

Glody KUTUMBAKANA

# **Compte Rendu Hilbert**

Année 2024 -2025

# Introduction

L'objectif de ce TP est d'implémenté la Matrice Hilbert et de tester et analyser l'inversion de cette matrice.

Les matrice Hilbert sont des cas classique en algèbre linéaire numérique car elles sont très mal conditionnées, ce qui signifie que leur l'inversion est numériquement instable

## Matrice Hilbert

Une matrice Hilbert de taille arbitraire  $n$  est une matrice carrée  $n \times n$  définie par la formule suivant :

$$(H[i][j] = 1/(i+J+1))$$

## Analyse

Après implémentation de la matrice j'ai remarqué qu'elles sont mal conditionnées car elle posent de sérieux problème lorsqu'on essaie de résoudre  $Hx = b$ .

Lorsqu'on résout un Système linéaire  $Hx = b$  des erreurs apparaissent avec l'*EPSILON* 10.E-06 car dans la diagonal nous tombons avec un  $D[i][i] = 0,0000009$  partir de la taille 7, étant donné que la particularité de la Matrice Hilbert est que à chaque fois que la taille est grande les coefficient de la diagonal devient de plus en plus petite mais si nous augmentant l'Epsilon à 10.E-24 nous pouvons atteindre les résultat demandée

# Image et Analyse

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 2
Matrice de Hilbert de taille 2 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5
0.5 0.3333333333333333

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
4.00000000000001 -6.00000000000002
-6.00000000000002 12.00000000000004

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0 0.0
0.0 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du prouit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 27.00000000000001
Conditionnement Infinie de la matrice : 27.00000000000001
```

Pour une taille de 2 on peut voir que le conditionnement est déjà élevé ce qui veut dire que le taux d'erreur de calcule numérique est haut

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 3
Matrice de Hilbert de taille 3 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333
0.5 0.3333333333333333 0.25
0.3333333333333333 0.25 0.2

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
9.0000000000057 -36.0000000000031 30.0000000000003
-36.0000000000031 192.0000000000017 -180.0000000000162
30.000000000003 -180.0000000000162 180.0000000000153

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0 0.0 0.0
0.0 1.00000000000007 -7.105427357601002E-15
8.881784197001252E-16 0.0 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du prouit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 748.000000000066
Conditionnement Infinie de la matrice : 748.000000000066
```

Pour une taille de 3 le conditionnement ne fait que s'augmenter considérablement pour des raison donnée ci-dessus

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 4
Matrice de Hilbert de taille 4 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
15.99999999999595 -119.9999999999415 239.9999999998408 -139.9999999999893
-119.9999999999417 1199.999999999206 -2699.999999997913 1679.999999998577
239.999999999843 -2699.999999997913 6479.99999999457 -4199.99999999631
-139.9999999998911 1679.99999999857 -4199.9999999963 2799.99999999749

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0 0.0 0.0 0.0
-3.552713678800501E-15 1.0000000000000568 -1.1368683772161603E-13 0.0
3.552713678800501E-15 -5.684341886080802E-14 1.0000000000001137 -1.1368683772161603E-13
7.105427357601002E-15 -2.842170943040401E-14 1.1368683772161603E-13 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du prouit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 28374.999999997628
Conditionnement Infinie de la matrice : 28374.999999997624
```

C'est ainsi pour la taille de 4

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 5
Matrice de Hilbert de taille 5 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125
0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
24.99999999961986 -299.999999992856 1049.9999999969223 -1399.9999999953689 629.9999999977335
-299.999999992868 4799.99999986661 -18899.99999942636 26879.99999913634 -12599.99999957865
1049.9999999969268 -18899.99999942647 79379.999997536 -117599.9999962925 56699.9999981922
-1399.99999995367 26879.9999991365 -117599.9999962928 179199.999994424 -88199.9999972818
629.99999997738 -12599.9999957874 56699.9999981923 -88199.9999972818 44099.9999986752

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0000000000000142 -4.547473508864641E-13 0.0 0.0 0.0
2.842170943040401E-14 1.0000000000009095 -3.637978807091713E-12 0.0 -1.8189894035458565E-12
5.684341886080802E-14 0.0 0.999999999990905 0.0 1.8189894035458565E-12
2.842170943040401E-14 -6.821210263296962E-13 2.7284841053187847E-12 0.99999999998181 1.8189894035458565E-12
2.842170943040401E-14 -2.2737367544323206E-13 -9.094947017729282E-13 0.0 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 943655.9999970518
Conditionnement Infinie de la matrice : 943655.9999970518
```

