§5. Несобственные интегралы второго рода (от неограниченных функций)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a,b)$ и $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$. Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,. \tag{5.1}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(a,b]$ и $f(x)\to\infty$ при $x\to a+0$, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\,. \tag{5.2}$$

Если пределы (5.1), (5.2) существуют и являются конечными или бесконечными, то они называются *несобственными интегралами второго рода* от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$. В случае конечности рассматриваемых пределов говорят, что соответствующий несобственный интеграл сходится. В противном случае – расходится. В случае, когда пределы (5.1), (5.2) не существуют (ни как конечные, ни как бесконечные), символы, стоящие слева в этих формулах, также называются несобственными интегралами, но понимаются лишь как символы.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки c, $a<c<b$, и при этом $f(x)\to\infty$ при $x\to c$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{5.3}$$

Интеграл по промежутку $[a,b]$ по определению считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся оба слагаемых интеграла в формуле (5.3) по промежуткам $[a,c]$ и $[c,b]$.

Примеры.

5.1. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1}^{-\varepsilon}x^{-2/3}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}3x^{1/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left(-3\sqrt[3]{\varepsilon}+3\right)=3\,.$

5.2. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}(\ln 1-\ln\varepsilon)=+\infty$. Интеграл расходится.

5.3. $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}+\int_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-1/3}dx+\lim_{\theta\to+0}\int_{1+\theta}^{3}(1-x)^{-1/3}dx=$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) + \lim_{\theta\to+0}\left(-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\Big|_{1+\theta}^{0}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{3}{2}\varepsilon^{2/3}+\frac{3}{2}\right) + \lim_{\theta\to+0}\left(-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\theta^2}\right) = \frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{4}\right).$$

На несобственные интегралы второго рода (5.1) и (5.2) переносится формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \qquad (5.4)$$

Здесь $F(x)$ – первообразная функция, непрерывная в точке b. Ее существование предполагается. При этом по определению

$$F(b) = \lim_{x\to b-0} F(x); \qquad F(a) = \lim_{x\to a+0} F(x). \qquad (5.5)$$

Пример 5.4. Вычисление интеграла в примере 5.1 может быть записано следующим образом:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{0} = 0-(-3) = 3.$$

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода.

Рассмотрим его для интеграла вида (5.1). Он численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной промежутком $[a, b]$, графиком функции $f(x)$ и вертикальной асимптотой графика $x = b$ (рис. 5.1). Предполагается, что этот интеграл сходится.

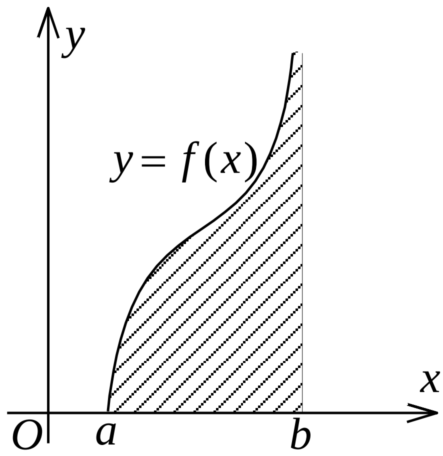

Рис. 5.1. Бесконечная криволинейная трапеция, соответствующая несобственному интегралу второго рода вида (5.1)