

分别给出FT, DTFT, DFT, FFT, 还有Z transform的公式, 不必解释, 只给公式



以下是各个变换的公式:

1. 傅里叶变换 (Fourier Transform, FT):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

2. 离散时间傅里叶变换 (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

3. 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

4. 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT):

$$\text{FFT}(x[n]) = \text{高效算法, 用于计算DFT}$$

5. Z变换 (Z Transform):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$



3. Z变换与DFT的关系

Z变换和DFT的主要关系体现在以下几点：

- Z变换的特例：**当Z变换中的 $z = e^{j\omega}$ 时（即Z变换在单位圆上的值），Z变换退化为离散时间傅里叶变换（DTFT）。而DFT可以看作是DTFT在某些等间隔频率点上的采样。因此，DFT是Z变换的一个特例，但Z变换本身比DFT更广泛。
- 频域表示：**DFT用于频率分析，侧重于周期性和频率成分，而Z变换更多地用于系统分析，尤其是在离散信号处理的系统稳定性和时域行为等问题上。

为什么DFT是N个点累加，而Z变换是无穷个点

DFT是N个点累加，而Z变换是无穷个点累加，这源于两者处理的信号类型和应用目标不同。

1. 信号范围

- DFT：**处理的是有限长度的离散信号，即有N个采样点的信号。这意味着我们只关注信号的一个有限区间，因此DFT的累加只需要在这些有限的采样点进行。公式中，信号的长度是N，因此求和只需要对这N个点进行：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

这里的累加区间是从 $n = 0$ 到 $n = N - 1$ ，因为我们假设信号是有限长度的，只有这N个点需要考虑。

- Z变换：**处理的是无穷长的离散信号，因此求和是从 $n = -\infty$ 到 $n = \infty$ ，这表明Z变换的定义本质上是为了处理无限长的信号。公式为：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

在这个公式中，Z变换引入了复变量 z ，并对信号的所有时间点进行累加。由于信号可能是无限长的，累加范围是无限的。

引发的思考

2024年8月31日 19:53

忽然又对DFT感觉有点迷茫，为什么在复平面上表示。又去回顾FT和欧拉公式
欧拉公式

$$e^{i\pi} = -1$$

为什么会有这样的形式，为什么是复平面单位圆旋转半圈。

首先回顾基础定义i的平方等于-1，也就是复平面和xy平面不同，xy不止完全正交，对于坐标系本身来说这两个值是独立的，xy之间没什么关系。但是复平面不一样，1在横轴，经历两次i就回到了横轴的-1。4次i就回到了1，那么其i作为纵轴有了那么一点道理。

然后就是exp函数的最重要性质：导数等于自身的函数仅此一组（ $C \cdot \exp$ ），先斗胆把实数的结论挪用到复数 $\exp(ix)$ 上，那我们知道其任何时候的变化率是 $i \cdot \exp(ix)$ 。刚才我们知道一个东西乘以i就是90°的变化，那此时该函数的变化率方向就是90°，在做圆周运动。自然 $i=\pi$ 时候转到了-1，该函数代表了单位圆。

对于傅氏变换，原信号乘以一个反方向旋转的单位圆，再积分[FT公式](#)

DTFT，则是有限的时域采样点乘以一个反方向旋转的单位圆求和，此时时域离散，频域连续且周期，我们依旧不会太关注DTFT，因为我们是数字信号处理，连续的频域依旧无法离散数字表示，只能公式表示

DFT，把DTFT指数部分的 ωn ，变为 $2\pi i \cdot k \cdot n/N$ 其中N是指定好的DFT点数，n是时域的序号，只有N个，k是频域分量的序号，也是只有N个。为何想频域离散就这么做？先记一个结论，频域离散对应的时域是周期。所以我们对于已经离散的时域信号，关注的加窗区域内有M个点，我们采用其中N个点做DFT（N不等于M时候，抽值或者0填充）

FFT，刚才的k和n在公式上是对称的，所以计算能够简化

Z变换[Z和DFT](#)

Week 8 Lin

Taxonomy of signals

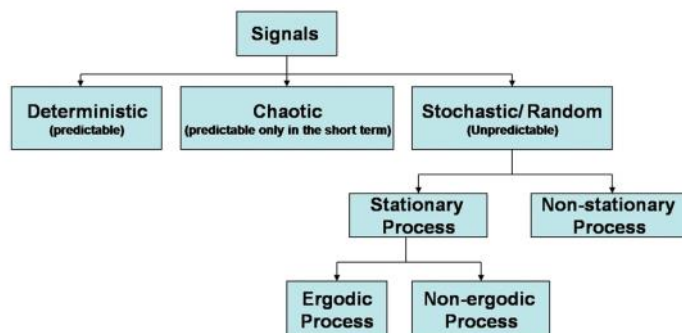


Figure 3: Three types of signals: deterministic, chaotic, stochastic.

we focus on the stationary process

deterministic signals:

$$x[n] = 10 \cos(2\pi n - 0.5), n \in \mathbb{Z}.$$

random signals:

Meteorological phenomena such as air temperature and air pressure fluctuates randomly as a function of time or $x[n] = 10 \cos(2\pi n - \theta)$, where θ is a random variable, statistically uniformly distributed in $(-\pi, \pi)$

Random Variables

2024年10月28日 18:36

Random variables: number that will change randomly

Random process: random var will change thru time changing

Discrete Variable

pmf:

$$p(a) = P(\{X = a\}) > 0$$

cdf:

$$\begin{aligned} F(a) &= P(\{X \leq a\}) = \sum_{x_i < a} P(\{X = x_i\}) \\ &= \sum_{x_i < a} p(x_i) \end{aligned}$$

Continuous r.v.

pdf:

$$P(\{X \in \mathbb{R}\}) = \int_{x \in \mathbb{R}} \underline{f(x)} dx = 1$$

$f(x)$ is pdf

cdf:

$$F(a) = P(\{X \in (-\infty, a)\}) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$\frac{d}{da} F(a) = f(a)$$

Expectation:

Definition

The **expected value** of the r.v. X is the **weighted average** of the possible values that X can take on, each value being the probability that X assumes that value

$$\mu_X = E[X] = \begin{cases} \sum_{x:p(x)>0} xp(x) & \text{if } X \text{ is a discrete r.v.} \\ \int_{x \in \mathbb{R}} xf(x) dx & \text{if } X \text{ is a continuous r.v.} \end{cases} \quad (7)$$

The **expected** value of the r.v. X is referred to as the **mean** or the **first moment** of X .

