Резюме

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$.

Производной $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 называют предел отношения приращения Δf к вызвавшему это приращение приращению Δx аргумента функции при условии, что $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрически $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Основные правила вычисления производных:

если $F = f + g$, то $F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

если $F = f \cdot g$, то $F'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

если $F = f/g$, то $F'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (здесь $g(x_0) \neq 0$);

если $F = g \circ f$, то $F'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$;

если $F = f^{-1}$, то $F'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (здесь $y_0 = f(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$).

Функцию f называют дифференцируемой в точке x_0, если справедливо следующее представление приращения этой функции: $f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h)$, $h \to 0$, где $A \in \mathbf{R}$. Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$; константа A в представлении приращения f равна $f'(x_0)$: $\Delta f(h) = f'(x_0)h + o(h)$. Произведение $f'(x_0)h$ называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают через df.

Если функция f дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, то на $(a;b)$ можно задать функцию, сопоставив каждому x, $x \in (a;b)$, число $f'(x)$. Эту функцию называют производной от функции f или производной первого порядка функции f и обозначают f'. Производная от f' (если она существует) называется производной второго порядка от функции f. Производная $f^{(n)}$ порядка n, $n \geq 2$, от функции f есть производная от производной $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$.

Функцию f называют n раз дифференцируемой в точке x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$, если в этой точке существуют производные $f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$.

Если функция f n раз дифференцируема в точке x_0, то выражение $d^n f = f^{(n)}(x_0)\,dx^n$ называют дифференциалом порядка n функции f в точке x_0. Справедливо равенство: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Что называют производной от функции f в точке x_0? Опираясь на это определение, покажите, что функция $f(x) = x^{1/3}$ имеет производную $f'(1)$, а $f'(0)$ не существует.

2. Какое свойство приращения Δf функции f называют дифференцируемостью функции f в точке x_0? Как связана дифференцируемость функции f в точке x_0 с существованием $f'(x_0)$?

3. Всегда ли функция f, имеющая $f'(x_0)$, непрерывна в точке x_0? Если не всегда, приведите подтверждающий пример. Всегда ли для функции, непрерывной в точке x_0, существует $f'(x_0)$? Если не всегда, приведите подтверждающий пример.

4. Сформулируйте правила вычисления производных от суммы, произведения и частного дифференцируемых функций, от суперпозиции дифференцируемых функций, от обратной функции.

5. Пользуясь таблицей производных, найдите f' для следующих функций f:

а) $f(x) = x^{2/3}\sqrt[3]{x^5+1}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$; в) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

6. В чем состоит геометрический смысл числа $f'(x_0)$? Напишите уравнения касательной к кривой $y = \sqrt{x}$ в точке $M_0(4, 2)$.

7. Что называют дифференциалом функции f, дифференцируемой в точке x_0? На чем основано правило замены в приближенных вычислениях приращения Δf дифференциалом df? Вычислить приближенно $\ln 1.2$.