

SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 4 – SYMETRYCZNY PROBLEM WŁASNY: WYZNACZANIE MODÓW WŁASNYCH STRUNY 1D

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

Celem laboratorium było wyznaczenie częstości drgań własnych struny. Dynamikę struny można opisać przy pomocy równania falowego:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

które można przekształcić do równania różniczkowego zależnego tylko do zmiennej położeniowej:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\rho(x)}{N} u. \quad (2)$$

Odległość pomiędzy węzłami struny można opisać jako $\Delta x = \frac{L}{n+1}$, a położenie w przestrzeni wzorem: $x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Po dyskretyzacji ww. równań można zapisać ten problem w następującej postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3)$$

co stanowi tytułowy uogólniony problem własny.

ZADANIE DO WYKONANIA

Zadaniem laboratoryjnym było zaimplementowanie rozwiązania dla równania (3) definiując macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} następująco:

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) / \Delta x^2$$

$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N} \delta_{i,j}$$

dla delty Kroneckera:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Przyjęte zostały kolejno parametry: długość struny - $L = 10$, rozmiar macierzy - $n = 200$, rozkład gęstości - $\rho(x) = 1 + 4ax^2$, napięcie struny - $N = 1$.

METODA

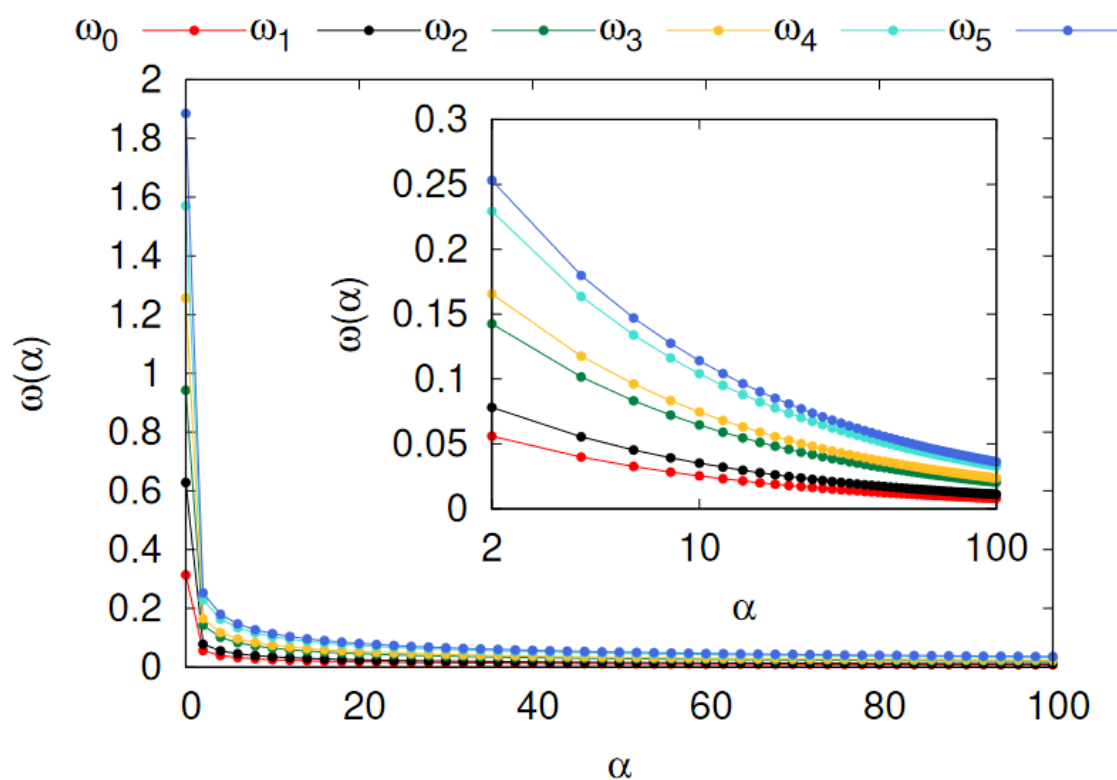
W ramach laboratorium została wykorzystana biblioteka GSL. Do rozwiązania równania własnego została użyta procedura `gsl_eigen_gensymv`, przyjmująca macierz \mathbf{A} i \mathbf{B} , wektor wyjściowy *eval*, macierz wyjściową **evvec** oraz pomocniczą przestrzeń metody *w*. Funkcja zapisuje wartości własne w

wektorze *eval* i odpowiadające im znormalizowane wektory własne w macierzy **evvec**. Dla sortowania wektorów i wartości własnych wykorzystana została funkcja *gsl_eigen_gensymv_sort*. Wartości wyliczone zostały dla $\alpha \in (0, 100]$ z przyjętym krokiem $\Delta\alpha = 2$.

