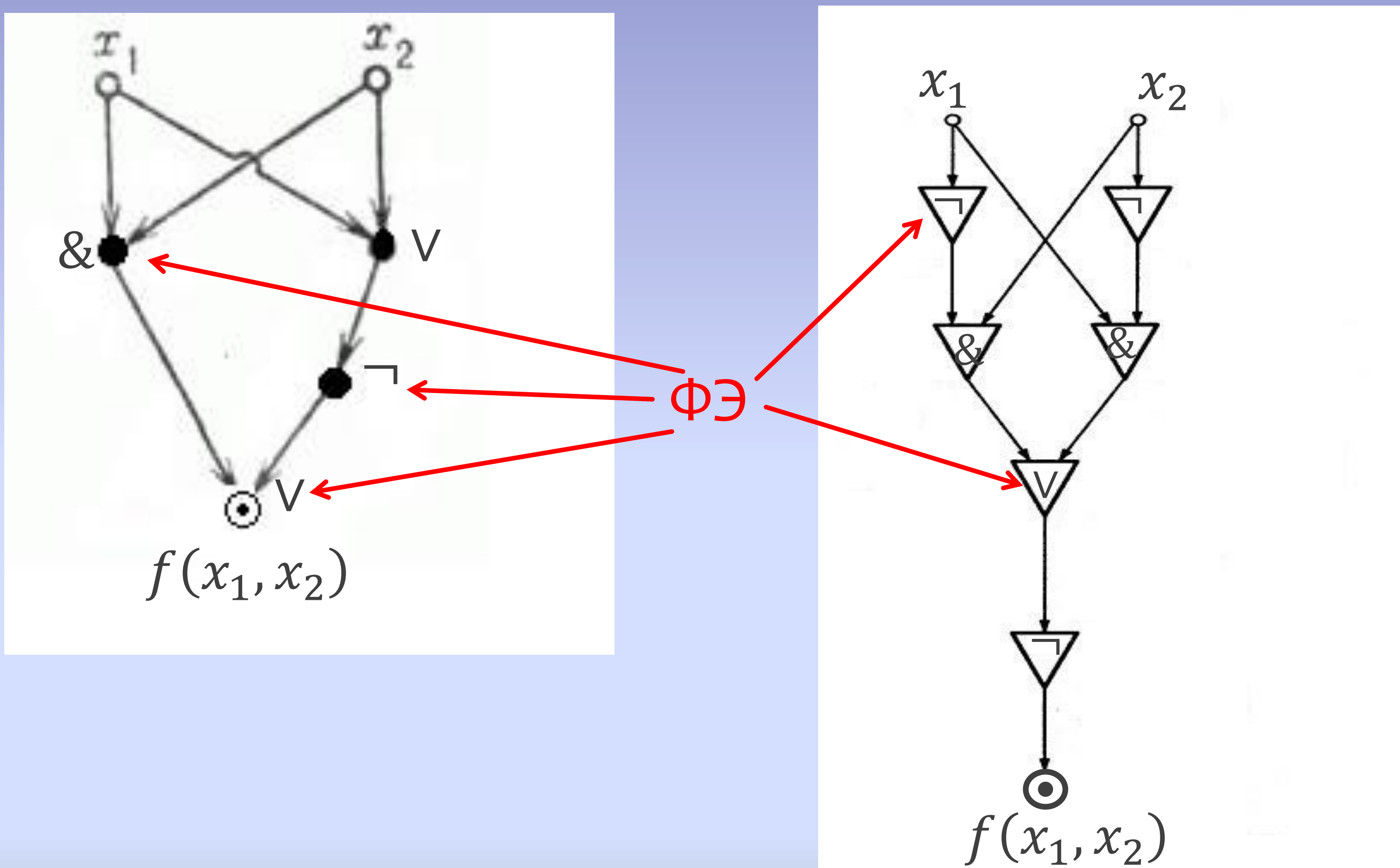
Полустепень захода вершины v- число дуг вида $\langle u, v\rangle$, т.е. входящих в v.

Полустепень исхода вершины v- число дуг вида $\langle v, u\rangle$, т.е. исходящих из v.

Определение. Множество функциональных символов или связок, используемых для пометки внутренних вершин СФЭ, называется *базисом схемы*.

Замечание. Базис СФЭ *не предполагает ни полноты, ни минимальности,* как базис в смысле общепринятого определения. Базис $\{\vee, \&, \neg\}$ будем называть *стандартным*.

Изображение СФЭ



1.2. Функции, реализуемые схемами

Определение. *Функцией, реализуемой в вершине схемы* v, называется функция φ_v, определяемая индукционно по следующим правилам.

