Глава 2

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений.

Перейдем к изучению систем дифференциальных уравнений. Для начала рассмотрим вопрос о применении систем дифференциальных уравнений в механике.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения материальной точки в трехмерном пространстве. То есть материальная точка массы m движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}\big(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\big)$. Как известно, в общем случае сила может зависеть от времени, от местоположения точки в этот момент времени и от мгновенной скорости движения (как, например, сила трения). Согласно второму закону Ньютона, имеем:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\big(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\big). \qquad (1.1)$$

В координатной форме уравнение (1.1) можно переписать в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X\big(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\big), \\ m\ddot{y} = Y\big(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\big), \\ m\ddot{z} = Z\big(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\big), \end{cases} \qquad (1.2)$$

где X, Y, Z – проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси, $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор материальной точки; $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ – ее скорость. Если считать неизвестными не только координаты точки x, y, z, но и проекции скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, то получим систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w, \\ \dot{u} = \dfrac{1}{m} X\big(t, x, y, z, u, v, w\big), \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m} Y\big(t, x, y, z, u, v, w\big), \\ \dot{w} = \dfrac{1}{m} Z\big(t, x, y, z, u, v, w\big). \end{cases} \qquad (1.3)$$

Векторное уравнение (1.1) можно также записать в виде системы из двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \\ \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \vec{V}\right). \end{cases} \qquad (1.4)$$

Системы типа (1.3), (1.4) называются ***динамическими системами***.

Если ввести в рассмотрение векторную функцию $\vec{R}(t) = \left(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\right)$, то можно записать одно векторное уравнение, эквивалентное всем вышеперечисленным системам:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\Phi}\left(t, x, y, z, u, v, w\right), \qquad (1.5)$$

где $\vec{\Phi} = \left(u, v, w, \frac{1}{m}X, \frac{1}{m}Y, \frac{1}{m}Z\right)^T$.

Определение 1.1. *Шестимерное пространство точек* $\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right)$ *называется* ***фазовым пространством*** *динамической системы* (1.3).

Определение 1.2. *Годограф векторной функции* $\vec{R}(t)$ *– решения* (1.3) (*или* (1.5)) *– в шестимерном пространстве* $\mathbf{R}^6$ *называется* ***фазовой траекторией***.

Первые три координаты фазовой траектории указывают на положение материальной точки в пространстве $\mathbf{R}^3$, остальные координаты характеризуют скорость ее движения. Для выделения одной фазовой траектории необходимо задать начальные условия: $\vec{R}(t_0) = \left(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right)^T$, то есть начальное положение материальной точки и начальную скорость.

Очевидно, все то же самое можно сделать для случая плоского движения точки. При этом фазовое пространство будет иметь размерность 4, а динамическая система, подобная (1.3) для этого случая состоит из четырех уравнений.

§ 2. Общие сведения о системах дифференциальных уравнений.

Приведем основные сведения о системах дифференциальных уравнений самого общего вида, а также поговорим о классификации таких систем и о порядке системы дифференциальных уравнений.

Пусть *t* – независимая переменная, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)$ – искомые функции от переменной *t*, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} F_1\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1^1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2^1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k^1)}\right) = 0, \\ F_2\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1^2)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2^2)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k^2)}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_l\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1^l)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2^l)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k^l)}\right) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Введем обозначения: $M_1 = \max\left\{m_1^1, m_2^1, \ldots, m_k^1\right\}$, $M_2 = \max\left\{m_1^2, m_2^2, \ldots, m_k^2\right\}, \ldots$, $M_l = \max\left\{m_1^l, m_2^l, \ldots, m_k^l\right\}$.

Определение 2.1. Порядком системы (2.1) *называется число* $N = \sum_{i=1}^{l} M_i$.

Легко заметить, что приведенные в предыдущем параграфе динамические системы (1.2) или (1.3) имеют шестой порядок.

Определение 2.2. Нормальной системой *дифференциальных уравнений называется система вида:*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ y_2'(t) = f_2\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = f_n\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

Определение 2.3. *Если функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *не зависят от переменной t, то система* $\begin{cases} y_1'(t) = f_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ y_2'(t) = f_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = f_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \end{cases}$ *называется* ***автономной нормальной системой***.

Заметим, что нормальная система (2.2), а также аналогичная автономная система имеют порядок *n*. В дальнейшем для простоты записи ограничимся рассмотрением нормальных систем третьего порядка, причем искомые функции будем обозначать следующим образом: $y_1 = x(t), y_2 = y(t), y_3 = z(t)$. Все сказанное далее легко обобщить на случай систем большего или меньшего порядков.

Итак, рассмотрим нормальную систему третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y, z), \\ \dot{y} = f_2(t, x, y, z), \\ \dot{z} = f_3(t, x, y, z). \end{cases} \tag{2.3}$$

Определение 2.4. Решением системы (2.3) *на интервале* (a,b) *называется набор функций* $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, *непрерывно дифференцируемых на этом интервале и обращающий равенства системы* (2.3) *в тождества на интервале* (a,b).

Если ввести в рассмотрение векторные функции в пространстве $\mathbf{R}^3$: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{F}(t,\vec{r}(t)) = (f_1(t,\vec{r}(t)), f_2(t,\vec{r}(t)), f_3(t,\vec{r}(t)))$, то система (2.3) запишется в виде одного векторного уравнения: $\dot{\vec{r}} = \vec{F}(t,\vec{r})$. Если система является автономной, то $\dot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$.

Перейдем теперь к задаче Коши для системы (2.3).

Задача Коши. Требуется найти решение системы (2.3), удовлетворяющее начальным данным:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0, \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Начальные данные (2.4) называются также данными Коши.

