1 Aproksymacja

1.1 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji zadanej dyskretnie.

Dla danej funkcji:

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	0
2	1

Znajdź jej aproksymacje metodą średniokwadratową dla postaci:

1.1.1 $f(x) = ax + bx^2$

$f(a,b) = ((y(-1) - 0)^2 + (y(0) - -1)^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2) * \frac{1}{4}$
$f(a,b) = ((-a+b)^2 + (1)^2 + (a+b)^2 + (2a+4b-1)^2) * \frac{1}{4}$
$f(a,b) = (a^2 + b^2 \cancel{-2ab} + 1 + a^2 + b^2 \cancel{+2ab} + 4a^2 + 16ab - 4a + 16b^2 - 8b + 1) * \frac{1}{4}$
$f(a,b) = (\frac{3}{2}a^2 + 4ab - a + \frac{9}{2}b^2 - 2b + \frac{1}{2})$
$\frac{d}{da}f(a,b) = 3a + 4b - 1$
$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 9b - 2$

$$\begin{cases} 12a + 16b - 4 = 0 \\ 16a + 36b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{11} \\ b = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Uwaga: Teoretycznie trzeba robić kolejne kroki, ale łatwo pokazać, że większe b stworzy dużo mniej dokładne wyniki, a te wartości to jedyne rozwiązania. Dodatkowo nie trzeba dzielić całości przez 4, bo i tak w pochodnych to nie ma znaczenia, bo po 2giej stronie jest 0 i można sobie pomnożyć.

1.1.2 $f(x) = a + bx^3$

$f(a,b) = (y(-1) - 0)^2 + (y(0) - -1)^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2$
$f(a,b) = (a-b)^2 + (a - -1)^2 + (a+b)^2 + (a+8b-1)^2$
$f(a,b) = 4a^2 + 16ab + 66b^2 - 16b + 2$ $\frac{d}{da}f(a,b) = 8a + 16b$
$\frac{d}{db}f(a,b) = 16a + 132b - 16$

$$\begin{cases} 8a + 16b = 0 | * \frac{1}{2} \\ 16a + 132b - 16 = 0 | * \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 4a + 33b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{8}{25} \\ b = \frac{4}{25} \end{cases}$$

1.1.3 $f(x) = ax + b$

$f(a,b) = (-a+b-0)^2 + (b - (-1))^2 + (a+b-0)^2 + (2a+b-1)^2$
$f(a,b) = 6a^2 + 4ab - 4a + 4b^2 + 2$
$\frac{d}{da}f(a,b) = 12a + 4b - 4$
$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 8b$

$$\begin{cases} 12a + 4b - 4 = 0 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji w przedziale

Dla funkcji $f(x) = x^4, x \in < 0; 1 >$ Znajdź aproksymacją średniokwadratowa funkcji $f(x) = ax^2$. Znajdź, dla jakiej wartości x błąd aproksymacji będzie największy.
$f(a) = (\int_0^1 (ax^2 - x^4)dx)^2$
$f(a) = \frac{a^2}{9} - \frac{2a}{15} + \frac{1}{25}$
$\frac{d}{da}f(a) = \frac{2a}{9} - \frac{2}{15}$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} - \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0.6 \end{cases}$$

Musimy znaleźć $max|(0.6x^2 - x^4)| \in \{0; 1\}$, ale że nie chce mi się bawić w pochodną dla wartości bezwzględnej, znajdę minima i maksima funkcji i wezmę wartość bezwzględną z nich. $f(x) = 0.6x^2$ $g(x) = 0.6x^2 - x^4$ $\frac{d}{dx}g(x) = 1.2x - 4x^3$

$$\begin{cases} 1.2x - 4x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \{-\sqrt{0.3}, 0, \sqrt{0.3}\} \end{cases}$$

$-\sqrt{0.3} < 0$, więc jest poza przedziałem. Należy równierz dodać 0 i 1, jako początek i koniec przedziału.

$$\begin{cases} |f(0)| = 0 \\ |f(\sqrt{0.3})| = 0.09 \\ |f(1)| = 0.4 \end{cases}$$

Dla x=1 aproksymacja jest obarczona największym błędem.

1.3 Jednostajna

UWAGA: Idiota programista nie zrobił, nie używać W aproksymacji jednostajnej należy stworzyć jak najmniejszy maksymalny błąd.

