§1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если во всех точках этого промежутка производная от $F(x)$ равна $f(x)$ (или дифференциал $F(x)$ равен $f(x)dx$):

$$F'(x) = f(x), \tag{1.1}$$

$$dF(x) = f(x)dx. \tag{1.2}$$

Пример 1. $f(x) = x^2$. Тогда $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, так как $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}3x^2 = x^2$ на всей вещественной оси.

Первообразная для заданной функции находится неоднозначно – с точностью до постоянной C.

Теорема 1.1. Множество всех первообразных для заданной функции $f(x)$ заключено в выражении

$$F(x) + C, \tag{1.3}$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Теорема 1.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X, то в этом промежутке для нее первообразная $F(x)$ существует.

Определение 1.2. Множество всех первообразных для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Из теоремы 1.1 и определения 1.2 следует формула:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}. \tag{1.4}$$

Пример 2. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Определение 1.3. Действие отыскания неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции (точнее, неопределенным интегрированием).

Из определения неопределенного интеграла непосредственно следуют формулы

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \tag{1.5}$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \tag{1.6}$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \tag{1.7}$$

$$\int dF(x) = F(x) + C \tag{1.8}$$

Формулы (1.5) – (1.8) означают, что действия «интегрирование» и «дифференцирование» взаимно обратны. Обе формулы (1.5) и (1.6), с другой стороны, означают, что правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Пример 1.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)+C$. Правильность результата этой формулы можно проверить дифференцированием:

$$\blacktriangleright \qquad \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}. \blacktriangleleft$$

Первичная таблица интегралов является непосредственным обращением таблицы дифференциалов. Обычно её записывают в несколько более общей форме. Основная таблица содержит ещё и несколько наиболее часто встречающихся интегралов. Все формулы проверяются дифференцированием.

Основная таблица интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ ($n \neq -1$).

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$.

3) $\int e^x dx = e^x + C$.

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$.

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

11) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

12) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$.

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C$.

15) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$.

16) $\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|\right)+C$.

17) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

18) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

19) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

20) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.