Теорема 2.1. *(Теорема существования и единственности)*

Если функции f_1, f_2, f_3, *а также их частные производные* $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}$, *где* $i = 1,2,3$, *являются непрерывными в области* $\Omega \subset \mathbf{R}^4$, *то для любых начальных данных Коши* $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ *существует интервал* $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, *содержащий точку* t_0, *на котором существует единственное решение задачи Коши* (2.3), (2.4).

§ 3. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений третьего порядка.

В этом параграфе мы рассмотрим нормальные системы третьего порядка. Все сказанное далее можно легко обобщить на случай более высокого или более низкого порядков.

Определение 3.1. *Система вида*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + a_{13}(t)z, \\ \dot{y} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + a_{23}(t)z, \\ \dot{z} = a_{31}(t)x + a_{32}(t)y + a_{33}(t)z, \end{cases} \tag{3.1}$$

где функции $a_{ij}(t)$ являются непрерывными на интервале $(a,b) \subset \mathbf{R}$, называется *линейной однородной* системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Для такой системы будем использовать аббревиатуру ЛОСДУ3П. Функции $a_{ij}(t)$ называются переменными коэффициентами системы.

Перейдем к векторной записи такой системы. Введем в рассмотрение матрицу системы $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}$ и векторную функцию $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, производная которой по скалярному аргументу $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$.
Тогда систему (3.1) можно записать в виде одного векторного равенства:

$$\dot{\vec{r}}(t) = A(t)\vec{r}(t). \tag{3.2}$$

Заметим, что ЛОСДУ3П всегда имеет нулевое решение $\vec{r}(t) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, таким же образом можно поступить с линейной однородной системой другого порядка. Заметим, что система первого порядка – это просто линейное однородное уравнение.

Изучим некоторые свойства решений ЛОСДУ (линейных однородных систем дифференциальных уравнений).

Свойство 3.1. *Пусть* $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ *– два решения системы* (3.1)*, тогда их сумма* $\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$ *– тоже является решением этой системы.*

Доказательство. Для доказательства используем векторную запись системы (3.1). Известно, что $\dot{\vec{r}}_1(t) = A(t)\vec{r}_1(t)$ и $\dot{\vec{r}}_2(t) = A(t)\vec{r}_2(t)$, так как эти векторные функции являются решениями (3.2). Подставим в левую часть (3.2) их сумму: $\dfrac{d(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{dt} = \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 = A(t)\vec{r}_1 + A(t)\vec{r}_2 = A(t)(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Здесь мы воспользовались правилом вычисления производной векторной функции и дистрибутивностью матричного произведения.

Свойство 3.2. *Пусть* $\vec{r}(t)$ *– решение системы* (3.1), k *– произвольное вещественное число, тогда* $k\vec{r}(t)$ *– тоже решение этой системы.*

Доказательство. $\dfrac{d(k\,r)}{dt} = k\dot{\vec{r}} = kA(t)\vec{r} = A(t)(k\vec{r})$. Здесь было использовано правило вычисления производной и однородность матричного умножения.

Свойство 3.3. *Пусть* $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \ldots, \vec{r}_m(t)$ *– решения системы* (3.1), тогда и их линейная комбинация $C_1\vec{r}_1(t) + C_2\vec{r}_2(t) + \ldots + C_m\vec{r}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} C_i\,\vec{r}_i$ *при любых значениях* $C_1, C_2, \ldots, C_m \in \mathbf{R}$ *также является решением системы* (3.1).

Последнее свойство является очевидным следствием двух предыдущих и доказывается методом математической индукции.

Перейдем теперь к понятиям линейной зависимости и линейной независимости системы векторных функций.

Определение 3.2. *Пусть есть система векторных функций* $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \ldots, \vec{r}_m(t)$. *Если существует набор чисел* $C_1, C_2, \ldots, C_m \in \mathbf{R}$, *среди которых есть хотя бы одно отличное от нуля (или* $C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_m^2 > 0$*), при котором*

$$C_1\vec{r}_1(t) + C_2\vec{r}_2(t) + \ldots + C_m\vec{r}_m(t) \equiv \vec{0} \text{ на интервале } (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}, \qquad (3.3)$$

то такая система векторных функций называется ***линейно зависимой*** *на интервале* (α, β).

Если же тождество (3.3) *возможно только при нулевых коэффициентах, то есть тождество* $C_1\vec{r}_1(t) + C_2\vec{r}_2(t) + \ldots + C_m\vec{r}_m(t) \equiv \vec{0}$ *влечет за собой условие*

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \\ \ldots \\ C_m = 0, \end{cases}$$

то система функций является ***линейно независимой*** *на* (α, β).

Векторное тождество (3.3) равносильно системе уравнений. Для простоты изложения запишем эту систему в случае, когда в нее входит три функции $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)$.

$$\begin{cases} C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + C_3x_3(t) = 0, \\ C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + C_3y_3(t) = 0, \\ C_1z_1(t) + C_2z_2(t) + C_3z_3(t) = 0, \end{cases} \qquad (3.4)$$

при любых значениях $t \in (\alpha, \beta)$. Здесь $\vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$.

Определение 3.3. *Определитель системы* (3.4) $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \end{vmatrix}$ *называется* ***определителем Вронского*** *для системы векторных функций* $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)$.

Этот определитель также обозначают $W[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3]$. Для определителя Вронского системы векторных функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам для определителя Вронского систем обычных скалярных функций. Приведем их для случая системы из трех векторных функций. Если функций в системе больше (или меньше), то справедливы абсолютно аналогичные теоремы.