1. Если схема не содержит ФЭ, то каждая вершина есть вход. В этом случае функция φ_v тождественно равна переменной, или отрицанию переменной, или константе, приписанной входу v.
2. Пусть для СФЭ с не более чем $m \geq 0$ ФЭ для каждой вершины определена реализуемая в ней функция; пусть имеется произвольная СФЭ с $m+1$ ФЭ. В ней существует вершина v с нулевой полустепенью исхода. Если её удалить, то получится СФЭ с m ФЭ, в которой по предположению в каждой вершине однозначно определена реализующая её функция. Пусть v имеет полустепень захода k и ей приписан k-местный функциональный символ f^k; пусть, кроме того, в k вершинах, из которых v достижима по дуге, реализуются функции $f_1(x_1, \dots, x_n)$, … , $f_k(x_1, \dots, x_n)$. Тогда функция φ_v, реализуемая в вершине v, определяется равенством
$$\varphi_v(x_1, \dots, x_n) = f^k(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)).$$

1.2. Функции, реализуемые схемами

Определение. Функция f (система функций A) *реализуется схемой* Σ, если в Σ есть выход, в котором реализуется функция f (выходы, в которых реализуются все функции из A).

Определение. *Сложностью СФЭ* называется число её ФЭ, т.е. вершин, не являющихся входами.

Определение. СФЭ Σ называется *минимальной*, если она имеет минимальную сложность среди всех СФЭ, реализующих функции, реализуемые схемой Σ.

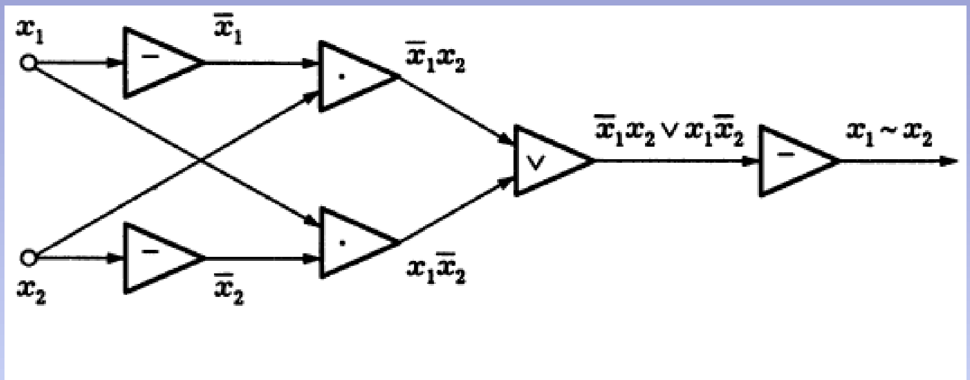
Определение. *Сложностью булевой функции* f (*системы функций* A) в классе СФЭ в базисе B называется сложность минимальной СФЭ в базисе B, реализующей функцию f (систему функций A).

Определение. *Глубиной СФЭ* в базисе B называется максимальное число ФЭ в ориентированных цепях, соединяющих вход с выходом.

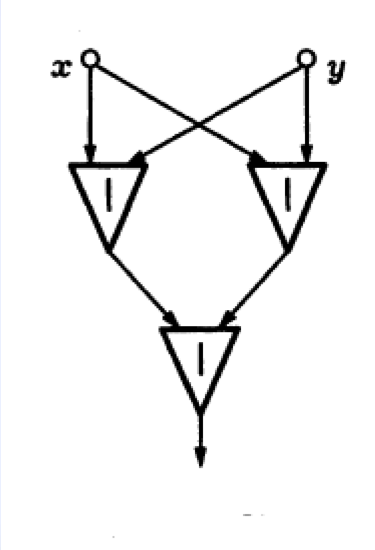
Сведения из теории графов

Цепь в орграфе – путь с различными вершинами, т.е. последовательность вершин и дуг вида $v_0 x_1 v_1 x_2 \dots x_{n-1} v_n$, где $v_i \in V$, $x_i \in E$, $x_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle$ и $v_i \neq v_j$, $i \neq j$.

1.3. Примеры реализаций

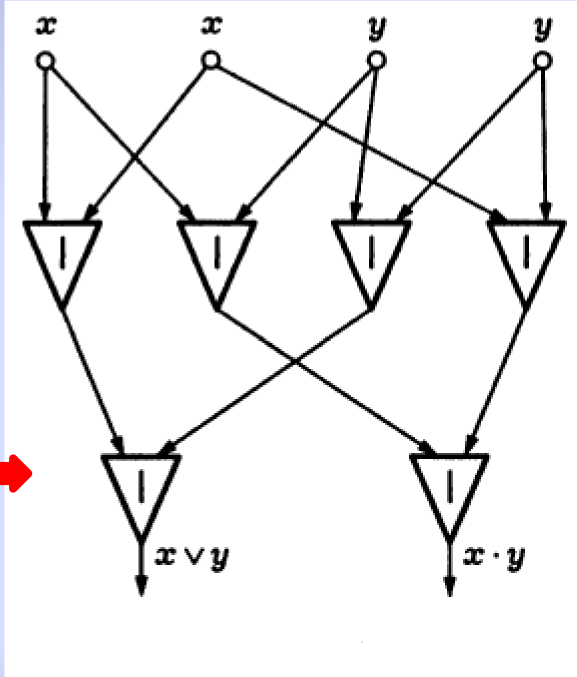


Реализуется функция $f(x_1, x_2) = x_1 \equiv x_2$ в стандартном базисе. Сложность схемы – 6, глубина – 4.

