

Spis treści

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Aproksymacja | 2 |
| 1.1 | Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji zadanej dyskretnie. | 2 |
| 1.1.1 | $f(x) = ax + bx^2$ | 2 |
| 1.1.2 | $f(x) = a + bx^3$ | 2 |
| 1.1.3 | $f(x) = ax + b$ | 2 |
| 1.2 | Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji w przedziale | 3 |
| 1.3 | Jednostajna (Taylora) | 3 |
| 1.3.1 | $y = \sqrt{x}, a \in < 0; 2 >$ | 3 |
| 2 | Lagrange | 3 |
| 2.1 | Wyznacz współczynniki wielomianu | 3 |
| 2.2 | Wyznacz pochodną w punkcie | 4 |
| 2.2.1 | Używając wielomianu | 4 |
| 2.2.2 | Używając ilorazu różnicowego centralnego | 4 |
| 3 | Newton | 4 |
| 4 | Normy macierzy | 4 |
| 4.1 | $\ A\ _1$ | 4 |
| 4.2 | $\ A\ _2$ | 4 |
| 4.3 | $\ A\ _\infty$ | 5 |
| 4.4 | $\ A\ _F$ | 5 |
| 5 | Metody rozwiązywania układów | 5 |
| 5.1 | Prosta (Nieliniowe) | 5 |
| 5.1.1 | $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ | 5 |
| 5.1.2 | $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ | 5 |
| 5.2 | Metoda Newtona (Nieliniowe) | 5 |
| 5.2.1 | $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ | 6 |
| 5.2.2 | $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ | 6 |
| 5.2.3 | $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ | 6 |
| 5.3 | Jacobiego (liniowe) | 6 |
| 5.3.1 | $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ | 6 |
| 5.4 | Dekompozycja LU (liniowe) | 7 |
| 5.4.1 | Metoda Crouta-Doolittle’a | 7 |
| 5.4.2 | Metoda Doolittle’a | 7 |
| 5.5 | Gausa-Seidla (Liniowe), chyba dotąd nie było tego na żadnym egzaminie | 8 |
| 5.5.1 | $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$ | 8 |
| 6 | SOR (Metoda Sukcesywnej Relaksacji)(Liniowe) | 8 |
| 6.1 | $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ | 8 |
| 6.1.1 | $\omega = 1.5$ | 9 |
| 6.1.2 | $\omega = 1.2$ | 9 |
| 7 | Całki | 9 |
| 7.1 | Gauss/Gauss-Legendre | 9 |
| 7.1.1 | Tabelka z wartościami | 9 |
| 7.1.2 | $\int_0^\pi \sin(x)dx$ | 9 |
| 7.1.3 | $\int_0^3 x^2dx$ | 9 |
| 7.2 | Simpson/Parabol | 10 |
| 7.2.1 | Dla parzystej liczby przedziałów | 10 |
| 7.2.2 | Dla nieparzystej liczby przedziałów | 10 |
| 7.3 | Metoda trapezów | 10 |
| 8 | Równania różniczkowe | 10 |
| 8.1 | Metoda ekstrapolacyjna Eulera | 10 |
| 8.1.1 | Dla $f(x, y) = xy, x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.5$ wyznacz 3 pierwsze iteracje obydwoma metodami. | 11 |
| 9 | Ocena zbierzości algortmu iteracyjnego | 11 |
| 9.1 | $x_{i+1} = \frac{1}{7}(6x_i + \frac{a}{x_i^6}), x = \sqrt[7]{a}$ | 11 |

| | |
|---|-----------|
| 10 Poprawny numerycznie algorytm obliczania wartości wyrażenia $y = \frac{1}{x}(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}}); x < 1$ | 11 |
| 11 Oszacuj błąd względny (błąd graniczny) wyznaczania wartości wyrażenia | 11 |
| 11.1 $y = x^2 \sin(x)$ | 11 |
| 11.2 $y = x^3 \sin(x)$ | 12 |
| 12 Uwarunkowanie zadania | 12 |
| 13 Wartość x dla której błąd maksymalny wynosi | 12 |

1 Aproksymacja

1.1 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji zadanej dyskretnie.

Dla danej funkcji:

| x | f(x) |
|----|------|
| -1 | 0 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |

Znajdź jej aproksymację metodą średniokwadratową dla postaci:

1.1.1 $f(x) = ax + bx^2$

$$f(a,b) = ((y(-1) - 0)^2 + (y(0) - -1)^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2) * \frac{1}{4}$$

$$f(a,b) = ((-a + b)^2 + (1)^2 + (a + b)^2 + (2a + 4b - 1)^2) * \frac{1}{4}$$

$$f(a,b) = (a^2 + b^2 - 2ab + 1 + a^2 + b^2 + 2ab + 4a^2 + 16ab - 4a + 16b^2 - 8b + 1) * \frac{1}{4}$$

$$f(a,b) = (\frac{3}{2}a^2 + 4ab - a + \frac{9}{2}b^2 - 2b + \frac{1}{2})$$

$$\frac{d}{da}f(a,b) = 3a + 4b - 1$$

$$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 9b - 2$$

$$\begin{cases} 12a + 16b - 4 = 0 \\ 16a + 36b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{11} \\ b = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Uwaga: Teoretycznie trzeba robić kolejne kroki, ale łatwo pokazać, że większe b stworzy dużo mniej dokładne wyniki, a te wartości to jedyne rozwiązania. Dodatkowo nie trzeba dzielić całości przez 4, bo i tak w pochodnych to nie ma znaczenia, bo po 2giej stronie jest 0 i można sobie pomnożyć.

