§ 8. Дифференциальные операции 1 и 2 порядков.

Операторы Гамильтона (набла) и Лапласа.

Дифференциальные операции 1 порядка.

Оператор Гамильтона (набла).

Дифференциальные операции 1 порядка это:

1) $grad\, f(M)$
2) $div\,\overline{a}\ (M)$
3) $rot\,\overline{a}\,(M)$

Многие операции векторного анализа могут быть записаны в сокращенной и удобной для расчетов форме с помощью *символического оператора Гамильтона (набла)*:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\bar{k}\right) \qquad (8.1)$$

В этом opраторе соединены дифференциальные и векторные свойства.

Будем понимать формальное умножение $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию $f(x;y;z)$ как частное дифференцирование $\frac{\partial f}{\partial x}$.

В рамках векторной алгебры формальные операции над оператором «набла» будем проводить так, как если бы он был вектором.

Используя этот формализм, дифференциальные операции 1 порядка $gradf$; $div\overline{a}$ и $rot\overline{a}$ можно записать так:

1) Если $f(x;y;z)$ – скалярная дифференцируемая функция, то по правилу умножения вектора на скаляр имеем

$$\nabla f(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\bar{k}\right)f(M)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\bar{k}\right)=grad\ f(M), \qquad (8.2)$$

т.е.

$\nabla f(M)=grad\ f(M)$ - для скалярного поля

2) Если $\bar{a}(M)=\{P(x;y;z);Q(x;y;z);\ R(x;y;z)\}$, то по формуле скалярного произведения векторов имеем

$$\nabla\bar{a}(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\bar{k}\right)\left(P(M)\cdot\bar{i}+Q(M)\cdot\bar{j}+R(M)\cdot\bar{k}\right)=\left(\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}\right)=div\ \bar{a}(M) \qquad (3)$$

т.е.

$\nabla\bar{a}(M)=div\ \bar{a}(M)$ - для векторного поля

3) Если $\bar{a}(M)=\{P(x;y;z);Q(x;y;z);\ R(x;y;z)\}$, то по формуле векторного произведения имеем

$$\nabla\times\bar{a}\,(M)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P(M) & Q(M) & R(M)\end{vmatrix}=rot\ \bar{a}(M)\text{, т.е.} \qquad (8.4)$$

$\nabla\times\bar{a}\,(M)=rot\ \overline{a(M)}$ - для векторного поля

Свойства оператора Гамильтона

Продолжая формализм действий с ∇ как с вектором, из свойств скалярного и векторного произвдений получаем свойства оператора Гамильтона:

1) $\nabla c = \bar{0}$, где c – const

2) $\nabla \bar{c} = 0$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор

3) $\nabla \times \bar{c} = \bar{0}$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор

4) $\nabla(\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}) = \lambda_1 \nabla \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \bar{b}$ (8.5)

5) $\nabla \times (\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}) = \lambda_1 \nabla \times \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \overline{\times b}$ (8.6)

Формулы (8.5) и (8.6) можно трактовать также как проявление дифференциальных свойств оператора «набла» ($\nabla -$ линейный дифференциальный оператор).

Используя формализм действий с опратором ∇ как с вектором, следует помнить, что ∇ *не является вектором* – он не имеет ни длины, ни направления. Так, например, вектор $\nabla \times \bar{a}$ не будет, вообще говоря, перпендикулярен вектору $\bar{a}$. Точно так же по отношению к символическому вектору ∇ понятие коллинеарности не имеет смысла.

Например, выражение $\nabla\varphi \times \nabla\psi$, где φ и ψ $-$скалярные функции, формально напоминает векторноне произведение двух коллинеарных векторов, которое всегда равно нулю. Но в общем случае это не имеет места.

В самом деле, вектор $\nabla\varphi = grad\varphi$ направлен по нормали к поверхности уровня $\varphi = const$, а вектор $\nabla\psi = grad\psi$ определяет нормаль к поверхности уровня $\psi = const$, и эти нормали в общем случае не обязаны быть коллинеарными.

С другой стороны, в любом дифференцируемом скалярном поле φ имеем $\nabla\varphi \times \nabla\varphi = \bar{0}$. Эти примеры показывают, что с оператором ∇ нужно обращаться с осторожностью.

Наряду с векторной природой оператор Гамильтона имеет дифференциальную природу. Учитывая дифференциальный характер ∇, *условимся считать* , что оператор ∇ действует на все величины, написанные за ним.

В этом смысле $\nabla \cdot \bar{a} \neq \bar{a} \cdot \nabla$. В самом деле,

$$\nabla \cdot \bar{a} = div\bar{a} \, ,$$

в то время как

$$\bar{a} \cdot \nabla = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$$

скалярный дифференциальный оператор.

Применяя оператор ∇ к произведению каких-либо величин, надо иметь ввиду правило дифференцирования произведения.

Отсюда следует, что оператор «набла» надо применять поочередно к каждому множителю, оставляя остальные множители неизменными, и затем брать сумму полученных выражений, предворительно преобразуя по правилам векторной алгебры так, чтобы за оператором ∇ стоял тот множитель, на который он действует.

Правила вычисления с оператором ∇

1)Ели оператор ∇ действует на линейную комбинацию$\sum_i \lambda_i F_i$, где $F_i -$ скалярные или векторные функции, $\lambda_i -$ чисала, то $\nabla(\sum_i \lambda_i F_i,) = \sum_i \lambda_i \nabla F_i$.

2) Если оператор ∇ действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывается его дифференциальный характер, а затем уже векторные свойства.

3) Все величины, на которые оператор ∇ не воздействует, в конечном результате ставятся впереди «набла», т.е. слева от него.

<u>Приведем примеры использования символического метода.</u>

Пример 1.

Показать, что

$$div(u\bar{a}) = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu,$$

где $u -$ скалярная функция, $\bar{a} -$ векторная функция.

Решение.

В символьной форме записи

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (\, u\bar{a}).$$

Учитывая сначала дифференциальный характер ∇ , мы должны написать

$$\nabla \cdot (\, u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u$$

В результате получаем формулу

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (\, u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu.$$

Пример 2.

Показать, что

$$rot(u\bar{a}) = urot\bar{a} - \bar{a} \times gradu.$$

Решение.

В символьной форме записи

$$rot(u\bar{a}) = (\nabla \times u\bar{a}) + \nabla u \times \bar{a} = u(\nabla \times \bar{a}) - \bar{a} \times \nabla u.$$

Таким образом ,

$$rot(u\bar{a}) = u(\nabla \times \bar{a}) - \bar{a} \times \nabla u$$

или

$$rot(u\bar{a}) = u \cdot rot\bar{a} - \bar{a} \times gradu.$$

Замечание.

Примененяя символический метод, мы избегаем весьма сложных аналитических преобразований и быстро получаем окончательнй результат.

Но, с дугой стороны, различные формальные преобразования с оператором « набла» надо производить очень внимательно, впротивном случае возможны, как мы видели, грубые ошибки.

Поэтому при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить аналитическим способом.