Тема 7. Геометрическое изображение комплексных чисел

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой. Комплексное число z, определяемое парой действительных чисел (a,b), можно изобразить точкой плоскости Z, имеющей координаты (a,b) в декартовой системе координат XOY.

Таким образом, комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать как точку плоскости, абсцисса которой равна действительной части a, а ордината — мнимой части b.

Если $b = 0$, то число z совпадает с действительным числом a и изображается точкой оси OX, поэтому ось OX называется *действительной осью*.

Если $a = 0$, то число z является чисто мнимым числом bi и изображается точкой на оси OY, называемой поэтому *мнимой осью*.

Плоскость с введенными на ней декартовыми действительной и мнимой осями называется *комплексной плоскостью*.

Каждая точка комплексной плоскости Z изображает одно комплексное число, и каждое комплексное число z изображается единственной точкой плоскости. То есть, устанавливается взаимнооднозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости.

Наряду с представлением комплексных чисел точками можно изображать их векторами: число $z = (a,b) = a + bi$ изображается вектором $\overline{OZ}$, имеющим начало в точке O и конец в точке $Z(a,b)$ (рис.1).

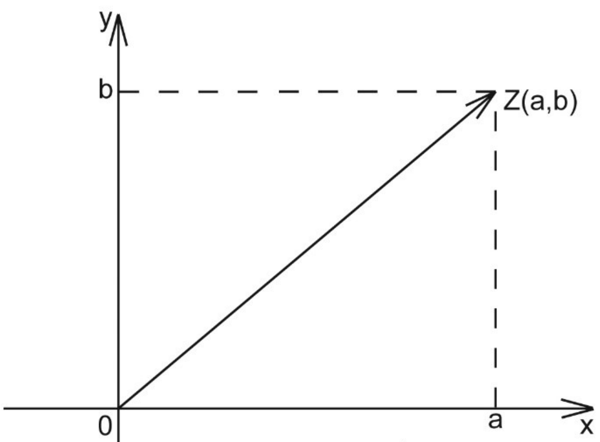

рис. 1

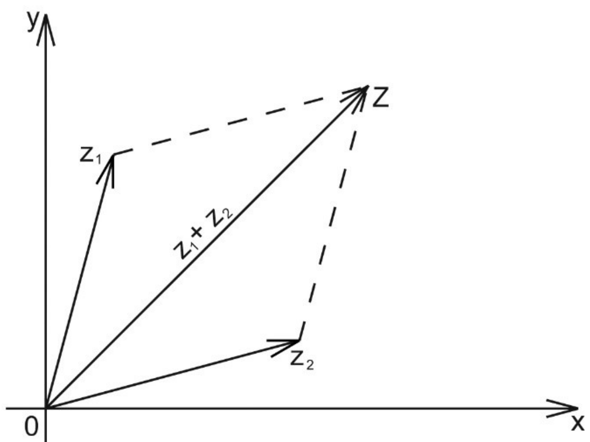

рис. 2

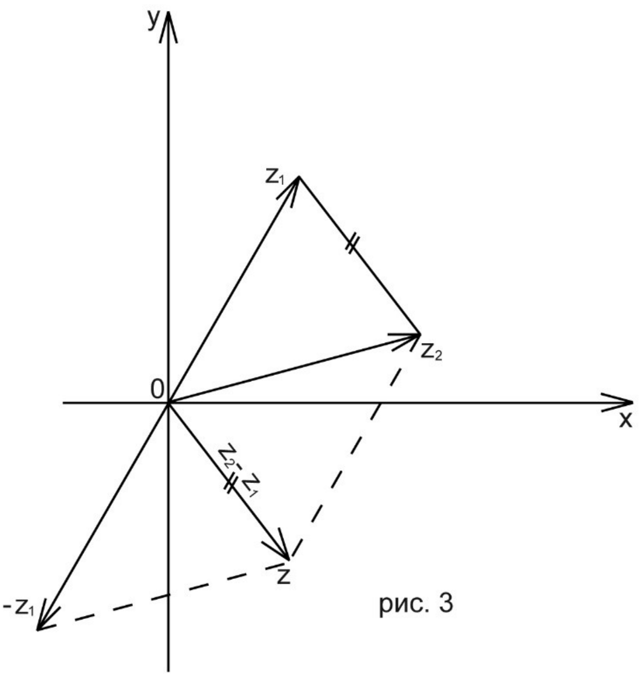

