§7. Производные основных элементарных функций. Таблица производных

1. Производная показательной функции $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

►По определению производной (определение 1.1) имеем

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x \ln a} - 1)}{\Delta x}$$

($a^{\Delta x} = e^{\Delta x \ln a}$ в силу основного логарифмического тождества). Заменив разность $e^{\Delta x \ln a} - 1$ на эквивалентную ей при $\Delta x \to 0$ функцию $\Delta x \ln a$ (формула (7.6) и теорема 7.1 главы 3 раздела 4), приходим к равенству:

$$(a^x)' = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. ◄$$

2. Производная логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ x > 0.$$

►Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной по отношению к показательной функции $x = a^y$, $a > 0, a \neq 1$, $y \in \boldsymbol{R}$. В силу формулы (6.4) для производной обратной функции имеем: $y'_x = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$.◄

3. Производная степенной функции $y = x^a, a \in \boldsymbol{R}$.

$$(x^a)' = a x^{a-1}, \ x \in D(y).$$

Область определения $D(y)$ функции зависит от показателя степени a. Если a целое или дробное с нечётным знаменателем, то $D(y) = \boldsymbol{R} \setminus x = 0$, $x = 0$ принадлежит $D(y)$ только при $a > 0$. Во всех других случаях полагаем, что $D(y) = (0, +\infty)$.

►Пусть x, $x + \Delta x \in D(y)$. Из определения производной имеем: $(x^a)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^a - x^a}{\Delta x}$ или

$$(x^a)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^a\left[(1 + \Delta x/x)^a - 1\right]}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = a x^{a-1}.$$

Здесь бесконечно малую $(1 + \Delta x/x)^a - 1$ заменили на эквивалентную ей величину $a\dfrac{\Delta x}{x}$, при этом использована формула (7.8) из главы 3 раздела 4.◄

4. Производные тригонометрических функций.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \ \ x \neq \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

► $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x}$. Заменив множитель $\sin(\Delta x/2)$ в числителе на эквивалентную бесконечно малую, получим:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)\,.$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$ в силу непрерывности функции косинус (§5 глава 4 раздел 4), приходим к равенству: $(\sin x)'=\cos x$.

Имеем: $(\cos x)' = (\sin(x+\pi/2))' = \cos(x+\pi/2)\cdot(x+\pi/2)' = -\sin x$ (использовано правило дифференцирования сложной функции (см. (6.1)).

Обоснование формул для вычисления производных от тангенса и котангенса проведём, используя формулу для вычисления производной частного и формул для вычисления производных синуса и косинуса. Так,

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу для производной котангенса докажите самостоятельно.◄

5. Производные обратных тригонометрических функций.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x\in(-1,\,1),$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},\ (\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ \forall x\in \boldsymbol{R}.$$

►Докажем первую из этих формул. Функция $y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$, является обратной по отношению к функции $x=\sin y$ при $y\in[-\pi/2,\ \pi/2]$. В силу формулы (6.4) для производной обратной функции имеем: $y'_x = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y}$ при условии, что $\cos y \neq 0$, т.е. $y \neq \pm\,\pi/2$. Заметим, что из неравенства $y\neq\pm\,\pi/2$ следует, что $x\neq\pm1$. При $y\in(-\pi/2,\ \pi/2)$ справедливо равенство $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, поэтому для $y'_x = (\arcsin x)'$ получаем: $y'_x = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.◄

6. Производные гиперболических функций.

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x,\ (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x,\ \forall x\in\boldsymbol{R},$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},\ \forall x\in\boldsymbol{R},\ (\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x},\ \forall x\in\boldsymbol{R},\text{ кроме } x=0.$$

► $$(\mathrm{sh}x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}x.$$

Здесь использованы правила дифференцирования (§5), а также формула для вычисления производной сложной функции. Формулы для производной гиперболических косинуса, тангенса и котангенса докажите самостоятельно.◄

Сводка вышеприведённых формул для производных основных элементарных функций вместе с правилами дифференцирования, формулой для производной сложной функции составляет так называемую таблицу производных.

