§1. Функциональные ряды. Равномерная сходимость

1°. Область сходимости функционального ряда. Под функциональным рядом понимается ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (1.1)$$

все члены которого $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ есть функции аргумента x, определённые на некотором множестве X. Пусть E $(E \subset X)$ есть совокупность всех значений аргумента x, при которых ряд (1.1) сходится. Тогда E называют областью сходимости этого ряда.

Отметим, что областью сходимости ряда (1.1) может оказаться числовое множество самого различного строения. В дальнейшем, как правило, мы будем иметь дело со случаями, когда областью сходимости ряда будет промежуток – замкнутый, открытый или полуоткрытый; конечный или бесконечный.

Нетрудно понять, что в области сходимости ряда (1.1) его n-я частичная сумма, а также сумма и сумма остатка ряда после n-го члена будут функциями от x. Будем обозначать их соответственно $s_n(x)$, $s(x)$, $R_n(x)$, $x \in E$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$.

В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1;\ 1)$; $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Пример 1.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \ldots + (1-x)x^n + \ldots$.

В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1;\ 1]$; $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

Пример 1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right)$.

В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-\infty, +\infty)$; $s(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Действительно, при $x = 0$ имеем $s(0) = 0$, так как все члены ряда равны нулю. Пусть теперь x – любое, конечное, не равное нулю. Имеем для такого x:

$$s_n(x) = \left(xe^{-x^2} - 0\right) + \left(2xe^{-2x^2} - xe^{-x^2}\right) + \left(3xe^{-3x^2} - 2xe^{-2x^2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left((n-1)xe^{-(n-1)x^2} - (n-2)xe^{-(n-2)x^2}\right) + \left(nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right) = nxe^{-nx^2} = \frac{nx}{e^{nx^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Вывод: данный ряд сходится при любом x из $(-\infty, +\infty)$, причём $s(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x^2-x+1}}$. В этом примере $X\in(-\infty,+\infty)$, $E=(-\infty,0)\cap(1,+\infty)$, поскольку область сходимости ряда определяется неравенством $x^2-x+1>1$ (ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$!). Но неравенство $x^2-x+1>1$ равносильно неравенству $x^2-x>0 \Leftrightarrow x(x-1)>0$, и, следовательно, $E=(-\infty,0)\cap(1,+\infty)$.

Пример 1.5. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x^2)^n$.

► Очевидно, что при фиксированном $x\in\mathbf{R}$ этот ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q=1+x^2-x$, причём $q\geq 1$ при любых $x\in\mathbf{R}$, следовательно, данный ряд расходится при любых $x\in\mathbf{R}$, т. е. $E=\varnothing$. ◄

***2°. Равномерная сходимость функционального ряда.** Введём понятие равномерно сходящегося ряда. Важность этого понятия станет ясна из дальнейшего, когда мы придём к выяснению вопроса о том, в каких случаях для функционального ряда, представляющего собой (если говорить формально) «сумму бесконечного числа функций», сохраняются основные свойства суммы конечного числа функций. Дело в том, что не всегда сумма ряда непрерывных функций оказывается непрерывной функцией (см. пример 1.2), не всегда интеграл от суммы ряда непрерывных функций равен сумме ряда интегралов от каждой из этих функций, не всегда производная от суммы ряда дифференцируемых функций равна сумме ряда производных от каждой из этих функций.

Встретившись с такими фактами, естественно было пытаться определить, каким добавочным условиям должен удовлетворять функциональный ряд (или каким должен быть характер сходимости этого ряда), чтобы для него оставались справедливыми основные свойства суммы конечного числа функций. В поисках этих условий математики 40-х годов девятнадцатого столетия пришли к понятию «равномерно сходящегося ряда».

Определение 1.1. ***Пусть имеется функциональный ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad x\in E. \tag{1.1}$$

Ряд (1.1), сходящийся на множестве E, называется равномерно сходящимся на E, если любому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий

только от $\boldsymbol{\varepsilon}$***, такой, что как только*** $\mathbf{n > N}$***, так сейчас же***

$$\boldsymbol{|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon} \text{ \textbf{\textit{(т.е.}} } \boldsymbol{|R_n(x)| < \varepsilon}\text{\textbf{\textit{) сразу для всех}} } \boldsymbol{x \in E}.$$

***Пример 1.5.** Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$.

▶ Замечаем, что при любом закреплённом $x \in (-\infty, +\infty)$ этот ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Значит, он сходится на множестве $E = (-\infty, +\infty)$. Возьмём теперь $\varepsilon > 0$ – любое. Мы знаем, что для суммы остатка ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, справедлива оценка

$$\left|R_n(x)\right| \le \left|\frac{(-1)^n}{x^2 + (n+1)}\right| = \frac{1}{x^2 + (n+1)}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Ясно, что $\frac{1}{x^2 + (n+1)} < \frac{1}{n}$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Неравенство (1.2) выполняется при всех n ($n \in \mathbf{N}$), удовлетворяющих условию: $n > N$, где $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, где $\mathrm{E}(x)$ – целая часть числа x. Отметим, что $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ зависит только от ε (N не зависит от x). Но тогда и подавно $|R_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, если только $n > N$.

Вывод: данный ряд сходится равномерно на промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◀

*3°. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 1.1. ***Если члены функционального ряда***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u_n(x)} \tag{1.3}$$

удовлетворяют в области $\boldsymbol{E}$ ***неравенствам***

$$\boldsymbol{|u_n(x)| \le c_n}, \quad \mathbf{n = 1, 2, \ldots}, \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{c_n}$ ***– члены сходящегося положительного ряда***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{c_n}, \tag{1.5}$$

то функциональный ряд (1.3) сходится на $\boldsymbol{E}$ ***абсолютно и равномерно.***

Замечание 1.1. Функциональный ряд (1.3) при выполнении условий теоремы называется *мажорируемым рядом*.

Замечание 1.2. Помимо признака Вейерштрасса существует и ряд других признаков, с которыми можно познакомиться, например, в [1-3]. Для практических приложений признака Вейерштрасса вполне достаточно.