§7. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства. Главная часть бесконечно малой функции

Пусть даны функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$, где a может быть не только числом, но и одним из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 7.1. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to a$.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Так, $\ln(x^3-3x^2+3x)\sim(x-1)^3$ при $x\to 1$, поскольку $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3-3x^2+3x)}{(x-1)^3}=1$ (пример 6.3).

Замечание 7.1. Эквивалентные бесконечно малые функции являются частным случаем бесконечно малых одного порядка (см. определение 6.1).

Свойства эквивалентных бесконечно малых

Теорема 7.1 (*теорема о замене эквивалентными в произведении и отношении*). Если $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$ и $\alpha_1(x)\sim\beta_1(x)$, $\alpha_2(x)\sim\beta_2(x)$ при $x\to a$, то

1) $\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)\sim\beta_1(x)\cdot\beta_2(x)$;

2) $\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\sim\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$ при $x\to a$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$.

►1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=1$ (определение 7.1). Имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)}{\beta_1(x)\cdot\beta_2(x)}=$ $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=1$, отсюда следует доказываемое соотношение (определение 7.1).

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\Big/\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\dfrac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}=1$, отсюда следует доказываемое соотношение (определение 7.1).

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\dfrac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}=$ $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$, так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}=1$.◄

Теорема 7.2. Для того чтобы бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x\to a$ выполнялось одно из равенств $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$ или $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$.

►Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. Имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0$ и, следовательно, $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$. Второе равенство доказывается аналогично.

Предположим теперь, что верно равенство $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

Имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\Rightarrow \alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. ◄

Замечательные пределы, следствия из них (§3) и замечание 3.1 позволяют найти эквивалентные для некоторых элементарных функций.

Таблица 7.1

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть функция $\alpha=\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда

$\sin\alpha\sim\alpha,$	(7.1)	$1-\cos\alpha\sim\alpha^2/2,$	(7.2)
$\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha,$	(7.3)	$\arcsin\alpha\sim\alpha,$	(7.4)
$\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha,$	(7.5)	$e^{\alpha}-1\sim\alpha,$	(7.6)
$\ln(1+\alpha)\sim\alpha,$	(7.7)	$(1+\alpha)^{\mu}-1\sim\mu\alpha.$	(7.8)

Пример 7.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

►Дробь под знаком предела при $x\to 0$ даёт неопределённость $0/0$. Имеем : $\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{(1+x^2)^{1/3}-1}$. Из таблицы 7.1 при $x\to 0$ следуют соотношения:

$$\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1\sim -x^2/2 \ ((7.7),\ \alpha=\cos x-1 \text{ и } (7.2),\ \alpha=x),$$

$$(1+x^2)^{1/3}-1\sim x^2/3 \ ((7.8),\ \alpha=x^2,\ \mu=1/3),$$

поэтому, в силу теоремы 7.1, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2/2}{x^2/3}=-\dfrac{3}{2}$. ◄

Пример 7.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{\operatorname{tg}\pi x}-1}$.

►Дробь под знаком предела при $x\to 2$ – неопределённость $0/0$. При $x\to 2$:

$\arcsin(x^2-2x)\sim x^2-2x$ $((7.4),\alpha=x^2-2x)$, $e^{\operatorname{tg}\pi x}-1\sim\operatorname{tg}\pi x\,((7.6),\ \alpha=\operatorname{tg}\pi x)$.

Поскольку $\operatorname{tg}\pi x=\operatorname{tg}(\pi x-2\pi)=\operatorname{tg}\pi(x-2)\sim\pi(x-2)$ при $x\to 2$, то $e^{\operatorname{tg}\pi x}-1\sim\operatorname{tg}\pi x\sim$
$\sim\pi(x-2)$ при $x\to 2$. Используя теорему 7.1, приходим к равенству:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{\operatorname{tg}\pi x}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{\pi(x-2)}=\frac{2}{\pi}. ◄$$

Пример 7.3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{tg}(\pi x/4))^{1/(x-1)}$.