Expectation of a function of r.v. X :

Definition

The **expected value of a real-valued function** $g(X)$ of a r.v. X is defined by

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x) & \text{if } X \text{ is a discrete r.v.} \\ \int_{x \in \mathbb{R}} g(x)f(x) dx & \text{if } X \text{ is a continuous r.v.} \end{cases} \quad (8)$$

If $g(X) = X^m, m \geq 1$ then $E[X^m], m \geq 1$ is called the **m^{th} moment of X** .

Variance:

Definition

The **variance** of a random variable X measures the expected square of the deviation of X from its expected value and is defined by

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] \quad (10)$$

also $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ 也就是二阶原点矩，减去一阶原点矩的平方

Discrete r.v.

Discrete probability distribution	Probability mass function, $p(x)$	Moment generating function, $\phi(t)$	Mean	Variance
Binomial with parameters n, p $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$ $x = 0, 1, \dots, n$	$(pe^t + (1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson with parameter $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},$ $x = 0, 1, 2, \dots$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ
Geometric with parameter $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1},$ $x = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Continuous r.v.

Continuous probability distribution	Probability density function, $f(x)$	Moment generating function, $\phi(t)$	Mean	Variance
Uniform over (a, b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential with parameter $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma with parameters (n, λ) $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
Normal with parameters (μ, σ^2)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$ $-\infty < x < \infty$	$\exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2

Joint pmf:

Definition

The joint probability mass function of X and Y is defined by

$$p(x, y) = P(\{X = x, Y = y\}). \quad (11)$$

Independent r.v.

随机变量的相关性和协方差：

Correlation:

$$\rho_{XY} = \text{corr}(X, Y) = E[XY]$$

随机变量乘积的均值

Covariance:

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \rho_{XY} - \mu_X \mu_Y\end{aligned}$$

回忆，无论是互协方差还是自协方差，都是减去自己均值，乘出来后还要求均值，

两个变量乘积的均值，组成部分就是 $E[X]E[Y]$ 加上 $\text{cov}[X, Y]$

Stochastic/ random process

$$\{X(t, S), t \in T\}$$

ensemble of all possible time functions

Realization of SP

$$x(t, s)$$

Statistical (ensemble) averages

Definition

Consider a continuous random process $X(t)$ sampled at time instant $t = t_i$ then $X_{t_i} = X(t_i)$ is a random variable with corresponding p.d.f. $f(x_{t_i})$ and the m^{th} **moment** of the r.v. is given by

$$E[X_{t_i}^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_i}^m f(x_{t_i}) dx_{t_i} \quad (23)$$

The statistical (Ensemble) **mean** is $\mu_X(t_i) = E[X_{t_i}]$.

The statistical (Ensemble) **mean square** is $E[X_{t_i}^2]$.

The statistical (Ensemble) **variance** is $\sigma_X^2(t_i) = E[(X_{t_i} - \mu_X(t_i))^2]$.

statistical (ensemble) correlation

$$\gamma_{XX}(t_1, t_2) = E[X_{t_1} X_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} f(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2} \quad (24)$$

which depends on time instants t_1, t_2 and is called the **autocorrelation** of a random process.

注意上一节求两个随机变量时候用的字母是 ρ ，这里的自相关用的是 γ Random Variables

Definition

The **autocovariance** function is defined by

$$c_{xx}(t_1, t_2) = E \left[(X_{t_1} - E[X_{t_1}]) (X_{t_2} - E[X_{t_2}]) \right] \quad (25)$$

$$= \gamma_{xx}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (26)$$

where $\mu_X(t_i) = E[X_{t_i}]$, $i = 1, 2$.

Cross-correlation

Cross-covariance

Cross-covariance

Definition

The **cross-covariance** function of two processes $X(t)$ and $Y(t)$ is defined by

$$c_{XY}(t_1, t_2) = \gamma_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \quad (28)$$

where $\mu_X(t_1) = E[X_{t_1}]$, $\mu_Y(t_2) = E[Y_{t_2}]$.

If $c_{XY}(t_1, t_2) = 0$, that is,

$$\gamma_{XY}(t_1, t_2) = \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \Leftrightarrow E[X_{t_1} Y_{t_2}] = E[X_{t_1}]E[Y_{t_2}] \quad (29)$$

then $X(t)$ and $Y(t)$ are uncorrelated.

If $E[X_{t_1} Y_{t_2}] = 0$ then $X(t)$ and $Y(t)$ are statistically orthogonal.

不相关代表没有线性相关性，但是并不一定是独立的

Wide-sense stationary random process

Definition

A process is **wide-sense** or **weakly stationary** if **both its mean and variance are finite and constant** and its **auto-correlation** function depends **only on** the difference between the **times** of occurrence of the samples or the lag time, i.e.

- ① Mean: $\mu_X(t_1) = E[X_{t_1}] = \mu_X$
- ② Variance: $\sigma_X^2(t_1) = E[(X_{t_1} - \mu_X)^2] = \sigma_X^2$
- ③ Auto-correlation: $\gamma_{XX}(t_1, t_2) = \gamma_{XX}(t_1 - t_2) = \gamma_{XX}(\tau)$

也就是均值很稳定，方差也很稳定，但是自相关还是和时间差有关系。

Exercise P44

直接对 $X(t)$ 求均值，所以对随机变量 A 的所有值 a 进行全范围的积分，如果 t 相关的项没了，就算 σ^2

P46 $\cos(A)\cos(B) = 0.5[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

白序列

Definition

A **white sequence** $w[n]$ is defined as uncorrelated random variables such that mean $\mu_W = 0$ and variance is σ_W^2 .