1.1.2 $f(x) = a + bx^3$

$$f(a,b) = (y(-1) - 0)^2 + (y(0) - -1)^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2$$

$$f(a,b) = (a - b)^2 + (a - -1)^2 + (a + b)^2 + (a + 8b - 1)^2$$

$$f(a,b) = 4a^2 + 16ab + 66b^2 - 16b + 2 \quad \frac{d}{da}f(a,b) = 8a + 16b$$

$$\frac{d}{db}f(a,b) = 16a + 132b - 16$$

$$\begin{cases} 8a + 16b = 0 \mid * \frac{1}{2} \\ 16a + 132b - 16 = 0 \mid * \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 4a + 33b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{8}{25} \\ b = \frac{4}{25} \end{cases}$$

1.1.3 $f(x) = ax + b$

$$f(a,b) = (-a + b - 0)^2 + (b - (-1))^2 + (a + b - 0)^2 + (2a + b - 1)^2$$

$$f(a,b) = 6a^2 + 4ab - 4a + 4b^2 + 2$$

$$\frac{d}{da}f(a,b) = 12a + 4b - 4$$

$$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 8b$$

$$\begin{cases} 12a + 4b - 4 = 0 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji w przedziale

Dla funkcji $f(x) = x^4, x \in]0; 1[$ Znajdź aproksymację średniokwadratową funkcji $f(x) = ax^2$. Znajdź, dla jakiej wartości x błąd aproksymacji będzie największy.

$$f(a) = \int_0^1 (ax^2 - x^4)^2 dx$$

$$f(a) = \frac{a^2}{5} - \frac{2a}{7} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{2a}{5} - \frac{2}{7}$$

$$\left\{ \frac{2a}{5} - \frac{2}{7} = 0 \right.$$

$$\left. a = \frac{5}{7} \right\}$$

Musimy znaleźć $\max |(\frac{5}{7}x^2 - x^4)| \in \{0; 1\}$, ale że nie chce mi się bawić w pochodną dla wartości bezwzględnej, znajdę minima i maksima funkcji i wezmę wartość bezwzględną z nich.

$$f(x) = \frac{5}{7}x^2$$

$$g(x) = \frac{5}{7}x^2 - x^4$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{10}{7}x - 4x^3$$

$$\left\{ \frac{20}{7}x - 4x^3 = 0 \right.$$

$$\left. x \in \{-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0, \sqrt{\frac{5}{7}}\} \right\}$$

$-\sqrt{\frac{5}{7}} < 0$, więc jest poza przedziałem. Należy również dodać 0 i 1, jako początek i koniec przedziału.

$$\begin{cases} |f(0)| = 0 \\ |f(\sqrt{\frac{5}{7}})| \approx 0.51 \\ |f(1)| \approx 0.43 \end{cases}$$

Dla $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$ aproksymacja jest obciążona największym błędem.

1.3 Jednostajna (Tylora)

UWAGA: Wynik teoretyczny inny niż praktyczne (gorszy), nie przepisywać bezmyślnie W aproksymacji jednostajnej należy stworzyć jak najmniejszy maksymalny błąd.

Szereg Taylora n -tego stopnia = $\sum_{i=0}^n (\frac{d^i f(x_0)}{i!} (x - \delta)^i)$, gdzie x_0 to środek przedziału, δ to promień przedziału, czyli długość/2.

$$1.3.1 \quad y = \sqrt{x}, a \in]0; 2[$$

$$x_0 = 1, \delta = 1$$

$$\text{Dla 2-giego stopnia szereg Taylora wygląda } f(x) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}(x-1)^2 = -\frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}.$$

Rozwiązanie teoretycznie poprawne, ale jak na desmosie patrzę na błąd funkcji, to dla mniejszego c błąd maksymalny jest mniejszy. Ekstrema lokalne są w 0 i 2. Najlepsza praktyczna wartość, jaką znalazłem była dla $c = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$$\left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2ax - b = 0 \right.$$

2 Lagrange

2.1 Wyznacz współczynniki wielomianu

Dla następujących danych:

| x | f(x) |
|----|------|
| -4 | 2 |
| -2 | -3 |
| 3 | 2 |
| 6 | -3 |

Wyznacz współczynniki wielomianu Lagrange'a

$$l_0(x) = \frac{x-(-2)}{-4-(-2)} * \frac{x-3}{-4-3} * \frac{x-6}{-4-6} = -\frac{1}{140}x^3 + \frac{1}{20}x^2 - \frac{9}{35}$$

$$l_1(x) = \frac{x-(-4)}{-2-(-4)} * \frac{x-3}{-2-3} * \frac{x-6}{-2-6} = \frac{1}{80}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{9}{10}$$

$$l_2(x) = \frac{x-(-4)}{3-(-4)} * \frac{x-(-2)}{3-(-2)} * \frac{x-6}{3-6} = -\frac{1}{105}x^3 + \frac{4}{15}x + \frac{16}{35}$$

$$l_3(x) = \frac{x-(-4)}{6-(-4)} * \frac{x-(-2)}{6-(-2)} * \frac{x-3}{6-3} = \frac{1}{240}x^3 + \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{24}x - \frac{1}{10}$$

$$L(x) = 2 * l_0(x) + -3 * l_1(x) + 2 * l_2(x) + -3 * l_3(x)$$

$$L(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$$

Uwaga: Można sprawdzić, czy wielomian jest poprawnie obliczony wstawiając do niego wartości z tabelki. Powinny wychodzić identyczne wartości f(x).

