§3. Свойства определителя Вронского

Определение 3.1. ***Функции*** $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ ***называются линейно зависимыми на промежутке*** $[a, b]$***, если существуют такие, одновременно не равные нулю числа*** $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$***, что справедливо тождество***

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0. \tag{3.1}$$

Если тождество (3.1) справедливо <u>лишь</u> при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$***, то функции*** $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ ***называются линейно независимыми на промежутке*** $[a, b]$**.**

Отметим несколько следствий из этого определения:

1. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то их отношения есть величина постоянная, т. е. $y_1 / y_2 = \text{const}$.

▶ *Достаточность.* Пусть y_1 и y_2 линейно зависимы, тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$ при α_1 и α_2, одновременно не равных нулю.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1}{y_2} = \text{const}.$$

Необходимость. Пусть $y_1 / y_2 = C$. Тогда $y_1 - C y_2 = 0$. Это означает линейную зависимость y_1 и y_2, так как один из коэффициентов равен 1. ◀

2. Функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, среди которых есть тождественно равные нулю, линейно зависимы.

▶ Действительно, пусть $y_1 \equiv 0$. Тогда, очевидно,

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \ldots + 0 \cdot y_n \equiv 0,$$

откуда следует линейная зависимость функций $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ ($\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$). ◀

Теорема 3.1. ***Если функции*** $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$***, имеющие производные до*** $(n-1)$***-го порядка включительно, линейно зависимы на промежутке*** $[a, b]$***, то определитель Вронского, составленный из этих функций, тождественно равен нулю на этом промежутке, т. е.*** $W(x) = 0\ \ \forall x \in [a, b]$**.**

▶ По условию функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ линейно зависимы, следовательно, справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

при α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), одновременно в нуль не обращающихся.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда получим

$$y_1 \equiv -\frac{\alpha_2}{\alpha_2} y_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} y_n,$$

или $y_1 \equiv \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \ldots + \beta_n y_n$, где обозначено $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$. Составим определитель Вронского, учитывая это соотношение

$$W(x) = \begin{vmatrix} \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n & y_2 & \ldots & y_n \\ \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель можно представить в виде суммы определителей $W(x) = \sum_{i=2}^{n} W_i(x)$, где

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} \beta_i y_i & y_2 & \ldots & y_n \\ \beta_i y_i' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_i y_i^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0$$

(эти определители тождественно равны нулю как определители с пропорциональными столбцами). Тогда и $W(x) \equiv 0$. ◀

Если функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \tag{3.2}$$

то имеет место и обратная теорема.

Теорема 3.2. ***Если*** $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ ***– линейно независимые решения линейного однородного уравнения*** n***-го порядка (3.2) с коэффициентами*** $p_i(x)$ ***(*** $i = 1, 2, \ldots, n$ ***), то составленный из этих решений определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке промежутка, где непрерывны коэффициенты уравнения (3.2).***

▶ Предположим, что теорема неверна и $W(x_0) = 0$, где x_0 – некоторая точка из промежутка, где непрерывны коэффициенты уравнения. В силу теоремы существования и единственности решения (см. §1) имеется единственное решение Y линейного однородного уравнения (3.2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$Y\big|_{x=x_0} = 0, \quad Y'\big|_{x=x_0} = 0, \quad \ldots, \quad Y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = 0; \tag{3.3}$$

этим решением, очевидно, и будет функция $Y \equiv 0$, ибо она удовлетворяет и уравнению (3.2), и условиям (3.3).

Подчиним теперь функцию $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots C_n y_n(x)$, удовлетворяющую уравнению (3.2), нулевым начальным условиям (3.3); получим

$$\left.\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ &C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Определитель этой системы с неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$, являющийся определителем Вронского $W(x_0)$, по предположению равен нулю. Тогда, как известно из алгебры, однородная система (3.4) имеет бесконечное множество решений, отличных от чисто нулевого решения $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $\ldots$ $C_n = 0$. Пусть $C_1 = \alpha_2$, $C_2 = \alpha_2$, $\ldots$, $C_n = \alpha_n$ – одно из таких решений (среди $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ есть отличные от нуля числа). Тогда функция $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$ будет решением, удовлетворяющим уравнению (3.2) и нулевым начальным условиям (3.3); но такое решение единственно, и им является функция $Y(x) \equiv 0$. Поэтому

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \tag{3.5}$$

причем здесь не все $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одновременно равны нулю. Но это невозможно, ибо из (3.5) следует, что решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы, а это противоречит условию. Значит, наше предположение, что $W(x_0) = 0$, неверно и $W(x_0) \neq 0$. ◀

Следствие. ***Из доказанных здесь свойств определителя Вронского и теоремы 2.2 следует: для того, чтобы функция*** $Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ ***была общим решением линейного однородного уравнения*** n***-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы его частные решения*** $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ***были линейно независимы в любом промежутке, в котором непрерывны коэффициенты уравнения.***

Определение. ***Любая совокупность*** n ***линейно независимых частных решений*** $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ***линейного однородного уравнения*** n***-го порядка*** $L[y] = 0$ ***называется его фундаментальной системой.***