白过程

Definition

A wide-sense stationary process $W[n]$ is said to be white if the **autocovariance** is given by

$$c_{WW}[m] = \sigma_W^2 \delta[m] \quad (38)$$

where $\delta[m] = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$ is the unit impulse function/signal.

Thus the **autocorrelation** of a white random process is

Thus the autocorrelation of a white random process is

$$\gamma_{ww}[m] = \sigma_w^2 \delta[m]. \quad (39)$$

也就是说广义平稳高斯白噪声的自协方差函数在m取值为0时候有值，并且等于方差，其他位置没有值，也就是不在同一时刻的采样是不相关的。

同时 γ 等于cov加上两处采样的均值的乘积（都是0），所以有 $\gamma = c$

Power density spectrum

2024年10月28日 18:43

自相关函数 和 功率谱密度 是一对傅里叶变换， 所以求PDS时候，最根本方法就是 γ 的积分

Definition

The **power density spectrum** of a random process gives the spectral characteristics of a random process and is defined as the Fourier transform of the auto-correlation function $\gamma_{xx}(\tau)$

$$\Gamma_{xx}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau. \quad (42)$$

The inverse Fourier transform is given by

$$\gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(F) e^{j2\pi F\tau} dF. \quad (43)$$

同时，做反变换时候，经常取 τ 等于0，得到平均功率，等式右边就是 $\Gamma(F)$ 函数下的面积

类似的，交叉功率密度谱cross-power density spectrum 也是这么积分

$$\Gamma_{XY}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{XY}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \quad (44)$$

对于离散的就是无穷限求和，反过来是一个周期内的积分，因为正做是离散且无限的，得到的DTFT就是周期（有限）且连续的，

For wide-sense stationary signals,

Definition

The **Power density spectrum** of the discrete random process $X[n]$ is

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \quad (45)$$

The inverse Fourier transform gives

$$\gamma_{xx}[m] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) e^{j2\pi fm} df \quad (46)$$

and the average power is $\gamma_{xx}[0] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) df$.

P57 Exercise

对于X积分，根据35-37式子得知X均值为0，并且方差等于 $A^2/2$ 也是常数，X平稳，然后W白噪声，并且根据uncorrelated，得知 $\text{cov}(x, w)=0$ ， $E(xw)=E(x)E(w)$

根据52页的习题，通过定义推导出

$$\gamma_{YY}[m] = \gamma_{XX}[m] + \gamma_{WW}[m]$$

其中，X的自相关

3. 使用余弦乘积公式

利用余弦乘积公式：

$$\cos(x_1 - \phi) \cos(x_2 - \phi) = \frac{1}{2} (\cos((x_1 - \phi) + (x_2 - \phi)) + \cos((x_1 - \phi) - (x_2 - \phi)))$$

因此，我们可以将自相关函数写成：

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{A^2}{2} E[\cos((x_1 + x_2) - 2\phi) + \cos(x_1 - x_2)]$$

4. 计算期望

由于 ϕ 在 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布， $\cos((x_1 + x_2) - 2\phi)$ 的期望值为零，因为它在一个周期内对称分布，积分结果为零。

因此，自相关函数简化为：

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{A^2}{2} \cos(x_1 - x_2)$$

最终结果

因此，该平稳信号的自相关函数为：

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{A^2}{2} \cos(x_1 - x_2)$$

高斯白的自相关自然是

$$-\sigma_W^2 \delta[m]$$

直接求DTFT把小 γ 变成大 Γ

$$[m] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 m) + \sigma_W^2 \delta[m]$$

$m]$, we obtain the power spectral de

$$\frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \sigma_W^2.$$

可以看到cos在正负f0处各有一半功率，高斯白在全频有其方差大小的功率

关键见解：任何一个广义平稳随机信号x都可以看作是高斯白w通过了一个线性因果滤波器，也可以反变换。这代表着，该滤波器提供了充分有用的信息，使得任何一个平稳随机过程都看待能为两部分，没用的白噪和有用的信号

广义平稳信号x经过z变换，并且其满足一些优良性质时候，能够分解成如下表达式：

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= e^{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \nu[m]z^{-m}} \\ &= \underbrace{e^{\nu[0]}}_{\sigma_w^2} \underbrace{e^{\sum_{m=1}^{\infty} \nu[m]z^{-m}}}_{H(z)} \underbrace{e^{\sum_{m=1}^{+\infty} \nu[m]z^m}}_{H(z^{-1})} \\ &= \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})\end{aligned}$$

最后一行 $\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$ 这个表达式的重要意义在于：

1. 谱因式分解 (Spectral Factorization) :

- 这个公式实现了功率谱密度的因式分解
- $H(z)$ 通常表示一个最小相位系统 (信号处理系统)
- $H(z^{-1})$ 是其共轭对称部分
- σ_w^2 代表输入白噪声的方差

2. 物理意义：

- 这表明任何平稳随机过程的功率谱都可以被建模为白噪声通过某个线性系统 $H(z)$ 产生
- 换句话说，任何平稳随机过程都可以被看作是白噪声经过适当的线性滤波器得到的

3. 应用价值：

- 这个分解对于信号建模和预测非常重要
- 在通信系统设计、信号滤波、系统识别等领域有广泛应用
- 为设计最优滤波器 (如维纳滤波器) 提供了理论基础

这个结论实际上是连接了随机过程理论和线性系统理论的一个重要桥梁，为信号处理提供了强大的理论工具。

最小相位系统（Minimum Phase System）是信号处理中一个重要的概念，让我详细解释一下：

1. 定义特征：

- 这类系统的所有极点和零点都位于z平面的单位圆内（ $|z| < 1$ ）
- 系统和它的逆系统都是稳定的且因果的
- 在所有具有相同幅频响应的系统中，最小相位系统的相位响应变化最小

2. 主要特点：

- 能量延迟最小：在所有具有相同幅频特性的系统中，最小相位系统的群延迟最小
- 系统响应最集中：系统的能量在时域上最为集中在前面的部分
- 可逆性：这类系统的逆系统也是稳定的

