

Apunte Física 1

Luca Di Bene

15 de octubre de 2025

Índice

1. Unidades, Cantidades Físicas y Vectores	4
1.1. La Física	4
1.1.1. Resolución de problemas	4
1.1.2. Modelos idealizados	4
1.2. Mediciones, magnitudes y unidades	5
1.2.1. Magnitudes físicas y unidades	5
1.2.2. Conversión de unidades	5
1.2.3. Incertidumbre	5
1.3. Vectores y Suma de Vectores	5
1.3.1. Cantidades escalares y vectoriales	5
1.4. Componentes de vectores	6
1.5. Vectores unitarios	7
2. Movimiento en dos o en tres dimensiones	8
2.1. Vectores de posición y velocidad	8
2.2. El vector de aceleración	8
2.3. Movimiento de proyectiles	8
2.4. Movimiento en un círculo	9
2.4.1. Movimiento circular uniforme	9
2.4.2. Movimiento circular no uniforme	10
2.5. Velocidad relativa	10
3. Leyes del movimiento de Newton	11
3.1. Fuerza e interacciones	11
3.1.1. Fuerzas de contacto	11
3.1.2. Fuerzas a distancia	12
3.1.3. Medición de fuerzas	12
3.1.4. Superposición de fuerzas	12
3.2. Primera ley de Newton	12
3.2.1. Marcos de referencia inerciales	13
3.3. Segunda ley de Newton	13
3.3.1. Masa y fuerza	13
3.3.2. Enunciado de la segunda ley de Newton	13
3.3.3. Uso de la segunda ley de Newton	14
3.4. Masa y Peso	14
3.4.1. Variación de g con la ubicación	14
3.4.2. Medición de masa y peso	15
3.5. Tercera ley de Newton	15
3.6. Diagramas de cuerpo libre	15

4. Aplicación de las leyes de Newton	17
4.1. Empleo de la primera ley de Newton: Partículas en equilibrio	17
4.2. Empleo de la segunda ley de Newton: Dinámica de partículas	18
4.2.1. Peso aparente e ingravidez aparente	19
4.3. Fuerzas de fricción	20
4.3.1. Fricción cinética y estática	21
4.3.2. Fricción de rodamiento	25
4.3.3. Resistencia de fluidos y rapidez terminal	25
4.4. Dinámica del movimiento circular	26
4.5. Fuerzas fundamentales de la naturaleza	28
5. Trabajo y Energía Cinética	29
5.1. Trabajo	29
5.1.1. Trabajo: Positivo, negativo o cero	30
5.1.2. Trabajo total	31
5.2. Energía cinética y el teorema trabajo-energía	32
5.2.1. Significado de la energía cinética	35
5.3. Trabajo y energía con fuerza variable	35
5.3.1. Trabajo efectuado por una fuerza variable, movimiento rectilíneo	36
5.3.2. Resortes	36
5.3.3. Teorema trabajo-energía para movimiento rectilíneo, con fuerzas variables	38
5.3.4. Teorema trabajo-energía para movimientos en una curva	40
5.4. Potencia	43
6. Energía Potencial y Conservación de la Energía	45
6.1. Energía potencial gravitacional	45
6.1.1. Conservación de la energía mecánica (sólo fuerzas gravitacionales)	46
6.1.2. Energía potencial gravitacional para movimiento en una trayectoria curva	47
6.2. Energía potencial elástica	48
6.3. Fuerzas conservativas y no conservativas	49
6.3.1. Fuerzas conservativas	50
6.3.2. Fuerzas no conservativas	50
6.3.3. La ley de conservación de la energía	50
6.4. Fuerza y energía potencial	51
6.4.1. Fuerza y energía potencial en tres dimensiones	52
6.5. Diagramas de energía	53
7. Momento lineal, impulso y choques	54
7.1. Momento lineal e impulso	54
7.1.1. Segunda ley de Newton en términos del momento lineal	54
7.1.2. Teorema del impulso y el momento lineal	55
7.1.3. Comparación de momento lineal y energía cinética	56
7.2. Conservación del momento lineal	56
7.3. Conservación del momento lineal y choques	58
7.3.1. Choques elásticos e inelásticos	58
7.3.2. Choque totalmente inelásticos	58
7.3.3. Clasificación de los choques	59
7.4. Choques elásticos	59
7.4.1. Choques elásticos, un cuerpo inicialmente en reposo	60
7.5. Centro de masa	61
7.5.1. Movimiento del centro de masa	61
7.5.2. Fuerzas externas y movimiento del centro de masa	62
7.6. *Propulsión a reacción	63

8. Rotación de Cuerpos Rígidos	64
8.1. Velocidad y aceleración angulares	64
8.1.1. Velocidad angular	64
8.1.2. Velocidad angular como un vector	65
8.1.3. Aceleración angular	65
8.1.4. Aceleración angular como un vector	66
8.2. Rotación con aceleración angular constante	66
8.3. Relación entre cinemática lineal y angular	66
8.3.1. Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido	66
8.3.2. Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido	66
8.4. Energía en el movimiento rotacional	67
9. Dinámica del Movimiento Rotacional	69
10. Equilibrio y Elasticidad	70
11. Gravitación	71
11.1. Ley de Newton de la gravitación	71
11.1.1. Determinación del valor de G	72
11.2. Peso	72
11.3. Energía potencial gravitacional	73
11.3.1. Más sobre la energía potencial gravitacional	75
11.4. Movimiento de satélites	75
11.4.1. Satélites: Órbitas circulares	76
11.5. Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas	77
11.5.1. Primera ley de Kepler	78
11.5.2. Segunda ley de Kepler	78

1. Unidades, Cantidades Físicas y Vectores

1.1. La Física

La Física es una **ciencia experimental** que busca explicar fenómenos naturales a través de la observación y la experimentación. Los físicos formulan teorías mediante **modelos ideales, leyes y principios físicos**. Estas teorías se desarrollan con creatividad, pruebas y observaciones, como hizo Galileo al investigar la caída de los cuerpos.

1.1.1. Resolución de problemas

Resolver problemas permite aplicar conceptos. El proceso incluye:

1. Identificar conceptos: Elegir qué principios físicos son relevantes.
2. Plantear el problema: Traducirlo a ecuaciones.
3. Ejecutar la solución: Sustituir valores y hacer cálculos.
4. Evaluar la respuesta: Verificar si tiene sentido físico.

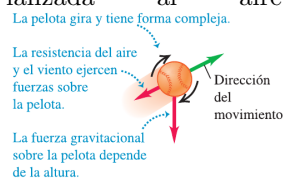
1.1.2. Modelos idealizados

En física, simplificamos los sistemas complejos creando **modelos idealizados** que omiten detalles irrelevantes. Estos modelos son válidos dentro de ciertos límites, como el modelo de caída libre de Galileo que omite la resistencia del aire.

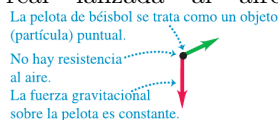
La física describe el mundo mediante **modelos matemáticos**, que permiten hacer predicciones razonables sobre el comportamiento de los sistemas.

Para simplificar el análisis de a) una pelota de béisbol lanzada al aire, usamos b) un modelo idealizado.

a) Una pelota real lanzada al aire.



b) Un modelo idealizado de una pelota real lanzada al aire.



1.2. Mediciones, magnitudes y unidades

1.2.1. Magnitudes físicas y unidades

Las **magnitudes físicas** son propiedades medibles como masa, longitud o tiempo. El **Sistema Internacional (SI)** define unidades básicas:

- **Longitud:** metro (**m**)
- **Masa:** kilogramo (**kg**)
- **Tiempo:** segundo (**s**)

Las unidades derivadas (como velocidad o energía) se forman combinando unidades básicas.

1.2.2. Conversión de unidades

1. Identificar: qué unidades hay que convertir.
2. Plantear/Ejecutar: usar factores de conversión.
3. Evaluar: comprobar que tenga sentido.

$$3\cancel{\text{min}} \times \frac{60\text{s}}{1\cancel{\text{min}}} = 180\text{s}$$

1.2.3. Incertidumbre

Toda medición tiene **incertidumbre**, que refleja el límite del instrumento. Se expresa como:

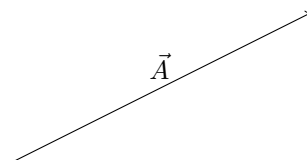
valor medido \pm error

1.3. Vectores y Suma de Vectores

1.3.1. Cantidades escalares y vectoriales

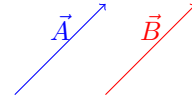
En física, algunas cantidades pueden ser descritas solo con un número y una unidad (**escalares**), como el tiempo, la masa o la temperatura. Otras, en cambio, requieren una dirección además de una magnitud (**vectores**). La velocidad y la fuerza son ejemplos típicos: no basta con saber cuánto valen, también es esencial saber **hacia dónde** actúan o se mueven.

Un vector se representa con una **flecha**. La **longitud** indica la magnitud y la **orientación** muestra su dirección. Por convención, los vectores se nombran con letras negritas y con una **flecha arriba**, como \vec{A} , para diferenciarlos de los escalares.

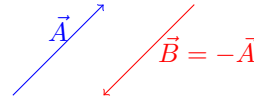


Magnitud: A o $|\vec{A}|$ indican cuánto mide \vec{A} , sin dirección.

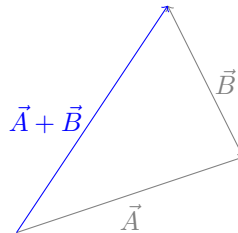
Dos vectores son **iguales** si tienen la misma **magnitud** y **dirección**, aunque estén ubicados en lugares diferentes.



Un vector **opuesto** tiene igual magnitud pero dirección contraria, lo llamamos el negativo del vector original.



Suma de vectores: Para sumar vectores gráficamente, se usa el metodo "cola con punta": se coloca el origen del segundo vector en el extremo del primero.



No importa el orden en que sumes los vectores, siempre da el mismo resultado.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

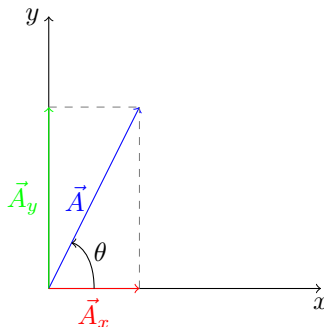
Resta de vectores: Restar vectores significa sumar el **opuesto**. Si queremos calcular $\vec{A} - \vec{B}$, lo que realmente hacemos es sumar \vec{A} con el negativo de \vec{B} .

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

1.4. Componentes de vectores

Cuando sumamos vectores, muchas veces es más fácil descomponerlos en **componentes** sobre un sistema de ejes perpendiculares.

Un vector \vec{A} puede descomponerse en dos vectores: uno paralelo al eje x (\vec{A}_x) y otro paralelo al eje y (\vec{A}_y). La suma de estos dos vectores da como resultado el vector original: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.



Podemos calcular la magnitud de las componentes de \vec{A} si conocemos la magnitud A y su dirección. Describimos la dirección de un vector como el angulo θ formado por el eje x positivo con

el vector en sentido anti horario. Entonces por definición de trigonométricas:

$$|\vec{A}_x| = |\vec{A}| \cos \theta$$

$$|\vec{A}_y| = |\vec{A}| \sin \theta$$

1.5. Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en direccionar, es decir, describir una dirección en el espacio. En un sistema de coordenadas x - y podemos definir un vector unitario \hat{i} que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario \hat{j} que apunte en la dirección del eje $+y$. Así, expresamos la relación entre vectores componentes y componentes, como sigue:

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y \hat{j}$$

Asimismo, escribimos un vector A en términos de sus vectores componentes como

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

2. Movimiento en dos o en tres dimensiones

...

2.1. Vectores de posición y velocidad

Considere una partícula que está en el punto P en cierto instante. El **vector de posición** \vec{r} de la partícula en ese instante es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P . Las coordenadas cartesianas x , y y z de P son las componentes x , y y z de \vec{r} .

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (\text{vector de posición})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (\text{vector de velocidad})$$

2.2. El vector de aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \quad (\text{vector de aceleración})$$

2.3. Movimiento de proyectiles

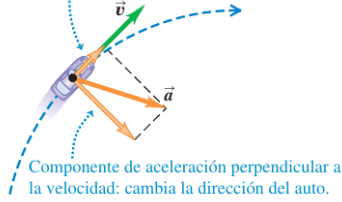
...

2.4. Movimiento en un círculo

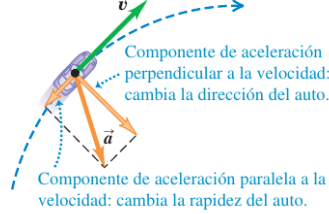
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 2.2, esto implica que la partícula debe tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante.

El automóvil aumenta su rapidez en una trayectoria circular

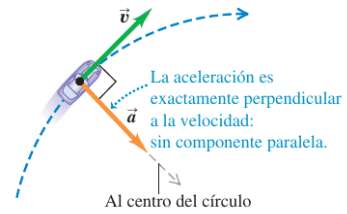
Componente de aceleración paralela a la velocidad: cambia la rapidez del auto.



El automóvil disminuye su rapidez en una trayectoria circular



Movimiento circular uniforme: rapidez constante en una trayectoria circular



2.4.1. Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, tiene un **movimiento circular uniforme**. La figura a muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O . La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt .

Los ángulos rotulados $\Delta\phi$ en las figuras a y b son iguales porque \vec{v}_1 es perpendicular a la línea OP_1 y \vec{v}_2 es perpendicular a la línea OP_2 . Por lo tanto, los triángulos en las figuras a y b son **semejantes**. Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \implies |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R} \Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es entonces

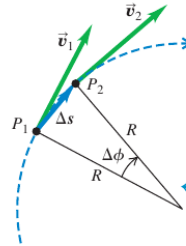
$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración instantánea \vec{a} en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1 :

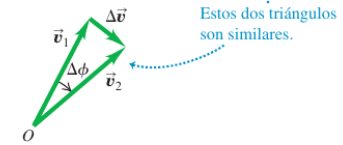
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sin embargo, el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1 . Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y con v representar la rapidez en cualquier punto. Así,

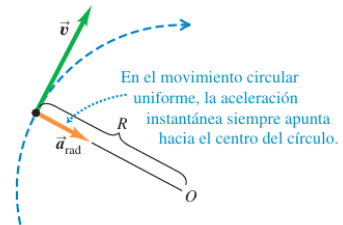
a) Un punto se mueve una distancia Δs a rapidez constante en una trayectoria circular



b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



c) La aceleración instantánea



$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{movimiento circular uniforme})$$

Agregamos el subíndice “rad” para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Como la rapidez es constante, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea. Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**.

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, el tiempo de una revolución.

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Al sustituir esto en la ecuación de la aceleración, obtenemos la expresión alterna

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (\text{movimiento circular uniforme})$$

2.4.2. Movimiento circular no uniforme

Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración paralela a la velocidad instantánea. Ésta es la componente a_{tan} , sabemos que la componente de aceleración tangencial a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la rapidez. Entonces,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad y \quad a_{tan} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad (\text{movimiento circular no uniforme})$$

2.5. Velocidad relativa

...

3. Leyes del movimiento de Newton

En los dos capítulos anteriores estudiamos la cinemática, el lenguaje para describir el movimiento. Ahora estamos en condiciones de pensar en qué hace que los cuerpos se muevan como lo hacen.

En este capítulo usaremos dos conceptos nuevos, la fuerza y la masa, para analizar los principios de la dinámica, los cuales están establecidos en solo tres leyes que fueron claramente enunciadas por Sir Isaac Newton:

- Primera ley (ley de la inercia): Si la fuerza neta sobre un cuerpo es cero, su movimiento no cambia.
- Segunda ley: Relaciona la fuerza con la aceleración cuando la fuerza neta no es cero.
- Tercera ley: Es una relación entre las fuerzas que ejercen dos cuerpos que interactúan entre sí.

Las leyes de Newton no son producto de deducciones matemáticas, sino una síntesis que los físicos han descubierto al realizar un sinnúmero de experimentos con cuerpos en movimiento.

3.1. Fuerza e interacciones

En la vida cotidiana hablamos de fuerza como un empujón o un tirón. En física, una fuerza se define mejor como una interacción entre dos cuerpos o entre un cuerpo y su entorno. Esta interacción tiene dirección y magnitud, por lo que se representa como un vector.

3.1.1. Fuerzas de contacto

Son fuerzas que requieren interacción directa entre cuerpos. Se distinguen principalmente tres tipos:

- Fuerza normal: Es la fuerza ejercida por una superficie sobre un objeto en contacto con ella. Siempre actúa perpendicular a la superficie.
- Fuerza de fricción: También es ejercida por una superficie, pero actúa paralela a ella y en dirección opuesta al movimiento relativo entre el objeto y la superficie.
- Fuerza de tensión: Es la fuerza transmitida por cuerdas, cables o cordeles estirados. Actúa a lo largo del cordel y en la dirección de la tracción, como cuando se tira de una cuerda.

a) **Fuerza normal \vec{n}** : cuando un objeto descansa o se empuja sobre una superficie, ésta ejerce un empujón sobre el objeto que es perpendicular a la superficie.

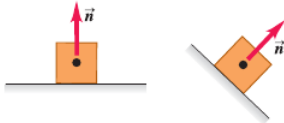


Figura 1: Fuerza normal

b) **Fuerza de fricción \vec{f}** : además de la fuerza normal, una superficie puede ejercer una fuerza de fricción sobre un objeto que es paralela a la superficie.

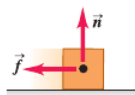


Figura 2: Fuerza de fricción

c) **Fuerza de tensión \vec{T}** : una fuerza de tirón ejercida sobre un objeto por una cuerda, un cordón, etc.

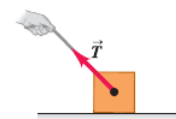


Figura 3: Fuerza de tensión

3.1.2. Fuerzas a distancia

Estás actuar sin contacto física Ejemplos comunes son la gravedad, el magnetismo y las fuerzas eléctricas. La fuerza gravitatoria que la tierra ejerce sobre un objeto se llama **peso**.

d) **Peso \vec{w}** : el tirón de la gravedad sobre un objeto es una fuerza de largo alcance (una fuerza que actúa en una distancia).



Figura 4: Fuerza a distancia

3.1.3. Medición de fuerzas

La magnitud de una fuerza se mide en "newtons", que se abrevia N. (Daremos una definición precisa del newton más adelante) Un instrumento típico para medirla es la **balanza de resorte** que aprovecha la relación entre estiramiento de un resorte y la fuerza aplicada.

3.1.4. Superposición de fuerzas

Cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, su efecto combinado es igual al de una única fuerza resultante obtenida mediante la suma vectorial de todas ellas. Esto se conoce como el Principio de superposición. La fuerza neta o resultante total sobre un cuerpo es, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él. Se denota:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

Cada fuerza puede descomponerse en componentes vectoriales, entonces la fuerza neta también:

$$\vec{R}_x = \sum \vec{F}_x \quad , \quad \vec{R}_y = \sum \vec{F}_y$$

3.2. Primera ley de Newton

Primera ley: Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.

En esta ley se introduce el concepto de **inercia**, que es la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento.

Esta ley rompe con la idea aristotélica de que se necesita una fuerza constante para mantener el movimiento. Newton muestra que en realidad lo que se necesita es una fuerza para cambiar el movimiento.

Si empujas una caja y después dejas de hacerlo, eventualmente se detiene. No porque "el movimiento se gasta", sino porque existen fuerzas. Como la fricción y el rozamiento con el aire que actúan en sentido contrario al movimiento y provocan que se frene.

3.2.1. Marcos de referencia inerciales

Un **marco de referencia** es un sistema desde el cual se observa y describe el movimiento de los cuerpos.

Un **marco de referencia inercial** es aquel en el cual se cumple la Primera Ley de Newton, es decir que si un objeto cambia su Velocidad, entonces desde el marco se ve una fuerza actuando.

3.3. Segunda ley de Newton

Podemos ver que existe una relación proporcional entre la fuerza y la aceleración. Si empujamos una caja con una fuerza neta constante, la caja tendrá una aceleración constante igual a $a = \vec{a}$.

Si utilizamos una balanza de resorte. Para aplicar una fuerza \vec{F}_1 obtenemos una aceleración \vec{a} , para $2\vec{F}_1$, obtenemos $2\vec{a}$ y para $\frac{1}{2}\vec{F}_1$ $\frac{1}{2}\vec{a}$. Muchos experimentos semejantes muestran que para un cuerpo dado, la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él.

