SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 11 – ODSZUMIANIE SYGNAŁU PRZY UŻYCIU FFT – SPLOT FUNKCJI

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

Wstęp Teoretyczny

Celem laboratoriów było zapoznanie się oraz przetestowanie Szybkiej Transformaty Fouriera (z ang. Fast Fourier Transform). Jest to algorytm stosowany w analizie harmonicznej i przetwarzaniu sygnałów - w bieżącym przypadku został użyty do odszumienia zadanego sygnału. Jest szeroko powszechny, wykorzystywany do kompresji danych auido-wideo(JPEG,MP3). Dyskretna Transformata Fouriera może zostać zdefiniowana jako:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \qquad k = 0, \dots, N-1. \tag{1}$$

FFT przetwarza funkcję z danej przestrzeni tak aby wyeksponować jej własności okresowe i częstotliwościowe. Wykonanie algorytmu w tej wersji wymaga O(N^2) operacji, istnieje jednak jego ulepszona wersja rekrencyjna, która polega na dzieleniu Transformaty na mniejsze podproblemy (oparta na rekurencyjnej zasadzie „dziel i zwyciężaj") – optymalizuje ona działanie do czasu O(NlogN).

W celu odszumiania sygnału wykorzystane zostało także pojęcie splotu funkcji, zdefiniowane jako:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \tag{2}$$

Splot w tym przypadku jest traktowany jako uśrednienie funkcji f(t) funckcją wagową - g(t).

Zadanie do wykonania

Celem było użycie algorytmu FFT do odszumienia danego sygnału, zdefiniowanego jak następuje:

$$f(t) = \sin(\omega t) + \sin(2\omega t) + \sin(3\omega t) + \Delta \tag{3}$$

gdzie: ω = 2*M_PI/T – czyli pulsacja, T to okres, a Δ to liczba pseudolosowa z zakresu [-0.5, 0.5].

Do obliczenia splotu ze wzoru (2) wykorzystany zostanie przedstawiony we wstępie algorytm FFT, czyli:

$$(f \circ g)(t) = FFT^{-1}\{f(k) * g(k)\} \tag{4}$$

Funkcja wagowa g(t) przyjęta została jako funkcja gaussowska: $g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$.

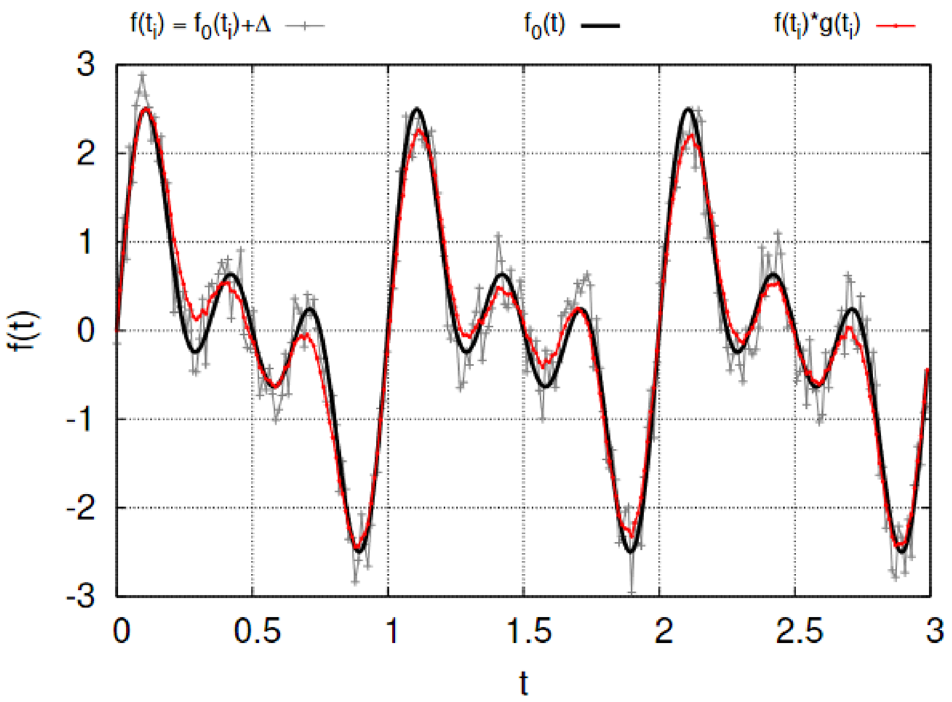
Przyjęte zostały następujące parametry: T równe 1.0, t równe 3*T, a σ zdefiniowana jako T/20.