3. 数学特性：

- 如果 $H(z)$ 是最小相位系统，则：
 - $H(z)$ 的所有零点都在单位圆内
 - $\ln|H(e^{j\omega})|$ 和相位响应之间存在希尔伯特变换对的关系
 - 系统的相位响应可以从幅度响应唯一确定

4. 在谱分解中的意义：

- 当我们得到 $\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$ 这样的分解时
- 选择 $H(z)$ 为最小相位系统可以确保：
 - 分解的唯一性
 - 系统的稳定性
 - 预测和滤波的实用性

最小相位系统在信号处理、通信系统和控制理论中有广泛应用，尤其是在系统设计和信号重建方面。

Copy Retry

所以，我们有一个一般化的z平面形式

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$$

如果在单位圆上，不考虑相位的PDS在f域有

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2$$

表明一个拥有 σ_w 的白噪声通过 $H(f)$ 的时候，得到了广义平稳的X，直接有功率谱密度

$$\Gamma_{xx}(f)$$

Rational power spectra有理功率谱

有理功率谱可以说是我们唯一需要考虑的功率谱形式，

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}, \quad r_1 < |z| < r_2$$

看看下面是否和IIR的传递函数很像

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}, \quad |z| > r_1$$

P66 Exercise:

题干里给出了小 γ ，直接Z变换然后再替换到小f拿到 Γ ，

$$\begin{aligned} \Gamma_{ww}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|m|} z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \alpha^{-m} z^{-m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^m z^{-m} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^m z^m - 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^m z^{-m} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha z} - 1 + \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2) - \alpha(z^{-1} + z)}. \quad (65) \end{aligned}$$

这里先化成两个等比数列，求和公式为 $1/(1-q)$ ，然后通分

$$\Gamma_{ww}(e^{j2\pi f}) = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2) - 2\alpha \cos 2\pi f}.$$

根据欧拉公式三角展开，得到上式，因为功率谱密度就是有关f的表达

然后根据刚才一个平稳w经过H得到 $H(z)H(z^{-1}) \Gamma_{ww}(Z)$ ，依旧换成有f的形式三角展开

The power density spectrum of $x(n)$ is then

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(e^{j2\pi f}) &= \frac{2 + (e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f})}{(1.64) - 0.8(e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f})} \times \frac{0.75}{(1.25) - 0.5(e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f})} \\ &= \dots = \frac{3\cos^2 \pi f}{(1.64 - 1.6\cos 2\pi f)(1.25 - \cos 2\pi f)}. \end{aligned}$$

接下来要求 γ_{xx} 了，那就对上式做Z的逆变换（发现Z变换回去困难，就凑原来的形式）

$$\dots \dots 150 \dots \dots \alpha^{|m|} \dots \dots 50 \dots \dots \alpha^{|m|}$$

$$\gamma_{xx}(m) = \frac{150}{4} \times 0.8^{|m|} - \frac{50}{4} \times 0.5^{|m|}.$$

最后一步求方差，回忆，自相关的定义是

$$\gamma_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$$

也就是 γ 取 $m=0$ 时候那就是均值为0的方差了，一般默认均值0

对于我们刚才提到的白噪声 w 通过 H 系统的创新表示，得到输出 x 有

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k]. \quad (66)$$

自回归AR有：

只有输入的第一项，变成了全极点滤波器

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = w[n].$$

移动平均有：

所有的输入项，没有递归的结果，全零点滤波器

$$x[n] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k].$$

ARMA综合：

有零极点

最后一部分，我们构造这个因果滤波器时候，其系数 a_k 和 b_k 如何与自相关联系起来？通过主动构造自相关项和卷积项，得到 γ 和系数的关系式

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_W^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (77)$$

注意这是对于ARMA的一个通用写法，出题时候可能只是AR简单的过程

P77 Exercise:

已知了 Γ ，我们利用之前的

如果在单位圆上，不考虑相位的PDS在f域有

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2$$

直接写成如此乘积的形式，因为是AR过程，所以已知分子是1

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \sigma_W^2 \frac{1}{(1 - e^{-j\omega} + 0.5e^{-j2\omega})(1 - e^{j\omega} + 0.5e^{j2\omega})}$$

这下方便的根据分母的第一项反推出

$$x[n] = x[n-1] - 0.5x[n-2] + w[n]$$

相应的，第二就是上一个 $H(z)$ 的逆过程

Quiz组成

2024年10月29日 21:53

1个题是第一部分，2个题是第二部分，多看看期末和课堂习题

期末部分更多考察第二第三部分

Introduction

2024年10月28日 18:34

设计滤波器的时候，我们想要：
线性，
均方误差最小
只考虑自相关和互相关

一步前向线性预测器：

根据过往输出的p步，预测当前的一步

所以目标就是最小化误差函数：

$$\begin{aligned} f_p[n] &= x[n] - \hat{x}[n] \\ &= x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k] x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^p a_p[k] x[n-k] \end{aligned}$$

