ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ 3

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ 3

ЗАДАНИЕ №2– ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

***По тематике раздела 3 студент должен уметь*:**

Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, через одну точку в заданном направлении (на плоскости и в пространстве).Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Находить точку пересечения прямой и плоскости. Находить углы между прямыми и плоскостями.Приводить уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду (при отсутствии членов с произведением координат), строить кривую.Делать приближённые чертежи поверхностей 2-го порядка, заданных каноническими уравнениями. Делать приближённые чертежи цилиндрических поверхностей вида $f(x,y)=0$, $f(x,z)=0$, $f(y,z)=0$ и поверхностей вращения

Задачи 3-5.01 – 3-5.07 *(Типовые задачи).*

3-5.01. Написать уравнение плоскости, проведённой через точки $M_1(-1,-5,2)$, $M_2(-6,0,-3)$, $M_3(3,6,-3)$.

3-5.02. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(1,-2,1)$ и $B(3,1,-1)$.

3-5.03. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1,2,3)$ перпендикулярно плоскости Р $:\ x-2y+z-3=0$.

3-5.04. Найти угол между прямой $L:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{-2}$ и плоскостью $P: 4x+y-z-5=0$.

3-5.05. Найдите точку M_1 пересечения прямой $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{1}$ с плоскостью

$P:\ x-y+z-1=0$

3-5.06. Перейдите от общих уравнений прямой $L:\begin{cases}2x-y+z+4=0,\\ x+2y-z+7=0,\end{cases}$ к её каноническим уравнениям.

Задачи 3-5.1 – 3-5.9. Даны координаты четырёх точек в пространстве **а)**$^{\text{o}}$ $A_1(1;1;3)$, $A_2(3;1;5)$, $A_3(2;2;1)$, $A_4(5;-2;3)$; **б)** $A_1(4;1;6)$, $A_2(1;1;3)$, $A_3(5;2;3)$, $A_4(2;2;1)$. Требуется:

3-5.1. Составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки A_1, A_2, A_3.

3-5.2. Составить канонические уравнения прямой L_1, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости P_1.

3-5.3. Составить уравнение плоскости P_2, проходящей через точку A_4 параллельно плоскости P_1.

3-5.4. Составить канонические уравнение прямой L_2, проходящей через точки A_1 и A_4.

3-5.5. Найти угол между прямой L_2 и плоскостью P_2.

3-5.6. Составить уравнение плоскости P_3, проходящей через прямую L_2 перпендикулярно плоскости P_1.

3-5.7. Найти расстояние от точки A_3 до плоскости P_3.

3-5.8. Найти координаты точки пересечения прямой L_2 и плоскости P_2.

3-5.9. Найти расстояние от точки A_2 до прямой L_2.

3-5.10. Прямая L задана общими уравнениями: **а)**$^{\text{o}}$ $\begin{cases}2x-y-3z=-1,\\ x+5y+z=0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x+2y+3z=1,\\ x-3y+2z=0.\end{cases}$

Напишите канонические уравнения прямой L.

ЗАДАНИЕ №2

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Задачи 3-5.01 – 3-5.07 *(Типовые задачи. Приведены решения)).*

3-5.01. $2x-3y-5z-3=0$. **3-5.02.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$. **3-5.03.** : $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

3-5.04 $\sin\varphi=|\cos(\hat{\vec{n},\vec{q}})|=\frac{4\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$.

3-5.05. $M_1(0,-2,-1)$. **3-5.06.** : $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{5}$.,

3-5.1. а) $x-3y-z+9=0$. *Указание*. См. решение задачи 3-5.01. **3-5.2. а)** $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{-1}$. *Указание*. См. решение задачи 3-5.03. **3-5.3. а)** $x-3y-z-8=0$. *Указание*. Напишите уравнение связки плоскостей с центром в точке A_4. За нормальный вектор искомой плоскости возьмите нормальный вектор плоскости P_1.