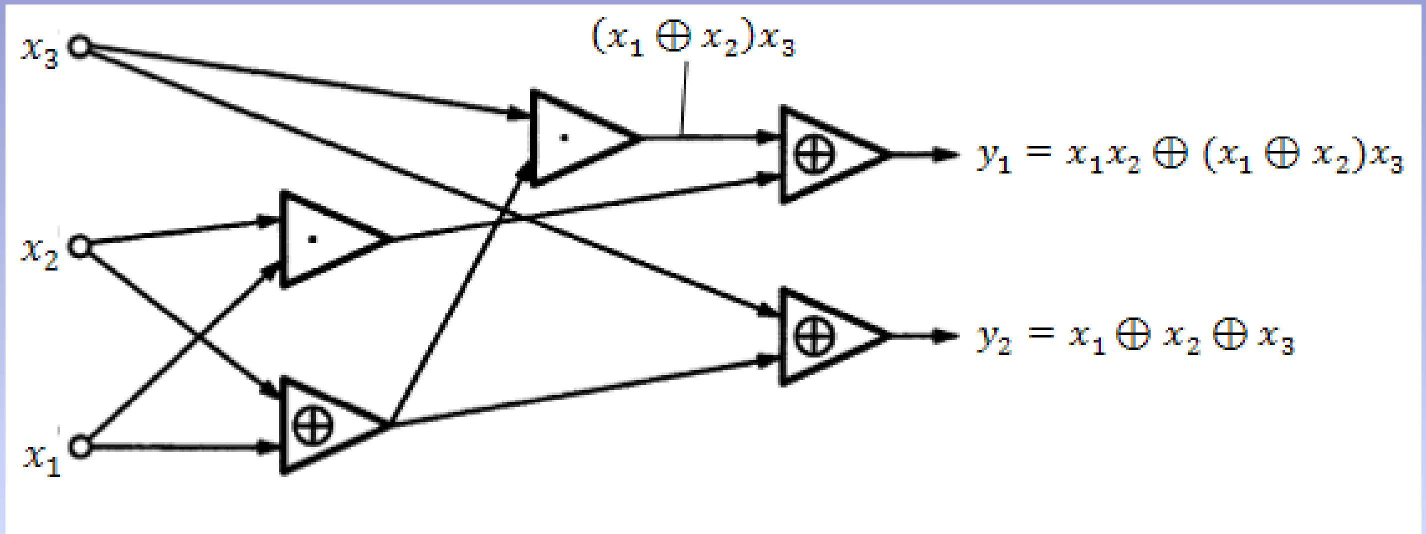


Реализуется функция $f(x, y) = x \& y$ в базисе $\{|\}$. Сложность схемы – 3, глубина – 2.

Реализуются функции $f_1(x, y) = x \& y$, $f_2(x, y) = x \vee y$ в базисе $\{|\}$. Сложность схемы – 6, глубина – 2.



1.3. Примеры реализаций



Реализуются две функции в *базисе Жегалкина* $\{\&, 1, \oplus\}$. Сложность схемы – 5, глубина – 3.

n-разрядный сумматор

$$
\begin{array}{r}
(\,p_n\ p_{n-1}\ \ldots\ p_2\ p_1) \\
x_n\ x_{n-1}\ \ldots\ x_2\ x_1 \\
+\ y_n\ y_{n-1}\ \ldots\ y_2\ y_1 \\
\hline
z_{n+1}\ z_n\ z_{n-1}\ \ldots\ z_2\ z_1
\end{array}
$$

n-разрядное двоичное число p, цифры которого соответствуют переносам знаков в следующий разряд

