SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 12 – ZASTOSOWANIE EKSTRAPOLACJI RICHARDSON'A Z UŻYCIEM WZORÓW SIMPSONA I MILNE.

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

Metody Newtona –Cotesa to zbiór metod numerycznych wykorzystywanych do wyznaczania wartości całek oznaczonych. Metody te bazują na podzieleniu obszaru całkowalnego na figury geometryczne dla równoodległych węzłów, których pole jest łatwo wyznaczalne, a następnie ich zsumowaniu. Celem laboratoriów było właśnie wyznaczenie zadanej całki oznaczonej za pomocą dwóch wzorów typu zamkniętego (końce przedziału całkowalnego także są węzłami) Newtona-Cotesa: wzoru Simpsona oraz wzoru Milne'go, rozszerzoncyh o ekstrapolację Richardsona.

Metoda Simpsona polega na przybliżeniu funkcji f(x) funkją kwadratową, obliczeniu pola powierzchni pod nią dla N podprzedziałów i zsumowaniu wszystkich takich pól powierzchni. Wzór Simpsona określony jest jako:

$$S = \sum_{i=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right). \quad (1)$$

W metodzie Milne natomiast przybliża się funkcję podcałkową przy pomocy wielomianu 4 stopnia, w dalszej części postępowanie jest analogiczne jak w wersji powyżej. Wzór Milne, na którym bazować będzie algorytm napisany w ramach tego laboratorium to:

$$S = \sum_{i=0}^{\left(\frac{N}{4}\right)-1} \frac{4h}{90}(7f_{4i} + 32f_{4i+1} + 12f_{4i+2} + 32f_{4i+3} + 7f_{4i+4}. \quad (2)$$

Obie metody mogą zostać rozszerzone o ekstrapolację Richardsona.

Ekstrapolacja Richardsona to metoda używana w celu przewidywania wartości zmiennej lub funkcji poza znanym zakresem, w celu poprawy jakości wyniku. Metoda polega na odpowiednim doborze kroku - zmiennej h, dla której tworzone są kolejne przybliżenia szukanej wartości, określone wzorem:

$$D_{w,k} = \frac{4^k D_{w,k-1} - D_{w-1,k-1}}{4^k - 1},\ k = 1, 2, \dots N,\ w = k, k+1, \dots\ N. \quad (3)$$

Finalnie wynikiem jest następująca tablica wartości:

$$\begin{array}{ccc} D_{0,0} & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ D_{N,0} & D_{N,1} & D_{N,N} \end{array}$$

gdzie $D_{N,N}$ to możliwie najlepsze znalezione przybliżenie.

Zadanie do wykonania

Zadaniem laboratoryjnym było obliczenie wartości całki:

$$\int_0^1 f(x),$$

dla funkcji f(x) zadanej jako:

$$f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)\sin(18x).$$

W tym celu zastosowany został wzór Simpsona (1) oraz Milne (2) rozszerzone o ekstrapolację Richardsona (3), wszystkie przedstawione w powyższym wstępie. Krok dla ekstrapolacji został ustalony w dwóch wersjach:

1) dla wzoru Simpsona: $h_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots 8, \quad N = 2^{n+1}, \quad i = 0, 1 \dots N,$

2) dla wzoru Milne: $h_n = \frac{b-a}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, \dots 8, \quad N = 2^{n+2}, \quad i = 0, 1 \dots N,$

gdzie a, b to granice całkowania, a N to liczba węzłów.

Metoda

Zaimplementowane zostały dwie osobne funkcje pomocnicze – Simpson() oraz Mile(), korzystające ze wzorów podanych we wstępie teoretycznym. Wyniki przechowywane były w tablicy dwuwymiarowej **D** typu *double*. Wyniki wyjściowe obu wersji zostały zapisane w dwóch osobnych plikach *.dat, w których zapisana została kolumna zerowa wynikowej tablicy **D** oraz jej diagonala. W implementacji nie została wykorzystana żadna dodatkowa biblioteka.

Wyniki

Wyniki dla wersji Simpsona i Milne zaprezentowane zostały w postaci dwóch tabeli zawierających wartości elementów z tablicy całek dla $\int_0^1 \ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)\sin(18x) = -0.1864868960$, wyliczonych kolejno za pomocą jednej i drugiej metody.

Tabela 1: Wartości elementów w zerowej kolumnie i diagonali tablicy wynikowej **D**, obliczone metodą Simpsona z ekstrapolacją Richardsona

w	$D_{(w,0)}$	$D_{(w,w)}$
0	-0.0971410499	-0.0971410499
1	0.4083851989	0.5768939485
2	-0.2209681412	-0.4979290236
3	-0.1880063997	-0.1547412817
4	-0.1865747211	-0.1872519207
5	-0.1864922827	-0.1864826455
6	-0.1864872311	-0.1864869011
7	-0.1864869169	-0.1864868960
8	-0.1864868973	-0.1864868960

Tabela 2: Wartości elementów w zerowej kolumnie i diagonali tablicy wynikowej **D**, obliczone metodą Milne'a z ekstrapolacją Richardsona

w	$D_{(w,0)}$	$D_{(w,w)}$
0	0.4420869488	0.4420869488
1	-0.2629250305	-0.4979290236
2	-0.1858089502	-0.1375818946
3	-0.1864792758	-0.1892838357
4	-0.1864867868	-0.1864321619
5	-0.1864868943	-0.1864871836
6	-0.1864868960	-0.1864868957
7	-0.1864868960	-0.1864868960
8	-0.1864868960	-0.1864868960

WNIOSKI

Jak widać w powyższych tabelach – w obu przypadkach wraz ze wzrostem indeksu w wzrasta dokładność wyniku zadanej całki. Dla wzoru Simpsona w *Tabeli 1* widać, że ekstrapolacja lekko przyspieszyła znalezienie wartości szukanej oraz zwiększyła jej dokładność – zbieżność wyniku dla w=8 wyniosła 4. miejsca po przecinku, natomiast z wykorzystaniem ekstrapolacji Richardsona dokładność ta wyniosła już 10 miejsc po przecinku przy iteracji w = 7. W przypadku wzoru Milne w *Tabeli 2,* sytuacja wygląda nieco inaczej – zbieżność wynikowa została znaleziona szybciej niż w przypadku wzoru Simpsona – przy iteracji w = 6 dokładność do 10. miejsca po przecinku, natomiast po ekstrapolacji dokładność ta osiągnięta została dopiero przy iteracji w = 7. Jednocześnie, dla obu metod z ekstrapolacją Richardsona, przy w = 8 wartości znalezione są zgodne z wartością teoretyczną aż do 10. miejsca po przecinku.

Podsumowując, dzięki odpowiednio dobranym węzłom oraz wykorzystaniu ekstrapolacji Richardsona z dobrze dobranym krokiem h, udało się bardzo dokładnie wyznaczyć wartość zadanej całki $\int_0^1 \ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)\sin(18x)$. Oba wzory, zarówno Simpsona jak i Milne rozszerzone o ekstrapolacje Richardsona pozwoliły na efektywne wyznaczenie szukanego wyniku przy w = 7 iteracji. Ważną obserwacją jednak jest fakt, iż skorzystanie ze wzoru Milne nie wymaga użycia ekstrapolacji do osiągnięcia równie dokładnego wyniku, przy podobnej liczbie iteracji. Można jednak wnioskować, iż obie metody Newtona-Cotesa w wersji Simpsona i Milne, rozszerzone o ekstrapolację Richardsona, są porównywalnie szybkimi i efektywnymi algorytmami znajdującymi wartość całki oznaczonej.