§2. Линейные однородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{2.1}$$

или, в записи с помощью линейного дифференциального оператора

$$L[y] = 0. \tag{2.2}$$

Теорема 1. ***Если $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ – решения уравнения (2.2), то функция***

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{2.3}$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – произвольные постоянные, также является решением уравнения (2.2).

▶ Так как по условию $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ – решения уравнения (2.2), то выполняются следующие тождества:

$$L[y_1] \equiv 0, \quad L[y_2] \equiv 0, \quad \ldots, \quad L[y_n] \equiv 0.$$

Тогда по 3-му свойству линейного дифференциального оператора будем иметь

$$L[Y] = L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] + \ldots + C_n L[y_n] \equiv 0.$$

Итак, $L[Y] \equiv 0$. Следовательно, Y – решение уравнения (2.2). ◀

Таким образом, мы доказали, что линейная комбинация (2.3) с произвольными постоянными $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ является решением уравнения (2.2). Каким условиям должны удовлетворять частные решения $y_i = y_i(x)$ уравнения (2.2), чтобы полученное решение (2.3), содержащее n произвольных постоянных, было общим?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.1. ***Для того, чтобы линейная комбинация (2.3) давала общее решение уравнения (2.2), необходимо и достаточно, чтобы составленный из частных решений $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ определитель***

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

называемый определителем Вронского, не равнялся нулю ни в одной точке, где непрерывны коэффициенты уравнения (2.2).

▶ Подчиним решение $Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ начальным условиям

$$Y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad Y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \ldots, \quad Y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{2.4}$$

где x_0 – точка непрерывности коэффициентов $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), а $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ – произвольно заданные числа.

В силу теоремы существования и единственности решения (см. §1, гл. 2) частное решение уравнения (2.2), удовлетворяющее начальным условиям (2.4), существует и единственно.

Чтобы решение (2.3) было общим, система

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

вытекающая из условий (2.4), должна быть однозначно разрешима относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Но для этого по теореме Крамера необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (2.5), т. е. $W(x_0)$, был отличен от нуля. Так как x_0 – произвольная точка непрерывности коэффициентов $p_i(x)$, то теорема доказана. ◀

Пример. $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$. Легко убедиться непосредственной подстановкой, что $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ – частные решения этого уравнения. Будет ли функция $Y = C_1 x + C_2 x^2$ общим решением уравнения?

▶ Составим $W(x)$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Следовательно, $Y = C_1 x + C_2 x^2$ – общее решение данного однородного уравнения. ◀