

Glody KUTUMBAKANA

# Compte Rendu Hilbert

Année 2024 -2025

# Introduction

L'objectif de ce TP est d'implémenter la Matrice Hilbert et de tester et analyser l'inversion de cette matrice.

Les matrices Hilbert sont des cas classiques en algèbre linéaire numérique car elles sont très mal conditionnées, ce qui signifie que leur inversion est numériquement instable.

## Matrice Hilbert

Une matrice Hilbert de taille arbitraire  $n$  est une matrice carrée  $n \times n$  définie par la formule suivante :

$$(H[i][j] = 1/(i+j-1))$$

## Analyse

Après implémentation de la matrice j'ai remarqué qu'elles sont mal conditionnées car elles posent de sérieux problèmes lorsqu'on essaie de résoudre  $Hx = b$ .

Lorsqu'on résout un système linéaire  $Hx = b$  des erreurs apparaissent avec l'*EPSILON*  $10.E-06$  car dans la diagonale nous tombons avec un  $D[i][i] = 0,0000009$  à partir de la taille 7, étant donné que la particularité de la Matrice Hilbert est que à chaque fois que la taille est grande les coefficients de la diagonale deviennent de plus en plus petits mais si nous augmentons l'Epsilon à  $10.E-24$  nous pouvons atteindre le résultat demandé.

# Image et Analyse

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 2
Matrice de Hilbert de taille 2 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5
0.5 0.3333333333333333

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
4.000000000000001 -6.000000000000002
-6.000000000000002 12.000000000000004

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0 0.0
0.0 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 27.000000000000001
Conditionnement Infinie de la matrice : 27.000000000000001
```

Pour une taille de 2 on peut voir que le conditionnement est déjà élevé ce qui veut dire que le taux d'erreur de calcul numérique est haut

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 3
Matrice de Hilbert de taille 3 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.333333333333333
0.5 0.333333333333333 0.25
0.333333333333333 0.25 0.2

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
9.0000000000000057 -36.000000000000031 30.0000000000000
-36.000000000000031 192.00000000000017 -180.00000000000162
30.000000000000003 -180.00000000000162 180.00000000000153

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0 0.0 0.0
0.0 1.000000000000007 -7.105427357601002E-15
8.881784197001252E-16 0.0 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 748.00000000000066
Conditionnement Infinie de la matrice : 748.00000000000066
```

Pour une taille de 3 le conditionnement ne fait que s'augmenter considérablement pour des raisons données ci-dessus

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 4
Matrice de Hilbert de taille 4 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.333333333333333 0.25
0.5 0.333333333333333 0.25 0.2
0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666
0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
15.999999999999595 -119.99999999999415 239.99999999998408 -139.9999999999893
-119.99999999999417 1199.9999999999206 -2699.9999999997913 1679.9999999998577
239.9999999999843 -2699.9999999997913 6479.999999999457 -4199.999999999631
-139.99999999998911 1679.999999999857 -4199.99999999963 2799.999999999749

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0 0.0 0.0 0.0
-3.552713678800501E-15 1.0000000000000568 -1.1368683772161603E-13 0.0
3.552713678800501E-15 -5.684341886080802E-14 1.0000000000001137 -1.1368683772161603E-13
7.105427357601002E-15 -2.842170943040401E-14 1.1368683772161603E-13 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 28374.999999997628
Conditionnement Infinie de la matrice : 28374.999999997624
```

C'est ainsi pour la taille de 4

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 5
Matrice de Hilbert de taille 5 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.333333333333333 0.25 0.2
0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666
0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285
0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125
0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
24.999999999999999 -299.99999999999999 1049.99999999999999 -1399.99999999999999 629.99999999999999
-299.99999999999999 4799.99999999999999 -18899.99999999999999 26879.99999999999999 -12599.99999999999999
1049.99999999999999 -18899.99999999999999 79379.99999999999999 -117599.99999999999999 56699.99999999999999
-1399.99999999999999 26879.99999999999999 -117599.99999999999999 179199.99999999999999 -88199.99999999999999
629.99999999999999 -12599.99999999999999 56699.99999999999999 -88199.99999999999999 44099.99999999999999

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.000000000000000 -4.547473508864641E-13 0.0 0.0 0.0
2.842170943040401E-14 1.000000000000000 -3.637978807091713E-12 0.0 -1.8189894035458565E-12
5.684341886080802E-14 0.0 0.999999999999999 0.0 1.8189894035458565E-12
2.842170943040401E-14 -6.821210263296962E-13 2.7284841053187847E-12 0.999999999999999 1.8189894035458565E-12
2.842170943040401E-14 -2.2737367544323206E-13 -9.094947017729282E-13 0.0 1.0

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 943655.9999970518
Conditionnement Infinie de la matrice : 943655.9999970518
```

Pareil pour la taille 5 et cela sera de même pour la taille 6

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 6
Matrice de Hilbert de taille 6 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666
0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285
0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125
0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111
0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1
0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.0909090909090909