3.3.1. Masa y fuerza

Nuestros resultados indican que para un cuerpo dado, el cociente $\left|\Sigma\vec{F}\right|$ entre $|\vec{a}|$ es constante. Llamamos a este cociente **masa inercial** del cuerpo y la denotamos con **m**. Es decir,

$$m = \frac{|\Sigma\vec{F}|}{|\vec{a}|} \quad , \quad |\Sigma\vec{F}| = m|\vec{a}| \quad o \quad |\vec{a}| = \frac{|\Sigma\vec{F}|}{m}$$

La última de las ecuaciones indica que cuanto mayor sea su masa, más se resiste el cuerpo a ser acelerado.

La unidad de masa en el SI es el kilogramo. Podemos usar este Kilogramo para definir el newton:

Un Newton es la cantidad de fuerza neta que proporciona una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado a un cuerpo con masa de 1 Kilogramo.

Por la forma en que definimos el newton, está relacionado con las unidades de masa, longitud y tiempo.

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Sistema de unidades	Fuerza	Masa	Aceleración
SI	Newton(N)	Kg	m/s^2
cgs	dina(din)	g	cm/s^2
Imperial	libra(lb)	slug	ft/s^2

3.3.2. Enunciado de la segunda ley de Newton

Segunda ley: si una fuerza externa neta actúa sobre un Cuerpo, éste se acelera. La dirección de aceleración es la misma que la dirección de la fuerza neta. El vector de fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración. En símbolos:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

La segunda ley de Newton es una ley fundamental de la naturaleza, la relación básica entre fuerza y movimiento, cubre todo el resto del capítulo, y todo el que sigue, se dedica a aprender a aplicar este principio en diversas situaciones.

3.3.3. Uso de la segunda ley de Newton

Hay al menos cuatro aspectos de la segunda ley de Newton que merecen atención especial:

1. **Forma de uso:** La segunda ley de Newton es una ecuación Vectorial, Pero normalmente se usa descompuesta por componentes:

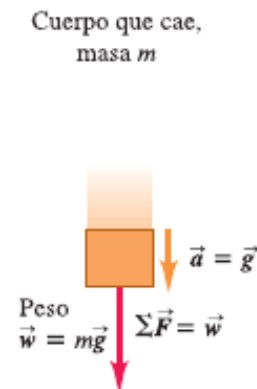
$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad , \quad \Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

2. **Fuerzas externas:** La ley se refiere únicamente a Fuerzas externas es decir, ejercidas sobre el cuerpo desde otros cuerpos o el entorno. Un cuerpo no puede moverse por una fuerza que el mismo genera.
3. **Masa constante:** Estas ecuaciones solo son válidas si la masa no cambia. En casos donde la masa varía (cohetes que pierdan combustible) se necesita un tratamiento especial.
4. **Marcos de referencia inerciales:** La ley solo se aplica en marcos de referencia inerciales. No vale en marcos acelerados, como dentro de un auto que arranca.

3.4. Masa y Peso

Es común usar incorrecta e indistintamente los términos **masa** y **peso** en las conversaciones cotidianas. Es absolutamente indispensable entender claramente las diferencias entre estas dos cantidades físicas. La **masa** caracteriza las propiedades inerciales de un cuerpo. A mayor masa, se necesitará más fuerza para causar una aceleración dada. El **peso**, en cambio, es una fuerza ejercida sobre un cuerpo por la atracción de la Tierra.

Para entender la relación entre masa y peso, note que un cuerpo en caída libre tiene una aceleración igual a g . Por la segunda ley de Newton, una fuerza produce esa aceleración. Si un cuerpo de masa m cae con una aceleración \vec{g} con $|\vec{g}| = 9,8 \text{ m/s}^2$, entonces: $\vec{w} = m\vec{g}$



3.4.1. Variación de g con la ubicación

En la tierra se usa $g \approx 9,80 \text{ m/s}^2$, Pero varía entre $9,78$ y $9,82 \text{ m/s}^2$. Esa variación se debe a la forma de la tierra y su rotación. El peso cambia con g , Pero la masa no.

3.4.2. Medición de masa y peso

En la práctica, se mide la masa de un cuerpo midiendo su peso y Comparándolo con un estandar. Por la ecuación $w = mg$, si dos cuerpos tienen el mismo peso en el mismo lugar, entonces tienen la misma masa.

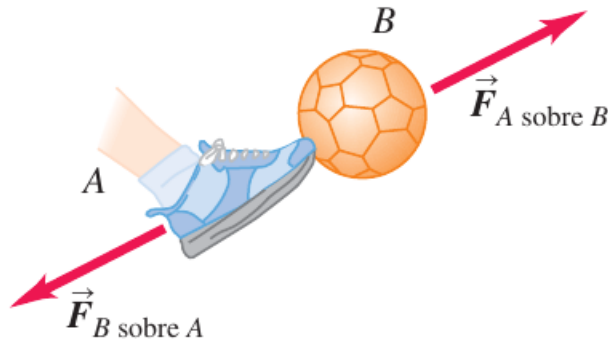
3.5. Tercera ley de Newton

No podemos tirar de una perilla sin que ésta tire de nosotros. Al Patear un balón de fútbol, la fuerza hacia adelante que el pie ejerce sobre él lo lanza en su trayectoria, pero sentimos la fuerza que el balón ejerce sobre el pie.

Los experimentos muestran que, al interactuar dos cuerpos, las fuerzas que ejercen mutuamente son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Ésta es la tercera ley de Newton.

Tercera ley: si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B ("acción"), entonces, B ejerce una fuerza sobre A ("reacción"). Estas dos fuerzas tienen la misma magnitud Pero dirección opuesta, y actúan sobre diferentes cuerpos.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



Expresando en palabras, en la tercera ley de Newton, "acción y reacción" son las dos fuerzas opuestas, y Podemos llamarlas **Par acción-reacción**.

3.6. Diagramas de cuerpo libre

En esta sección mencionaremos algunas ideas y técnicas que Pueden usarse en cualquier problema en que intervengan las leyes de Newton.

1. Las leyes de Newton se aplican a un cuerpo específico. Siempre tenés que definir que cuerpo vas a analizar.
2. En la sumatoria de fuerzas F , solo se incluyen las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, no las que el cuerpo ejerce sobre otros. Si analizás a una persona caminando, incluí las fuerzas del suelo sobre la persona, no la que la persona ejerce sobre el suelo.

3. Un diagrama de cuerpo libre muestra el cuerpo aislado con todas las fuerzas externas que actúan sobre él, sin incluir fuerzas que el cuerpo ejerce sobre otros.



4. Aplicación de las leyes de Newton

Este capítulo se enfoca en **aplicar las leyes de Newton** a distintos tipos de situaciones reales, como un velero deslizándose sobre hielo, un trineo bajando una colina y un avión dando una vuelta cerrada. A pesar de que las **leyes de Newton** son simples en su formulación, resolver problemas concretos requiere una buena dosis de análisis y técnica.

4.1. Empleo de la primera ley de Newton: Partículas en equilibrio

El principio físico fundamental es la primera ley de Newton: si una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante en un marco de referencia inercial, la fuerza neta que actúa sobre ella, es decir, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella debe ser cero:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (\text{partícula en equilibrio, forma vectorial})$$

Esta sección trata sobre el uso de la primera ley de Newton para resolver problemas de cuerpos en equilibrio. Quizás algunos de los problemas parezcan complicados; no obstante, lo importante es recordar que todos los problemas que implican partículas en equilibrio se resuelven igual.

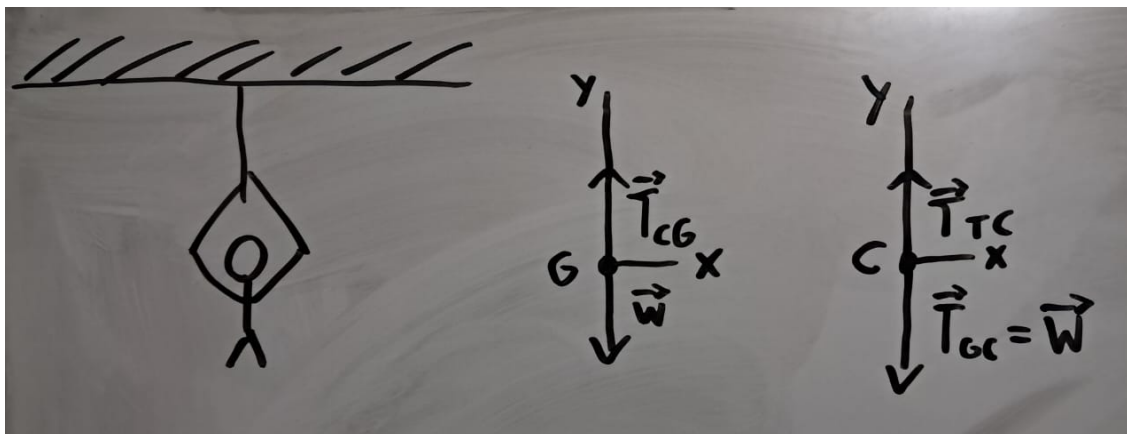
Ejercicio 1. Equilibrio unidimensional: Tensión en una cuerda sin masa

Una gimnasta de masa $m_G = 50,0\text{kg}$ se cuelga del extremo inferior de una cuerda colgante. El extremo superior está fijo al techo de un gimnasio. Suponga que la masa de la cuerda es despreciable.

1. ¿Cuánto pesa la gimnasta?
2. ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce la cuerda sobre ella?
3. ¿Qué tensión hay en la parte superior de la cuerda?

Solución 1.

Primero identificamos que la gimnasta y la cuerda, ambos están en equilibrio. Tenemos como incógnita el peso de la gimnasta w_G . La cuerda tira de la gimnasta con una fuerza T_{CG} y la gimnasta tira de la cuerda con una fuerza T_{GC} . El techo ejerce otra fuerza sobre la cuerda, T_{TC} , que provoca que la cuerda y la gimnasta estén en equilibrio.



El primer digrama representa la situación en si. El segundo diagrama representa las fuerzas que actúan sobre la gimnasta. El tercer diagrama representa las fuerzas que actúan sobre la cuerda.

Para calcular el peso de la gimnasta (\vec{w}), usaremos la ecuación de la gravedad, derivada de la segunda ley de Newton:

$$|\vec{w}| = m \cdot 9,8\text{m/s}^2$$

$$w_G = 50\text{kg} \cdot 9,8\text{m/s}^2$$

$$w_G = 490\text{N}$$

El peso de la gimnasta es de 490 Newtons.

Entonce la magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda sobre la gimnasta es: $T_{CG} = 490\text{N}$. Y su dirección es contraria a la del peso de la gimnasta.

Por el par acción-reacción, existe la fuerza $\vec{T}_{GC} = -\vec{T}_{CG} = \vec{w}$, entonces la gimnasta tira de la cuerda con una fuerza de 490 Newtons con una dirección que apunta hacia abajo. Entonces la fuerza \vec{T}_{TC} es igual en magnitud a \vec{T}_{GC} pero con dirección opuesta, es decir, $\vec{T}_{TC} = -\vec{T}_{GC}$.

La **tensión de la cuerda** es de $T_{TC} = 490\text{N}$ en la parte superior de la cuerda y de $T_{CG} = 490\text{N}$ en la parte inferior de la cuerda.

4.2. Empleo de la segunda ley de Newton: Dinámica de partículas

Ahora podemos analizar problemas de dinámica, donde aplicamos la segunda ley de Newton a cuerpos sobre los cuales la fuerza neta no es cero, de manera que los cuerpos no están en equilibrio sino que tienen aceleración.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Ejercicio 2. Movimiento rectilíneo con una fuerza constante

Un velero para hielo descansa en una superficie horizontal sin fricción (figura 5.7a). Sopla un viento constante (en la dirección de los patines del trineo), de modo que 4.0 s después de soltarse el velero adquiere una velocidad de 6.0 m/s (unos 22 km/h o 13 mi/h). ¿Qué fuerza constante F_w ejerce el viento sobre el velero? La masa total del velero más el tripulante es de 200 kg.

Solución 2.

Identificamos las variables que se nos dan:

- $m = 200\text{kg}$
- $v(0\text{s}) = 0,0\text{m/s}$
- $v(4\text{s}) = 22,0\text{km/h} = 6,1\text{m/s}$

Para calcular la fuerza usaremos la segunda ley de Newton: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$. Pero primero debemos calcular la aceleración. Como tenemos una velocidad inicial y otra 4s después podemos utilizar:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

$$a = \frac{6,1\text{m/s} - 0,0\text{m/s}}{4,0\text{s}} = 1,525\text{m/s}^2$$

Por lo tanto, la fuerza constante que ejerce el viento sobre el velero es de $F_w = 200\text{kg} \cdot 1,525\text{m/s}^2 = 305\text{N}$

4.2.1. Peso aparente e ingravidez aparente

Cuando un pasajero de masa m viaja en un elevador con aceleración a_y , una báscula da como peso aparente del pasajero:

$$w = m \cdot (g + a_y)$$

Cuando el elevador está acelerando hacia arriba, a_y es positiva y n es mayor que el peso del pasajero $w = mg$. Si el elevador acelera hacia abajo, a_y es negativa y n es menor que el peso. Si el pasajero no sabe que el elevador está acelerando, sentirá que su peso cambia y, de hecho, la báscula lo indica. El caso extremo sucede cuando el elevador tiene una aceleración hacia abajo $a_y = -g$, es decir, cuando está en caída libre. En este caso, $n = 0$ y el pasajero siente que no tiene peso.

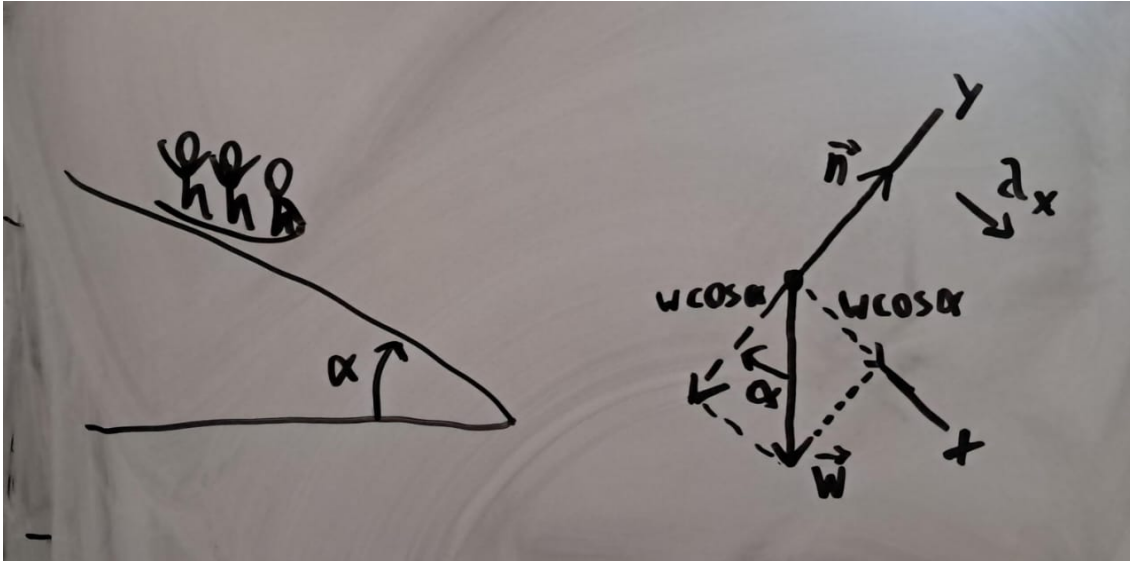
Ejercicio 3. Aceleración cuesta abajo

Un trineo cargado de estudiantes en vacaciones (peso total w) se desliza hacia abajo por una larga cuesta nevada. La pendiente tiene un ángulo constante α , y el trineo está tan bien encerado que la fricción es despreciable. ¿Qué aceleración tiene el trineo?

Solución 3.

Necesitamos averiguar la aceleración a . Sabemos que la única fuerza que actúa sobre el trineo es la gravedad, y que su peso es w .

Para mayor comodidad dibujaremos un diagrama de cuerpo libre inclinado para que el eje x se paralele a la aceleración a , ahora a_x .



Por segunda ley de Newton dividida en componentes tenemos:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

Si sumamos las fuerzas:

$$\Sigma F_y = w \cos(\alpha) + (-w \cos(\alpha)) = 0 = ma_y \implies a_y = 0$$

$$\Sigma F_x = w \sin(\alpha) = ma_x$$

Como $w = mg$, tenemos que $\cancel{m}a_x = \cancel{m}g \sin(\alpha)$, dejando como resultado:

$$a_x = g \sin(\alpha)$$

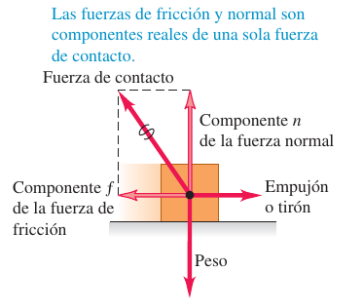
4.3. Fuerzas de fricción

Hemos visto varios problemas en que un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie que ejerce fuerzas sobre el cuerpo. En esta sección, veremos con detenimiento la fuerza de fricción.

Una fuerza importante en muchos aspectos de nuestra vida es la fricción. El aceite de un motor automotriz reduce la fricción entre piezas móviles; no obstante, sin fricción entre los neumáticos y el asfalto, el automóvil no podría avanzar ni dar vuelta.

4.3.1. Fricción cinética y estática

Primero, cuando un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie, podemos representar la fuerza de contacto que la superficie ejerce sobre el cuerpo en términos de componentes de fuerza perpendiculares y paralelos a la superficie (figura). El vector componente paralelo a la superficie (y perpendicular a n) es la fuerza de fricción, denotada con \vec{f} . La dirección de la fuerza de fricción siempre es opuesta al movimiento relativo de las dos superficies.



El tipo de fricción que actúa cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie es la **fuerza de fricción cinética** \vec{f}_k . La magnitud de esta fuerza suele aumentar al aumentar la fuerza normal. En muchos casos, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k experimental es aproximadamente proporcional a la magnitud n de la fuerza normal. En tales casos, representamos la relación con la ecuación:

$$f_k = \mu_k \cdot n \quad (\text{magnitud de la fuerza de fricción cinética})$$

donde μ_k es una constante llamada coeficiente de fricción cinética. Cuanto más resbalosa sea una superficie, menor será el coeficiente de fricción. Al ser el cociente de dos magnitudes de fuerza ($\frac{f_k}{n}$), μ_k es un número puro sin unidades. (Caso similar a la masa inercial).

DISCLAIMER: La ecuación sólo es una representación aproximada de un fenómeno complejo. En el nivel microscópico, las fuerzas de fricción y la normal se deben a las fuerzas intermoleculares (fundamentalmente eléctricas) entre dos superficies ásperas en los puntos donde entran en contacto.

Las fuerzas de fricción también pueden actuar cuando no hay movimiento relativo. Si tratamos de deslizar por el piso una caja con libros, tal vez no se mueva porque el piso ejerce una fuerza de fricción igual y opuesta sobre la caja. Ésta se llama **fuerza de fricción estática** \vec{f}_s .

