Примеры

Пример 1. (первый способ нахождения потенциала)

Определить тип векторного поля $\overline{a}\,(M)$ и найти его потенциал.

$$\overline{a}(M) = (yz-2x)\cdot\overline{i} + (xz-2y)\cdot\overline{j} + xyz\cdot\overline{k}$$

Решение:

Для проверки потенциальности векторного поля $\overline{a}(M)$ найдем $rot\overline{a}(M)$:

$$rot\,\overline{a}\,(M) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (yz-2x) & (xz-2y) & (xyz) \end{vmatrix} = (x-x)\cdot\overline{i} + (y-y)\cdot\overline{j} + (z-z)\cdot\overline{k} = \overline{0} \quad \Rightarrow \overline{a}\,(M)$$

является потенциальным полем.

Найдем потенциал $f(x;y;z)$ этого поля.

Выбирем точку с коорддинатами $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0.$ из области определения функций $P, Q\ u\ R.$

Тогда потенциал векторного поля может быть найден по формуле:

$$f(x;y;z) = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y;z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x;y;z)dz + C.$$

Для нашего случая :

$$f(x,y,z) = \int_0^x (-2x)dx + \int_0^y (-2y)dy + \int_0^z (xy)dz = -x^2 - y^2 + xyz + C.$$

Для проверки правильности решения вычисляем $gradf(x;y;z)$ и он должен совпадать вектрным полем $\overline{a}(M)$.

Пример 2(второй способ нахождения потенциала)

Определить тип векторного поля $\bar{a}\,(M)$ и найти его потенциал

$$\bar{a}(M) = (y+z)\bar{\imath} + (x+z)\bar{\jmath} + (x+y)\bar{k} \quad \forall\, M(x;y;z) \in R^3$$

Решение:

Для проверки потенциальности векторного поля $\bar{a}(M)$ найдем $rot\bar{a}(M)$:

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \bar{\imath}(1-1) + \bar{\jmath}(1-1) + \bar{k}(1-1) = \bar{0},$$

следовательно , векторное поле $\bar{a}(M)$ является потенциальным.

По определению потенциал $f(x;y;z)$ есть такая скалярная функция, для которой $gradf(x;y;z) = \bar{a}(M)$.

Это векторное равенство равносильно трем скалярным равенствам:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y+z \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x+z \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x+y \qquad (3)$$

Интегрируя (1) по x, получим

$$f(x;y;z) = \int_0^x (y+z)dx = xy + xz + \varphi(y;z), \qquad (4)$$

где $\varphi(y;z)$ – произвольная дифференцируемая функция от y и z.

Дифференцируя по y обе части равенства (4) и учитывая (2), получим соотношение для нахождения пока неопределенной функции $\varphi(y;z)$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi(y; z)}{\partial y}$$

или

$$x + z = x + \frac{\partial \varphi(y; z)}{\partial y},$$

откуда

$$z = \frac{\partial \varphi(y; z)}{\partial y}. \tag{5}$$

Проинтерировав (5) по y, будем иметь

$$\varphi(y; z) = \int_0^y z dy = yz + \psi(z), \tag{6}$$

где $\psi(z) -$ пока неопределенная функция от z.

Подставив (6) в (4), получим

$$f(x; y; z) = xy + xz + zy + \psi(z).$$

Дифференцируя по z обе части последнего равенства и учитывая соотношение (3), получим уравнение для нахождения $\psi(z)$:

$$x + y = x + y + \frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Отсюда

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = 0,$$

следовательно

$$\psi(z) = C = const.$$

Итак,

$$f(x; y; z) = xy + xz + zy + C.$$

Пример 3.

Вычислить линейный интеграл в векторном поле

$$\bar{a}(M) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$$

вдоль отрезка прямой , ограниченного точками A(-1;0;3) и B(2;-1;0).

Решение:

Проверим сначала, не является ли векторное поле потенциальным.

Для этого найдем $rot\bar{a}(M)$:

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{\imath}(0-0) + \bar{\jmath}(0-0) + \bar{k}(0-0) = \bar{0},$$

т.е. векторное поле $\bar{a}(M)$ - это потенциальное поле.

Тогда линейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz = \int\limits_{\Gamma_{AB}} df(M) = f(B) - f(A) \qquad (*)$$

Найдем потенциал векторного поля $\bar{a}(M)$.

Выбирем точку с коорддинатами $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0.$ из области определения функций $P, Q\ и\ R.$

Тогда потенциал векторного поля может быть найден по формуле:

$$f(x;y;z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;y;z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;z)dz + C.$$

Для нашего случая :

$$f(x;y;z) = \int\limits_{0}^{x} x\,dx + \int\limits_{0}^{y} y\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} z\,dz + C = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + C.$$

Применяя формулу (*), получим

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} = f(B) - f(A) = f(2;-1;0) - f(-1;0;3) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$$

Диффереренциальные операции 1 и 2 порядков

Пример 1.

Доказать следующие равенства дифференциальных операций второго порядка, используя оператор «набла»,

1.1 $rotgradf(M) = \bar{0}$;

1.2 $divrot\bar{a}(M) = 0$;

Решение 1.1:

$rotgradf(M) = \nabla \times (\nabla f(M) = (\nabla \times \nabla) f(M) = [\text{т.к. } \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}] = \bar{0}$,

т.е. $rotgradf(M) = \bar{0}$ или $\nabla \times (\nabla f(M) = \bar{0}$.

Решение 1.2:

$divrot\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla \times \bar{a}(M)\big) = 0$, т.к. смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю.

Пример 2.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$$rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$$

Решение:

$$rotrot\bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = \left[\begin{matrix} \bar{a} \times \big(\bar{b} \times \bar{c}\big) = \bar{b}\bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{a}\bar{b} \\ \text{двойное векторное произведение} \end{matrix}\right] =$$

$$= \nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) - (\nabla\nabla)\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M),$$

т. е. $rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M).$$

Пример 3.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$graddiv\bar{a}(M) =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Решение:

$graddiv\bar{a}(M) = \nabla\big(\nabla\bar{a}(M)\big) = \frac{\partial}{\partial x} div\bar{a}(M)\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} div\bar{a}(M)\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} div\bar{a}(M)\bar{k} =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Пример 4.

Доказать равенство, используя оператор «набла»,

$$div(u\bar{a}) = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu,$$

где u − скалярная функция, $\bar{a}$ − векторная функция.

Решение:

В символьной форме записи

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (\, u\bar{a}).$$

Учитывая сначала дифференциальный характер ∇ , мы должны написать

$$\nabla \cdot (u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u$$

В результате получаем формулу

$$div(u\bar{a}) = \nabla \cdot (u\bar{a}) = u(\nabla \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot \nabla u = udiv\bar{a} + \bar{a} \cdot gradu.$$