1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимые переменные, искомую функцию (или дифференциал) и ее производные. Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$F[x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)] = 0 \qquad (1)$$

Здесь $x-$ независимая переменная, $y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)-$ искомая функция и ее производные вплоть до производной порядка n.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в уравнение (число n в формуле (1)). Так, уравнение $y'' + y' = \cos x$ является дифференциальным уравнением второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, содержащее столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y = y(x; C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (2)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n -$ произвольные постоянные, или *постоянные интегрирования.*

Если решение уравнения (1) получено в неявном виде

$$\varphi(x; C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (3)$$

то такое решение называется *общим интегралом уравнения* (1).

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего выбором конкретных значений произвольных постоянных.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1) называется задача отыскания решения $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ... y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}. \qquad (4)$$

Число начальных условий равно порядку уравнения, что позволяет определить все произвольные постоянные в общем решении (2).

График каждого частного решения в плоскости (x, y) представляет линию, называемую *интегральной кривой,* а совокупность всех интегральных кривых образует семейство интегральных кривых.

Рассмотрим уравнение (1) в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y^n(x) = f(x, y, ..., y^{(n-1)}). \qquad (5)$$

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ определена и имеет непрерывные частные производные по переменным $y, ..., y^{(n-1)}$, то в этой окрестности задача Коши имеет единственное решение.

Особым решением дифференциального уравнения называется решение, в каждой точке которого нарушаются условия теоремы существования и единственности. Оно не может быть получено из общего подбором значений произвольных постоянных.

Линейным называется дифференциальное уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_n(x) y = f(x),$$

где $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x) -$ некоторые функции, непрерывные в некоторой области D.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *однородным*, в остальных случаях *неоднородным*.

При постоянстве коэффициентов a_1, ..., a_n уравнение называется *уравнением с постоянными коэффициентами.*

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1 Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(x)dy$$

Для его решения следует сначала разделить переменные, то есть разнести их в разные стороны уравнения:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}dy \quad (f_2(x) \neq 0;\ g_1(y) \neq 0),$$

а затем проинтегрировать обе части уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{y_2(x)}{y_1(x)}dy.$$

Следует иметь в виду, что полученные неопределенные интегралы могут различаться на произвольную постоянную C.

Пример 2.1 Решить задачу Коши: $\frac{2}{3}e^{-x}dy = xy^{1/3}dx$, $y(1) = 8$.

Решение. Поделим обе части уравнения на $y^{1/3}e^{-x}$ ($y \neq 0$).

Тогда $\frac{2}{3}y^{-1/3}dy = xe^x dx$ и $\frac{2}{3}\int y^{-1/3}dy = \int xe^x dx$.

Вычисляя интегралы, находим: $y^{2/3} = e^x(x-1) + C$.

Отсюда $y(x) = \left(e^x(x-1) + C\right)^{3/2}$ − общее решение.

Подставим в это решение начальное условие: $y(1) = C^{3/2} = 8$; Следовательно, $C = 4$ и $y(x) = \left(e^x(x-1) + 4\right)^{3/2}$ − искомое частное решение, то есть решение задачи Коши.

Пример 2.2

Решить дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx} = (x+1)\cos^2 y$.

Решение.

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{(\cos^2 y)} = (x+1)\,dx.$$

Т. к. начальные условия не заданы, возьмем неопределенный интеграл от обеих частей уравнения:

$$\int \frac{dy}{(\cos^2 y)} = \int (x+1)\,dx,$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Осталось лишь выразить y через x:

$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right).$$

Найдем также нулевые решения:

$$\cos^2 y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $y(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right),\ C = \mathrm{const},\ y(x) = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3. Однородное уравнение первого порядка

Однородным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y' = f(\frac{y}{x}). \qquad (6)$$

Для его решения введем новую переменную $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда $y = z \cdot x$ и $y' = z' \cdot x + z$. Подставляя эти соотношения в (6), получаем: $z' \cdot x + z = f(z)$ или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = f(z) - z$. Это уравнение с разделяющимися переменными, и оно легко интегрируется. Найдя $z(x)$, получаем искомое решение $y(x) = z(x) \cdot x$.