2.2 Wyznaczyć pochodną w punkcie

Dla danych:

| x | f(x) |
|----|------|
| -1 | -1 |
| 1 | 0 |
| 3 | -1 |
| 4 | 1 |

Wyznaczyć pochodną dla x=1 i porównać wynik w tym punkcie na podstawie ilorazu różnicowego centralnego.

2.2.1 Używając wielomianu

$$l0(X) = \frac{x-1}{-1-1} * \frac{x-3}{-1-3} * \frac{x-4}{-1-4} = \frac{1}{40}(-x^3 + 8x^2 - 19x + 12)$$
$$l1(X) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} * \frac{x-3}{1-3} * \frac{x-4}{1-4} = \frac{1}{12}(x^3 - 6x^2 + 5x + 12)$$
$$l2(X) = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} * \frac{x-1}{3-1} * \frac{x-4}{3-4} = \frac{1}{8}(-x^3 + 4x^2 + x - 4)$$
$$l3(X) = \frac{x-(-1)}{4-(-1)} * \frac{x-1}{4-1} * \frac{x-3}{4-3} = \frac{1}{15}(x^3 - 3x^2 - x + 3)$$
$$L(x) = -1 * l0(x) + 0 * l1(x) + -1 * l2(x) + 1 * l3(x)$$
$$L(x) = \frac{13x^3}{60} - \frac{9x^2}{10} + \frac{17x}{60} + \frac{2}{5}$$
$$L'(x) = \frac{13x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{17}{60}$$
$$L'(1) = \frac{13}{20} - \frac{9}{5} + \frac{17}{60} = -\frac{13}{15}$$

2.2.2 Używając ilorazu różnicowego centralnego

Uwaga: Sekcja zrobiona przy pomocy AI, ale pokrywa się mniej-więcej z książką
Znajdujemy takie punkty, żeby $|x - x_1| = |x - x_2|$, dla tego przypadku $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Odległość od x $h = 2$
 $f'(1) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(3)-f(-1)}{2*2} = \frac{-1-(-1)}{4} = 0$
Co jest różne w porównaniu do wartości wyliczonej z wielomianu. Jest to jednak do przewidzenia, ponieważ jeżeli wyświetlimy wykres wielomianu, to nie jest to maksimum lokalne, ale wg funkcji dyskretnej jest.

3 Newton

Dla danej funkcji:

| x | f(x) |
|----|------|
| -1 | 0 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |

$$n0 = 0$$
$$n1 = (\frac{0}{-1-0} + \frac{-1}{0-(-1)})(x - (-1))$$
$$n2 = (\frac{0}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)} + \frac{0}{(1-(-1))(1-0)})(x - (-1))(x - 0)$$
$$n3 = (\frac{0}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} + \frac{0}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} + \frac{1}{(2-(-1))(2-0)(2-1)})(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$$
$$P(x) = n0 + n1 + n2 + n3$$
$$P(x) = \frac{1}{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3)$$

Ogólnie Newton to suma wielomianów k-tego stopnia, gdzie nk to suma $\frac{f(x_k)}{x_k - x_n}$ pomnożona przez $(x - x_n)$, gdzie $n \in \{1, 2, ..., k\}$ (zerowy wielomian to $f(x_0)$).

4 Normy macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4.1 ||A||1

Maksymalna suma wartości bezwzględnych w każdej z kolumn.
 $||A||_1 = \max\{|1| + |4| + |7| = 12, |2| + |5| + |8| = 15, |3| + |6| + |9| = 18\}$
 $||A||_1 = 18$

4.2 ||A||2

$\sqrt{\max\{\lambda\}}$, gdzie λ to wartości dla których $\det(\lambda I - A^T A) = 0$
$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\lambda^3-285\lambda^2+324\lambda=0$$

$$\lambda\in\{0,\frac{285-3\sqrt{8881}}{2},\frac{285+3\sqrt{8881}}{2}\}$$

$$\max\{\lambda\}=\frac{285+3\sqrt{8881}}{2}$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\frac{285+3\sqrt{8881}}{2}}\approx 16.85$$

4.3 $\|A\|_\infty$

Maksymalna suma wartości bezwzględnych w każdym z wierszy.

$$\|A\|_\infty=\max\{|1|+|2|+|3|=6,|4|+|5|+|6|=15,|7|+|8|+|9|=24\}$$

$$\|A\|_\infty=24$$

4.4 $\|A\|_F$

Pierwiastek sumy kwadratów wszystkich elementów w macierzy.

$$\|A\|_F=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}$$

$$\|A\|_F=16.88$$

$$\sqrt[n]{a}$$

$$x_{i+1}=\frac{6x_i+\frac{a}{x_i^6}}{7}$$

5 Metody rozwiązywania układów

5.1 Prosta (Nieliniowe)

Wzór: $0=f(x)\Rightarrow x_{n+1}=\phi(x_n), 0<|\phi'(x_n)|<1$.

