Spis treści

1 Aproksymacja

1.1 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji zadanej dyskretnie.

Dla danej funkcji:

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	0
2	1

Znajdź jej aproksymacje metodą średniokwadratową dla postaci:

1.1.1 $f(x) = ax + bx^2$

$f(a,b) = ((y(-1) - 0)^2 + (y(0) - -1)^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2) * \frac{1}{4}$
$f(a,b) = ((-a+b)^2 + (1)^2 + (a+b)^2 + (2a+4b-1)^2) * \frac{1}{4}$
$f(a,b) = (a^2 + b^2 \cancel{-2ab} + 1 + a^2 + b^2 \cancel{+2ab} + 4a^2 + 16ab - 4a + 16b^2 - 8b + 1) * \frac{1}{4}$
$f(a,b) = (\frac{3}{2}a^2 + 4ab - a + \frac{9}{2}b^2 - 2b + \frac{1}{2})$
$\frac{d}{da}f(a,b) = 3a + 4b - 1$
$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 9b - 2$

$$\begin{cases} 12a + 16b - 4 = 0 \\ 16a + 36b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{11} \\ b = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Uwaga: Teoretycznie trzeba robić kolejne kroki, ale łatwo pokazać, że większe b stworzy dużo mniej dokładne wyniki, a te wartości to jedyne rozwiązania. Dodatkowo nie trzeba dzielić całości przez 4, bo i tak w pochodnych to nie ma znaczenia, bo po 2giej stronie jest 0 i można sobie pomnożyć.

1.1.2 $f(x) = a + bx^3$

$f(a,b) = (y(-1) - 0)^2 + (y(0) - -1)^2 + (y(1) - 0)^2 + (y(2) - 1)^2$
$f(a,b) = (a-b)^2 + (a - -1)^2 + (a+b)^2 + (a+8b-1)^2$
$f(a,b) = 4a^2 + 16ab + 66b^2 - 16b + 2$ $\frac{d}{da}f(a,b) = 8a + 16b$
$\frac{d}{db}f(a,b) = 16a + 132b - 16$

$$\begin{cases} 8a + 16b = 0| * \frac{1}{2} \\ 16a + 132b - 16 = 0| * \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 4a + 33b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{8}{25} \\ b = \frac{4}{25} \end{cases}$$

1.1.3 $f(x) = ax + b$

$f(a,b) = (-a + b - 0)^2 + (b - (-1))^2 + (a + b - 0)^2 + (2a + b - 1)^2$
$f(a,b) = 6a^2 + 4ab - 4a + 4b^2 + 2$
$\frac{d}{da}f(a,b) = 12a + 4b - 4$
$\frac{d}{db}f(a,b) = 4a + 8b$

$$\begin{cases} 12a + 4b - 4 = 0 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji w przedziale

Dla funkcji $f(x) = x^4, x \in < 0; 1 >$ Znajdź aproksymacją średniokwadratowa funkcji $f(x) = ax^2$. Znajdź, dla jakiej wartości x błąd aproksymacji będzie największy.
$f(a) = \int_0^1 (ax^2 - x^4)^2 dx$
$f(a) = \frac{a^2}{5} - \frac{2a}{7} + \frac{1}{9}$
$\frac{d}{da} f(a) = \frac{2a}{5} - \frac{2}{7}$

$$\begin{cases} \frac{2a}{5} - \frac{2}{7} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Musimy znaleźć $max|(\frac{5}{7}x^2 - x^4)| \in \{0; 1\}$, ale że nie chce mi się bawić w pochodną dla wartości bezwzględnej, znajdę minima i maksima funkcji i wezmę wartość bezwzględną z nich.
$f(x) = \frac{5}{7}x^2$
$g(x) = \frac{5}{7}x^2 - x^4$
$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{10}{7}x - 4x^3$

$$\begin{cases} \frac{20}{7}x - 4x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \{-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0, \sqrt{\frac{5}{7}}\} \end{cases}$$

$-\sqrt{\frac{5}{7}} < 0$, więc jest poza przedziałem. Należy równierz dodać 0 i 1, jako początek i koniec przedziału.

$$\begin{cases} |f(0)| = 0 \\ |f(\sqrt{\frac{5}{7}})| \approx 0.51 \\ |f(1)| \approx 0.43 \end{cases}$$

Dla $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$ aproksymacja jest obarczona największym błędem.