WYNIKI

Wyniki zostały zaprezentowane w sposób graficzny przy pomocy skryptu w *GnuPlot*, jak następuje:

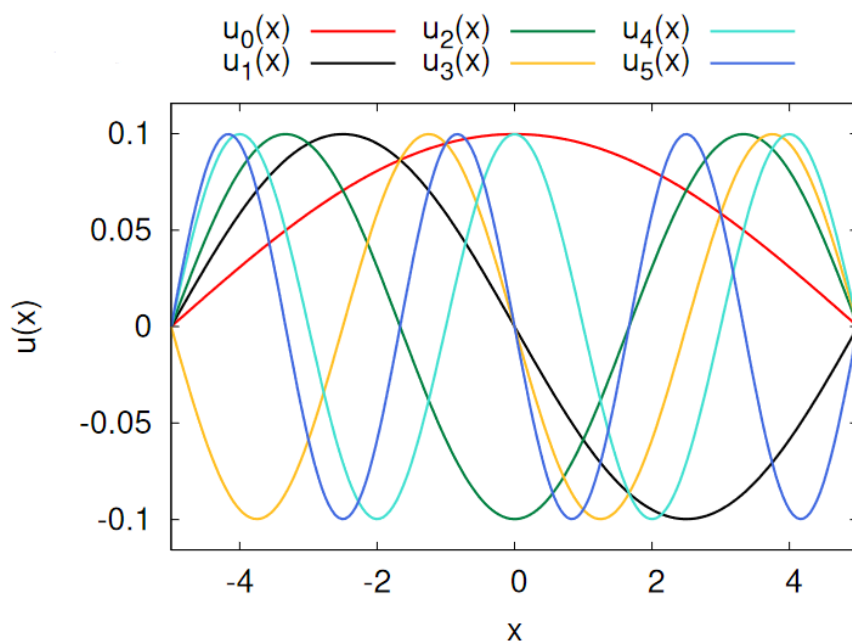
Wykres 1: Graficzna reprezentacja zależności między częstotliwością własną struny a parametrem α



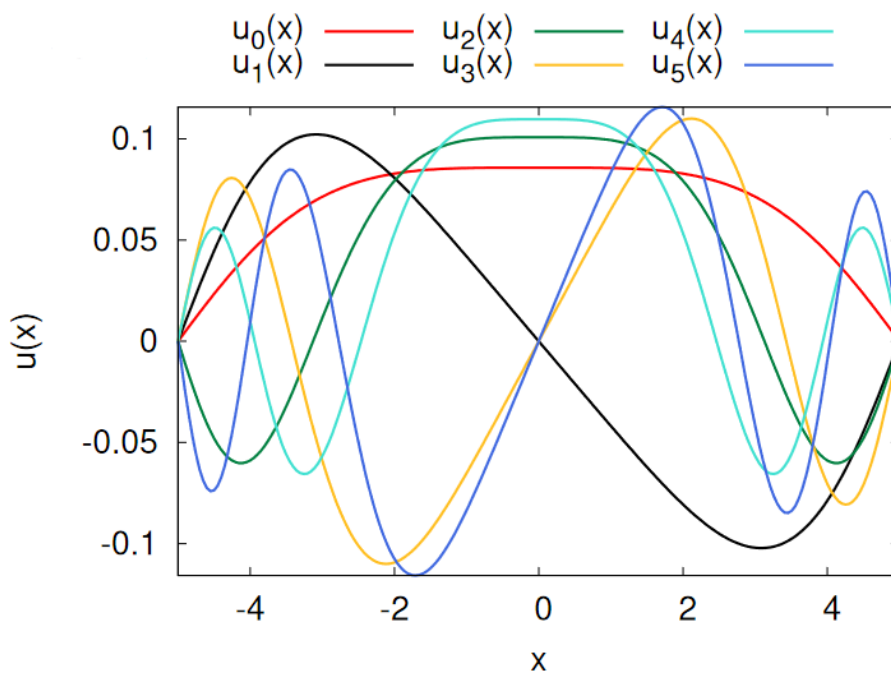
Jak widać na *Wykresie 1* zależność między parametrem α a częstotliwością własną struny jest odwrotnie proporcjonalna – wraz ze wzrostem parametru α , ω maleje. Można zaobserwować także zależność, iż dla $\alpha > 10$, częstota znacząco zmierza do zera, ponadto częstoty zaczynają się nakładać parami.

Przeanalizowane graficznie zostały także wektory własne dla sześciu najniższych wartości własnych, w dwóch przypadkach: gdy $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$ – zależności przedstawione zostały na *Wykresie 2* i *Wykresie 3*.

Wykres 2: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym, przypadek $\alpha = 0$



Wykres 3: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym, przypadek $\alpha = 100$



Oba wykresy reprezentują wektory własne w funkcji położenia punktu na strunie. Na *Wykresie 2* dla gęstości jednorodnej widać, iż wykresy wektorów są nieparzystymi wielokrotnościami „połówek” sinusa. Na *Wykresie 3*, w przypadku gęstości niejednorodnej widać natomiast, że środek struny staje się masywniejszy tak więc wektory u_0 , u_2 , u_4 mają wypłaskniętą część centralną.

WNIOSKI

Jak zostało już wspomniane w trakcie omawiania wyników – parametr gęstości własnej struny ma znaczący wpływ na jej drgania. Można zauważyć tendencję, że im większa gęstość struny, tym mniejsza częstość jej drgań własnych. Na podstawie analizy powyższych danych można też wysnuć analogiczny wniosek, że prezentacja graficzna wektorów własnych, odpowiadających wartościom własnym struny, ma kształt sinusoidalny. Wzrost ciężkości środka struny – jak pokazał to *Wykres 3*, znacząco wpływa na wypłaszczanie się fal w części centralnej.