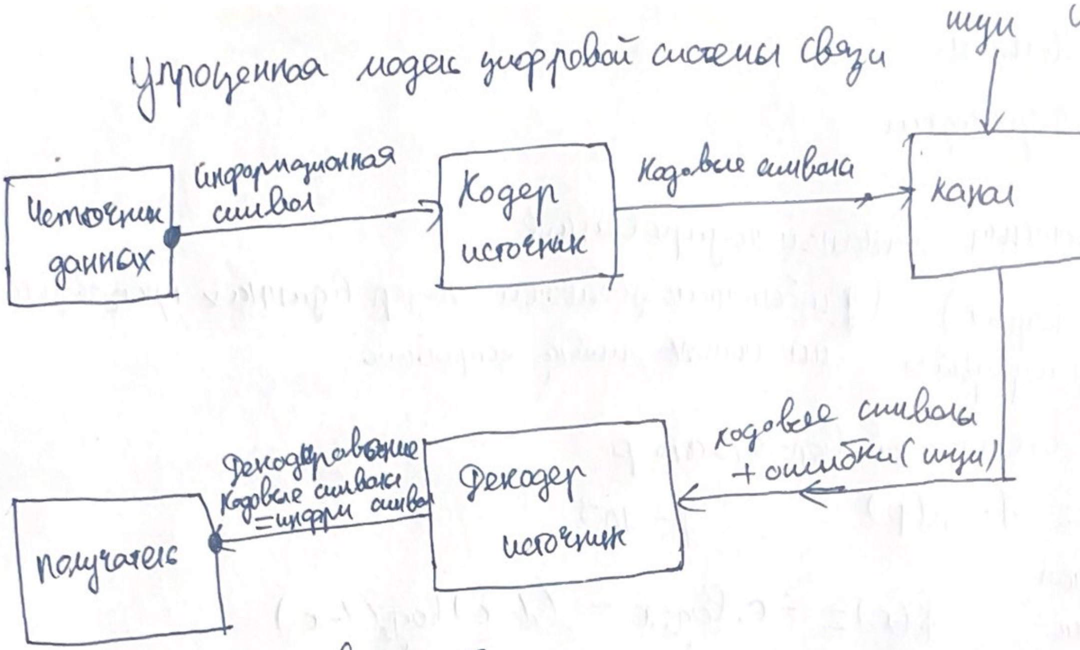
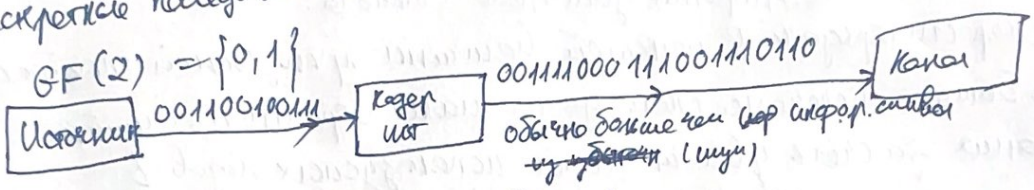
05.02.26

# Упрощенная модель цифровой системы связи



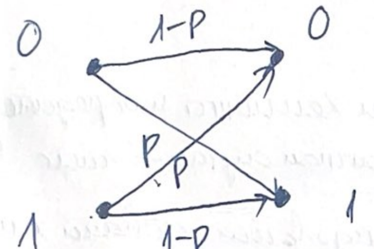

Дискретные последовательности

$GF(2) = \{0, 1\}$




Двоичный симметричный канал (ДСК)

$p$ – переходная вероятность. вероятность ошибки одного символа.




Источник $\xrightarrow{k}$ 0011 $(n)$ Кодер 000 000 111 111

0 → 000

1 → 111

инф сим   код симв

Кодирование

$R = \frac{1}{3}$

ДСК $p = 10^{-3}$

$P_e =$

$P_e = p$

0 → 0

1 → 1

$R = 1$

1 ошибка

| | |
|---|---|
| 000 | 000 |
| | 001 |
| | 010 |
| | 100 |
| | 110 |
| | 101 |
| | 011 |
| | 111 |

$3p^2(1-p) + p^3$ — $10^{-6}$

ДСК $p = 10^{-3}$

00 → 00000

01 → 10110   10000

10 → 01011 → 01001

11 → 11101   $R = \frac{2}{5}$

$R = \frac{k}{n}$ – скорость кода.