1.3 Jednostajna (Taylora)

UWAGA: Wynik teoretyczny inny niż praktyczne (gorszy), nie przepisywać bezmyślnie W aproksymacji jednostajnej należy stworzyć jak najmniejszy maksymalny błąd.

Szereg Taylora n-tego stopnia $= \sum_{i=0}^{n} (\frac{\frac{d^i}{dx^i} f(x_0)}{i!} (x - \delta)^i)$, gdzie x_0 to środek przedziału, δ to promień przedziału, czyli długość/2.

1.3.1 $y = \sqrt{x}, a \in < 0; 2 >$

$x_0 = 1,\ \delta = 1$

Dla 2giego stopnia szereg Taylora wygląda $f(x) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) + \frac{-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}}{2!}(x-1)^2 = -\frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}$.
Rozwiązanie teoretycznie poprawne, ale jak na desmosie patrzę na błąd funkcji, to dla mniejszego c błąd maksymalny jest mniejszy. Ekstrema lokalne są w 0 i 2. Najlepsza praktyczna wartość, jaką znalazłem była dla $c = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2ax - b = 0 \end{cases}$$

2 Lagrange

2.1 Wyznacz współczynniki wielomianu

Dla następujących danych:

x	f(x)
-4	2
-2	-3
3	2
6	-3

Wyznacz współczynniki wielomianu Langrange'a
$l0(x) = \frac{x-(-2)}{-4-(-2)} * \frac{x-3}{-4-3} * \frac{x-6}{-4-6} = -\frac{1}{140}x^3 + \frac{1}{20}x^2 - \frac{9}{35}$
$l1(x) = \frac{x-(-4)}{-2-(-4)} * \frac{x-3}{-2-3} * \frac{x-6}{-2-6} = \frac{1}{80}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{9}{10}$
$l2(x) = \frac{x-(-4)}{3-(-4)} * \frac{x-(-2)}{3-(-2)} * \frac{x-6}{3-6} = -\frac{1}{105}x^3 + \frac{4}{15}x + \frac{16}{35}$
$l3(x) = \frac{x-(-4)}{6-(-4)} * \frac{x-(-2)}{6-(-2)} * \frac{x-3}{6-3} = \frac{1}{240}x^3 + \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{24}x - \frac{1}{10}$
$L(x) = 2 * l0(x) + -3 * l1(x) + 2 * l2(x) + -3 * l3(x)$
$L(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$
Uwaga: Można sprawdzić, czy wielomian jest poprawnie obliczony wstawiając do niego wartości z tabelki. Powinny wychodzić identyczne wartości f(x).

2.2 Wyznacz pochodną w punkcie

Dla danych:

x	f(x)
-1	-1
1	0
3	-1
4	1

Wyznacz pochodną dla x=1 i porównaj wynik w tym punkcie na podstawie ilorazu różnicowego centralnego.

2.2.1 Używając wielomianu

$l0(X) = \frac{x-1}{-1-1} * \frac{x-3}{-1-3} * \frac{x-4}{-1-4} = \frac{1}{40}(-x^3 + 8x^2 - 19x + 12)$
$l1(X) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} * \frac{x-3}{1-3} * \frac{x-4}{1-4} = \frac{1}{12}(x^3 - 6x^2 + 5x + 12)$
$l2(X) = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} * \frac{x-1}{3-1} * \frac{x-4}{3-4} = \frac{1}{8}(-x^3 + 4x^2 + x - 4)$
$l3(X) = \frac{x-(-1)}{4-(-1)} * \frac{x-1}{4-1} * \frac{x-3}{4-3} = \frac{1}{15}(x^3 - 3x^2 - x + 3)$
$L(x) = -1 * l0(x) + \cancel{0 * l1(x)} + -1 * l2(x) + 1 * l3(x)$
$L(x) = \frac{13x^3}{60} - \frac{9x^2}{10} + \frac{17x}{60} + \frac{2}{5}$
$L'(x) = \frac{13x^2}{20} - \frac{9x}{5} + \frac{17}{60}$
$L'(1) = \frac{13}{20} - \frac{9}{5} + \frac{17}{60} = -\frac{13}{15}$

2.2.2 Używając ilorazu różnicowego centralnego

Uwaga: Sekcja zrobiona przy pomocy AI, ale pokrywa się mniej-więcej z książką
Znajdujemy takie punkty, żeby $|x - x_1| = |x - x_2|$, dla tego przypadku $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Odległość od x $h = 2$
$f'(1) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(3)-f(-1)}{2*2} = \frac{-1-(-1)}{4} = 0$
Co jest różne w porównaniu do wartości wyliczonej z wielomianu. Jest to jednak do przewidzenia, ponieważ jeżeli wyświetlimy wykres wielomianu, to nie jest to maksimum lokalne, ale wg funkcji dyskretnej jest.