n-разрядное двоичное число x

n-разрядное двоичное число y

$z = x + y$ – двоичная сумма

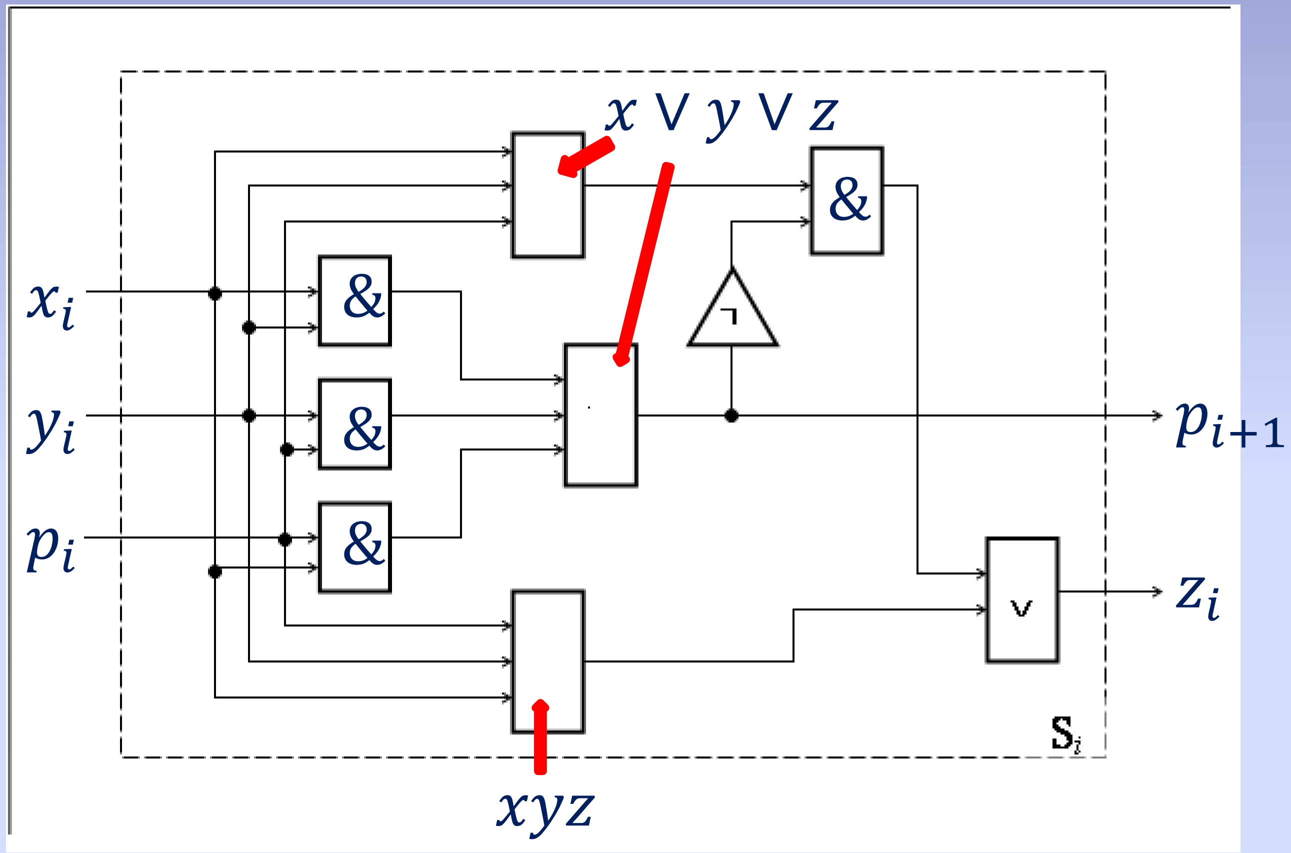
Расчётные формулы:

$$
\begin{cases}
p_{i+1} = x_i y_i \vee x_i p_i \vee y_i p_i, i = 1, \ldots, n, p_1 = 0; \\
z_i = x_i \oplus y_i \oplus p_i, i = 1, \ldots, n, z_{n+1} = p_{n+1}.
\end{cases}
$$

Представление $x_i \oplus y_i \oplus p_i$ в стандартном базисе:

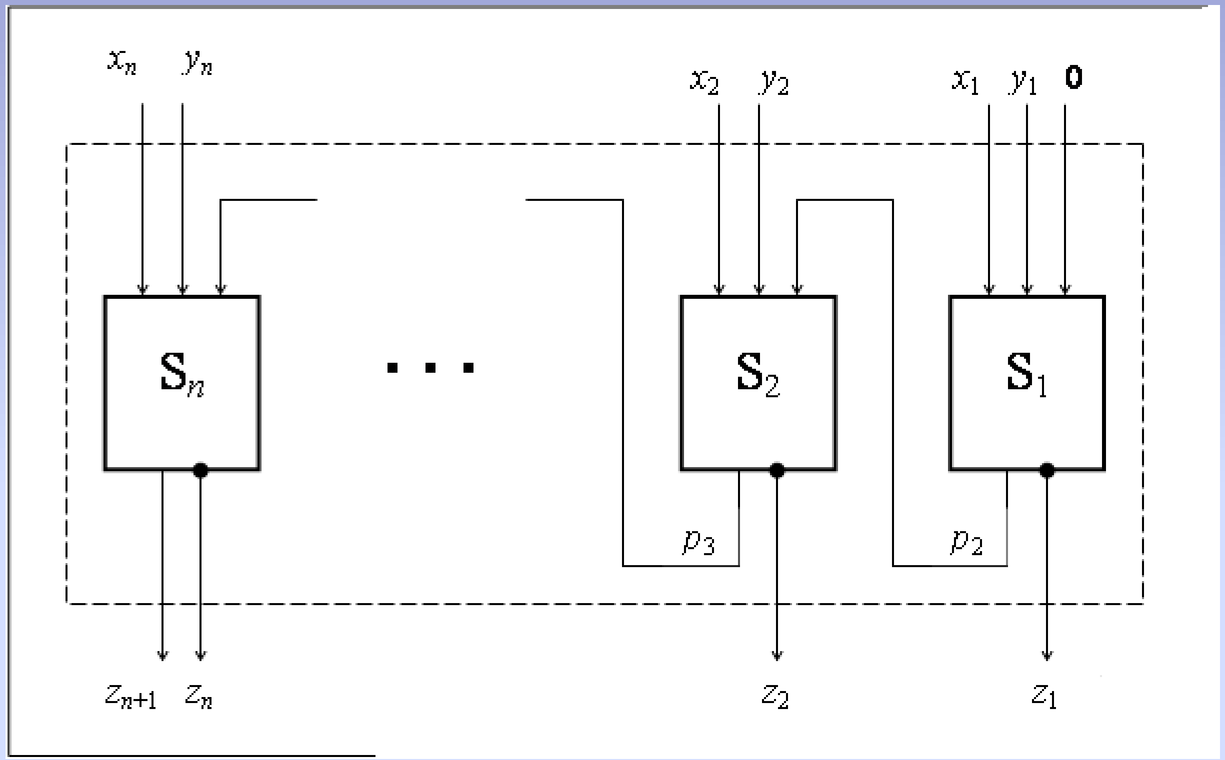
$$x_i \oplus y_i \oplus p_i = x_i y_i p_i \vee (x_i \vee y_i \vee p_i)\overline{x_i y_i \vee x_i p_i \vee y_i p_i}.$$