Теорема 3.1. *Если система векторных функций* $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)$ *линейно зависимы на интервале* (α, β), *то определитель Вронского тождественно равен нулю на этом интервале.*

Доказательство. Если система векторных функций линейно зависима на (α, β), то выполняется условие (3.4) при некоторых значениях $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$, среди которых есть хоть одно ненулевое.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + C_3 x_3(t_0) = 0, \\ C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) + C_3 y_3(t_0) = 0, \\ C_1 z_1(t_0) + C_2 z_2(t_0) + C_3 z_3(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Эта система является линейной однородной системой с неизвестными C_1, C_2, C_3, определитель которой является определителем Вронского $W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & x_3(t_0) \\ y_1(t_0) & y_2(t_0) & y_3(t_0) \\ z_1(t_0) & z_2(t_0) & z_3(t_0) \end{vmatrix}$. Причем эта система заведомо имеет ненулевое решение. Из курса алгебры известно, что квадратная линейная однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель $W(t_0) = 0$. А поскольку $t_0 -$ произвольная точка интервала, то $W(t) \equiv 0$ на всем интервале (α, β).

Следствие из теоремы 3.1. *Если определитель Вронского системы функций отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала* (α,β)*, то система функций является линейно независимой.*

Остальные теоремы приведем без доказательства. При желании вы легко сможете провести доказательства самостоятельно так, как это было сделано в разделе про линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка (ЛОДУ*n*П).

Теорема 3.2. *Система решений* ЛОСДУ3П (3.1) $\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\vec{r}_3(t)$ *является линейно независимой на интервале* (α,β) *тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского отличен от нуля в любой точке этого интервала.*

Определение 3.4. *Система функций* $\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\dots,\vec{r}_m(t)$ *называется* ***фундаментальной системой решений*** ЛОСДУ3П (3.1*), если выполняются следующие три условия:*

- *все функции, входящие в эту систему являются решениями* (3.1)*,*
- *их количество равно порядку системы (в нашем случае* $m=3$*),*
- *система является линейно независимой.*

Для фундаментальной системы есть общепринятая аббревиатура – ФСР.

Следствие из теоремы 3.2. *Если* $\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\vec{r}_3(t)$ – ФСР *на интервале* (α,β) *для системы* (3.1)*, то*

$$W(t)\equiv 0 \text{ на } (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \exists t_0\in(\alpha,\beta): W(t_0)=0.$$

Последнее утверждение означает, что если хоть в одной точка интервала (α,β) определитель Вронского ФСР равен нулю, то он тождественно равен нулю на всем этом интервале.

Теорема 3.3. *Фундаментальная система решений* ЛОСДУ3П (3.1) *всегда существует.*

Теорема 3.4. *(Структура общего решения* ЛОСДУ3П (3.1)*)*

Общее решение ЛОСДУ3П (3.1) *является линейной комбинацией элементов* ФСР*. То есть*

$$\vec{r}_{\text{о.о.}}=C_1\vec{r}_1+C_2\vec{r}_2+C_3\vec{r}_3, \text{ где } \vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\vec{r}_3(t) - \text{ФСР ЛОСДУ3П.}$$

§ 4. Построение ФСР для ЛОСДУ3П с постоянными коэффициентами методом Эйлера.

Рассмотрим частный случай ЛОСДУЗП, который часто встречается в приложениях, а именно линейную однородную систему третьего порядка с постоянными коэффициентами и попробуем найти ее ФСР и, соответственно, общее решение такой системы. В этом параграфе будет изучаться система вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \text{ где } a_{ij} \in \mathbf{R}. \\ \dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \tag{4.1}$$

Заметим, что согласно теореме существования и единственности, система (4.1) имеет решение на всей вещественной оси. Систему (4.1) можно переписать в виде одного векторного уравнения:

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}, \tag{4.2}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – квадратная числовая матрица, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$.

Будем искать решение системы (4.1) или уравнения (4.2) в виде: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda \in \mathbf{R}$, а среди чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ есть хоть одно ненулевое. Если взять все эти три числа равными нулю, то мы, конечно, получим решение системы, но оно будет нулевым и, следовательно, не может входить в ФСР.

Имеем: $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda t}$. Подставим это выражение в (4.1), получим:

$$\begin{cases} \gamma_1 \lambda e^{\lambda t} = a_{11}\gamma_1 e^{\lambda t} + a_{12}\gamma_2 e^{\lambda t} + a_{13}\gamma_3 e^{\lambda t}, \\ \gamma_2 \lambda e^{\lambda t} = a_{21}\gamma_1 e^{\lambda t} + a_{22}\gamma_2 e^{\lambda t} + a_{23}\gamma_3 e^{\lambda t}, \\ \gamma_3 \lambda e^{\lambda t} = a_{31}\gamma_1 e^{\lambda t} + a_{32}\gamma_2 e^{\lambda t} + a_{33}\gamma_3 e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Полученная система (4.3) эквивалентна квадратной линейной однородной системе:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + a_{23}\gamma_3 = 0, \\ a_{31}\gamma_1 + a_{32}\gamma_2 + (a_{33} - \lambda)\gamma_3 = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

В матричной форме систему (4.4) можно переписать так:

$(A-\lambda E)\vec{\gamma}=\vec{0}$ или $A\vec{\gamma}=\lambda\vec{\gamma}$, где $\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$. Для того, чтобы система (4.4) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (4.5)$$

Другими словами, $\lambda-$собственное число матрицы A, $\vec{\gamma}-$ соответствующий этому собственному числу собственный вектор (его координаты – ненулевое решение соответствующей системы (4.4)).

