§8. Механические и физические приложения двойного интеграла

1°. Нахождение координат центра масс и моментов фигур. Пусть в области D распределена масса с поверхностной плотностью $\mu(M)$, где функция $\mu(M)$ непрерывна на D. Разобьём область D кусочно-гладкими кривыми на n частей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, … , ΔS_n, и пусть λ – ранг разбиения (рис. 8.1). Массу Δm_i частичной области D_i можно вычислить по формуле (2.2): $\Delta m_i = \iint\limits_{D_i} \mu(x,y)\,dxdy = \mu(M_i)\Delta S_i$. Здесь использована теорема о среднем для двойного интеграла, ΔS_i − площадь области D_i, $M_i \in D_i$ – точка, фигурирующая в теореме о среднем. Сосредоточим теперь всю массу каждой частичной области D_i в точке M_i (рис. 8.1). В результате получим систему n материальных точек, для координат центра масс которой известны формулы:

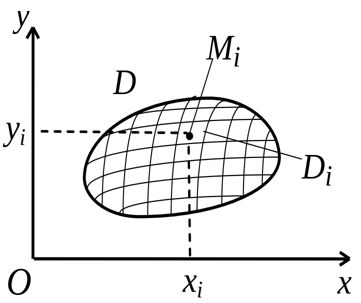

Рис. 8.1. К определению центра масс пластины

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i, \qquad y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i. \tag{8.1}$$

Здесь m − масса всей пластинки, т.е. величина $m = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$. Суммы в (8.1) являются интегральными: первая – для функции $x\mu(x,y)$, вторая – для функции $y\mu(x,y)$. Переходя в (8.1) к пределу при $\lambda \to 0$, где $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta S_i$, получаем

$$x_C = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\mu(x,y)\,dxdy, \qquad y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\mu(x,y)\,dxdy. \tag{8.2}$$

Точка $C(x_C, y_C)$ называется центром масс (центром тяжести) пластины D.

Аналогичным образом можно получить формулы для нахождения моментов инерции пластины относительно осей и начала координат:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy, \quad I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,dxdy. \tag{8.3}$$

Пример 8.1. Найти центр масс пластины, ограниченной линиями $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $y = 0$, ($y \ge 0$), если поверхностная плотность задана равенством: $\mu(x,y) = \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}$.

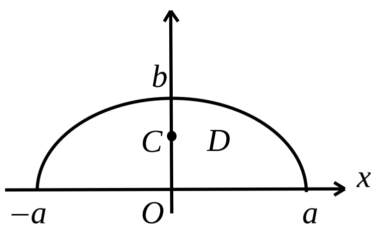

Рис. 8.2. К примеру 8.1

► Сделаем чертёж (рис. 8.2). В силу симметрии центр масс находится на оси Oy, т.е. $x_C = 0$. В силу (2.2) для массы пластины имеем равенство: $m = \iint\limits_D \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}\;dxdy$. Здесь разумно перейти по формулам (6.7) к обобщенным полярным координатам: $x=ar\cos\varphi$, $y=br\cos\varphi$, $J=abr$. Тогда $m=ab\iint\limits_{D'} r^2 dr d\varphi$. В новых координатах уравнение эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ имеет вид: $r=1$. На области D для обобщённых полярных координат выполняются неравенства: $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le\pi$, поэтому $m=ab\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^1 r^2 dr=\frac{\pi}{3}ab$. По формуле (8.2) имеем $y_C=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2}\ dxdy$. Переходя к обобщённым полярным координатам по формулам получаем:

$$y_C=\frac{1}{m}\iint\limits_{D'} br\sin\varphi\, r\, abr\, d\varphi dr=\frac{ab^2}{m}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 r^3 dr=\frac{3ab^2}{\pi ab}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3b}{2\pi}.$$

Итак, точка $C(0,3b/2\pi)$ – центр масс. ◄

2°. Задачи, связанные с непрерывным распределением некоторой величины на плоской области. К вычислению двойного интеграла сводятся все механические и физические задачи, связанные с непрерывным распределением массы, заряда, изменением удельной теплоёмкости и т.д. в пределах некоторой плоской фигуры *D*. Технологию получения соответствующих формул покажем на примере.

Пример 8.2. Тонкая пластинка (её толщиной пренебрегаем) имеет форму области *D* из плоскости *Oxy*. Удельная теплоёмкость пластинки, отнесённая к единице площади, задана равенством: $c_p=c_p(x,y)$. Найти количество тепла *Q*, затраченное при нагревании пластинки от температуры t_1 до температуры t_2.

► Выделим бесконечно малый элемент (*dS*) области *D*, содержащий точку $M(x,y)$, и сделаем упрощающее предположение – удельная теплоёмкость в пределах (*dS*) постоянна и равна её значению в точке *M*, т.е. $c_p(x,y)$. Тогда для элемента *dQ* искомой величины *Q* имеем приближённое выражение вида:

$$dQ=c_p(x,y)dS(t_2-t_1)=c_p(x,y)dS\Delta t,$$

верное с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем *dS*. Тогда точное значение *Q* выразится формулой $Q=\Delta t\iint\limits_D c_p(x,y)\,dxdy$.◄

Такой подход упрощает вывод формул (8.2) – (8.3). Так, для элементарных моментов инерции элемента (dS) относительно осей *x* и *y* справедливы следующие равенства: $dI_x=y^2\mu(x,y)dS$, $dI_y=x^2\mu(x,y)dS$. Отсюда для I_x и I_y сразу получим формулы (8.3).