Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Oktawiusz Doroszuk

6 stycznia 2024

1 Przekształcenia

Potencjał grawitacyjny

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x), \quad \Omega = (0,3), \quad \rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \\ 0, & x \in [2,3) \end{cases} \tag{1}$$

$$\phi(0) = 5, \quad \phi(3) = 4 \tag{2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \quad / \cdot v \tag{3}$$

$$\int_\Omega \phi'' v \, dx = \int_\Omega 4\pi G\rho v \, dx \tag{4}$$

Całkujemy przez części lewą stronę

$$\int_\Omega \phi'' v \, dx = \begin{vmatrix} f' = \phi'' & g = v \\ f = \phi' & g' = v' \end{vmatrix} = \phi' v \Big|_0^3 - \int_0^3 \phi' v' \, dx \tag{5}$$

Z warunku Dirichleta funkcja v musi zerować się na brzegach, więc

$$\phi' v \Big|_0^3 - \int_0^3 \phi' v' \, dx = -\int_0^3 \phi' v' \, dx \tag{6}$$

Podstawmy za $\phi = \overline{\phi} + w, \quad \overline{\phi} = 5 - \frac{x}{3}$

$$\phi' = w' - \frac{1}{3} \tag{7}$$

$$-\int_0^3 \phi' v' \, dx = -\int_0^3 w' v' \, dx + \frac{1}{3}\int_0^3 v' \, dx = \tag{8}$$

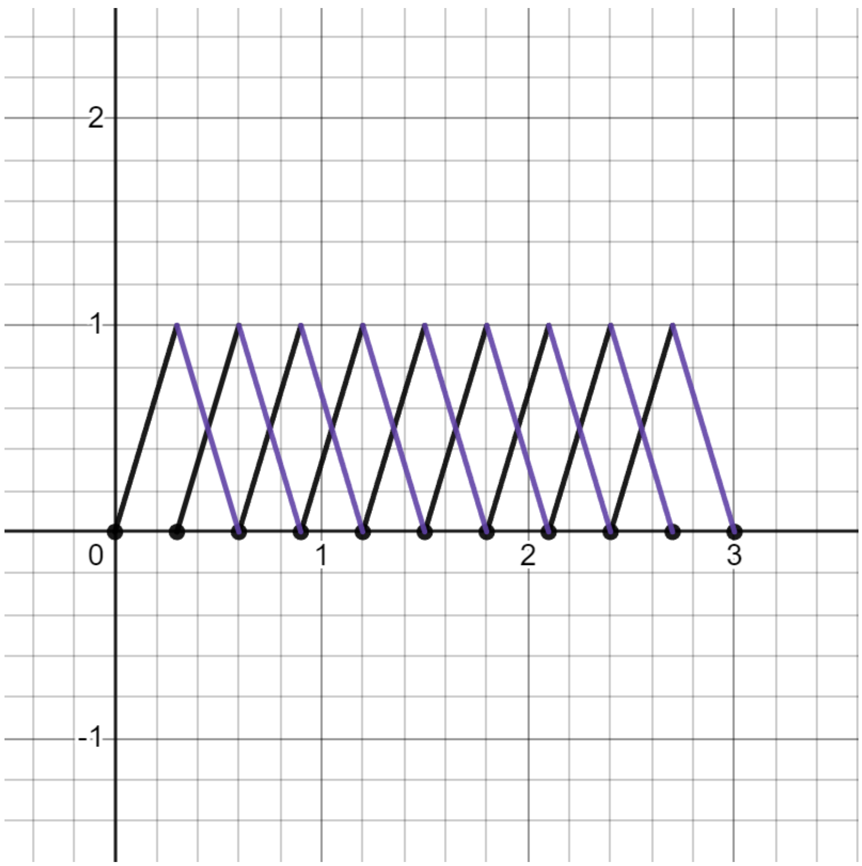
$$= -\int_0^3 w' v' \, dx + \frac{1}{3} v \Big|_0^3 = -\int_0^3 w' v' \, dx \tag{9}$$

Po podstawieniu obu stron równania dostajemy

$$-\int_0^3 w'v'\,dx = 4\pi G\int_0^3 \rho v\,dx \tag{10}$$

$$\begin{cases} B(w,v) = -\displaystyle\int_0^3 w'v'\,dx & (11)\\ L(v) = 4\pi G\displaystyle\int_0^3 \rho v\,dx & (12)\end{cases}$$

2 Funkcje testujące



Rys. 1. Funkcje testujące dla n = 10
link do wykresu w desmosie: https://www.desmos.com/calculator/ytmmscb6s8

Niech n oznacza liczbę elementów dziedziny $\Omega = (0, 3)$
Funkcje testujące będą dane wzorami:

dla $k = 3\frac{i}{n}, \quad i \in \{1, 2, ..., n-1\}$

$$e_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, k - \frac{3}{n}) \\ \frac{n}{3}x + 1 - \frac{n}{3}k, & x \in [k - \frac{3}{n}, k) \\ -\frac{n}{3}x + 1 + \frac{n}{3}k, & x \in [k, k + \frac{3}{n}) \\ 0, & x \in (k + \frac{3}{n}, 3] \end{cases} \tag{13}$$

Pochodne funkcji testowych wyglądają następująco
dla $k = 3\frac{i}{n}, \quad i \in \{1, 2, ..., n-1\}$

$$e_i'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, k - \frac{3}{n}) \\ \frac{n}{3}, & x \in [k - \frac{3}{n}, k) \\ -\frac{n}{3}, & x \in [k, k + \frac{3}{n}) \\ 0, & x \in (k + \frac{3}{n}, 3] \end{cases} \tag{14}$$

3 Układ równań

Podstawiamy za v funkcje $e_i, \quad i \in \{1, ..., n-1\}$

$$B(w, e_i) = L(e_i) \tag{15}$$

Następnie przybliżamy w jako liniową kombinację $w \approx \sum_{j=1}^{n-1} w_j e_j$

$$B(\sum_{j=1}^{n-1} w_j e_j, e_i) = L(e_i) \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} w_j B(e_j, e_i) = L(e_i) \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \cdots & B(e_{n-1}, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_{n-1}, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{n-1}) & B(e_2, e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy wagi w_i, a co za tym idzie przybliżenie funkcji w oraz ϕ.