3 Newton

Dla danej funkcji:

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	0
2	1

$n0 = 0$
$n1 = (\cancel{\frac{0}{-1-0}} + \frac{-1}{0-(-1)})(x - (-1))$
$n2 = (\cancel{\frac{0}{(-1-0)(-1-1)}} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)} + \cancel{\frac{0}{(1-(-1))(1-0)}})(x - (-1))(x - 0)$
$n3 = (\cancel{\frac{0}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}} + \frac{-1}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} + \cancel{\frac{0}{(1-(-1))(1-0)(1-2)}} + \frac{1}{(2-(-1))(2-0)(2-1)})(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$
$P(x) = n0 + n1 + n2 + n3$
$P(x) = \frac{1}{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3)$
Ogólnie Newton to suma wielomianów k-tego stopnia, gdzie nk to suma $\frac{f(x_k)}{x_k - x_n}$ pomnożona przez $(x - x_n)$, gdzie $n \in \{1, 2..., k\}$ (zerowy wielomian to $f(x_0)$).

4 Normy macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4.1 $||A||_1$

Maksymalna suma wartości bezwzględnych w każdej z kolumn.
$||A||_1 = max\{|1| + |4| + |7| = 12, |2| + |5| + |8| = 15, |3| + |6| + |9| = 18\}$
$||A||_1 = 18$

4.2 $||A||_2$

$\sqrt{max\{\lambda\}}$, gdzie λ to wartości dla których $det(\lambda I - A^T A) = 0$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{bmatrix}$$

$det(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}66 & 78 & 90\\ 78 & 93 & 108\\ 90 & 108 & 126\end{bmatrix}) = 0$
$\lambda^3 - 285\lambda^2 + 324\lambda = 0$
$\lambda \in \{0, \frac{285-3\sqrt{8881}}{2}, \frac{285+3\sqrt{8881}}{2}\}$
$max\{\lambda\} = \frac{285+3\sqrt{8881}}{2}$
$||A||_2 = \sqrt{\frac{285+3\sqrt{8881}}{2}} \approx 16.85$

4.3 $||A||_\infty$

Maksymalna suma wartości bezwzględnych w każdym z wierszy.
$||A||_\infty = max\{|1| + |2| + |3| = 6, |4| + |5| + |6| = 15, |7| + |8| + |9| = 24\}$
$||A||_\infty = 24$

4.4 $||A||_F$

Pierwiastek sumy kwadratów wszystkich elementów w macierzy.
$||A||_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2}$
$||A||_F = 16.88$
$\sqrt[7]{a}$
$x_{i+1} = \frac{6x_i + \frac{a}{x_i^6}}{7}$

5 Metody rozwiązywania układów

5.1 Prosta (Nieliniowe)

Wzór: $0 = f(x) => x_{n+1} = \phi(x_n), 0 < |\phi'(x_n)| < 1$.

5.1.1 $f(x) = ln(x) - \frac{1}{x}$

$ln(x) = \frac{1}{x}$
$e^{ln(x)} = e^{\frac{1}{x}}$
$x = e^{\frac{1}{x}}$
$x_0 = 2$
$x_1 = e^{\frac{1}{x_0}} = 1.6487212707$
$x_2 = e^{\frac{1}{x_1}} = 1.8340573792$
$x_3 = e^{\frac{1}{x_2}} = 1.72502097856$
$x_4 = e^{\frac{1}{x_3}} = 1.78550822551$
$x_5 = e^{\frac{1}{x_4}} = 1.75078564631$
$x_6 = e^{\frac{1}{x_5}} = 1.77034093906$
$x_7 = e^{\frac{1}{x_6}} = 1.75920666162$
$x_8 = e^{\frac{1}{x_7}} = 1.76550725831$
$x_9 = e^{\frac{1}{x_8}} = 1.76192938968$
$x_{10} = e^{\frac{1}{x_9}} = 1.76395709418$