Определение 4.1. *Уравнение* (4.5) *называется* ***характеристическим уравнением*** *для системы* (4.1).

Характеристическое уравнение (4.5) суть алгебраическое уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами. Для корней таких уравнений возможны следующие случаи:

1. уравнение (4.5) имеет три различных вещественных корня;
2. уравнение (4.5) имеет два различных вещественных корня, один из которых имеет вторую кратность;
3. уравнение (4.5) имеет один вещественный корень кратности три;
4. уравнение (4.5) имеет один вещественный корень и пару комплексно-сопряженных корней.

Наша задача заключается в нахождении трех линейно независимых решений системы (4.1) в каждом из этих четырех случаев.

Рассмотрим сначала случай 1. Этот случай является самым простым.

Пример 4.1. Решить систему дифференциальных уравнений, заданную в векторной форме $\dot{\vec{r}}=A\vec{r}$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Решение. Прежде всего, заметим, что в этом примере мы будем решать систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=x-y+z,\\ \dot{y}=x+y-z,\\ \dot{z}=2x-y.\end{cases}$

Выпишем характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 2-\lambda & -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1).$$

При вычислении определителя мы сначала прибавили к первому и второму столбцу третий, затем вынесли за знак определителя общий множитель первого столбца, после чего из последней строки вычли первую. Далее определитель разложили по первому столбцу. Таким образом, получилось характеристическое уравнение:

$$(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)=0,$$

которое имеет три различных вещественных корня: $\lambda_1=2, \lambda_2=-1, \lambda_3=1$. Эти числа называют собственными числами матрицы A. Нам осталось найти собственные векторы, отвечающие этим числам, или ненулевые решения линейных однородных систем, определители которых равны $\det(A-\lambda_i E)$.

Возьмем $\lambda_1=2$ и найдем любое ненулевое решение ЛОС (линейной однородной системы):

$$\begin{cases} (1-2)\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0, \\ \gamma_1+(1-2)\gamma_2-\gamma_3=0, \\ 2\gamma_1-\gamma_2-2\gamma_1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0, \\ \gamma_1-\gamma_2-\gamma_3=0, \\ 2\gamma_1-\gamma_2-2\gamma_3=0. \end{cases}$$

Нам годится любое ненулевое решение этой системы, которое, в принципе, часто можно просто угадать. В данном случае видно, что система имеет ненулевое решение $(1,0,1)^T$. А тогда первый элемент искомой ФСР для нашей системы $\vec{r}_1(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$. Аналогичным образом найдем остальные два элемента ФСР.

При $\lambda_2=-1$ имеем:

$$\begin{cases}(1+1)\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0,\\ \gamma_1+(1+1)\gamma_2-\gamma_3=0,\\ 2\gamma_1-\gamma_2+\gamma_1=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0,\\ \gamma_1+2\gamma_2-\gamma_3=0,\\ 2\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0.\end{cases}$$

Можно, конечно, угадать ненулевое решение, но в этом случае напомним, как решить такую систему методом Гаусса с использованием матрицы системы.

$$A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Здесь были выполнены следующие элементарные преобразования матрицы:

- поменяли местами первую и вторую строки и одновременно из последней строки вычли первую;
- из второй строки вычли первую, умноженную на 2.

Осталось найти ненулевое решение системы:

$\begin{cases}\gamma_1=-2\gamma_2+\gamma_3,\\ -5\gamma_2+3\gamma_1=0.\end{cases}$ Легко заметить, что столбец $\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ вполне подходит в качестве ненулевого решения. А тогда второй элемент ФСР $\vec{r}_2(t)=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}e^{-t}$.

Наконец, при $\lambda_3=1$ имеем:

$\begin{cases}(1-1)\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0,\\ \gamma_1+(1-1)\gamma_2-\gamma_3=0,\\ 2\gamma_1-\gamma_2-\gamma_1=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\gamma_2+\gamma_3=0,\\ \gamma_1-\gamma_3=0,\\ 2\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3=0.\end{cases}$ Здесь тоже очевидно ненулевое решение $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. И последний, третий, элемент ФСР $\vec{r}_3(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t}$. Таким образом, фундаментальную систему решений мы нашли, осталось записать общее решение системы:

$$\vec{r}(t)=C_1\vec{r}_1(t)+C_2\vec{r}_2(t)+C_3\vec{r}_3(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}e^{-t}+C_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t}.$$

Если расписать покоординатно, то получим общее решение системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + C_3e^t, \\
y(t) &= 3C_2e^{-t} + C_3e^t, \\
z(t) &= C_1e^{2t} + 5C_2e^{-t} + C_3e^t.
\end{aligned}$$

Перейдем теперь ко второй ситуации, когда характеристическое уравнение системы имеет вещественный корень второй кратности. Рассмотрим два примера для двух разных случаев, которые могут получиться.

Пример 4.2. Решить систему дифференциальных уравнений, заданную в векторной форме $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные числа матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

Здесь мы из второй строки вычли первую, из третьей – вторую и вынесли общие множители второй и третьей строки за знак определителя. Прибавим к первой строке последнюю и разложим определитель по третьему столбцу:

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

Таким образом, матрица системы A имеет два вещественных собственных числа, одно из которых имеет кратность 2.

Начнем с простого собственного числа $\lambda_1 = 4$. Найдем собственный вектор, ему соответствующий, то есть любое ненулевое решение однородной системы:

$$\begin{cases} (2-4)\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + (2-4)\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + (2-4)\gamma_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, эта система имеет ненулевое решение $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, и первый элемент фундаментальной системы $\vec{r}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t}$.