1.3.1 Metoda szeregów potęgowych

Nie rozumiem do końca, co chciał, bo szereg potęgowy to dosłownie wielomian.
$\sqrt{x} = ax^2 + bx + c$
$f(x) = \sqrt{x} - (ax^2 + bx + c), x \in < 0; 1 >$
$\frac{d}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2ax - b$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2ax - b = 0 \end{cases}$$

2 Lagrange

2.1 Wyznacz współczynniki wielomianu

Dla następujących danych:

x	f(x)
-4	2
-2	-3
3	2
6	-3

Wyznacz współczynniki wielomianu Langrange'a
$l0(x) = \frac{x-(-2)}{-4-(-2)} * \frac{x-3}{-4-3} * \frac{x-6}{-4-6} = -\frac{1}{140}x^3 + \frac{1}{20}x^2 - \frac{9}{35}$
$l1(x) = \frac{x-(-4)}{-2-(-4)} * \frac{x-3}{-2-3} * \frac{x-6}{-2-6} = \frac{1}{80}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{9}{10}$
$l2(x) = \frac{x-(-4)}{3-(-4)} * \frac{x-(-2)}{3-(-2)} * \frac{x-6}{3-6} = -\frac{1}{105}x^3 + \frac{4}{15}x + \frac{16}{35}$
$l3(x) = \frac{x-(-4)}{6-(-4)} * \frac{x-(-2)}{6-(-2)} * \frac{x-3}{6-3} = \frac{1}{240}x^3 + \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{24}x - \frac{1}{10}$
$L(x) = 2 * l0(x) + -3 * l1(x) + 2 * l2(x) + -3 * l3(x)$
$L(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$
Uwaga: Można sprawdzić, czy wielomian jest poprawnie obliczony wstawiając do niego wartości z tabelki. Powinny wychodzić identyczne wartości f(x).

2.2 Wyznacz pochodną w punkcie

Dla danych:

x	f(x)
-1	-1
1	0
3	-1
4	1

Wyznacz pochodną dla x=1 i porównaj wynik w tym punkcie na podstawie ilorazu różnicowego centralnego.

2.2.1 Używając wielomianu

$l0(X) = \frac{x-1}{-1-1} * \frac{x-3}{-1-3} * \frac{x-4}{-1-4} = \frac{1}{40}(-x^3 + 8x^2 - 19x + 12)$
$l1(X) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} * \frac{x-3}{1-3} * \frac{x-4}{1-4} = \frac{1}{12}(x^3 - 6x^2 + 5x + 12)$
$l2(X) = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} * \frac{x-1}{3-1} * \frac{x-4}{3-4} = \frac{1}{8}(-x^3 + 4x^2 + x - 4)$
$l3(X) = \frac{x-(-1)}{4-(-1)} * \frac{x-1}{4-1} * \frac{x-3}{4-3} = \frac{1}{15}(x^3 - 3x^2 - x + 3)$
$L(x) = -1 * l0(x) + \cancel{0 * l1(x)} + -1 * l2(x) + 1 * l3(x)$
$L(x) = \frac{13x^3}{60} - \frac{9x^2}{10} + \frac{17x}{60} + \frac{2}{5}$
$L'(x) = \frac{13x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{17}{60}$
$L'(1) = \frac{13}{20} - \frac{9}{5} + \frac{17}{60} = -\frac{13}{15}$

2.2.2 Używając ilorazu różnicowego centralnego

Uwaga: Sekcja zrobiona przy pomocy AI, ale pokrywa się mniej-więcej z książką
Znajdujemy takie punkty, żeby $|x - x_1| = |x - x_2|$, dla tego przypadku $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Odległość od x $h = 2$
$f'(1) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(3)-f(-1)}{2*2} = \frac{-1-(-1)}{4} = 0$
Co jest różne w porównaniu do wartości wyliczonej z wielomianu. Jest to jednak do przewidzenia, ponieważ jeżeli wyświetlimy wykres wielomianu, to nie jest to maksimum lokalne, ale wg funkcji dyskretnej jest.

