Горячие тригонометрические формулы

В данный обзор я включу ходовые тригонометрические формулы, которые наиболее часто используются в ходе решения задач по высшей математике.

Знать обязательно (или держать под рукой) необходимо:

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

и некоторые вещи, которые из него следуют:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$$

Простейшие манипуляции с тангенсом и котангенсом, как от них избавиться (или, наоборот – «собрать» из синуса и косинуса):

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

! Очень важные следствия из данных формул:

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

или то же самое в другом виде:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Запомните их, или держите под рукой – в вышке будете натыкаться на них буквально на каждом шагу!

Пожалуйста, обратите также внимание, на тот факт, что параметр α может быть не только буковкой x, но и сложной функцией, например:

$$\sin^2(x^2+4x-10) + \cos^2(x^2+4x-10) = 1$$
$$\sin 3x = \sin\left(2\cdot\frac{3x}{2}\right) = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$
$$tg(\ln x + 3) = \frac{\sin(\ln x + 3)}{\cos(\ln x + 3)}$$

А теперь рассмотрим формулы, которые используются реже:

Полезно знать о взаимосвязи тангенса и котангенса:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,\ tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha},\ ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

а то, *иногда*, хитрый преподаватель подсунет что-нибудь вроде $\frac{1}{ctg\alpha}$, и потом сидишь, не знаешь, что с этим делать.

Упомянем также экзотический секанс и косеканс:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$, и всего-то лишь…

Студентов-заочников, обычно секансами не пугают, а у очников, нет-нет, да и проскакивает.

Иногда приходится следующие преобразования:

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

На самом деле это не самостоятельные формулы, а следствия основного тригонометрического тождества

Ну и еще куча похожих друг на друга формул:

Сразу скажу, что у данной группы формул есть одно замечательное свойство – упорно не запоминаться. Я сотни раз искал их в справочнике, так и не запомнилась ни одна.

Раз:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Два:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Три:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Есть еще аналогичные формулы для тангенсов и котангенсов, но о них не будем, с почти 100%-ной вероятностью не понадобятся.

Разумеется, все формулы применимы и справа налево!

И еще раз подчеркиваю, что во ВСЕХ тригонометрических формулах параметры α и β могут быть не только буковками x и y, но и сложными выражениями, функциями.

Успехов!