3-5.4. а) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{0}$. *Указание*. См. решение задачи 3-5.02. **3-5.5. а)** $\sin\varphi=\frac{13}{5\sqrt{11}}$. *Указание*. См. решение задачи 3-5.04. **3-5.6. а)** $3x+4y-9z+20=0$. *Указание*. Пусть точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$ принадлежат прямой L_2 . Запишем уравнение связки плоскостей с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (*), Это уравнение при всевозможных значениях коэффициентов *A*, *B*, *C* задает все плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Выбор конкретных значений *A*, *B*, *C* в (*) означает выбор той плоскости *P* из связки, которая проходит через вторую точку прямой - и тем самым содержит прямую L_2 - точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и которая перпендикулярна плоскости P_1,

3-5.7. а) $\frac{5}{\sqrt{104}}$. *Указание*. **3-5.8. а)** (5; –2; 3). *Указание*. См. решение задачи 3-5.05.

3-5.9. а) $\frac{2\sqrt{34}}{5}$. *Указание*. Через точку A_2 проведите плоскость, перпендикулярную прямой L_2. Найдите координаты точки *M* пересечения этой плоскости с прямой L_2 . Расстояние между точками *M* и A_2 и есть искомое расстояние.

3-5.10. а) $\frac{x+3}{14}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{11}$. *Указание*. См. решение задачи 3-5.06.

РЕШЕНИЯ

3-5.01. Зададим плоскость *P* как одну из плоскостей связки с центром в точке $M_1(-1,-5,2)$:

$$P: A(x+1)+B(y+5)+C(z-2)=0, \qquad (1)$$

где *A*, *B*, *C* – координаты вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости *P*. Поскольку вектор нормали $\vec{n}$ ортогонален ве $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$ (рис.1), то за $\vec{n}$ можно взять их векторное произв

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&5&-5\\4&11&-5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5&-5\\11&-5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5&-5\\4&-5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5&5\\4&11\end{vmatrix}=30\vec{i}-45\vec{j}-75\vec{k}.$$

Подставим координаты вектора $\vec{n}$ в (1), получим уравнение плоскости

$P: 30(x+1)-45(y+5)-75(z-2)=0$ или $P: 2x-3y-5z-3=0$.

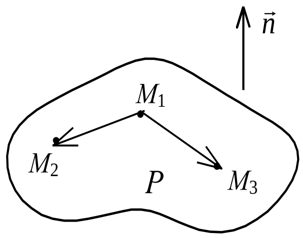

рис. 1, К задаче 3-5,01.

<u>Замечание</u>. Обобщая задачу, можно получить уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в таком виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

3-5.02. Канонические уравнения данной прямой - это уравнение вида:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (2)$$

Они определяют прямую *L*, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l, m, n)$, называемому её направляющим вектором (рис. 2). За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ возьме точку A(1,-2,1) а за направляющий вектор прямой $\vec{q} = (2, -1, 3)$ можно принять вектор $\overrightarrow{AB}$ (2,3,-2),. Подставив координаты вектора $\vec{q}$ и точки A в (2), получим: L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$.

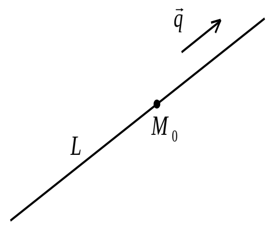

Рис. 2. К задаче 3-5,02.

<u>Замечание</u>. Обобщая задачу, можно получить канонические уравнения прямой, проходящей через 2 заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в таком виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

3-5.03 По данным из условия задачи можно написать канонические уравнения данной прямой, т.е. уравнения вида $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$. Они определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l, m, n)$, называемому её направляющим вектором. В данном случае координаты точки M_0 заданы, а за вектор $\vec{q}$ ввиду перпендикулярности прямой *L* и плоскости *P* (рис. 3) можно принять вектор нормали к плоскости *P*, $\vec{q} = \vec{n}(1, -2, 1)$. Подставив координаты вектора $\vec{q}$ и точки M_0 в вышеприведённые канонические уравнения прямой, получим: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

