§3. Понятие кратного корня. Признак кратности корня

В разложении (2.1) некоторые множители могут оказаться равными (пример 2.1). В этом случае говорят, что многочлен имеет кратные корни.

Определение 3.1. **Число *a* называется *кратным корнем* многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен представим в виде:**

$$P_n(z) = (z-a)^k Q_{n-k}(z), \qquad \textbf{(3.1)}$$

где $Q_{n-k}(z)$ – многочлен степени $n-k$, при этом $Q_{n-k}(a) \neq 0$. Число k называют *кратностью корня*. Если кратность корня a равна единице, то число a называют *простым корнем* многочлена $P_n(z)$.

Например, для многочлена $P_3(z) = z^3 - 3z^2 + 4$ число (– 1) является простым корнем, а число 2 – корнем кратности 2, ибо этот многочлен представляется в виде: $P_3(z) = (z+1)(z-2)^2$.

Теорема 3.1 (*признак кратности корня многочлена***).** Для того чтобы число a было корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0, \;\; P^{(k)}(a) \neq 0. \qquad (3.2)$$

►Пусть число a – корень многочлена $P_n(z)$ кратности k, значит, справедливо равенство (3.1). Разложим в (3.1) многочлен $Q_{n-k}(z)$ по формуле Тейлора:

$$P_n(z) = (z-a)^k \left(Q_{n-k}(a) + \frac{Q'_{n-k}(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{Q^{(n-k)}_{n-k}(a)}{(n-k)!}(z-a)^{n-k} \right),$$

отсюда имеем:

$$P_n(z) = Q_{n-k}(a)(z-a)^k + \frac{Q'_{n-k}(a)}{1!}(z-a)^{k+1} + \ldots + \frac{Q^{(n-k)}_{n-k}(a)}{(n-k)!}(z-a)^n. \qquad (3.3)$$

С другой стороны:

$$P_n(z) = P_n(a) + \frac{P'_n(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}_n(a)}{n!}(z-a)^n. \qquad (3.4)$$

Сравнение (3.3) и (3.4) приводит к равенствам:

$$P_n(a) = 0, \;\; \frac{P^{(i)}_n(a)}{i!} = 0, \;\; i = 1,2,\ldots,k-1, \;\; \frac{P^{(k)}_n(a)}{k!} = Q_{n-k}(a),$$

из которых, с учётом условия $Q_{n-k}(a) \neq 0$, следуют соотношения (3.2).

Обратно, предположим, что выполняются соотношения (3.2). В этом случае разложение (3.4) принимает вид:

$$P_n(z) = \frac{P^{(k)}_n(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{P^{(k+1)}_n(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \ldots + \frac{P^{(n)}_n(a)}{n!}(z-a)^n$$

или $P_n(z) = (z-a)^k Q_{n-k}(z)$, где

$$Q_{n-k}(z) = \frac{P^{(k)}_n(a)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}_n(a)}{(k+1)!}(z-a) \ldots + \frac{P^{(n)}_n(a)}{n!}(z-a)^{n-k}. \qquad (3.5)$$

Из (3.5) имеем: $Q_{n-k}(a) = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$**, отсюда следует, что** $Q_{n-k}(a) \neq 0$**, так как** $P^{(k)}(a) \neq 0$**. Таким образом, приходим к выводу, что число *a* – корень многочлена** $P_n(z)$ **кратности *k*.** ◄

Пример 3.1. **Показать, что число** $z = 1$ **является корнем кратности 3 для многочлена** $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 2z - 1$**.**

► $P_4(1) = 0,\ P_4'(z) = 4z^3 - 6z^2 + 2,\ P_4''(z) = 12z^2 - 12z,\quad P_4'''(z) = 24z.$ **Имеем:** $P_4'(1) = P_4''(1) = 0,\ P_4'''(z) = 24 \neq 0$ **и, следовательно,** $z = 1$ **– корень кратности 3 данного многочлена (теорема 3.1).**◄

Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ **– корни многочлена** $P_n(z)$ **с кратностями** k_1, k_2, k_m**, при этом** $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$**. Разложение (2.2) в этом случае принимает вид:**

$$P_n(z) = p_0(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2}\ldots(z - a_m)^{k_m}. \qquad \textbf{(3.6)}$$