## §1. Ряд, его сходимость, сумма

**Определение 1.1.** ***Пусть имеется бесконечная последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Выражение вида***

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \left(\text{или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \tag{1.1}$$

***называется числовым рядом, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – членами ряда.***

**Величины**

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

называются *частичными суммами* ряда (1.1) ($s_n$ – $n$-я частичная сумма ряда (1.1)). Очевидно, что частичные суммы ряда составляют бесконечную последовательность

$$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}. \tag{1.2}$$

**Определение 1.2.** ***Если существует конечный или бесконечный, но определённого знака предел***

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{1.3}$$

***то этот предел $s$ называют суммой ряда (1.1) и пишут: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.***

***Если $s$ – число конечное, то говорят, что ряд (1.1) сходится. Если $s = \infty$ или $\lim_{n\to\infty} s_n$ не существует, то говорят, что ряд (1.1) расходится.***

***Пример 1.1.*** Исследовать на сходимость ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Этот ряд называется *геометрическим.*

► Составим $n$-ю частичную сумму данного ряда

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$

Если предположить, что $q \neq 1$, то по известной формуле из элементарной алгебры находим

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\cdot q^n.$$

1) Пусть $|q| < 1$. Тогда $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ (существует, конечный).
2) Пусть $|q| > 1$. Тогда $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, а значит, и $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.
3) Пусть $q = 1$. Тогда $s_n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ \text{слагаемых}} = n \Rightarrow s_n \to +\infty$, ряд расходится.

4) Пусть $q=-1$. Тогда будем иметь ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots\ .$$

Легко видеть: если частичная сумма содержит чётное число слагаемых, то она равна нулю:

$$s_{2n}=\underbrace{(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)}_{n\text{ слагаемых}}=0;$$

если частичная сумма содержит нечётное число слагаемых, то она равна 1: $s_{2n+1}=1$.

Частичная сумма рассматриваемого ряда $s_n$ поочерёдно принимает только два значения: 0 и 1 и, следовательно, предела не имеет. Таким образом, геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$ или, иначе, при $-1<q<1$. Сумма ряда в этом случае $s=\dfrac{1}{1-q}$. При $|q|\geq 1$ геометрический ряд расходится. ◄

***Пример 1.2.*** Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ расходится.

► Представим общий член этого ряда в виде:

$$a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n,$$

тогда частичная сумма ряда

$$\begin{aligned}s_n&=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=\\&=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ldots+\ln n-\ln(n-1)+\ln(n+1)-\ln n=\\&=-\ln 1+\ln(n+1)=\ln(n+1)\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty,\end{aligned}$$

а значит, данный ряд расходится. ◄

***Замечание 1.1.*** Ясно, что исследование сходимости ряда путём исследования поведения его частичных сумм для произвольных рядов невозможно из-за невозможности найти $s_n$. Построение удобных признаков (критериев), позволяющих ответить на вопрос о сходимости заданного ряда без построения последовательности частичных сумм – один из центральных вопросов теории рядов.