§3. Признаки сходимости для интегралов с бесконечными пределами от неотрицательных функций

Рассмотрим два признака применительно к несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом. Аналогичные признаки имеют место и для интегралов с бесконечным нижним пределом.

Теорема 3.1 (*признак сравнения*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и неотрицательны на промежутке $[a,+\infty)$. Пусть далее существует такое число $A,\ A \geq a$, что при $x \geq A$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq g(x). \tag{3.1}$$

Тогда:

1) если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$; при этом

$$\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx \leq \int\limits_A^{+\infty} g(x)dx; \tag{3.2}$$

2) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

► 1) Пусть интеграл $J = \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда при $b > A$ в силу неравенства (3.1) имеют место неравенства

$$\int\limits_A^{b} f(x)dx \leq \int\limits_A^{b} g(x)dx \leq \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = J. \tag{$*$}$$

Функция $\Phi(b) = \int\limits_A^{b} f(x)dx$ возрастает (в широком смысле) и ограничена сверху, поэтому она имеет конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_A^{b} f(x)dx = \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$, т. е. этот интеграл
сходится, следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{A} f(x)dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$. Неравенство (3.2) следует из неравенств ($*$) предельным переходом при $b \to +\infty$.

2) Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ также расходится, ибо если бы он сходился, то по первой части теоремы сходился бы и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, что противоречит условию. ◄

Замечание 3.1. Формула (3.2) дает оценку интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ при $A = a$. Эта формула полезна, если интеграл от функции $f(x)$ неберущийся, а интеграл от функции $g(x)$ легко взять.

Пример 3.1. Показать, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится и найти его оценку сверху.

►При $x \geq 1$ выполняются неравенства $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Далее, интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$ – сходится. По признаку сравнения $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ тоже сходится.

Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ может быть оценен сверху на основании неравенства (3.2): $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_{1}^{+\infty} = \dfrac{1}{e}$.◄

Пример 3.1а. Установить сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{1+x^2} dx$ и оценить его сверху.

► $|\sin x| \leq 1$, поэтому $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{1+x^2} dx \leq \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$. ◄

Пример 3.2. Показать, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{2+\cos x}{1+\sqrt{x}} dx$ расходится.

►Действительно, на промежутке интегрирования выполняются неравенства $2 + \cos x \geq 1$; $1 + \sqrt{x} \leq 1 + x$, следовательно, $\dfrac{2+\cos x}{1+\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{1+x}$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_{1}^{+\infty} = +\infty$ – расходится. По признаку сравнения исходный интеграл тоже расходится. ◄

Теорема 3.2 (*предельный признак сравнения*). Пусть для положительных, определенных в промежутке $[a, +\infty)$, функций $f(x)$ и $g(x)$ существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ k \neq 0,\ k \neq \infty. \qquad (3.3)$$

Тогда оба интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся совместно (одновременно).

►Из условий теоремы следует, что $k > 0$. Возьмем произвольное положительное ε такое, что $k - \varepsilon > 0$. По определению предела существует такое число A, $A \geq a$, что при $x \geq A$ выполняются неравенства

$$k-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<k+\varepsilon. \qquad (**)$$

1) Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty}(k+\varepsilon)g(x)dx$ также сходится. Из правого неравенства $(**)$ находим, что $f(x)<(k+\varepsilon)g(x)$ при $x\geq A$. По признаку сравнения (теорема 3.1) заключаем: интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty}(k-\varepsilon)g(x)x$ также расходится. Из левого неравенства $(**)$ находим, что $f(x)>(k-\varepsilon)g(x)$. По признаку сравнения (теорема 3.1) заключаем: интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. ◄

Для применения предельного признака сравнения необходим набор интегралов, сходимость или расходимость которых известна заранее. Интеграл с параметром p

$$J=\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}(a>0) \qquad (3.4)$$

дает такой набор при различных значениях параметра p. Интеграл (3.4) сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

► Пусть $p=1$; $J=\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$. Интеграл расходится.

Пусть $p<1$; $J=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^{+\infty}=+\infty$, так как $1-p>0$. Интеграл расходится.

Пусть $p>1$; $J=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^{+\infty}=0-\frac{a^{1-p}}{1-p}=\frac{a^{1-p}}{p-1}$; $p-1>0$. Интеграл сходится. ◄

Пример 3.3. Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$ сходится.

►Имеем: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}=\frac{x^{1/2}}{x^4\sqrt{1+1/x^8}}\sim\frac{1}{x^{7/2}}$ при $x\to+\infty$. Привлекаем для сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}$. Здесь $p=\frac{7}{2}>1$, значит, этот интеграл сходится. Эквивалентность функций $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}$ и $g(x)=\frac{1}{x^{7/2}}$ при $x\to+\infty$ означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. По предельному признаку сравнения заключаем, что сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$, поэтому сходится и исходный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$ (теорема 2.1). ◄

Пример 3.4. Показать, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ расходится.

► $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{1/2}\sqrt{1+1/x}}{x\sqrt{1+1/x^2}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ при $x \to +\infty$; интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ расходится ($p = \frac{1}{2} < 1$). По предельному признаку сравнения расходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$, следовательно, расходится и данный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.◄

Замечание 3.2. Предельный признак сравнения (теорема 3.2) может быть дополнен рассмотрением исключенных случаев в формуле (3.3). Если $k = 0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

Случай $k = \infty$ сводится к случаю $k = 0$ для обратного отношения $\frac{g(x)}{f(x)}$.

► Рассмотрим случай $k = 0$. Обращаемся к доказательству первой части теоремы 3.2. Полученное там неравенство $f(x) < (k+\varepsilon)g(x)$ при $x \geq A$ сводится к неравенству $f(x) < \varepsilon g(x)$. Из него на основании признака сравнения (теорема 3.1) заключаем, что если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$, а тем самым и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varepsilon g(x)dx$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится,

то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varepsilon g(x)dx$, а потому и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$. ◄

Пример 3.5. Исследовать сходимость интеграла $J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^x}dx$.

► Сравним интеграл J со сходящимся интегралом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ ($p = 2 > 1$). По правилу Лопиталя вычисляем предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} : \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{e^x} = 0$. По замечанию 3.2 интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} dx$ сходится, но тогда сходится и интеграл J по теореме 2.1. Дважды интегрируя по частям, можем вычислить интеграл точно: $J = 2$. ◄