Gabriel Catizam Farias Oliveira - 20.14004 - Rio: 24/11/2021

Hora: 18:51

1) Se V é um conjunto que contém o vetor nulo, e tal que u + v está em V sempre que u ~~&~~ v pertencem a V, então V é um espaço vetorial

Falso, visto que não foi definido a multiplicação por escalar ao vetor, ou seja, foi concluído apenas o fechamento da adição, onde se u e v forem vetores em V, então u + v está em V, porém o fechamento, onde α um escalar qualquer e u algum vetor de V, então αu está está em V, não foi concluído. Portanto, para V ser um espaço vetorial, deve-se satisfazer os dois fechamentos, porém apenas um foi satisfeito.

Gabriel Cotignoni Faria Oliveira - 2014004

2) Todo espaço vetorial com produto interno possui uma base ortonormal.

Verdadeiro, pois qualquer conjunto de vetores LI de um espaço pode ser ortogonalizado por meio do processo de ortogonalização de Gram Schmidt para assim se tornar uma base ortonormal, que possui tanto uma base ortogonal, ou seja, o produto interno dos seus vetores é igual a 0, quanto também seus vetores são unitários, ou seja, a norma deles é igual a 1

Exemplo de ortogonalização:

① $V_1 = (1,2,1)$, $V_2 = (1,1,3)$, $V_3 = (2,1,1)$

$B = \{V_1, V_2, V_3\}$

$$\boxed{\text{proj}_W V = \frac{V \cdot W}{\|W\|^2} W}$$

$W_1 = V_1 = (1,2,1)$

$W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = (0,-1,2)$

$W_3 = V_3 - \text{proj}_{W_1} V_3 - \text{proj}_{W_2} V_3 = \left(\frac{7}{6}, \frac{-7}{15}, \frac{-7}{30}\right)$

② $e_1 = \frac{W_1}{\|W_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$e_2 = \frac{W_2}{\|W_2\|} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$e_3 = \frac{W_3}{\|W_3\|} = \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}\right)$

} Agora isso é uma base ortonormal e assim, comprovamos o porquê de ser verdadeiro, já que passamos de uma base para uma base ortonormal

Gabriel Catizani Faria Oliveira - 2014004

3) Seja P^2 o conjunto dos polinomios de polinômios de grau menor ou igual a 2. Então, o conjunto $\{1, x, x^2\}$ é:

$a + b(t) + c(t^2) = a \times 1 + b \times t + c \times t^2$ → Conjunto gerador

Como esse conjunto é uma <u>base</u> canônica de de P_2, é um conjunto gerador e, portanto, <u>linearmente independente</u>, ou seja, qualquer polinômio de grau menor ou igual a 2 pode ser escrito com combinação linear deses monômios 1, t e t^2

Exemplo:

$$2 - t^2 = \boxed{2 \times 1 + 0 \times t + (-1) t^2}$$

$$a + b(t) + a_2(t^2) = 0 \rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

Isso deve valer para todo o t

Exemplo: $t = 0$

$$at + bt^2 = 0$$

$$t(a + bt) = 0$$

$$b = 0$$

t não pode ser 0 já que vale para todo t

$$a + bt = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$\boxed{b = 0}$$

Gabriel Catizani Faria Oliveira - 20.1.2004

4) A dimensão do espaço vetorial das matrizes 3 x 3 com coeficientes reais é igual a:

- 6
- 9
- 3
- 12

Você não falou sobre isomorfidade, mas pelo que entendi após ler a questão e pesquisar melhor o que eu entendi que uma matriz quadrada 3X3 é isomorfo a R^9 e um espaço vetorial R^9 tem dimensão igual a 9

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\overset{e_1}{(1,0,0,0,0,0,0,0,0)} + a_{12}\overset{e_2}{(0,1,0,0,0,0,0,0,0)} \vdots$$

$X_m \{e_1, \dots, e_9\}$ LI

Base de V_K

$\dim = 9$

$V_K = \{M_{3 \times 3}$ Espaço vetorial sobre $K\} \sim$

ISOMORFO

$R^9 = (x_1, \dots, x_9$

Gabriel Catizani Faria Oliveira - 2014004

5) Se A é uma matriz 10×12 que possui posto$(A) = 8$, então a nulidade de A é igual a:

○ 8

✓ 4

○ 12

○ 10

De acordo com o Teorema 4.18 do Reginaldo (da Dimensão do núcleo e da imagem), seja A uma matriz $m \times n$, a soma da dimensão do núcleo de A (nulidade) com a dimensão da imagem de A (posto) é igual ao número de colunas da matriz A. Portanto:

$$\text{nulidade} = n - \text{posto}(A_{10 \times 12}) = 12 - 8 = 4$$

Gabriel Cotegon Farias Oliveira - 2014004

6) Seja W um subespaço vetorial de R^n munido do produto interno e $W^\perp$ seu complemento ortogonal. Se W_1 é um subespaço de R^n tal que se $X \in W_1$ implica $X \cdot Y = 0$, para todo $Y \in W^\perp$. Então:

- ✓ $\dim(W_1^\perp) \geq \dim(W)$;
- o $\dim(W_1^\perp) \leq \dim(W)$;
- o $\dim(W_1^\perp) \geq \dim(W^\perp)$;
- o $\dim(W_1^\perp \leq \dim(W^\perp)$;

Exemplo: $V = R^3$, $W = [(1,1,1)]$ $\quad W^\perp = ?$

$<(x,y,z),(1,1,1)> = 0 \rightarrow x + y + z = 0$

$\hookrightarrow z = -x - y$

$(x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$

$W^\perp = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$

$\hookrightarrow$ é subespaço

$\hookrightarrow \dim W + \dim W^\perp = 1 + 2 = 3 = \dim V$ $\rightarrow$ $V = W \oplus W^\perp$

Como W_1 também é do espaço R^n, que nesse caso é R^3, e todo vetor de $W^\perp$ é ortogonal ao conjunto de todos vetores de R^3 e W_1 contém os vetores de R^n. Logo, $W_1^\perp = W^\perp$. Portanto, a dim de $W_1^\perp$ é maior ou igual a dimensão de W.