当然这个 f_p 我们也能建模成两个图

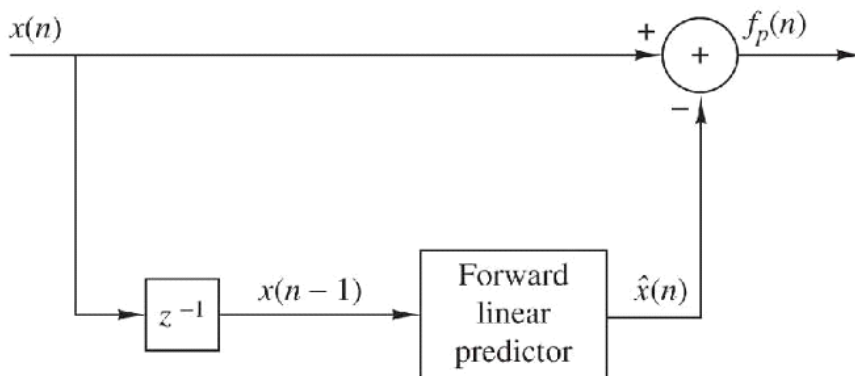


Figure 6: Forward linear prediction

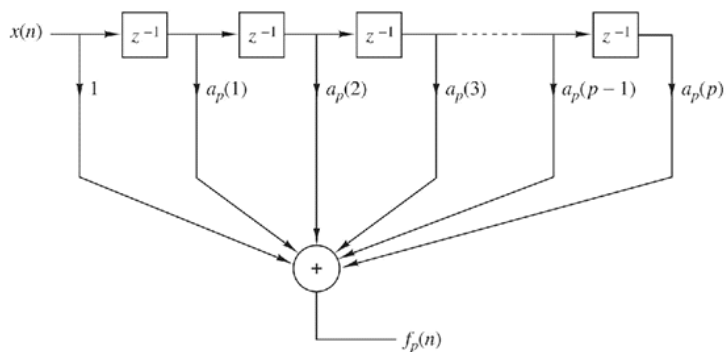


Figure 7: Prediction-error filter is $\{a_p[k]\}_{k=1}^p, a[0] = 1$

系统函数自然是：

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k]z^{-k}.$$

接下来就考虑最小化均方误差了，二次函数求极值，
有法方程normal equations,

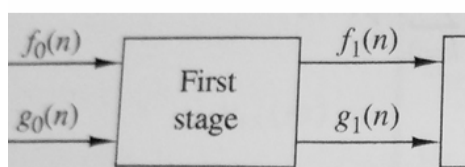
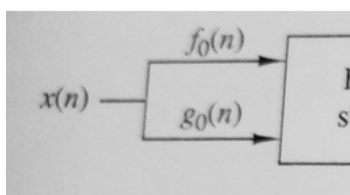
The minimization of \mathcal{E}_p^f , leads to the following set of linear equations

$$\gamma_{xx}[l] = - \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k], \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (87)$$

which are called the **normal equations** for the coefficients of the linear
目标实际上就是求如下的argmin

$$\min_{a_p[k]} \mathcal{E}_p^f = \varepsilon_p^f = \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[-k]$$

构造lattice filter， 只是因为more robust



所以这些系数是递归的

$$\begin{cases} f_0(n) &= g_0(n) = x(n) \\ f_m(n) &= f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \\ g_m(n) &= K_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \end{cases}$$

我们的目标就是求上面的 K_m

已知 K_m 想求一系列的 A 时候，就正着从 A_0A_1 开始求，
已知 A 求 K_m 的时候，就倒着

这里正着

$$A_1(z) = 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}$$

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-2} A_1(z^{-1})$$

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-3} A_2(z^{-1})$$

这里倒着

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}).$$

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - |K_m|^2}$$

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{1 - |K_m|^2}$$

实际上直接从 A_2 就能看出来 K_2

$$A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} + 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$K_2 = \frac{1}{3}$$

A_1 就得老实套公式了

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - |K_2|^2} \\
&= \frac{1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - \frac{1}{9}} \\
&= 1 + \frac{3}{2}z^{-1} \\
K_1 &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

P95 倒着预测老早以前的输入

注意这里公式90用到的是bp，之前80页用到的是ap

得到的是，B实际上是A的倒数，bp是倒序共轭的ap

$$b_p[k] = a_p^*[p - k], k = 0, 1, \dots, p$$

对于自回归过程AR(p阶)，之前的 γ 和滤波器系数关系（用于从白噪声通过精妙设计的滤波器系数 a_k 来得到想要的 γ_{xx} ）可以写为矩阵形式（实际就是77公式的简化形）

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 & m = 0 \\ \gamma_{xx}[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (101)$$

which is called the **Yule-Walker** equations or in matrix form

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[-2] & \cdots & \gamma_{xx}[-p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \cdots & \gamma_{xx}[-(p-1)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \cdots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

P102的重要结论，想要一个AR过程的信号 $x[n]$ ，我们从innovation representation构建时候，这一套系数 a_k ，正好符合了前向预测时候构建该预测的最优化系数 a_k （由normal equation所限制），那就把前面的innovation拿来做预测器好了
那么根据公式88带入到101能有

$$\varepsilon_p^f = \sigma_w^2.$$

这说明预测的误差就是白噪声，说明预测器已经设计非常好了，把有用的信息量全能预测出来了，只剩下不可预测的白噪声

之前的准备工作做了很多，通过innovation representation这个性质证明了只要满足法方程，那么我们预测器的误差就能够最小，能够小到

$$\sigma_w^2$$

接下来就要实际求解法方程得到最优化的 α_p

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{xx}(l-k) = \begin{cases} \varepsilon_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,\dots,p \end{cases} \quad (105)$$

The minimization of the mean-square value of the forward prediction error comes down to solving the normal equations for the prediction coefficients.

104页，对于给定阶数，写成矩阵形式直观一些

Matrix form of augmented normal equations

Let $p = 3$, then Eq. (105) becomes

$$\gamma_{xx}(l) + a_3(1)\gamma_{xx}(l-1) + a_3(2)\gamma_{xx}(l-2) + a_3(3)\gamma_{xx}(l-3) = \begin{cases} \varepsilon_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,3 \end{cases} \quad (106)$$

or in matrix form

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[-2] & \gamma_{xx}[-3] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[-2] \\ \gamma_{xx}[2] & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] \\ \gamma_{xx}[3] & \gamma_{xx}[2] & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_3[1] \\ a_3[2] \\ a_3[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_p^f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

where $\gamma_{xx}[-m] = \gamma_{xx}[m]$.

