§3. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0\,. \tag{3.1}$$

Разделим переменные, поделив уравнение (1) на $M_2(x)N_1(y)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0\,, \tag{3.2}$$

а (3.2) перепишем в виде равенства двух дифференциалов

$$d\left(\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx\right) + d\left(\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy\right) = 0\,,$$

откуда

$$d\left(\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy\right) = 0\,,$$

причем это равенство справедливо на интегральной кривой $y = y(x)$ и под знаком дифференциала стоит функция одной переменной x. Тогда, как было показано в §2, равенство

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C \tag{3.3}$$

есть общий интеграл уравнения (3.1). Равенство (3.3) определяет в неявном виде общее решение $y = y(x, C)$ уравнения (3.1).

Замечания.

3.1. Уравнение (3.1) с разделяющимися переменными может быть представлено в виде, разрешенном относительно производной $y' = \varphi(x)\psi(y)$.

3.2. Надо проверять, не потеряно ли решение при переходе от уравнения (3.1) к (3.2). Будем считать x независимой переменной, а y функцией, тогда корни уравнения $N_1(y) = 0$ могут быть решениями уравнения (3.1). Если окажется, что найденное решение $y = \text{const}$ не содержится в записи общего решения, то это есть особое решение.

Пример 3.1. Решить уравнение

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \tag{3.4}$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$ при $x = 0$.

▶ Запишем уравнение так: $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, откуда $\dfrac{dy}{3y^{2/3}} = dx$. Интегрируя, получаем общее решение:

$$y^{1/3} = x + C \quad \Rightarrow \quad y = (x + C)^3\,.$$

Надо рассмотреть еще функцию $y \equiv 0$, так как при делении на y мы считали $y \neq 0$. Как легко видеть, эта функция удовлетворяет исходному уравнению, но не может быть получена из общего решения ни при каком числовом значении C. Следовательно, $y \equiv 0$ есть особое решение.

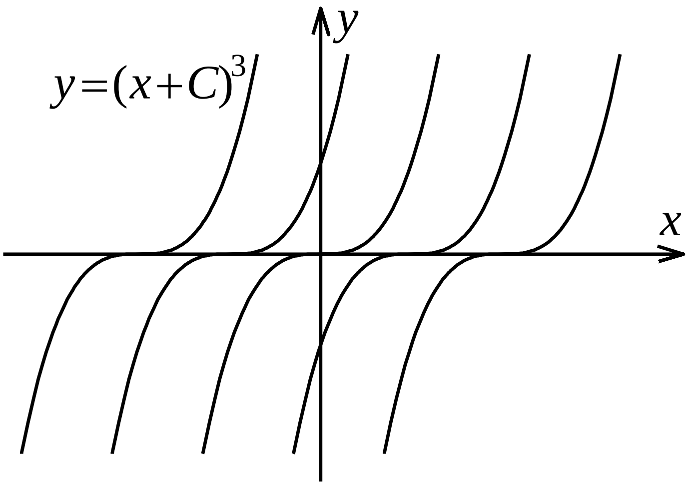

Рис. 3.1. Интегральные кривые уравнения (3.4)

Найдем частное решение из общего $y = (x + C)^3$, используя условие $y = 1$ при $x = 0$:

$$1 = (0 + C)^3 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение будет $y = (x + 1)^3$. На рис. 3.1. представлено семейство кривых исходного уравнения. Функция $y = 0$ будет особым решением данного уравнения. ◀

Пример 3.2. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\sqrt{y}}{x+1}dx - \frac{\sqrt{x}}{y+1}dy = 0. \tag{3.5}$$

▶ Разделив обе части уравнения (4) на $\sqrt{xy}$, будем иметь

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} - \frac{dy}{\sqrt{y}(y+1)} = 0.$$

Интегрируя это уравнения, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} - \int \frac{dy}{\sqrt{y}(y+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2}\int \frac{d\sqrt{y}}{1+y} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{y} = \operatorname{arctg} C$$

– общий интеграл уравнения (3.5), который может быть записан в виде (почему?)

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} = C. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{x} - C}{1 + C\sqrt{x}},$$

откуда находим общее решение уравнения (3.5):

$$y = \left(\frac{\sqrt{x} - C}{1 + C\sqrt{x}} \right)^2 . \qquad (3.7)$$

Надо рассмотреть еще функции $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$, так как при делении на $\sqrt{xy}$ мы считали $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Как легко видеть, эти функции удовлетворяют исходному уравнению (3.5), но не могут быть получены из общего решения ни при каком числовом значении C. Следовательно,

$$x \equiv 0 \text{ и } y \equiv 0$$

– особое решение уравнение (3.5). На рис. 3.2. представлено семейство интегральных кривых уравнения (3.5). ◀

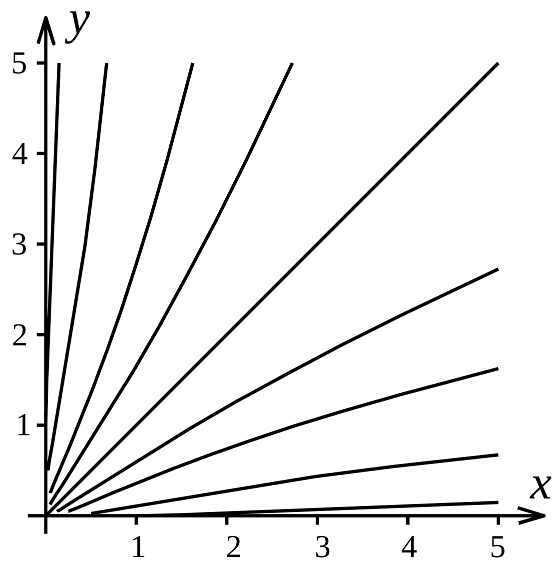

Рис. 3.2. Интегральные кривые (3.6) уравнения (3.5)