SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 13 – SZACOWANIE CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH PRZY UŻYCIU KWADRATUR GAUSSA.

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

Wstęp Teoretyczny

Kwadratury Gaussa to metoda całkowania numerycznego, polegająca na tym, aby wyrażenie sumy opisane wzorem:

$$\sum_k^N A_k f(x_k), \tag{1}$$

przy odpowiednim doborze współczynników A_k,węzłów x_k oraz funkcji wagowej p(x), jak najlepiej przybliżało szacowaną całkę, opisaną jako:

$$\int_a^b p(x)\phi_k(x)dx, \tag{2}$$

Do wyznaczania kwadratur wykorzystuje się wielomiany ortogonalne. W trakcie laboratoriów zastosowane zostały trzy rodzaje tej metody.

Kwadratury z przedziału [-1,1] z wagą p=1 to kwadratury Gaussa-Legendre'a. Poprzez znalezienie stopnia wielomianu Legandre'a (oznaczony przez n) oraz numer jego zera (k) można wyznaczyć przybliżone położenie zera tego wielomianu, dzięki czemu otrzymać można:

$$x_k = \left\{1 - \frac{n-1}{8n^3} - \frac{1}{348n^4}\left(39 - \frac{28}{\sin^2(\phi_k)}\right)\right\}\cos(\phi_k) + O(n^{-5}),\ gdzie\ \phi_k = \frac{\pi(k-\frac{1}{4})}{n+\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Kwadratura Gaussa-Lauguerre'a to rodzaj kwadratury z wagą p(x) = e^{-x}, w przedziela [0, ∞] . Współczynnik A_k określić wtedy można jako:

$$A_k = \frac{\left((N+1)!\right)^2}{L'_{N+1}(x_k)L_{N+2}(x_k)}, \tag{4}$$

tak więc kwadratura przyjmuje zatem postać:

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx \approx \sum_{k=0}^N A_k f(x_k). \tag{5}$$

Trzecim rodzajem jest kwadratura Gaussa-Hermite'a – używana jest ona na przedziale [-∞,∞] z ustaloną wagą p(x) = e –x2, którą można opisać jako:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\, e^{-x^2} dx. \tag{6}$$

ZADANIE DO WYKONANIA

Zadaniem laboratoryjnym było:

1) przy użyciu kwadratury Gaussa-Legandre'a wyznaczyć wartość całki:

$$C_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx,$$

2) przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a wyznaczyć całkę:

$$C_2 = \int_0^\infty \ln(x)\exp(-x^2)\,dx,$$

   dodatkowo, wyznaczyć ją dla porównania także z użyciem kwadratury Gaussa-Legandre'a dla przedziału [0,5],

3) stosując kwadraturę Gaussa-Laguere'a wyliczyć całkę:

$$C_3 = \int_0^\infty \sin(2x)\,e^{-3x}dx.$$

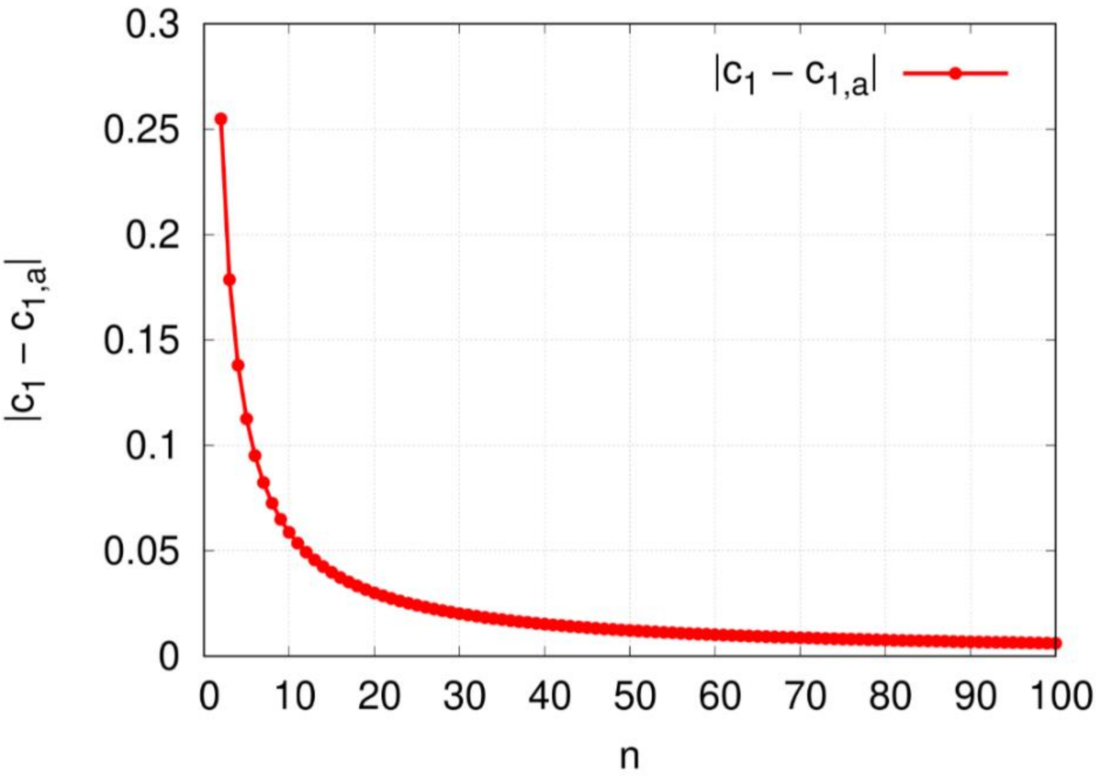
We wszystkich przypadkach obliczenia powtórzone powinny zostać dla różnej liczby węzłów – tj. n = 2, 3, …. 100. Wartości dokładne dla kolejnych całek zostały ustalone jako: C_1 = Π/3, C_2 = -0.8700577 C_3= 2/13.

