SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 10 – POSZUKIWANIE MINIMUM WARTOŚCI FUNKCJI METODĄ NAJWIĘKSZEGO SPADKU W 2D

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

W ramach laboratoriów przeanalizowany został temat znajdowania minimum funkcji dwóch zmiennych - f(x,y) - metodą największego spadku. Metoda ta polega na wybraniu punktu początkowego x_0, w którym to punkcie obliczany jest ujemny gradient badanej funkcji $-\nabla f(x)$ w celu ustanowienia kierunu poszukiwań algorytmu. Kolejne punkty obliczane są zatem według wzoru:

$$\overrightarrow{x_{i+1}} = \vec{x_i} - h * \nabla f(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{r_i}}. \tag{1}$$

W celu wyliczenia gradientu, pochodne mogą zostać prosto wyliczone ze wzorów:

$$\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_x) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_x)}{2\Delta} \; , \tag{2}$$

$$\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_y) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_y)}{2\Delta} \; , \tag{3}$$

gdzie e_y i e_x to wersory układu kartezjańskiego, a *Δ* to krok przestrzenny.

ZADANIE DO WYKONANIA

Celem było zaprojektowanie algorytmu wyznaczającego minimum dla danej funkcji:

$$f(x,y) = \frac{5}{2}(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2$$

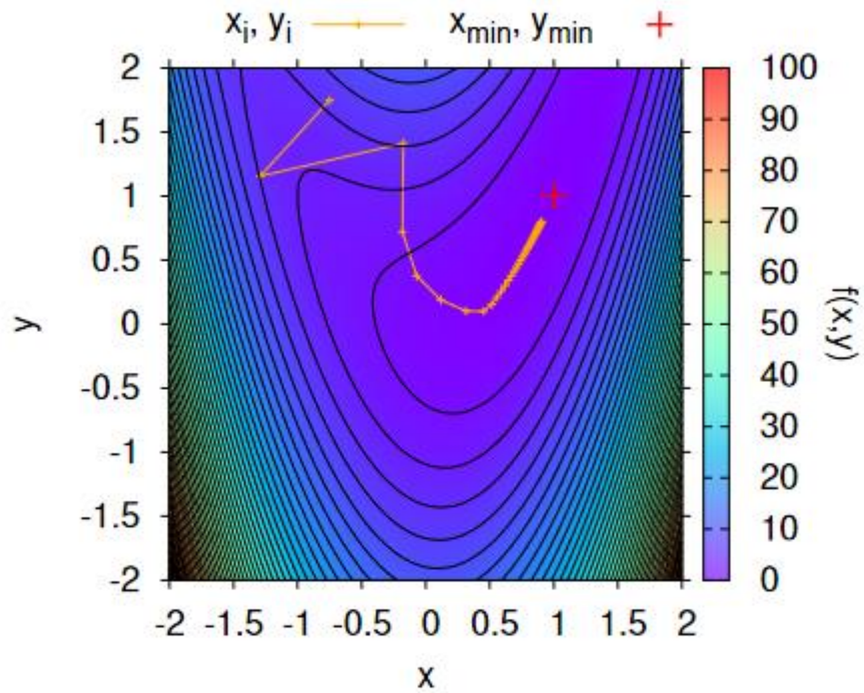
za pomocą metody największego spadku przybliżonej we wstępie powyżej. Zmienne zostały przyjęte stale jak następuje: x_0 = [-0.75, 1.75], *Δ = 10-4, h = 0.1.* Warunek stopu dla projektowanego algorytmu został zdefiniowany dwojako: 1) $\|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\|_2 < 10^{-2}$ oraz 2) $\|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\|_2 < 10^{-3}$, w celu porównania wydajności algorytmu w dwóch wymienionych przypadkach.