5.1.1 $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{x}$

$$\ln(x)=\frac{1}{x}$$

$$e^{\ln(x)}=e^{\frac{1}{x}}$$

$$x=e^{\frac{1}{x}}$$

$$x_0=2$$

$$x_1=e^{\frac{1}{x_0}}=1.6487212707$$

$$x_2=e^{\frac{1}{x_1}}=1.8340573792$$

$$x_3=e^{\frac{1}{x_2}}=1.72502097856$$

$$x_4=e^{\frac{1}{x_3}}=1.78550822551$$

$$x_5=e^{\frac{1}{x_4}}=1.75078564631$$

$$x_6=e^{\frac{1}{x_5}}=1.77034093906$$

$$x_7=e^{\frac{1}{x_6}}=1.75920666162$$

$$x_8=e^{\frac{1}{x_7}}=1.76550725831$$

$$x_9=e^{\frac{1}{x_8}}=1.76192938968$$

$$x_{10}=e^{\frac{1}{x_9}}=1.76395709418$$

5.1.2 $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}=e^x$$

$$x=\frac{1}{e^x}$$

$$x_0=0$$

$$x_1=\frac{1}{e^{x_0}}=1$$

$$x_2=\frac{1}{e^{x_1}}=0.367879441171$$

$$x_3=\frac{1}{e^{x_2}}=0.692200627556$$

$$x_4=\frac{1}{e^{x_3}}=0.500473500563$$

$$x_5=\frac{1}{e^{x_4}}=0.606243535086$$

$$x_6=\frac{1}{e^{x_5}}=0.545395785975$$

$$x_7=\frac{1}{e^{x_6}}=0.579612335503$$

$$x_8=\frac{1}{e^{x_7}}=0.560115461361$$

$$x_9=\frac{1}{e^{x_8}}=0.57114311508$$

$$x_{10}=\frac{1}{e^{x_9}}=0.564879347391$$

$$x_{11}=\frac{1}{e^{x_{10}}}=0.568428725029$$

$$x_{12}=\frac{1}{e^{x_{11}}}=0.566414733147$$

$$x_{13}=\frac{1}{e^{x_{12}}}=0.567556637328$$

5.2 Metoda Newtona (Nieliniowe)

Wzór: $N(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

Uwaga: chyba można znaleźć punkt $g(x)=0$ z $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$, wtedy tam jest albo $f(x)=0$ albo $f(x)=\pm\infty$, przynajmniej tak działa dla poniższych przykładów, ale wtedy to nie jest metoda Newtona chyba.

$$\mathbf{5.2.1} \quad f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = N(x_0) = 1.74247042592$$

$$x_2 = N(x_1) = 1.76305587394$$

$$x_3 = N(x_2) = 1.76322282359$$

$$x_4 = N(x_3) = 1.76322283435$$

Nie chce mi się dalej robić, ale punkt zerowy jest w około $x = 1.7632228$, co daje $f(1.7632228) = -3 * 10^{-8}$

$$\mathbf{5.2.2} \quad f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = N(x_0) = -1.16395341374$$

$$x_2 = N(x_1) = -2.44811693124$$

$$x_3 = N(x_2) = -6.45348240853$$

$$x_4 = N(x_3) = -13.2898033355$$

Dalej nie robię, bo $x_n - x_{n-1}$ się zwiększa a nie zmniejsza, czyli funkcja nie przecina punktu 0.

$$\mathbf{5.2.3} \quad f(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = N(x_0) = 0.53788284274$$

$$x_2 = N(x_1) = 0.566277007666$$

$$x_3 = N(x_2) = 0.567142580362$$

$$x_4 = N(x_3) = 0.567143290409$$

Punkt zerowy znajduje się mniej więcej w $x=0.56714$

5.3 Jacobiego (liniowe)

Wzór: $x_{i+1} = (1 - D^{-1}A)x_i + D^{-1}b$

Uwaga: Ta metoda działa tylko jeśli w każdym wierszu i kolumnie suma modułów elementów niediagonalnych jest mniejsza niż moduł elementu diagonalnego.

5.3.1

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Dla tych danych nie możemy zastosować metody Jacobiego, ponieważ $|4| > |-2|$, ale $|1| \not\geq |-8|$. Teoretycznie możemy dodać do 2giego równania 2*pierwsze, wtedy warunek będzie spełniony:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ 0x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$$

Z czego wynika że:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Ale udajemy że jesteśmy komputerami i tego nie wiemy.

Zapisujemy równanie do równania z macierzami:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Jako wektor startowy przyjmujemy:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz D^{-1} (Odwrotności diagonalnych macierzy powyżej):

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Wyliczymy od razu $D^{-1}b$ oraz $1 - D^{-1}A$, ponieważ pozostają niezienne pomiędzy iteracjami.

$$D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$1 - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kuaaro fact: Pamiętajcie kochani, że jak w Wolframie zrobicie $1 - A$, to to nie jest $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - A$ tylko $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - A$ (Cries in a lost hour).

$$\text{Wzór iteracyjny dla tych równań: } x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * x_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Skoro iteracje się nie zmieniają, mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

5.4 Dekompozycja LU (liniowe)

Ogólny wzór: $Ax = b \Rightarrow LRx = b$, gdzie $LR = A$, L i R to macierze odpowiednio dolno i górno trójkątne. Następnie rozwiązujemy 2 układy równań: $Ly = b$ oraz $Rx = y$. Rozwiązać:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

5.4.1 Metoda Crouta-Doolittle'a

Rozpisana metoda Doolittle'a, użyć tamtego, bazgroły zakomentowane w Latexie.

