§1. Вычисление площади в декартовых прямоугольных координатах

Как нам уже известно (см. §1, гл. 1, разд. 8), ***если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением*** $y = f(x)$ ***(*** $f(x) \geq 0$ ***), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках*** $x = a$ ***и*** $x = b$ ***и отрезком оси абсцисс*** $a \leq x \leq b$ ***(рис. 2.1) определяется формулой:***

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}. \tag{1.1}$$

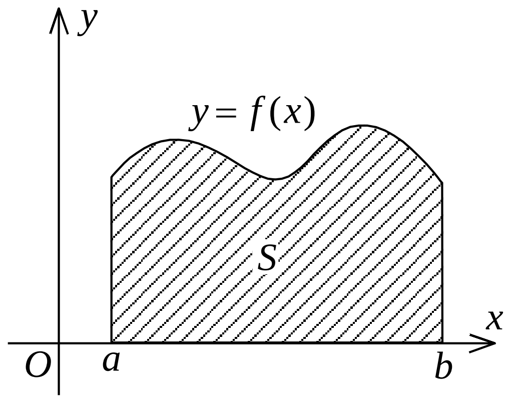

Рис. 1.1. Криволинейная трапеция

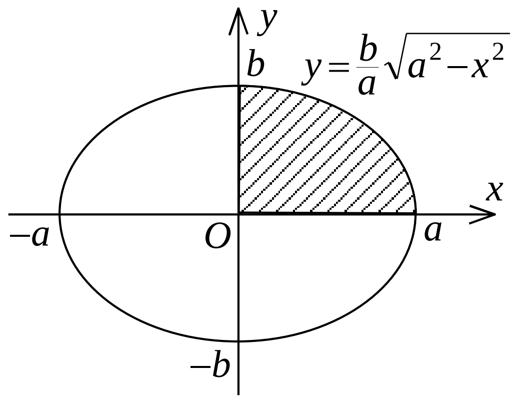

Рис. 1.2. Эллипс

Пример 1.1. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.2}$$

▶ Ввиду симметрии эллипса относительно осей координат (рис. 1.2) достаточно вычислить площадь одной четверти фигуры, а затем учетверить результат. Из (1.2) находим

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Тогда в силу (1.1) будем иметь

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,.$$

Подстановка $x = a\sin t$ дает $dx = a\cos t\,dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab$$

.

Итак, площадь, ограниченная эллипсом с полуосями a и b, равна πab.