Таблица производных

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}, \quad x > 0, \ \forall a \in \boldsymbol{R}, \tag{7.1}$$

в частности,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \ a = -1, \tag{7.2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ a = \frac{1}{2}. \tag{7.3}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \boldsymbol{R}, \ a > 0, a \neq 1, \tag{7.4}$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x. \tag{7.5}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ x > 0, \ a > 0, a \neq 1, \tag{7.6}$$

в частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{7.7}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \ \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.8}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.9}$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \tag{7.10}$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \tag{7.11}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \ x \in (-1,\ 1). \tag{7.12}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1{,}1). \tag{7.13}$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \ \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.14}$$

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.15}$$

$$(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x, \ (\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x, \ x \in \boldsymbol{R}, \tag{7.16}$$

$$(\mathrm{th} x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \ \forall x \in \boldsymbol{R}, \ (\mathrm{cth} x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}, \ x \in \boldsymbol{R}, \text{ кроме } x = 0. \tag{7.17}$$

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции x.

$$(C)' = 0, \text{ где } C - \text{const}. \tag{7.18}$$

$$(Cu)' = Cu', \text{ где } C - \text{const}. \tag{7.19}$$

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{7.20}$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{7.21}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \qquad (7.22)$$

Если $y = y(u)$, а $u = u(x)$, то

$$y'_x(u(x)) = y'_u(u) \cdot u'_x(x). \qquad (7.23)$$

На основе формул для производных основных элементарных функций, входящих в эту таблицу, и правил дифференцирования можно прийти к следующему важному выводу:

производная любой элементарной функции также является элементарной функ-цией.

Замечание 7.1. Производные некоторых трансцентдентных элементарных функций являются алгебраическими функциями. Так, производные обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$, производная логарифмической функции $y = \log_a x$ – алгебраические функции, причём для трёх последних они являются дробно-рациональными. Это обстоятельство далее используется при вычислении интегралов.

Пример 7.1. Вычислить y'_x, если $y = \log_2 \sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$.

► $y'_x = (\log_2 \sqrt{x})' - (\frac{2}{x})' + (\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x})'$ (правило дифференцирования суммы, фор-мула (7.20)). Имеем $(\log_2 \sqrt{x})' = (\frac{1}{2} \log_2 x)' = \frac{1}{2} (\log_2 x)' = \frac{1}{2} (\log_2 x)' = \frac{1}{2x \ln 2}$ (использованы свойство логарифмов и формулы (7.19), (7.6)), $(\frac{2}{x})' = 2(\frac{1}{x})' = -\frac{2}{x^2}$ (формулы (7.19), (7.2)), $(\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x})' = \frac{3}{4} (x^{4/3})' = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ (формулы (7.19), (7.1)). Таким образом, приходим к равенству: $y'_x = \frac{1}{2x \ln 2} + \frac{2}{x^2} + \sqrt[3]{x}$.◄

Пример 7.2. Вычислить y'_x, если $y = e^x \mathrm{ctg} x$.

►Применим правило дифференцирования произведения (формула (7.21)): $y'_x = (e^x \mathrm{ctg} x)' = (e^x)' \mathrm{ctg} x + e^x (\mathrm{ctg} x)'$. Вычислив производные: $(e^x)'$ и $(\mathrm{ctg} x)'$ по

формулам (7.5) и (7.11), приходим к равенству: $y'_x = e^x \mathrm{ctg} x - e^x \sin^{-2} x$.◄

Пример 7.3. Вычислить y'_x, если $y = \frac{(1 + x^2) \mathrm{arctg} x}{x} - \ln x$.

