Практика

Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Диффереренциальные операции 1 и 2 порядков

Основные формулы

Разложение произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

Пусть $\bar{a}(M) -$ произвольное векторное поле для любой точки $M \in A \subset R^3$.

Тогда

$$\bar{a}(M) = \overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M), \qquad (**)$$

где $\overline{a_1}(M) -$ потенциальное поле, $\overline{a_2}(M) -$ соленоидальное поле $\forall\, M \in A$

и

$$\overline{a_1}(M) = gradf(M)\ \forall\, M \in A\ ,$$

$$\overline{a_2}(M) = \bar{a}(M) - gradf(M).$$

Гармонические векторные поля

<u>Определение</u> (гармонического поля)

Векторное поле $\bar{a}(M)$ для любой точки $M \in A \subset R^3$, называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным, и соленоидальным.

$$\begin{cases} \bar{a}(M) = gradf(M) \\ div\bar{a}(M) = 0 \end{cases}, \quad \forall\, M \in A.$$

<u>Замечание:</u>

Для гармонического поля справедливо равенство:

$$divgradf(M) = 0.$$

или

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2} = 0.$$

Диффереренциальные операции 1 порядка

Оператор Гамильтона (набла):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \right)$$

Тогда:

$\nabla f(M) = grad\, f(M)$ - для скалярного поля

$\nabla \bar{a}(M) = div\, \bar{a}(M)$ - для векторного поля

$\nabla \times \bar{a}\,(M) = rot\, \overline{a(M)}$ - для векторного поля

<u>Свойства оператора Гамильтона</u>

1)$\nabla c = \bar{0}$, где c – const

2)$\nabla \bar{c} = 0$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор

3) $\nabla \times \bar{c} = \bar{0}$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор

4) $\nabla\left(\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}\right) = \lambda_1 \nabla \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \bar{b}$

5) $\nabla \times \left(\lambda_1 \bar{a} \pm \lambda_2 \bar{b}\right) = \lambda_1 \nabla \times \bar{a} \pm \lambda_2 \nabla \overline{\times b}$

Дифференциальные операции 2 порядка:

$$div\, grad\, f(M) = \nabla\left(\nabla\, f(M)\right)$$

$$rot\, grad\, f(M) = \nabla \times \nabla\, f(M)$$

$$grad\, div\, \bar{a}(M) = \nabla\left(\nabla\, \bar{a}(M)\right)$$

$$div\, rot\, \bar{a}(M) = \nabla\left(\nabla \times \bar{a}(M)\right)$$

$$rot\, rot\, \bar{a}(M) = \nabla \times \left(\nabla \times \bar{a}(M)\right)$$

Дифференциальные операции 2 порядка, можно представить

в виде таблицы:

~~$grad\ grad\ f(M)$~~	$grad\ div\ \overline{a}(M)$	~~$grad\ rot\ \overline{a}(M)$~~
$div\ grad\ f(M)$	~~$div\ div\ \overline{a}(M)$~~	$div\ rot\ \overline{a}(M)$
$rot\ grad\ f(M)$	~~$rot\ div\ \overline{a}(M)$~~	$rot\ rot\ \overline{a}(M)$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

1) $f(M) -$ **скалярное поле**:

$$\Delta f(M) = \nabla\nabla f(M) = div\ grad\ f(M)$$

или в кординатной форме

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial z^2}.$$

Замечание:

Если для скалярного поля $f(M)$ выполняется условие $\Delta f(M) = 0$, то такое поле называтся *Лапласовым (или гармоническим).*

2) $\bar{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} -$ **векторное поле**:

$$\overline{\Delta a}(M) = \Delta P(M)\bar{\imath} + \Delta Q(M)\bar{\jmath} + \Delta R(M)\bar{k}$$

или в координатной форме

$$\overline{\Delta a}(M) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)\bar{k}$$

Свойства оператора Лапласа.

1) $\Delta\bar{c} = 0,$ где $\bar{c}-$ постоянный вектор.

2) $\Delta(\bar{c} \cdot f(M)) = \bar{c} \cdot \Delta f(M),$ где $\bar{c}-$ постоянный вектор.

3)$\Delta\left(C \cdot \bar{a}(M)\right) = C \cdot \Delta\bar{a}(M), C = const.$

4)$\Delta\left(\bar{a}_1(M) + \bar{a}_2(M)\right) = \Delta\bar{a}_1(M) + \Delta\bar{a}_2(M).$

5) $\Delta\left(\nabla f(M)\right) = \nabla(\Delta f(M),$

6) $\Delta\left(div\bar{a}(M)\right) = div\left(\Delta\bar{a}(M)\right),$

7) $\Delta\left(rot\bar{a}(M)\right) = rot(\Delta\bar{a}(M))$

Свойства 3) и 4) означают, что оператор Лапласа - это линейный оператор, преобразующий одну векторную величину в другую векторную величину.

Свойства 5) – 7) означают, что оператор Лапласа перестановочен с градиентом, дивергенцией и ротором.

Формулы для дифференциальных операций второго порядка:

1) $$rotgradf(M) = \bar{0}$$

или

$$\nabla \times (\nabla f(M) = \bar{0}.$$

2) $$\nabla\left(\nabla\bar{a}(M)\right) = graddiv\bar{a}(M)$$

или

$$\nabla\left(\nabla\bar{a}(M)\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}\ .$$

3) $divrot\bar{a}(M) = \nabla(\nabla \times \bar{a}(M)) = 0$.

4) $$rotrot\bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$$

или

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M) = graddiv\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M).$$

<u>Таблица для дифференциальных операций 2 порядка</u>

	$\bar{a}(M)$	$f(M)$	
	$grad\ f(M)$	$div\ \bar{a}(M)$	$rot\ \bar{a}(M)$
$grad\ f(M)$	---	$grad\ div\ \bar{a}(M) = \nabla(\nabla\ \bar{a}(M))$	---
$div\ \bar{a}(M)$	$div\ grad\ f(M) = \nabla(\nabla\ f(M)) = \Delta f(M)$	---	$div\ rot\ \bar{a}(M) = \nabla(\nabla \times \bar{a}(M)) = 0$
$rot\ \bar{a}(M)$	$rot\ grad\ f(M) = \nabla \times \nabla\ f(M) = \bar{0}$	---	$rot\ rot\ \bar{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}(M)) = grad\ div\ \bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M) = \nabla\nabla\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M)$