

Spis treści

1

Aproksymacja

1

1.1

Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji zadanej dyskretnie.

1

1.1.1

$f(x) = ax + bx^2$

1

1.1.2

$f(x) = a + bx^3$

2

1.1.3

$f(x) = ax + b$

2

1.2

Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji w przedziale

2

1.3

Jednostajna

2

1.3.1

Metoda szeregów potęgowych

3

2

Lagrange

3

2.1

Wyznacz współczynniki wielomianu

3

2.2

Wyznacz pochodną w punkcie

3

2.2.1

Używając wielomianu

3

2.2.2

Używając ilorazu różnicowego centralnego

3

3

Newton

3

4

Metody rozwiązywania układów

4

4.1

Metoda Newtona (Nieliniowe)

4

4.1.1

$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$

4

4.1.2

$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

4

4.1.3

$f(x) = e^x - \frac{x}{x}$

4

4.2

Jacobiego (liniowe)

4

4.2.1

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

4

4.3

Dekompozycja LU (liniowe)

5

4.3.1

Metoda Crouta-Doolittle’a

5

4.3.2

Metoda Doolittle’a

5

4.4

Gaussa-Seidla (Liniowe), chyba dotąd nie było tego na żadnym egzaminie

6

4.4.1

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

6

5

SOR (Metoda Sukcesywnej Relaksacji)(Liniowe)

7

1 Aproksymacja

1.1 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji zadanej dyskretnie.

Dla danej funkcji:

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	0
2	1

Znajdź jej aproksymację metodą średniokwadratową dla postaci:

1.1.1  $f(x) = ax + bx^2$

$$f(a,b) = ((y(-1) - 0)^2 + (y(0) - (-1))^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2) * \frac{1}{4}$$
$$f(a,b) = ((-a + b)^2 + (1)^2 + (a + b)^2 + (2a + 4b - 1)^2) * \frac{1}{4}$$
$$f(a,b) = (a^2 + b^2 - 2ab + 1 + a^2 + b^2 - 2ab + 4a^2 + 16ab - 4a + 16b^2 - 8b + 1) * \frac{1}{4}$$
$$f(a,b) = (\frac{3}{2}a^2 + 4ab - a + \frac{9}{2}b^2 - 2b + \frac{1}{2})$$
$$\frac{d}{da}f(a,b) = 3a + 4b - 1$$
$$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 9b - 2$$

$$\begin{cases} 12a + 16b - 4 = 0 \\ 16a + 36b - 8 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = \frac{1}{11} \\ b = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Uwaga: Teoretycznie trzeba robić kolejne kroki, ale łatwo pokazać, że większe b stworzy dużo mniej dokładne wyniki, a te wartości to jedyne rozwiązania. Dodatkowo nie trzeba dzielić całości przez 4, bo i tak w pochodnych to nie ma znaczenia, bo po 2giej stronie jest 0 i można sobie pomnożyć.

**1.1.2**  $f(x) = a + bx^3$

$$\begin{aligned} f(a,b) &= (y(-1) - 0)^2 + (y(0) - (-1))^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2 \\ f(a,b) &= (a - b)^2 + (a - (-1))^2 + (a + b)^2 + (a + 8b - 1)^2 \\ f(a,b) &= 4a^2 + 16ab + 66b^2 - 16b + 2 \quad \frac{d}{da}f(a,b) = 8a + 16b \\ \frac{d}{db}f(a,b) &= 16a + 132b - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 8a + 16b = 0 \mid * \frac{1}{2} \\ 16a + 132b - 16 = 0 \mid * \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 4a + 33b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{8}{25} \\ b = \frac{4}{25} \end{cases}$$

**1.1.3**  $f(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} f(a,b) &= (-a + b - 0)^2 + (b - (-1))^2 + (a + b - 0)^2 + (2a + b - 1)^2 \\ f(a,b) &= 6a^2 + 4ab - 4a + 4b^2 + 2 \\ \frac{d}{da}f(a,b) &= 12a + 4b - 4 \\ \frac{d}{db}f(a,b) &= 4a + 8b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 12a + 4b - 4 = 0 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

## 1.2 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji w przedziale

Dla funkcji  $f(x) = x^4, x \in ]0; 1[$  Znajdź aproksymację średniokwadratową funkcji  $f(x) = ax^2$ . Znajdź, dla jakiej wartości x błąd aproksymacji będzie największy.