5.4.2 Metoda Doolittle'a

Stworzenie macierzy

Uwaga: Jak podczas tworzenia macierzy pojawi się 0 na diagonalnej, to trzeba zmieniać rzędy i kolumny, żeby usunąć 0 z diagonalnej.

$$A = LR = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym algorytmie modyfikujemy macierz A, w taki sposób że wartości L są na i pod diagonalną, a wartości R są nad diagonalną.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dzielimy wszystkie elementy w pierwszym rzędzie na prawo od diagonalnej przez diagonalną.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iterujemy po wszystkich wartościach, które są pod pierwszym rzędem i na prawo od pierwszej kolumny zgodnie ze wzorem $a_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}$.

$$a_{22} = a_{22} - a_{21}a_{12} = -1 - (1)(1) = -2$$

$$a_{23} = a_{23} - a_{21}a_{13} = 1 - (1)(1) = 0$$

$$a_{32} = a_{32} - a_{31}a_{12} = 1 - (-1)(-1) = 2$$

$$a_{33} = a_{33} - a_{31}a_{13} = -1 - (-1)(-1) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Znowu dzielimy elementy na prawo przez diagonalną, a że $a_{32} = 0$, to nic nie robimy.

Znowu dla elementów poniżej 2giego rzędu i na prawo od 2giej kolumny wykonujemy działanie $a_{ij} = a_{ij} - a_{i2}a_{2j}$, $a_{32} = 0$, więc znów nic się nie zmienia.

Rozbijamy macierz na L i R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równań

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

5.5 Gaussa-Seidla (Liniowe), chyba dotąd nie było tego na żadnym egzaminie

Wzór:

$$xi + 1 = -(L + D)^{-1}Uxk + (L + D)^{-1}b$$

Pomocne są macierze pomocnicze: $B = -(L + D)^{-1}U$, $C = (L + D)^{-1}b$

Uwaga 1: Macierz musi być dodatnio określona.

Uwaga 2: ta metoda działa wtedy, kiedy wyznacznik macierzy $B = (L + D)^{-1}U$ ma jedno rozwiązanie (metoda jest zbierzna).

ACC fact: jeżeli macierz jest dominująca diagonalnie, dowolny punkt startowy da nam odpowiedź. Jeżeli nie, czasami punkt startowy może dać wynik, czasami nie.

O wiele łatwiej jest wykorzystywać wzór na poszczególne elementy: $x^{k+1}_i = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$ ale ja nie lubię chodzić na łatwiznę

Uwaga - z uwagi na dzielenie, wartość diagonalna nie może być zerowa.

5.5.1

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Wektor startowy standardowo damy $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Podzielmy macierze na części (L+D) i U:

ACC fact: to nie jest ten sam podział, co dekompozycja LU. Tutaj L to macierz dolnotrójkątna, D to macierz diagonalna, U to macierz górnortrójkątna.

$$(L + D) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy odwrotność macierzy (L+D), krokami:

1. wyznacznik: $\det(L + D) = 326 + 120 + 000 - 020 - 023 - 016 = 36$

2. macierz dopełnień algebraicznych (wyszukajcie sposób): $(L + D)^D = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3. transponujemy i dzielimy przez $\det(L+D)$ (czyt. podziel każdy element przez $\det(L+D)$) macierz dopełnień,

$$\text{aby otrzymać odwrotność: } (L + D)^{-1} = \frac{1}{\det(L+D)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy macierze pomocnicze B i C:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Uwaga - we wzorze na B jest MINUS $(L + D)^{-1}$.

Powyższe macierze podstawiamy z każdą iteracją do wzoru $x^{k+1} = Bx^k + C$:

$$x^1 = Bx^0 + C = C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$x^2 = Bx^1 + C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{21}{54} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix}$$

6 SOR (Metoda Sukcesywnej Relaksacji)(Liniowe)

WORK IN PROGRESS

DLC dla metody Gaussa-Seidla, gdzie $B(\omega) = \frac{1}{\omega}D(I - \omega D^{-1}E)$, ω powinno być $0 < \omega < 2$.

$$\text{Ogólny wzór dla } B(\omega), \text{ gdzie } E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}, B(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\omega} & 0 & 0 \\ -e_1 & \frac{d_2}{\omega} & 0 \\ -e_2 & -e_3 & \frac{d_3}{\omega} \end{bmatrix}$$

6.1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Dla tego przykładu nie widać dużej różnicy od zwykłego Gaussa-Seidla, bo są same 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D^{-1} = D$, jakby D miało wartości inne niż 1 lub -1, to dla D wystarczy wziąć odwrotność każdego z elementów.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1.1 $\omega = 1.5$

$$B(1.5) = \frac{1}{1.5} D(I - 1.5D^{-1}E)$$

$$B(1.5) = \frac{1}{1.5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

6.1.2 $\omega = 1.2$

$$B(1.2) = \frac{1}{1.2} D(I - 1.2D^{-1}E)$$

$$B(1.2) = \frac{1}{1.2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1.2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Reszta jak w Gaussie