METODA

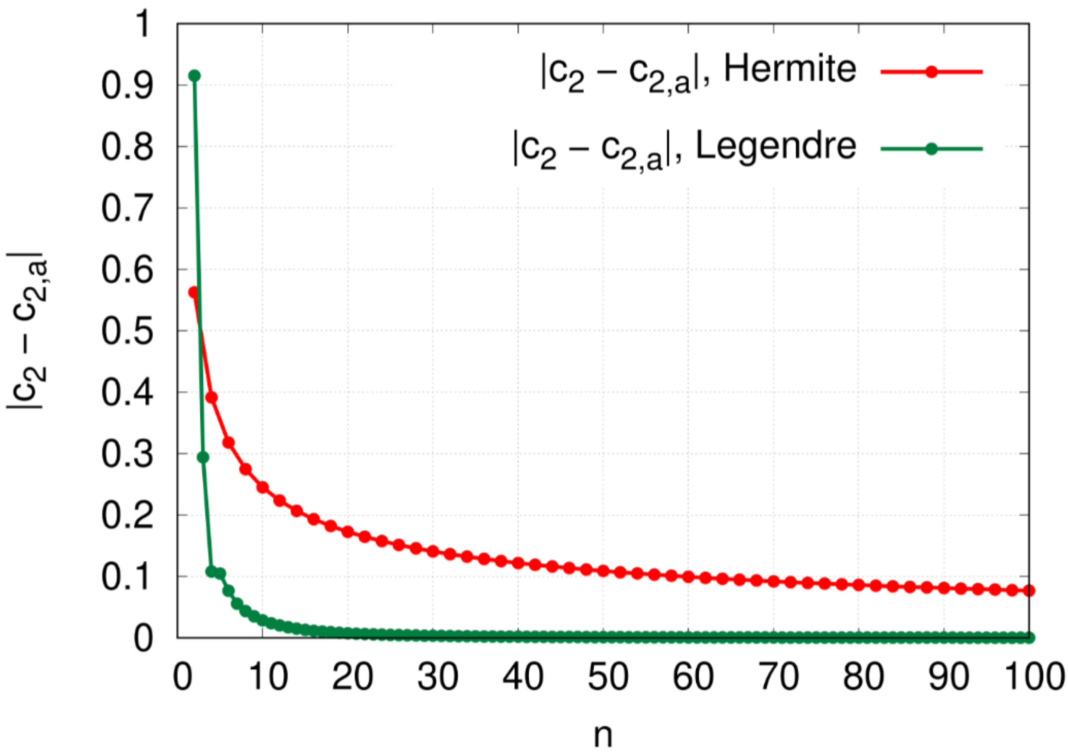
Zaimplementowane zostały osobne funkcje pomocnicze – *Gauss-Leg*, *Gauss-Lau* oraz *Gauss-Her* wyznaczające kwadratury Gaussa dla jej konkretnego rodzaju. Do obliczenia kwadratur wykorzystana została biblioteka '*numerical recipes*'. Skorzystano kolejno z procedury *void gauleg* – przyjmującej przedział całkowania, tablicę dla współrzędnych węzłów, współczynniki kwadratury oraz liczbę węzłów, *void gauher* – przyjmująca tablicę dla współrzędnych węzłów, liczbę węzłów oraz tablicę współczynników kwadratury, oraz *void gaulag*, która przyjmuje to samo co metoda *gauher* z dodatkowym parametrem alf=0.