Возьмем теперь кратный корень характеристического уравнения $\lambda_{2,3}=1$ и составим матрицу $A-\lambda_2 E$.

$A-E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы равен единице, что позволяет нам выбрать два линейно независимых собственных вектора, отвечающих кратному собственному числу. Сделаем это с помощью метода Гаусса, приведя матрицу системы к ступенчатой форме и выбрав нужным образом свободные переменные.

$A-E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, получим систему с двумя свободными переменными c_1,c_2: $\begin{cases}\gamma_1=-\gamma_2-\gamma_3,\\ \gamma_2=c_1,\\ \gamma_3=c_2.\end{cases}$ Полагая $c_1=1,c_2=0$, получим один собственный вектор $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, а взяв $c_1=0,c_2=1$, получим второй собственный вектор $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, линейно независимый с ним. Заметим, что линейная зависимость двух векторов равносильна пропорциональности их координат, что в данном случае невозможно. Таким образом, у нас есть еще два элемента ФСР: $\vec{r}_2(t)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}e^{t}$, $\vec{r}_3(t)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t}$. Общее решение системы

$$\vec{r}(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t}+C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}e^{t}+C_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t}.$$

Мы рассмотрели случай, когда $\operatorname{rank}\left(A-\lambda E\right)=1$, и тогда всегда можно выбрать два линейно независимых собственных вектора. Если $\operatorname{rank}\left(A-\lambda E\right)=2$, то это сделать невозможно, и задача несколько усложняется. Рассмотрим следующий пример.

Пример 4.3. Решить систему дифференциальных уравнений, заданную в векторной форме $\dot{\vec{r}}=A\vec{r}$, где $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные числа матрицы A.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\1&1-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&1\\0&1-\lambda&-1\\2-\lambda&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1-\lambda&-1\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Здесь мы в первом шаге прибавили к первому столбцу последний, после чего вынесли общий множитель первого столбца. Далее привели матрицу определителя к верхней диагональной форме, вычитая из третьей строки первую. Получили два собственных числа: $\lambda_1=2,\lambda_{2,3}=1$, одно из которых имеет кратность 2. Найдем собственные векторы.

Возьмем $\lambda_1=2$ и найдем любое ненулевое решение однородной линейной системы:

$$\begin{cases}(1-2)\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0,\\ \gamma_1+(1-2)\gamma_2-\gamma_3=0,\\ -\gamma_2+(2-2)\gamma_3=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0,\\ \gamma_1-\gamma_2-\gamma_3=0,\\ -\gamma_2=0.\end{cases}$$

Очевидным ненулевым решением этой системы является, например, столбец $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. А тогда первый элемент ФСР $\vec{r}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$.

Попытаемся, как и в прошлом примере, найти два линейно независимых собственных вектора, отвечающие числу $\lambda_{2,3}=1$.

$$A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}1-1 & -1 & 1\\ 1 & 1-1 & -1\\ 0 & -1 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ то есть}$$

$\operatorname{rank}\left(A-\lambda_2E\right)=2$, и тогда нам не удастся выбрать 2 линейно независимых решения, потому что только одна переменная будет свободной.

В этом случае можно показать, что оставшуюся часть решения можно найти в виде: $\tilde{\vec{r}}(t)=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}t\right)e^t$. При этом из шести неизвестных $\alpha_1,\ldots,\gamma_2$ должны получиться две свободные переменные, остальные четыре однозначно через них выражаются, будучи базисными. Подставим $\tilde{\vec{r}}(t)$ в систему. Вычислим сначала производную этой векторной функции:

$\dot{\tilde{\vec{r}}}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}e^t+\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}t\right)e^t$ и подставим в уравнение в векторной форме, предварительно сократив на e^t. Получим:

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2t\\ \beta_1+\beta_2t\\ \gamma_1+\gamma_2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2t-\beta_1-\beta_2t+\gamma_1+\gamma_2t\\ \alpha_1+\alpha_2t+\beta_1+\beta_2t-\gamma_1-\gamma_2t\\ -\beta_1-\beta_2t+2\gamma_1+2\gamma_2t\end{pmatrix}.$$

Чтобы векторная функция $\tilde{\vec{r}}(t)$ удовлетворяла условию, нужно, чтобы выполнялось равенство матриц:

$$\begin{pmatrix}\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2t\\ \beta_2+\beta_1+\beta_2t\\ \gamma_2+\gamma_1+\gamma_2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2t-\beta_1-\beta_2t+\gamma_1+\gamma_2t\\ \alpha_1+\alpha_2t+\beta_1+\beta_2t-\gamma_1-\gamma_2t\\ -\beta_1-\beta_2t+2\gamma_1+2\gamma_2t\end{pmatrix}.$$

Равенство будет выполняться, если коэффициенты при одинаковых степенях в соответствующих элементах этих столбцов равны, то есть получим линейную однородную систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1-\beta_1+\gamma_1,\\ \alpha_2=\alpha_2-\beta_2+\gamma_2,\\ \beta_1+\beta_2=\alpha_1+\beta_1-\gamma_1,\\ \beta_2=\alpha_2+\beta_2-\gamma_2,\\ \gamma_1+\gamma_2=-\beta_1+2\gamma_1,\\ \gamma_2=-\beta_2+2\gamma_2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2+\beta_1-\gamma_1=0,\\ \beta_2-\gamma_2=0,\\ \alpha_1-\beta_2-\gamma_1=0,\\ \alpha_2-\gamma_2=0,\\ \beta_1-\gamma_1+\gamma_2=0,\\ \beta_2-\gamma_2=0.\end{cases}$$

