## Резюме к разделу 9

Целый ряд прикладных задач (геометрических, физических и т. д.) приводит к необходимости производить над функциями одну и ту же аналитическую операцию – предельный переход некоторого совершенно определенного типа. Каковы общие черты задач, обусловливающих возможность аналитически одинаково решать задачи, используя во всех случаях интеграл в качестве орудия, логически определяющего искомую величину и вместе с тем дающего этой величине количественную оценку? Можно отметить две таких основные черты.

Во-первых, во всех случаях искомая величина зависит от некоторого отрезка $[a, b]$, на который она «распространяется» и с изменением которого она меняется.

Во-вторых, изучаемая величина в каждой конкретной задаче зависит от некоторой функции $f(x)$: в случае вычисления площади (рис. 1.1, гл. 1) это ордината той точки верхней границы криволинейной трапеции, абсцисса которой равна $x$; в случае вычисления работы это величина силы, действующей в точке с абсциссой $x$, и т. д.

Таким образом, для того, чтобы задача рассматриваемого нами типа получила определенную постановку, необходимо прежде всего задание некоторой функции $f(x)$ и некоторого отрезка $a \le x \le b$, к которому мы относим нашу задачу. Можно сказать, что та величина, определение и численную оценку которой мы ищем, есть функция $V(f;a,b)$ трёх элементов, которые могут быть выбраны независимо друг от друга: функции $f$ и чисел $a$ и $b$. Применение интеграла как метода решения всех рассмотренных в этом разделе (и многих других) задач обусловлено следующим свойством функции $V(f;a,b)$:

1) Как функция отрезка $[a, b]$ величина $V$ аддитивна, т. е. при $a < c < b$

$$V(f;a,b) = V(f;a,c) + V(f;c,b).$$

2) Если функция $f(x)$ постоянна на участке $[a, b]$, т. е. $f(x) = C$, то

$$V(f;a,b) = C(b-a).$$

## Контрольные вопросы к главе 4

1. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, выкачать воду, если радиус основания конуса $R$, а высота $H$, и сосуд до краев заполнен водой. Чему равна эта работа, если сосуд наполнен водой лишь наполовину?

2. Треугольный щит вертикально опущен в воду, причем основание треугольника находится на уровне воды. Требуется найти силу давления $P$ на одну из сторон щита, если высота щита $h$, а плотность воды $\rho$.

3. Найти момент инерции однородного шара радиуса $R$ относительно его диаметра.

4. Резервуар до краев наполнен водой. Определить расход воды через водослив, имеющий форму полукруга радиуса $R$ (рис. 6.2).

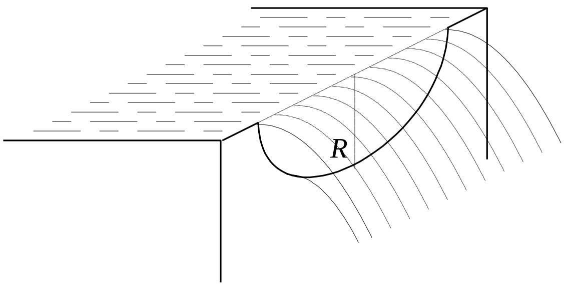


Рис. 6.2. Иллюстрация к контрольному вопросу 4

5. Вычислить кинетическую энергию однородного прямого кругового конуса массы $M$, вращающегося с угловой скоростью $\omega$ около своей оси, если радиус основания конуса $R$, а высота $H$.

## Ответы на контрольные вопросы к разделу 8, гл 4

Глава 1.

**1.** $\frac{4}{3}p^2$. **2.** $3\pi a^2$. **3.** $\frac{3}{2}a^2$. **4.** $a^2$. **5.** $\pi a^3\sqrt{pq}$. **6.** $\frac{4}{21}\pi a^3$. **7.** $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$. **8.** $2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)a^2$**.**

Глава 2.

**1.** $\frac{1}{3}\rho g\pi R^2 H,\ \frac{1}{24}\rho g\pi R^2 H$. **2.** $\frac{1}{6}\pi gah^2$. **3.** $\frac{8}{25}\rho\pi R^5$. **4.** $2\sqrt{2g}R^{5/2}\int\limits_0^1\sqrt{x(1-x^2)}\,dx$.

**5.** $\frac{1}{20}\pi\omega^2 R^4 H$**.**