§4. Геометрический и механический смысл дифференциала

1º. Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y'(x_0)$, а точка $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ принадлежит её графику Г (рис. 4.1). В точке $M_0(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, проведём к Г касательную *T*, $B(x_B, y_B)$ – точка пересечения прямых $L: x = x_0 + \Delta x$ и *T*. Подставим координаты $x_B = x_0 + \Delta x$ и y_B точки *B* в уравнение касательной (2.2), в силу (3.3) получим:

$$y_B - y_0 = y'(x_0)\Delta x \text{ или } y_B - y_0 = df(x_0).$$

На рис. 4.1 длина отрезка AM_1 есть приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, а длина отрезка *AB* – дифференциал dy данной функции в точке $x = x_0$. Замена Δy на dy приводит к замене части графика функции (рис. 4.1, дуга $M_0M_1 \subset \Gamma$) на отрезок касательной, т.е. на отрезок прямой (рис. 4.1, отрезок $M_0B \subset T$).

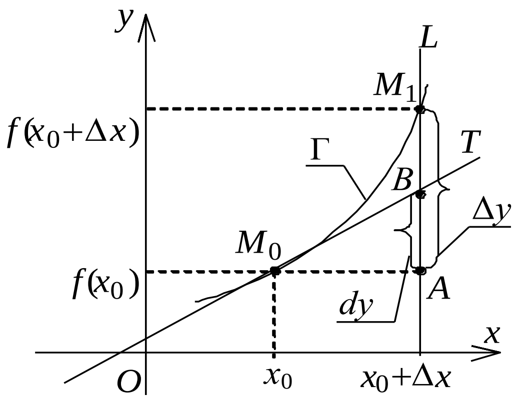

Рис. 4.1. К геометрической интерпретации понятия

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 *геометрически* трактуется как *приращение* $y_B - y_0$ *ординаты касательной T* к графику этой функции, проведённой в точке $M_0(x_0, y_0)$, при перемещении из точки M_0 в точку *B* или при изменении аргумента *x* от x_0 до $x_0 + \Delta x$.

2º. Пусть $s = s(t)$ – путь, пройденный материальный точкой за время *t* при движении по прямой, тогда $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s$ – путь, пройденный материальный точкой за время Δt. По формуле (3.2) имеем $ds = \dot{s}(t_0)\Delta t$.

Дифференциал функции $s = s(t)$ *механически* можно трактовать как *путь, который прошла бы материальная точка за время* Δt, *если бы она двигалась всё это время с постоянной скоростью* $v = \dot{s}(t_0)$. При замене приращения этой функции Δs дифференциалом ds реальное движение за время Δt заменяется равномерным со скоростью $\dot{s}(t_0)$.

Так, при свободном падении материальной точки $s(t) = gt^2/2$ (g – ускорение земного тяготения). За промежуток времени Δt она пройдёт путь $\Delta s = = g(t + \Delta t)^2/2 - gt^2/2 = gt\Delta t + g(\Delta t)^2/2$, при этом $ds = gt\Delta t$. Замена Δs на ds означает замену реального движения равномерным со скоростью $v = gt$.