SPRAWOZDANIE METODY NUMERYCZNE

LABORATORIUM NR 2

Aleksandra Krzemińska,

Informatyka Stosowana II rok WFiIS, I stopień,

rok 2021

Wstęp teoretyczny

Jedną z metod rozwiązywania układu równań liniowych jest wykorzystana na zajęciach laboratoryjnych metoda rozkładu LU (z angielskiego od 'lower' – dolna i 'upper' – górna). Przyjmijmy następującą macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

wówczas wyznaczyć można jej macierz L i U, gdzie **A = L U**, które kreują się jak poniżej:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1,n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Taki rozkład ułatwia nam obliczenia w związku z tym, iż otrzymujemy dwie macierze trójkątne: L - z jedynkami na przekątnej głównej i U – tak, aby **A = L U**. Dzięki temu równanie **A X = B** możemy zastąpić **L U X = B**. Następnie możemy rozbić to równanie na dwa – **L Y = B** i **U X = Y**, gdzie zarówno wektor **X** jak i **Y** otrzymujemy natychmiast korzystając z właściwości rozwiązywania równań z macierzami trójkątnymi.

Zadanie do wykonania

Zadaniem laboratoryjnym było znalezienie rozkładu LU dla macierzy **A**, gdzie $a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta}$ i $\delta = 2$, wyznaczyć wyznacznik dla zadanej macierzy **A**, znaleźć jej macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$, iloczyn macierzy **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ oraz znaleźć współczynnik uwarunkowania macierzy.

Metoda

Rozkład LU można obliczyć przy użyciu procedury *gsl_linalg_LU_decomp* z biblioteki GSL, która przyjmowała wcześniej zainicjowaną (zgodnie z warunkami zadania) macierz **A**, wektor permutacji, który także zainicjowany został przez procedurę *gsl_permutation_calloc* z biblioteki GSL, i zmienną signum(int) - określającą parzystość liczby permutacji. Procedura wynikowo zastępuje macierz **A** jej rozkładem LU.

Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego, że *det(AB) = det(A) * det(B)*, można od razu wyliczyć wyznacznik dla podanej macierzy **A**: wiedząc, że *det(L) = 1*, a *det(U)* to iloczyn wyrazów tej macierzy na głównej przekątnej, to *det(A) = det(LU) = det(L)*det(U) = 1*det(U) = det(U).*

Biblioteka GSL oferuje także procedurę obliczającą macierz odwrotną: gsl_linalg_LU_solve, wykorzystując 4 układy równań z wektorami wyrazów wolnych – procedura przyjmuje macierz **A**, wektor wyrazów wolnych i wektor rozwiązań.

Iloczyn macierzy **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ obliczany był według poniższego algorytmu:

```
for(i=0;i<=n;i++){
    for(j=0;j<=n;j++){

        C[i][j]=0.; //zerujemy komorke w ktorej zapiszemy wartosc

        for(k=0;k<=n;k++)C[i][j]+=A[i][k]*B[k][j]; //iloczyn skalarny

    }
}
```

Jak wiadomo $\mathbf{A}*\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ (macierz jednostkowa) – co za tym idzie – w tym podpunkcie można wysunąć hipotezę, że wynik uzyskany na laboratoriach także będzie macierzą jednostkową.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy *cond* zależny jest bezpośrednio od wartościami maksymalnych w macierzach dla których liczony jest wskaźnik. Pozwala on na oszacowanie dokładności otrzymywanych wyników. W przypadku powyższego zadania:

$$cond = \|A\|_{\alpha,\beta} * \|A^{-1}\|_{\alpha,\beta}, \qquad gdzie\ \|A\|_{\alpha,\beta} = \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|$$

Wyniki

Po implementacji macierz **A** uzyskała następującą postać:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{pmatrix}$$

Macierze **L** i **U**, po użyciu procedury *gsl_linalg_LU_decomp* dla powyższej macierzy **A**, kreują się jak następuje:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.666667 & 0.833333 & 1 & 0 \\ 0.4 & 1 & -0.857143 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.0333333 & 0.0416667 & 0.0428571 \\ 0 & 0 & -0.00138889 & -0.00238095 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000102041 \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy **A** wyniósł: det(A) = 2.36206e-09, a jej macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

Wynik iloczynu $\mathbf{AA}^{-1}$:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2.27374e{-13} & 0 & 0 \\ -2.84217e{-14} & 1 & 4.54747e{-13} & 0 \\ 0 & -2.27374e{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy dla macierzy **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ jest równy 14700.00

Wnioski

Rozkład LU jest szybką i prostą metodą liczenia układów równań z macierzami. Metoda ta znacznie ułatwia też liczenie wyznacznika macierzy, gdyż sprowadza się do obliczenia trywialnego problemu - liczenia wyznacznika macierzy trójkątnej.

Wynik ilorazu **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ (macierzy odwrotnej **A**) dał wynik bliski macierzy **I** (jednostkowej), jednak wynik nie jest dokładny. Jest to spowodowane wysokim wskaźnikiem uwarunkowania, z czego wynika, iż problem w zadaniu jest źle uwarunkowany - im większy wskaźnik uwarunkowania tym bardziej niestabilny wynik jest otrzymywany. W bieżącym przypadku, wskaźnik o wartości 14700.00 powoduje niedokładność w wynikach oraz niestabilność wyników - nawet drobna zmiana we współczynnikach którejś z macierzy spowoduje znaczące zmiany w kolejnych krokach obliczeniowych.