注意我们经常使用最下面的形式，因为第一行实际上给到我们的信息是最小预测误差为高斯白的方差，其他行才能计算系数

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \cdots & \gamma_{xx}[-(p-1)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \cdots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Or

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \cdots & \gamma_{xx}[p-1] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \cdots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[1] \\ \vdots \\ \gamma_{xx}[p] \end{bmatrix}.$$

这里矩阵是对称的，有高手帮忙求解了（用迭代的方法，所以也联系到刚才可以构造的晶格滤波器了，这个高手求的就是 K_m ，有了 K_m 以后，那个滤波器构造出来了，A系统函数有了，然后 $a_p[k]$ 也能确定了，误差最小的最优滤波器get！！注意我们这里只是针对于AR过程，并不广泛适用）

实际上我们能见到的信号都是这样的信号

$$x[n] = s[n] + w[n]$$

有加噪声的信号

设计这样的一个滤波器，以求去掉噪声干扰，这里 $d[n]$ 作为参考，经常就等于 $s[n]$ 或者 $s[n]$ 前后时移

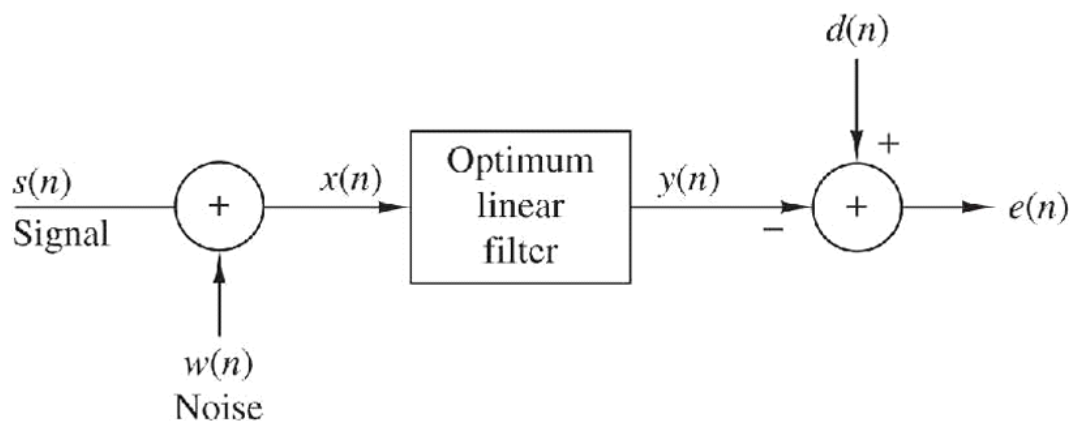


Figure 9: Model for linear estimation problem.

可以完成以下三种任务

The linear estimation problem is referred to as

- **filtering** if reference signal $d[n] = s[n]$, i.e., design $H(z)$ to suppress $w[n]$ and $y[n] \approx s[n]$.
- **signal prediction** if reference signal $d[n] = s[n + D]$, $D > 0$. Note that this is related to but more general than the linear prediction considered before where $d[n] = x[n + D]$, $D > 0$.
- **signal smoothing** if reference signal $d[n] = s[n - D]$, $D > 0$.

In what follows, we assume that $s[n], w[n], d[n]$

- have a zero mean,
- are wide-sense stationary.

维纳滤波器就是最小化误差的所谓最优线性滤波器

$$\varepsilon_M^h = \min_{h[n]} \mathcal{E}_M^h$$

where $\mathcal{E}_M^h = E[|e[n]|^2]$ and $e[n] = d[n] - y[n]$.

这里我们只关注其FIR实现

维纳霍夫方程给出了最小化误差所需要的约束

$$\sum_{k=0}^{M-1} h[k] \gamma_{xx}[l-k] = \gamma_{dx}[l],$$

$$\varepsilon_M^h = \min_{h_M} \mathcal{E}_M^h = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{opt}[k] \gamma_{dx}^*[k]$$

这里能计算最小误差具体是多少

当我们需要的场景是 $s[n]=d[n]$ 时候,

$$\gamma_{xx}[k] = \gamma_{ss}[k] + \gamma_{ww}[k]$$

$$\gamma_{dx}[k] = \gamma_{ss}[k]$$

K 在做线性滤波器时候,有三种场景,一个是滤波,也就是目标序列的序号 $d[n]$ 和原始序号 $s[n]$ 相等,还有就是信号预测和信号平滑,分别对应序号有滞后和提前的情况。我们考虑第一种滤波的情况,根据维纳霍夫方程,方程的右侧是目标 d 和输入 x 的相关性 γ_{dx} ,假设 x 是由 s 和不相关的高斯白 w 叠加,那么这个 γ_{dx} 能否写为 γ_{ss}

你提出了一个很好的问题。在线性滤波器的滤波场景中,维纳-霍夫方程中右侧的相关项 γ_{dx} ,确实可以等同于目标信号 s 与输入信号 x 之间的相关函数 γ_{ss} 。

让我详细解释一下这个过程:

1. 假设输入信号 $x(n)$ 是由目标信号 $s(n)$ 和高斯白噪声 $w(n)$ 叠加而成: $x(n) = s(n) + w(n)$
2. 目标信号 $d(n)$ 就等于输入信号 $s(n)$: $d(n) = s(n)$
3. 那么维纳-霍夫方程中的相关函数 γ_{dx} 可以表示为: $\gamma_{dx}(k) = E[d(n)x(n-k)] = E[(s(n))(s(n-k) + w(n-k))] = E[s(n)s(n-k)] = \gamma_{ss}(k)$

然后就有如下形式

$$\sum_{k=0}^{M-1} h[k] \left(\gamma_{ss}[l-k] + \gamma_{ww}[l-k] \right) = \gamma_{ss}[l], \quad l = 0, \dots, M-1 \quad (123)$$

这里 γ_{ww} 和 γ_{ss} 都已知了，可以求 h 了（这是针对所有滤波需求，设计FIR的通用解）

类似的对于预测场景也有如下方程

$$\sum_{k=0}^{M-1} h[k] \left(\gamma_{ss}[l-k] + \gamma_{ww}[l-k] \right) = \gamma_{ss}[l+D], \quad l = 0, \dots, M-1 \quad (126)$$

维纳FIR例题116：

我们拿到一个一阶的AR过程 $s[n]$ 的差分方程，还有其内部的白噪，那就写出其innovation representation好了

s 的pds就是

$$\begin{aligned} \Gamma_{ss}(z) &= \sigma_v^2 H(z) H(z^{-1}) \\ &= \sigma_v^2 \frac{1}{1-0.6z^{-1}} \frac{1}{1-0.6z} \\ &= \frac{\sigma_v^2}{1-0.6^2} \frac{1-0.6^2}{(1+0.6^2) - 0.6(z+z^{-1})}. \end{aligned}$$

