Основные теоремы дифференциального исчисления служат теоретической базой для приложения дифференциального исчисления к изучению функций. Они связаны с именами французских математиков П. Ферма (1601-1665), М. Ролля (1652-1719), Ж. Л. Лагранжа (1736-1813), Г. Лопиталя (1661-1704), О. Коши (1789-1857) и английского математика Б. Тейлора (1685-1731).

§1. Определение экстремума. Теорема Ферма

Определение 1.1. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если $f(x)$ определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ и для $\forall x \in U(x_0)$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Значение $f(x_0)$ называют *максимумом (минимумом)* данной функции.

Если для всех x на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ верно строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой строгого максимума (строгого минимума)* функции $y = f(x)$.

Функцию $y = f(x)$ обычно предполагают непрерывной в точке в точке x_0.

Точки максимума и минимума объединяют общим термином – *точки экстремума*.

Замечание 1.1. Утверждение: функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий экстремум равносильно следующему: приращение $\Delta f(x_0)$ сохраняет знак на некоторой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, а именно, $\Delta f(x_0) < 0$ для $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ в случае строгого максимума, и $\Delta f(x_0) > 0$ в случае строгого минимума.

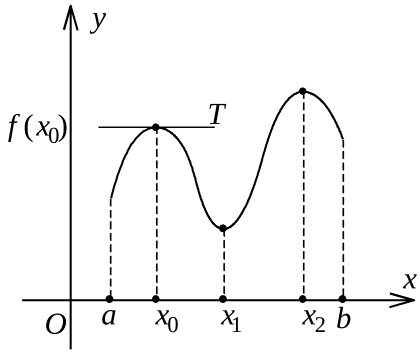

Рис. 1.1. К понятию экстремума функции

Замечание 1.2. Понятие экстремума функции $f(x)$ в определении 1.1 отнесено к окрест-ности точки x_0, поэтому его называют *локальным экстремумом*. На промежутке $[a,\ b]$ функ-ция $f(x)$ может иметь несколько локальных экстремумов (рис.1.1, x_0, x_2 – точки *локального максимума*, а x_1 – *локального минимума*).

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то её производная $f'(x_0) = 0$.

►Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, поэтому она определена на некоторой окрестности $U(x_0)$. Пусть, для определённости, в точке x_0 эта функция имеет максимум, поэтому её приращение $\Delta f(x_0) \leq 0$ для $\forall x \in U(x_0)$. Для односторонних производных функции $f(x)$ в точке x_0 имеем:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \geq 0, \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Так как $\exists f'(x_0)$, то $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, а это возможно только, если $f'_-(x_0) =$ $= f'_+(x_0) = 0$. Поскольку $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$, то получаем $f'(x_0) = 0$.◄

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма

Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ дифференцируема и имеет экстремум. Из геометрического смысла производной (§2 главы 1) и теоремы Ферма следует, что в точке $(x_0, f(x_0))$ *касательная T* к графику Г этой функции *параллельна оси Ox* (рис. 1.1).