Криволинейные интегралы II рода.

Основные формулы

Пусть дана дуга пространственной кусочно-гладкой кривой L, ограниченная

точками A и B (см. рис. 4.1), и определенные на ней непрерывные функции

$$P(x,y,z), \quad Q(x,y,z), \quad R(x,y,z) \; .$$

Дугу АВ разобьем точками $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, …., $M_n(x_n,y_n,z_n)$ на n элементарных

дуг $M_{i-1}M_i$ $(1,2,\dots.,n)$, где $M_0=A$, и $M_n=B$.

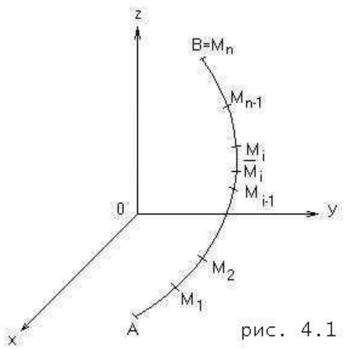


рис. 4.1

На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)$.

Пусть $\Delta x_i -$ проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Ох и $\Delta x_i = \; x_i - x_{i-1}$
$\Delta y_i -$ проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Оy и $\Delta y_i = \; y_i - y_{i-1}$
$\Delta z_i -$ проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Оz и $\Delta z_i = \; z_i - z_{i-1}$

Функция $I_1(\Delta x_i,\bar{M}_i)=\sum_{i=1}^{n}\bar{P}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)\Delta x_i$ – называется *интегральной суммой Римана по координате* x для функций $P(x,y,z)$.

Функция $I_2(\Delta y_i,\bar{M}_i)=\sum_{i=1}^{n}\bar{Q}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)\Delta y_i$ – называется *интегральной суммой Римана по координате* y для функций $Q(x,y,z)$.

Функция $I_3(\Delta z_i,\bar{M}_i)=\sum_{i=1}^{n}R_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)\Delta z_i$ – называется *интегральной суммой Римана по координате* z для функций $R(x,y,z)$.

Пусть $\lambda_1 = max\Delta x_i \; (i=1,2, \;\; ,n)$
$\lambda_2 = max\Delta y_i \; (i=1,2, \;\; ,n)$
$\lambda_3 = max\Delta z_i \; (i=1,2, \;\; ,n)$

$\int\limits_L P(x,y,z)dx = \lim\limits_{\lambda_1\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{P}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)\Delta x_i -$ *назвается криволинейным интегралом второго рода*

для функции $P(x,y,z)$ *по координате* x, взятым по кривой L в напрвлении от точки А к точке В

$$\int\limits_L Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{Q}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)\Delta y_i -$$ *назвается криволинейным интегралом второго рода для функции $Q(x,y,z)$ по координате y*, взятым по кривой L в напрвлении от точки А к точке В

$$\int\limits_L Q(x,y,z)dx = \lim_{\lambda_3\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{R}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i\,)\Delta x_i -$$ *назвается криволинейным интегралом второго типа*,

от функции $R(x,y,z)$ *по координате z*, взятым по кривой L в напрвлении от точки А к точке В

Криволиней интеграл второго рода общего вида

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

определяется равенством:

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_L P(x,y,z)dx + \int\limits_L Q(x,y,z)dy + \int\limits_L R(x,y,z)dz \quad (2.1)$$

Замечание (о физическом смысле криволинейного интеграла второго рода)

Криволинейный интеграл второго рода выражает работу силы $\bar{F}\{P,Q,R\}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L в напрвлении от точки А к точке В.

Основные свойства криволинейный интеграл второго рода

1)Криволинейный интеграл второго рода зависит от выбора направления обхода кривой, т.е. если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = -\int\limits_{L_{BA}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

2)Если $\mathrm{L_{AB}} = \mathrm{L_{AC}} \cup \mathrm{L_{CB}}$, т. е. кривая $\mathrm{L_{AB}}$ разбита точкой С на две части $\mathrm{L_{AC}}$ и $\mathrm{L_{CB}}$, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям:

$$\int\limits_{L_{AB}} = \int\limits_{L_{AC}} + \int\limits_{L_{CB}}$$

3) Кривлинейный интеграл по замкнутой кривой (обозначение $\oint$) не зависит от выбора начальной точки (зависит только от выбора напрвления обхода)

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

1) Если кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t); \;\; y = y(t); \;\; z = z(t)$$

и значению t_1 соответствует точка *A* , а значению t_2 - точка *B*, то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t))dt \qquad (2.2)$$

2) В частности, если плоская кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t); \;\; y = y(t)$$

