SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 9 – APROKSYMACJA WIELOMIANOWA

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

WSTĘP TEORETYCZNY

Aproksymacja to procedura przybliżania funckji *f(x) = y* (funkcji aproksymowanej) inną funkcją, zazwyczaj prostszą, tak aby funckja aproksymująca miała jak najbardziej zbliżone wartości do funkcji pierwotnej, *F(x) = y*. Metodę tę wykorzystuje się w celu uproszczenia skomplikowanch czy niepraktycznych zależności analitycznych. Aproksymacja funckji może generować pojawienie się błędów tzw. błędów aproksymacji, co można weryfikować za pomocą błędu średniokwadratowego.

Omawiana w ramach laboratoriów aproksymacja wielomianowa polega na przybliżaniu zadanej funckji za pomocą wielomianu. Zaletą takiego podejścia, w porównaniu do interpolacji wielomianowej, jest możliwość uproszczenia aproksymującego wielomianu do niższego stopnia.

Dysponując układem funkcji bazowych w podprzestrzeni *X*, takie że $\varphi_i(x)$: dla i = 1, 2, …, m, można znaleźć wielomian będący najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji f(x) na zbiorze *X* za pomocą wzoru:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x). \tag{1}$$

Zatem przyjmując jako bazę ciąg jednomianów 1, x, x2, … , xn dla warunku minimu zdefinowanego jako:

$$\sum_{j=0}^{n}[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i] x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m \ , \tag{2}$$

oraz poprzez zmianę kolejności sumowania i wprowadzeniu odpowiednich oznaczeń otrzymać można układ normalny w postaci:

$$\sum_{i=0}^{m} b_i g_{ik} = r_k, \tag{3}$$

co jest tożsame z:

$$G^T \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\rho}. \tag{4}$$

ZADANIE DO WYKONANIA

Zadaniem laboratoryjnym było zaprojektowanie algorytmu aproksymacyjnego dla danej funkcji:

$$g(x) = exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = exp\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right),$$

gdzie: $a_0 = -x_0^2/2/\sigma^2$, $a_1 = x_0/\sigma^2$, $a_2 = -1/2/\sigma^2$.

Parametry zostały przyjęte jako: $x_o = 2$, $\sigma = 4$. Zakres aproksymacji został ustalony jako $x \in [-3\sigma + x_o,\ 3\sigma - x_o]$. Węzły zostały wyznaczone w sposób równoodległy dla kroku $\frac{x_{max}+x_{min}}{N-1}$.

Dodatkowo zadanym było przeprowadzić aproksymację dla funkcji:

$$g_2(x) = g(x) * \left(1 + \delta(x)\right),$$

gdzie $\delta(x) = 0.5\left(\frac{rand()}{RAND_{MAX}*1.0} - 0.5\right)$, dla 11 i 101 węzłów.

METODA

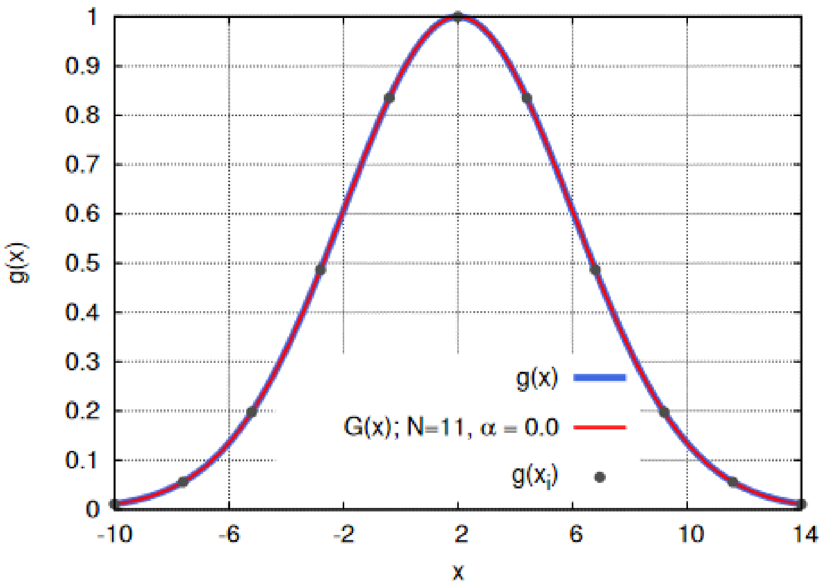
W celu rozwiązania układu równań ze wzoru (4) została wykorzystana biblioteka GSL i procedury wykorzystywane już w ramach poprzednich zajęć. Równanie (2) zostało podzielone tak aby,

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k = \sum_{i=0}^{m_r 1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}\right),$$