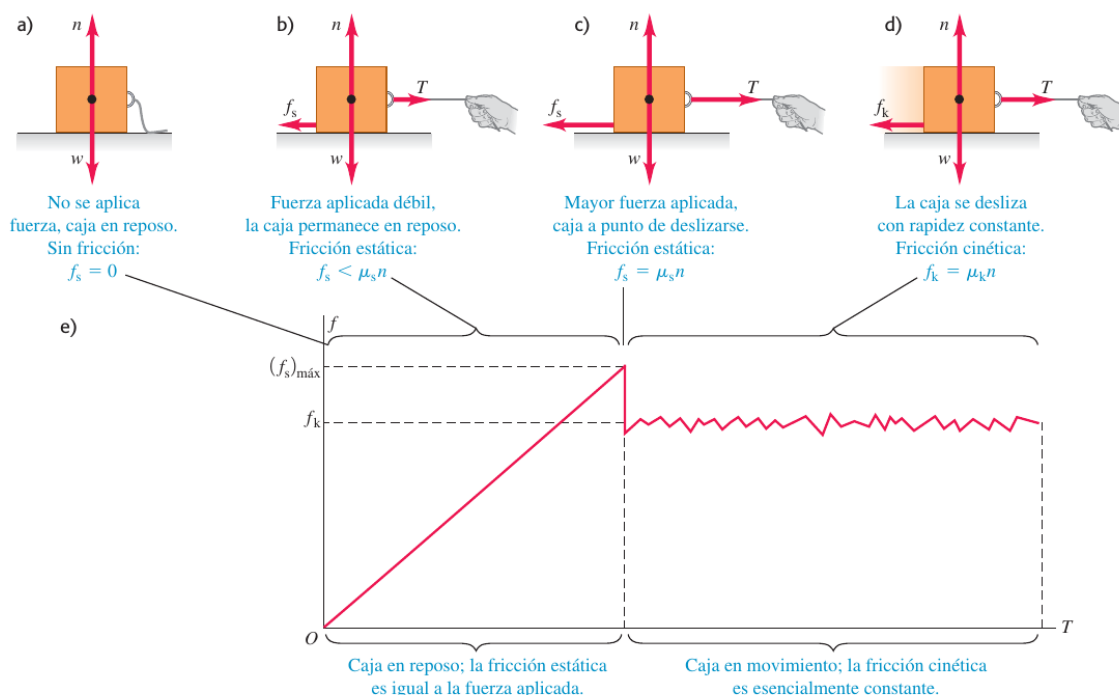


Tabla: Coeficientes de fricción aproximados

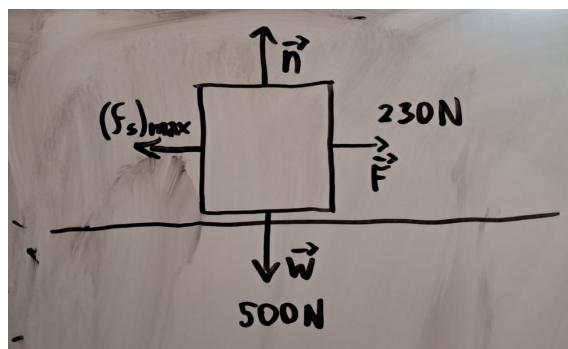
Materiales	Coeficiente de fricción estática, μ_s	Coeficiente de fricción cinética, μ_k
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Latón sobre acero	0.51	0.44
Zinc sobre hierro colado	0.85	0.21
Cobre sobre hierro colado	1.05	0.29
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.40
Cobre sobre vidrio	0.68	0.53
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Teflón sobre acero	0.04	0.04

Ejercicio 4. Fricción en movimiento horizontal

Usted intenta mover una caja de 500N por un piso horizontal. Para comenzar a moverla, debe tirar con una fuerza horizontal de 230N . Una vez que la caja “se libera” y comienza a moverse, puede mantenerse a velocidad constante con sólo 200N . ¿Cuáles son los coeficientes de fricción estática y cinética?

Solución 4.

Sabemos que la caja esta en reposo cuando se le aplica una fuerza de 230N en el eje x .



Usando la primera ley de Newton por componentes tenemos:

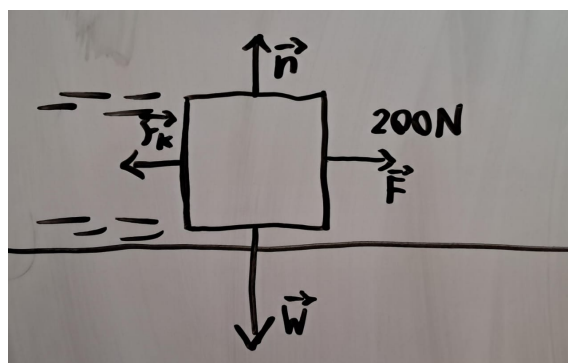
$$\Sigma F_x = n + (-w) = 0 \implies n = w = 500N$$

$$\Sigma F_y = F + (-(f_s)_{max}) = 0 \implies F = (f_s)_{max} = 230N$$

Entonces podemos calcular el coeficiente de fricción estática:

$$\mu_s = \frac{F}{n} = \frac{230N}{500N} = 0,46$$

También sabemos que si la caja esta en movimiento horizontal se mantendra en equilibrio si se le aplica una fuerza de 200N:



Usando la primera ley de Newton por componentes tenemos:

$$\Sigma F_x = n + (-w) = 0 \implies n = w = 500N$$

$$\Sigma F_y = F + (-f_k) = 0 \implies F = f_k = 200N$$

Entonces podemos calcular el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_k = \frac{F}{n} = \frac{200N}{500N} = 0,4$$

Concluimos que el coeficiente de fricción estática es 0,46 y el coeficiente de fricción cinética es 0,4.

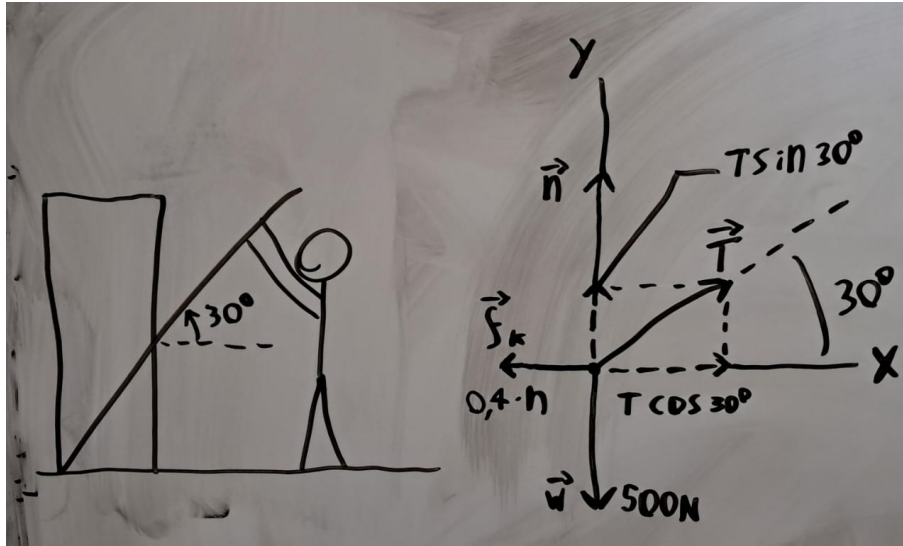
Ejercicio 5. Reducción al mínimo de la fricción cinética

En el ejercicio anterior, suponga que usted intenta mover la caja atando una cuerda a ella y tira de la cuerda hacia arriba con un ángulo de 30° sobre la horizontal. ¿Qué fuerza debe aplicar

al tirar para mantener la caja en movimiento con velocidad constante? ¿Esto es más fácil o difícil que tirar horizontalmente? Suponga que $w = 500N$ y $\mu_k = 0,40$.

Solución 5.

Sabemos que la caja esta en equilibrio (su velocidad es constante) entonces aplicamos la primera ley de Newton para encontrar la fuerza T que se debe aplicar para mantener la caja en movimiento: Primero hacemos un diagrama de cuerpo libre:



Usando la primera ley de Newton por componentes tenemos:

$$\Sigma F_x = T \cos(30^\circ) + (-f_k) = 0 \implies T \cos(30^\circ) = f_k$$

$$\Sigma F_y = T \sin(30^\circ) + n + (-w) = 0 \implies n = w - T \sin(30^\circ)$$

Para encontrar la fuerza T tenemos que usar el hecho de que $f_k = T \cos(30^\circ)$:

$$T \cos(30^\circ) = f_k = \mu_k \cdot n$$

Remplazando:

$$T \cos(30^\circ) = \mu_k \cdot (w - T \sin(30^\circ))$$

Despejando T tenemos:

$$T = \frac{\mu_k \cdot w}{\cos(30^\circ) + \mu_k \sin(30^\circ)} = \frac{0,40 \cdot 500N}{\cos(30^\circ) + 0,40 \sin(30^\circ)} \approx 188N$$

Concluimos que la fuerza T que debe aplicar para mantener la caja en movimiento es de 188N.

Por otro lado, si se intenta mover la caja horizontalmente, entonces la fuerza T que se debe aplicar para mantener la caja en movimiento es de $\mu_k \cdot n = 0,40 \cdot 500N = 200N$. Al no ser reducida la fuerza normal f_k no se reduce por lo que la fricción "jode" más al tratar de mover la caja.

4.3.2. Fricción de rodamiento

Es mucho más fácil mover un archivero lleno de documentos sobre un piso horizontal usando un carrito con ruedas que deslizándolo. Podemos definir un **coeficiente de fricción de rodamiento** μ_r , que es la fuerza horizontal necesaria para lograr rapidez constante en una superficie plana, dividida entre la fuerza normal hacia arriba ejercida por la superficie. Cuyo valor suele ser de 0.002 a 0.003 para ruedas de acero sobre rieles de acero, y de 0.01 a 0.02 para ruedas de caucho sobre concreto.

Ejercicio 6. Movimiento con fricción de rodamiento

...

4.3.3. Resistencia de fluidos y rapidez terminal

Si usted saca la mano por la ventanilla de un automóvil que viaja con gran rapidez, comprobará la existencia de la **resistencia de un fluido**, que es la fuerza que un fluido (gas o líquido) ejerce sobre un cuerpo que se mueve a través de él.

La dirección de la fuerza de resistencia de un fluido que actúa sobre un cuerpo siempre es opuesta a la dirección de la velocidad del cuerpo. La magnitud de la fuerza de resistencia de un fluido suele aumentar al incrementarse la rapidez del cuerpo en el fluido. Esto es muy diferente de la fuerza de fricción cinética entre dos superficies en contacto, que casi siempre podemos considerar independiente de la rapidez. A rapidez baja, la magnitud f de la fuerza de resistencia del fluido es aproximadamente proporcional a la rapidez v del cuerpo:

$$f = kv \quad (\text{resistencia del fluido a baja rapidez})$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de la forma y el tamaño del cuerpo, y las propiedades del fluido. Las unidades de este k son $[k] = \frac{N}{m/s} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s}{m} = \frac{kg}{s}$.

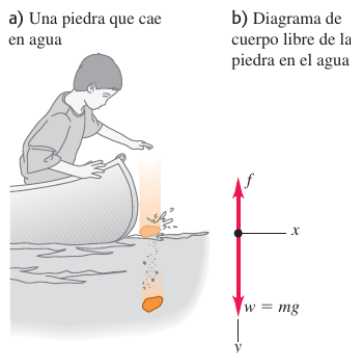
La fuerza de resistencia es aproximadamente proporcional a v^2 , no a v , para la rapidez de una pelota de tenis o una rapidez mayor y se denomina **arrastre del aire** o sólo arrastre. En este caso, sustituimos la ecuación por la siguiente:

$$f = Dv^2 \quad (\text{resistencia de fluidos a alta rapidez})$$

Por la dependencia de v^2 , el arrastre aumenta rápidamente conforme se incrementa la rapidez. Las unidades de este D son $[D] = \frac{N}{m^2/s^2} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s^2}{m^2} = \frac{kg}{m}$.

Por los efectos de la resistencia de fluidos, un objeto que cae en un fluido no tiene aceleración constante. Para describir su movimiento debemos partir de la segunda ley de Newton.

Consideremos esta situación: suponga que usted suelta una roca en la superficie de un estanque profundo, y cae hasta el fondo (figura). En este caso, la fuerza de resistencia del fluido está dada por la ecuación de resistencia del fluido a baja rapidez. ¿Cómo cambian la aceleración, velocidad y posición de la roca con el tiempo?



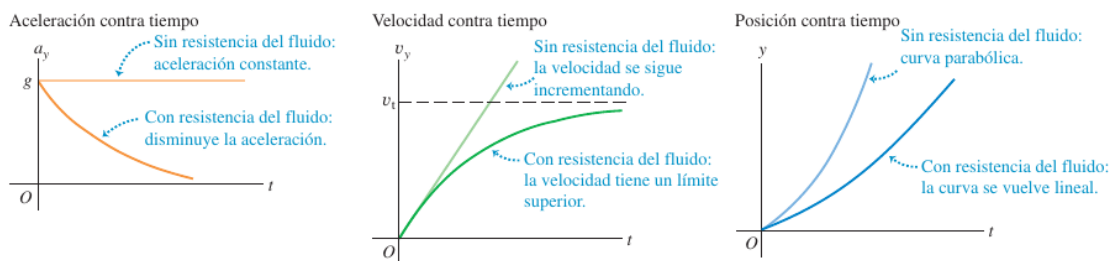
Si observamos el diagrama de cuerpo libre podemos ver que $\Sigma F_x = 0$ entonces solo tomamos en cuenta la componente y :

$$\Sigma F_y = mg + (-f) = mg + (-kv_y) = ma_y$$

Al principio, cuando la roca empieza a moverse, $v_y = 0$, la fuerza de resistencia es cero y la aceleración inicial es $a_y = g$. Al aumentar la rapidez, también se incrementa la fuerza de resistencia hasta ser igual en magnitud al peso. Ahora, $mg - kv_y = 0$, la aceleración se vuelve cero y ya no aumenta la rapidez. A esta rapidez final v_t , se le llama **rapidez terminal**, y esta dada por $mg - kv_t = 0$, es decir:

$$v_t = \frac{mg}{k} \quad (\text{rapidez terminal})$$

La siguiente figura muestra cómo varían la aceleración, la velocidad y la posición con el tiempo.



4.4. Dinámica del movimiento circular

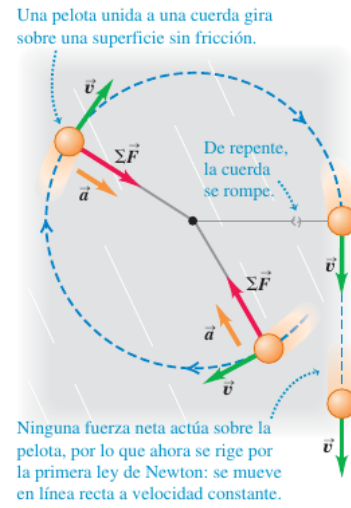
Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea). La magnitud a_{rad} de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez v y el radio R del círculo por

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{movimiento circular uniforme})$$

El subíndice “*rad*” nos recuerda que en cada punto la aceleración siempre es radial hacia el centro del círculo, perpendicular a la velocidad instantánea. Se le denomina **aceleración centrípeta**.

El movimiento circular uniforme, como todos los movimientos de una partícula, se rige por la segunda ley de Newton. Para hacer que la partícula acelere hacia el centro del círculo, la fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ sobre la partícula debe estar dirigida siempre hacia el centro. La magnitud de la aceleración es constante, así que la magnitud F_{net} de la fuerza neta también debe ser constante. Si deja de actuar la fuerza neta hacia adentro, la partícula saldrá disparada en una línea recta tangente al círculo (ver figura).

...



4.5. Fuerzas fundamentales de la naturaleza

Hemos visto fuerzas de varios tipos —peso, tensión, fricción, resistencia de fluidos y la fuerza normal— y veremos otras más al seguir estudiando física. Pero, ¿cuántas clases distintas de fuerzas hay? Actualmente, se considera que todas las fuerzas son expresiones de tan sólo cuatro clases de fuerzas o interacciones fundamentales entre las partículas.

Las **interacciones gravitacionales** incluyen la fuerza familiar del peso, que se debe a la acción de la atracción gravitacional terrestre sobre un cuerpo. La mutua atracción gravitacional entre las diferentes partes de la Tierra mantienen a nuestro planeta unido (figura a).

Las **interacciones electromagnéticas**, incluye las fuerzas eléctricas y magnéticas. Si nos frotamos un peine por el cabello, al final el peine tendrá una carga eléctrica; es posible usar la fuerza eléctrica para atraer trocitos de papel. Todos los átomos contienen carga eléctrica positiva y negativa, así que átomos y moléculas pueden ejercer fuerzas eléctricas unos sobre otros (figura b).

Las otras dos clases de interacciones son menos conocidas. La **interacción fuerte** mantiene unido el núcleo de un átomo. Los núcleos contienen neutrones (eléctricamente neutros) y protones (con carga positiva). La fuerza eléctrica entre protones hace que se repelan mutuamente; la enorme fuerza de atracción entre las partículas nucleares contrarresta esta repulsión y mantiene el núcleo estable. En este contexto, la interacción fuerte también se denomina fuerza nuclear fuerte; tiene un alcance mucho menor que las interacciones eléctricas, pero es mucho más fuerte dentro de ese alcance. La interacción fuerte juega un papel fundamental en las reacciones termonucleares que ocurren en el núcleo del Sol, y que generan el calor y su luz (figura c).

Por último, tenemos la **interacción débil** cuyo alcance es tan pequeño que es relevante sólo a una escala de núcleo o menor. La interacción débil causa una forma común de radioactividad, llamada desintegración beta, en la que un neutrón de un núcleo radioactivo se transforma en protón al tiempo que expulsa un electrón y una partícula casi sin masa llamada antineutrino electrónico. La interacción débil entre un antineutrino y la materia ordinaria es tan tenue que el antineutrino fácilmente podría atravesar una pared de plomo ¡de un millón de kilómetros de espesor! Incluso cuando una estrella gigante sufrió una explosión cataclísmica llamada supernova, la mayoría de la energía fue liberada mediante la interacción débil (figura d).

a) Las fuerzas gravitacionales mantienen unidos a los planetas



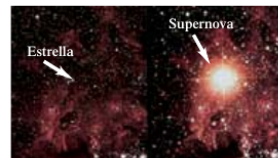
b) Las fuerzas electromagnéticas mantienen unidas a las moléculas



c) Enormes fuerzas liberan energía del Sol



d) Las fuerzas débiles juegan un papel preponderante en las estrellas que explotan



5. Trabajo y Energía Cinética

En este capítulo nos concentraremos en la mecánica. Conoceremos una importante forma de energía, la energía cinética o la energía de movimiento, y su relación con el concepto de trabajo. También consideraremos la potencia, que es la rapidez con que se realiza trabajo.

5.1. Trabajo

En esta sección aprenderemos cómo se define el trabajo y cómo se calcula en diversas situaciones que implican fuerzas constantes. Aunque ya sabemos cómo resolver problemas donde las fuerzas son constantes, el concepto de trabajo nos resultará útil. Más adelante en este capítulo deduciremos la relación entre trabajo y energía cinética, y la aplicaremos después en problemas donde las fuerzas no son constantes.

Estos tres ejemplos de trabajo —mover un sofá, levantar una pila libros y empujar un automóvil— tienen algo en común. En ellos realizamos trabajo ejerciendo una fuerza sobre un cuerpo mientras éste se mueve de un lugar a otro, es decir, sufre un desplazamiento. Efectuamos más trabajo si la fuerza es mayor (empujamos más fuerte el auto) o si el desplazamiento es mayor (lo empujamos una mayor distancia).

El físico define el trabajo con base en estas observaciones. Considere un cuerpo que sufre un desplazamiento de magnitud s en línea recta. (Por ahora, supondremos que todo cuerpo puede tratarse como partícula y despreciaremos cualquier rotación o cambio en la forma del cuerpo.) Mientras el cuerpo se mueve, una fuerza constante \vec{F} actúa sobre él en la dirección del desplazamiento \vec{s} . Definimos el trabajo W realizado por esta fuerza constante en dichas condiciones como el producto de la magnitud F de la fuerza y la magnitud s del desplazamiento:

$$W = Fs \text{ (fuerza constante en dirección del desplazamiento rectilíneo)}$$

La unidad de trabajo en el SI es el joule (que se abrevia J y se pronuncia “yul”, nombrada así en honor del físico inglés del siglo XIX James Prescott Joule). En el SI la unidad de fuerza es el newton y la unidad de distancia es el metro, así que 1 joule equivale a un new-ton-metro ($N \cdot m$):

$$1J = 1N \cdot m$$

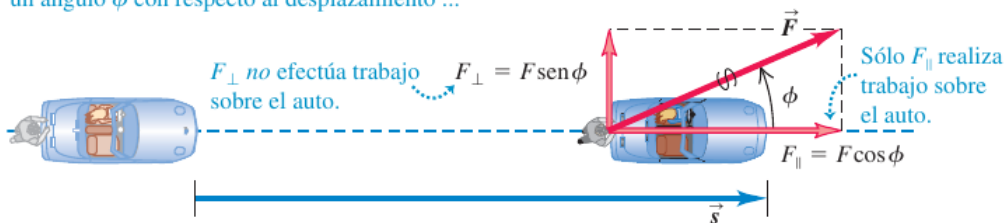
En el sistema británico, la unidad de fuerza es la libra (lb), la unidad de distancia es el pie (ft), y la unidad de trabajo es el pie-libra ($ft \cdot lb$). Estas conversiones son útiles:

$$1J = 0,7376ft \cdot lb \quad 1ft \cdot lb = 1,356J$$

Pensemos en una persona que empuja un automóvil averiado. Si lo empuja a lo largo de un desplazamiento \vec{s} con una fuerza constante \vec{F} en la dirección del movimiento, la cantidad de trabajo que efectúa sobre el auto está dada por la ecuación: $W = Fs$. Sin embargo, ¿y si la persona hubiera empujado con un ángulo ϕ con respecto al desplazamiento del auto (figura)?

