SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 8 – INTERPOLACJA FUNKCJAMI SKLEJANYMI

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

W ramach laboratoriów kontynuowany był temat interpolacji, metodzie polegającej na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje z góry dane wartości w ustalonych punktach, zwanych węzłami.

Tym razem interpolacja przeprowadzona została przy pomocy funckji sklejancyh będących wielomianami 3 stopnia, co oznacza, że funkcja interpolacyjna w takim przypadku przyjmuje między węzłami postać wielomianu co najwyżej trzeciego stopnia. Wartym zaznaczenia jest, że kubiczne funkcje sklejane połączone są w taki sposób, aby w każdym węźle wartości funkcji przylegających, ich pierwsze i drugie pochodne były sobie równe.

Metoda ta jest o tyle bardziej efektywna od omawianej wcześniej metody wielomianowej, gdyż zapobiega występowaniu efektu Rungego, zaobserwowanego podczas poprzednich laboratoriów.

W celu wyznaczenia funkcji iterpolacyjnej, wyznaczony został układ równań liniowych postaci **A***m* = *d,* dla którego d wygenerowane jest na zasadzie:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \quad , \tag{1}$$

gdzie m to poszukiwane wartości drugich pochodnych w równoodległych węzłach. Układ równań zatem, po zadaniu warunków brzegowych, zaprezentuje się jak poniżej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix} \tag{2}$$

Rozwiązując powyżej przedstawiony układ równań *(2)* można wyznaczyć ławto wartość funkcji inerpolowanej na podstawie wzoru:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad . \tag{3}$$

Zadanie do wykonania

Interpolacja została przeprowadzona dla dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \;\; i$$

$$f_2(x) = \cos(2x),$$

w przedziale x ∈ [-5,5]. Warunki dla drugiej pochodnej na krańcach przedziału interpolacji zostały przyjęte jako α = β = 0. Krok dla węzłów równoodległych został zdefiniowany jako $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{n-1}$. Badanie zostało wykonane dla różnych stopni wielomianów, tj. n = 5, 8, 21.

Zmienne μ oraz λ dla generatora wektora *d* zostały zdefiniowane jako:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i \,. \tag{4}$$

Metoda

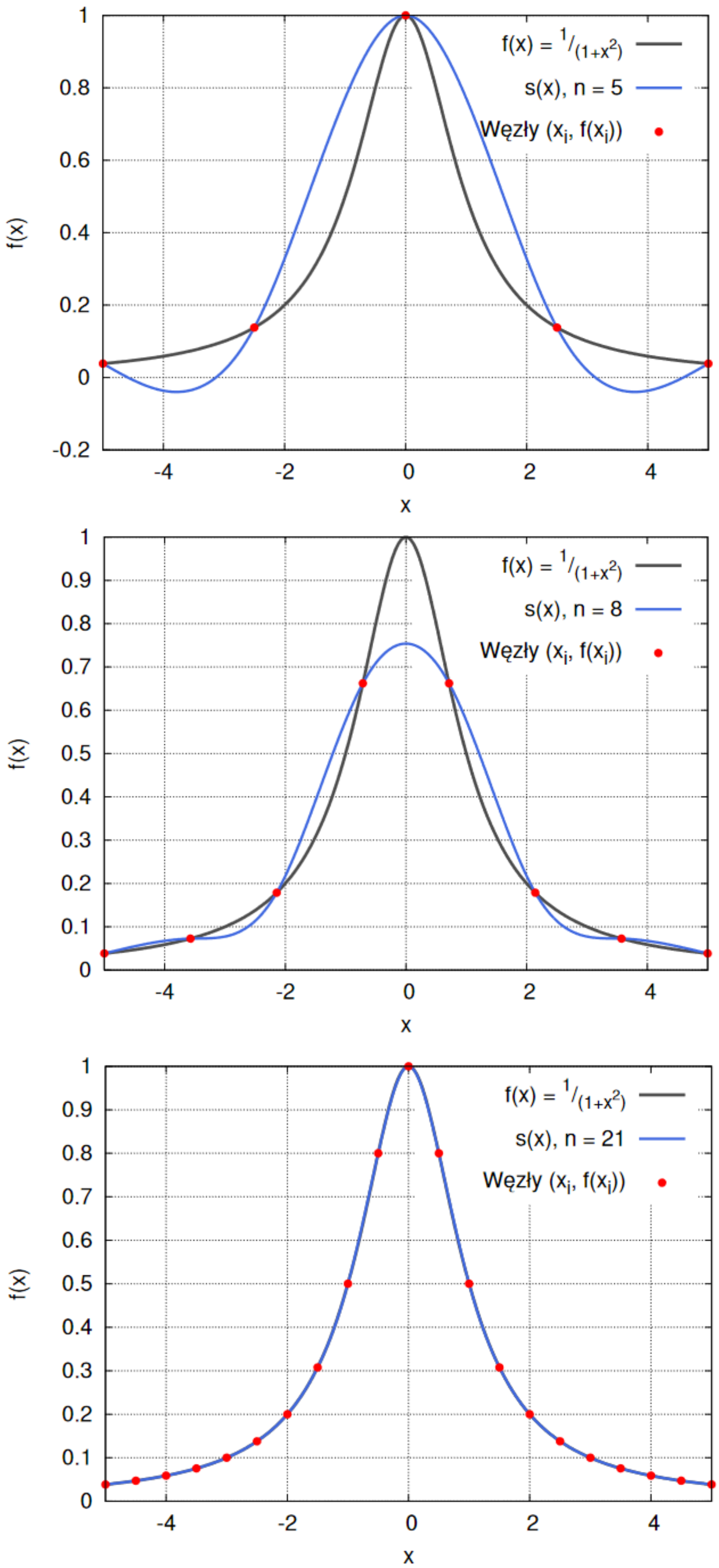
Zaimplementowane zostały dwie procedury pomocnicze: procedura *wyznacz_M* wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach, do której przekazywany został wektor z położeniami węzłów x_w, wektor wartości y_w, liczba węzłów n, wektor wyjściowy *m*, wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach α i β; procedura *wyznacz_Sx* wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym, przyjmująca jw. x_w, y_w, n, *m*, oraz wartość argumentu x. Dodatkowo w celu weryfikacji dokładności wyznaczania wartości drugich pochodnych zaimplementowana została funkcja alternatywna wyznaczająca wartość pochodnych na podstawie poniższego wzoru:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\delta x) - 2f(x) + f(x+\delta x)}{(\delta x)^2} \,. \tag{5}$$