Одноразрядный двоичный сумматор S_i



1.3. Примеры реализаций

n-разрядный сумматор



Сложность схемы – $12n$, глубина – $6n$.

§2. Реализация булевых функций релейно-контактными схемами

2.1. Релейно-контактные схемы

Определение. Сеть G с k полюсами, в которой каждое ребро помечено буквой из алфавита $X = \{x_1, \dots, x_n, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n\}$, называется k*-полюсной контактной схемой* (*релейно-контактной схемой*, *РКС*), реализующей булевы функции переменных $x_1, \dots, x_n$ ($\langle k, n \rangle$*-схемой*). Рёбра РКС называются *контактами*. Ребро с приписанной ему буквой x_i ($\overline{x}_i$) называется *замыкающим* (*размыкающим*) *контактом*. Множество всех полюсов разбивается на два подмножества - *входов* и *выходов*. РКС с r входами и s выходами называется *контактным* (r, s)*-полюсником*.

Сведения из теории графов

Граф – пара $\langle V, E \rangle$, где V - не более чем счётное множество (*множество вершин* (*узлов*)), E - *множество* неупорядоченных пар вершин, т.е. двухэлементных подмножеств вершин (*рёбер*). *Сеть* – граф с помеченными вершинами – *полюсами*.

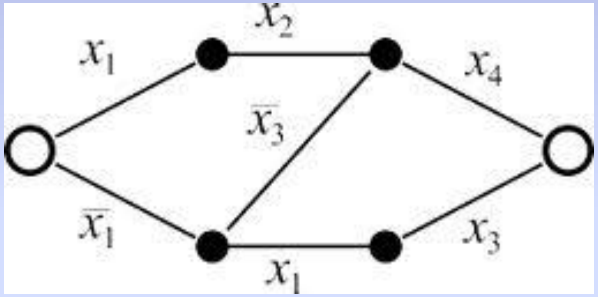
Маршрут в графе - последовательность вершин и рёбер вида $v_0 x_1 v_1 x_2 \dots x_{n-1} v_n$, где $v_i \in V$, $x_i \in E$, $x_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Маршрут, соединяющий вершины v_0, v_n, будем называть (v_0, v_n)-маршрутом.

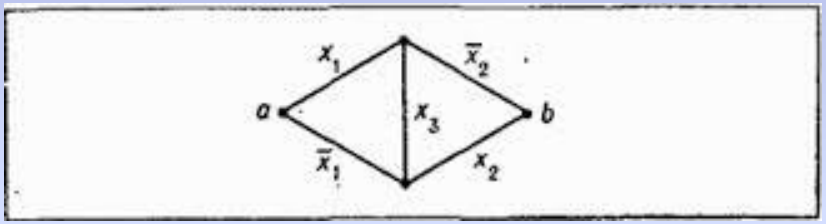
Определение. *Сложностью* РКС называется число её контактов.

2.1. Релейно-контактные схемы

Определение. *Параллельно-последовательной схемой* (π*-схемой*) называется РКС, построенная по следующим индуктивным правилам.

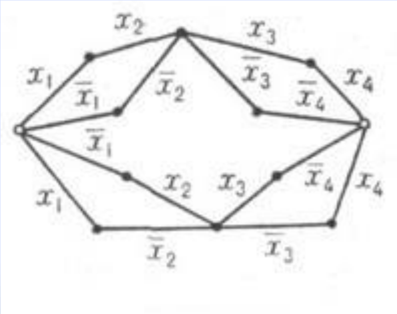
1. РКС, состоящая из единственного контакта, соединяющего полюсы, есть π-схема.
2. РКС, построенная из двух π-схем, соединенных параллельно или последовательно, есть π-схема.
3. Другие схемы не являются π-схемами.





