Резюме

Функция f непрерывна в точке x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$, если она определена в окрестности V_{x_0} этой точки и если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0. Сумма $f + g$, произведение $f \cdot g$ и, если $g(x_0) \neq 0$, то и частное $\dfrac{f}{g}$ есть функции, непрерывные в точке x_0.

Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, $a < b$, если она непрерывна в каждой его точке. Функция f непрерывна на сегменте $[a; b]$, $a < b$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$ и, кроме того, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$. Справедливы утверждения: если f непрерывна на $[a; b]$, то

1) f ограничена на $[a; b]$;

2) f достигает на $[a; b]$ своих точных граней;

3) если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на $[a; b]$ существует хотя бы одна точка ξ такая, что $f(\xi) = 0$;

4) если $f(a) \neq f(b)$, то для всякого C, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, существует $\xi \in (a; b)$ такая, что $f(\xi) = C$.

Пусть функция f возрастает (убывает) и непрерывна на $(a; b)$. Тогда обратная функция f^{-1} возрастает (убывает) и непрерывна на интервале $(c; d) = E(f)$.

Контрольные вопросы к главе 4

1. В чем состоит определение функции, непрерывной в точке x_0 числовой оси? Покажите, что $\sin x$ и $\cos x$ – функции, непрерывные в каждой точке x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$.

2. Опишите понятие «приращение функции f в точке x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$». В чем состоит свойство приращения Δf, эквивалентное непрерывности функции f?

3. Дайте определения: а) точки разрыва функции f; б) точки разрыва первого рода функции f; точки разрыва второго рода функции f. Приведите примеры.

4. Что такое точка устранимого разрыва? Приведите пример.

5. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции. Опираясь на нее, найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\sin x)$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\sin(\cos x)$.

6. Опишите понятие о функции, обратной функции f, приведите примеры. Какое свойство функции f гарантирует существование обратной функции f^{-1}?

7. Функция f непрерывна и возрастает на интервале $(a;b)$, $a<b$. Что можно утверждать об области определения обратной функции f^{-1} и ее свойствах?

8. Перечислите основные элементарные функции. Опишите понятие «элементарная функция», приведите примеры.

9. Элементарная функция f определена на интервале $(a;b)$, $a<b$. Будет ли f непрерывной на $(a;b)$?

Ответы на контрольные вопросы

5. а) 1; б) 0.

6. Строгая монотонность f в области ее определения.