7 Całki

7.1 Gauss/Gauss-Legendre

7.1.1 Tabelka z wartościami

| n | w_i | x_i |
|---|----------------------------|-----------------------------------|
| 1 | $w_1 = 2$ | $x_1 = 0$ |
| 2 | $w_1 = w_2 = 1$ | $x_2 = -x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ |
| 3 | $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$ | $x_3 = -x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ |
| | $w_2 = \frac{8}{9}$ | $x_2 = 0$ |
| 4 | $w_1 = w_4 \approx 0.3479$ | $x_4 = -x_1 \approx 0.8611$ |
| | $w_2 = w_3 \approx 0.6521$ | $x_3 = -x_2 \approx 0.3400$ |
| 5 | $w_1 = w_5 \approx 0.2369$ | $x_5 = -x_1 \approx 0.9062$ |
| | $w_2 = w_4 \approx 0.4786$ | $x_4 = -x_2 \approx 0.5385$ |
| | $w_3 = \frac{128}{225}$ | $x_3 = 0$ |

7.1.2 $\int_0^\pi \sin(x)dx$

1. Zmiana przedziału na [-1, 1]

$$s = \int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{\pi-0}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{\pi-0}{2}u + \frac{\pi+0}{2})du$$

2. Użycie dwu-punktowego całkowania

$$s = \sum_{i=1}^2 w_i f(x_i) = \frac{\pi}{2} (1 * \sin[\frac{\pi}{2}(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{\pi}{2}] + 1 * \sin[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{2}]) \approx \frac{\pi}{2} (0.6162 + 0.6162) \approx 1.9358$$

3. Użycie trzy-punktowego całkowania

$$s = \sum_{i=1}^3 w_i f(x_i) = \frac{\pi}{2} (\frac{5}{9} \sin[\frac{\pi}{2}(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{\pi}{2}] + \frac{8}{9} \sin[\frac{\pi}{2} * 0 + \frac{\pi}{2}] + \frac{5}{9} \sin[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{\pi}{2}]) \approx \frac{\pi}{2} (\frac{5}{9} * 0.3467 + \frac{8}{9} * 1 + \frac{5}{9} * 0.3467) \approx 2.0014$$

4. Błędy

$$\text{Wartość dokładna: } \int_0^\pi \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$\text{Błąd dla dwu-punktowego całkowania - } |\epsilon_t| = \left| \frac{2-1.9358}{2} \right| * 100\% = 3.21\%$$

$$\text{Błąd dla trzy-punktowego całkowania - } |\epsilon_t| = \left| \frac{2-2.0014}{2} \right| * 100\% = 0.07\%$$

7.1.3 $\int_0^3 x^2dx$

1. Zmiana przedziału na [-1, 1]

$$s = \int_0^3 x^2dx = \frac{3-0}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{3-0}{2}u + \frac{3+0}{2})du$$

2. Użycie dwu-punktowego całkowania

$$s = \sum_{i=1}^2 w_i f(x_i) = \frac{3-0}{2} (1 * [\frac{3-0}{2}(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{3+0}{2}]^2 + 1 * [\frac{3-0}{2}(\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{3+0}{2}]^2) = \frac{3}{2} (3 + \frac{9}{2}\cancel{\sqrt{\frac{1}{3}}} + 3 - \frac{9}{2}\cancel{\sqrt{\frac{1}{3}}}) = 9$$

3. Błędy

$$\text{Wartość dokładna: } \int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9$$

$$\text{Błąd - } |\epsilon_t| = \left| \frac{9-9}{9} \right| * 100\% = 0\%$$

Jako że aproksymujemy wielomian drugiego stopnia (x^2) za pomocą wielomianu drugiego stopnia (Legendre'a), to błąd jest równy 0%, ponieważ za pomocą wielomianu Legendre'a można idealnie pokryć x^2 .

7.2 Simpson/Parabol

7.2.1 Dla parzystej liczby przedziałów

Dla 2n przedziałów bierzemy 2n+1 punktów tak, żeby pierwszy i ostatni były na początku i końcu przedziału, a pozostałe były równo od siebie oddalone. Następnie, wyliczamy wartości funkcji w punktach. Wartości funkcji mnożymy przez 2 jeżeli są nieparzyste, z wyjątkiem początku i końca przedziału, które mnożymy przez 1, oraz przez 4 jeżeli są parzyste. Na koniec mnożymy sumę wyników funkcji przez przedział oraz dzielimy przez sumę "mnożników", przez które pomnożyliśmy wyniki funkcji.

Błąd: $E \approx -\frac{N}{180}(\frac{b-a}{N})^5 * avg\{\frac{d^4}{dx^4}f(x)\}$, gdzie N to liczba przedziałów.