и значению t_1 соответствует точка *A* , а значению t_2 - точка *B*, то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \; = \int_{t_1}^{t_2} (P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t))dt \qquad (2.3)$$

3) Если плоская кривая L_{AB} задана $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \; = \int_{a}^{b} (P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x))dx \qquad (2.4)$$

4) Если плоская кривая L_{AB} задана $x = x(y)$, $c \le y \le d$, то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \; = \int_{c}^{d} (P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y))dy \qquad (2.5)$$

5) Если плоская кривая L_{AB} задана в полярной системе координат ($x = \rho cos\varphi$; $y = \rho sin\varphi$):

$$\rho = \rho(\varphi) \, , \;\; \alpha \le \varphi \le \beta \, ,$$

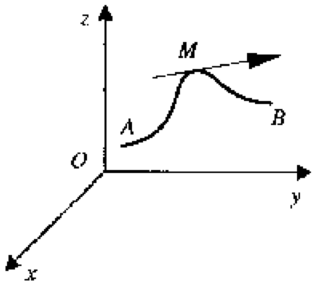
то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \; = \int_{\alpha}^{\beta} (P(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)x'(\varphi) + Q(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)\, y'(\varphi))d\varphi \qquad (2.6)$$

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

http://physmat.ru/integrals/

Рассмотрим направленную дугу пространственной линии с началом в точке *A* и концом в точке *B* (рис. 2). Касательную в любой точке *M* дуги *AB* будем также считать направленной прямой. Углы, образуемые касательной с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz*, обозначим соответственно через *α*, *β*, *γ*.



Вектор *dl=(dx,dy,dz)*, где *dl* - дифференциал длины дуги, направлен по касательной, поэтому

$$dx = \cos\alpha dl, \quad dy = \cos\beta dl, \quad dz = \cos\gamma dl.$$

Следовательно,

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl.$$

Эта формула выражает связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Если кривая *AB* лежит в плоскости *Oxy* (*z=0*), то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl,$$

где α - угол между касательной и осью *Ox*.

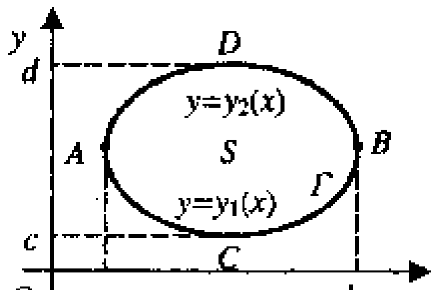
Формула Грина

Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$

в области S, то имеет место формула

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (2.7)$$

где $\Gamma -$ граница области S .Интегрирование вдоль кривой Γ производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой, область S остается слева)



Формула (2.7) - называется *формулой Грина.*

<u>*Замечание 1*</u>. Если обход конура *Г* совершается в отрицательном направлении, т.е. по часовой стрелке (область *S* остается справа), то формула Грина примет вид

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy.$$

Замечание 2. Формула Грина дает возможность вычислять площадь области с помощью криволинейного интеграла: если *P(x,y) = -y*, *Q(x,y) = x*, то

$$S = \iint\limits_S dS = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx,$$

где обход контура *Г* совершается против часовой стрелки.

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теорема. Если функции *P=P(x,y,z)*, *Q=Q(x,y,z)*, *R=R(x,y,z)* и их частные производные первого порядка непрерывны в некоторой замкнутой ограниченной поверхностно-односвязной области *V*, то следующие четыре утверждения равносильны.

- 1. Криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему внутри *V*, равен нулю:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

- 2. Криволинейный интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точку *A* и точку *B* области *V*:

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

- 3. Выражение *Pdx+Qdy+Rdz* является полным дифференциалом, т.е.

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU,$$

где *U=U(x,y,z)* - некоторая функция, определенная в области *V*.

- 4. Выполняются равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Замечание. Если криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} dU(x,y,z) = U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1).$$

Следовательно, для вычисления криволинейного интеграла достаточно найти функцию *U(x,y,z)*, и интеграл равен разности значений этой функции в конечной и начальной точке пути интегрирования.

Для нахождения функции U можно воспользоваться следующими формулами:

1) Для пространства $\mathbb{R}^2$:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C, \qquad (2.8)$$

где точка (x_0,y_0) любая из области определения функций *P(x,y)* , *Q(x,y).*

2) Для пространства $\mathbb{R}^3$:

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C, \quad (2.9)$$

где точка (x_0,y_0,z_0) любая из области определения функций *P(x,y,z)* , *Q(x,y,z), R(x,y,z)*

Примеры