Si el automóvil se mueve con un desplazamiento \vec{s} mientras una fuerza constante \vec{F} actúa sobre él, con un ángulo ϕ con respecto al desplazamiento ...

... el trabajo efectuado por la fuerza sobre el auto es $W = F_{\parallel}s = (F \cos \phi)s = Fs \cos \phi$.



Entonces \vec{F} tiene una componente $F_{\parallel} = F \cos \phi$ en la dirección del desplazamiento y una componente $F_{\perp} = F \sin \phi$ que actúa perpendicular al desplazamiento.

En este caso, sólo la componente paralela F_{\parallel} es eficaz para mover el auto, por lo que definimos el trabajo como el producto de esta componente de fuerza y la magnitud del desplazamiento. Por lo tanto:

$$W = F s \cos \phi$$

La ecuación tiene la forma del producto escalar de dos vectores. Ello nos permite escribir la ecuación de forma más compacta:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Ejercicio 7. Trabajo efectuado por una fuerza constante

a) Esteban ejerce una fuerza constante de magnitud $210N$ sobre el automóvil averiado de la figura anterior, mientras lo empuja una distancia de $18m$. Además, un neumático se desinfló, así que, para lograr que el auto avance al frente, Esteban debe empujarlo con un ángulo de 30° con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuánto trabajo efectúa Esteban?


b) Con ánimo de ayudar, Esteban empuja un segundo automóvil averiado con una fuerza constante $\vec{F} = (160N)\hat{i} - (40N)\hat{j}$. El desplazamiento del automóvil es $\vec{s} = (14m)\hat{i} + (11m)\hat{j}$. ¿Cuánto trabajo efectúa Esteban en este caso?

Solución 7.

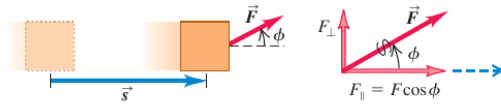
...

5.1.1. Trabajo: Positivo, negativo o cero

En el ejercicio anterior, el trabajo efectuado al empujar los autos fue positivo. No obstante, es importante entender que el trabajo también puede ser negativo o cero. Ésta es la diferencia esencial entre la definición de trabajo en física y la definición “cotidiana” del mismo.

6.4 Una fuerza constante \vec{F} puede efectuar trabajo positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre \vec{F} y el desplazamiento \vec{s} . 

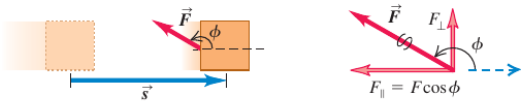
a)



La fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento:

- El trabajo sobre el objeto es positivo.
- $W = F_{\parallel}s = (F \cos \phi)s$

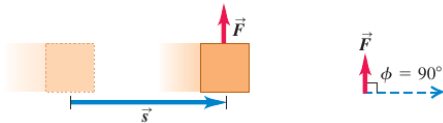
b)



La fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento:

- El trabajo sobre el objeto es negativo.
- $W = F_{\parallel}s = (F \cos \phi)s$
- Matemáticamente, $W < 0$ porque $F \cos \phi$ es negativo para $90^\circ < \phi < 270^\circ$.

c)



La fuerza es perpendicular a la dirección del desplazamiento:

- La fuerza *no* realiza trabajo sobre el objeto.
- De forma más general, cuando una fuerza que actúa sobre un objeto tiene una componente F_{\perp} perpendicular al desplazamiento del objeto, dicha componente no efectúa trabajo sobre el objeto.

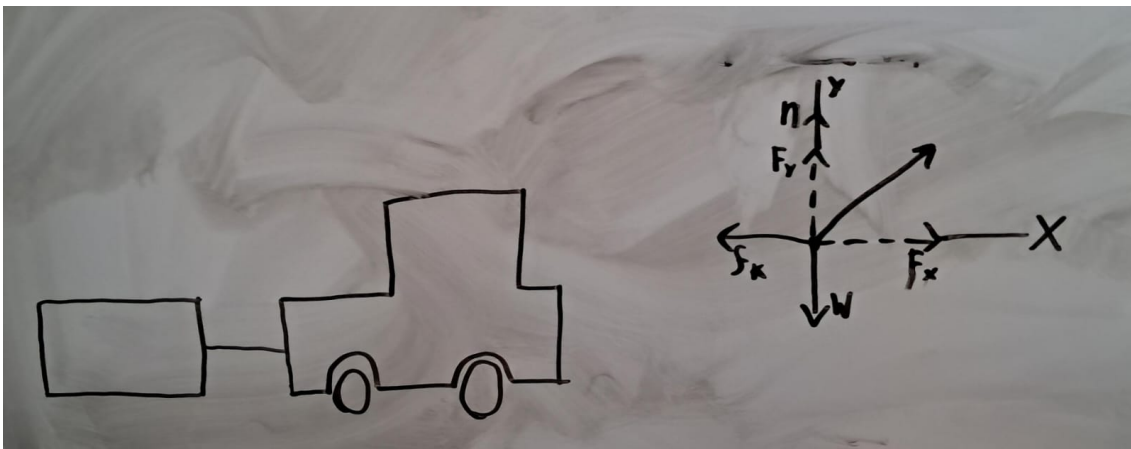
5.1.2. Trabajo total

¿Cómo calculamos el trabajo cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo? Podemos usar las ecuaciones anteriormente vistas para calcular el trabajo realizado por cada fuerza individual. Puesto que el trabajo es una cantidad escalar, el trabajo total W_{tot} realizado por todas las fuerzas sobre el cuerpo es la suma algebraica de los trabajos realizados por las fuerzas individuales. Otra forma de calcular W_{tot} es calcular la suma vectorial de las fuerzas (es decir, la fuerza neta) y usarla en vez de \vec{F} .

Ejercicio 8. Trabajo realizado por varias fuerzas

Un granjero engancha su tractor a un trineo cargado con leña y lo arrastra 20 m sobre el suelo horizontal. El peso total del trineo y la carga es de 14700N . El tractor ejerce una fuerza constante de 5000N a $36,9^\circ$ sobre la horizontal. Una fuerza de fricción de 3500N se opone al movimiento del trineo. Calcule el trabajo realizado por cada fuerza que actúa sobre el trineo y el trabajo total de todas las fuerzas.

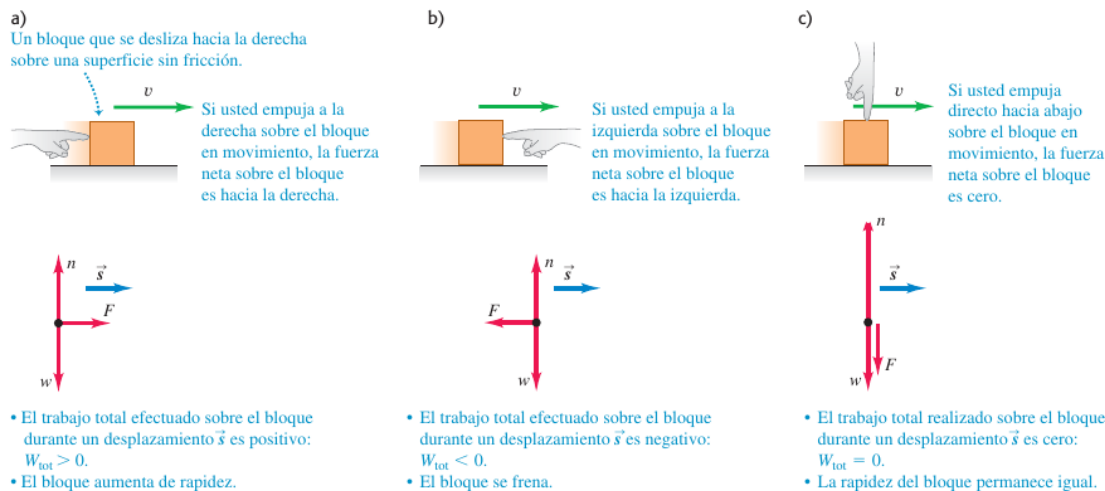
Solución 8.



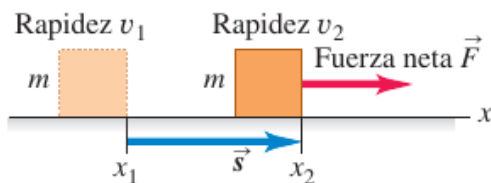
...

5.2. Energía cinética y el teorema trabajo-energía

El trabajo total realizado por fuerzas externas sobre un cuerpo se relaciona con el desplazamiento de éste (los cambios en su posición), pero también está relacionado con los cambios en la rapidez del cuerpo. Para comprobarlo, considere la siguiente figura, que muestra tres ejemplos de un bloque que se desliza sobre una mesa sin fricción. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso \vec{w} , la fuerza normal \vec{n} y la fuerza \vec{F} ejercida por la mano.



Hagamos más cuantitativas tales observaciones. Considere una partícula con masa m que se mueve en el eje x bajo la acción de una fuerza neta constante de magnitud F dirigida hacia el eje $+x$ (figura). La aceleración de la partícula es constante y está dada por la segunda ley de Newton, $F = ma_x$. Suponga que la rapidez cambia de v_1 a v_2 mientras la partícula sufre un desplazamiento $s = x_2 - x_1$ del punto x_1 al x_2 .



Primero buscamos una ecuación que solo relaciona v , a_x y s (el desplazamiento). Para ello utilizamos estas ecuaciones de MRUA:

$$1. \quad v = v_1 + a_x t$$

$$1. \quad x = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Eliminamos el tiempo t (utilizando 1.):

$$t = \frac{v - v_1}{a_x}$$

Sustituyendo en la ecuación de posición:

$$s = x - x_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$s = v_1 \left(\frac{v - v_1}{a_x} \right) + \frac{1}{2} a_x \left(\frac{v - v_1}{a_x} \right)^2$$

Multiplicamos y simplificamos:

$$s = \frac{v_1(v - v_1)}{a_x} + \frac{(v - v_1)^2}{2a_x}$$

Multiplicamos todo por $2a_x$

$$2a_x s = 2v_1(v - v_1) + (v - v_1)^2$$

Expandimos:

$$2a_x s = 2v_1 v - 2v_1^2 + v^2 - 2v_1 v + v_1^2$$

Se cancelan los términos $2v_1 v - 2v_1 v$, y queda:

$$2a_x s = v^2 - v_1^2$$

Obteniendo una ecuación para la aceleración en función de la rapidez y el desplazamiento:

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

Al multiplicar esta ecuación por m y sustituir ma_x por la fuerza neta F , obtenemos

$$F = ma_x = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

$$(5.2-1) \quad Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

El producto Fs es el trabajo efectuado por la fuerza neta F y, por lo tanto, es igual al trabajo total W_{tot} efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Llamamos a la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ la **energía cinética** K de la partícula (definición de energía cinética):

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{definición de energía cinética})$$

Igual que el trabajo, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar; sólo depende de la masa y la rapidez de la partícula, no de su dirección de movimiento. Un automóvil (visto como partícula) tiene la misma energía cinética yendo al norte a $10m/s$ que yendo al este a $10m/s$. La energía cinética nunca puede ser negativa, y es cero sólo si la partícula está en reposo.

Ahora podemos interpretar la ecuación (5.2-1) en términos de trabajo y energía cinética.

El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula:

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Éste es el resultado del **teorema trabajo-energía**.

Ejercicio 9. Uso de trabajo y energía para calcular rapidez

Supongamos que un trineo tiene una rapidez inicial v_1 de $2,0m/s$. ¿Cuál es la rapidez final del trineo después de avanzar 20 m? Con $w = 14700N$ y $W_{tot} = 10000J$

Solución 9.

Para calcular v_2 , usaremos el hecho de que $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$K_2 = W_{tot} + K_1$$

Para calcular K_2 , necesitamos calcular K_1 :

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Para calcularla busquemos el valor de la masa:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{14700}{9,8} \approx 1430kg$$

Luego

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot 1430kg \cdot (2,0m/s)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1430kg \cdot 4,0m^2/s^2 \approx 2860J$$

Ahora estamos listos para calcular K_2 :

$$K_2 = W_{tot} + K_1 = 10000J + 2860J = 12860J \implies$$

$$\implies 12860J = \frac{1}{2}mv_2^2 \implies v_2^2 = \frac{12860J}{\frac{1}{2} \cdot 1430kg} \approx 18m^2/s^2$$

$$v_2 = \sqrt{18m^2/s^2} \approx 4,2m/s$$

Ejercicio 10. Fuerzas sobre un martillo

En un martinete, un martillo de acero con masa de $200kg$ se levanta $3,00m$ sobre el tope de una viga en forma de I vertical, que se está clavando en el suelo. El martillo se suelta, metiendo la viga-I otros $7,4cm$ en el suelo. Los rieles verticales que guían el martillo ejercen una fuerza de fricción constante de $60N$ sobre éste. Use el teorema trabajo-energía para determinar

- a) la rapidez del martillo justo antes de golpear la viga-I y
- b) la fuerza media que el martillo ejerce sobre la viga-I. Ignore los efectos del aire.

Solución 10.

a) Primero calculamos el trabajo realizado por la caída del martillo:

$$W_{tot} = (mg - f_k) \cdot 3,00m = (200 \cdot 9,8N - 60N) \cdot 3,00m = 5700J$$

Sabemos que en el punto P_1 la velocidad es 0, entonces:

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot 200kg \cdot 0^2 = 0$$

Entonces tenemos una ecuación para descubrir K_2 :

$$K_2 = W_{tot} + K_1 = 5700J + 0 = 5700J$$

Y por definición de energía cinética:

$$5700J = \frac{1}{2} \cdot 200kg \cdot v_2^2$$

$$v_2^2 = \frac{5700J}{\frac{1}{2} \cdot 200kg} = 57m^2/s^2$$

$$v_2 = \sqrt{57m^2/s^2} \approx 7,55m/s$$

Por lo que la rapidez del martillo justo antes de golpear la viga-I es de $7,55m/s$.

b) Ahora para calcular la fuerza que el martillo ejerce sobre la viga-I, usaremos el teorema trabajo-energía:

$$W_{tot} = (w - f_k - n) \cdot s_{23} = K_3 - K_2$$

K_3 es igual a 0 ya que el martillo se detiene, para calcular la fuerza ejercida por el martillo despejaremos la fuerza normal n :

$$n = w - f - \frac{K_3 - K_2}{s_{23}} = 1960N - 60N - \frac{0 - 5700J}{0,0074m} = 79000N$$

Por lo tanto, por el par acción-reacción, la fuerza media que el martillo ejerce sobre la viga-I es igual que la fuerza normal que la viga ejerce sobre el martillo ($79000N$).

5.2.1. Significado de la energía cinética

El ejercicio 10 ilustra el significado físico de la energía cinética. El martillo se deja caer del reposo y, al golpear la viga-I, su energía cinética es igual al trabajo total realizado hasta ese punto por la fuerza neta. Esto se cumple en general: para acelerar una partícula de masa m desde el reposo (cero energía cinética) hasta una rapidez v , el trabajo total efectuado sobre ella debe ser igual al cambio de energía cinética desde 0 hasta $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$W_{tot} = K - 0 = K$$

Así, **la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total que se efectuó para acelerarla desde el reposo hasta su rapidez actual**. La definición $K = \frac{1}{2}mv^2$, no se eligió al azar: es la única definición que concuerda con esta interpretación de la energía cinética.

5.3. Trabajo y energía con fuerza variable

Hasta ahora hemos considerado sólo trabajo efectuado por fuerzas constantes. También analizamos únicamente movimiento rectilíneo. Podemos imaginar muchas situaciones en las que una fuerza que varía en magnitud, dirección o ambas cosas actúa sobre un cuerpo que sigue una trayectoria curva. Necesitamos poder calcular el trabajo realizado por la fuerza en estos casos más generales. Por fortuna, veremos que el teorema trabajo-energía se cumple aun cuando las fuerzas varían y la trayectoria del cuerpo no es recta.

5.3.1. Trabajo efectuado por una fuerza variable, movimiento rectilíneo

Agreguemos sólo una complicación a la vez. Consideremos un movimiento rectilíneo en el eje x con una fuerza cuya componente x F_x varía conforme se mueve el cuerpo. (Un ejemplo de la vida cotidiana es conducir un automóvil en una carretera recta, pero el conductor está acelerando y frenando constantemente.) Suponga que una partícula se mueve sobre el eje x de x_1 a x_2 (figura). La figura b es una gráfica de la componente x de la fuerza en función de la coordenada x de la partícula. Para determinar el trabajo realizado por esta fuerza, dividimos el desplazamiento total en segmentos pequeños, Δx_a , Δx_b , etcétera (figura c). Aproximamos el trabajo realizado por la fuerza en el segmento Δx_a como la componente x media de fuerza F_{ax} en ese segmento multiplicada por el desplazamiento Δx_a . El trabajo realizado por la fuerza en el desplazamiento total de x_1 a x_2 es aproximadamente:

$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \dots$$

En el límite donde el número de segmentos se hace muy grande y su anchura muy pequeña, la suma se convierte en la integral de F_x de x_1 a x_2 :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \quad (\text{componente } x \text{ de fuerza variable, desplazamiento rectilíneo})$$

Si F_x , la componente x de la fuerza, es constante puede sacarse de la integral de la ecuación:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1)$$

Pero $x_2 - x_1 = s$, el desplazamiento total de la partícula. Así, en el caso de una fuerza constante F , la ecuación indica que $W = Fs$, lo cual coincide con la anterior ecuación de trabajo.

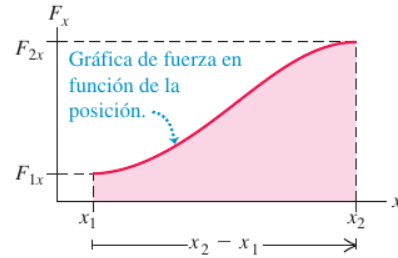
5.3.2. Resortes

Apliquemos ahora lo aprendido al resorte estirado. Para mantener un resorte estirado una distancia x más allá de su longitud sin estiramiento, debemos aplicar una fuerza de igual magnitud en cada extremo (figura). Si el alargamiento x no es excesivo, vemos que la fuerza aplicada al extremo derecho tiene una componente x directamente proporcional a x :

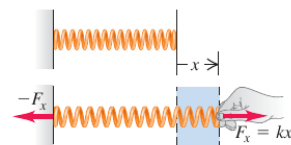
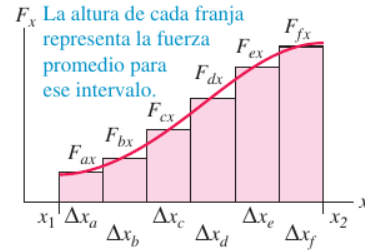
a) La partícula se mueve de x_1 a x_2 en respuesta a una fuerza cambiante en la dirección x .



b)



c)



$$F_x = kx \quad (\text{fuerza requerida para estirar un resorte, ley de Hooke})$$

donde k es una constante llamada constante de fuerza (o constante de resorte) del resorte. Las unidades de k son fuerza dividida entre distancia. La observación de que el alargamiento (no excesivo) es proporcional a la fuerza fue hecha por Robert Hooke en 1678 y se conoce como **ley de Hooke**.

El trabajo realizado por F_x cuando el alargamiento va de cero a un valor máximo X es

$$W = \int_0^X F_x dx = \int_0^X kx dx = \frac{1}{2}kX^2$$

Esta ecuación indica que el trabajo es la fuerza media $\frac{kx}{2}$ multiplicada por el desplazamiento total X . Vemos que el trabajo total es proporcional al cuadrado del alargamiento final X . Para estirar un resorte ideal 2 cm, necesitamos efectuar cuatro veces más trabajo que para estirarlo 1 cm.

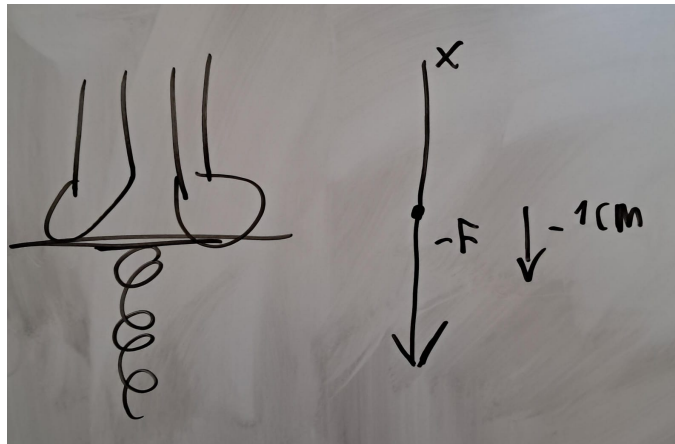
Si el resorte ya está estirado una distancia x_1 , el trabajo necesario para estirarlo a una distancia mayor x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

Ejercicio 11. Trabajo sobre una balanza de resorte

Una mujer que pesa $600N$ se sube a una báscula que contiene un resorte rígido. En equilibrio, el resorte se comprime 1.0 cm bajo su peso. Calcule la constante de fuerza del resorte y el trabajo total efectuado sobre él durante la compresión.