Мостиковая РКС, не являющаяся π-схемой

π-схема



2.2. Функция проводимости

Пусть a, b два полюса РКС Σ, l – некоторая (a, b)-цепь, K_l - конъюнкция букв, приписанных рёбрам цепи l.

Определение. Функция

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) = \bigvee_l K_l\,,$$

где дизъюнкция берётся по всем (a, b)-цепям l, называется *функцией проводимости между полюсами* a, b *схемы* Σ.

Определение. *Схема* Σ *реализует функцию* g, если в ней существуют полюса a, b такие, что $g(\tilde{x}^n) = f_{a,b}(\tilde{x}^n)$.

Сведения из теории графов

Цепь в графе – маршрут с различными вершинами, т.е. последовательность вершин и рёбер вида $v_0 x_1 v_1 x_2 \dots x_{n-1} v_n$, где $v_i \in V$, $x_i \in E$, $x_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ и $v_i \neq v_j$, $i \neq j$.

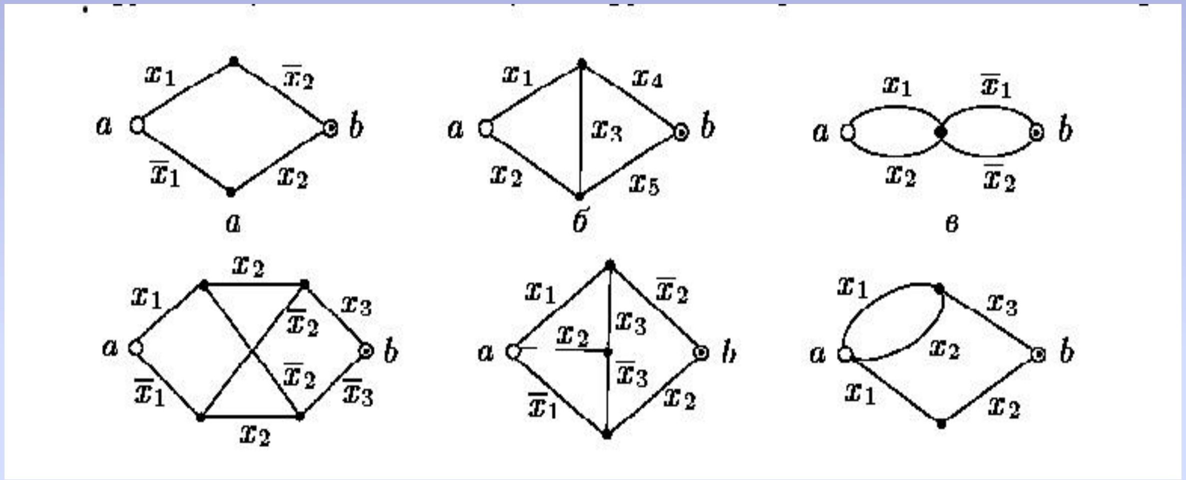
Определение. РКС с $k + 1$ полюсами называется $(1, k)$-*полюсником*, *реализующим систему функций* $A = \{g_1, \dots, g_k\}$, если в ней существуют полюса a и $b_1, \dots, b_k$ такие, что $g_i(\tilde{x}^n) = f_{a,b_i}(\tilde{x}^n)$, $i = 1, \dots, k$.

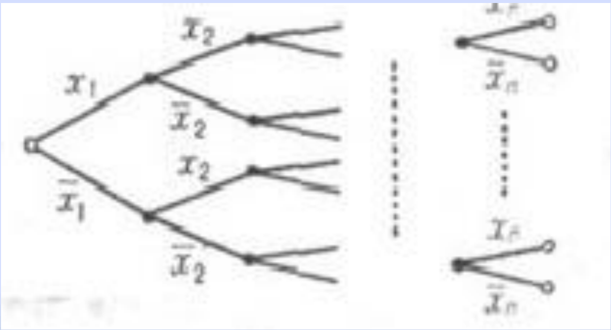
Аналогично определяется $(k, 1)$-*полюсник.*

2.2. Функция проводимости

Определение. *Разделительным* называется $(1, k)$-полюсник, у которого функция проводимости $f_{b,c}$ тождественно равна нулю для любых выходов b, c.

Определение. Две РКС называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же функцию или систему функций.





$(1, 2^n)$-полюсник - *контактное дерево*

2.2. Функция проводимости

Определение. РКС с минимальной сложностью среди всех эквивалентных ей РКС называется *минимальной.*

Определение. *Сложностью булевой функции* f *в классе РКС* называется сложность минимальной реализующей f РКС. *Сложностью булевой функции* f *в классе* π*-схем* называется сложность минимальной реализующей f π-схемы. *Сложностью булевой функции* f *в классе формул над множеством связок* $\{\&, \vee, \neg\}$ называется минимальное число букв (символов переменных или отрицаний переменных) в формулах над множеством связок $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующих функцию f.

Сложность функции над множеством связок $\{\&, \vee, \neg\}$ равна её сложности в классе π-схем.

