§5. Векторное и смешанное произведения векторов, заданных разложениями в прямоугольном базисе

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы разложениями в прямоугольном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$
$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}.$$

Найдём выражения для $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ через координаты сомножителей. Имеем

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}).$$

С помощью свойств 4 и 5 векторного произведения (см. §3) и с учетом равенств $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$ последнее соотношение преобразуется так:

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k}) + a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k}) + a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j}).$$

Используя свойство 3 векторного произведения (см. §3), в правой части последнего равенства заменим $\vec{j}\times\vec{i}$ на $-\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{j}$ на $-\vec{j}\times\vec{k}$ и $\vec{k}\times\vec{i}$ на $-\vec{i}\times\vec{k}$. После перегруппировки слагаемых получим

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_xb_y - a_yb_x)(\vec{i}\times\vec{j}) + (a_zb_x - a_xb_z)(\vec{i}\times\vec{k}) + (a_yb_z - a_zb_y)(\vec{j}\times\vec{k}). \quad (5.1)$$

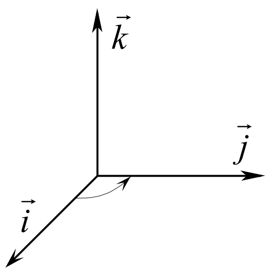

Рис. 5.1. Тройка векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правая

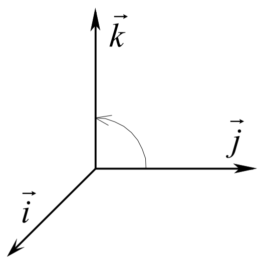

Рис. 5.2. Тройка векторов $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ – правая

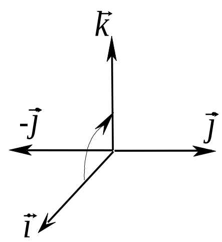

Рис. 5.3. Тройка векторов $(\vec{i}, \vec{k}, -\vec{j})$ – правая

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ попарно ортогональны, тройки $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ и $(\vec{i}, \vec{k}, -\vec{j})$–
правые (рис. 5.1, 5.2, 5.3) и $|\vec{i}\times\vec{j}| = 1 = |\vec{k}|$, $|\vec{j}\times\vec{k}| = 1 = |\vec{i}|$, $|\vec{i}\times\vec{k}| = 1 = |-\vec{j}|$. Поэтому справедливы равенства $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$, с учетом которых соотношение (5.1) переписывается в виде

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}. \quad (5.2)$$

Умножим теперь обе части (5.2) скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (a_yb_z - a_zb_y)c_x - (a_xb_z - a_zb_x)c_y + (a_xb_y - a_yb_x)c_z. \quad (5.3)$$

Записывая разности в круглых скобках в формулах (5.2) – (5.3) как определители второго порядка, получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

и

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z. \qquad (5.4)$$

Для компактной записи $\vec{a}\times\vec{b}$ введём формальный определитель 3-го порядка, первая строка которого состоит не из чисел, а из векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. По аналогии со свойством 7 определителя 3-го порядка (или теоремой о разложении определителя по элементам строки (столбца)), по определению примем:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (5.5)$$

Правую часть равенства (5.4) можно рассматривать как разложение по элементам третьей строки некоторого определителя, а именно:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для вычисления смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ получаем равенство:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (5.6)$$

Пример 5.1. Сила $\vec{F}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ приложена в точке $P(1,1,2)$. Найти момент этой силы относительно точки $Q(2,-1,2)$.

►Пусть $\vec{M}$ – искомый момент. По формуле (3.1) $\vec{M}=\overrightarrow{QP}\times\vec{F}$. Так как $\overrightarrow{QP}=(-1,2,0)$, то

$$\vec{M}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}. ◄$$

Пример 5.2. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$.

►Вычислим смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ по формуле (5.6):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -10+15-5=0.$$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ и, следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны. ◄

Пример 5.3. Дан тетраэдр, вершинами которого являются точки A(1,–1, 2), B(2, 1, 2), C(1, 1, 4), D(6,–3, 8). Найти объём тетраэдра V и длину высоты h, опущенной из вершины D на грань ABC.

►Рассмотрим векторы: $\overrightarrow{AB} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,2)$, $\overrightarrow{AD} = (5,-2,6)$. Они служат рёбрами тетраэдра $ABCD$ и одновременно рёбрами параллелепипеда с основанием $ABEC$ (рис. 5.1). Очевидно, тетраэдр и параллелепипед имеют одну и ту же высоту h, при этом объём тетраэдра $V_{\text{Т}}$ составляет одну шестую часть объёма параллелепипеда $V_{\text{П}}$. Действительно,

$$V_{\text{Т}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} S_{ABEC}\right) h = \frac{1}{6} V_{\text{П}}.$$

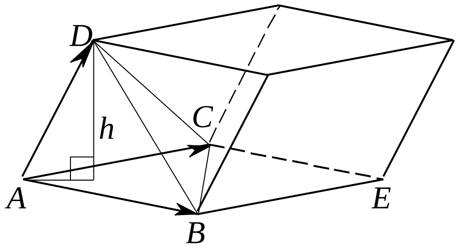

Рис. 5.1. К примеру 5.3

Так как $V_{\text{П}} = |\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}|$, $S_{ABEC} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, $h = \dfrac{V_{\text{П}}}{S_{ABEC}} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$, то здесь более рационально сначала вычислить $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2k,$$ тогда

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\,\overrightarrow{AD} = (4\vec{i} - 2\vec{j} + 2k)(5\vec{i} - 2\vec{j} + 6k) = 36 \Rightarrow V_{\text{П}} = 36$$ и

$$V_{\text{Т}} = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6,\; S_{ABEC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6},\; h = \frac{36}{2\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}.$$ ◄