化成这种形式，是因为 $0.6^{|m|}$ 的 z 变换就是这样，对于有1阶的 z 也就是AR（1）的时候，就能套用这个。

得到了时域的 ss 自相关，和 xx 自相关

$$\gamma_{ss}[m] = 0.6^{|m|} \text{ and } \gamma_{xx}[m] = \gamma_{ss}[m] + \gamma_{ww}[m] = 0.6^{|m|} + \delta[m].$$

带回到维纳霍夫方程的 $s=d$ 场景，

你提出了一个很好的问题。维纳-霍夫方程和normal equation在线性滤波理论中确实有着密切的联系。让我来详细解释一下两者的关系：

1. 维纳-霍夫方程：
 - 在线性滤波问题中,我们希望设计一个滤波器 $h(n)$ 来最小化均方误差 $E[(d(n)-y(n))^2]$
 - 维纳-霍夫方程描述了 $h(n)$ 与输入信号 $x(n)$ 和期望输出 $d(n)$ 的相关函数之间的关系: $\sum_{k=0}^{N-1} R_x(i-k) h(k) = R_{dx}(i)$
2. Normal equation:
 - 对于线性预测问题,我们希望根据过去的输入样本预测当前输出样本
 - 预测系数 $a(k)$ 可以通过求解normal equation得到: $\sum_{k=1}^p a(k) R_x(i-k) = R_x(i)$
3. 两者的联系:
 - 从数学形式上看,维纳-霍夫方程和normal equation非常相似
 - 事实上,当目标信号 $d(n)$ 等于输入信号 $x(n)$ 时,两者是等价的
 - 也就是说,线性预测可以看作是一种特殊的线性滤波器设计问题
4. 进一步说明:
 - 在目标信号 $d(n)$ 等于输入信号 $x(n)$ 的情况下:
 - $R_{dx}(i) = R_x(i)$
 - 维纳-霍夫方程就退化成normal equation的形式
 - 这也解释了为什么normal equation可以应用于广泛的线性预测和滤波问题

综上所述,维纳-霍夫方程和normal equation虽然来源于不同的线性系统理论,但在某些情况下是完全等价的。这种等价关系揭示了线性预测和线性滤波之间的深层联系。你对这个解释有什么其他疑问吗?

线性方程组求出两个系数

然后就有了最优滤波器，也能计算实际误差的期望了

quiz范围

2024年10月28日 20:13

随机变量的均值和方差,
矩生成不考
correlation
covariance
随机过程概念35
不考自协方差

广义平稳:
跳过严平稳
遍历性不考
白噪声重点
50页不考
53页 PDS
59
63 rational
74的三个过程
81重点
prediction error filter

lattice filter计算
YW equation
normal equation

106不考
119正交原则不考

[Week 8 Lin](#)

Exam Scope1

2024年11月20日 23:13

[EE6401 Lecture7 Summary](#)

Exam Scope 2

2024年11月16日 1:29

Forward Linear prediction !87

Lattice filter

Backward

Yule walker !105-107

Wiener only FIR

From finite duration observations of signals, no figures

Parametric methods AR 150 151 !155 !157-173 need to know MA and ARMA

Eigen !201-210

Math foundation

2024年11月23日 2:51

[Statistical](#)

Linear Prediction

2024年11月23日 2:51

[Linear Prediction](#)

1. Finite duration observations

limitation of DTFT/DFT/FFT

- finite duration samples, window function, zine in freq domain.
- additive noise

The problem of PSE can be stated as: with N samples of $x(n)$ given, to estimate $R_x(e^{j2\pi f})$.

4. 总结与建议

直接计算自相关函数再傅里叶变换，是一种“无假设”的频谱估计方式，非常适合信号长度足够长或我们对信号了解不多的场景。然而，当数据量有限、需要更高分辨率、或信号可被合理建模时，参数方法就能展现优势。

所以，参数方法并非强行“假设模型”，而是为了在特定限制条件下，提供更有效的频谱估计手段。这种方法通过将信号生成的本质数学化，利用模型简化计算、增强精度，并在许多工程和科学场景中得到广泛应用。

2. Parametric method

We use a parameter vector θ to determine the estimated psd- $\rightarrow P$.

我们根据先验知识，假设某个信号X就是AR过程，那么就能用创新表示法，只需要确定参数 a_k 和 σ 即可，当然立刻就能得出功率谱

$$R_x(e^{j2\pi f}) = \sigma_w^2 |H(e^{j2\pi f})|^2$$

the obtained PSD is

$$R_x^{AR}(\theta, f) = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi f k}|^2}.$$

当然这个AR假设，阶数假设也不一定一次就对。

步骤：假设模型，指定超参，计算参数

最初我们拥有的只是采样信号 $x[n]$ ，进而能估计自相关，根据Yule Walker 进而估计 a_k

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x(0) & \hat{r}_x(-1) & \dots & \hat{r}_x(-p+1) \\ \hat{r}_x(1) & \hat{r}_x(0) & \dots & \hat{r}_x(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_x(p-1) & \hat{r}_x(p-2) & \dots & \hat{r}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_x(1) \\ \hat{r}_x(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_x(p) \end{bmatrix} \quad (161)$$

自然估计的白噪方差就是

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{r}_x(0) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k \hat{r}_x(-k).$$

用Lattice Filter的方法也能估计参数，最小化误差，并且优点是估计K的误差不太影响PDS，自然拥有更好的frequency resolution
模型也稳定，而且计算高效