Dla funkcji $\int_0^\pi \sin(x)dx$

Wartość idealna: $-\cos(x)|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2$

Dla 2 przedziałów

Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

Wartości funkcji: $f(p) \in \{\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\pi) = 0\}$

Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 4 * 1, 1 * 0\}$

Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi-0}{1+4+1} = \frac{\pi}{6}$

Wartość całki: $\frac{\pi}{6}4 = \frac{2\pi}{3} = 2.0944$

Dla 4 przedziałów

Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$

Wartości funkcji: $f(p) \in \{\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(\pi) = 0\}$

Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 4 * \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 * 1, 4 * \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 * 0\}$

Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi-0}{1+4+2+4+1} = \frac{\pi}{12}$

Wartość całki: $\frac{\pi}{12}(2 * \sqrt{2} + 2 + 2 * \sqrt{2}) = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} + 1) = 2.0046$

Błąd względny: $E \approx -\frac{4}{180}(\frac{\pi-0}{4})^5 * \frac{\int_0^\pi \sin(x)dx}{\pi-0} = -\frac{\pi^4}{23040} \approx -0.0042$

Błąd bezwzględny: $\frac{E}{\int_0^\pi \sin(x)dx} * 100\% = \frac{E}{2} * 100\% \approx 0.2114\%$

Dla 6 przedziałów

Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$

Wartości funkcji: $f(p) \in \{\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \sin(\pi) = 0\}$

Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 4 * \frac{1}{2}, 2 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 4 * 1, 2 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 4 * \frac{1}{2}, 1 * 0\}$

Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi-0}{1+4+2+4+2+4+1} = \frac{\pi}{18}$

Wartość całki: $\frac{\pi}{18}(2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9}(4 + \sqrt{3}) = 2.0009$

7.2.2 Dla nieparzystej liczby przedziałów

Dla funkcji $\int_0^\pi \sin(x)dx$

Wartość idealna: $-\cos(x)|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2$

Dla 3 przedziałów

Postępujemy tak samo, jak dla powyższych przykładów, ale używamy wag 1, 3, 3 i 1.

Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$

Wartości funkcji: $f(p) \in \{\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\pi) = 0\}$

Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 3 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 3 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 * 0\}$

Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi}{1+3+3+1} = \frac{\pi}{8}$

Wartość całki: $\frac{\pi}{8}(3\sqrt{3}) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{8} = 2.0405$

Dla 5 i więcej przedziałów

Dzielimy przedziały na 3 i 2/resztę. Używamy algorytmu dla 3 przedziałów dla początku i 2/resztę dla końca.

Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\}$

Wartości funkcji: $f(p) \in \{\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{5}) \approx 0.5878, \sin(\frac{2\pi}{5}) \approx 0.9511, \sin(\frac{3\pi}{5}) \approx 0.9511,$

$\sin(\frac{4\pi}{5}) \approx 0.5878, \sin(\pi) = 0\}$

Wartości do pomnożenia sumy funkcji:

Dla 3: $\frac{\frac{3\pi}{5}-0}{1+3+3+1} = \frac{3\pi}{40}$

Dla 2: $\frac{\pi-\frac{3\pi}{5}}{1+4+1} = \frac{\pi}{15}$

Rozbicie na 3 i 2 przedziały: $\frac{3\pi}{40}(1 * 0 + 3 * 0.5878 + 3 * 0.9511 + 1 * 0.9511) + \frac{\pi}{15}(1 * 0.9511 + 4 * 0.5878 + 1 * 0) = 2.0034$

7.3 Metoda trapezów

Dla całki w przedziale [a,b] mamy wzór $h(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-2h) + f(b-h) + \frac{f(b)}{2})$

8 Równania różniczkowe

8.1 Metoda ekstrapolacyjna Eulera

Dane w zadaniach są zadawane w formie: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, h = h$.

Otwarta

Dla funkcji f(x, y) i skoku h wartość $y_{i+1} = y_i + h * f(x_0 + i * h, y_i)$

Wzory do wykorzystania w Desmosie:

$g(i) = \{i = 0 : y_0, g(i-1) + h * f(x_0 + (i-1)h, g(i-1))\}$

$f(x, y) = xy$

$y_0 = 1$

$h = 0.5$

$$x_0 = 0$$

$$g(3)$$

Wszystko poza pierwszą linijką można modyfikować.

Zamknięta

Dla funkcji $f(x, y)$ i skoku h wartość $y_{i+1} = y_0 + h * f(x_0 + (i + 1) * h, y_{i+1})$

8.1.1 Dla $f(x, y) = xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.5$ wyznacz 3 pierwsze iteracje obydwoima metodami.

Otwarta/Ekstrapolacyjna

$$y_1 = y_0 + h * f(x_0 + 0 * h, y_0) = 1 + 0.5 * 0 * 1 = 1$$

$$y_2 = y_1 + h * f(x_0 + 1 * h, y_1) = 1 + 0.5 * 0.5 * 1 = 1.25$$

$$y_3 = y_2 + h * f(x_0 + 2 * h, y_2) = 1.25 + 0.5 * 1 * 1.25 = 1.875$$

Zamknięta

$$y_1 = y_0 + h * f(x_0 + 1 * h, y_1) = 1 + 0.5 * 0.5 * y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}$$

$$y_2 = y_1 + h * f(x_0 + 2 * h, y_2) = \frac{4}{3} + 0.5 * 1 * y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{8}{3}$$

$$y_3 = y_2 + h * f(x_0 + 3 * h, y_3) = \frac{8}{3} + 0.5 * 1.5 * y_3 \Rightarrow y_3 = \frac{32}{3}$$