METODA

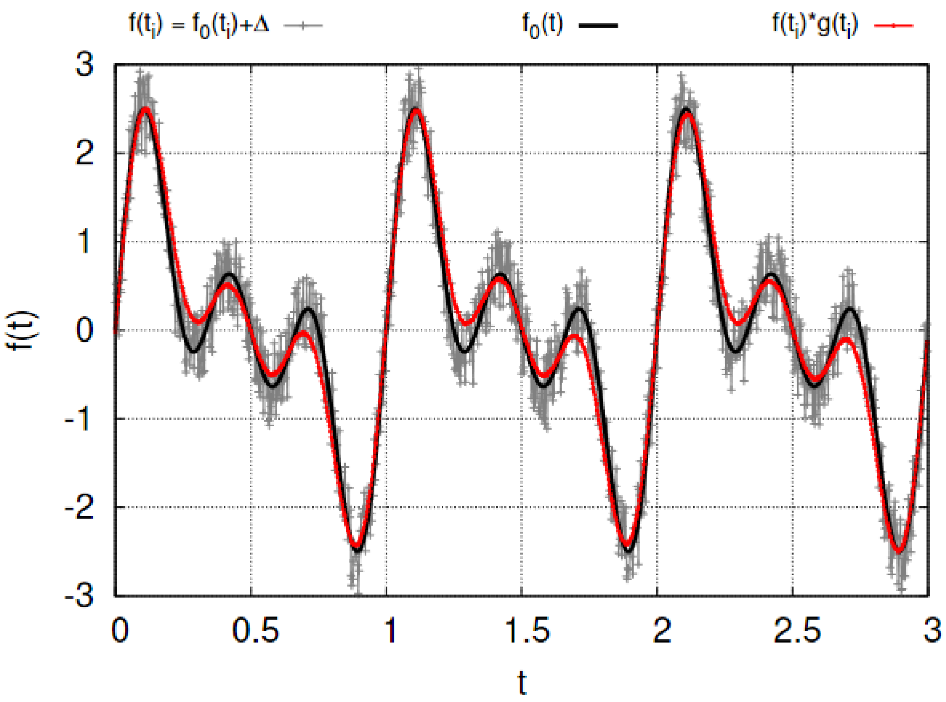
FFT została wyliczona przy użyciu procedury biblioteki GSL - *gsl_fft_complex_radix2_forward(double dane[], sizet stride, sizet N)*: przyjmująca tablicę dane[] o długości 2N, która w parzystych indeksach zawiera wartości rzeczywiste sygnału a w nieparzystych – części urojone (w tym przypadku 0); parametr stride o wartości równej 1; oraz rozmiar. W sposób analogiczny wyliczona została transformata odwrotna FFT^{-1}: przy pomocy funkcji *gsl_fft_complex_radix2_backward(double dane[], sizet stride, sizet N)*.

