## §2. Простейшие свойства несобственных интегралов с бесконечными пределами

**Теорема 2.1** (*свойство аддитивности*). Пусть $a < A$. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)dx$, и наоборот. При этом выполняется равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{A} f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2.1)$$

► Пусть $a < A < b$. Тогда по свойству аддитивности для собственного интеграла имеем

$$\int_a^{b} f(x)dx = \int_a^{A} f(x)dx + \int_A^{b} f(x)dx.$$

Если при $b \to +\infty$ существует предел справа, то существует предел слева, и наоборот. В пределе получаем равенство (2.1). ◄

**Теорема 2.2** (*свойство линейности*). Если сходятся интегралы $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx$, и имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)dx + C_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)dx. \qquad (2.2)$$

► По свойству аддитивности для собственного интеграла имеем:

$$\int_a^{b} [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1 \int_a^{b} f_1(x)dx + C_2 \int_a^{b} f_2(x)dx.$$

Переходя к пределу при $b \to +\infty$, получим формулу (2.2). ◄

**Теорема 2.3.** Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0. \qquad (2.3)$$

► Из формулы (2.1) получаем:

$$\int_A^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^{+\infty} f(x)dx = 0. \text{ ◄}$$

Аналогичные теоремы имеют место и для других интегралов с бесконечными пределами.

**Формула Ньютона – Лейбница для интегралов с бесконечными пределами.** Подынтегральная функция $f(x)$ предполагается непрерывной в промежутке интегрирования, а потому для нее существует первообразная $F(x)$. Если существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty),\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty), \tag{2.4}$$

то имеют место формулы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \tag{2.5}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty), \tag{2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \tag{2.7}$$

Они распространяют формулу Ньютона – Лейбница, известную для собственных интегралов, на случай интегралов несобственных.

► Проведём, например, обоснование формулы (2.5):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a). \blacktriangleleft$$

***Пример 2.1.*** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

$$\blacktriangleright \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} - \int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} -$$

$$-\operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty} = 0 + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

***Пример 2.2.*** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+|x|)^2}$.

$$\blacktriangleright \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+|x|)^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2} = -2\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty} = 0 + 2 = 2. \blacktriangleleft$$

На сходящиеся несобственные интегралы распространяются формулы интегрирования по частям и замены переменной.

**Формула интегрирования по частям для несобственного интеграла первого рода.** Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные в промежутке $[a,+\infty)$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^{+\infty} u dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du \tag{2.8}$$

в случае, когда любые два слагаемых из трех в формуле (2.8) существуют и конечны, что означает существование конечных пределов

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b u dv,\ \lim_{b\to+\infty}\left(uv\Big|_a^b\right),\ \lim_{b\to+\infty}\int_a^b v du. \tag{2.9}$$

► Применим формулу интегрирования по частям к собственному интегралу

$\int\limits_a^b u dv$: $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$. Перейдем в это равенстве к пределу при $b \to +\infty$. Существование двух из трех пределов (2.9) обеспечивает существование третьего. В пределе получаем равенство (2.8). ◄

***Пример 2.3.*** $\int\limits_a^{+\infty} xe^{-x}dx = \left[ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array} \right] = -\, xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx =$

$= 0 - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$.

Формулы, аналогичные (2.8), имеют место и для двух других типов интегралов с бесконечными пределами.

**Формула замены переменной интегрирования для несобственного интеграла первого рода.** Рассмотрим эту формулу для случая интеграла с бесконечным верхним пределом. Аналогичные формулы имеют место и для других несобственных интегралов первого рода.

**Теорема 2.4.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$. Пусть, далее, функция $x = \varphi(t)$

1) имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ в промежутке $[\alpha, \beta)$ (случай $\beta = \infty$ не исключается),

2) строго монотонна в $[\alpha, \beta)$,

3) удовлетворяет условию $\varphi(\alpha) = a$; $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = +\infty$.

Тогда справедлива формула замены переменной

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (2.10)$$

в случае, когда интеграл справа (или слева) в формуле (2.10) существует и конечен.

► Возьмем любое число $\gamma$, удовлетворяющее условию: $\alpha < \gamma < \beta$. По теореме о замене переменной в собственном определенном интеграле справедлива формула

$$\int\limits_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int\limits_a^{\varphi(\gamma)} f(x)dx. \qquad (2.11)$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $\gamma \to \beta - 0$ и учтем, что $\lim\limits_{\gamma \to \beta - 0} \varphi(\gamma) = +\infty$. Если существует конечный предел одной из частей равенства (2.11), то существует и другой. В пределе получим равенство (2.10). ◄

***Пример 2.4.*** Вычислить интеграл $J = \int\limits_4^{+\infty} \dfrac{dx}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^3}$.

►Сделаем подстановку: $\sqrt{x} = z$; $x = z^2$; $dx = 2zdz$; $x = 4 \Rightarrow z = 2$; $x \to +\infty \Rightarrow z \to +\infty$. Имеем

$$J = 2\int_{2}^{+\infty} \frac{zdz}{(1+z)^3} = 2\int_{2}^{+\infty} \frac{(z+1)-1}{(z+1)^3} dz = 2\int_{2}^{+\infty} \frac{dz}{(z+1)^2} - 2\int_{2}^{+\infty} \frac{dz}{(z+1)^3} = -2\frac{1}{z+1}\Bigg|_{2}^{+\infty} -$$

$$- \frac{1}{-2(z+1)^2}\Bigg|_{2}^{+\infty} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}. \blacktriangleleft$$