## §2. Логические символы. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия

При записи математических предложений (определений, формулировок теорем и т.п.) вместо часто повторяющихся слов и целых выражений удобно использовать экономную символику из математической логики. Ниже приводятся наиболее простые и употребительные символы.

Пусть $\alpha, \beta, \ldots$ – некоторые высказывания или утверждения, относительно каждого из которых можно сказать истинно оно или ложно.

Запись $\overline{\alpha}$ означает «не $\alpha$», т. е. отрицание утверждения $\alpha$.

Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает «из утверждения $\alpha$ следует утверждение $\beta$»(символ $\Rightarrow$ – символ *импликации*).

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает «утверждение $\alpha$ эквивалентно утверждению $\beta$», т.е.

из $\alpha$ следует $\beta$ и наоборот: из $\beta$ следует $\alpha$ (символ $\Leftrightarrow$ –символ *эквивалентности*).

Запись $\alpha \wedge \beta$ означает «$\alpha$ и $\beta$»(символ $\wedge$ – символ *конъюкции*).

Запись $\alpha \vee \beta$ означает «$\alpha$ или $\beta$»(символ $\vee$ – символ *дизъюнкции*).

Запись $\forall x \in X$ : $\alpha(x)$ означает: для любого элемента $x$ из множества $X$ справедливо утверждение $\alpha(x)$ (символ $\forall$ – квантор всеобщности, $\forall$ – перевёрнутая первая буква английского слова Any – любой, всякий).

Запись $\exists x \in X$ : $\alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$, для которого справедливо утверждение $\alpha(x)$ (символ $\exists$ – квантор существования, $\exists$ – перевёрнутая первая буква английского слова Existence – существование).

*Теорема* – математическое предложение, истинность которого доказывается. Она записывается в виде: «если $\alpha$, то $\beta$»(или $\alpha \Rightarrow \beta$), где $\alpha$ – условие, а $\beta$ – заключение теоремы. Поменяв местами условие и заключение, получим *обратную теорему* «если $\beta$, то $\alpha$»(или $\beta \Rightarrow \alpha$), теорема «если $\alpha$, то $\beta$» называется в таком контексте *прямой*. Так, в теореме «если четырёхугольник – параллелограмм, то его противоположные стороны попарно равны» условие $\alpha$: четырёхугольник – параллелограмм, а заключение $\beta$: его противоположные стороны попарно равны. Обратная теорема: «если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм» Здесь верны обе теоремы: прямая и обратная, однако, так бывает не всегда. Для теоремы «если два угла вертикальные, то они равны» обратная теорема неверна.

Теорема «если не $\alpha$, то не $\beta$» (или $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$) называется *противоположной* по отношению к теореме «если $\alpha$, то $\beta$» (или $\alpha \Rightarrow \beta$). Противоположная теорема всегда верна, если верна обратная теорема.

Пусть верна теорема «если $\alpha$, то $\beta$» (или $\alpha \Rightarrow \beta$), тогда $\alpha$ называется *достаточным условием* $\beta$, а $\beta$ – *необходимым условием* $\alpha$ в том смысле, что выполнение $\alpha$ достаточно для выполнения $\beta$, а $\beta$ всегда (т.е. необходимо) справедливо при выполнении $\alpha$. Когда верна обратная теорема «если $\beta$, то $\alpha$»(или $\beta \Rightarrow \alpha$), $\beta$ оказывается достаточным условием $\alpha$, а $\alpha$ – необходимым условием $\beta$. Необходимые и достаточные условия иначе называют признаками. Если верны обе теоремы – прямая и обратная, их формулировки можно объединить: «для того чтобы выполнялось $\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\beta$»(или «$\alpha$ выполняется в том и только том случае, если выполняется $\beta$», «$\alpha$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\beta$», $\alpha \Leftrightarrow \beta$). Например, объединим формулировки теорем о параллелограмме: «для того чтобы данный четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были попарно равны». Понятно, что при такой формулировке надо доказывать две теоремы: прямую и обратную.