Pareil pour la taille 5 et cela sera de même pour la taille 6

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 6
Matrice de Hilbert de taille 6 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111
0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1
0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
36.00000000055229 -630.0000000175405 3360.0000001266017 -7560.00000344473 7560.00000392727 -2772.00000158645
-630.000000175348 14700.00000550084 -88200.00000394555 211680.00001068506 -220500.00001214677 83160.00000489561
3360.0000001266358 -88200.00000394564 564480.0000281881 -1411200.0000761296 1512000.0000863853 -582120.0000347686
-7560.000000344466 211680.00001068463 -1411200.0000761286 3628800.000205239 -3969000.000232594 1552320.0000935262
7560.000000392876 -220500.00001214733 1512000.0000863858 -3969000.0002325946 4410000.000263356 -1746360.0001058227
-2772.0000001587337 83160.0000489614 -582120.0000347691 1552320.0000935267 -1746360.0001058227 698544.0000425001

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0000000000002274 1.8189894035458565E-12 0.1 1.641532182693481E-10 5.820766091346741E-11 0.0
0.0 1.000000000005457 2.9103830456733704E-11 5.820766091346741E-11 -5.820766091346741E-11 0.0
5.684341886080802E-14 0.0 1.0000000000291038 5.820766091346741E-11 2.9103830456733704E-11 -1.4551915228366852E-11
2.2737367544323206E-13 -1.8189894035458565E-12 2.9103830456733704E-11 0.999999999708962 5.820766091346741E-11 -4.3655745685100555E-11
1.7053025658242404E-13 3.637978807091713E-12 2.1827872842550278E-11 2.9103830456733704E-11 1.0 0.0
-5.684341886080802E-14 2.7284841053187847E-12 -3.637978807091713E-11 5.820766091346741E-11 -2.9103830456733704E-11 1.00000000000291038

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 2.907027900171671E7
Conditionnement Infinie de la matrice : 2.9070279001716707E7
```

Pour les taille supérieur a 7 nous commençons a avoir des irrégularité car plus la taille de la matrice est grande plus la diagonal devient de plus en plus petite d'où l'exception de « Le système linéaire est irrégulier » car le epsilon donné est trop petite pour les taille des 7 à 15 comme nous allons le constaté dans les image qui suivent ci-dessous

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 7
Matrice de Hilbert de taille 7 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1
0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091
0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333
0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693

Le système linéaire est irrégulier
```

Taille 8

Taille 9

```

Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 9
Matrice de Hilbert de taille 9 ..... .
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333
0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693
0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142
0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666666667
0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666666667 0.0625
0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666666667 0.0625 0.058823529411764705

Le système linéaire est irrégulier

```

Taille 10

```

Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 10
Matrice de Hilbert de taille 10 ..... .
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693
0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142
0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666666
6667
0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666666667 0.0625
0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666666667 0.0625 0.058823529411764705
0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666666667 0.0625 0.058823529411764705
555555
0.1 0.0909090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555555 0.0526315789
4736842

Le système linéaire est irrégulier

```

Taille 11

Taille 12

Taille 13

```

Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 13
Matrice de Hilbert de taille 13 ..... .
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.0
7142857142857142
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142
857142857142 0.06666666666666667
0.25 0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666
666666666667 0.0625
0.2 0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666
66666667 0.0625
0.1666666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666666
6667 0.0625 0.058823529411764705
0.14285714285714285 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823
529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842
0.125 0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555
555555555555 0.05263157894736842 0.05
0.1111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.055555555555
55555 0.05263157894736842 0.05
0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736
4736842 0.05 0.047619647619047616 0.04545454545454545
0.09090909090909091 0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736
842 0.05 0.047619647619047616 0.04545454545454545
0.0833333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047
619047616 0.04545454545454546 0.04347826889565216 0.041666666666666664
0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047616 0.045454545
545454545 0.04347826889565216 0.041666666666666664 0.04

Le système linéaire est irrégulier

```

Taille 14

Taille 15

## Conclusion

Pour conclure , les matrice Hilbert sont des cas classique en algèbre linéaire numérique car elles sont très mal conditionnées,ce qui signifie que leur l'inversion est numériquement instable, il est difficile résoudre un Système linéaire  $Hx = b$  a cause de son conditionnement assez instable.

Dans les tests demandés nous remarquons ceci :

pour une taille de 2 à 6 on peut voir que le conditionnement est élevé et instable car elle augmente à chaque fois que la taille augmente et c'est ce qui fait que le taux d'erreur de calcul numérique est haut car à chaque fois que la taille augmente la diagonale se rapproche de plus en plus de **ZÉRO**

pour une taille de 7 à 15 nous remarquons que la Diagonal est supérieur au EPSILON donné, ce qui nous donne cette erreur déclenché « le système est irrégulier »