Solución 11.



Por la ley de Hooke:

$$F_x = kx \implies k = \frac{F_x}{x}$$

Reemplazando tenemos:

$$k = \frac{-600N}{-0,01m} = 60000N/m$$

Entonces la constante de fuerza de resorte es de $60000N/m$.

Para calcular el trabajo total efectuado sobre el resorte, usaremos la ecuación de trabajo:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

Tomando $x_1 = 0$ y $x_2 = -0,01m$ tenemos:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 60000N/m \cdot (-0,01m)^2 - \frac{1}{2} \cdot 60000N/m \cdot 0^2 = 3J - 0 = 3J$$

$$W = 3J$$

5.3.3. Teorema trabajo-energía para movimiento rectilíneo, con fuerzas variables

En la sección 5.2 dedujimos el teorema trabajo-energía, $W_{tot} = K_2 - K_1$, para el caso específico de movimiento rectilíneo con fuerza neta constante. Ahora podemos demostrar que dicho teorema se cumple aun si la fuerza varía con la posición.

Para ello, recordamos que la aceleración a de una partícula puede expresarse de varias formas. Usando $a_x = dv_x/dt$, $v_x = dx/dt$ y la regla de la cadena para derivadas:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Con este resultado, la ecuación $W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$ nos dice que el trabajo total efectuado por la fuerza neta F_x es

$$W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x \frac{dv_x}{dx} dx$$

Ahora, $(dv_x/dx) dx$ es el cambio de velocidad dv_x durante el desplazamiento dx , así que podemos sustituir dv_x por $(dv_x/dx) dx$ en la ecuación. Esto cambia la variable de integración de x a v_x , así que cambiamos los límites de x_1 y x_2 a las velocidades correspondientes v_1 y v_2 en esos puntos:

$$W_{tot} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x dx$$

La integral de $v_x dv_x$ es $v_x^2/2$. Sustituyendo los límites, tenemos finalmente

$$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Ésta es la ecuación que buscábamos. Por lo tanto, el teorema trabajo-energía es válido aun sin el supuesto de que la fuerza neta es constante.

$$W_{tot} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x dv_x \quad (\text{Teorema trabajo-energía, con fuerzas variables})$$

Ejercicio 12. Movimiento con fuerza variable

Un deslizador de riel de aire con masa de $0,100\text{kg}$ se conecta al extremo del riel horizontal con un resorte cuya constante de fuerza es $20,0\text{N/m}$. Inicialmente, el resorte no está estirado y el deslizador se mueve con rapidez de $1,50\text{m/s}$ a la derecha. Calcule la distancia máxima d que el deslizador se mueve a la derecha,

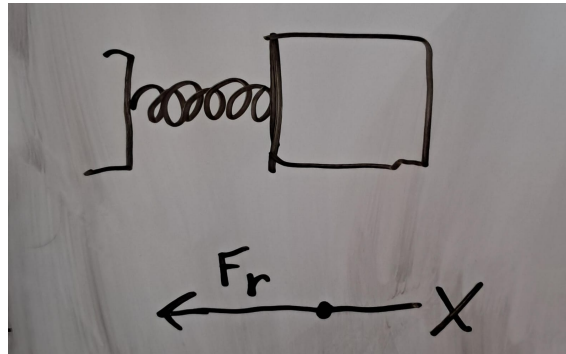
- si el riel está activado, de modo que no hay fricción; y
- si se corta el suministro de aire al riel, de modo que hay fricción cinética con coeficiente $\mu_k = 0,47$.

Solución 12.

Datos:

- $m = 0,100\text{kg}$
- $k = 20,0\text{N/m}$
- $v_1 = 1,50\text{m/s}$

a) Primero diagramamos el problema:



el deslizador efectúa sobre el resorte un trabajo dado por la ecuación $W = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd_0^2 = \frac{1}{2}kd^2$, y el resorte sobre el deslizador un trabajo igual pero negativo: $-\frac{1}{2}kd^2$ como es el único trabajo que es ejercido sobre el deslizador entonces $W_{tot} = -\frac{1}{2}kd^2$ por lo que utilizando el teorema trabajo-energía, con $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ y $K_2 = 0$, ya que la energía cinética es cero al finalizar el movimiento, tenemos:

$$-\frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$kd^2 = mv_1^2$$

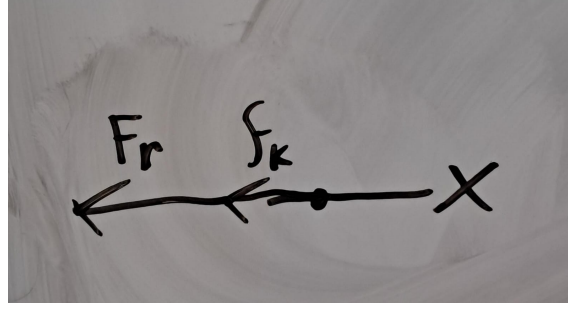
Despejamos d

$$d = \sqrt{\frac{mv_1^2}{k}} = \sqrt{\frac{0,1\text{kg} \cdot (1,5\text{m/s})^2}{20\text{N/m}}} \approx 0,106\sqrt{\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{m/N}}$$

$$[d] = \sqrt{\cancel{\text{kg}} \cdot \text{m}^3/\cancel{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\text{kg}} \cdot \text{m}/\cancel{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^3}{\text{m}}} = \sqrt{\text{m}^2} = \text{m}$$

$$d = 0,106\text{m} = 10,6\text{cm}$$

b) Primero diagramamos el problema:



Para calcular el trabajo total W_{tot} tenemos que sumar el trabajo que ejerce la fricción cinética sobre el deslizador ($-f_k d$) y el trabajo que ejerce el resorte sobre el deslizador ($-\frac{1}{2}kd^2$):

$$-\frac{1}{2}kd^2 - f_k d = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$-\frac{1}{2}kd^2 - f_k d + \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$$

$$(-10N/m)d^2 + (-0,46N)d + (0,11N \cdot m) = 0$$

Usamos la ecuación cuadrática para obtener la solución:

$$d_{1,2} = \frac{(0,46N) \pm \sqrt{(0,46N)^2 - 4(-10N/m)(0,11N \cdot m)}}{-20N/m}$$

$$d_1 = 0,086m \quad , \quad d_2 = -0,132m$$

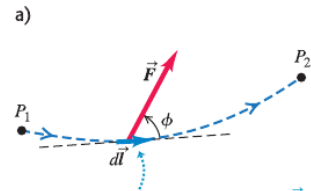
Como estamos buscando un valor positivo, elegimos $d_1 = 0,086m = 8,6cm$

5.3.4. Teorema trabajo-energía para movimientos en una curva

Podemos generalizar nuestra definición de trabajo para incluir una fuerza que varía en dirección, no sólo en magnitud, con un desplazamiento curvo. Suponga que una partícula se mueve de P_1 a P_2 siguiendo una curva, como se muestra en la figura a. Dividimos la curva entre esos puntos en muchos desplazamientos vectoriales infinitesimales, siendo $d\vec{l}$ (diferencial de \vec{l}) uno representativo. Sea \vec{F} la fuerza en un punto representativo de la trayectoria, y sea ϕ el ángulo entre \vec{F} y $d\vec{l}$ en ese punto. De manera que el elemento pequeño de trabajo dW realizado sobre la partícula durante el desplazamiento $d\vec{l}$ puede escribirse como

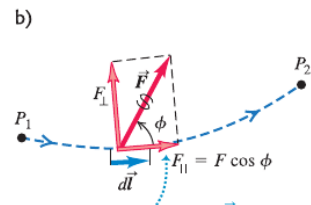
$$dW = F \cos(\phi) dl = F_{\parallel} dl = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde $F_{\parallel} = F \cos(\phi)$ es la componente de \vec{F} en la dirección paralela a $d\vec{l}$ (figura b). El trabajo total realizado por F sobre la partícula al moverse de P_1 a P_2 es, entonces:



En un desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$, la fuerza \vec{F} realiza trabajo dW sobre la partícula:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cos \phi dl$$



Tan sólo la componente de \vec{F} paralela al desplazamiento, $F_{\parallel} = F \cos \phi$, contribuye al trabajo efectuado por F .

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F \cos(\phi) dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel} dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

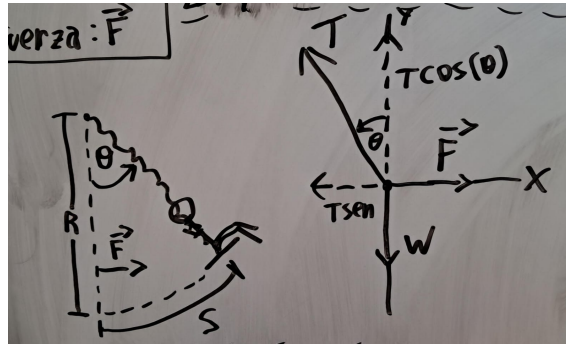
...

Ejercicio 13. Movimiento en una trayectoria curva I

En un día de campo familiar, le piden a usted empujar a su odioso primo Morton en un columpio. El peso de Morton es w , la longitud de las cadenas es R , y usted lo empuja hasta que las cadenas forman un ángulo θ_0 con la vertical. Para ello, usted ejerce una fuerza horizontal variable \vec{F} que comienza en cero y aumenta gradualmente apenas lo suficiente para que Morton y el columpio se muevan lentamente y permanezcan casi en equilibrio. ¿Qué trabajo total realizan todas las fuerzas sobre Morton? ¿Qué trabajo realiza la tensión T en las cadenas? ¿Qué trabajo efectúa usted aplicando la fuerza \vec{F} ? (Ignore el peso de las cadenas y el asiento.)

Solución 13.

Diagramamos el problema:



Como Morton esta en equilibrio sabemos que $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$:

$$\Sigma F_x = F + (-T \sin(\theta)) = 0 \implies F = T \sin(\theta)$$

$$\Sigma F_y = T \cos(\theta) + (-w) = 0 \implies w = T \cos(\theta)$$

Dividiendo ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{F}{w} = \frac{T \sin(\theta)}{T \cos(\theta)} = \tan(\theta) \implies F = w \tan(\theta)$$

Primero calculamos el trabajo que realiza \vec{T} sobre Morton. Como \vec{T} es perpendicular a la trayectoria $d\vec{l}$, el trabajo realizado es:

$$dW = T_{\parallel} dl = T \cos(90^\circ) dl = 0 \cdot dl = 0$$

Por lo que, el trabajo realizado por la tensión T sobre Morton es 0.

Ahora calculamos el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} sobre Morton. Para ello debemos calcular la longitud del arco s que es igual a $R\theta_0$ (θ radianes). Por lo tanto el desplazamiento $d\vec{l}$ tiene magnitud $dl = ds = R d\theta$ y el trabajo realizado es:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\theta) ds$$

Remplazando tenemos:

$$W = \int_0^{\theta_0} (w \tan(\theta)) \cos(\theta) R d\theta = \int_0^{\theta_0} w R \sin(\theta) d\theta = w R \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) d\theta$$

Terminando en

$$W = wR(-\cos(\theta_0) + 1)$$

Ahora para calcular el trabajo total realizado por todas las fuerzas sobre Morton tenemos:

$$W_{tot} = W_F + W_T = wR(-\cos(\theta_0) + 1) + 0 = wR(-\cos(\theta_0) + 1)$$

Ejercicio 14. Movimiento en una trayectoria curva II

En el Ejercicio 13, el desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ tiene magnitud ds , su componente x es $ds \cos(\theta)$ y su componente y es $ds \sin(\theta)$. Por lo tanto, $d\vec{l} = \hat{i}[ds \cos(\theta)] + \hat{j}[ds \sin(\theta)]$. Use esta expresión y la ecuación $W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ para calcular el trabajo efectuado durante el movimiento por la tensión de la cadena, por la fuerza de gravedad y por la fuerza F .

Solución 14.

Tenemos $d\vec{l}$ expresados en componentes por lo que nos conviene expresar las fuerzas en componentes:

- $\vec{T} = \hat{i}[-T \sin(\theta)] + \hat{j}[T \cos(\theta)]$
- $\vec{w} = \hat{j}[-w]$
- $\vec{F} = \hat{i}[F]$

Ahora calculamos el producto escalar de las fuerzas con $d\vec{l}$:

$$\vec{T} \cdot d\vec{l} = [-T \sin(\theta)][ds \cos(\theta)] + [T \cos(\theta)][ds \sin(\theta)] = 0$$

$$\vec{w} \cdot d\vec{l} = [-w][ds \sin(\theta)] = -w \sin(\theta) ds$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = [F][ds \cos(\theta)] = F \cos(\theta) ds$$

Ahora calculamos el trabajo realizado por el peso:

$$W_w = \int_{P_1}^{P_2} \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} -w \sin(\theta) ds = \int_0^{\theta_0} -w \sin(\theta) R d\theta = -wR \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) d\theta$$

$$W_w = -wR[1 - \cos(\theta_0)]$$

5.4. Potencia

En el habla cotidiana, “potencia” suele emplearse como sinónimo de “energía” o “fuerza”. En física usamos una definición mucho más precisa: potencia es la rapidez con que se efectúa trabajo; al igual que el trabajo y la energía, la potencia es una cantidad escalar.

Si se realiza un trabajo ΔW en un intervalo Δt , el trabajo medio efectuado por unidad de tiempo o potencia media P_{med} se define como

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (\text{potencia media})$$

La rapidez con que se efectúa trabajo quizá no sea constante. Podemos definir la **potencia instantánea** P como el cociente de la ecuación cuando Δt se aproxima a cero:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (\text{potencia instantánea})$$

En el SI la unidad de potencia es el watt (W), llamada así por el inventor inglés James Watt. Un watt es igual a un joule por segundo:

$$1W = 1J/s$$

En el sistema británico, el trabajo se expresa en pie-libras, y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. También se usa una unidad mayor, el caballo de potencia (hp):

$$1hp = 550ft \cdot lb/s$$

$$1hp = 746W$$

El watt es una unidad común de potencia *eléctrica*; una bombilla eléctrica de $100W$ convierte $100J$ de energía eléctrica en luz y calor cada segundo. Sin embargo, los watts no son inherentemente eléctricos.

En mecánica, también podemos expresar la potencia en términos de fuerza y velocidad.

$$P = \frac{F_{\parallel} ds}{dt} = F_{\parallel} \frac{ds}{dt} = F_{\parallel} v$$

donde v es la magnitud de la velocidad instantánea. También podemos expresar la ecuación en términos del producto escalar:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Ejercicio 15. Fuerza y potencia

Cada uno de los dos motores a reacción de un avión Boeing 767 desarrolla un empuje (fuerza hacia adelante sobre el avión) de $197000N$. Cuando el avión está volando a $250m/s$ ($900km/h$), ¿cuántos caballos de potencia desarrolla cada motor?

Solución 15.

...

6. Energía Potencial y Conservación de la Energía

Cuando un clavadista se tira de un trampolín a la alberca, golpea el agua rápidamente, con mucha energía cinética. ¿De dónde proviene esa energía? La respuesta que dimos en el capítulo 6 fue que la fuerza gravitacional (su peso) realiza trabajo sobre el clavadista al caer. La energía cinética del clavadista —energía asociada con su *movimiento*— aumenta en una cantidad igual al trabajo realizado.

Sin embargo, hay otra forma muy útil de ver el trabajo y la energía cinética. Este nuevo enfoque se basa en el concepto de *energía potencial*, que es energía asociada a la posición de un sistema, no a su movimiento. En este enfoque, hay energía potencial gravitacional incluso cuando el clavadista está parado en el trampolín.

Demostraremos que, en algunos casos, la suma de las energías cinética y potencial de un sistema, llamada, energía mecánica total, es constante durante el movimiento del sistema. Esto nos llevará al enunciado general de la ley de conservación de la energía, que es uno de los principios más fundamentales y trascendentales de la ciencia.

6.1. Energía potencial gravitacional

En cualquier interacción, el cambio de energía cinética de una partícula es igual al trabajo total efectuado sobre la partícula por todas las fuerzas que actúan sobre ella.

En muchas situaciones, parece que se almacena energía en un sistema para recuperarse después. Por ejemplo, hay que efectuar trabajo para levantar una roca pesada sobre la cabeza. Parece razonable que, al levantar la roca en el aire, se está almacenando energía en el sistema, la cual se convierte después en energía cinética al dejar caer la roca.

Este ejemplo señala a la idea de una energía asociada con la posición de los cuerpos en un sistema. Este tipo de energía es una medida del *potencial* o *posibilidad* de efectuar trabajo. Al levantar una roca, existe la posibilidad de que la fuerza de gravitación realice trabajo sobre ella, pero sólo si la roca se deja caer al suelo. Por ello, la energía asociada con la posición se llama **energía potencial**. Lo dicho sugiere que hay energía potencial asociada al peso de un cuerpo y a su altura sobre el suelo: la energía *potencial gravitacional*.

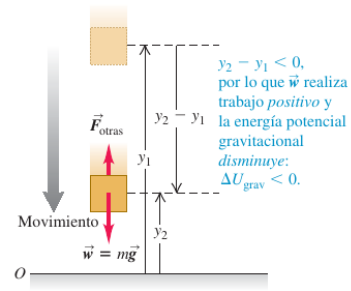
Ahora tenemos **dos** formas de describir lo que sucede cuando un cuerpo cae sin resistencia del aire. Una forma consiste en decir que disminuye la energía potencial gravitacional y aumenta la energía cinética del cuerpo que cae. La otra forma, que vimos en el capítulo 6, es que aumenta la energía cinética de un cuerpo que cae porque la fuerza de gravedad terrestre (el peso del cuerpo) realiza trabajo sobre el cuerpo. Más adelante en esta sección utilizaremos el teorema trabajo-energía para demostrar que estas dos descripciones son equivalentes.

Consideremos un cuerpo de masa m que se mueve en el eje y (vertical), como en la figura. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = mg$, y tal vez otras; llamamos a la suma vectorial (resultante) de todas las otras fuerzas \vec{F}_{otras} . Suponemos que el cuerpo permanece tan cerca de la superficie terrestre que el peso es constante. Queremos determinar el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo cae de una altura y_1 sobre el origen a una altura menor y_2 (figura a). El peso y el desplazamiento tienen la misma dirección, así que el trabajo W_{grav} efectuado sobre el cuerpo por su peso es positivo;

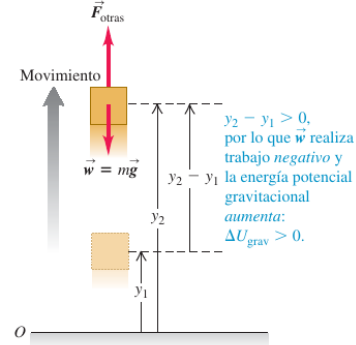
$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

Esta expresión también da el trabajo correcto cuando el cuerpo sube y y_2 es mayor que y_1 (figura b). En tal caso, la cantidad $y_1 - y_2$ es negativa y W_{grav} es negativa porque el peso y el desplazamiento tienen direcciones opuestas. La ecuación muestra que podemos expresar W_{grav} en términos de los valores de la cantidad mgy al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad, el producto del peso mg y la altura y sobre el origen de las coordenadas, es la **energía potencial gravitacional**, U_{grav} :

a) Un cuerpo se mueve hacia abajo



b) Un cuerpo se mueve hacia arriba



$$U_{grav} = mgy \quad (\text{energía potencial gravitacional})$$

Su valor inicial es $U_{grav,1} = mgy_1$ y su valor final es $U_{grav,2} = mgy_2$. El cambio en U_{grav} es su valor final menos su valor inicial: $\Delta U_{grav} = U_{grav,2} - U_{grav,1}$. Podemos expresar el trabajo W_{grav} realizado por la fuerza gravitacional durante el desplazamiento de y_1 a y_2 como

$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -(U_{grav,2} - U_{grav,1}) = -\Delta U_{grav}$$

El signo negativo de ΔU_{grav} es fundamental. Cuando el cuerpo sube, y aumenta, el trabajo realizado por la gravedad es negativo y la energía potencial gravitacional aumenta ($\Delta U_{grav} > 0$). Si el cuerpo baja, y disminuye, la gravedad realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitacional se reduce ($\Delta U_{grav} < 0$).