► $y'_x = \left(\frac{(1 + x^2) \mathrm{arctg} x}{x}\right)' - \frac{1}{x}$ (использованы формулы (7.20) и (7.7)). Имеем:

$$\left(\frac{(1 + x^2) \mathrm{arctg} x}{x}\right)' = \frac{((1 + x^2) \mathrm{arctg} x)' x - (1 + x^2) \mathrm{arctg} x}{x^2} =$$

$$=\frac{(2x\operatorname{arctg}x+1)x-(1+x^2)\operatorname{arctg}x}{x^2}=\frac{(x^2-1)\operatorname{arctg}x}{x^2}+\frac{1}{x}$$

(использованы формулы (7.22) и (7.21) для производной дроби и произведения, формулы (7.20), (7.1), (7.14)). Для y'_x получаем равенство:

$$y'_x=\frac{(x^2-1)\operatorname{arctg}x}{x^2}.◄$$

Пример 7.4. Вычислить y'_x, если $y=x^3\arccos x-(x^2+2)\sqrt{1-x^2}/3$.

► $y'_x=(x^3\arccos x)'-((x^2+2)\sqrt{1-x^2}/3)'$, $(x^3\arccos x)'=3x^2\arccos x-\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ (использованы формулы (7.20), (7.21), (7.1) и (7.13)). Имеем: $((x^2+2)\sqrt{1-x^2})'=$
$=2x\sqrt{1-x^2}+(x^2+2)(\sqrt{1-x^2})'$,
$(\sqrt{1-x^2})'=((1-x^2)^{1/2})'=(1/2)(1-x^2)^{-1/2}(-2x)=\quad=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (использованы формулы (7.20) и (7.23) для вычисления производной сложной функции). Итак, $((x^2+2)\sqrt{1-x^2})'=2x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{(x^2+2)x}{\sqrt{1-x^2}}$. После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов имеем: $((x^2+2)\sqrt{1-x^2}/3)'=-\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$. Для y'_x получаем равенство: $y'_x=3x^2\arccos x$.◄

Пример 7.5. Вычислить y'_x**,** если $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

►Положим: $y=\arcsin u$, $u=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $\forall x\in\boldsymbol{R}$, $y'_x=(\arcsin u)'_u\cdot\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'_x$ (формула (7.23)). Таким образом,

$$y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-((1-x^2)/(1+x^2))^2}}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

(использованы формулы (7.12) и (7.22)). После очевидных преобразований получим: $y'_x=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2}}\cdot\dfrac{-4x}{1+x^2}=\dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}$. В силу определения модуля приходим к равенству: $y'_x=\begin{cases}2/(1+x^2), & x<0,\\ -2/(1+x^2), & x>0.\end{cases}$ Остался нерешённым вопрос о существовании производной в точке $x=0$. К нему мы вернёмся в следующей главе.◄

Пример 7.6. Вычислить y'_x, если $y=\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)$.

► $(\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x))'=\operatorname{ch}(\operatorname{tg}x)\cdot(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{\operatorname{ch}(\operatorname{tg}x)}{\cos^2 x}$ (использованы формулы (7.23), (7.16) и (7.10)).◄

Пример 7.7. При каком значении параметра α парабола $y = \alpha x^2$ касается логарифмической кривой $y = \ln x$?

►Надо найти значение α, при котором данные кривые имеют общую касательную T в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$. Производные данных функций в точке x_0 должны быть равны, так обе они трактуются как тангенс одного и того же угла. Для α, x_0, y_0 получаем систему:

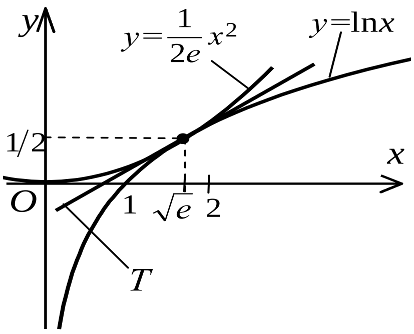

Рис. 7.1. К примеру 7.7

$$\begin{cases} y_0 = \alpha x_0^2, \\ y_0 = \ln x_0, \\ 2\alpha x_0 = 1/x_0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы имеем: $\alpha x_0^2 = 1/2$, отсюда, в силу первого уравнения системы получаем: $y_0 = 1/2$. Тогда из второго уравнения определяем x_0: $x_0 = e^{1/2} = \sqrt{e}$, а из третьего находим α: $\alpha = 1/(2x_0^2) = 1/(2e)$. На рис. 7.1 изображены данные кривые и их общая касательная T.◄