3. More mathematical method

Eigen decomposition

向量正交：X向量的共轭转置和Y向量乘积为0

酉矩阵：行或者列之间都归一正交，其共轭转置等于自己的逆，实际上就是复数域内的旋转变换矩阵

厄密矩阵：复数域内的对称矩阵

半正定矩阵： $\mathbf{v}^H \mathbf{M} \mathbf{v} \geq 0$

SVD: $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$

当原来的M是一个半正定的厄密矩阵时候，

$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^H$

并且对角线元素退化为特征值 λ ，而U变为酉矩阵

某WSS信号的自相关 \mathbf{R}_x 是厄密的，自然能分解，并且可以分离为信号和噪声项

It is easy to see that \mathbf{R}_x has an SVD

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \sigma_w^2 \mathbf{I}_N = \mathbf{U} \Sigma_x \mathbf{U}^H \quad (174)$$

where

$$\Sigma_x \triangleq \text{diag}(\sigma_1^2 + \sigma_w^2, \dots, \sigma_{N_p}^2 + \sigma_w^2, \sigma_w^2, \dots, \sigma_w^2)$$

为什么要对一个R进行这种分解？

有优良的性质： \mathbf{R}_x 和原始信号 \mathbf{R}_s 拥有相同的特征向量，找秩行数以外的最小特征值，理论上就是 σ^2

Signal and noise subspaces

对于一个有加性噪声的x的自相关，可以SVD后，分为两部分合成

$$\mathbf{R}_x = \sum_{k=1}^{N_p} \lambda_k(\mathbf{R}_x) u_k u_k^H + \sum_{k=N_p+1}^N \lambda_k(\mathbf{R}_x) u_k u_k^H \quad (175)$$

下面分析的例子，相位是均匀分布的随机信号

对于一个实信号，其DFT有一半的有用信号，另一边相位相反频率相反

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=1}^p a_k \cos(2\pi f_k^0 n - \psi_k^0) \\ &\triangleq \sum_{k=1}^{N_p} A_k e^{j[2\pi f_k n - \psi_k]} \end{aligned} \quad (178)$$

where $\{a_k, f_k\}$ are (real) unknown, while $\{\psi_k^0\}$ are *statistically independent and uniformly distributed within $[-\pi, +\pi]$* ; $N_p = 2p$ is the number of complex frequency components with

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{2} a_k, & \psi_k = \psi_k^0, & f_k = f_k^0 \\ A_{p+k} = \frac{1}{2} a_k, & \psi_{p+k} = -\psi_k^0, & f_{p+k} = -f_k^0 \end{cases} \quad (179)$$

for $k = 1, 2, \dots, p$.

考察DFT以及R，我们对于采样的连续的N个

信号，总能写成如下形式

Generally, we have $\mathbf{s}(n) = \mathbf{Q}\mathbf{L}(n)$, where

$$\mathbf{L}(n) \triangleq \begin{bmatrix} A_1 e^{j(2\pi f_1 n - \psi_1)} & \dots & A_{N_p} e^{j(2\pi f_{N_p} n - \psi_{N_p})} \end{bmatrix}^T$$

and

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{-j2\pi f_1} & \dots & e^{-j2\pi f_{N_p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j2\pi f_1(N-1)} & \dots & e^{-j2\pi f_{N_p}(N-1)} \end{bmatrix} \quad (180)$$

which leads to $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(n)\mathbf{s}^H(n)] = \mathbf{Q}E[\mathbf{L}(n)\mathbf{L}^H(n)]\mathbf{Q}^H$

其中Q是相移矩阵，L(n)是原本的频率分量

最后能算出

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} |A_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A_2|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & |A_{N_p}|^2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^H = \sum_{k=1}^{N_p} |A_k|^2 \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^H, \quad (181)$$

进一步，加上白噪的信号就是

$$\mathbf{R}_x = \sum_{k=1}^{N_p} |A_k|^2 \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_N \quad (182)$$

1.a.ii

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}.$$

经过 2 倍上采样后, 信号 $x_{\text{up}}[n]$ 的长度变为 $2N$, 插入的零点将影响 DFT 的计算。

新信号的 DFT:

新信号的 DFT 也可以直接写为:

$$X_{\text{up}}[k] = X[k \bmod N], \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1.$$

这表示:

- 原始 DFT $X[k]$ 被复制并重复一次。
- 新的 DFT 长度为 $2N$, 但其中只有前 N 个频率分量是真实的频谱, 后 N 个分量是复制的内容。

4. 总结

对于原信号 $x[n]$:

- 上采样会导致频域压缩并引入周期重复。
- 对 DTFT, 变为 $X(z^2)$ 。
- 对 DFT, 结果为 $X[k]$ 的两倍长度重复, 具体为:

$$X_{\text{up}}[k] = \begin{cases} X[k], & k = 0, 1, \dots, N - 1; \\ X[k - N], & k = N, N + 1, \dots, 2N - 1. \end{cases}$$

这种重复是由于插零导致信号频谱采样率提高一倍的结果。

1.b.ii

2. 利用 $h[n] = -h[2M - n]$

将冲激响应的反对称性 $h[n] = -h[2M - n]$ 代入公式, 可以将频率响应的求和分为两部分:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=M+1}^{2M} h[n]e^{-j\omega n}.$$

对第二项的索引进行替换: 令 $n' = 2M - n$, 则当 $n = M + 1$ 时, $n' = M - 1$, 当 $n = 2M$ 时, $n' = 0$ 。因此第二项可以重写为:

$$\sum_{n=M+1}^{2M} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n'=0}^{M-1} h[2M - n']e^{-j\omega(2M-n')}.$$

根据 $h[n] = -h[2M - n]$, 得到:

$$\sum_{n=M+1}^{2M} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n'=0}^{M-1} (-h[n'])e^{-j\omega(2M-n')}.$$

将这一结果代入 $H(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega(2M-n)}.$$

3. 合并公式

将两项合并, 得到:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] \left(e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(2M-n)} \right).$$

提取公因子:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega M} \left(e^{j\omega(M-n)} - e^{-j\omega(M-n)} \right).$$

利用 $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta)$, 有:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega M} \cdot 2j \sin(\omega(M-n)).$$

4. 提取 λ 和 γ

从上述表达式可以看出:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M} \cdot \sum_{n=0}^{M-1} 2h[n] \sin(\omega(M-n)).$$

因此:

- $\lambda = -\omega M$;
- $\gamma = \omega(M-n)$.