SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 7 – INTERPOLACJA WIELOMIANOWA LAGRANGE’A

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

Interpolacja wielomianowa polega na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje z góry dane wartości w ustalonych punktach, zwanych węzłami. Zabieg ten wykorzystywany jest m.in. do rozwiązywania układów równań nieliniowych.

Z założenia funkcja określona na przedziale *[a,b]* nazywa się funkcją interpolacyjną, jeśli w zadanych n+1 węzłach $f(x_k) = y_k,\ dla\ k = 0,1 \dots n.$ Ogólną postać wielomianu Lagrange'a można przedstawić jak poniżej:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{k=0\ i\ k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}, \tag{1}$$

gdzie: x oznacza położenie międzywęzłowe, n – stopień wielomianu interpolacyjnego, a x_k – to tablica węzłów.

Dokładność interpolacji zależy od węzłów – ich dobrania i ilości. Ważnym zaznaczenia jednak przy tej okazji jest fakt, iż zwiększanie ilości węzłów dla węzłów równoodległych nie jest równoznaczne ze zwiększaniem dokładności wyznaczania funkcji interpolowanej, co opisuje efekt Rungego - jest to pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej pomimo zwiększenia liczby węzłów.

Jednym ze sposobów zwiększenia dokładności interpolacyjnej jest wykorzystanie wielomianu Czebyszewa – zera tego wielomianu zagęszczają się przy krańcach przedziału dzięki czemu można uniknąć oscylacjom dla wielomianów wyższego rzędu, tym samym poprawić dokładność. Zera takiego wielomianu można zdefiniować jako:

$$x_k = \frac{1}{2}\left[(x_{max} - x_{min})\cos\left(\frac{\pi 2m+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right]. \tag{2}$$

ZADANIE DO WYKONANIA

W trakcie laboratoriów zbadana została dokładność wyznaczania funkcji interpolowanej z dobranymi węzłami równoodległymi, oraz węzłami dobranymi z wielomianu Czebyszewa - wzór **(2),** dla danej funkcji:

$$f(x) = \exp(-x^2)\,, dla\ x \in [-5, 5].$$

Krok dla węzłów równoodległych został zdefiniowany jako $h = \frac{x_{max}-x_{min}}{n}$. Badanie zostało wykonane dla różnych stopni wielomianów, tj. n = 5, 10, 15, 20.