WYNIKI

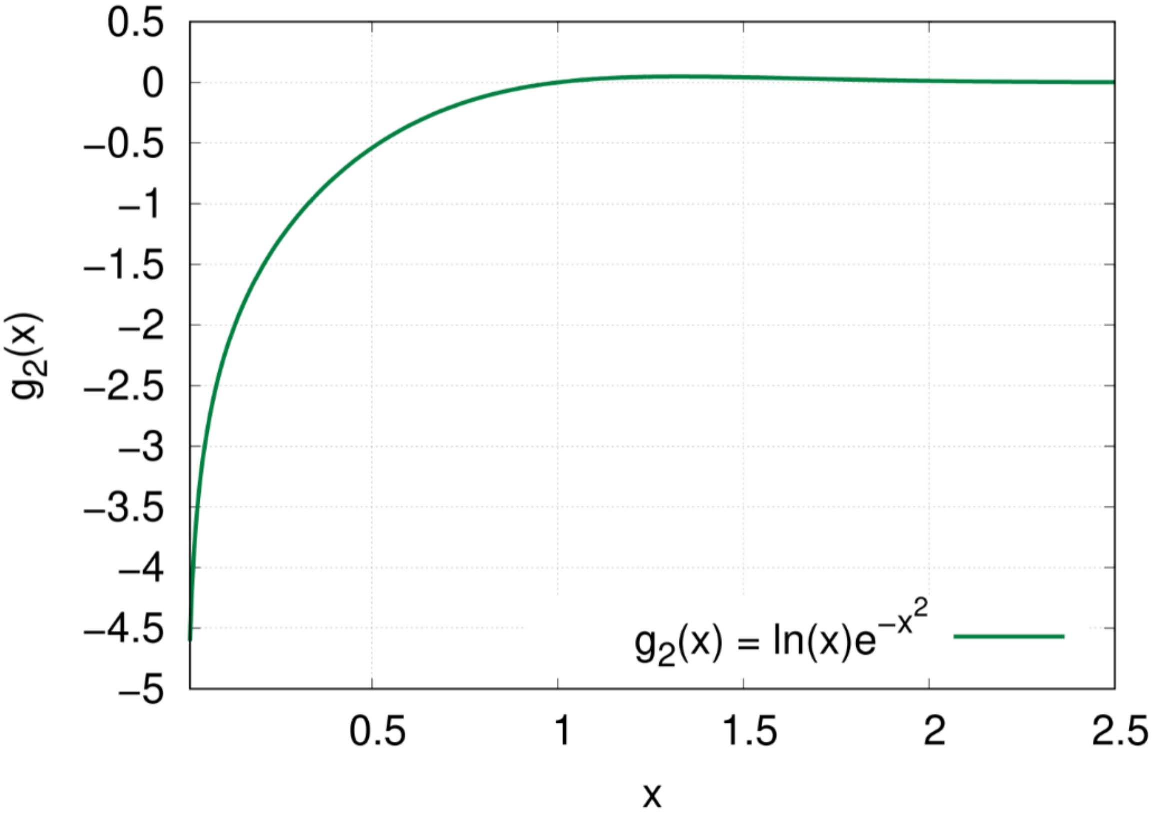
Wyniki zostały zaprezentowane na wykresach jako wartość bezwzględna różnicy przybliżenia całki i jej wartości dokładnej (tzw. błąd bezwzględny). Wykresy zaprezentowane są poniżej.



