§1. Основные понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь F – некоторая известная функция от своих аргументов, которую будем предполагать всегда вещественной. Производная n-го порядка входит в уравнение (1.1).

Частным случаем уравнения (1.1) является уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Такую форму уравнения n-го порядка называют *нормальной формой*.

Уравнение (1.2) будем считать заданным в области D $(n+1)$-мерного пространства, если в каждой точке $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$ задана функция f.

Задача Коши здесь ставится так: требуется найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{array}{l} y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_0', \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

где $x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, т. е. задана точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

Определение 1.1. ***Всякая функция*** $y = y(x)$***, обращающая уравнение (1.2) в тождество на некотором промежутке, называется решением этого уравнения.***

Определение 1.2. ***Общим решением уравнения (1.2) в области*** D ***называется решение***

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{1.4}$$

содержащее n ***произвольных постоянных*** $C_1, \ldots, C_n$***, если для всякой точки*** $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ ***система равенств***

$$\left.\begin{array}{l} y = y(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y' = y'(x, C_1, \ldots, C_n), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x, C_1, \ldots, C_n) \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

однозначно разрешима относительно $C_1, \ldots, C_n$***. В этом случае говорят, что постоянные*** $C_1, \ldots, C_n$ ***входят в решение (1.4) уравнения (1.2) существенным образом.***

Общее решение уравнения (1.2). записанное в виде, не разрешенном относительно искомой функции y,

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

называется *общим интегралом* этого уравнения.

Определение 1.3. ***Частным решением дифференциального уравнения называется такое решение, которое получается из общего решения при определенных фиксированных (допустимых) значениях произвольных постоянных.***

Решение, которое не может быть получено из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных, называется *особым решением*.

Если общее решение уравнения (1.2) известно, то нахождение частного решения, удовлетворяющего начальным условиям (1.3), сводится к решению относительно $C_1, \ldots, C_n$ системы уравнений (1.5).

Теорема 1.1 (существования и единственности решения задачи Коши). ***Если правая часть уравнения (1.2) непрерывна в некоторой окрестности точки*** $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ ***и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные по*** $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$***, то в окрестности точки*** x_0 ***оно имеет единственное решение*** $y = y(x)$***, удовлетворяющее начальным условиям (1.3).***

Замечание. Фактическое нахождение общего или частного решения уравнения n-го порядка выполняется точно или приближенно при помощи специальных методов. Оно может быть выражено через элементарные функции явно или неявно, через квадратуры, а также представлено в виде алгоритма, позволяющего найти решение численно с любой степенью точности в области его существования.

В следующих параграфах этой главы будут рассмотрены типы дифференциальных уравнений, порядок которых можно понизить и в простых случаях выразить общее решение через элементарные функции или с помощью квадратур, т. е. применением операций неопределенного интегрирования.