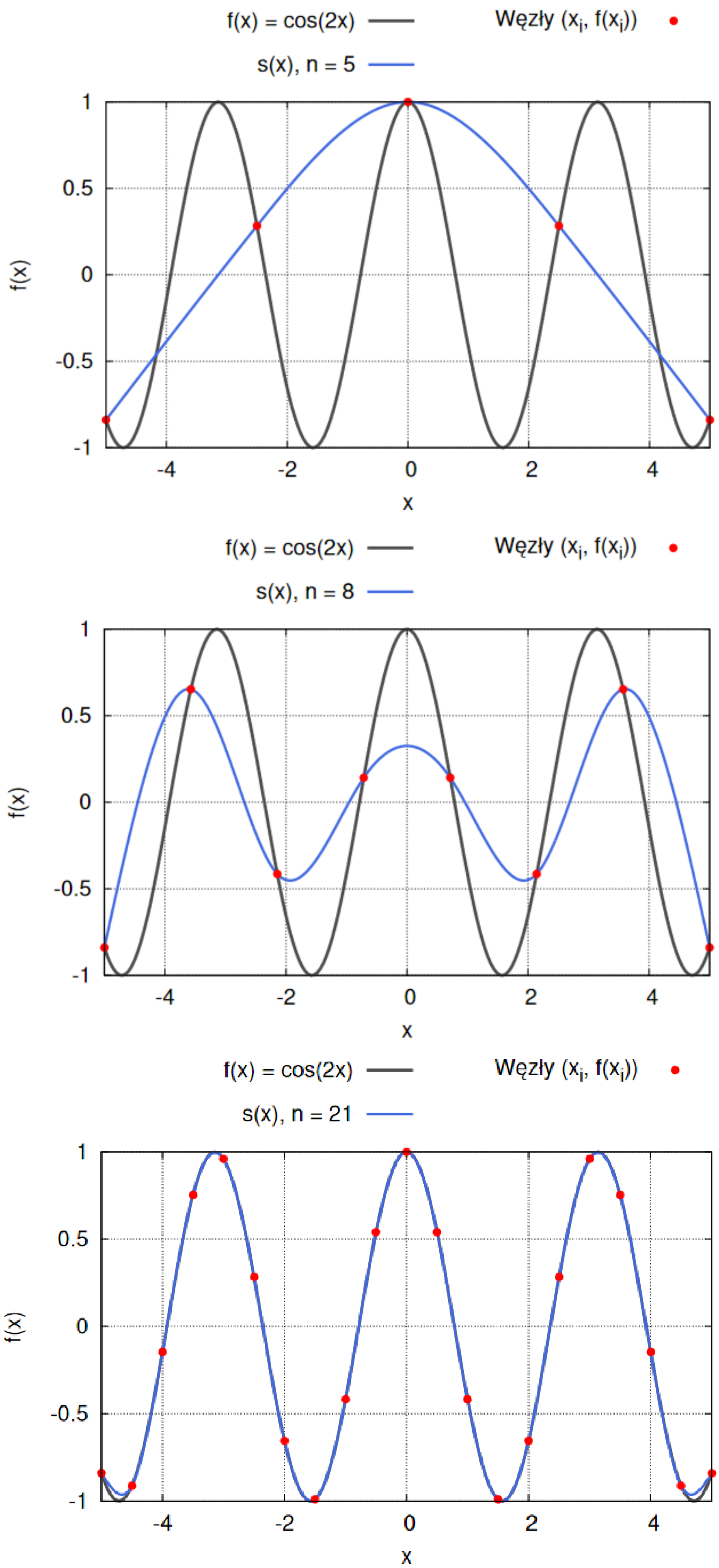
Układ równań ze wzoru *(2)* został obliczony z wykorzystaniem biblioteki GSL oraz wbudowanej procedury transformacji Householdera.