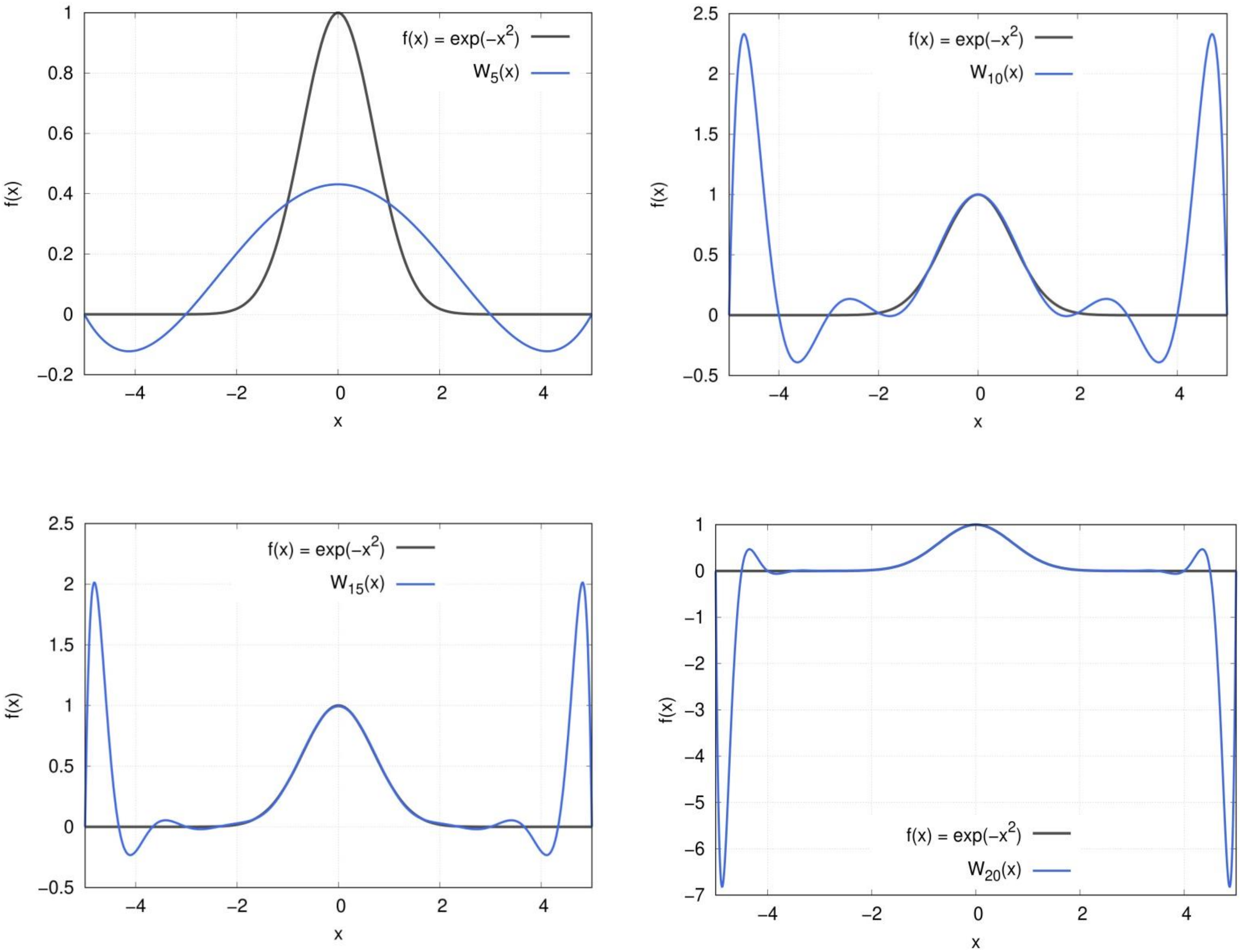
METODA

Zadaniem zaimplementowanego algorytmu było wyliczenie wartości międzywęzłowych dla ww. funkcji w zadanym przedziale (z krokiem 0.01) za pomocą wzoru **(1).** Interpolacja została przeprowadzona 4 razy, dla każdego zadanego n – stopnia wielomianu.