Как найти булеву функцию (систему функций), которую реализует РКС?

Для каждой пары полюсов a, b, где a – вход, b – выход, вычислить и упростить функцию проводимости.

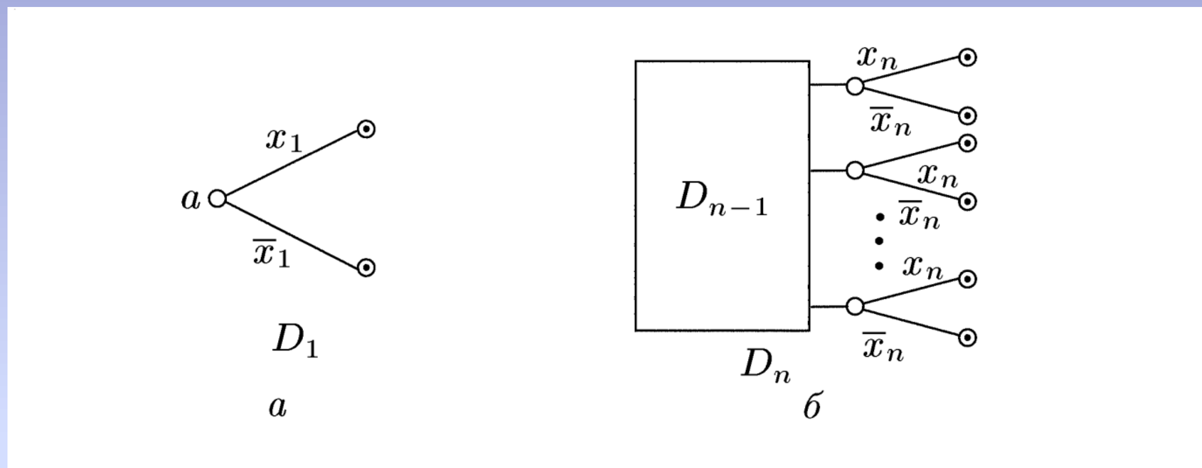
Результат – булева функция, реализуемая РКС.

Как реализовать булеву функцию в виде РКС данной сложности?

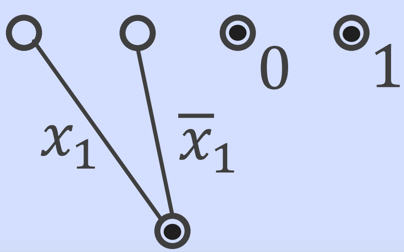
Представить функцию формулой над множеством связок $\{\&, \vee, \neg\}$ данной сложности и построить по ней π-схему.

2.3. Метод Шеннона

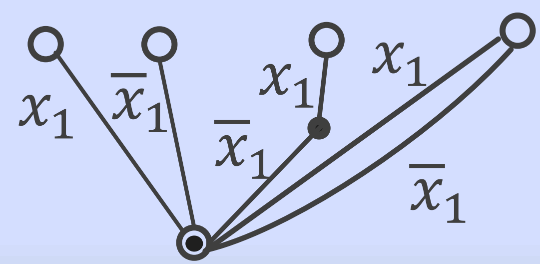
Индуктивное определение контактного дерева D_n:



Универсальным контактным многополюсником U_n называется $(1, 2^{2^n})$-или $(2^{2^n}, 1)$-полюсник, реализующий все n-местные булевы функции.



или



U_1, $(4, 1)$-полюсник

2.3. Метод Шеннона

Пусть f – реализуемая функция, $\tilde{\sigma}^{n-m} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-m} \rangle \in B^{n-m}$, $f_{\tilde{\sigma}^{n-m}}(\tilde{x}^n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n)$.

По теореме о дизъюнктивном разложении булевой функции

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}^{n-m} \in B^{n-m}} x_1^{\sigma_1} \dots x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} f_{\tilde{\sigma}^{n-m}}(\tilde{x}^n).$$

Пусть D_{n-m} - контактное дерево с полюсами a, b_0, $b_1, \dots, b_{2^{n-m}-1}$, реализующее конъюнкции $K_{\nu_{\tilde{\sigma}}}$ между полюсами a и $b_{\nu_{\tilde{\sigma}}}$, где

$$\nu_{\tilde{\sigma}} = \sum_{i=1}^{n-m} 2^{n-m-i} \sigma_i \; -$$

десятичное представление двоичного вектора $\tilde{\sigma}^{n-m} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-m} \rangle$.

Пусть U_m - универсальный контактный $\left(2^{2^m}, 1\right)$-полюсник с полюсами $a_0, a_1, \dots, a_{2^m-1}, b$, реализующий все m-местные булевы функции $f(x_{n-m+1}, \dots, x_n)$.