Чтобы найти общее решение полученной системы, запишем матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатой форме. Можно, конечно, сделать это вручную, но мы используем Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix}0&1&1&0&-1&0\\0&0&0&1&0&-1\\1&0&0&-1&-1&0\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&-1&1\\0&0&0&1&0&-1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&-1\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&-1&1\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Из полученной ступенчатой формы матрицы видно, что в качестве свободных переменных можно выбрать γ_1 и γ_2. Полагая $\gamma_1=C_2, \gamma_2=C_3$, выразим остальные базисные неизвестные:

$\alpha_1=C_2+C_3, \alpha_2=C_3, \beta_1=C_2-C_3, \beta_2=C_3$. Таким образом,

$\tilde{\vec{r}}(t)=\left(\begin{pmatrix}C_2+C_3\\C_2-C_3\\C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_3\\C_3\\C_3\end{pmatrix}t\right)e^t$, и общее решение данной системы

$$\vec{r}(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^t+C_3\begin{pmatrix}1+t\\-1+t\\t\end{pmatrix}e^t.$$

Нам осталось рассмотреть 2 случая: когда характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни и когда корень имеет кратность 3. Для случая кратного корня процедура отыскания решения схожа с той, что мы проделали в предыдущем примере, только решение надо сразу искать в виде: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 t+\alpha_3 t^2\\ \beta_1+\beta_2 t+\beta_3 t^2\\ \gamma_1+\gamma_2 t+\gamma_3 t^2\end{pmatrix}e^{\lambda t}$. В процессе решения возникнет однородная линейная система из девяти уравнений с девятью неизвестными, ранг матрицы которой должен равняться шести. То есть будет возможность выбрать 3 свободных переменных, а остальные 6 базисных неизвестных однозначно выражаются через них.

И, наконец, ситуацию, когда имеются комплексно-сопряженные корни, рассмотрим на примере системы второго порядка.

Пример 4.4. Решить систему дифференциальных уравнений, заданную в векторной форме $\dot{\vec{r}}=A\vec{r}$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные числа матрицы:

$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)^2+9=0\Rightarrow \quad \lambda-1=\pm 3i$. Получаем два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2}=1\pm 3i$. Можно решить систему так, как мы это делали в случае различных вещественных собственных чисел, но тогда у нас получатся комплекснозначные собственные векторы, и мы найдем лишь комплексное решение данной системы, что нас не устраивает. Чтобы найти вещественное решение, можно за ФСР принять вещественную и мнимую части комплекснозначной векторной функции $\vec{\gamma}e^{\lambda t}$, где $\vec{\gamma}-$ комплексный собственный вектор матрицы системы, отвечающий одному из двух комплексных собственных чисел λ.

Возьмем, например, $\lambda=1+3i$ и найдем соответствующий собственный вектор. Для этого надо найти какое-нибудь ненулевое решение однородной линейной системы:

$$\begin{cases}\left(1-(1+3i)\right)\gamma_1-3\gamma_2=0,\\ 3\gamma_1+\left(1-(1+3i)\right)\gamma_2=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3i\gamma_1+3\gamma_2=0,\\ 3\gamma_1-3i\gamma_2=0.\end{cases}$$

Очевидным решением данной системы будет $\gamma_1=i,\gamma_2=1$. Составим векторную функцию $\tilde{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}e^{(1+3i)t}$ и найдем ее вещественную и мнимую части.

$$\tilde{\vec r}(t)=\begin{pmatrix} i\\ 1\end{pmatrix}e^{(1+3i)t}=\begin{pmatrix} i\\ 1\end{pmatrix}(\cos 3t+i\sin 3t)e^{t}=\begin{pmatrix} -\sin 3t+i\cos 3t\\ \cos 3t+i\sin 3t\end{pmatrix}e^{t}=\begin{pmatrix} -\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix}e^{t}+i\begin{pmatrix} \cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}e^{t}$$

Тогда $\operatorname{Re}\tilde{\vec r}(t)=\begin{pmatrix} -\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix}e^{t}=\vec r_1(t)$, $\operatorname{Im}\tilde{\vec r}(t)=\begin{pmatrix} \cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}e^{t}=\vec r_2(t)-$ элементы ФСР данной системы. Осталось записать общее решение:

$$\vec r(t)=C_1\begin{pmatrix} -\sin 3t\\ \cos 3t\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix} \cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}e^{t}.$$

§ 5. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Перейдем теперь к изучению линейных неоднородных систем третьего порядка (ЛНСДУ3П) с постоянными коэффициентами, то есть к системам вида:

$$\begin{cases} \dot x=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+f_1(t),\\ \dot y=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+f_2(t),\\ \dot z=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+f_3(t),\end{cases} \tag{5.1}$$

где $f_i(t)-$ некоторые функции, непрерывные на (α,β).

Пусть, как и прежде $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-$ квадратная числовая матрица, $\vec r(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$, $\dot{\vec r}(t)=\begin{pmatrix} \dot x(t)\\ \dot y(t)\\ \dot z(t)\end{pmatrix}$. Введем в рассмотрение также векторную функцию $\vec f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ f_3(t)\end{pmatrix}$. Тогда систему (5.1) можно переписать в векторной форме:

$$\dot{\vec r}=A\vec r+\vec f(t) \tag{5.2}$$

Справедлива следующая теорема о структуре общего решения системы (5.1).