METODA

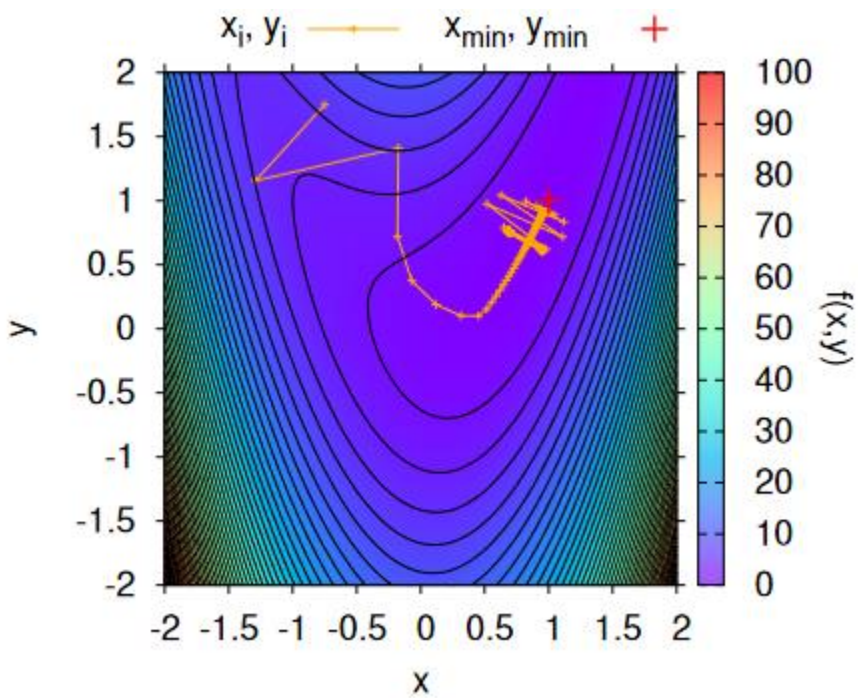
W metodzie największego spadku obliczenia zaczęte zostały w punkcie startowym x_0, aby następnie były iteracyjnie poprawiane w pętli FOR za pomocą wzoru (1). Maksimum liczby iteracji zostało zdefiniowane jako makro MAX 1000.

WYNIKI

Wyniki zostały zaprezentowane w postaci wykresów położenia kolejnych przybliżeń minimum badanej funkcji w poszczególnych iteracjach.



Rysunek 1: Wykorzystany warunek stopu 1), algorytm zakończył działanie po 37 iteracjach, przybliżone minimum (0.904394, 0.801381), uzyskanie zbieżności.



Rysunek 2: Wykorzystany warunek stopu 2), algorytm zakończył działanie po MAX iteracjach, przybliżone minimum (0.949205, 0.621386), brak uzyskania zbieżności.

Wnioski

Na *Rysunku 1* wynik dla dokładności 10^{-2}, przy uzyskaniu zbieżności już po 37 iteracjach, nie pozwolił na dokładne wyznaczenie położenia minimum badanej funkcji. Można jednocześnie zaobserwować, iż kolejne przybliżenia „idą w dobrym kierunku" co skłaniałoby ku tezie, że większa dokładność pozwoli na lepsze zdefiniowanie minimum. Przeczy jednak temu wykres na *Rysunku 2*, który pokazuje, że przy zwiększeniu dokładności do 10^{-3}, pojawiają się oscylacje przybliżeń co skutkuje jeszcze mniejszą dokładnością niż w przypadku poprzednim oraz wykorzystaniem maksymalnej liczby iteracji, za czym idzie brak zbieżności wyniku.

Wnioskować na tej podstawie można, że to właśnie odpowiedni dobór warunku stopu jest kluczowy dla uzyskania poprawności wynikowej. Źródłem oscylacji jest błąd zaokrągleń - to właśnie kontur wartości funkcji, w przypadku zbytniego wydłużenia, powoduje częste zmiany kierunku poszukiwań co skutkuje pojawieniem się zygzaka na wykresie (*Rysunek 2*) i tym samym spadkiem wydajności wykorzystanej metody. Problemem może też być dobór wartości parametru *h* w sposób stały – w celu uzyskania dokładniejszych wyników parametr h powinien być zmieniany wraz z postępem obliczeniowym.

W ramach podsumowania można stwierdzić, że metoda największego spadku może być stosowana w celu poszukiwania minimum, ale wątpliwa pozostaje jej dokładność. Wysoka wrażliwość na odpowiedni dobór parametrów oraz warunku stopu wymaga szczególnej uwagi przy optymalizacji parametrów, w celu uzyskania efektywności dla tej metody. Wykorzystywanie metody największego spadku wiąże się zatem z większym nakładem czasowym podczas tworzenia algorytmu, tak aby jego używanie dawało sensowne rezultaty.

Bibliografia

1. dr hab inż. Tomasz Chwiej, „Minimalizacja wartości funkcji", rok 2019/2020, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH; (http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/minimalizacja_2021.pdf)