6.1.1. Conservación de la energía mecánica (sólo fuerzas gravitacionales)

Si quiere ver para qué sirve la energía potencial gravitacional, suponga que el peso del cuerpo es la única fuerza que actúa sobre él: $F_{otras} = 0$. Entonces, el cuerpo cae libremente sin resistencia del aire, y podría estar subiendo o bajando. Sea v_1 su rapidez en y_1 , y v_2 en y_2 . El teorema trabajo-energía indica que el trabajo total efectuado sobre el cuerpo es igual al cambio en su energía cinética; $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$. Si la gravedad es la única fuerza que actúa, entonces, $W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$. Juntando esto,

$$K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

que podemos reescribir como

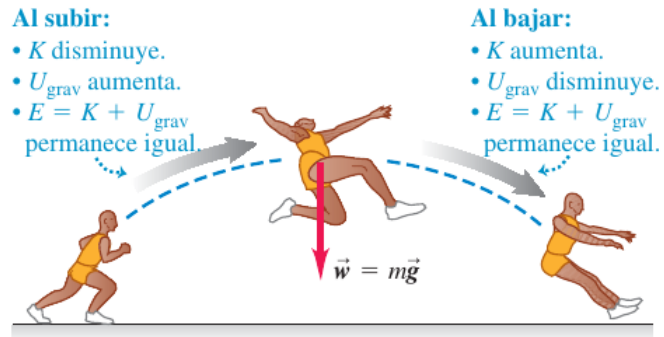
$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$

Ahora definimos la suma $K + U_{grav}$ de las energías cinética y potencial como E , la **energía mecánica total del sistema**. Así, $E_1 = K_1 + U_{grav,1}$ es la energía mecánica total en y_1 y $E_2 = K_2 + U_{grav,2}$ es la energía mecánica total en y_2 . Entonces podemos decir que $E_1 = E_2$. No obstante, dado que las posiciones y_1 y y_2 son puntos arbitrarios en el movimiento del cuerpo, la energía mecánica total E tiene el mismo valor en todos los puntos durante el movimiento;

$$E = K + U_{grav} = \text{constante}$$

Es decir, *Si sólo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total es constante, es decir, se conserva*. Éste es nuestro primer ejemplo de la **conservación de la energía mecánica**.

7.3 Mientras el atleta está en el aire, sólo la gravedad efectúa trabajo sobre él (si despreciamos los efectos menores de la resistencia del aire). La energía mecánica (la suma de las energías cinética y potencial gravitacional) se conserva.



Ejercicio 16. Altura de una pelota por conservación de la energía

Usted lanza una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg hacia arriba, dándole una velocidad inicial hacia arriba de 20,0 m/s. Determine qué altura alcanza, despreciando la resistencia del aire.

Solución 16.

...

6.1.2. Energía potencial gravitacional para movimiento en una trayectoria curva

Sobre el cuerpo actúa la fuerza gravitacional $\vec{w} = m\vec{g}$ y tal vez otras fuerzas cuya resultante llamamos \vec{F}_{otras} . Para calcular el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional durante este desplazamiento, dividimos la trayectoria en segmentos pequeños $\Delta\vec{s}$; un segmento típico. El trabajo

realizado por la fuerza gravitacional sobre este segmento es el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento. En términos de vectores unitarios, la fuerza es $\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{j}$ y el desplazamiento es $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$, así que el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es

$$\vec{w} \cdot \Delta\vec{s} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

El trabajo efectuado por la gravedad es el mismo que si el cuerpo se hubiera desplazado verticalmente una distancia Δy , sin desplazamiento horizontal. Esto se cumple para cada segmento, así que el trabajo total efectuado por la fuerza gravitacional es $-mg$ multiplicado por el desplazamiento vertical total $(y_2 - y_1)$:

$$W_{grav} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

Esto es igual a la ecuación (7.1) o (7.3), donde se supuso una trayectoria completamente vertical. Así que, aun si la trayectoria de un cuerpo entre dos puntos es curva, el trabajo total efectuado por la gravedad depende sólo de la diferencia de altura entre esos dos puntos. Por lo tanto, *podemos usar la misma expresión para la energía potencial gravitacional, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva.*

Ejercicio 17. Cálculo de rapidez en un círculo vertical

Imagine que su primo Morton baja en patineta por una rampa curva en un parque. Tratando a Morton y a su patineta como una partícula, ésta describe un cuarto de círculo de radio $R = 3,00m$. La masa total de Morton y su patineta es de $25,0kg$. Él parte del reposo y no hay fricción.

- Calcule su rapidez en la base de la rampa.
- Obtenga la fuerza normal que actúa sobre él en la base de la rampa.

Solución 17.

...

6.2. Energía potencial elástica

Describiremos el proceso de almacenar energía en un cuerpo deformable, como un resorte o una banda de hule, en términos de *energía potencial elástica*. Un cuerpo es *elástico* si recupera su forma y tamaño originales después de deformarse.

Procedemos igual que con la energía potencial gravitacional. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica (del resorte) y lo combinamos con el teorema trabajo-energía. La diferencia es que la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de un cuerpo y la Tierra; no obstante, la energía potencial elástica sólo se almacena en el resorte (u otro cuerpo deformable).

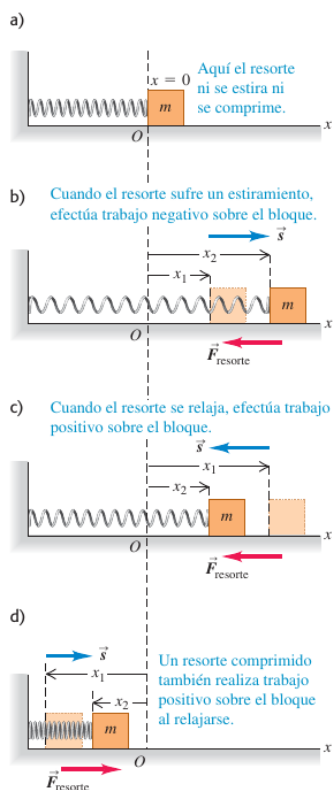
En la figura, el cuerpo está en $x = 0$ con el resorte ni estirado ni comprimido. Movemos el bloque estirando o comprimiendo el resorte, y luego lo soltamos. Al moverse el bloque de una posición x_1 a otra posición x_2 , ¿cuánto trabajo realiza la fuerza elástica (del resorte) sobre el bloque?

En la sección 5.3 vimos que el trabajo que debemos efectuar sobre el resorte para mover un extremo desde un alargamiento x_1 hasta otro alargamiento distinto x_2 es

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (\text{trabajo efectuado sobre un resorte})$$

Ahora nos interesa el trabajo efectuado por el resorte. Por la tercera ley de Newton, un trabajo es el negativo del otro. Cambiando los signos en la ecuación, vemos que, al desplazarse de x_1 a x_2 , el resorte efectúa un trabajo W_{el} dado por

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (\text{trabajo efectuado por el resorte})$$



Como hicimos con el trabajo gravitacional, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad es $\frac{1}{2}kx^2$, que definimos como la **energía potencial elástica**:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{energía potencial elástica})$$

Podemos usar la ecuación para expresar el trabajo W_{el} efectuado sobre el bloque por la fuerza elástica en términos del cambio en la energía potencial elástica:

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el}$$

...

Ejercicio 18. Movimiento con fuerzas gravitacional, elástica y de fricción

...

6.3. Fuerzas conservativas y no conservativas

Al estudiar la energía potencial se observa que es posible “almacenar” energía cinética convirtiéndola en potencial, con la idea de que luego puede recuperarse en forma de energía cinética. Un ejemplo sencillo es el de una pelota lanzada hacia arriba: en la subida su energía cinética se transforma en potencial, y al descender ocurre el proceso inverso, recuperando la energía cinética. Si no existiera la resistencia del aire, la pelota regresaría al punto de lanzamiento con la misma rapidez con la que fue arrojada.

En el ejemplo se cumple que existe una conversión bidireccional entre energía cinética y energía potencial. Esto permite definir una función de energía potencial de manera que la energía mecánica total, es decir, la suma de la energía cinética y la potencial, es constante o ***se conserva*** durante el movimiento.

6.3.1. Fuerzas conservativas

Decimos que una fuerza que ofrece esta oportunidad de conversión bidireccional entre energías cinética y potencial es una **fuerza conservativa**. Hemos visto dos ejemplos de fuerzas conservativas: la gravitacional y la de resorte. Una característica fundamental de las fuerzas conservativas es que su trabajo siempre es *reversible*. Algo que depositamos en el “banco” de energía puede retirarse después sin pérdida.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa siempre tiene estas propiedades:

1. Puede expresarse como la diferencia entre los valores inicial y final de una función de *energía potencial*.
2. Es reversible.
3. Es independiente de la trayectoria del cuerpo y depende sólo de los puntos inicial y final.
4. Si los puntos inicial y final son el mismo, el trabajo total es cero.

Si las únicas fuerzas que efectúan trabajo son conservativas, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante.

6.3.2. Fuerzas no conservativas

El trabajo realizado por una **fuerza no conservativa** no puede representarse con una función de energía potencial. Algunas fuerzas no conservativas, como la fricción cinética o la resistencia de fluidos, hacen que se pierda o se disipe energía mecánica: son **fuerzas disipadoras**.

También hay fuerzas no conservativas que *aumentan* la energía mecánica. Los fragmentos de un petardo que estalla salen despedidos con una energía cinética muy grande, debido a una reacción química de la pólvora con el oxígeno. Las fuerzas liberadas por esta reacción no son conservativas porque el proceso no es reversible.

Ejercicio 19. El trabajo de fricción depende de la trayectoria

...

6.3.3. La ley de conservación de la energía

Las fuerzas no conservativas no pueden representarse en términos de energía potencial; no obstante, podemos describir sus efectos en términos de energías distintas de la cinética y la potencial. Cuando un automóvil con frenos bloqueados se derrapa hasta detenerse, se calientan los neumáticos y el camino. La energía asociada a este cambio en el estado de los materiales se denomina **energía interna**. Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo, aumenta su energía interna; si se reduce su temperatura, disminuye su energía interna.

Para captar el significado de la energía interna, consideremos un bloque que se desliza por una superficie áspera. Cuando se desliza, la fricción realiza trabajo negativo sobre el bloque, y el cambio de energía interna del bloque y la superficie es positivo (ambos se calientan). Experimentos cuidadosos demuestran que el aumento en la energía interna es exactamente igual al valor absoluto del trabajo efectuado por la fricción. Dicho de otro modo,

$$\Delta U_{int} = -W_{otras}$$

donde ΔU_{int} es el cambio de energía interna. Si sustituimos esto en la ecuación $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$, vemos que

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{int} = K_2 + U_2$$

Si escribimos $\Delta K = K_2 - K_1$ y $\Delta U = U_2 - U_1$, podemos expresar finalmente esto como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \quad (\text{ley de conservación de la energía})$$

Este notable enunciado es la forma general de la **ley de conservación de la energía**. En un proceso dado, las energías cinética, potencial e interna de un sistema pueden cambiar; pero la suma de todos los cambios siempre es cero.

Una disminución en una forma de energía se compensa con un aumento en las otras. Si ampliamos nuestra definición de energía para incluir la energía interna, la ecuación dice que **la energía nunca se crea ni se destruye, sólo cambia de forma**. No se ha observado aún una excepción a esta regla.

Ejercicio 20. Trabajo efectuado por la fricción

...

6.4. Fuerza y energía potencial

En los dos tipos de fuerzas conservativas (gravitacional y elástica) que estudiamos, comenzamos con una descripción del comportamiento de la fuerza y de él dedujimos una expresión para la *energía potencial*.

No obstante, en su estudio de la física el lector encontrará situaciones donde tiene una expresión para la *energía potencial* en función de la posición y necesita determinar la *fuerza* correspondiente. Veremos varios ejemplos de este tipo cuando estudiemos las fuerzas eléctricas más adelante. En general, es mucho más fácil calcular primero la energía potencial eléctrica, y luego determinar la fuerza eléctrica correspondiente.

Veamos cómo calcular la fuerza que corresponde a una expresión de energía potencial dada. Primero, consideremos un movimiento rectilíneo sobre el eje x . Denotamos la componente x de la fuerza, que es función de x , con $F_x(x)$; y la energía potencial, con $U(x)$. Esta notación nos recuerda que tanto F_x como U son funciones de x . Ahora recordamos que, en cualquier desplazamiento, el trabajo W efectuado por una fuerza conservativa es el negativo del cambio de energía potencial ΔU :

$$W = -\Delta U$$

Aplicemos esto a un desplazamiento pequeño Δx . El trabajo efectuado por $F_x(x)$ durante este desplazamiento es aproximadamente igual a $F_x(x)\Delta x$. Decimos “aproximadamente” porque $F_x(x)$ podría variar un poco en el intervalo Δx ; pero se cumple, al menos aproximadamente, que

$$F_x(x)\Delta x = -\Delta U \quad \text{y} \quad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

En el límite $\Delta x \rightarrow 0$, la variación de F_x se hace despreciable y tenemos la relación exacta

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{o} \quad F_x(x) = -U'(x) \quad (\text{fuerza a partir de la energía potencial})$$

El significado físico de la ecuación es que *una fuerza conservativa siempre trata de llevar el sistema a una energía potencial menor*.

Como verificación, consideremos la función de la energía potencial elástica, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si sustituimos por esto:

$$F_x(x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) = -kx$$

Ejercicio 21. Fuerza eléctrica y su energía potencial

...

6.4.1. Fuerza y energía potencial en tres dimensiones

Podemos extender este análisis a tres dimensiones, donde la partícula puede moverse en las direcciones x , y , z , o todas a la vez. Donde bajo el mismo procedimiento llegamos a:

$$F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \quad F_y(y) = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \quad F_z(z) = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Si queremos que las relaciones sean exactas, deberemos tomar límites $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta z \rightarrow 0$ para que estos cocientes se conviertan en derivadas. Calculamos la derivada de U con respecto a x suponiendo que y y z son constantes y sólo x varía, y así sucesivamente. Éstas se llaman derivadas parciales y su notación usual es $\frac{\partial U}{\partial x}$ y así sucesivamente; el símbolo ∂ es una d modificada, por lo que escribimos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Podemos usar vectores unitarios para escribir una sola expresión vectorial compacta para la fuerza \vec{F} :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right) \quad (\text{fuerza a partir de la energía potencial})$$

La expresión en paréntesis representa una operación específica sobre la función U , donde se obtiene la derivada parcial de U con respecto a cada coordenada, se multiplican por el vector unitario correspondiente y se suman vectorialmente. Esta operación se denomina gradiente de U y suele abreviarse $\vec{\nabla}U$. Por lo tanto, la fuerza es el negativo del gradiente de la función de energía potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Ejercicio 22. Fuerza y energía potencial en dos dimensiones

...

6.5. Diagramas de energía

...

7. Momento lineal, impulso y choques

Hay muchas preguntas relacionadas con fuerzas que no pueden contestarse aplicando directamente la segunda ley de Newton, $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$. Por ejemplo, si un camión de 18 ruedas choca de frente con un auto compacto, ¿qué determina hacia dónde se mueven los restos después del choque? Cuando usted juega billar, ¿cómo decide la dirección que debe dar a la bola blanca para meter la bola 8 en una buchaca?

Algo que tienen en común todas estas preguntas es que implican fuerzas acerca de las que sabemos muy poco: las fuerzas que actúan entre el auto y el camión o entre las dos bolas de billar. Lo curioso es que en este capítulo veremos que ¡no necesitamos saber *nada* acerca de esas fuerzas para contestar preguntas de este tipo!

Nuestro enfoque utiliza dos conceptos nuevos, **momento lineal** e **impulso**, y una nueva ley de conservación, la de **conservación del momento lineal**, tan importante como la de conservación de la energía.

En el ámbito de la mecánica newtoniana, la conservación del momento lineal nos permite analizar muchas situaciones que serían muy difíciles si tratáramos de aplicar las leyes de Newton directamente. Entre ellas están los choques, en los que dos cuerpos ejercen, uno sobre el otro, fuerzas muy grandes durante un lapso muy breve.

7.1. Momento lineal e impulso

En el capítulo 6 reexpresamos la segunda ley de Newton para una partícula, $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, en términos del teorema del trabajo y la energía, el cual nos ayudó a resolver muchos problemas y nos llevó a la ley de conservación de la energía. Volvamos a $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ y veamos otra forma útil de replantear esta ley fundamental.

7.1.1. Segunda ley de Newton en términos del momento lineal

Consideremos una partícula de masa constante m . Puesto que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, podemos escribir la segunda ley de Newton para esta partícula así:

$$\Sigma \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$$

Así, la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio de la combinación $m\vec{v}$, el producto de la masa y la velocidad de la partícula. Llamamos a esta combinación **momento lineal** de la partícula

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{definición de momento lineal})$$

Si sustituimos la definición de momento lineal, en la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{segunda ley de Newton en términos de momento lineal})$$

Ésta, y no $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, es la forma en que Newton planteó originalmente su segunda ley (aunque él llamó momentum al momento lineal), y sólo es válida en marcos de referencia inerciales.

7.1.2. Teorema del impulso y el momento lineal

El momento lineal de una partícula $\vec{p} = m\vec{v}$ y su energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ dependen de la masa y la velocidad de la partícula. ¿Qué diferencia fundamental hay entre estas cantidades? Para ver la diferencia física entre momento lineal y energía cinética, necesitamos definir una cantidad íntimamente relacionada con el momento lineal: el *impulso*.

Consideremos primero una partícula sobre la que actúa una fuerza neta constante ΣF durante un tiempo Δt , de t_1 a t_2 . El **impulso** de la fuerza neta, denotado con \vec{J} , se define como el producto de la fuerza neta y el intervalo de tiempo:

$$\vec{J} = \Sigma F(t_2 - t_1) = \Sigma F \Delta t$$

Para ver para qué nos sirve el impulso, volvamos a la segunda ley de Newton planteada en términos de momento lineal. Si la fuerza neta ΣF es constante, $\frac{d\vec{p}}{dt}$ también es constante. En tal caso, $\frac{d\vec{p}}{dt}$ es igual al cambio total de momento lineal $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ durante el lapso $t_2 - t_1$, dividido entre el lapso:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

Si multiplicamos esta ecuación por $(t_2 - t_1)$, tenemos

$$\Sigma \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Obteniendo un resultado conocido como **teorema del impulso y el momento lineal**:

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (\text{teorema del impulso y el momento lineal})$$

El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese intervalo.

El teorema del impulso y el momento lineal también se cumple si las fuerzas no son constantes. Para comprobarlo, integramos los dos miembros de la segunda ley de Newton $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ con respecto al tiempo entre los límites t_1 y t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

La integral de la izquierda es, por definición, el impulso \vec{J} de la fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ durante este intervalo:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt \quad (\text{definición general de impulso})$$

7.1.3. Comparación de momento lineal y energía cinética

El teorema del impulso y el momento lineal $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ dice que los cambios en el momento lineal de una partícula se deben al impulso, que depende del tiempo durante el que actúa la fuerza neta. En cambio, el teorema del trabajo y la energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos dice que la energía cinética cambia cuando se realiza trabajo sobre una partícula; el trabajo total depende de la distancia en la que actúa la fuerza neta.

Considere una partícula que parte del reposo en t_1 , de manera que $\vec{v}_1 = 0$. Su momento lineal inicial es $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = 0$, y su energía cinética inicial es $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. Ahora, una fuerza neta constante igual a \vec{F} actúa sobre el cuerpo del tiempo t_1 al tiempo t_2 . En este intervalo, la partícula se mueve una distancia s en la dirección de la fuerza. Por lo que el momento lineal del cuerpo en el instante t_2 es

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{J} = \vec{J}$$

donde $\vec{J} = \vec{F}(t_2 - t_1)$ es el impulso que actúa sobre la partícula. Así, el momento lineal de una partícula es igual al impulso que la aceleró desde el reposo hasta su rapidez actual; el impulso es el producto de la fuerza neta que aceleró el cuerpo y el tiempo requerido para la aceleración. En cambio, la energía cinética del cuerpo en t_2 es $K_2 = W_{tot} = Fs$, el trabajo total efectuado sobre el cuerpo para acelerarlo desde el reposo. El trabajo total es igual al producto de la fuerza neta y la distancia necesaria para acelerar la partícula.

Ejercicio 23. Momento lineal contra energía cinética

Suponga que lanza una pelota de $0,40\text{kg}$ contra una pared, a la cual golpea moviéndose horizontalmente hacia la izquierda a 30m/s y rebotando horizontalmente a la derecha con rapidez de 20m/s .

