§10. Гиперболические функции

Со вторым замечательным пределом и следствиями из него связана особая роль показательной функции с основанием e, $y=e^x$, которая также называется экспонентой и иногда обозначается так: $y=\exp(x)$. С помощью экспоненты вводятся так называемые *гиперболические функции*, находящие применение, например, в описании некоторых процессов, связанных с электричеством, а также при описании тепловых явлений.

Определение 10.1. Функции $y=(e^x+e^{-x})/2$ и $y=(e^x-e^{-x})/2$ называются *гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом*. Для них приняты следующие обозначения: $\mathrm{ch}x$ и $\mathrm{sh}x$. Таким образом,

$$\mathrm{ch}x=(e^x+e^{-x})/2,\ \ \mathrm{sh}x=(e^x-e^{-x})/2. \qquad (10.1)$$

Функция $\mathrm{ch}x$ – чётная, её график симметричен относительно оси Oy (рис. 10.1), а функция $\mathrm{sh}x$ – нечётная, её график обладает центральной симметрией относительно начала координат (рис. 10.1).

По аналогии с тригонометрическими функциями $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$ вводятся *гиперболические тангенс и котангенс*: $y=\mathrm{th}x$ и $y=\mathrm{cth}x$:

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\quad \mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}. \qquad (10.2)$$

Обе эти функции являются нечётными, их графики приведены на рис. 10.2.

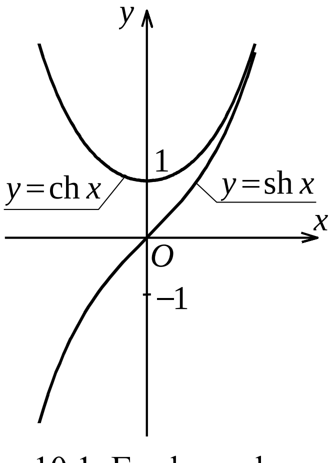

Рис.10.1. Графики функций $y=\mathrm{ch}x$ и $y=\mathrm{sh}x$

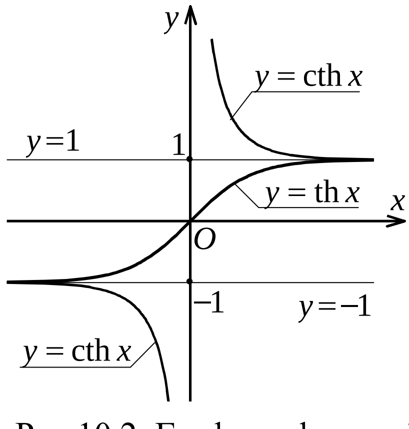

Рис.10.2. Графики функций $y=\mathrm{cth}x$ и $y=\mathrm{th}x$

Для гиперболических функций справедлив ряд тождеств, аналогичных тождествам для тригонометрических функций $y=\cos x$ и $y=\sin x$. Так,

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1, \qquad (10.3)$$

$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y,\ \ \mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y. \qquad (10.4)$$

Докажем равенство (10.3).

► $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2]$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к равенству (10.3).◄

Докажем первое из равенств (10.4).

► $\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y = \frac{1}{4}[(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})]$.

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к доказываемому равенству: $\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \mathrm{ch}(x+y)$.◄

При условии $y = x$ из (10.4) следуют тождества:

$$\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x, \quad \mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x.$$

Для гиперболических функций при $x \to 0$ справедливы следующие формулы:

$$\mathrm{sh}x \sim x, \quad \mathrm{th}x \sim x, \quad \mathrm{ch}x - 1 \sim x^2/2, \tag{10.5}$$

которые легко обосновываются с помощью определения эквивалентных бесконечно малых (определение 7.1) и формул (10.1), (10.2).

Замечание 10.1. Термин “гиперболические функции” связан с тем, что эти функции используются при задании гиперболы параметрическими уравнениями. Например, гиперболу Γ_1: $x^2 - y^2 = 1$ в силу тождества (10.3) можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\Gamma_1: \quad x = \mathrm{ch}t, \; y = \mathrm{sh}t, \; t \in \boldsymbol{R}.$$

Для сравнения приведём параметрические уравнения окружности Γ_2: $x^2 + y^2 = 1$,

$$\Gamma_2: x = \cos t, \; y = \sin t, \; t \in [0, 2\pi].$$

Пример 10.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}^2 x}$.

►Дробь под знаком предела при $x \to 0$ даёт неопределённость $\frac{0}{0}$.

Имеем $\ln\mathrm{ch}x = \ln(1 + (\mathrm{ch}x - 1)) \sim \mathrm{ch}x - 1 \sim x^2/2$ (использованы формулы (7.7) и (10.5)) и $\mathrm{sh}^2 x \sim x^2$ (формула (10.5)). Заменив числитель и знаменатель дроби под знаком предела на эквивалентные, получим:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$.◄