Теорема 5.1. (Структура общего решения ЛНСДУ)

Общее решение неоднородной системы (5.1) *представляется в виде суммы:*

$$\vec{r}_{\text{о.н.}}(t) = \vec{r}_{\text{о.о.}} + \vec{r}_{\text{ч.н.}}(t), \text{ или } \vec{r}_{\text{о.н.}}(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{\text{ч.н.}}(t),$$

где $\vec{r}_{\text{о.о.}}$ – общее решение однородной системы, $\{\vec{r}_i(t)\}_{i=1}^{3}$ – *фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, а* $\vec{r}_{\text{ч.н.}}(t)$ – *какое-нибудь частное решение неоднородной системы* (5.1).

Доказательство. Введем в рассмотрение линейный оператор $L[\vec{r}\,] = \dot{\vec{r}} - A\vec{r}$, тогда систему (5.1) или уравнение (5.2) можно переписать в виде:

$$L[\vec{r}\,] = \vec{f}\,.$$

Проверим, что $L[\vec{r}_{\text{о.н.}}] = \vec{f}$:

$$L\big[\vec{r}_{\text{о.н.}}(t)\big] = L\left[\sum_{i=1}^{3} C_i \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{\text{ч.н.}}(t)\right] = L\left[\sum_{i=1}^{3} C_i \vec{r}_i(t)\right] + L\big[\vec{r}_{\text{ч.н.}}\big] = \vec{0} + \vec{f}(t),$$

то есть $\vec{r}_{\text{о.н.}}(t)$ является решением системы (5.1) при любых значениях произвольных постоянных. Покажем теперь, что любое решение системы может быть представлено в таком виде.

Пусть $\vec{z}(t)$ - какое-либо решение системы (5.1), тогда

$$L[\vec{z} - \vec{r}_{\text{ч.н.}}] = L[\vec{z}\,] - L[\vec{r}_{\text{ч.н.}}] = \vec{f} - \vec{f} = \vec{0},$$

но тогда $\vec{z} - \vec{r}_{\text{ч.н.}}$ – некоторое решение однородной системы, а мы знаем, что это решение представляется в виде линейной комбинации элементов ФСР, то есть $\vec{z} - \vec{r}_{\text{ч.н.}} = \sum_{i=1}^{3} C_i \vec{r}_i(t)$. Что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к способам, с помощью которых удается найти частное решение неоднородной системы. Начнем с ***метода вариации произвольных постоянных.*** Этот метод называется также методом Лагранжа. Покажем, что если нам известна фундаментальная система решений соответствующей однородной системы $\{\vec{r}_i(t)\}_{i=1}^{3}$ и, соответственно, общее решение однородной системы $\vec{r}_{\text{о.о.}}(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i \vec{r}_i(t)$, то частное решение неоднородной системы можно искать в виде: $\vec{r}_{\text{ч.н.}}(t)=\sum_{i=1}^{3}C_i(t)\vec{r}_i(t)$. При этом функции $C_i(t)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases}\dot{C}_1(t)x_1(t)+\dot{C}_2(t)x_2(t)+\dot{C}_3(t)x_3(t)=f_1(t),\\ \dot{C}_1(t)y_1(t)+\dot{C}_2(t)y_2(t)+\dot{C}_3(t)y_3(t)=f_2(t),\\ \dot{C}_1(t)z_1(t)+\dot{C}_2(t)z_2(t)+\dot{C}_3(t)z_3(t)=f_3(t).\end{cases}\tag{5.3}$$

Так как определитель Δ системы (5.3) является определителем Вронского для ФСР однородной системы, то $\Delta=W\left[\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\vec{r}_3(t)\right]\neq 0$ при любых значениях $t\in(\alpha,\beta)$. А тогда при любых $t\in(\alpha,\beta)$ система (5.3) имеет единственное решение, при этом

$$L\left[C_1(t)\vec{r}_1(t)+C_2(t)\vec{r}(t)_2+C_1(t)\vec{r}(t)_3\right]=\underline{\underline{\dot{C}_1(t)\vec{r}_1(t)}}+C_1(t)\dot{\vec{r}}_1(t)+\underline{\underline{\dot{C}_2(t)\vec{r}_2(t)}}+C_2(t)\dot{\vec{r}}_2(t)+$$

$$+\underline{\underline{\dot{C}_3(t)\vec{r}_3(t)}}+C_3(t)\dot{\vec{r}}_3(t)-C_1(t)A\vec{r}_1(t)-C_2(t)A\vec{r}_2(t)-C_3(t)A\vec{r}_3(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\dot{C}_i(t)\vec{r}_i(t)+\sum_{i=1}^{3}C_i(t)\left(\dot{\vec{r}}_i(t)-A\vec{r}_i(t)\right)=\vec{f}(t)+\vec{0}.$$

Приведем пример применения метода вариации в случае системы второго порядка.

Пример 5.1. Решить систему дифференциальных уравнений: $\begin{cases}\dot{x}=y-\operatorname{tg}^2 t-1,\\ \dot{y}=-x+\operatorname{tg} t.\end{cases}$

Решение.

