§4. Моменты. Центры масс плоских фигур

Моментом инерции относительно оси l материальной точки M, имеющей массу m и отстоящей от оси l на расстояние d, называется величина $J_l = md^2$.

Моментом инерции относительно оси l *системы* n *материальных точек* с массами $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ называется сумма

$$J_l = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2 ,$$

где $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$ – расстояния точек до оси l. В случае сплошной массы, распределенной в плоской области, вместо суммы должен быть соответствующий интеграл.

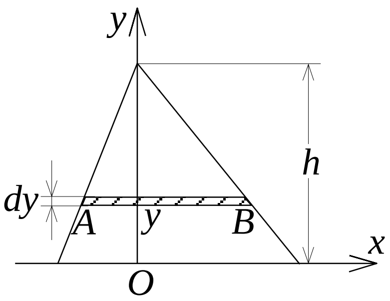

Рис. 3.1. Иллюстрация к примеру 4.1

Пример 4.1. Найти момент инерции однородной пластинки, имеющей форму треугольника с основанием a и высотой h, относительно его основания. Будем предполагать пластинку однородной, так что её поверхностная плотность равна ρ (т. е. масса, приходящаяся на единицу площади) будет постоянной и, следовательно, $m = \rho S$, где S – площадь пластинки.

▶ Основание треугольника примем за ось Ox, а его высоту за ось Oy (рис. 3.1). Разобьем треугольник на бесконечно тонкие горизонтальные полоски ширины dy, играющие роль элементарных масс $dm = \rho\, dS$.

Используя подобие треугольников, получаем:

$$\frac{AB}{a} = \frac{h-y}{h}. \qquad (4.1)$$

Площадь dS бесконечно тонкой горизонтальной полоски ширины dy равна $dS = AB\,dy$ $\Rightarrow\ AB = \dfrac{dS}{dy}$, тогда из (4.1) следует

$$\frac{dS}{a\,dy} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{a}{h}(h-y)\,dy,$$

откуда

$$dJ_x = y^2 \rho\, dS \quad \Rightarrow \quad dJ_x = \frac{a}{h}\rho y^2 (h-y)\,dy.$$

Следовательно,

$$J_x = \rho \frac{a}{h}\int_0^h y^2 (h-y)\,dy = \rho \frac{a}{h}\left(h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^h = \frac{1}{12}\rho a h^3. \ ◀$$

Статическим моментом относительно оси l материальной точки M, имеющей массу m и отклонение x (с учетом знака) от оси l, называется величина $M_l = mx$.

Статическим моментом относительно оси l *системы* n *материальных точек* с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, лежащих в одной плоскости с осью l и имеющих отклонения $x_1, x_2, \dots, x_n$ (с учетом знаков) от этой оси (рис. 4.2), называется сумма

$$M_l = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k . \tag{4.2}$$

Если массы непрерывно заполняют фигуру плоскости xOy, то вместо сумм (4.2) должен быть соответствующий интеграл.

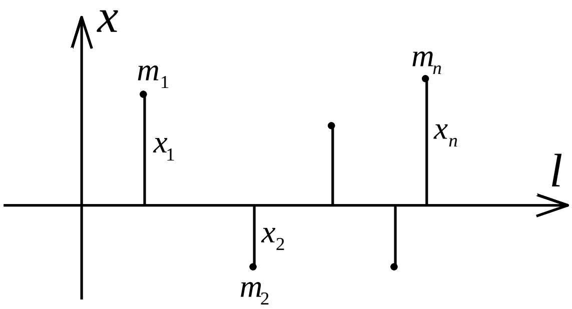

Рис. 4.2. К вычислению статического момента системы материальных точек

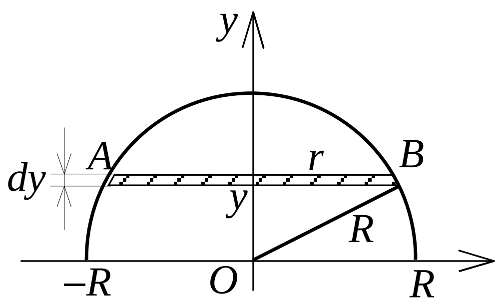

Рис. 4.3. Иллюстрация к примеру 4.2

Пример 4.2. Найти статический момент однородной пластинки, имеющей форму полукруга радиуса R и плотность ρ, относительно основания полукруга.

▶ Основание полукруга поместим на ось Ox, а за ось Oy примем перпендикуляр к оси Ox, проходящий через центр полукруга (рис. 4.3). Разобьем полукруг на бесконечно тонкие горизонтальные полоски ширины dy. Элементарный статический момент dM_x этой бесконечно тонкой полоски относительно оси Ox будет равен $dM_x = \rho y\, dm = \rho y \cdot AB\, dy \;\Rightarrow\; dM_x = \rho y 2r\, dy$.

Из треугольника (рис. 4.3) по теореме Пифагора находим $r = \sqrt{R^2 - y^2}$. Следовательно,

$$dM_x = 2\rho y \sqrt{R^2 - y^2}\, dy . \tag{4.3}$$

Интегрируя равенство (4.3) по y, получим:

$$M_x = 2\rho \int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = -\frac{2}{3}\rho \sqrt{(R^2 - y^2)^3}\Big|_0^R = \frac{2R^3}{3}\rho . \blacktriangleleft$$

Центр масс. Координаты центра масс $C(x^*, y^*)$ плоской фигуры массы m вычисляются по формулам

$$x^* = \frac{M_y}{m}, \quad y^* = \frac{M_x}{m}, \tag{4.4}$$

где M_y и M_x – статические моменты плоской фигуры массы m.

Пример 4.3. Найти координаты центра масс однородной пластинки, рассмотренной в предыдущем примере.

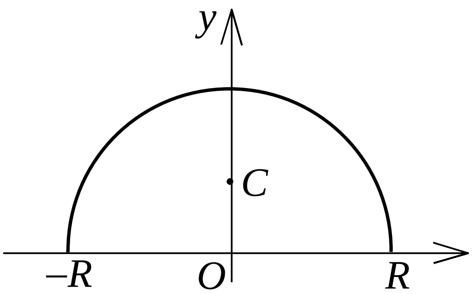

Рис. 4.4. Иллюстрация к примеру 4.3

▶ Так как пластинка предполагается однородной (плотность ρ), то в силу симметрии пластинки её центр масс $C(x^*, y^*)$ должен лежать на оси Oy, т. е. $x^* = 0$.

Масса m пластинки равна

$$m = \rho S = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho , \qquad (4.5)$$

а так как из предыдущего примера известно, что $M_x = \frac{2R^3}{3}\rho$, то в силу формулы (4.4) будем иметь $y^* = \frac{M_x}{m} = \frac{2\rho R^3/3}{\pi\rho R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$. Итак, $C\left(0, 4R/3\pi\right)$ – центр масс однородного полукруга радиуса R. ◀