5.1.2 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} = e^x$
$x = \frac{1}{e^x}$
$x_0 = 0$
$x_1 = \frac{1}{e^{x_0}} = 1$
$x_2 = \frac{1}{e^{x_1}} = 0.367879441171$
$x_3 = \frac{1}{e^{x_2}} = 0.692200627556$
$x_4 = \frac{1}{e^{x_3}} = 0.500473500563$
$x_5 = \frac{1}{e^{x_4}} = 0.606243535086$
$x_6 = \frac{1}{e^{x_5}} = 0.545395785975$
$x_7 = \frac{1}{e^{x_6}} = 0.579612335503$
$x_8 = \frac{1}{e^{x_7}} = 0.560115461361$
$x_9 = \frac{1}{e^{x_8}} = 0.57114311508$
$x_{10} = \frac{1}{e^{x_9}} = 0.564879347391$
$x_{11} = \frac{1}{e^{x_{10}}} = 0.568428725029$
$x_{12} = \frac{1}{e^{x_{11}}} = 0.566414733147$
$x_{13} = \frac{1}{e^{x_{12}}} = 0.567556637328$

5.2 Metoda Newtona (Nieliniowe)

Wzór: $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Uwaga: chyba można znaleźć punkt $g(x) = 0$ z $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, wtedy tam jest albo $f(x) = 0$ albo $f(x) = \pm\infty$, przynajmniej tak działa dla poniższych przykładów, ale wtedy to nie jest metoda Newtona chyba.

5.2.1 $f(x) = ln(x) - \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$
$x_0 = 2$
$x_1 = N(x_0) = 1.74247042592$
$x_2 = N(x_1) = 1.76305587394$
$x_3 = N(x_2) = 1.76322282359$
$x_4 = N(x_3) = 1.76322283435$
Nie chce mi się dalej robić, ale punkt zerowy jest w około $x = 1.7632228$, co daje $f(1.7632228) = -3 * 10^-8$

5.2.2 $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$
$x_0 = 1$
$x_1 = N(x_0) = -1.16395341374$
$x_2 = N(x_1) = -2.44811693124$
$x_3 = N(x_2) = -6.45348240853$
$x_4 = N(x_3) = -13.2898033355$

Dalej nie robię, bo $x_n - x_{n-1}$ się zwiększa a nie zmniejsza, czyli funkcja nie przecina punktu 0.

5.2.3 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$
$x_0 = 1$
$x_1 = N(x_0) = 0.53788284274$
$x_2 = N(x_1) = 0.566277007666$
$x_3 = N(x_2) = 0.567142580362$
$x_4 = N(x_3) = 0.567143290409$

Punkt zerowy znajduje się mniej więcej w x=0.56714

5.3 Jacobiego (liniowe)

Wzór: $x_{i+1} = (1 - D^{-1}A)x_i + D^{-1}b$
Uwaga: Ta metoda działa tylko jeśli w każdym wierszu i kolumnie suma modułów elementów niediagonalnych jest mniejsza niż moduł elementu diagonalnego.

5.3.1

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Dla tych danych nie możemy zastosować metody Jacobiego, ponieważ $|4| > |-2|$, ale $|1| \ngtr |-8|$. Teoretycznie możemy dodać do 2giego równania 2*pierwsze, wtedy warunek będzie spełniony:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ 0x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$$

Z czego wynika że:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Ale udajemy że jesteśmy komputerami i tego nie wiemy.
Zapisujemy równanie do równania z macierzami:
$Ax = b => \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
Jako wektor startowy przyjmiemy:
$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Tworzymy macierz D^{-1} (Odwrotności diagonalnych macierzy powyżej):
$D^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
Wyliczymy od razu $D^{-1}b$ oraz $1 - D^{-1}A$, ponieważ pozostają niezmienne pomiędzy iteracjami.
$D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
$1 - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kuaaro fact: Pamiętajcie kochani, że jak w Wolframie zrobicie $1 - A$, to to nie jest $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - A$ tylko $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - A$ (Cries in a lost hour).
Wzór iteracyjny dla tych równań: $x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * x_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$
$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$
$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Skoro iteracje się nie zmieniają, mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{12} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

5.4 Dekompozycja LU (liniowe)

Ogólny wzór: $Ax = b \Rightarrow LRx = b$, gdzie $LR = A$, L i R to macierze odpowiednio dolno i górno trujkątne. Następnie rozwiązujemy 2 układy równań: $Ly = b$ oraz $Rx = y$. Rozwiązać:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

5.4.1 Metoda Crouta-Doolittle'a

Rozpisana metoda Doolittle'a, użyć tamtego, bazgroły zakomentowane w Latexie.