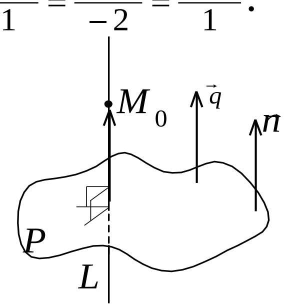

рис. 3, К задаче 3-5,03

3-5.04. $\vec{n}=(4,1,-1)$ – вектор нормали к плоскости *P*, а $\vec{q}=(2,-1,-2)$ – направляющий вектор прямой *L*. За угол φ между прямой *L* и плоскостью *P*, неперпендикулярной *L*, примем, как в стереометрии, угол между *L* и ее проекцией на плоскость *P* (рис. 4). Имеем

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\vec{n},\vec{q}})|=\frac{4\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$.

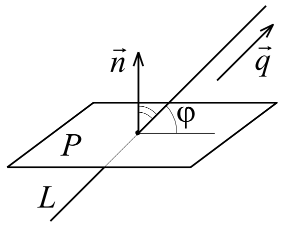

Рис. 4. Прямая *L* образует угол φ с плоскостью *P*.

3-5.05. Для этого надо решить систему, состоящую из уравнений прямой *L* и уравнения плоскости этом удобно использовать параметрические уравнения *L*. Чтобы получить их из канонических уравнений отношения в последних приравняем к *t*: $\frac{x-1}{1}=t,\ \frac{y+3}{-1}=t,\ \frac{z}{1}=t$. Из этих равенств выразим $x=t+1,\ y=-t-1,\ z=t$. Приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ x=t+1, \\ y=-t-3, \\ z=t. \end{cases}$$

Подставим три последних уравнения системы в её первое уравнение: $t+1+t+3+t-1=0$, получим $3t+3=0$ или $t=-1$. Найденное значение *t* подставим в каждое из трёх последних уравнений системы: $x=0,\ y=-2,\ z=-1$. Таким образом, имеем $M_1(0,-2,-1)$.

3-5.06. Канонические уравнения прямой имеют вид: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, где x_0, y_0, z_0 – координаты любой точки M_0, принадлежащей *L*, а l, m, n – координаты любого вектора $\vec{q}$, параллельного *L* и называемого её направляющим вектором. Координатами точки M_0, принадлежащей *L*, может служить любое решение системы из условия задачи. Например, положив в заданных уравнениях $z=0$, имеем систему $\begin{cases} 2x-y+4=0, \\ x+2y+7=0, \end{cases}$ решив которую, получим: $x=-3$, $y=-2$. Таким образом, мы нашли точку $M_0(-3,-2,0)\in L$. Чтобы найти направляющий вектор $\vec{q}$, заметим, что он перпендикулярен векторам $\vec{n}_1(2,-1,1)$ и $\vec{n}_2(1,2,-1)$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – векторы нормали к плоскостям P_1 и P_2, определяемым уравнениями системы из условия задачи (рис. 5), поэтому за $\vec{q}$ можно принять векторное произведение $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Имеем

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}.$$

Подставив координаты точки M_0 и вектора $\vec{q}$ в вышеприведённые канонические уравнения прямой, получим: $L: \frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{5}$.

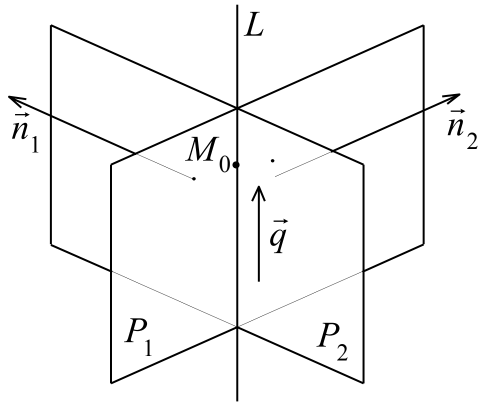

рис. 5. К задаче 3-5,06.