Примеры

Приме 1. Вычислить интеграл по поверхности первого рода

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$$

,

где σ - конечная часть поверхности

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

,

отсеченная плоскостью z = 0 (рис.4.10).

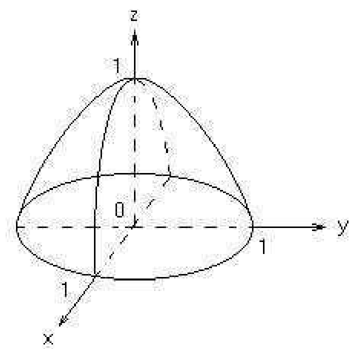

рис. 4.10

Решение:

Поверхность задана уравнением, разрешенным относительно z,

т. е. уравнением вида z = z(x,y), поэтому можно применить формулу (4.19).

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$$

то по формуле (4.18)

$$d\sigma = \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy.$$

Проекцией рассматриваемой части данного параболоида вращения

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

на плоскость Oxy является область, ограниченная окружностью

$$x^2 + y^2 = 1$$

(получено из уравнений поверхности и плоскости).

Следовательно, областью, фигурирующей в формуле (4.19), является круг

$$x^2 + y^2 \le 1 .$$

В соответствии с формулой (4.19) получаем

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_{(S)} (1+4x^2+4y^2)\,dxdy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

В области (S) угол φ меняется от 0 до 2π и $0 \le \rho \le 1$, находим

$$\iint\limits_{(S)} 1+4x^2+4y^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1+4\rho^2\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho+4\rho^3\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл по поверхности

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2+y^2+z^2\right) d\sigma ,$$

где σ - верхняя половина сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Решение:

Разрешая данное уравнение поверхности относительно z, получаем

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ .$$

По условию нужно взять знак "плюс" (рассматривается верхняя половина сферы).

Таким образом, поверхность σ задана уравнением

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ .$$

Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

то

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy = \\ = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

По формуле (4.19)

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)d\sigma = \iint\limits_{(S)}\left(x^2 + y^2 + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

где **(S)** - проекция полусферы на плоскость Oxy, т. е. круг

$$x^2 + y^2 \le R^2$$

Переходя к полярным координатам

$$x = \rho\cos\ \varphi,\ y = \rho\sin\ \varphi.$$

находим

$$R\iint\limits_{(S)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy + R\iint\limits_{(S)}dxdy = R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho +$$

$$+R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho = R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho + R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho = 2\pi R\frac{2}{3}R^3 + 2\pi R\frac{R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^4 + \pi R^3.$$

Замечание. Первый двойной интеграл вычислен с помощью подстановки $\rho = Rsint$.

Пример 3. Вычислить интеграл по поверхности

$$\iint\limits_{(\sigma)}x(y+z)d\sigma\ ,$$

где σ **-** часть цилиндрической поверхности

$$x = \sqrt{b^2-y^2}\ ,$$

отсеченной плоскостями z = 0, z = c (c >0).

Решение:

Так как поверхность задана уравнением, разрешенным относительна x, необходимо воспользоваться формулой (4.20)

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(S_1)}f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ dydz\ .$$

Поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}},\ \ \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

то

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz = \sqrt{1+\frac{y^2}{b^2-y^2}}dzdy = \frac{b}{\sqrt{b^2-y^2}}dydz = \frac{b}{x}dydz.$$

Заметив, что в данном случае область (S_1) представляет

собой прямоугольник *ABCD* , определяемый неравенствами

$$-b \le y \le b,\ 0 \le z \le c,$$

по указанной выше формуле, найдем

$$\iint\limits_{(\sigma)} x(y+z)d\sigma = \iint\limits_{(S_1)} x(y+z)\frac{b}{x}dydz = b\iint\limits_{(S_1)}(y+z)dydz = b\int\limits_{-b}^{b}dy\int\limits_{0}^{c}(y+z)dz$$

$$= b\int\limits_{-b}^{b}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=c}dy = b\int\limits_{-b}^{b}\left(cy+\frac{c^2}{2}\right)dy =$$

$$= bc\int\limits_{-b}^{b}ydy+\frac{bc^2}{2}\int\limits_{-b}^{b}dy = \frac{bc}{2}y^2\Big|_{-b}^{b}+\frac{bc}{2}\,y\,\Big|_{-b}^{b} = b^2c^2.$$