5.4.2 Metoda Doolittle'a

Stworzenie macierzy

Uwaga: Jak podczas tworzenia macierzy pojawi się 0 na diagonalnej, to trzeba zmieniać rzędy i kolumny, żeby usunąć 0 z diagonalnej.

$$A = LR = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym algorytmie modyfikujemy macierz A, w taki sposób że wartości L są na i pod diagonalną, a wartości R są nad diagonalną.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dzielimy wszystkie elementy w pierwszym rzędzie na prawo od diagonalnej przez diagonalną.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iterujemy po wszystkich wartościach, które są pod pierwszym rzędem i na prawo od pierwszej kolumny zgodnie ze wzorem $a_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}$.

$a_{22} = a_{22} - a_{21}a_{12} = -1 - (1)(1) = -2$
$a_{23} = a_{23} - a_{21}a_{13} = 1 - (1)(1) = 0$
$a_{32} = a_{32} - a_{31}a_{12} = 1 - (1)(-1) = 2$
$a_{33} = a_{33} - a_{31}a_{13} = -1 - (1)(-1) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Znowu dzielimy elementy na prawo przez diagonalną, a że $a_{32} = 0$, to nic nie robimy.
Znowu dla elementów poniżej 2giego rzędu i na prawo od 2giej kolumny wykonujemy działanie $a_{ij} = a_{ij} - a_{i2}a_{2j}$, $a_{32} = 0$, więc znów nic się nie zmienia.
Rozbijamy macierz na L i R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równań

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

5.5 Gaussa-Seidla (Liniowe), chyba dotąd nie było tego na żadnym egzaminie

Wzór:

$$xi + 1 = -(L + D)^{-1}Uxk + (L + D)^{-1}b$$

Pomocne są macierze pomocnicze: $B = -(L + D)^{-1}U$, $C = (L + D)^{-1}b$
Uwaga 1: Macierz musi być dodatnio określona.
Uwaga 2: ta metoda działa wtedy, kiedy wyznacznik macierzy $B = (L + D)^{-1}U$ ma jedno rozwiązanie (metoda jest zbierzna).
ACC fact: jeżeli macierz jest dominująca diagonalnie, dowolny punkt startowy da nam odpowiedź. Jeżeli nie, czasami punkt startowy może dać wynik, czasami nie.
O wiele łatwiej jest wykorzystywać wzór na poszczególne elementy: $x^{k+1}i = \frac{b_k \sum j{=}1^{i-1} aijx_j^(k+1) - \sum j{=}i{+}1^n aijx_j^k}{aii}$ ale ja nie lubię chodzić na łatwiznę
Uwaga - z uwagi na dzielenie, wartość diagonalna nie może być zerowa.

5.5.1

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Wektor startowy standardowo damy $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Podzielmy macierze na części (L+D) i U:
ACC fact: to nie jest ten sam podział, co dekompozycja LU. Tutaj L to macierz dolnotrójkątna, D to macierz diagonalna, U to macierz górnotrójkątna.
$(L + D) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Wyznaczamy odwrotność macierzy (L+D), krokami:

1. wyznacznik: $det(L + D) = 326 + 120 + 000 - 020 - 023 - 016 = 36$
2. macierz dopełnień algebraicznych (wyszukajcie sposób): $(L + D)^D = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
3. transponujemy i dzielimy przez det(L+D) (czyt. podziel każdy element przez det(L+D)) macierz dopełnień, aby otrzymać odwrotność: $(L + D)^{-1} = \frac{1}{det(L+D)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Wyznaczamy macierze pomocnicze B i C:
$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$
Uwaga - we wzorze na B jest MINUS $(L + D)^{-1}$.
Powyższe macierze podstawiamy z każdą iteracją do wzoru $x^{k+1} = Bx^k + C$:
$x^1 = Bx^0 + C = C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$
$x^2 = Bx^1 + C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{21}{54} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix}$

6 SOR (Metoda Sukcesywnej Relaksacji)(Liniowe)

WORK IN PROGRESS
DLC dla metody Gaussa-Seidla, gdzie $B(\omega) = \frac{1}{\omega}D(I - \omega D^{-1}E)$, ω powinno być $0 < \omega < 2$.
Ogólny wzór dla $B(\omega)$, gdzie $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$, $B(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\omega} & 0 & 0 \\ -e_1 & \frac{d_2}{\omega} & 0 \\ -e_2 & -e_3 & \frac{d_3}{\omega} \end{bmatrix}$

6.1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Dla tego przykładu nie widać dużej różnicy od zwykłego Gaussa-Seidla, bo są same 1.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D^{-1} = D$, jakby D miało wartości inne niż 1 lub -1, to dla D wystarczy wziąć odwrotność każdego z elementów.