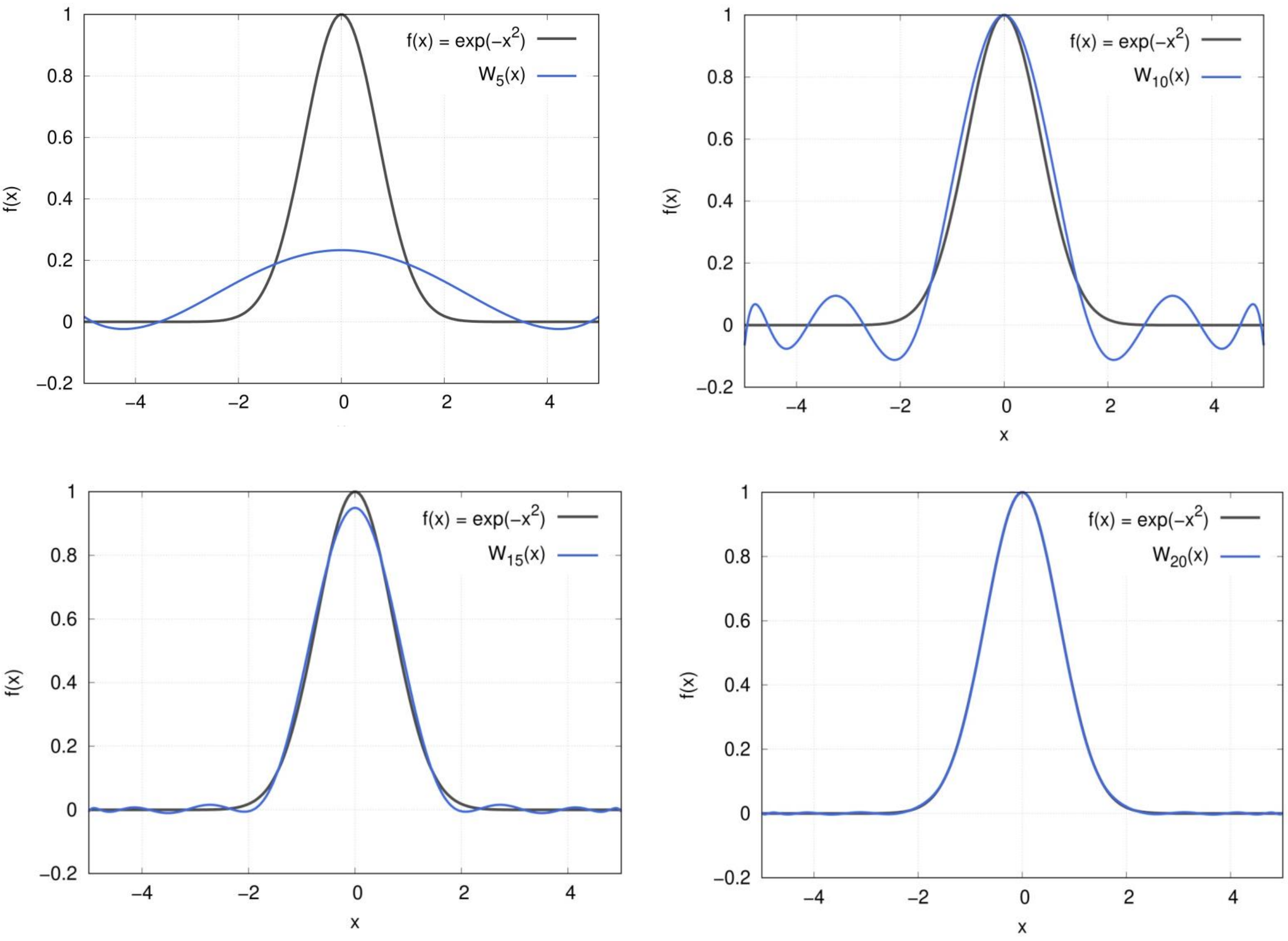
WYNIKI

Wyniki zostały zaprezentowane w postaci wykresów – każdy wykres przedstawia wykres badanej funkcji $f(x) = \exp(-x^2)$ oraz odpowiadającego jej wielomianu interpolacyjnego danego stopnia.

Rysunek 1: Wykresy dla wielomianów interpolowanych stopnia kolejno 5, 10, 15, 20 – przypadek węzłów równoodległych.



Rysunek 2: Wykresy dla wielomianów interpolowanych stopnia kolejno 5, 10, 15, 20 – przypadek węzłów Czebyszewa.



WNIOSKI

Jak można łatwo zaobserwować na podstawie powyższych wyników – wielomiany interpolacyjne z węzłami wyznaczonymi z zer wielomianu Czebyszewa, mają dużo większą dokładność w związku ze wzmożoną ilością węzłów umiejscowionych na krańcach przedziałów. Widoczne jest to szczególnie w przypadku n = 20 na *Rysunku 2*, gdzie wielomian interpolowany praktycznie w całości pokrywa się z funkcją wejściową. Jednocześnie dla węzłów równoodległych z *Rysunku 1,* można zaobserwować efekt Rungego – wspomniany we wstępie. Dla krańców przedziału, mimo ogólnego zwiększenia ilości węzłów, występowały wahania o coraz większej amplitudzie – dokładność zwiększyła się jedynie dla środków przedziału, a spowodowane jest to równomiernym rozłożeniem węzłów.

Porównując oba przypadki można jednoznacznie stwierdzić, iż wpływ na dokładność funkcji interpolowanej ma nie sama ilość węzłów, a ilość wraz z odpowiednim ich doborem, jak m.in. jest to w przypadku wielomianu Czebyszewa.