9 Ocena zbierzości algortmu iteracyjnego

9.1 $x_{i+1} = \frac{1}{7}(6x_i + \frac{a}{x_i^6})$, $x = \sqrt[7]{a}$

Zastępujemy x_i za pomocą x_∞ , czyli zakładamy że w nieskończonej iteracji otrzymamy poprawne wyniki.

$$\frac{1}{7}(6x_\infty + \frac{a}{x_\infty^6})$$

Warunkiem zbieżności jest:

$$\begin{cases} p = 1, |c| < 1 \\ p = 2, 3, \dots, |c| < \infty \end{cases}$$

gdzie: $c = \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_\infty)$

Bierzemy pochodną $p=1$ z funkcji: $f^{(1)} = \frac{6}{7}(1 - \frac{a}{x_\infty^7}) = \frac{6}{7}(1 - \frac{a}{a}) = 0$

Bierzemy pochodną $p=2$ z funkcji: $f^{(2)} = \frac{6}{7}(42\frac{a}{x_\infty^8}) = 6\frac{a}{x_\infty^8} = \frac{6}{\sqrt[7]{a}} \neq 0$

Jako że $p=2$, to funkcja jest zbierzna kwadratowo.

10 Poprawny numerycznie algorytm obliczania wartości wyrażenia $y = \frac{1}{x}(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}}); ||x|| \ll 1$

$$y = \frac{1}{x}(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}})$$

$$y = \frac{1}{x}(\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}}) = \frac{1}{x} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2+x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2+x}} \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{x} \frac{2+x-2}{2+x+\sqrt{2}\sqrt{2+x}} = \frac{1}{x} \frac{x}{2+x+\sqrt{2}\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2+x+\sqrt{4+2x}}$$

Błędy:

1. $2 + x$
2. $2x$
3. $\sqrt{4 + 2x}$
4. $2 + x + \sqrt{4 + 2x}$
5. $\frac{1}{2+x+\sqrt{4+2x}}$

Błąd graniczny $\tilde{y} = (2 + x)(1 + \eta_z)^{-1}$

11 Oszacuj błąd względny (błąd graniczny) wyznaczania wartości wyrażenia

Błąd danych: $\delta(\tilde{y}) = \frac{x}{f(x)} * f'(x) * \epsilon_x$

Błąd zaokrągleń: $f(x) \prod_{i=0}^n (1 - \eta_i)$, gdzie η_i to kolejne błędy przy każdym działaniu, które wymaga użycia x w $f(x)$

11.1 $y = x^2 \sin(x)$

$$y' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Błąd danych: $\delta(\tilde{y}) = \frac{x}{x^2 \sin(x)} * x(2 \sin(x) + x \cos(x)) * \epsilon_x = (2 - x * \text{ctg}(x)) \epsilon_x$

Błędy zaokrągleń:

- $x^2 \Rightarrow x^2(1 - \eta_1)$
- $\sin(x) \Rightarrow \sin(x)(1 - \eta_2)$
- $x^2 \sin(x) \Rightarrow x^2 \sin(x)(1 - \eta_3)$

Błąd zaokrągleń: $\tilde{y} = x^2 \sin(x)(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(1 - \eta_3)$

11.2 $y = x^3 \sin(x)$

$y' = x^2(3\sin(x) + x * \cos(x))$

Błąd danych: $\delta(\tilde{y}) = \frac{x}{x^3 \sin(x)} * x^2(3\sin(x) + x * \cos(x)) * \epsilon_x = (3 + x * \operatorname{ctg}(x))\epsilon_x$

Błędy zaokrągleń:

- $x^3 \Rightarrow x^3(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$
- $\sin(x) \Rightarrow \sin(x)(1 - \eta_3)$
- $x^3 \sin(x) \Rightarrow x^2 \sin(x)(1 - \eta_4)$

Błąd zaokrągleń: $\tilde{y} = x^3 \sin(x)(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(1 - \eta_3)(1 - \eta_4)$

12 Uwarunkowanie zadania

Przekształcamy równanie, żeby po jednej stronie był x:

$\ln(ax) = -b \Rightarrow e^{\ln(ax)} = e^{-b} \Rightarrow ax = e^{-b} \Rightarrow \frac{e^{-b}}{a}$

Wskaźnik uwarunkowania dla równań to stosunek błędu względnego danych do błędu względnego rozwiązania.

13 Wartość x dla której błąd maksymalny wynosi

Dla $y = 100 + 10^6 x$, $\text{eps} = 10^{-16}$

$\tilde{y} = [100 + 10^6(1 + \eta_1)x(1 + \eta_2)](+\eta_3) = [100 + 10^6x(1 + \eta_1 + \eta_2)](1 + \eta_3) = [100 + 10^6x + 10^6x(\eta_1 + \eta_2)](1 + \eta_3) = 100 + 10^6x + 100\eta_3 + 10^6x\eta_3 + 10^6x(\eta_1 + \eta_2)(1 + \eta_3)$

$\tilde{y} - y = 100\eta_3 + 10^6x\eta_3 + 10^6x(\eta_1 + \eta_2)$

$\Delta y = 100\text{eps} + 10^6x\text{eps} + 10^6x(2\text{eps})$

$10^{-6} = 10^2 * 10^{-16} + 10^6 10^{-16} x + 10^6 10^{-16} 2x$

$x = \frac{10^4 - 10^{-4}}{3}$