$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6.1.1 $\omega = 1.5$

$B(1.5) = \frac{1}{1.5} D(I - 1.5 D^{-1} E)$

$B(1.5) = \frac{1}{1.5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

6.1.2 $\omega = 1.2$

$B(1.2) = \frac{1}{1.2} D(I - 1.2 D^{-1} E)$

$B(1.2) = \frac{1}{1.2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1.2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

Reszta jak w Gaussie

7 Całki

7.1 Gauss/Gauss-Legendre

7.1.1 Tabelka z wartościami

n	w_i	x_i
1	$w_1 = 2$	$x_1 = 0$
2	$w_1 = w_2 = 1$	$x_2 = -x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$
3	$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$	$x_3 = -x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$
	$w_2 = \frac{8}{9}$	$x_2 = 0$
4	$w_1 = w_4 \approx 0.3479$	$x_4 = -x_1 \approx 0.8611$
	$w_2 = w_3 \approx 0.6521$	$x_3 = -x_2 \approx 0.3400$
5	$w_1 = w_5 \approx 0.2369$	$x_5 = -x_1 \approx 0.9062$
	$w_2 = w_4 \approx 0.4786$	$x_4 = -x_2 \approx 0.5385$
	$w_3 = \frac{128}{225}$	$x_3 = 0$

7.1.2 $\int_0^\pi sin(x)dx$

1. Zmiana przedziału na [-1, 1]

$s = \int_0^\pi sin(x)dx = \frac{\pi-0}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{\pi-0}{2}u + \frac{\pi+0}{2})du$

2. Użycie dwu-punktowego całkowania

$s = \sum_{i=1}^2 w_i f(x_i) = \frac{\pi}{2}(1 * sin[\frac{\pi}{2}(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{\pi}{2}] + 1 * sin[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{2}]) \approx \frac{\pi}{2}(0.6162 + 0.6162) \approx 1.9358$

3. Użycie trzy-punktowego całkowania

$s = \sum_{i=1}^3 w_i f(x_i) = \frac{\pi}{2}(\frac{5}{9} sin[\frac{\pi}{2}(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{\pi}{2}] + \frac{8}{9} sin[\frac{\pi}{2} * 0 + \frac{\pi}{2}] + \frac{5}{9} sin[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{\pi}{2}]) \approx \frac{\pi}{2}(\frac{5}{9} * 0.3467 + \frac{8}{9} * 1 + \frac{5}{9} * 0.3467) \approx 2.0014$

4. Błędy

Wartość dokładna: $\int_0^\pi sin(x)dx = -cos(x)|_0^\pi = -cos(\pi) + cos(0) = -(-1) + 1 = 2$

Błąd dla dwu-punktowego całkowania - $|\epsilon_t| = |\frac{2-1.9358}{2}| * 100\% = 3.21\%$

Błąd dla trzy-punktowego całkowania - $|\epsilon_t| = |\frac{2-2.0014}{2}| * 100\% = 0.07\%$

7.1.3 $\int_0^3 x^2 dx$

1. Zmiana przedziału na [-1, 1]

$s = \int_0^3 x^2 dx = \frac{3-0}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{3-0}{2}u + \frac{3+0}{2})du$

2. Użycie dwu-punktowego całkowania

$s = \sum_{i=1}^2 w_i f(x_i) = \frac{3-0}{2}(1 * [\frac{3-0}{2}(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{3+0}{2}]^2 + 1 * [\frac{3-0}{2}(\sqrt{\frac{1}{3}}) + \frac{3+0}{2}]^2) = \frac{3}{2}(3 + \cancel{\frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}} + 3 - \cancel{\frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}}) = 9$

3. Błędy

Wartość dokładna: $\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9$

Błąd - $|\epsilon_t| = |\frac{9-9}{9}| * 100\% = 0\%$

Jako że aproksymujemy wielomian drugiego stopnia (x^2) za pomocą wielomianu drugiego stopnia (Legendre'a), to błąd jest równy 0%, ponieważ za pomocą wielomianu Legendre'a można idealnie pokryć x^2.

