§5. Достаточный признак существования предела числовой последовательности. Число е. Натуральные логарифмы.

Теорема 5.1 (*теорема Вейерштрасса – достаточный признак существования предела числовой последовательности*).

Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс К., 1815-1897, немецкий математик) является типичной теоремой существования, т.е. она гарантирует существование предела последовательности, но не даёт способа его отыскания. Доказательство этой теоремы приведено, например, в [1].

Теорема 5.2. Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится при $n\to\infty$.

Предел этой последовательности по предложению Л. Эйлера (1707 – 1783, математик и механик, родился в Швейцарии, работал в России) принято обозначать буквой *e*. Можно доказать [10], что *e* – число иррациональное. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{5.1}$$

►Введём обозначения $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\tilde{x}_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажем, что последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ является монотонно убывающей и ограниченной. Имеем

$$\frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right). \tag{5.2}$$

Рассмотрим неравенство Бернулли (§9, глава 1):

$$(1+a)^{n+1}\ge 1+(n+1)a,\quad a\ge -1,\ \forall n\in \boldsymbol{N}. \tag{5.3}$$

При $a=\frac{1}{(n+1)^2}$ из (5.3) имеем: $\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\ge 1+\frac{1}{n+1}$. Заменим в (5.2) сомножитель $1+\frac{1}{n+1}$ на большее выражение $\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$, получим:

$$\frac{\widetilde{x}_{n+1}}{\widetilde{x}_n} \le \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^4}\right)^{n+1} < 1 \text{ для } \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

Итак, последовательность $\widetilde{x}_n$ монотонно убывает. Её ограниченность следует из неравенства $0 < \widetilde{x}_n \le \widetilde{x}_1 = 4$, верного для $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$ (замечание 1.1). Но тогда по теореме Вейерштрасса (теорема 5.1) она имеет предел. Введём обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = e$. Поскольку $x_n = \dfrac{\widetilde{x}_n}{1+1/n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = e$, ибо $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n) = 1$ (теорема 3.5).◄

Замечание 5.1. Число *e* служит основанием *натуральных логарифмов*: $\ln a = \log_e a$. Для показательной функции $y = e^x$ и логарифмической функции $y = \ln x$ многие формулы из последующих разделов имеют более простой вид, чем для функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ с основанием $a \ne e$.