SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 3 – ITERACYJNE ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

Rozważmy równanie liniowe w postaci ***A**x* = *b*, gdzie **A** to macierz wstęgowa - kwadratowa, symetryczna i dodatnio określona, jej elementy poza diagonalą i 'wstęgą' równe 0, *x* to wektor rozwiązań, a *b* to wektor wyrazów wolnych. Równanie takie można rozwiązać metodą *sprzężonego gradientu*, która wykorzystana została na laboratoriach. Metoda ta, jako metoda iteracyjna, polega na przybliżaniu dokładnego rozwiązania za pomocą powtarzanych instrukcji, korzystając z właściwości ortogonalizacji. Pozwala ona rozwiązać duże układy zdecydowanie bardziej efektywnie niż metody bezpośrednie, które w przypadku zbyt złożonych problemów zabrałaby za dużo czasu. Metoda sprzężonego gradientu określona jest przez poniższy algorytm:

$$while(\boldsymbol{r}_k^T\boldsymbol{r}_k > 10^{-6})\{$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\boldsymbol{r}_k^T\boldsymbol{r}_k}{\boldsymbol{v}_k A\boldsymbol{v}_k} \\
\boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{x}_k + \alpha_k\boldsymbol{v}_k \\
\boldsymbol{r}_{k+1} &= \boldsymbol{r}_k - \alpha_k A\boldsymbol{v}_k \\
\beta_k &= \frac{\boldsymbol{r}_{k+1}^T\boldsymbol{r}_{k+1}}{\boldsymbol{r}_k^T\boldsymbol{r}_k} \\
\boldsymbol{v}_{k+1} &= \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k\boldsymbol{v}_k
\end{aligned}$$

$$\}$$

w którym *k* jest licznikiem iteracji, wektor *x* to wektor rozwiązań, *r* to wektor reszt, a *v* i *b* to wektory pomocnicze. Im więcej iteracji wykona program, tym bardziej dokładne będzie rozwiązanie problemu – w powyższym przypadku ilość iteracji została ograniczona do czasu gdy rząd wielkości reszt spadnie poniżej szóstego miejsca po przecinku. Maksymalna liczba iteracji w tej metodzie wynosi n+1 – więc jest metodą skończoną, ale zazwyczaj do uzyskania akceptowalnego rozwiązania wystarcza wykonanie znacznie mniejszej liczby iteracji. (Chwiej, s.22)

ZADANIE DO WYKONANIA

Zadaniem laboratoryjnym było zaimplementowanie metody *sprzężonego gradientu* do rozwiązania układu równań liniowych postaci ***A**x* = *b* dla macierzy wstęgowej **A**, gdzie:

$$A_{i,j} = \frac{1}{1+|i-j|}, \;\; gdy\; |i-j| \leq 5 \;\; i$$

$$A_{i,j} = 0, \;\; gdy\; |i-j| > 5.$$

Następnie ten sam układ rozwiązać metodą eliminacji zupełnej, implementowanej w ramach pierwszych laboratoriów, i porównać wydajność obu metod, na zasadzie porównania czasu działania obu algorytmów.

