§6. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ – непрерывная в $[a,b]$ функция. Для его вычисления производим замену переменной интегрирования по формуле

$$x = \varphi(t), \tag{6.1}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(t)$ определена в промежутке $[\alpha,\beta]$ и имеет там непрерывную производную $\varphi'(t)$ (следовательно, и сама функция $\varphi(t)$ непрерывна в $[\alpha,\beta]$);

2) $\varphi(t)$ – строго монотонная функция в $[\alpha,\beta]$; при этом выполняются условия соответствия концов промежутков:

$$a = \varphi(\alpha); \quad b = \varphi(\beta). \tag{6.2}$$

Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)\,dt. \tag{6.3}$$

Заметим, что вместе с заменой переменной интегрирования по формуле (6.1) меняются и пределы интеграла по формуле (6.2). Возвращение к старой переменной не требуется.

▶ Под обоими интегралами в формуле (6.3) стоят непрерывные функции, поэтому эти интегралы существуют, и можно для них воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница. Заметим при этом, что в силу строгой монотонности $\varphi(t)$ и условий $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы промежутка $[a,b]$, где определена функция $f(x)$.

Пусть $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$. Тогда $F\big[\varphi(t)\big]$ – первообразная для функции $f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)$. Действительно,

$$\Big(F\big[\varphi(t)\big]\Big)' = F'_x\big[\varphi(t)\big]\cdot\varphi'(t) = f\big[\varphi(t)\big]\cdot\varphi'(t).$$

Далее, по формуле Ньютона – Лейбница (4.4) получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a); \qquad \int\limits_\alpha^\beta f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)\,dt = F\big[\varphi(\beta)\big]-F\big[\varphi(\alpha)\big] = F(b)-F(a). \ ◀$$