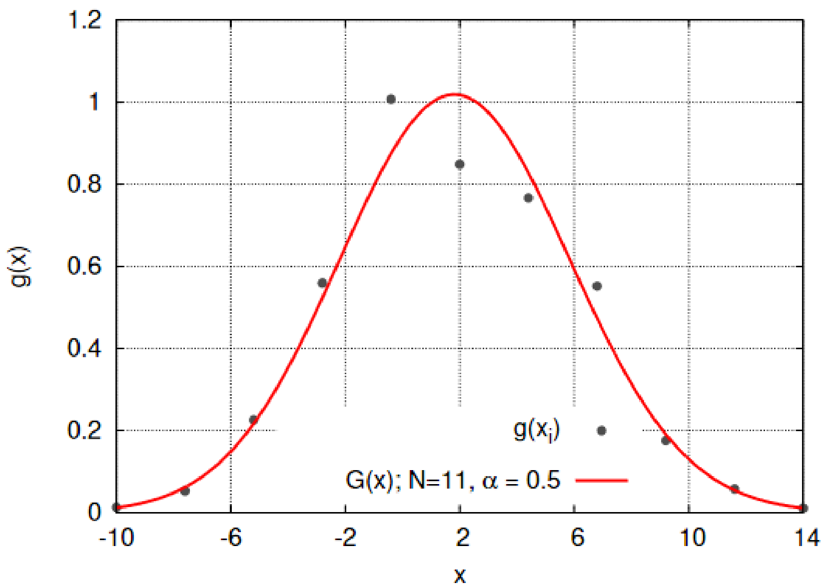
następnie zapisane przy pomocy równania (3), gdzie: $r_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k$.

WYNIKI

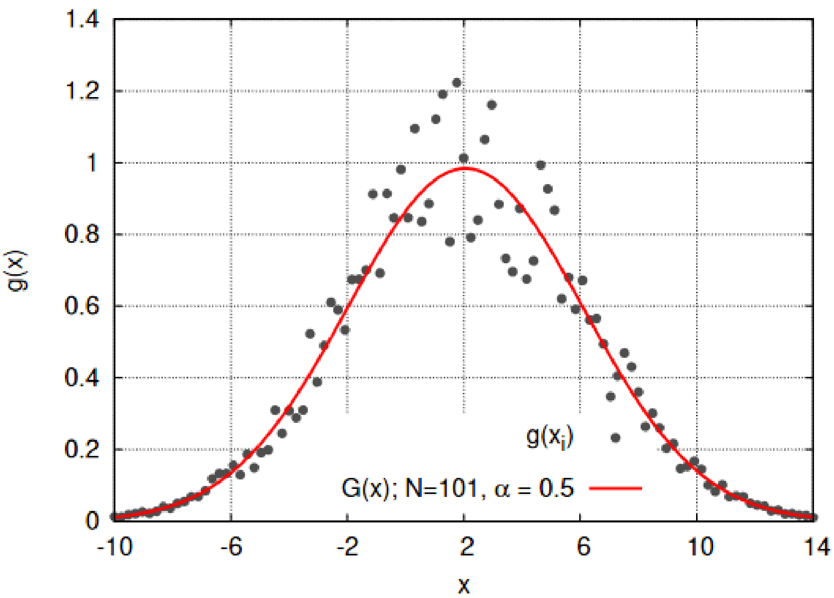
Wyniki zostały zaprezentowane w postaci wykresów . Każdy wykres przedstawia wykres badanej funkcji oraz odpowiadającej jej aproksymacji.



Rysunek 1: Wykresy funkcji aproksymowanej i aproksymującej dla 11 węzłów.



Rysunek 2: Wykres dla funkcji $g_2(x)$, 11 węzłów.



Rysunek 3: Wykres dla funkcji $g_2(x)$, 101 węzłów

WNIOSKI

Jak widać na *Rysunku 1* – funkcja aproksymowana całkowicie pokryła się z funkcją aproksymującą co świadczy o dokładności analizowanej metody. *Rysunek 2 i 3* pokazują, że nawet pomimo dodania losowego szumu w funkcji $g_2(x)$, metoda poradziła sobie z przybliżeniem funkcji wejściowej w sposób zadowalający.

Wnioskiem zatem może być stwierdzenie, iż aproksymacja wielomianowa daje w miarę szybkie i dokładne przybliżenie funkcji dla znanych wartości na zadanym przedziale. Wartym także zaznaczenia jest fakt, iż w obserwowany na poprzednich laboratoriach spadek dokładności dla funkcji interpolowanych węzłami równoodległymi (efekt Rungego) - tutaj nie miał miejsca – metoda nie wykazała niedokładności w tym względzie.

BIBLIOGRAFIA

1. dr hab inż. Tomasz Chwiej, „Aproksymacja”, rok 2019/2020, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH;
(http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/aproksymacja_1819.pdf)