$$\begin{aligned} f(a) &= \left( \int_0^1 (ax^2 - x^4) dx \right)^2 \\ f(a) &= \frac{a^2}{9} - \frac{2a}{15} + \frac{1}{25} \\ \frac{d}{da}f(a) &= \frac{2a}{9} - \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{a}{3} - \frac{1}{5} = 0 \right.$$

$$\left. \left\{ a = 0.6 \right. \right.$$

Musimy znaleźć  $\max |(0.6x^2 - x^4)| \in \{0; 1\}$ , ale że nie chce mi się bawić w pochodną dla wartości bezwzględnej, znajdę minima i maksima funkcji i wezmę wartość bezwzględną z nich.  $f(x) = 0.6x^2 \quad g(x) = 0.6x^2 - x^4 \quad \frac{d}{dx}g(x) = 1.2x - 4x^3$

$$\left\{ 1.2x - 4x^3 = 0 \right.$$

$$\left. \left\{ x \in \{-\sqrt{0.3}, 0, \sqrt{0.3}\} \right. \right.$$

$-\sqrt{0.3} < 0$ , więc jest poza przedziałem. Należy również dodać 0 i 1, jako początek i koniec przedziału.

$$\begin{cases} |f(0)| = 0 \\ |f(\sqrt{0.3})| = 0.09 \\ |f(1)| = 0.4 \end{cases}$$

Dla x=1 aproksymacja jest obarczona największym błędem.

## 1.3 Jednostajna

**UWAGA: Idioty programista nie zrobił, nie używać** W aproksymacji jednostajnej należy stworzyć jak najmniejszy maksymalny błąd.

1.3.1 Metoda szeregów potęgowych

Nie rozumiem do końca, co chciał, bo szereg potęgowy to dosłownie wielomian.

$\sqrt{x} = ax^2 + bx + c$   
 $f(x) = \sqrt{x} - (ax^2 + bx + c), x \in ]0; 1[$   
 $\frac{d}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2ax - b$

$$\left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2ax - b = 0 \right.$$

2 Lagrange

2.1 Wyznacz współczynniki wielomianu

Dla następujących danych:

x	f(x)
-4	2
-2	-3
3	2
6	-3

Wyznacz współczynniki wielomianu Lagrange’a

$l0(x) = \frac{x-(-2)}{-4-(-2)} * \frac{x-3}{-4-3} * \frac{x-6}{-4-6} = -\frac{1}{140}x^3 + \frac{1}{20}x^2 - \frac{9}{35}$   
 $l1(x) = \frac{x-(-4)}{-2-(-4)} * \frac{x-3}{-2-3} * \frac{x-6}{-2-6} = \frac{1}{80}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{9}{10}$   
 $l2(x) = \frac{x-(-4)}{3-(-4)} * \frac{x-(-2)}{3-(-2)} * \frac{x-6}{3-6} = -\frac{1}{105}x^3 + \frac{4}{15}x + \frac{16}{35}$   
 $l3(x) = \frac{x-(-4)}{6-(-4)} * \frac{x-(-2)}{6-(-2)} * \frac{x-3}{6-3} = \frac{1}{240}x^3 + \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{24}x - \frac{1}{10}$   
 $L(x) = 2 * l0(x) + -3 * l1(x) + 2 * l2(x) + -3 * l3(x)$   
 $L(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$

Uwaga: Można sprawdzić, czy wielomian jest poprawnie obliczony wstawiając do niego wartości z tabelki. Powinny wychodzić identyczne wartości f(x).

2.2 Wyznacz pochodną w punkcie

Dla danych:

x	f(x)
-1	-1
1	0
3	-1
4	1

Wyznacz pochodną dla x=1 i porównaj wynik w tym punkcie na podstawie ilorazu różnicowego centralnego.

2.2.1 Używając wielomianu

$l0(X) = \frac{x-1}{-1-1} * \frac{x-3}{-1-3} * \frac{x-4}{-1-4} = \frac{1}{40}(-x^3 + 8x^2 - 19x + 12)$   
 $l1(X) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} * \frac{x-3}{1-3} * \frac{x-4}{1-4} = \frac{1}{12}(x^3 - 6x^2 + 5x + 12)$   
 $l2(X) = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} * \frac{x-1}{3-1} * \frac{x-4}{3-4} = \frac{1}{8}(-x^3 + 4x^2 + x - 4)$   
 $l3(X) = \frac{x-(-1)}{4-(-1)} * \frac{x-1}{4-1} * \frac{x-3}{4-3} = \frac{1}{15}(x^3 - 3x^2 - x + 3)$   
 $L(x) = -1 * l0(x) + 0 * l1(x) + -1 * l2(x) + 1 * l3(x)$   
 $L(x) = \frac{13x^3}{60} - \frac{9x^2}{10} + \frac{17x}{60} + \frac{2}{5}$   
 $L'(x) = \frac{13x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{17}{60}$   
 $L'(1) = \frac{13}{20} - \frac{9}{5} + \frac{17}{60} = -\frac{13}{15}$

2.2.2 Używając ilorazu różnicowego centralnego

Uwaga: Sekcja zrobiona przy pomocy AI, ale pokrywa się mniej-więcej z książką  
Znajdujemy takie punkty, żeby  $|x - x_1| = |x - x_2|$ , dla tego przypadku  $x_1 = -1$  i  $x_2 = 3$ . Odległość od x  $h = 2$   
 $f'(1) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(3)-f(-1)}{2*2} = \frac{-1-(-1)}{4} = 0$

Co jest różne w porównaniu do wartości wyliczonej z wielomianu. Jest to jednak do przewidzenia, ponieważ jeżeli wyświetlimy wykres wielomianu, to nie jest to maksimum lokalne, ale wg funkcji dyskretnej jest.