La matrice inverse de la matrice Hilbert est :
36.00000000055229 -630.0000000175405 3360.0000001266017 -7560.000000344473 7560.000000392727 -2772.000000158645
-630.000000175348 14700.000000550084 -88200.00000394555 211680.00001068506 -220500.00001214677 83160.00000489561
3360.000001266358 -88200.00000394564 564480.0000281881 -1411200.0000761296 1512000.0000863853 -582120.0000347686
-7560.00000344466 211680.00001068463 -1411200.0000761286 3628800.000205239 -3969000.000232594 1552320.0000935262
7560.00000392876 -220500.00001214733 1512000.0000863858 -3969000.000232594 4410000.000263356 -1746360.0001058227
-2772.0000001587337 83160.00000489614 -582120.0000347691 1552320.0000935267 -1746360.0001058227 698544.0000425001

Le produit de la matrice Hilbert et de son inverse est :
1.0000000000002274 1.8189894035458565E-12 0.0 1.1641532182693481E-10 5.820766091346741E-11 0.0
0.0 1.0000000000005457 2.9103830456733704E-11 5.820766091346741E-11 -5.820766091346741E-11 0.0
5.684341886080802E-14 0.0 1.0000000000291038 5.820766091346741E-11 2.9103830456733704E-11 -1.455191522836852E-11
2.2737367544323206E-13 -1.8189894035458565E-12 2.9103830456733704E-11 0.9999999999708962 5.820766091346741E-11 -4.3655745685100555E-11
1.7053025658242404E-13 3.637978807091713E-12 2.1827872842550278E-11 2.9103830456733704E-11 1.0 0.0
-5.684341886080802E-14 2.7284841053187847E-12 -3.637978807091713E-11 5.820766091346741E-11 -2.9103830456733704E-11 1.0000000000291038

Norme du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Norme Infinie de la matrice du produit entre inverse et la matrice est égale à celle de la matrice identité
Conditionnement de la matrice : 2.907027900171671E7
Conditionnement Infinie de la matrice : 2.9070279001716707E7
```

Pour les taille supérieur a 7 nous commençons a avoir des irrégularité car plus la taille de la matrice est grande plus la diagonal devient de plus en plus petite d'où l'exception de « Le système linéaire est irrégulier » car le epsilon donné est trop petite pour les taille des 7 à 15 comme nous allons le constaté dans les image qui suivent ci-dessous

```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 7
Matrice de Hilbert de taille 7 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285
0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125
0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111
0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1
0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.0909090909090909
0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.0909090909090909 0.0833333333333333
0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.0909090909090909 0.0833333333333333 0.07692307692307693

Le système linéaire est irrégulier
```







```
Entrez la taille de la matrice de Hilbert : 15
Matrice de Hilbert de taille 15 .....
La matrice Hilbert est :
1.0 0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693
0.07142857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705
0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.0
7142857142857142 0.06666666666666667 0.0625
0.333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142
857142857142 0.06666666666666667 0.0625 0.058823529411764705
0.25 0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666
66666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555
0.2 0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.066666666
666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842
0.166666666666666 0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666
667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05
0.14285714285714285 0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823
529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047619047616
0.125 0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555
5555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047619047616 0.04545454545454545
0.111111111111111 0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555
555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047619047616 0.04545454545454545 0.043478260869565216
0.1 0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.0526315789
4736842 0.05 0.047619047619047616 0.04545454545454545 0.043478260869565216 0.04166666666666664
0.09090909090909091 0.08333333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736
842 0.05 0.047619047619047616 0.04545454545454545 0.043478260869565216 0.04166666666666664 0.04
0.083333333333333 0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047
619047616 0.04545454545454545 0.043478260869565216 0.04166666666666664 0.04 0.038461538461538464
0.07692307692307693 0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047619047616 0.045454545
454545456 0.043478260869565216 0.04166666666666664 0.04 0.038461538461538464 0.037037037037037035
0.07142857142857142 0.0666666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047619047616 0.045454545454545456 0.0434782
60869565216 0.04166666666666664 0.04 0.038461538461538464 0.037037037037037035 0.03571428571428571
0.066666666666667 0.0625 0.058823529411764705 0.05555555555555555 0.05263157894736842 0.05 0.047619047619047616 0.045454545454545456 0.043478260869565216 0.041666
66666664 0.04 0.038461538461538464 0.037037037037037035 0.03571428571428571 0.034482758620689655

Le système linéaire est irrégulier
```

# Conclusion

Pour conclure , les matrice Hilbert sont des cas classique en algèbre linéaire numérique car elles sont très mal conditionnées,ce qui signifie que leur l’inversion est numériquement instable, il est difficile résoudre un Système linéaire  $Hx = b$  a cause de son conditionnement assez instable.

Dans les teste demandées nous remarquons ceci :

pour une taille de 2 à 6 on peut voir que le conditionnement est élevé et instable car elle augmente a chaque fois que la taille augmente et c’est ce qui fait que le taux d’erreur de calcule numérique est haut car à chaque fois que la taille augmente la diagonal se rapproche de plus en plus de **ZÉRO**

pour une taille de 7 à 15 nous remarquons que la Diagonal est supérieur au EPSILON donné, ce qui nous donne cette erreur déclenché « le système est irrégulier »