- Calcule el impulso de la fuerza neta sobre la pelota durante el choque.
- Si la pelota está en contacto con la pared durante $0,010\text{s}$, calcule la fuerza horizontal media que la pared ejerce sobre la pelota durante el impacto.

Solución 23.

...

7.2. Conservación del momento lineal

El concepto de momento lineal tiene especial importancia en situaciones en las que dos o más cuerpos *interactúan*. Para ver por qué, consideremos primero un sistema idealizado de dos cuerpos que interactúan entre sí, por ejemplo, dos astronautas que se tocan mientras flotan libremente en el espacio exterior en un ambiente de gravedad cero. Consideremos a los astronautas como partículas. Cada partícula ejerce una fuerza sobre la otra. Los *impulsos* que actúan sobre las dos partículas son iguales y opuestos, y los cambios de momento lineal de las dos partículas serán iguales y opuestos.

Repasemos esto a la luz de ciertos términos nuevos. En cualquier sistema, las fuerzas que las partículas del sistema ejercen entre sí se denominan **fuerzas internas**; las ejercidas sobre cualquier parte del sistema por algún objeto externo son **fuerzas externas**. Las fuerzas internas son $\vec{F}_{B \rightarrow A}$, ejercida por la partícula B sobre la A , y $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ ejercida por la partícula A sobre la B . No hay fuerzas externas, así que tenemos un **sistema aislado**.

Las razones de cambio del momento lineal de ambas partículas son

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \quad \vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

las dos fuerzas, $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ y $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ siempre son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Es decir, $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$, así que $\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B} = 0$. Sumando las dos ecuaciones, tenemos

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0$$

Las razones de cambio de los dos momentos lineales son iguales y opuestas, así que la razón de cambio de la suma vectorial $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ es cero. Ahora definimos el **momento lineal total** \vec{P} del sistema de dos partículas como la suma vectorial de los momentos lineales de las partículas individuales. Esto es,

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

Así, la ecuación se convierte finalmente en

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

La razón de cambio del momento lineal total \vec{P} es cero. Por lo tanto, el momento lineal total del sistema es constante, aunque los momentos lineales individuales de las partículas que constituyen el sistema pueden cambiar.

Si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema es constante.

Ésta es la forma más sencilla del **principio de conservación del momento lineal**, el cual es una consecuencia directa de la tercera ley de Newton.

Podemos generalizar este principio para un sistema con cualquier número de partículas A , B , C , ... que sólo interactúan entre sí. El momento lineal total del sistema es

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \cdots = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C + \cdots \quad (\text{momento lineal total del sistema})$$

Ejercicio 24. Retroceso de un rifle

Un tirador sostiene holgadamente un rifle de masa $m_R = 3,00\text{kg}$, de manera que pueda retroceder libremente al hacer un disparo. Dispara una bala de masa $m_B = 5\text{g} = 0,005\text{kg}$ con una velocidad horizontal relativa al suelo de $v_{Bx} = 300\text{m/s}$. ¿Qué velocidad de retroceso v_{Rx} tiene el rifle? ¿Qué momento lineal y energía cinética finales tiene la bala? ¿Y el rifle?

Solución 24.

...

7.3. Conservación del momento lineal y choques

El término choque hace que una persona común piense en un percance de tráfico. Usaremos el término en ese sentido, pero además ampliaremos su significado para incluir cualquier interacción vigorosa entre cuerpos con duración relativamente corta.

Si las fuerzas entre los cuerpos son mucho mayores que las externas, como suele suceder en los choques, podemos ignorar las fuerzas externas y tratar los cuerpos como un sistema *aislado*. Entonces, el momento lineal se conserva y el momento lineal total del sistema tendrá el mismo valor antes y después del choque.

7.3.1. Choques elásticos e inelásticos

Si las fuerzas entre los cuerpos son *conservativas*, de manera que no se pierde ni gana energía mecánica en el choque, la *energía* cinética total del sistema es la misma antes y después. Esto se denomina **choque elástico**. Un choque entre dos canicas o dos bolas de billar es casi totalmente elástico.

Un choque en el que la energía cinética total final es *menor* que la inicial es un **choque inelástico**. Una albóndiga que cae en un plato de espagueti y una bala que se incrusta en un bloque de madera son ejemplos de choques inelásticos. Un choque inelástico en el que los cuerpos se pegan y se mueven como uno solo después del choque es un **choque totalmente inelástico**.

En todo choque en el que se pueden ignorar las fuerzas externas, el momento lineal se conserva y el momento lineal total es el mismo antes y después. La energía cinética total sólo es igual antes y después si el choque es elástico.

7.3.2. Choque totalmente inelásticos

Veamos qué sucede con el momento lineal y la energía cinética en un choque totalmente inelástico de dos cuerpos A y B , como en la figura. Dado que los cuerpos quedan pegados después del choque, tienen la misma velocidad final \vec{v}_2 :

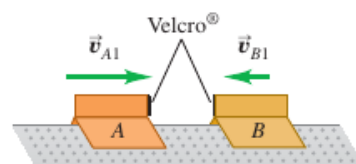
$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

La conservación del momento lineal da la relación

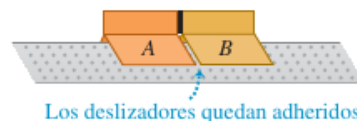
$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B) \vec{v}_2$$

Si conocemos las masas y las velocidades iniciales, podremos calcular la velocidad final común \vec{v}_2 .

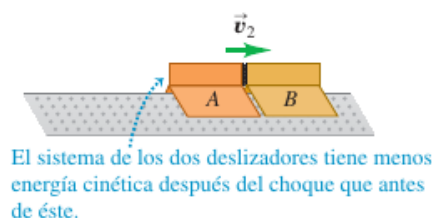
a) Antes del choque



b) Choque totalmente inelástico



c) Después del choque



Ejercicio 25. Choque totalmente inelástico

Suponga que, en el choque descrito en el ejemplo 8.5 (sección 8.2), los deslizadores no rebotan, sino que quedan pegados después del choque. Las masas y velocidades iniciales son las mismas que en el ejemplo 8.5. Calcule la velocidad final común v_{2x} y compare las energías cinéticas inicial y final del sistema.

Solución 25.

...

7.3.3. Clasificación de los choques

Es importante recordar que los choques se clasifican de acuerdo con consideraciones de energía. Un choque en el que la energía cinética se *conserva* se considera **elástico**. Un choque en el que la energía cinética total *disminuye* se llama **inelástico**. Cuando dos cuerpos tienen una *velocidad final común*, decimos que el choque es **totalmente inelástico**. También hay casos en los que la energía cinética final es mayor que el valor inicial, por ejemplo el retroceso de los rifles.

7.4. Choques elásticos

Como vimos en la sección 7.3, un choque elástico en un sistema aislado es uno en el que se conserva la energía cinética. Estos choques ocurren cuando las fuerzas entre los cuerpos que chocan son conservativas. Si chocan dos bolas de billar, se aplastan un poco cerca del punto de contacto,

pero luego rebotan. Parte de la energía cinética se almacena temporalmente como energía potencial elástica, pero al final se convierte una vez más en energía cinética.

Examinemos un choque elástico entre dos cuerpos A y B. Comencemos con un choque en una dimensión, con todas las velocidades en la misma línea, a la que llamamos eje x . Llamamos v_{A1x} y v_{B1x} a las componentes x de velocidad antes del choque, y v_{A2x} y v_{B2x} a las componentes x después del choque. Por la conservación de la energía cinética tenemos

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1x}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2x}^2$$

y la conservación del momento lineal da

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Si conocemos las masas m_A y m_B y las velocidades iniciales v_{A1x} y v_{B1x} , podremos resolver las ecuaciones para obtener las velocidades finales v_{A2x} y v_{B2x} .

7.4.1. Choques elásticos, un cuerpo inicialmente en reposo

La solución general de las ecuaciones anteriores es algo complicada, así que nos concentraremos en el caso especial en que el cuerpo B está en reposo antes del choque. Piense que el cuerpo B es el blanco que A debe golpear. Las ecuaciones de conservación de energía cinética y el momento lineal son, respectivamente,

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2x}^2$$

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Reacomodemos primero las ecuaciones así:

$$m_B v_{B2x}^2 = m_A (v_{A1x} - v_{A2x})(v_{A1x} + v_{A2x})$$

$$m_B v_{B2x} = m_A (v_{A1x} - v_{A2x})$$

Ahora dividimos la primera ecuación entre la segunda para obtener

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$$

Sustituyendo en $m_B v_{B2x} = m_A (v_{A1x} - v_{A2x})$ obtenemos

$$m_B (v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A (v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

Por último, sustituimos este resultado en la ecuación ($v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$) para obtener

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

7.5. Centro de masa

Podemos replantear el principio de conservación del momento lineal en una forma útil usando el concepto de **centro de masa**. Supongamos que tenemos varias partículas con masas m_1, m_2 , etcétera. Las coordenadas de m_1 son (x_1, y_1) , las de m_2 , (x_2, y_2) , y así sucesivamente. Definimos el centro de masa del sistema como el punto con coordenadas (x_{cm}, y_{cm}) dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$
$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

El vector de posición \vec{r}_{cm} del centro de masa se puede expresar en términos de los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots$ de las partículas como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (\text{Centro de masa})$$

7.5.1. Movimiento del centro de masa

Para comprender la importancia del centro de masa de un conjunto de partículas, debemos preguntar qué le sucede cuando las partículas se mueven. Las componentes x e y de velocidad del centro de masa, v_{cm-x} y v_{cm-y} son las derivadas de x_{cm} e y_{cm} respecto al tiempo. Al derivar las ecuaciones del centro de masa respecto al tiempo, obtenemos

$$v_{cm-x} = \frac{\sum_i m_i v_{i-x}}{\sum_i m_i} \quad v_{cm-y} = \frac{\sum_i m_i v_{i-y}}{\sum_i m_i}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación de un solo vector que se obtiene al derivar respecto al tiempo:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Denotamos la masa total $m_1 + m_2 + \cdots$ con M . Así, podemos reescribir la ecuación como

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{P}$$

El lado derecho es el momento lineal total \vec{P} del sistema. Así, hemos demostrado que *el momento lineal total es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa*.

Ejercicio 26. Tira y afloja en el hielo

Santiago y Ramón están de pie, con una separación de $20,0m$, sobre la resbalosa superficie de un estanque helado. Ramón tiene una masa de $60,0kg$, y Santiago, de $90,0kg$. A medio camino entre ellos está un tarro de su bebida favorita. Los dos tiran de los extremos de una cuerda ligera

que hay entre ellos. Cuando Santiago se ha movido 6,0m hacia el tarro, ¿cuánto y en qué dirección se ha movido Ramón?

Solución 26.

...

7.5.2. Fuerzas externas y movimiento del centro de masa

Dando un paso más, derivamos las ecuaciones respecto al tiempo para demostrar que las aceleraciones están relacionadas de la misma forma. Sea $\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$ la aceleración del centro de masa; entonces,

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots$$

Ahora, $m_1\vec{a}_1$ es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la primera partícula, y así sucesivamente, por lo que el lado derecho de la ecuación es igual a la suma vectorial $\sum \vec{F}$ de *todas* las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Igual que en secciones anteriores, podemos clasificar cada fuerza como interna o externa. La suma de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas es entonces

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{int} + \sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

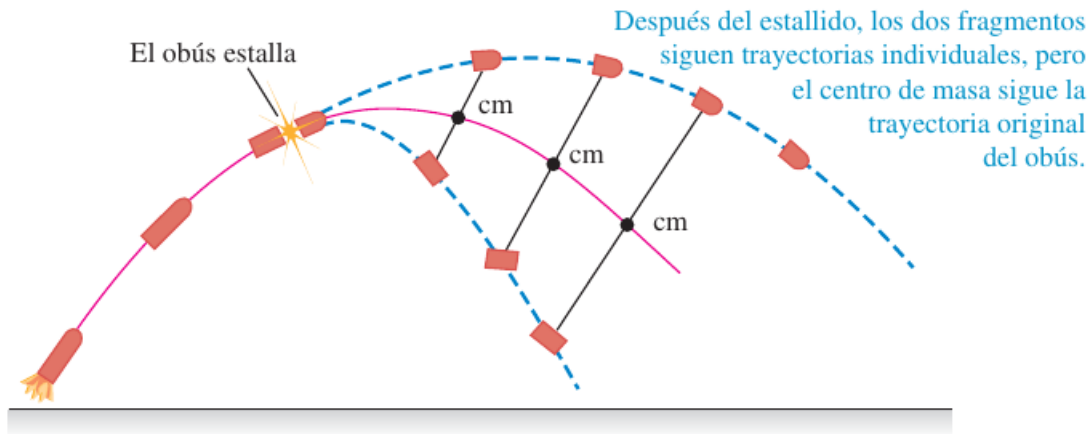
Por la tercera ley de Newton, todas las fuerzas internas se cancelan en pares, y $\sum \vec{F}_{int} = 0$. Lo que queda en el lado izquierdo es la suma sólo de las fuerzas externas:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \quad (\text{cuerpo o conjunto de partículas})$$

Cuando fuerzas externas actúan sobre un cuerpo o un conjunto de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto y sobre ella actuara una fuerza neta igual a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Este resultado quizá no suene muy impresionante, pero es básico en mecánica. De hecho, hemos estado usándolo todo el tiempo; sin él, no podríamos representar un cuerpo extendido como una partícula puntual al aplicar las leyes de Newton.

Suponga que un obús con una trayectoria parabólica (ignorando la resistencia del aire) estalla en vuelo dividiéndose en dos fragmentos de igual masa (figura). Los fragmentos siguen nuevas trayectorias parabólicas, pero el centro de masa sigue la trayectoria parabólica original, igual que si la masa aún estuviera concentrada ahí. Un cohete que estalla es un ejemplo espectacular de este efecto.



Esta propiedad del centro de masa es importante al analizar el movimiento de cuerpos rígidos. Describimos el movimiento de un cuerpo extendido como una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por ese centro.

7.6. *Propulsión a reacción

...

8. Rotación de Cuerpos Rígidos

La rotación se da en todos los niveles, desde el movimiento de los electrones en los átomos hasta los movimientos de las galaxias enteras. Necesitamos desarrollar métodos generales para analizar el movimiento de un cuerpo en rotación.

Los cuerpos reales llegan a ser muy complejos; las fuerzas que actúan sobre ellos pueden deformarlos: estirarlos, torcerlos y aplastarlos. Por el momento ignoraremos tales deformaciones y supondremos que el cuerpo tiene forma y tamaño perfectamente definidos e inmutables. Llamamos a este modelo idealizado **cuerpo rígido**.

Comenzaremos con el lenguaje de la cinemática para describir el movimiento rotacional. Luego veremos la energía cinética de la rotación, la clave para usar los métodos de energía en el movimiento rotacional. En el capítulo 9 deduciremos los principios dinámicos que relacionan las fuerzas sobre un cuerpo con su movimiento rotacional.

8.1. Velocidad y aceleración angulares

8.1.1. Velocidad angular

Podemos describir el movimiento rotacional del cuerpo en términos de la razón de cambio de θ . Un cuerpo que gira forma un ángulo θ_1 con el eje $+x$ en el instante t_1 . En un instante posterior t_2 , el ángulo cambió a θ_2 . Definimos la **velocidad angular media** ω_{med-z} del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón del **desplazamiento angular** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ en Δt :

$$\omega_{med-z} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

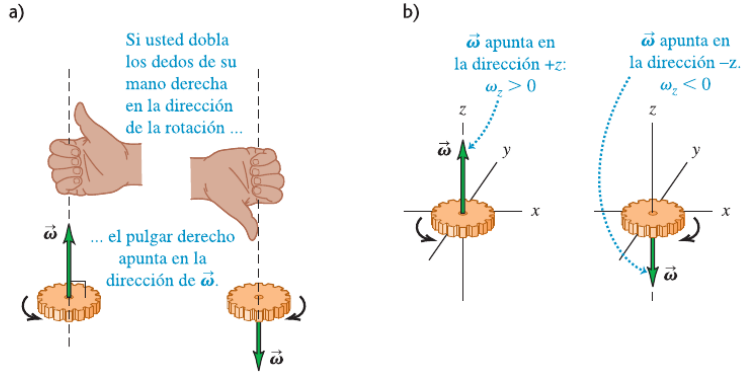
El subíndice z indica que el cuerpo está girando en torno al eje z , que es perpendicular al plano del diagrama. La velocidad angular instantánea ω_z es el límite de ω_{med-z} cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada de θ con respecto a t :

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{definición de velocidad angular})$$

8.1.2. Velocidad angular como un vector

Así como v_x es la componente x del vector de velocidad \vec{v} , ω_z es la componente z de un vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Como muestra la figura a, la dirección de $\vec{\omega}$ está dada por la regla de la mano derecha. Si la rotación es sobre el eje z , $\vec{\omega}$ sólo tiene componente z , la cual es positiva si $\vec{\omega}$ apunta en la dirección $+z$ y negativa si $\vec{\omega}$ apunta en la dirección $-z$ (figura b).

9.5 a) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si se invierte el sentido de la rotación, se invierte la dirección de $\vec{\omega}$.
b) El signo de ω_z de la rotación a lo largo del eje z .



8.1.3. Aceleración angular

Si ω_{1z} y ω_{2z} son las velocidades angulares instantáneas en t_1 y t_2 , definimos la **aceleración angular media** α_{med-z} en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como el cambio de la velocidad angular dividido entre Δt :

$$\alpha_{med-z} = \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t}$$

La **aceleración angular instantánea** α_z es el límite de α_{med-z} cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (\text{definición de aceleración angular})$$

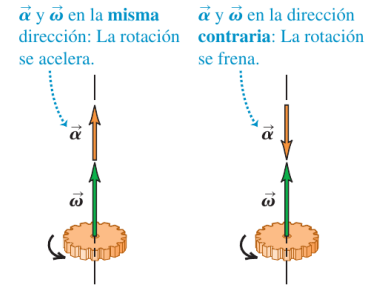
Dado que $\omega_z = d\theta/dt$, también podemos expresar la aceleración angular como la segunda derivada de la coordenada angular:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

8.1.4. Aceleración angular como un vector

Así como hicimos con la velocidad angular, resulta útil definir un *vector* de aceleración angular $\vec{\alpha}$. Matemáticamente, $\vec{\alpha}$ es la derivada con respecto al tiempo del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el objeto gira en torno al eje z fijo, $\vec{\alpha}$ sólo tiene componente z ; la cantidad α_z es precisamente esa componente. En este caso, $\vec{\alpha}$ apunta en la misma dirección que $\vec{\omega}$ si la rotación se está acelerando, y en la dirección opuesta si se está frenando (figura).

9.7 Cuando el eje de rotación es fijo, los vectores de aceleración angular y velocidad angular están sobre ese eje.



8.2. Rotación con aceleración angular constante

...

8.3. Relación entre cinemática lineal y angular

8.3.1. Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

La rapidez de una partícula es directamente proporcional a la velocidad angular del cuerpo; cuanto más rápidamente gire el cuerpo, mayor será la rapidez de cada partícula. El punto P está a una distancia constante r del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio r . En cualquier instante, el ángulo θ (en rad) y la longitud de arco s están relacionadas por

$$s = r\theta$$

Derivamos esto con respecto al tiempo, observando que r es constante para una partícula específica, y obtenemos el valor absoluto de ambos lados:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = r \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

Ahora, $|ds/dt|$ es el valor absoluto de la razón de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez lineal instantánea v de la partícula. Así,

$$v = r\omega \quad (\text{relación entre rapidez lineal y angular})$$

8.3.2. Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Podemos representar la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo en términos de sus componentes centrípeta y tangencial, a_{rad} y a_{tan} , como hicimos en la sección 2.4. Derivando la ecuación ($v = r\omega$), obtenemos

$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

Esta componente de la aceleración de una partícula siempre es tangente a la trayectoria circular de la partícula.

En la sección 2.4 dedujimos la relación $a_{\text{rad}} = v^2/r$. Podemos expresar esto en términos de v usando la ecuación ($v = r\omega$):

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Esto se cumple en todo instante aun si ω y v no son constantes. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

8.4. Energía en el movimiento rotacional

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que podemos expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada *momento de inercia*, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa.

Para deducir esta relación, consideramos que el cuerpo está formado por un gran número de partículas, con masas m_1, m_2, \dots , a distancias r_1, r_2, \dots del eje de rotación. Las partículas no tienen que estar todas en el mismo plano, así que especificamos que r_i es la distancia *perpendicular* de la partícula i -ésima al eje.