3 Newton

Dla danej funkcji:

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	0
2	1

$$n_0 = 0$$

$$n_1 = (\cancel{\frac{0}{1-0}} + \frac{-1}{0-(-1)})(x - (-1))$$

$$n_2 = (\cancel{\frac{0}{(-1-0)(-1-1)}} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)} + \cancel{\frac{0}{(1-(-1))(1-0)}})(x - (-1))(x - 0)$$

$$n_3 = (\cancel{\frac{0}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} + \cancel{\frac{0}{(1-(-1))(1-0)(1-2)}} + \frac{1}{(2-(-1))(2-0)(2-1)})(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$$

$$P(x) = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3)$$

Ogólnie Newton to suma wielomianów k-tego stopnia, gdzie  $n_k$  to suma  $\frac{f(x_k)}{x_k - x_n}$  pomnożona przez  $(x - x_n)$ , gdzie  $n \in \{1, 2, \dots, k\}$  (zerowy wielomian to  $f(x_0)$ ).

## 4 Metody rozwiązywania układów

### 4.1 Metoda Newtona (Nieliniowe)

$$\text{Wzór: } N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Uwaga: chyba można znaleźć punkt  $g(x) = 0$  z  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ , wtedy tam jest albo  $f(x) = 0$  albo  $f(x) = \pm\infty$ , przynajmniej tak działa dla poniższych przykładów, ale wtedy to nie jest metoda Newtona chyba.

$$\mathbf{4.1.1} \quad f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = N(x_0) = 1.74247042592$$

$$x_2 = N(x_1) = 1.76305587394$$

$$x_3 = N(x_2) = 1.76322282359$$

$$x_4 = N(x_3) = 1.76322283435$$

Nie chce mi się dalej robić, ale punkt zerowy jest w około  $x = 1.7632228$ , co daje  $f(1.7632228) = -3 * 10^{-8}$

$$\mathbf{4.1.2} \quad f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = N(x_0) = -1.16395341374$$

$$x_2 = N(x_1) = -2.44811693124$$

$$x_3 = N(x_2) = -6.45348240853$$

$$x_4 = N(x_3) = -13.2898033355$$

Dalej nie robię, bo  $x_n - x_{n-1}$  się zwiększa a nie zmniejsza, czyli funkcja nie przecina punktu 0.

$$\mathbf{4.1.3} \quad f(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = N(x_0) = 0.53788284274$$

$$x_2 = N(x_1) = 0.566277007666$$

$$x_3 = N(x_2) = 0.567142580362$$

$$x_4 = N(x_3) = 0.567143290409$$

Punkt zerowy znajduje się mniej więcej w  $x=0.56714$

### 4.2 Jacobiego (liniowe)

$$\text{Wzór: } x_{i+1} = (1 - D^{-1}A)x_i + D^{-1}b$$

Uwaga: Ta metoda działa tylko jeśli w każdym wierszu i kolumnie suma modułów elementów niediagonalnych jest mniejsza niż moduł elementu diagonalnego.

#### 4.2.1

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Dla tych danych nie możemy zastosować metody Jacobiego, ponieważ  $|4| > |-2|$ , ale  $|1| \nlessgtr |-8|$ . Teoretycznie możemy dodać do 2giego równania 2\*pierwsze, wtedy warunek będzie spełniony:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ 0x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$$

Z czego wynika że:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Ale udajemy że jesteśmy komputerami i tego nie wiemy.

Zapisujemy równanie do równania z macierzami:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Jako wektor startowy przyjmujemy:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz  $D^{-1}$  (Odwrotności diagonalnych macierzy powyżej):

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Wyliczymy od razu  $D^{-1}b$  oraz  $1 - D^{-1}A$ , ponieważ pozostają niezmiennie pomiędzy iteracjami.

$$D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$1 - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kuaro fact: Pamiętajcie kochani, że jak w Wolframie zrobicie  $1 - A$ , to to nie jest  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - A$  tylko  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - A$  (Cries in a lost hour).

