Самостоятельная работа

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. К задачам, помеченным индексом **Р** приведены решения; к задачам, помеченным индексом **О** приведены ответы ,
2. Часть задач может быть использована преподавателем на аудиторных занятиях)

<u>Умения в решении задач</u>

Студент должен уметь:

1. Вычислять простые определённые интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница, замену переменной, формулу интегрирования по частям.
2. Вычислять по определению или устанавливать сходимость (расходимость) несобственных интегралов.
3. Строить и использовать формулы для нахождения площадей, масс, координат центров масс, моментов инерции плоских областей, длин дуг плоских кривых, а также физических величин (работа, давление и т.п.).

1-я группа 1 (Несобственные интегралы.)
Исследуйте сходимость интегралов. Интегралы№№ **8.2.02, 8.2.1., 8.2.2., 8.2.3,. 8.2.9.** сосчитайте

.1-я группа

8.2.01. $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ **8.2.03.** $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$. **8-2.2.** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$. **8-2.4.** $\int_0^{+\infty}xe^x\,dx$.

8-2.6. $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$. **8.2.04.** $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+2}{x^3+4x^2+x}dx$

Применяя признак сравнения, исследуйте, при каких значениях λ интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\lambda}dx}{\sqrt{x^3+1}}$ Применяя признак сравнения, исследуйте, при каких значениях λ интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\lambda}dx}{\sqrt{x+1}}$ сходится

.2-я группа

8.2.02. $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x}$ **8.2.05.** $\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. **8.2.06.** $\int_1^3\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}dx$

8-2.1. $\int_3^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$. **8-2.3.** $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **8-2.5.** $\int_0^{2/\pi}\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$.

8-2.7. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+4x^2}}dx$. **8-2.8.** $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln(x+1))^3}$. **8-2.9.** $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

8.2.01 ^{P}**.** Интеграл расходится. . **8.2.02** ^{P}**.** Интеграл сходится и равен 1 .

8.2.03 ^{P}**.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}\,dx$ сходится. **8.2.04.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^3+4x^2+x}\,dx$ расходится.

8.2.05 ^{P}**.** $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ сходится. **8.2.06.** $\int\limits_1^{3} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}\,dx$ сходится.

8-2.1. 3. **8-2.2.** π. **8-2.3.** 2. **8-2.4.** Расходится. **8-2.5.** Расходится. **8-2.6.** Расходится.

8-2.7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ расходится,

8-2.8. $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x+1))^3}$. сходится. *Указание***.** Сравните с интегралом $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.

8-2.9. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ =1.

РЕШЕНИЯ

8.2.01. Интеграл является несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования. Согласно определению , имеем

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_e^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|\ln x|\right)\Big|_e^b = \lim_{b\to+\infty} \ln|\ln b| - 0 = \infty .$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

8.2.02. **И**нтеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; $f(x) = 1/\sin^2 x$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x = 0$. Согласно определению , получаем

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} (\operatorname{tg} x)\Big|_\varepsilon^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{tg}\varepsilon = 1,$$

т. е. этот несобственный интеграл сходится.

8.2.03. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}\,dx$ сходится. Для установления сходимости интеграла воспользуемся признаком сравнения в предельной форме и интегралом с параметром p $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.*(см. раздел 8, Ч.1.,гл. 2)*

Имеем : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{x^{1/2}}{x^4\sqrt{1+1/x^8}} \sim \frac{1}{x^{7/2}}$ при $x \to +\infty$. Привлекаем для сравнения интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}$.

Здесь $p=\frac{7}{2}>1$, поэтому интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}$ сходится. Эквивалентность функций $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}$ и $g(x)=\frac{1}{x^{7/2}}$ при $x\to+\infty$ означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. По предельному признаку сравнения заключаем, что сходится интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$, а поэтому сходится и исходный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$ (

8.2.05. Интеграл $\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ сходится. Для установления сходимости интеграла воспользуемся признаком сравнения и интегралом с параметром $J_b=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$, который сходится при $p<1$ и расходится $p\ge1$.(*см. раздел 8, Ч.1.,гл. 2)*

Имеем: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ при $0\le x<1$. Привлекаем для сравнения интеграл $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$. Здесь $p=\frac{1}{2}<1$, поэтому интеграл $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится. $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ По признаку сравнения заключаем, что сходится и исходный интеграл $\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Замечание 1. При использовании предельного признака сравнения часто привлекаются интегралы

$$J_b=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}, \qquad (6.6) \qquad\qquad J_a=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}, \qquad (6.7)$$

сходящиеся при $p<1$ и расходящиеся при $p\ge1$.