WYNIKI

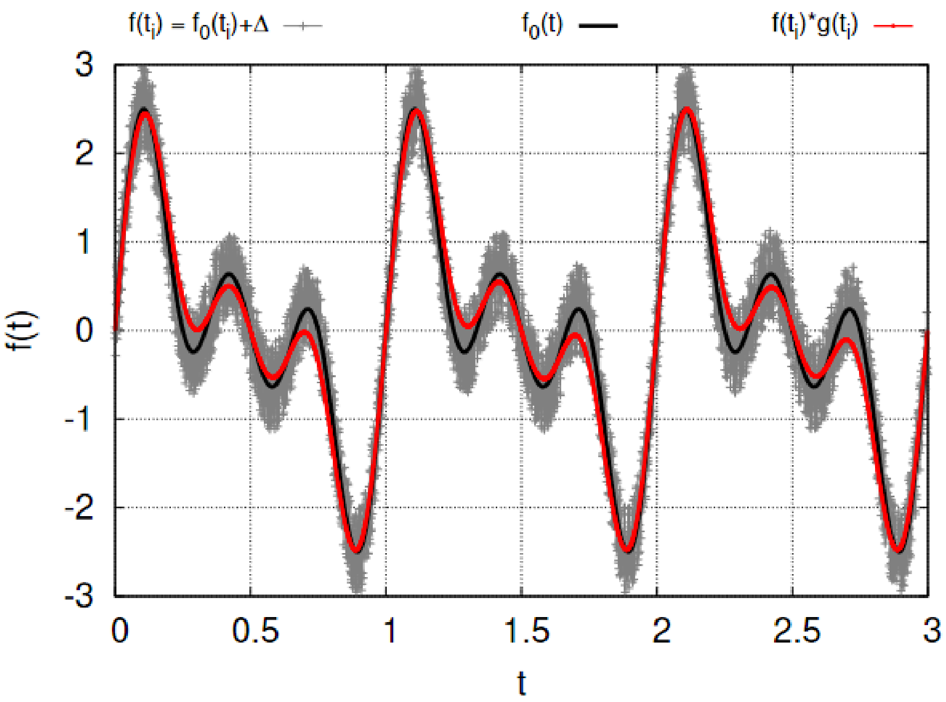
Wyniki zostały zaprezentowane w postaci poniższych wykresów, gdzie: kolorem czarnym - zaznaczony został dany sygnał bez szumu, kolorem szarym - funkcja z szumem, kolorem czerwonym odpowiadający splot funkcji przy użyciu FFT i wzoru (4). Kolejne wykresy różnią się ilością próbek wejściowych – ilość próbek określona została wzorem 2^k, dla k = 8, 10, 12.



Rysunek 1: Wynik odszumienia sygnału z procedurą FFT: przypadek k=8.



Rysunek 2: Wynik odszumienia sygnału z procedurą FFT: przypadek k=10.



Rysunek 3: Wynik odszumienia sygnału z procedurą FFT: przypadek k=12.

WNIOSKI

Można zaobserwować na kolejnych rysunkach, że wraz ze wzrostem k wzrasta też precyzja wyznaczania splotu – tj. sygnału odszumionego. Na *Rysunku 1* widać, że wykres kolorem czerwonym jest poszarpany, mniej dokładny niż dwa kolejne. Na *Rysunku 2* widać poprawę, ale to dopiero *Rysunek 3* definiuje się największą dokładnością.

Wnioskować zatem można, iż Szybka Transformata Fouriera jest (jak sugeruje sama nazwa) szybkim, precyzyjnym, efektywnym narzędziem do wyznaczania sygnału bez szumu. Wpływ na dokładność algorytmu ma ilość dobranych próbek wejściowych: im szersza pula węzłów wejściowych - tym lepsza dokładność wyznaczenia szukanego sygnału.

Pomimo to można jednak zaobserwować, iż wykres czarny (sygnał oryginalny bez szumu) oraz czerwony (sygnał wyznaczony przy pomocy FFT na splocie) nie pokrywają się w stu procentach, nie jest to jednak kwestia niedokładności samego algorytmu, a dobranej metody. Zdefiniowanie funkcji wagowej g(t) z mniejszym odchyleniem standardowym (acz odpowiednio dobranym) pozwoliłoby na uzyskanie bardziej miarodajnych wyników, co za tym idzie - uzyskanie niemal całkowitej zgodności sygnału szukanego z sygnałem otrzymanym dzięki FFT.