§11. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая и плоскость в пространстве могут быть параллельными, прямая может принадлежать плоскости, а также может пересекать её в некоторой точке. Пусть плоскость *P* задана общим уравнением

$$P: Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

а прямая *L* – каноническими уравнениями:

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Тогда $\vec{n}(A, B, C)$ – вектор нормали к *P*, вектор $\vec{q}(l, m, n)$ – направляющий вектор прямой *L*, а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит *L*.

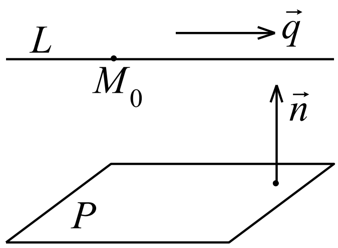

Рис. 11.1. Прямая *L* параллельна плоскости *P*

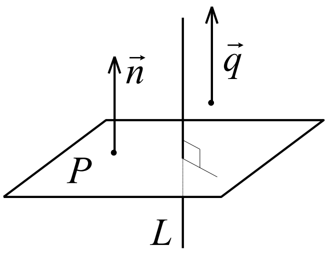

Рис. 11.2. Прямая *L* перпендикулярна плоскости *P*

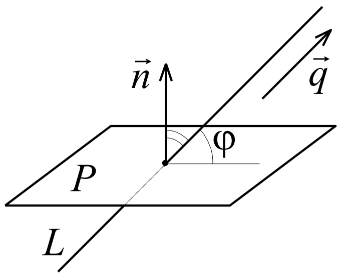

Рис. 11.3. Прямая *L* образует угол φ с плоскостью *P*

Условие параллельности прямой *L* плоскости *P* эквивалентно условию ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ (рис. 11.1) или равенству нулю их скалярного произведения: $\vec{n} \cdot \vec{q} = 0$, что, в свою очередь, приводит к равенству

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{11.1}$$

Если к равенству (11.1) присоединить условие принадлежности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой *L* плоскости *P*, т.е. равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{11.2}$$

то система равенств (11.1) и (11.2) выражает условие принадлежности прямой *L* плоскости *P*.

Условие перпендикулярности прямой *L* и плоскости *P* равносильно условию коллинеарности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ (рис.11.2), выражаемому равенством:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{11.3}$$

Пример 11.1. Найти значение параметра λ, при котором прямая $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$ и плоскость $P: 2x - y + z + 5 = 0$ параллельны.

►Обозначим через $\vec{q}$ направляющий вектор прямой L, $\vec{q} = (2, 3, \lambda)$, а через $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Прямая L и плоскость P будут параллельны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут ортогональны (рис. 11.1).

Поскольку последнее условие эквивалентно равенству $(\vec{q}, \vec{n}) = 0$, то для λ получаем уравнение $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + \lambda = 0$, откуда находим $\lambda = -1$.◄

Пример 11.2. Найти значения параметров λ и μ, при которых прямая $L: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$ и плоскость $P: 2x + \lambda y + \mu z + 5 = 0$ перпендикулярны.

►Пусть $\vec{q}$ – направляющий вектор прямой L, $\vec{q} = (1, 3, 2)$, а $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n} = (2, \lambda, \mu)$. Прямая L и плоскость P будут перпендикулярны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут коллинеарны (рис. 11.2). Из (11.3) имеем соотношения $\frac{1}{2} = \frac{3}{\lambda} = \frac{2}{\mu}$, откуда находим: $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = 4$.◄

За *угол* φ между прямой *L* и плоскостью *P*, неперпендикулярной *L*, примем,
как в стереометрии, угол между *L* и её проекцией на плоскость *P* (рис. 11.3). Очевидно, $\varphi = 0$, если прямая *L* принадлежит плоскости *P*. В случае, когда *L* перпендикулярна *P*, будем считать $\varphi = \pi/2$. Имеем

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{q}})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (11.4)$$

Пример 11.3. Найти угол между прямой $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью $P: 4x + y - z - 5 = 0$.

►Вектор $\vec{n} = (4, 1, -1)$ – вектор нормали к плоскости *P*, а $\vec{q} = (2, -1, -2)$ –
направляющий вектор прямой *L*. Понимая угол φ между *L* и *P* в вышеописанном смысле, из формулы (11.4) имеем

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{q}})| = \frac{|4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2)|}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.◄$$