Пример 4. Вычислить интеграл по поверхности

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(3x^2+5y^2+3z^2-2\right)d\sigma$$

,

где σ - часть поверхности

$$y = \sqrt{x^2+z^2}$$

,

отсеченной плоскостями

$$y = 0,\ y = b\ (b > 0)$$

Решение:

Поверхность задана уравнением, разрешенным относительно y.

Для вычисления интеграла по поверхности первого типа пользуемся формулой (4.21)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(S_2)} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\;dxdz.$$

где (S_2) - проекция поверхности σ на плоскость Oxz.

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\;dxdz = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\;dxdz = \sqrt{2}dxdz$$

Проекцией (S_2) данной поверхности на плоскость Oxz является круг

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

поэтому при переходе к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

получим, что угол φ меняется от 0 до 2π и $0 \le \rho \le b$.

По указанной формуле находим

$$\iint\limits_{\sigma}(3x^2+5y^2+3z^2-2)d\sigma = \iint\limits_{S_2}(3x^2+5(x^2+z^2)+3z^2-2)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{b}(8\rho^2-2)\rho d\rho = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{b}(8\rho^3-2\rho)d\rho =$$

$$= \sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} (2\rho^4 - \rho^2)\Big|_0^b d\varphi = \sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} (2b^4 - b^2) d\varphi = 2\sqrt{2}\pi(2b^4 - b^2).$$

Пример 5. Вычислить интеграл по поверхности

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y + z^2 - 1\right) d\sigma ,$$

где σ - часть поверхности

$$2y = 9 - x^2 - z^2$$

отсеченная плоскостью $y = 0$.

Решение:

Поверхность задана уравнением, разрешенным относительно y, поэтому

применим формулу (4.20).

Находим частные производные функции *y* по *x* и по z,

а также элемент площади $d\sigma$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -x, \ \ \frac{\partial y}{\partial z} = -z, d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + z^2}\, dxdz.$$

По указанной выше формуле получим:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y + z^2 - 1\right) d\sigma = \iint\limits_{(S_1)} \left(x^2 + \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} + z^2 - 1\right)\sqrt{1 + x^2 + z^2}\, dxdz =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{7}{2}\right)\sqrt{1 + x^2 + z^2}\, dxdz = \iint\limits_{(S_1)} \left[\frac{1}{2}\left(1 + x^2 + z^2\right) + 3\right]\sqrt{1 + x^2 + z^2}\, dxdz.$$

Перейдем к полярным координатам в плоскости Oxz:

$$x = \rho\cos\ \varphi,\ y = \rho\sin\ \varphi.$$

Область (S_2) в этой плоскости представляет собой круг

$$x^2 + y^2 \le 9\ ,$$

поэтому $0 \le \varphi \le 2\pi$ и $0 \le \rho \le 3$.

Следовательно,

$$\iint_{(S_2)} \left[\frac{1}{2}\left(1 + x^2 + z^2\right) + 3\right]\sqrt{1 + x^2 + z^2}\,dxdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left[\frac{1}{2}\left(\rho^2 + 1\right) + 3\right]\sqrt{\rho^2 + 1}\,\rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(\rho^2 + 1\right)\sqrt{\rho^2 + 1}\,\rho d\rho + 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{\rho^2 + 1}\,\rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(\rho^2 + 1\right)^{3/2} \frac{1}{2} d\left(\rho^2 + 1\right) + 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(\rho^2 + 1\right)^{1/2} \frac{1}{2} d\left(\rho^2 + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4} 2\pi \left.\frac{\left(\rho^2 + 1\right)^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_0^3 + \frac{3}{2} 2\pi \left.\frac{\left(\rho^2 + 1\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^3 = \frac{\pi}{5}\left(200\sqrt{10} - 11\right).$$