рис. 3

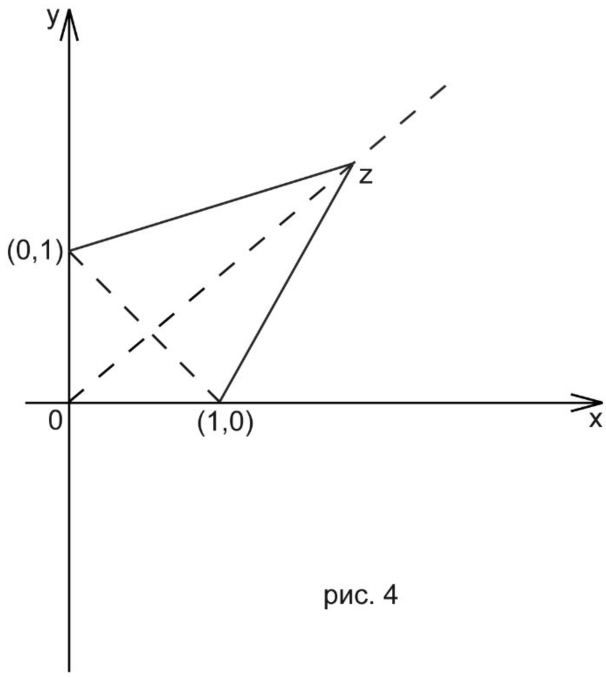

рис. 4

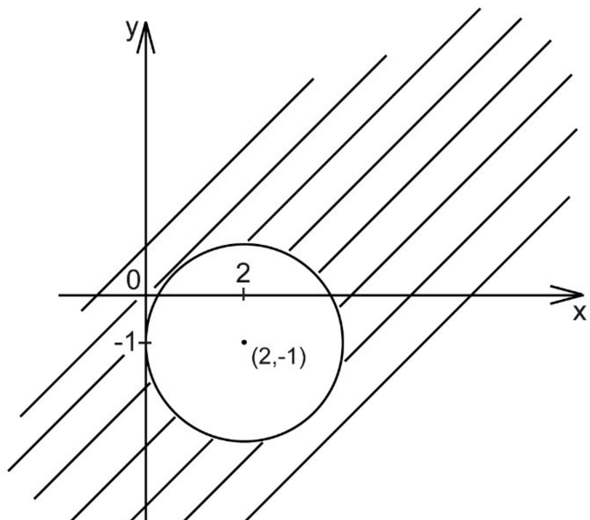

рис. 5

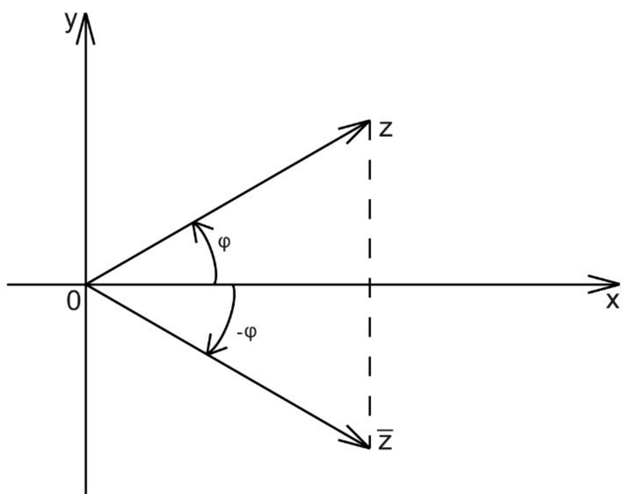

рис. 6

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование сложения и вычитания комплексных чисел.

При сложении комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ складываются их действительные и мнимые части. При сложении соответствующих им векторов $\overline{OZ_1}$ и $\overline{OZ_2}$ складываются их координаты. Поэтому сумме $z = z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2

будет соответствовать вектор $\overline{OZ}$, равный сумме векторов $\overline{OZ_1}+\overline{OZ_2}$, соответствующих слагаемым комплексным числам (рис.2).

Относительно геометрического истолкования вычитания комплексных чисел, заметим, что вычитание векторов сводится к сложению: $\overline{OZ_2}-\overline{OZ_1} = \overline{OZ_2}+(-\overline{OZ_1})$ т.ч. при сложении векторов $\overline{OZ_2}$ и $-\overline{OZ_1}$ получаем вектор $\overline{OZ}$, соответствующий разности комплексных чисел $z=z_2-z_1$ (рис.3).

Для решения задач существенным является тот геометрический факт, что расстояние между точками *O* и *Z*, т.е. длина вектора $\overline{OZ}$, равно расстоянию между точками Z_2 и Z_1 (рис.3).

Итак, геометрический смысл модуля разности комплексных чисел $|z_2-z_1|$состоит в том, что он равен расстоянию между точками Z_2 и Z_1.