METODA

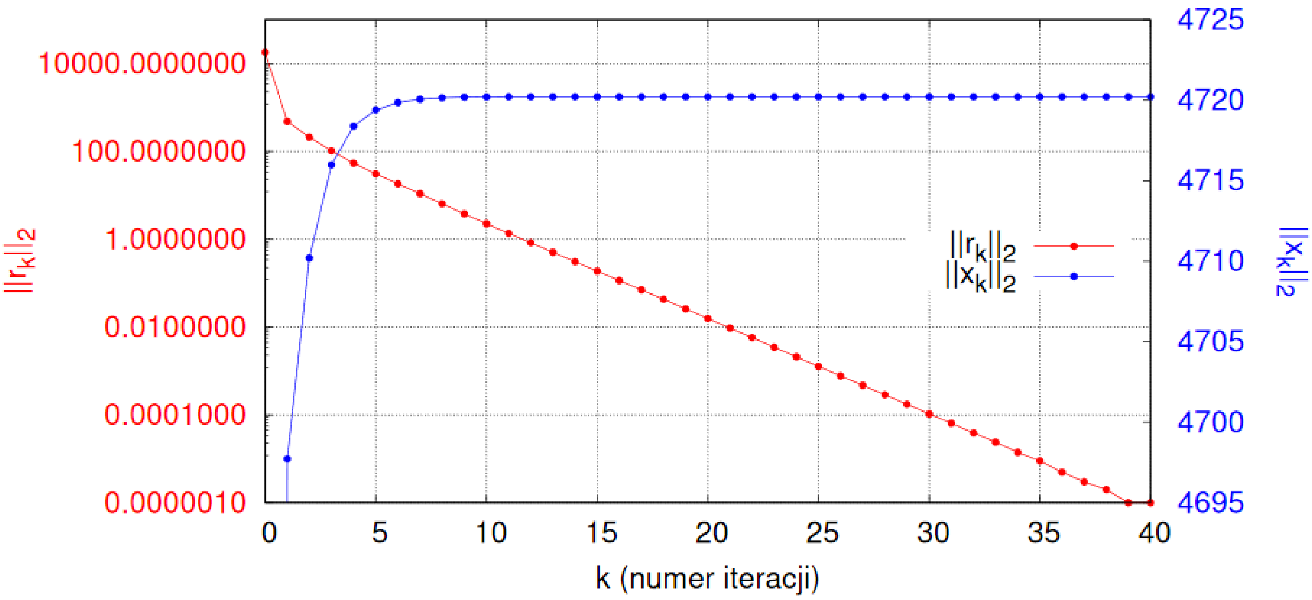
Na początku zaimplementowane zostały funkcje tworzące macierz wstęgową **A**, wektor rozwiązań *x* i wektory pomocnicze *v i b*, korzystając z funkcji biblioteki GSL. Następnie zgodnie z algorytmem podanym we wstępie teoretycznym, zaimplementowana została metoda sprzężonego gradientu, wykorzystująca funkcje pomocnicze takie jak: iloczyn skalarny dla dwóch wektorów, mnożenie macierz – wektor, mnożenie i dodawanie dwóch wektorów, mnożenie wektora przez skalar, które zaimplementowane zostały samodzielnie. Wyniki z każdej iteracji oraz czas działania programu zostały wpisane do pliku wyjściowego.

W ramach porównania efektywności algorytmów, wykorzystany został algorytm stworzony w ramach pierwszych ćwiczeń dla tych samych warunków, czas działania został ponownie zmierzony.

WYNIKI

Wyniki zostały zaprezentowane na diagramie *GnuPlot,* jak następuje:

Wykres 1: zależność między numerem iteracji, a wektorem reszt i wektorem wynikowym



Jak widać na *Wykresie 1* norma wektora reszt zbiega coraz bardziej ku zeru, jednocześnie wynik (norma wektora *x*) na początku znacząco rośnie, a potem utrzymuje się na podobnym poziomie – oznacza to, że już od iteracji dziesiątej wektor *x* zawiera przybliżony wynik, a program w kolejnych iteracjach tylko poprawia jego dokładność.

Porównując wydajność algorytmu *sprzężonego gradientu* oraz *eliminacji zupełnej* – w tabeli poniżej przedstawione zostały uśrednione czasy wykonywania programów dla różnych wielkości macierzy (w celu zmniejszenia błędu pomiarowego dla każdego przypadku czas został zmierzony 10 razy). Czas pojedynczego pomiaru został ograniczony do 5 min. Wyniki prezentują się jak w poniższej *Tabeli 1*:

Tabela 1: Porównanie czasu wykonywania dla metody *sprzężonego gradientu* oraz *eliminacji zupełnej*, dla różnych rozmiarów problemu

	dla n = 100	dla n = 1000	dla n = 10000
Metoda sprzężonego gradientu	0.009 s	0.828 s	92.728 s
Metoda eliminacji zupełnej	0.016 s	4.975 s	>300 s

WNIOSKI

Jak można zaobserwować w *Tabeli 1,* metoda *sprzężonego gradientu* jest o wiele bardziej wydajna, w szczególności dla dużych problemów wejściowych. Zaletą tego algorytmu jest także możliwość ograniczenia wykorzystania pamięci, algorytm można zmodyfikować do wersji zapamiętującej tylko niezerowe elementy macierzy wejściowej (co nie jest wykonalne dla metody *eliminacji zupełnej*).

Trzeba jednak zwrócić uwagę na szczególne warunki wejściowe dla metody *sprzężonego gradientu* – metoda ta nie jest dedykowana dla każdego problemu, jedynie dla macierzy wstęgowej, symetrycznej, co ogranicza możliwości rozwiązywania problemów bardziej skomplikowanych. W takim przypadku konieczne jest użycie metody *eliminacji zupełnej*.

BIBLIOGRAFIA

1. dr hab inż. Tomasz Chwiej „Rozwiązywanie algebraicznych układów równań liniowych metodami iteracyjnymi”, rok 2019/2020, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH; (http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/uarl_iter_1920.pdf)