Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Этот тип уравнений характеризуется наличием правой части, то есть имеет вид:

$$y''+py'+qy = f(x). \qquad (1)$$

Можно доказать, что общее решение уравнения (1) представляется в виде:

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x), \qquad (2)$$

где $y_0(x)$ – общее решение уравнения (1), а $\tilde{y}(x)$ – частное решение уравнения (1). Иными словами, общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения линейного однородного решения и одного из частных решений линейного неоднородного уравнения.

Отметим еще одно важное свойство решений линейных дифференциальных уравнений – принцип суперпозиции решений. Пусть правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде суммы двух (или более) функций:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f_1(x) + f_2(x). \qquad (3)$$

Тогда решение этого уравнения может быть представлено в виде $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения дифференциальных уравнений:

$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1 = f_1(x)$ и $y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2 = f_2(x)$ соответственно. Это означает, что, разбив правую часть линейного неоднородного дифференциального уравнения на сумму двух слагаемых, можно свести его решение к решению двух более простых дифференциальных уравнений.

Заметим, что при формулировке принципа суперпозиции решений не требуется постоянство коэффициентов. Кроме того, этот принцип справедлив и для дифференциальных уравнений более высокого порядка.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (1), в котором правая часть имеет следующий вид:

$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$, где a, $b -$ постоянные числа, $P_n(x)$, $Q_m(x) -$ многочлены порядка n и m.

Такие уравнения называют уравнениями со специальной правой частью, и для нахождения их частного решения можно применить метод Эйлера. Согласно этому методу, частное решение ищется в следующем виде:

$$\tilde{y}(x) = e^{ax}(R_M(x)\cos bx + T_M(x)\sin bx)x^r. \qquad (4)$$

В правой части равенства $M = \max(n, m)$, а $R_M(x)$ и $T_M(x) -$ многочлены степени M с неопределенными коэффициентами (их число равно $2(M+1)$). Степень множителя x^r определяется по следующему правилу.

Если контрольное число $a + i \cdot b$ (комплексное при $b \neq 0$) не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения (8), то $r = 0$. Если контрольное число совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $r = 1$. Наконец, если контрольное число совпадает с корнем характеристического уравнения и этот корень кратный, то $r = 2$. Очевидно, что последний случай возможен только при $b = 0$, так как кратный корень может быть только вещественным.

Для определения неопределенных коэффициентов в многочленах $R_M(x)$ и $T_M(x)$ следует подставить выражение (4) в уравнение (1), предварительно найдя его производные $\tilde{y}'(x)$ и $\tilde{y}''(x)$. Неопределенные коэффициенты находятся из системы линейных алгебраических уравнений, к которым сведется уравнение (1) после подстановки в него выражения (4).

Пример 7.1. Решить дифференциальное уравнение: $y'' + y' = e^x \cdot (x-1)$.

Решение. Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения имеет вид: $k^2 + k = 0$. Его корни $k_1 = 0$; $k_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения записывается в форме: $y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$, где C_1 и $C_2 -$ произвольные постоянные.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде (4). По условиям примера $a = 1, b = 0, m = 1, n = 0.$ Контрольное число равно единице и не совпадает с корнями характеристического уравнения. Поэтому $r = 0$. Таким образом, формула (4) дает: $\widetilde{y}(x) = e^x(A \cdot x + B)$. Найдем производные $\widetilde{y}(x)$.

$$\widetilde{y}'(x) = e^x \cdot (A \cdot x + B) + e^x \cdot A = e^x \cdot (A \cdot x + A + B),$$

$$\widetilde{y}''(x) = e^x \cdot (A \cdot x + A + B) + e^x \cdot A = e^x \cdot (A \cdot x + 2A + B).$$

Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение:

$$e^x \cdot (A \cdot x + 2A + B) + e^x \cdot (A \cdot x + A + B) = e^x \cdot (x - 1).$$

Сокращая обе части уравнения на e^x и приводя подобные, получаем:

$$2A \cdot x + 3A + 2B = x - 1.$$

Последнее равенство должно выполняться для произвольных значений x, что возможно лишь при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 3A + 2B = -1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим: $A = \dfrac{1}{2}$; $B = -\dfrac{5}{4}$.

Следовательно, $\widetilde{y}(x) = e^x(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}) = \dfrac{e^x}{4}(2x - 5)$ и общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения принимает вид:

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{e^x}{4}(2x - 5).$$

Пример7.2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + y = 2\cos x + x^2 e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения $k^2 + 1 = 0$ имеет два комплексных корня: $k_1 = -i$, $r_2 = i$. Общее решение однородного уравнения записывается в виде: $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Заметим, что правая часть уравнения – сумма двух слагаемых, поэтому, в соответствии с принципом суперпозиции решений, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y}(x) = (A\cos x + B\sin x)\cdot x + (Cx^2 + Dx + E)\cdot e^x .$$

Найдем производные функции $\tilde{y}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = -Ax\sin x + A\cos x + Bx\cos x + B\sin x +$$
$$+(2Cx + D + Cx^2 + Dx + E)\cdot e^x = (-A\sin x + B\cos x)\cdot x +$$
$$A\cos x + B\sin x + (Cx^2 + (2C + D)x + D + E)\cdot e^x .$$
$$\tilde{y}''(x) = -A\sin x + B\cos x - (A\cos x + B\sin x)x - A\sin x + B\cos x +$$
$$+(2Cx + 2C + D + Cx^2 + (2C + D)x + (D + E))\cdot e^x .$$

Подстановка этих выражений в исходное уравнение дает:

$$-2A\sin x + 2B\cos x + (2Cx^2 + (4C + 2D)x + + (2C + 2D + 2E))\cdot e^x =$$
$$2\cos x + x^2 e^x .$$

Выполнение этого уравнения при произвольных значениях x возможно только в том случае, когда коэффициенты при функциях $\sin x$, $\cos x$, e^x в левой и правой частях уравнения будут одинаковы. Это условие приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 2 \\ 2C = 1 \\ 4C + 2D = 0 \\ 2C + 2D + 2E = 0 \end{cases}$$

Ее решение: $A = 0$; $B = 1$; $C = \frac{1}{2}$; $D = -1$; $E = \frac{1}{2}$.

В окончательном виде получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})\cdot e^x .$$