Пример 3.1 Решить уравнение: $y' = \dfrac{y}{x} + \cos^2 \dfrac{y}{x}$.

Решение. Полагая $y = z \cdot x$ и $y' = z' \cdot x + z$, получим:

$$z' \cdot x + z = z + \cos^2 z, \text{ или } \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$tgz = \ln x + \ln C.$$

Произвольная постоянная здесь взята в виде $\ln C$ для удобства. Тогда $z = arctg \ln(Cx)$ и окончательно общее решение принимает вид:

$$y = x \cdot arctg \ln(Cx).$$

Пример 3.2. Решить уравнение: $x^2 y' = xy - y\sqrt{y^2 - x^2}$.

Решение. Пусть $y \neq 0$. Тогда разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$$

После замены переменной $y = z \cdot x$ это уравнение приводится к виду:

$$\frac{dz}{dx} = -z\sqrt{z^2 - 1}, \text{ или } \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - 1}} = -\int dx.$$

Вычислим интеграл в левой части последнего уравнения:

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dz^2}{z^2\sqrt{z^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{t-1}}=\int\frac{du}{1+u^2}=arctgu=$$

$$=arctg\sqrt{z^2-1}.$$

Тогда $arctg\sqrt{z^2-1}=-x+C$, и общее решение уравнения записывается в следующем виде:

$$y=x\cdot\sqrt{1+tg^2(C-x)}=x\cdot\cos^{-1}(C-x).$$

Пример 3.3 Найти общий интеграл (общее решение) дифференциального уравнения.

$$y'=\frac{x+2y}{2x-y}$$

Решение:

Разделим числитель и знаменатель правой части на x:

$$y'=\frac{\frac{x+2y}{x}}{\frac{2x-y}{x}};\qquad y'=\frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}.$$

Сделаем замену переменной $t=\frac{y}{x}$ или $y=tx$, где $t=t(x)$.

Найдем $y'=t'x+t$ и подставим в преобразованное уравнение

$$t'x+t=\frac{1+2t}{2-t};\quad t'x=\frac{1+2t}{2-t}-t;\quad t'x=\frac{1+2t-t(2-t)}{2-t};$$

$$t'x=\frac{1+2t-2t+t^2}{2-t};\quad t'x=\frac{1+t^2}{2-t}.$$

Пришли к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными относительно переменной x и новой искомой функции t(x). Заменяя $t'=\frac{dt}{dx}$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{1+t^2}{2-t};\quad \frac{(2-t)dt}{1+t^2}=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения

$$\int\frac{(2-t)dt}{1+t^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{(2-t)dt}{1+t^2}=\int\left(\frac{2}{1+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{2dt}{1+t^2}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\begin{bmatrix} z=1+t^2\\ dz=2tdt\\ tdt=\frac{1}{2}dz\end{bmatrix}$$

$$=2\arctan t-\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z}=2\arctan t-\frac{1}{2}\ln|z|=2\arctan t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$$

Возвращаясь к исходному уравнению, получим

$$2\arctan t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|=\ln|x|+\frac{1}{2}C.$$

Умножив обе части равенства на два и уединяя произвольную постоянную, получим общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными

$$4\arctan t-\ln\left|1+t^2\right|-2\ln|x|=C.$$

Для нахождения общего интеграла исходного уравнения вернемся к старой переменной через замену $t=\dfrac{y}{x}$:

$$4\arctan\frac{y}{x}-\ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|-2\ln|x|=C,$$

$$4\arctan\frac{y}{x}-\ln\left|\frac{x^2+y^2}{x^2}\right|-2\ln|x|=C,$$

$$4\arctan\frac{y}{x}-\ln\left(x^2+y^2\right)+\ln x^2-2\ln|x|=C,$$

$$4\arctan\frac{y}{x}-\ln\left(x^2+y^2\right)+2\ln x-2\ln|x|=C.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения примет вид:

$$4\arctan\frac{y}{x}-\ln\left(x^2+y^2\right)=C$$