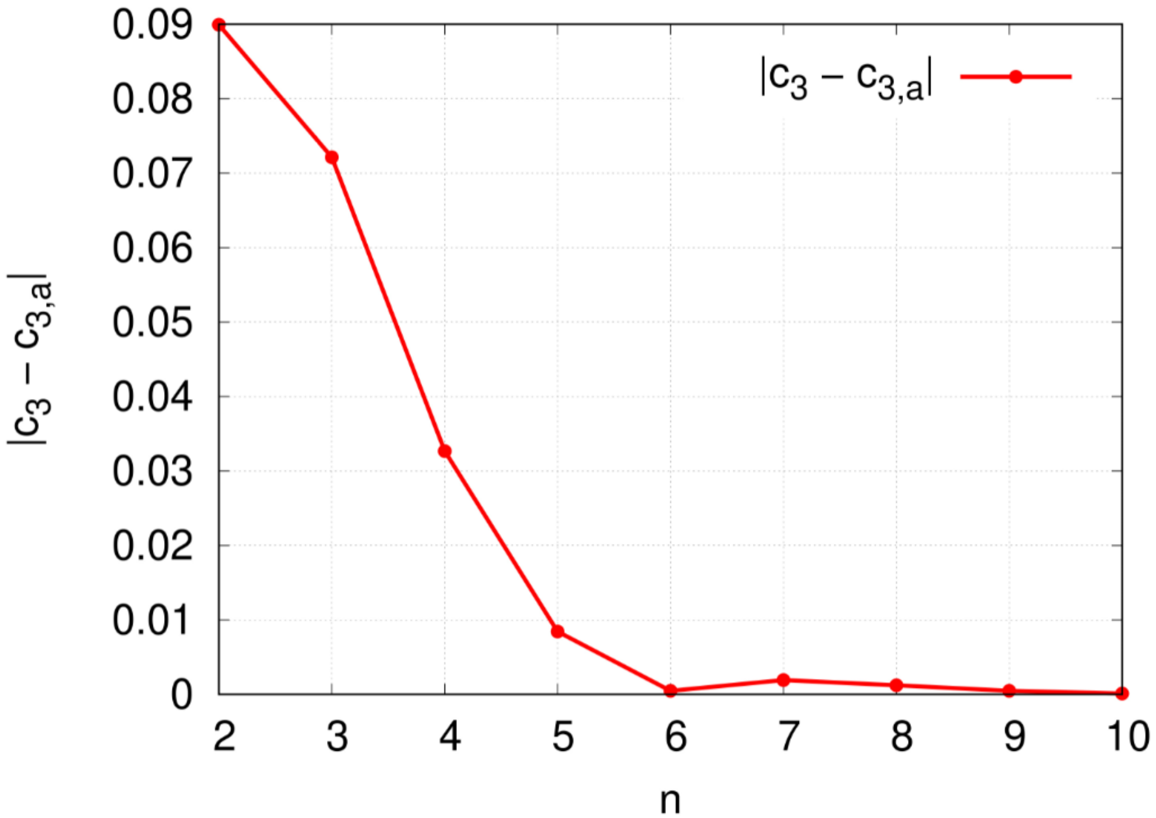
Rysunek 1: Wyniki dla całki C_1 w przedziale [1,2] – błąd bezwzględny całkowania.



Rysunek 2: Wyniki dla całki C_2 w przedziale [0,oo] – błąd bezwzględny całkowania dla kwadratury Gaussa-Heremite'a oraz Gaussa-Legenre'a.



Rysunek 3: Wyniki dla całki C_2 – wykres funkcji.



Rysunek 4: Wyniki dla całki C_3 w przedziale [0,oo] – błąd bezwzględny całkowania dla kwadratury.

Wnioski

Jak widać na powyższych wykresach – metoda kwadratur Gaussa pozwala na dość dokładne wyznaczenie wartości całek niewłaściwych – błąd bezwzględny w żadnym przypadku nie przekroczył wartości 1.

Dodatkowo można zaobserwować, na *Rysunku 1, Rysunku 2* oraz *Rysunku 4*, że wraz ze wzrostem ilości węzłów znacznie maleje błąd szacowania. Na *Rysunku 1* widać, że wartość ta szybko maleje na przedziale do około 15 węzłów, potem coraz bardziej się wypłaszacza osiągając poziom prawie 0. Podobnie kreuje się to na *Rysunku 2,* można równocześnie jednak zauważyć, że w przypadku całki C_2 zdecydowanie bardziej efektywna jest metoda Gaussa Legendre'a, gdzie błąd szacowania spada w okolice zera już przy kilkunastu węzłach, by potem utrzymywać się w granicy zera. Dla kwadratury Gussa-Hermite'a wykres maleje dużo łagodniej, w dodatku wartość błędu bezwzględnego nie spada poniżej 0.1, aż do okolicy, gdzie ilość węzłów wynosi ponad 90.

Wnioskować zatem można, że dokładność metody kwadratur Gaussa silnie uzależnione jest od ilości węzłów i ich położenia. Metoda ta, przy odpowiednim doborze węzłów, okazuje się bardzo dokładna i efektywna.