§1. Производная функции в точке. Односторонние и бесконечные производные

Определение 1.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует и конечен, называется *производной* этой функции в точке x_0 и обозначается следующими символами: $f'(x_0), \dfrac{df(x_0)}{dx}, y'(x_0), \dfrac{dy}{dx}_{|x=x_0}, \dot{y}$.

Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Замечание 1.1. Символы $\dfrac{df(x_0)}{dx}, \dfrac{dy}{dx}_{|x=x_0}$, $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{dy}{dx}$ были введены немецким математиком, философом и физиком Г. В. Лейбницем (1646-1716), а символы $f'(x_0)$, $y'(x_0)$ – французским математиком и механиком Ж. Л. Лагранжем (1736-1813). Символ $\dot{y}$ ввёл И. Ньютон (1643-1727), в настоящее время он употребляется только в том случае, когда под независимой переменной понимается время.

Пример 1.1. Найти по определению $f'(1)$, если $f(x)=x^3-x$.

► $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$ (выражение для $\Delta f(1)$ приведено в примере 1.1 главы 4 раздела 4). Сократив оба члена дроби под знаком предела на Δx, получим $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+3\Delta x+(\Delta x)^2)=2$.◄

Определение 1.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(x_0-\delta, x_0]$ $([x_0, x_0+\delta))$, δ – некоторое положительное число. Если существует предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to -0\ (\Delta x\to +0)$, то он называется *левой (правой) производной* этой функции в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$ (или $f'_+(x_0)$). Итак,

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.2}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Замечание 1.2. Левая и правая производные объединяются термином *односторонние производные*.

Замечание 1.3. Из существования производной $f'(x_0)$ следует существование односторонних производных $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и равенство

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0) = f'(x_0) \tag{1.4}$$

(теорема 1.2 главы 3 раздела 4). Обратно, если существуют равные $f'_{-}(x_0)$ и $f'_{+}(x_0)$, то существует и $f'(x_0)$ и верно равенство (1.4). Если $f'_{-}(x_0)$ и $f'_{+}(x_0)$ существуют, но не равны, то функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0.

Пример 1.2. Показать, что не существует $f'(-1)$, если $f(x) = x|x+1|$.

► $\Delta f(-1) = f(-1+\Delta x) - f(-1) = (-1+\Delta x)|\Delta x|$ Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$f'_{-}(-1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{(-1+\Delta x)(-\Delta x)}{\Delta x} = 1,\ f'_{+}(-1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(-1+\Delta x)(\Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку $f'_{-}(-1) \neq f'_{+}(-1)$, то не существует $f'(-1)$ (замечание 1.3).◄

Определение 1.3. Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную*.

Пример 1.3. Показать по определению, что $f'(1) = +\infty$, если $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

► $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\Delta x - 1} - \sqrt[3]{1-1}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$.◄

Аналогично вводится понятие *односторонних бесконечных производных*.

Пример 1.4. Показать по определению, что $f'_{-}(1) = -\infty$, а $f'_{+}(1) = +\infty$, если $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

► $f'_{-}(1) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\sqrt[3]{(1+\Delta x - 1)^2} - \sqrt[3]{(1-1)^2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty$,

$f'_{+}(1) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty$.◄