1948 Шеннон

Теория информации

Кодир источник канальное кодирование:

(хафман) (избыточность убирает) уменьшит размер файла

(избыточность добавляем кодер в данных прогоняется мы можем ошибку исправлять.

Для ДСК с переходной вероятностью $p$

$$C = 1 - h(p) \qquad p = 10^{-3}$$

пропускная способность

$$h(x) = -x \cdot \log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$$

энтропия двоичного ансамбля.

при скорости передачи $R$ меньшей величины пропускной способности $C$, может быть обеспечено сколь угодно малая вероятность ошибки декодирования за счёт увеличения длины используемых кодов $L$ ⇒ увеличение сложности кодирования и декодирование. Если $R > C$ надежная передача не возможна.

Вес Хемминга

Если $x$ – кодовое слово, то $w(x)$ – весом Хемминга и определяется как число ненулевых элементов в $x$. В двоичном случае – число "1"

Расстояние Хемминга между двумя кодовыми словами $x$ и $y$ → $d(x,y)$ – определяется как количество элементов слова, которые отличаются друг от друга

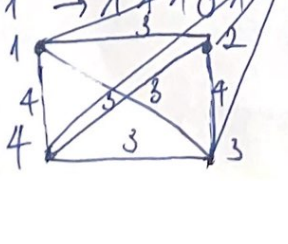
x 001101 – 3
y 101001 – 3

$d(x,y) = 2$

$$d(x,y) = w(x+y)$$ (побитово по mod 2)

$$d(x,0) = w(x)$$

00 → 00000 1
01 → 10110 2
10 → 01011 3
11 → 11101



| $y \downarrow$ \ $x \rightarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 0 | 4 | 3 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 3 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 0 |

$d(x,y)$ $d_{min} = 3$

$$d_{min} = \min_{x \neq 3} d(x,y)$$

минимальное расстояние кода.

Предположим, что код исправляет ошибки кратности $t$

$$t \le \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor \qquad \lfloor\ \rfloor \text{ — наибольшее целое не превыш } x$$

Линейный код — код, в котором сумма двух любых кодовых слов тоже является кодовым словом. $C$ — мн-во кодовых слов.

$$\forall x,y \in C: \quad (x+y) \in C \qquad GF(2) \quad z = x+y \in C$$

$$d(x,y) = w(x+y) = w(z) = w(z+0) = d(z,0)$$

$$d_{min} = \min_{x,y \in C,\, x \ne y} d(x,y) = \min_{z \in C,\, z \ne 0} w(z)$$

$GF(q)$ $\quad R = \frac{k}{n}$

Линейный $q$-ичный код $(n, \overset{\text{инфор}}{k})$-код $C$ называют любое $k$-мерное подпространство пространства $F_q^n$ всевозможных векторов длины $n$.

$q = 3 \quad k = 2 \quad n = 5$

$q^k \qquad GF(3) = \{0,1,2\}$

$c_1$ 0 0 0 0 0

$c_2$ 1 0 1 1 0

$c_3$ 0 1 0 1 1

$c_4$ 1 1 1 0 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix}$$

$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = c_1$

$0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = c_3$

$1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = c_2$

$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = c_4$

$F_3^2$, $\quad q^k = 3^2 = 9$: 00 ← 00000, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22 ← 22222 $\qquad q^n = 3^5 \quad F_3^5$

$n = 5$

$k = 2$.

Порождающей матрицей $(n,k)$ — кода называется матрица размера $k \times n$, где строки — базисные вектора.

Кодовые слова — линейные комбинации базисных векторов.

$G$ — порожд. м. $\qquad 2^k$

$m$ — инф. слова $\qquad m = (m_1, m_2, \dots, m_k) \qquad R = \frac{k}{n}$

$c$ — кодовые слова $\qquad c = m \cdot G$

Предположим, что для некоторого вектора $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, все кодовые слова удовлетворяют $(\bar{c_i}, \bar{h})$ $\qquad \bar{c_i} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$= c_1 \cdot h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_n \cdot h_n = 0 \qquad GF(2)$$

00000
10110
01011
11101

$h = [00111]$ ортогонален коду

проверка.

$G \cdot h^T = 0$

$n-k$ – проверок 3

$H$ = размера $(n-k, n)$ 3,5

$G \cdot H^T = \emptyset$ $C \cdot H^T = \emptyset$

проверочная матрица.