►Выражение под знаком предела при $x\to 1$ – неопределённость 1^{∞}. Из равенства $(\operatorname{tg}(\pi x/4))^{1/(x-1)}=e^{\ln\operatorname{tg}(\pi x/4)/(x-1)}$ ((см. 5.1)) имеем (замечание 2.2):

$$\lim_{x\to 1}(\operatorname{tg}(\pi x/4))^{1/(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln\operatorname{tg}(\pi x/4)/(x-1)}.$$

Числитель в показателе степени заменим на эквивалентную бесконечно малую:

$$\ln \mathrm{tg}(\pi x/4)=\ln(1+\mathrm{tg}(\pi x/4)-1)\sim \mathrm{tg}(\pi x/4)-1 \ ((7.7),\ \alpha=\mathrm{tg}(\pi x/4)-1).$$

Отсюда следует соотношение (теорема 7.1):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln \mathrm{tg}(\pi x/4)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}(\pi x/4)-1}{x-1}.$$

Теперь к числителю применим формулу для разности тангенсов:

$$\frac{\mathrm{tg}(\pi x/4)-1}{x-1}=\frac{\mathrm{tg}(\pi x/4)-\mathrm{tg}(\pi/4)}{x-1}=\frac{\sin(\pi(x-1)/4)}{(x-1)\cos(\pi x/4)\cos(\pi/4)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi(x-1)/4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi(x-1)/4}{x-1}=\dfrac{\pi}{4}$, а $\lim\limits_{x\to 1}\cos(\frac{\pi}{4}x)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln \mathrm{tg}(\pi x/4)}{x-1}=\dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 1}(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x)^{1/(x-1)}=e^{\pi/2}$. ◀

Замечание 7.2. При решении примеров 7.1– 7.3 производилась замена эквивалентными в отношении двух бесконечно малых функций (теорема 7.1). Замена эквивалентными в сумме или разности двух бесконечно малых функций может привести к функции, не эквивалентной данной сумме. Так, например, $2-2\cos x\sim x^2+x^4$, а $\sin^2 x\sim x^2+2x^3$ при $x\to 0$, но функция $2-2\cos x-\sin^2 x$ не эквивалентна функции $x^2+x^4-(x^2+2x^3)$ при $x\to 0$. Действительно,

$$2-2\cos x-\sin^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x=(1-\cos x)^2\sim x^4/4, \text{ а}$$

$$x^2+x^4-(x^2+2x^3)=-2x^3+x^4\sim -2x^3 \text{ при } x\to 0.$$

Определение 7.2. Пусть даны функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, являющиеся бесконечно малыми при $x\to a$. Функция $\beta(x)$ называется главной частью функции $\alpha(x)$ при $x\to a$, если $\alpha(x)$ при $x\to a$ можно представить в виде:

$$\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x)). \tag{7.9}$$

Замечание 7.3. Из теоремы 7.2 и определения 7.2 следует утверждение: “функция $\beta(x)$ есть главная часть бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x\to a$ тогда и только тогда, когда эти функции эквивалентны при $x\to a$”. Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ может иметь бесчисленное множество главных частей, ибо любую бесконечно малую функцию $\beta(x)$, эквивалентную $\alpha(x)$ можно считать её главной частью. Так, функции x, $\mathrm{tg}x$ – главные части $\sin x$, ибо $\sin x\sim x$, $\sin x\sim \mathrm{tg}x$ при $x\to 0$.

Обычно главную часть функции $\alpha(x)$ – бесконечно малой при $x\to a$ находят в виде степенной функции $\beta(x)=C(x-a)^k$, $k>0$ при $a\in\boldsymbol{R}$ или $\beta(x)=C(1/x)^k$, $k>0$ при $a=\infty$. Найти для $\alpha(x)$ такую главную часть – значит найти константу C и порядок k этой функции относительно разности $x-a$ или дроби $1/x$.

Пример 7.4. Выделить главную часть вида $C(x-2)^k$ из бесконечно малой $\alpha(x)=\mathrm{arctg}(x^3-3x^2+4)$ при $x\to 2$.

► Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{C(x-2)^k}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^3-3x^2+4)}{C(x-2)^k}==\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{C(x-2)^k}$ (функцию $\alpha(x)$ заменили на эквивалентную). Разложив числитель на множители, получим: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{C(x-2)^k}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{C(x-2)^k}=\dfrac{3}{C}$=1 при k=2 и C=3. Поскольку $\alpha(x)\sim 3(x-2)^2$ при $x\to 2$, то функция $3(x-2)^2$ – главная часть бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to 2$.◄

Пример 7.5. Выделить главную часть вида $C(1/x)^k$ из бесконечно малой $\alpha(x)=\sin\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$ при $x\to\infty$.

► $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}=0$ (§5, пункт 1), $\alpha(x)=\sin\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}\sim\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$ при $x\to\infty$ ((7.1), $\alpha=\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$). Имеем $\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}=\dfrac{x^2(3+1/x)}{x^4(5-2/x^4)}=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{3+1/x}{5-2/x^4}\sim\dfrac{3}{5x^2}$ при $x\to\infty$, отсюда следует: $\alpha(x)\sim\dfrac{3}{5x^2}$ при $x\to\infty$ и $\dfrac{3}{5x^2}$ – главная часть $\alpha(x)$ при $x\to\infty$.◄