Схема Σ_f получается отождествлением выхода $b_{\nu_{\tilde{\sigma}}}$ схемы D_{n-m} для каждого $\tilde{\sigma}^{n-m} \in B^{n-m}$ со входом a_r схемы U_m таким, что

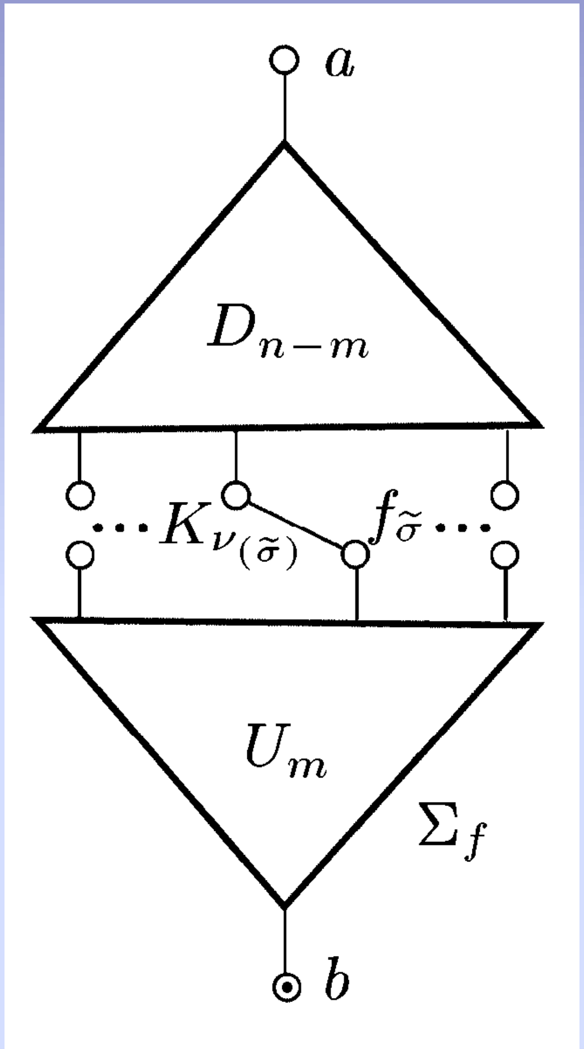
$$f_{a_r,b}(x_{n-m+1}, \dots, x_n) = f_{\tilde{\sigma}^{n-m}}(\tilde{x}^n).$$

В силу разделительности схемы D_{n-m} для схемы Σ_f:

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) =$$

$$= \bigvee_{\tilde{\sigma}^{n-m} \in B^{n-m}} x_1^{\sigma_1} \dots x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} f_{\tilde{\sigma}^{n-m}}(\tilde{x}^n) =$$

$$= f(\tilde{x}^n).$$



2.4. Метод каскадов

Пусть f – реализуемая n-местная булева функция ($n \geq 2$).

Обозначения:

- $\mathfrak{U}_i$ - совокупность всех подфункций $f(\sigma_1, \dots, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $\tilde{\sigma}^i \in B^i$, $i =$ $= 1, \dots, n-1$;
- $\widetilde{\mathfrak{U}}_i$ - множество попарно различных функций из $\mathfrak{U}_i$.

Каждому множеству $\widetilde{\mathfrak{U}}_i$ взаимно однозначно сопоставляется множество V_i точек плоскости – *множество вершин i-го ранга.*

Добавляются три полюса:

- вход a – вершина нулевого ранга;
- выходы b, c – вершины n-го ранга.

Сопоставляются:

- a – функция $f(\tilde{x}^n)$;
- b – тождественная единица;
- c – тождественный нуль.

2.4. Метод каскадов

Обозначение:

$$V = \{a, b, c\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i .$$

На множестве V вводится отношение эквивалентности R: vRv, $uRv \Leftrightarrow u$ и v относятся к разным классам и соответствуют равным функциям. Множество V разбивается на классы эквивалентности, вершины одного класса отождествляются.

Соединение вершин контактами:

1. Пусть v – произвольная вершина i-ого ранга, $\varphi_v(x_{i+1}, \dots, x_n)$ - соответствующая ей функция.
2. Если $\varphi_v(0, x_{i+2}, \dots, x_n) \neq \varphi_v(1, x_{i+2}, \dots, x_n)$, то v соединяется контактом x_{i+1} с вершиной u ранга $i + 1$, которая соответствует подфункции $\varphi_v(1, x_{i+2}, \dots, x_n)$, и контактом $\bar{x}_{i+1}$ с вершиной w ранга $i + 1$, которая соответствует подфункции $\varphi_v(0, x_{i+2}, \dots, x_n)$.
3. Если $\varphi_v(0, x_{i+2}, \dots, x_n) \equiv \varphi_v(1, x_{i+2}, \dots, x_n)$, то обе подфункции тождественно равны $\varphi_v(x_{i+1}, \dots, x_n)$; контакты между соответствующими вершинами не проводятся.

2.4. Метод каскадов

Результат: схема Σ_f такая, что

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n),\ f_{a,c}(\tilde{x}^n) = \bar{f}(\tilde{x}^n).$$

Если функция $\bar{f}$ не требуется, то вершина c удаляется вместе с присоединёнными к ней контактами.