3 Newton

Dla danej funkcji:

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	0
2	1

$n0 = 0$
$n1 = (\cancel{\frac{0}{-1-0}} + \frac{-1}{0-(-1)})(x - (-1))$
$n2 = (\cancel{\frac{0}{(-1-0)(-1-1)}} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)} + \cancel{\frac{0}{(1-(-1))(1-0)}})(x - (-1))(x - 0)$
$n3 = (\cancel{\frac{0}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} + \cancel{\frac{0}{(1-(-1))(1-0)(1-2)}} + \frac{1}{(2-(-1))(2-0)(2-1)})(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$
$P(x) = n0 + n1 + n2 + n3$
$P(x) = \frac{1}{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3)$
Ogólnie Newton to suma wielomianów k-tego stopnia, gdzie nk to suma $\frac{f(x_k)}{x_k - x_n}$ pomnożona przez $(x - x_n)$, gdzie $n \in \{1, 2..., k\}$ (zerowy wielomian to $f(x_0)$).

4 Metody rozwiązywania układów

4.1 Metoda Newtona (Nieliniowe)

Wzór: $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Uwaga: chyba można znaleźć punkt $g(x) = 0$ z $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, wtedy tam jest albo $f(x) = 0$ albo $f(x) = \pm\infty$, przynajmniej tak działa dla poniższych przykładów, ale wtedy to nie jest metoda Newtona chyba.

4.1.1 $f(x) = ln(x) - \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$
$x_0 = 2$
$x_1 = N(x_0) = 1.74247042592$
$x_2 = N(x_1) = 1.76305587394$
$x_3 = N(x_2) = 1.76322282359$
$x_4 = N(x_3) = 1.76322283435$
Nie chce mi się dalej robić, ale punkt zerowy jest w około $x = 1.7632228$, co daje $f(1.7632228) = -3 * 10^-8$

4.1.2 $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$
$x_0 = 1$ $x_1 = N(x_0) = -1.16395341374$
$x_2 = N(x_1) = -2.44811693124$
$x_3 = N(x_2) = -6.45348240853$
$x_4 = N(x_3) = -13.2898033355$

Dalej nie robię, bo $x_n - x_{n-1}$ się zwiększa a nie zmniejsza, czyli funkcja nie przecina punktu 0.

4.2 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$
$x_0 = 1$ $x_1 = N(x_0) = 0.53788284274$
$x_2 = N(x_1) = 0.566277007666$
$x_3 = N(x_2) = 0.567142580362$
$x_4 = N(x_3) = 0.567143290409$

Punkt zerowy znajduje się mniej więcej w x=0.56714

4.3 Jacobiego (liniowe)

Wzór: $x_{i+1} = (1 - D^{-1}A)x_i + D^{-1}b$
Uwaga: Ta metoda działa tylko jeśli w każdym wierszu i kolumnie suma modułów elementów niediagonalnych jest mniejsza niż moduł elementu diagonalnego.

4.3.1

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Dla tych danych nie możemy zastosować metody Jacobiego, ponieważ $|4| > |-2|$, ale $|1| \ngtr |-8|$. Teoretycznie możemy dodać do 2giego równania 2*pierwsze, wtedy warunek będzie spełniony:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ 0x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$$

Z czego wynika że:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Ale udajemy że jesteśmy komputerami i tego nie wiemy.
Zapisujemy równanie do równania z macierzami:
$Ax = b => \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
Jako wektor startowy przyjmiemy:
$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Tworzymy macierz D^{-1} (Odwrotności diagonalnych macierzy powyżej):
$D^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
Wyliczymy od razu $D^{-1}b$ oraz $1 - D^{-1}A$, ponieważ pozostają niezmienne pomiędzy iteracjami.
$D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
$1 - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kuaaro fact: Pamiętajcie kochani, że jak w Wolframie zrobicie $1 - A$, to to nie jest $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - A$ tylko $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - A$ (Cries in a lost hour).
Wzór iteracyjny dla tych równań: $x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * x_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
$x_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
Skoro iteracje się nie zmieniają, mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

4.4 Dekompozycja LU (liniowe)

Ogólny wzór: $Ax = b => LRx = b$, gdzie $LR = A$, L i R to macierze odpowiednio dolno i górno trujkątne.
Rozwiązać:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

4.4.1 Metoda Crouta-Doolittle

Będę rozwiązywać wg. książki, bo mi się nie chce rozumieć, co się dzieje.