1. Решим сначала однородную систему, матрицей которой является матрица $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Найдем собственные числа этой матрицы, то есть решим характеристическое уравнение:

$$\det\left(A-\lambda E\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2+1=0.$$

Уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня: $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$. Выберем один из них, например, $\lambda_1=i$, и найдем соответствующий собственный вектор, то есть ненулевое решение однородной линейной системы, матрица которой $A-\lambda_1 E$:

$$\begin{cases} -i\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что ненулевым решением данной системы является, например, вектор $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Чтобы найти фундаментальную систему решений однородной системы, выделим вещественную и мнимую части комплекснозначной векторной функции $e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ i\cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

а тогда за две функции из ФСР можно принять:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы $\vec{r}_{\text{о.о.}}(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

2. Чтобы найти частное решение неоднородной системы, воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Ищем частное решение неоднородной системы в виде:

$$\vec{r}_{\text{ч.н.}}(t) = C_1(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

причем производные неизвестных функций должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t)\cos t + \dot{C}_2(t)\sin t = \operatorname{tg}^2 t + 1, \\ -\dot{C}_1(t)\sin t + \dot{C}_2(t)\cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, значит, система имеет единственное решение:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t} \cdot \cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t}{\cos t} = -\cos t,$$

$$\dot{C}_2(t)=\frac{\begin{vmatrix}\cos t & \mathrm{tg}^2 t-1\\ -\sin t & \mathrm{tg}\, t\end{vmatrix}}{\Delta}=\sin t+\sin t\cdot \mathrm{tg}^2 t-\sin t=\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

Чтобы найти искомые функции, нам остается взять два интеграла, а точнее, достаточно указать по одной первообразной для каждой полученной функции, так как нам нужно только по одной функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$.

$$C_1(t)=-\int \cos t\, dt=-\sin t,\ C_2(t)=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt=-\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}d\cos t=\frac{1}{\cos t}+\cos t.$$

Осталось записать ответ:

$$\vec{r}_{\text{о.н.}}=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{\cos t}+\cos t\right)\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Если расписать покомпонентно, то получим:

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\sin t\cos t+\mathrm{tg}\, t+\sin t\cos t=C_1\cos t+C_2\sin t+\mathrm{tg}\, t,$$
$$y(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t+\sin^2 t+1+\cos^2 t=-C_1\sin t+C_2\cos t+2.$$

В случае, когда правые части системы являются функциями специального вида, то есть функциями вида $f_i(t)=e^{\alpha t}\left(P_{n_i}(t)\cos\beta t+Q_{m_i}(t)\sin\beta t\right)$, где $P_{n_i}(t), Q_{m_i}(t)-$ многочлены степеней n_i и m_i соответственно, то частное решение неоднородной системы можно искать в виде $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=e^{\alpha t}t^k\begin{pmatrix}T_N^{(1)}(t)\cos\beta t+S_N^{(1)}(t)\cos\beta t\\ T_N^{(2)}(t)\cos\beta t+S_N^{(2)}(t)\cos\beta t\\ T_N^{(3)}(t)\cos\beta t+S_N^{(3)}(t)\cos\beta t\end{pmatrix}$, где $T_N^{(i)}(t), S_N^{(i)}(t)-$ многочлены степени N с неизвестными коэффициентами, $N=\max\{n_i,m_i\}$, $k=0$, если число $\gamma=\alpha+\beta i$ не является собственным числом матрицы A, в противном случае $k-$ кратность этого собственного числа, то есть кратность корня $\gamma=\alpha+\beta i$ характеристического уравнения.

Пример 5.2. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\dot{x}=y-5\text{cost},\\ \dot{y}=2x+y.\end{cases}$

Решение.

1. Решим однородную систему, матрицей которой является матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Найдем собственные числа этой матрицы, то есть решим характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=-1,\\ \lambda=2.\end{array}\right.$$

Далее найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным числам. Для $\lambda_1=-1$ ищем ненулевое решение системы $\begin{cases}\gamma_1+\gamma_2=0,\\ 2\gamma_1+2\gamma_2=0.\end{cases}$ За собственный вектор достаточно взять $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, тогда первым элементом ФСР будет векторная функция $\vec{r}_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

Аналогично, для $\lambda_2=2$ решаем систему $\begin{cases}-2\gamma_1+\gamma_2=0,\\ 2\gamma_1-\gamma_2=0,\end{cases}$ ненулевым решением которой является, например, вектор $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. После чего получим второй элемент ФСР $\vec{r}_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. И, окончательно, $\vec{r}_{\text{о.о.}}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-t}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{2t}$.

2. Найдем теперь частное решение системы, используя метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим правую часть системы $\vec{F}(t)=\begin{pmatrix}-5\cos t\\ 0\end{pmatrix}$ и определим нужные числа α,β,N,γ,k. Имеем: $\alpha=0,\ \beta=1,\ N=0,\ \gamma=i,\ k=0.$ Это означает, что частное решение можно искать в виде $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\cos t+B_1\sin t\\ A_2\cos t+B_2\sin t\end{pmatrix}$.Подставим данную векторную функцию в систему уравнений.

Вычислим производную векторной функции $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A_1\sin t+B_1\cos t\\ -A_2\sin t+B_2\cos t\end{pmatrix}$,

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\cos t+B_1\sin t\\ A_2\cos t+B_2\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2\cos t+B_2\sin t\\ 2(A_1\cos t+B_1\sin t)+A_2\cos t+B_2\sin t\end{pmatrix}.$$

Получаем, что данная функция будет являться частным решением неоднородной системы, если равны матрицы:

$$\begin{pmatrix} -A_1\sin t + B_1\cos t \\ -A_2\sin t + B_2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2\cos t + B_2\sin t \\ (2A_1 + A_2)\cos t + (2B_1 + B_2)\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах соответствующих элементов матриц, получаем линейную систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} B_1 = A_2 - 5, \\ -A_1 = B_2, \\ B_2 = 2A_1 + A_2, \\ -A_2 = 2B_1 + B_2. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Расширенная матрица системы имеет вид: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Приведем ее к виду $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ (сделайте это самостоятельно) и получим решение системы: $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Окончательно получаем: $\vec{r}_{\text{о.н.}} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}$. Или, если расписать покоординатно, то $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \cos t - 2\sin t$, $y(t) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} + 3\cos t + \sin t$.