Wzór iteracyjny dla tych równań:  $x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * x_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Skoro iteracje się nie zmieniają, mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

### 4.3 Dekompozycja LU (liniowe)

Ogólny wzór:  $Ax = b \Rightarrow LRx = b$ , gdzie  $LR = A$ , L i R to macierze odpowiednio dolno i górno trójkątne. Następnie rozwiązujemy 2 układy równań:  $Ly = b$  oraz  $Rx = y$ . Rozwiązać:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

#### 4.3.1 Metoda Crouta-Doolittle'a

Rzpisana metoda Doolittle'a, użyć tamtego, bazgroły zakomentowane w Latexie.

#### 4.3.2 Metoda Doolittle'a

##### Stworzenie macierzy

Uwaga: Jak podczas tworzenia macierzy pojawi się 0 na diagonalnej, to trzeba zmieniać rzędy i kolumny, żeby usunąć 0 z diagonalnej.

$$A = LR = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym algorytmie modyfikujemy macierz A, w taki sposób że wartości L są na i pod diagonalną, a wartości R są nad diagonalną.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dzielimy wszystkie elementy w pierwszym rzędzie na prawo od diagonalnej przez diagonalną.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iterujemy po wszystkich wartościach, które są pod pierwszym rzędem i na prawo od pierwszej kolumny zgodnie ze wzorem  $a_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}$ .

$$a_{22} = a_{22} - a_{21}a_{12} = -1 - (1)(1) = -2$$

$$a_{23} = a_{23} - a_{21}a_{13} = 1 - (1)(1) = 0$$

$$a_{32} = a_{32} - a_{31}a_{12} = 1 - (1)(-1) = 2$$

$$a_{33} = a_{33} - a_{31}a_{13} = -1 - (1)(-1) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Znowu dzielimy elementy na prawo przez diagonalną, a że  $a_{32} = 0$ , to nic nie robimy.

Znowu dla elementów poniżej 2giego rzędu i na prawo od 2giej kolumny wykonujemy działanie  $a_{ij} = a_{ij} - a_{i2}a_{2j}$ ,  $a_{32} = 0$ , więc znów nic się nie zmienia.

Rozbijamy macierz na L i R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rozwiązanie równań**

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

#### 4.4 Gaussa-Seidla (Liniowe), chyba dotąd nie było tego na żadnym egzaminie

Wzór:

$$xi + 1 = -(L + D)^{-1}Uxk + (L + D)^{-1}b$$

Pomocne są macierze pomocnicze:  $B = -(L + D)^{-1}U$ ,  $C = (L + D)^{-1}b$

Uwaga 1: Macierz musi być dodatnio określona.

Uwaga 2: ta metoda działa wtedy, kiedy wyznacznik macierzy  $B = (L + D)^{-1}U$  ma jedno rozwiązanie (metoda jest zbierzna).

ACC fact: jeżeli macierz jest dominująca diagonalnie, dowolny punkt startowy da nam odpowiedź. Jeżeli nie, czasami punkt startowy może dać wynik, czasami nie.

O wiele łatwiej jest wykorzystywać wzór na poszczególne elementy:  $x^{k+1}_i = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$  ale ja nie lubię chodzić na łatwiznę

Uwaga - z uwagi na dzielenie, wartość diagonalna nie może być zerowa.

##### 4.4.1

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Wektor startowy standardowo damy } x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podzielmy macierze na części (L+D) i U:

ACC fact: to nie jest ten sam podział, co dekompozycja LU. Tutaj L to macierz dolnotrójkątna, D to macierz diagonalna, U to macierz górnortrójkątna.

$$(L + D) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy odwrotność macierzy (L+D), krokami:

1. wyznacznik:  $\det(L + D) = 326 + 120 + 000 - 020 - 023 - 016 = 36$

2. macierz dopełnień algebraicznych (wyszukajcie sposób):  $(L + D)^D = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3. transponujemy i dzielimy przez  $\det(L+D)$  (czyt. podziel każdy element przez  $\det(L+D)$ ) macierz dopełnień,

$$\text{aby otrzymać odwrotność: } (L + D)^{-1} = \frac{1}{\det(L+D)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy macierze pomocnicze B i C:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Uwaga - we wzorze na B jest MINUS  $(L + D)^{-1}$ .

Powyższe macierze podstawiamy z każdą iteracją do wzoru  $x^{k+1} = Bx^k + C$ :

$$x^1 = Bx^0 + C = C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$x^2 = Bx^1 + C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{21}{54} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix}$$

## 5 SOR (Metoda Sukcesywnej Relaksacji)(Liniowe)

**WORK IN PROGRESS** DLC dla metody Gaussa-Seidla, gdzie  $B(\omega) = \frac{1}{\omega}D(I - \omega D^{-1}E)$ ,  $\omega$  powinno być  $0 < \omega < 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$