§2. Теорема о разложении правильной рациональной алгебраической дроби на простейшие дроби

Пусть $P_n(x)$, $n \ge 1$, – вещественный многочлен степени n, старший коэффициент которого $p_0 = 1$, и пусть получено его разложение на вещественные множители:

$$\begin{gathered} P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_l)^{k_l} \times \\ \times (x^2 + b_1 x + c_1)^{q_1}(x^2 + b_2 x + c_2)^{q_2} \ldots (x^2 + b_s x + c_s)^{q_s} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Таким образом, $P_n(x)$ имеет l попарно различных вещественных корней x_j кратности k_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, и s пар комплексных сопряженных корней z_j, $\bar{z}_j$ кратности q_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, при этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2q_1 + 2q_2 + \ldots + 2q_s = n$.

Теорема 2.1. Пусть задана правильная рациональная дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $m < n$, знаменатель $P_n(x)$ которой представлен разложением (2.1). Существуют наборы вещественных чисел $\{A_{j\alpha}\}$, где $j = 1, 2, \ldots, l$, и при каждом j индекс $\alpha = 1, 2, \ldots, k_j$, а также наборы $\{B_{j\alpha}\}$ и $\{C_{j\alpha}\}$, где $j = 1, 2, \ldots, s$, и при каждом j индекс $\alpha = 1, 2, \ldots, q_j$, такие, что при всех x, $x \in \mathbf{R}$, $x \ne x_j$, справедливо равенство:

$$\begin{gathered} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{A_{l1}}{x - x_l} + \frac{A_{l2}}{(x - x_l)^2} + \ldots + \frac{A_{lk_l}}{(x - x_l)^{k_l}} + \\ + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1q_1}x + C_{1q_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{q_1}} + \\ + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2 + b_2 x + c_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^2} + \ldots + \frac{B_{2q_2}x + C_{2q_2}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^{q_2}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + b_s x + c_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2 + b_s x + c_s)^2} + \ldots + \frac{B_{sq_s}x + C_{sq_s}}{(x^2 + b_s x + c_s)^{q_s}}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь каждому вещественному корню знаменателя $P_n(x)$ дроби соответствует строка (сумма) простейших дробей первого и второго вида с количеством слагаемых, равным кратности этого корня; каждой паре комплексно-сопряженных корней $P_n(x)$, т. е. каждому квадратному множителю в формуле (2.1), соответствует строка (сумма) простейших дробей третьего и четвертого вида с количеством слагаемых, равным кратности этих корней. Доказательство теоремы 2.1 приведено, например, в [1].

Пример 2.1. Получить разложение (2.2) для дроби $\dfrac{1}{P_5(x)}$, где $P_5(x) = z^5 + z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1$.

► Имеем (см. пример 3.1): $P_5(x) = (x+1)(x^2+1)^2$. Значит (см. (2.2)),

$$\frac{1}{P_5(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

где A, B, C, D, E – константы, значения которых предстоит найти. После приведения дробей в правой части к общему знаменателю получим:

$$\frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)}{P_5(x)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (B+C+D+E)x + A+C+E}{P_5(x)} = \frac{T_4(x)}{P_5(x)}$$

.

Приравняв коэффициенты $T_4(x)$ к соответствующим коэффициентам многочлена $Q_0(x) \equiv 1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ 2A+B+C+D=0, \\ B+C+D+E=0, \\ A+C+E=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем: $A = \dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{1}{4}$, $C = \dfrac{1}{4}$, $D = -\dfrac{1}{2}$, $E = \dfrac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{P_5(x)} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x-1}{4(x^2+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)^2}. ◄$$