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, la rapidez v_i de la i -ésima partícula está dada por la ecuación, $v_i = r_i\omega$, donde ω es la rapidez angular del cuerpo. Diferentes partículas tienen distintos valores de r , pero ω es igual para todas (si no, el cuerpo no sería rígido). La energía cinética de la i -ésima partícula es

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética *total* del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de esta expresión:

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2$$

La palabra “momento” implica que I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. La unidad del momento de inercia en el SI es el kilogramo-metro cuadrado ($kg \cdot m^2$).

En términos del momento de inercia I , la **energía cinética rotacional** K de un cuerpo rígido es

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

9. Dinámica del Movimiento Rotacional

...

10. Equilibrio y Elasticidad

...

11. Gravitación

Como enfatizamos en el capítulo 5, la gravitación es una de las cuatro clases de interacciones que observamos en la naturaleza, y fue la primera que se estudió ampliamente. En el siglo XVII, Newton descubrió que la misma interacción que hace a una manzana caer de un árbol mantiene a los planetas en órbita alrededor del Sol. Ése fue el nacimiento de la *mecánica celeste*, es decir, el estudio de la dinámica de los objetos en el espacio.

En este capítulo estudiaremos la ley básica que rige las interacciones gravitacionales. Se trata de una ley *universal*: la gravedad actúa fundamentalmente de la misma manera: entre la Tierra y nuestro cuerpo, entre el Sol y un planeta y entre un planeta y sus lunas. Aplicaremos la ley de la gravitación a fenómenos como la variación del peso con la elevación, las órbitas de los satélites terrestres y las de los planetas alrededor del Sol.

11.1. Ley de Newton de la gravitación

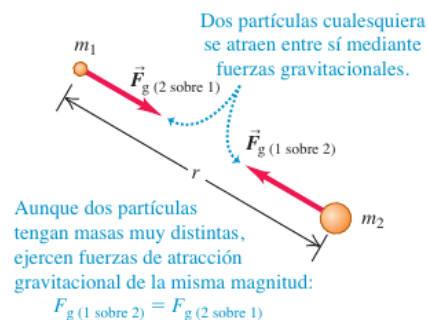
Al estudiar el movimiento de los planetas y la Luna, Newton descubrió el carácter fundamental de la atracción gravitacional entre dos cuerpos cualesquiera. Junto con sus tres leyes del movimiento, en 1687 Newton publicó la **ley de la gravitación**, que puede enunciarse así:

Toda partícula de materia en el Universo atrae a todas las demás partículas con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas de las partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Traduciendo esto a una ecuación, tenemos

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (\text{ley de la gravitación})$$

donde F_g es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre cualesquiera de las partículas, m_1 y m_2 son sus masas, r es la distancia entre ellas (figura) y G es una constante física fundamental llamada **constante gravitacional**. El valor numérico de G depende del sistema de unidades empleado.

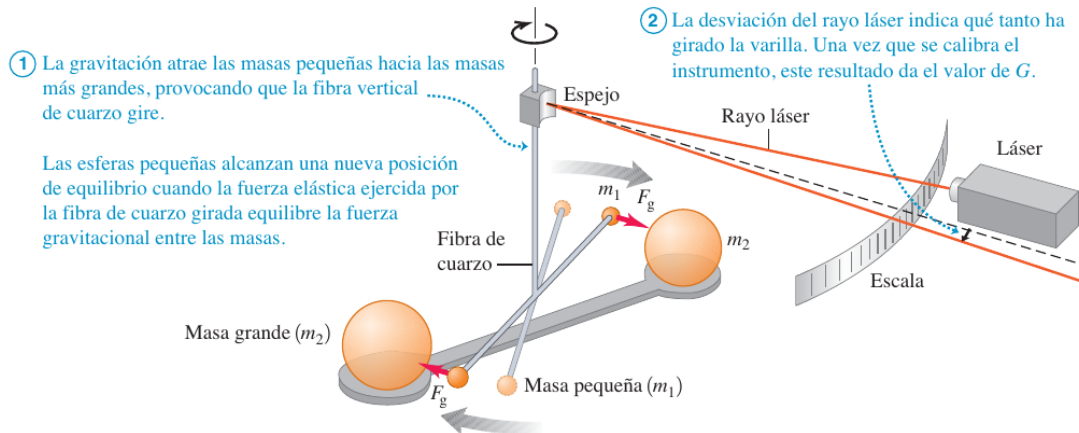


La ecuación nos indica que la fuerza gravitacional entre dos partículas disminuye al aumentar la distancia r ; por ejemplo, si se duplica la distancia, la fuerza se reducirá a la cuarta parte y así sucesivamente. Aunque muchas estrellas del firmamento tienen una masa mucho mayor que la del Sol, están tan lejos que la fuerza gravitacional que ejercen sobre la Tierra es insignificante.

11.1.1. Determinación del valor de G

Para determinar el valor de la constante de gravitación G , debemos medir la fuerza gravitacional entre dos cuerpos de masas conocidas m_1 y m_2 a una distancia conocida r . La fuerza es muy pequeña para cuerpos que caben en un laboratorio, aunque puede medirse con un instrumento llamado balanza de torsión, que Sir Henry Cavendish usó en 1798 para determinar G .

En la figura se muestra una versión moderna de la balanza de torsión. Una varilla ligera y rígida con forma de T invertida es sostenida por una fibra vertical de cuarzo muy delgada. Dos esferas pequeñas de masa m_1 se montan en los extremos de los brazos horizontales de la T . Si colocamos dos esferas grandes de masa m_2 en las posiciones indicadas, las fuerzas de atracción gravitacionales hacen girar la T un ángulo pequeño. Para medir el ángulo, hacemos incidir un rayo de luz en un espejo sujeto a la T . El haz reflejado incide en una escala; al girar la T , la luz se mueve en la escala.



Después de calibrar la balanza de Cavendish, podemos medir las fuerzas gravitacionales y así determinar G . El valor aceptado actualmente (en unidades del SI) es

$$G = 6,6742 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

11.2. Peso

En la sección 3.4 definimos el *peso* de un cuerpo como la fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él. Ahora vamos a ampliar nuestra definición:

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre él por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, podemos despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan sólo como la atracción de la Tierra. En la superficie de la Luna,

tomaremos el peso de un cuerpo como la atracción gravitacional de la Luna, etcétera.

Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio R_E y masa m_E , el peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre (a una distancia R_E del centro) es

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2} \quad (\text{peso en la superficie terrestre})$$

Sin embargo, en la sección 3.4 también vimos que el peso w de un cuerpo es la fuerza que causa la aceleración g de caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, $w = mg$. Si igualamos esto con la ecuación y dividimos entre m , obtenemos

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \quad (\text{aceleración en la superficie terrestre})$$

Ejercicio 27. Gravedad en Marte

Una misión no tripulada se envía a la superficie de Marte, cuyo radio es $R_M = 3,4 \times 10^6 m$ y cuya masa es $m_M = 6,42 \times 10^{23} kg$. El peso, en la Tierra, del vehículo de descenso es de $3920 N$. Calcule su peso F_g y la aceleración g_M debida a la gravedad de Marte:

- a) $6 \times 10^6 m$ arriba de la superficie (la distancia a la que está su luna Fobos)
- b) en la superficie marciana. No tome en cuenta los efectos gravitacionales de las diminutas lunas de Marte.

Solución 27.

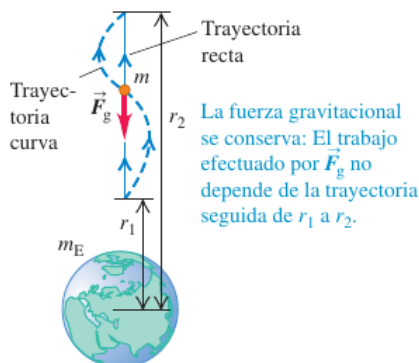
...

11.3. Energía potencial gravitacional

Consideramos un cuerpo de masa m fuera de la Tierra, y calculamos primero el trabajo W_{grav} efectuado por la fuerza gravitacional cuando el cuerpo se aleja del centro de la Tierra o se acerca a él, desde $r = r_1$ hasta $r = r_2$ (figura). Así, W_{grav} está dado por

$$W_{grav} = - \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$$

12.10 Cálculo del trabajo efectuado sobre un cuerpo por la fuerza gravitacional, cuando el cuerpo se mueve de la coordenada radial r_1 a r_2 .



donde F_r es la componente radial de la fuerza gravitacional \vec{F} , es decir, la componente dirigida *hacia afuera* desde el centro de la Tierra. Dado que \vec{F} apunta *hacia* el *centro* de la Tierra, F_r es negativa; difiere de la ecuación $F_g = \frac{Gm_E m}{r^2}$, la magnitud de la fuerza gravitacional, por un signo menos:

$$F_r = - \frac{Gm_E m}{r^2}$$

Sustituyendo vemos que W_{grav} está dado por

$$W_{grav} = -Gm_E m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_E m}{r_2} - \frac{Gm_E m}{r_1}$$

Ahora definimos la energía potencial correspondiente U tal que $W_{grav} = U_1 - U_2$. Vemos que la definición apropiada de **energía potencial gravitacional** es

$$U_{grav} = - \frac{Gm_E m}{r} \quad (\text{energía potencial gravitacional})$$

Ejercicio 28. “De la Tierra a la Luna”

En la novela de Julio Verne de 1865 con ese título, tres hombres viajaron a la Luna en un cascarón disparado desde un cañón gigante hundido en el suelo de Florida. El radio de la Tierra es $R_E = 6380 \text{ km} = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$ y su masa es $m_E = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

- Calcule la rapidez inicial necesaria para disparar el cascarón verticalmente hasta una altura sobre la Tierra igual al radio de ésta.
- Calcule la rapidez de escape, es decir, la rapidez inicial que permitiría al cascarón escapar de la Tierra. Desprecie la resistencia del aire, la rotación de la Tierra y la atracción gravitacional de la Luna.

Solución 28.

...

11.3.1. Más sobre la energía potencial gravitacional

demostramos que si estamos cerca de la superficie terrestre, la ecuación se reduce a $U = mgy$ que ya conocemos del capítulo 6. Primero reescribimos la ecuación:

$$W_{grav} = Gm_E m \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

Si el cuerpo se mantiene cerca de la Tierra, en el denominador podemos sustituir r_1 y r_2 por R_E , el radio de la Tierra, así que

$$W_{grav} = Gm_E m \frac{r_1 - r_2}{R_E^2}$$

$g = Gm_E/R_E^2$, por lo cual

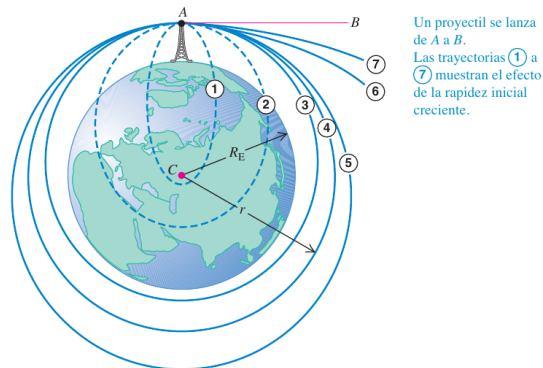
$$W_{grav} = mg(r_1 - r_2)$$

11.4. Movimiento de satélites

Imaginemos que un motociclista se lanza horizontalmente del borde de un acantilado, en una trayectoria parabólica que termina en terreno plano en la base del acantilado. Si sobrevive y repite el experimento aumentando su rapidez de lanzamiento, caerá más lejos del punto de partida. Podemos imaginarlo lanzándose con tal rapidez que la curvatura de la Tierra se hace significativa. Al caer, la caída es más larga por la curvatura.

Si la rapidez del motociclista es suficiente, y si su punto de lanzamiento es tan alto que pueda librar las montañas, podría seguir dando vuelta a la Tierra, sin jamás tocar el suelo.

La figura muestra una variación de este tema. Lanzamos un proyectil del punto A en la dirección AB , tangente a la superficie terrestre.

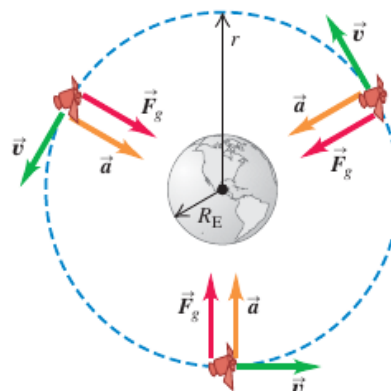


Las trayectorias 1 a 7 muestran el efecto de aumentar la rapidez inicial. En las trayectorias 3 a 5 el proyectil no choca contra la Tierra y se convierte en su satélite. Si no hay una fuerza que frene al proyectil, su rapidez al volver al punto A es la que tenía inicialmente, y el movimiento se repite indefinidamente.

Las trayectorias 1 a 5 terminan donde comenzaron y se denominan **órbitas cerradas**. Todas las órbitas cerradas son elipses o segmentos de elipses; la trayectoria 4 es un círculo, un caso especial de elipse. Las trayectorias 6 y 7 son **órbitas abiertas**; el proyectil nunca vuelve a su punto de partida y se aleja cada vez más de la Tierra.

11.4.1. Satélites: Órbitas circulares

Una órbita *circular* es el caso más sencillo. La única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por lo tanto, hacia el centro de la órbita (figura). Como vimos en la sección 5.4, esto implica que el satélite está en movimiento circular uniforme y su rapidez es constante. El satélite no cae hacia la Tierra; más bien, cae constantemente alrededor de la Tierra. En una órbita circular, la rapidez es exactamente la necesaria para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra.



El satélite está en órbita circular: su aceleración \vec{a} es siempre perpendicular a su velocidad \vec{v} , por ello, la rapidez v es constante.

Veamos cómo calcular la rapidez constante v de un satélite en órbita circular. El radio de la órbita es r , medido desde el *centro* de la Tierra; la aceleración del satélite tiene magnitud $a_{rad} = v^2/r$ y siempre está dirigida hacia el centro del círculo. Por la ley de la gravitación, la fuerza neta (la gravitacional) que actúa sobre el satélite de masa m tiene magnitud $F_g = Gm_E m/r^2$ y tiene la misma dirección de la aceleración. La segunda ley de Newton nos dice entonces que

$$\frac{Gm_E m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Despejando v , tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} \quad (\text{órbita circular})$$

Esta relación muestra que no podemos elegir el radio de la órbita r y la rapidez v independientemente; para un radio r dado, la rapidez v de la órbita circular está determinada.

Podemos deducir una relación entre el radio r de una órbita circular y el periodo T , la duración de una revolución. La rapidez v es la distancia $2\pi r$ recorrida en una revolución, dividida entre el periodo:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Obtenemos una expresión para T si despejamos T de la ecuación y sustituimos v :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{Gm_E}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}} \quad (\text{periodo de una órbita circular})$$

Puesto que la rapidez v en una órbita circular está determinada por la ecuación ($v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$) para un radio orbital r dado, la energía mecánica total $E = K + U$ también está determinada.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_Em}{r} = \frac{1}{2}m \left(\frac{Gm_E}{r} \right) - \frac{Gm_Em}{r}$$

$$E = -\frac{Gm_Em}{2r} \quad (\text{energía mecánica total de una órbita circular})$$

La energía mecánica total en una órbita circular es negativa e igual a la mitad de la energía potencial. Aumentar el radio orbital r implica aumentar la energía mecánica (es decir, hacer E menos negativa).

11.5. Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Uno de los grandes logros intelectuales de los siglos XVI y XVII fue darse cuenta de tres descubrimientos: que la Tierra es un planeta, que todos los planetas están en órbita alrededor del Sol y que los movimientos aparentes de los planetas vistos desde la Tierra pueden servir para determinar con precisión sus órbitas.

Los primeros dos descubrimientos fueron publicados por Nicolás Copérnico en Polonia en 1543. La determinación de las órbitas planetarias entre 1601 y 1619 corrió a cargo del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, utilizando un voluminoso conjunto de datos precisos acerca de los movimientos planetarios aparentes compilado por su mentor, el astrónomo danés Tycho Brahe. Por medio de prueba y error, Kepler descubrió tres leyes empíricas que describían con exactitud los movimientos de los planetas:

1. Cada planeta se mueve en una órbita elíptica, con el Sol en uno de los focos de la elipse.
2. Una línea del Sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los periodos de un planeta son proporcionales a las longitudes del eje mayor de sus órbita elevadas a la potencia $\frac{3}{2}$.

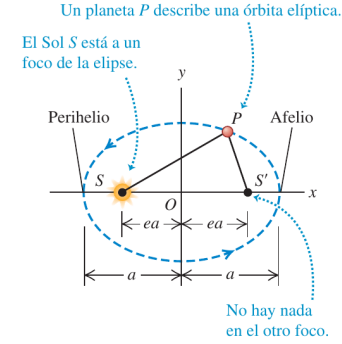
Kepler no sabía *por qué* los planetas se movían así. Tres generaciones después, cuando Newton dirigió su atención al movimiento planetario, descubrió que las leyes de Kepler pueden *deducirse*; son consecuencias de las leyes de Newton del movimiento y de la ley de la gravitación.

11.5.1. Primera ley de Kepler

La figura muestra la geometría de la elipse. La dimensión más larga es el eje mayor, siendo “a” la mitad de su longitud; esta distancia se denomina **eje semimayor**. La suma de las distancias de S a P y de S' a P es la misma para todos los puntos de la curva. S y S' son los *focos*. El Sol está en S , y el planeta está en P ; consideramos a ambos como puntos porque su tamaño es muy pequeño en comparación con la distancia entre ellos. No hay nada en el otro foco S' .

La distancia de cada foco al centro de la elipse es ea , donde e es un número adimensional entre 0 y 1 llamado **excentricidad**. Si $e = 0$, la elipse es un círculo. Las órbitas reales de los planetas son casi circulares; sus excentricidades varían entre 0,007 para Venus y 0,206 para Mercurio. (La órbita de la Tierra tiene $e = 0,017$.)

12.19 Geometría de una elipse. La suma de las distancias SP y $S'P$ es la misma para todos los puntos de la curva. Se exageraron los tamaños del Sol (S) y del planeta (P) por claridad.



Newton pudo demostrar que, para un cuerpo sobre el que actúa una fuerza de atracción proporcional a $1/r^2$ las únicas órbitas cerradas posibles son un círculo o una elipse; también demostró que las órbitas abiertas deben ser parábolas o hipérbolas. Estos resultados pueden deducirse aplicando directamente las leyes de Newton y la ley de la gravitación, junto con ecuaciones diferenciales más complejas que las que podemos enfrentar.

11.5.2. Segunda ley de Kepler

La figura 12.20 muestra la segunda ley de Kepler. En un lapso pequeño dt , la línea del Sol S al planeta P describe un ángulo $d\theta$. El área barrida es el triángulo coloreado de altura r , base $r d\theta$ y área $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ (figura 12.20b). La rapidez con la que se barre el área, dA/dt , se denomina *velocidad de sector*:

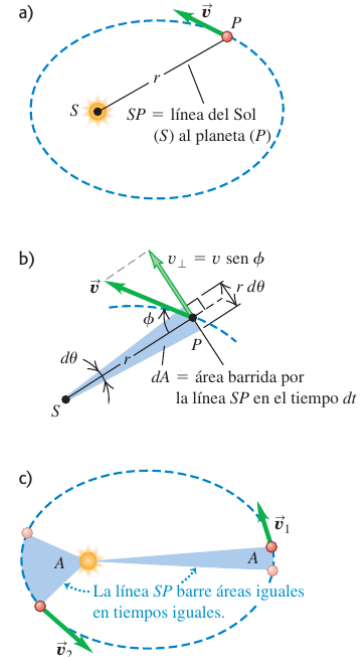
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La esencia de la segunda ley de Kepler establece que la velocidad de sector tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita. Cuando el planeta está cerca del Sol, r es pequeña y $d\theta/dt$ es grande; cuando el planeta está lejos del Sol, r es grande y $d\theta/dt$ es pequeña.

Para saber por qué la segunda ley de Kepler es consecuencia de las leyes de Newton, expresamos dA/dt en términos del vector de velocidad \vec{v} del planeta P . La componente de \vec{v} perpendicular a la línea radial es $v_{\perp} = v \sin \Phi$. Por la figura 12.20b, el desplazamiento en la dirección de v_{\perp} durante el tiempo dt es $r d\theta$, de modo que tenemos $v_{\perp} = r d\theta/dt$. Obteniendo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin \Phi$$

12.20 a) El planeta (P) se mueve alrededor del Sol (S) en una órbita elíptica. b) En un tiempo dt , la línea SP barre un área $dA = \frac{1}{2}(r d\theta)r = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. c) La rapidez del planeta varía de modo que la línea SP barre la misma área A en un tiempo dado t , sea cual fuere la posición del planeta en su órbita.



...