§3. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 3.1 (*об арифметических операциях над непрерывными функциями*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны также их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $f(x)/g(x)$ при условии, что в случае частного $g(x_0)\neq 0$.

Эта теорема является следствием теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (теорема 2.2 главы 3) и определения функции, непрерывной в точке (определение 1.1).

Пример 3.1. Показать, что многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+\ +a_{n-1}x+a_n$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$.

►Функция $f(x)=x$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ **(**$\Delta f(x_0)=\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$ для $\forall x_0\in\boldsymbol{R}$), поэтому функция $g(x)=x^n$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ как произведение n непрерывных функций, а многочлен $P_n(x)$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$ в силу теоремы 3.1.◄

Пример 3.2. Показать, что рациональная алгебраическая дробь $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}$ непрерывна на своей области определения.

►Поскольку функция $R(x)$ является отношением двух многочленов, то она непрерывна на своей области определения в силу теоремы 3.1, как частное двух непрерывных функций: многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.◄

Теорема 3.2 (*об ограниченности непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

Теорема 3.3 (*о сохранении знака непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 значения данной функции отличны от нуля и имеют такой же знак, как $f(x_0)$.

Теорема 3.4 (*о непрерывности сложной функции*). Если функция $z=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(z)$ непрерывна в точке $z_0: z_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теоремы 3.2 – 3.4 следуют из теоремы об ограниченности функции, имеющей предел (теорема 2.4 главы 3), о сохранении знака функции, имеющей предел (теорема 2.5 главы 3) и теоремы о пределе сложной функции (теорема 2.6 главы 3) соответственно, а также из определения функции, непрерывной в точке (определение 1.1).