WYNIKI

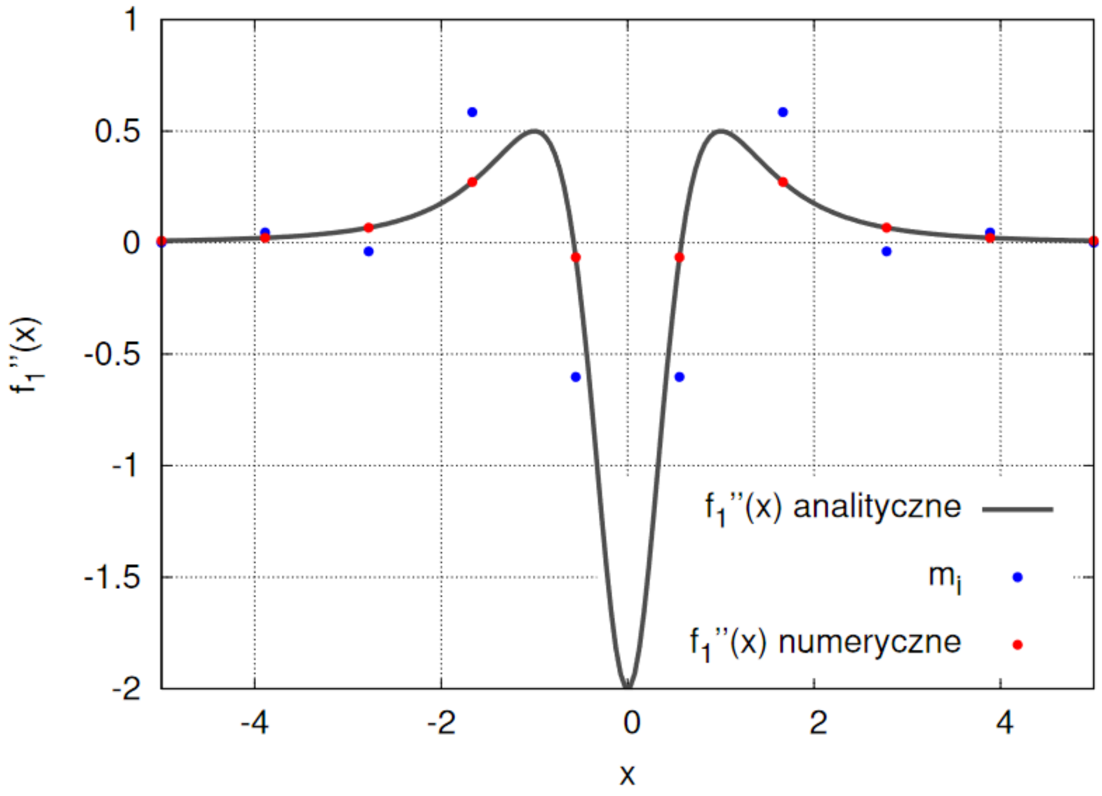
Wyniki zostały zaprezentowane w postaci wykresów . Każdy wykres przedstawia wykres badanej funkcji oraz odpowiadającego jej interpolacji danego stopnia.



Rysunek 1: Wykresy dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, stopnia kolejno n = 5, 8, 21.



Rysunek 2: Wykresy dla funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$, stopnia kolejno n = 5, 8, 21.



Rysunek 3: Porównanie dokładności wyznaczania wartości drugich pochodnych procedury wyznacz_M oraz wzoru *(5)* z wartościami pochodnej wyprowadzonymi analitycznie – przypadek n = 10 dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

WNIOSKI

Analizując dokładność wyznaczania wartości drugich pochodnych dla funkcji, można zaobserwować spadek dokładności dla metody wyznacz_M – w tym przypadku wzór *(5)* daje dużo dokładniejsze wartości.

Podsumowując wyniki funkcji interpolacyjnych - jak można łatwo zaobserwować na podstawie powyższych wykresów: dla obu funkcji – zarówno na *Rysunku 1* jak i *Rysunku 2* - zwiększenie ilości węzłów znacząco poprawia dokładność interpolacji. Zgodnie z hipotezą podaną we wstępie – w metodzie funkcji sklejanych nie obserwuje się efektu Rungego, powodującego spadek dokładności funkcji interpolowanej, w przeciwieństwie do metody interpolacji wielomianowej, implementowanej w ramach poprzednich laboratoriów. Stwierdzić zatem można, że metoda funkcji sklejanych ma przewagę nad metodą Langrange'a – zarówno jeśli chodzi o dokładność jak i o wygodę przy doborze węzłów, jako, że sposób doboru węzłów w tej metodzie nie wpływa na dokładność wyników.