§2. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1 (линейности).

$$\boxed{\int \left[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)\right] dx = C_1 \int f_1(x)\,dx + C_2 \int f_2(x)\,dx}. \qquad (2.1)$$

Частные случаи:

1) $\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$ – постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла.

2) $\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$ – неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности неопределенных интегралов от слагаемых.

Свойство 2 (инвариантности формул интегрирования).

Любая формула интегрирования остается справедливой, если независимую переменную x заменить любой дифференцируемой функцией $x(t)$:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f\left[x(t)\right] dx(t) = F\left[x(t)\right] + C}. \qquad (2.2)$$

Непосредственное интегрирование состоит в применении основной таблицы и свойств интегралов.

Пример 2.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$. Применена формула 13) основной таблицы.

Пример 2.2. $\int \left(3\cos x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\int \cos x\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 3\sin x - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 3\sin x - 2\sqrt{x} + C$.

Применены свойство линейности и формулы 1), 6) основной таблицы.

Пример 2.3. $\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. Применены свойство инвариантности формул интегрирования и формула 5) основной таблицы.

Пример 2.4.

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2} d(1+x^2) = \left[1 + x^2 = t\right] = \frac{1}{2}\int t^{1/2} dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

Применены свойство 2 и формула 1) основной таблицы.

В примерах 2.3 и 2.4 демонстрируется прием, называемый *подведением множителя под дифференциал под знаком интеграла*.