7.2 Simpson/Parabol

7.2.1 Dla parzystej liczby przedziałów

Dla 2n przedziałów bierzemy 2n+1 punktów tak, żeby pierwszy i ostatni były na początku i końcu przedziału, a pozostałe były równo od siebie oddalone. Następnie, wyliczamy wartości funkcji w punktach. Wartości funkcji mnożymy przez 2 jeżeli są nieparzyste, z wyjątkiem początku i końca przedziału, które mnożymy przez 1, oraz przez 4 jeżeli są nieparzyste. Na koniec mnożymy sumę wyników funkcji przez przedział oraz dzielimy przez sumę "mnożników", przez które pomnożyliśmy wyniki funkcji.
Błąd: $E \approx -\frac{N}{180}(\frac{b-a}{N})^5 * avg\{\frac{d^4}{dx^4}f(x)\}$, gdzie N to liczba przedziałów.
Dla funkcji $\int_0^\pi sin(x)dx$
Wartość idealna: $-cos(x)|_0^\pi = -cos(\pi) - (-cos(0)) = 2$
Dla 2 przedziałów
Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$
Wartości funkcji: $f(p) \in \{sin(0) = 0, sin(\frac{\pi}{2}) = 1, sin(\pi) = 0\}$
Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 4 * 1, 1 * 0\}$
Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi-0}{1+4+1} = \frac{\pi}{6}$
Wartość całki: $\frac{\pi}{6}4 = \frac{2\pi}{3} = 2.0944$
Dla 4 przedziałów
Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$
Wartości funkcji: $f(p) \in \{sin(0) = 0, sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, sin(\frac{\pi}{2}) = 1, sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, sin(\pi) = 0\}$
Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 4 * \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 * 1, 4 * \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 * 0\}$
Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi-0}{1+4+2+4+1} = \frac{\pi}{12}$
Wartość całki: $\frac{\pi}{12}(2 * \sqrt{2} + 2 + 2 * \sqrt{2}) = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} + 1) = 2.0046$
Błąd względny: $E \approx -\frac{4}{180}(\frac{\pi-0}{4})^5 * \frac{\int_0^\pi (sin(x))dx}{\pi-0} = -\frac{\pi^4}{23040} \approx -0.0042$
Błąd bezwzględny: $\frac{E}{\int_0^\pi sin(x)dx} * 100\% = \frac{E}{2} * 100\% \approx 0.2114\%$
Dla 6 przedziałów
Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$
Wartości funkcji: $f(p) \in \{sin(0) = 0, sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, sin(\frac{\pi}{2}) = 1, sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}, sin(\pi) = 0\}$
Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 4 * \frac{1}{2}, 2 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 4 * 1, 2 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 4 * \frac{1}{2}, 1 * 0\}$
Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi-0}{1+4+2+4+2+4+1} = \frac{\pi}{18}$
Wartość całki: $\frac{\pi}{18}(2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9}(4 + \sqrt{3}) = 2.0009$

7.2.2 Dla nieparzystej liczby przedziałów

Dla funkcji $\int_0^\pi sin(x)dx$
Wartość idealna: $-cos(x)|_0^\pi = -cos(\pi) - (-cos(0)) = 2$
Dla 3 przedziałów
Postępujemy tak samo, jak dla powyższych przykładów, ale używamy wag 1, 3, 3 i 1.
Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$
Wartości funkcji: $f(p) \in \{sin(0) = 0, sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, sin(\pi) = 0\}$
Mnożenie wartości funkcji: $m * f(p) \in \{1 * 0, 3 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 3 * \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 * 0\}$
Wartość do pomnożenia sumy funkcji: $\frac{\pi}{1+3+3+1} = \frac{\pi}{8}$
Wartość całki: $\frac{\pi}{8}(3\sqrt{3}) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{8} = 2.0405$
Dla 5 i więcej przedziałów
Dzielimy przedziały na 3 i 2/resztę. Używamy algorytmu dla 3 przedziałów dla początku i 2/reszty dla końca.
Punkty: $p \in \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\}$
Wartości funkcji: $f(p) \in \{sin(0) = 0, sin(\frac{\pi}{5}) \approx 0.5878, sin(\frac{2\pi}{5}) \approx 0.9511, sin(\frac{3\pi}{5}) \approx 0.9511, sin(\frac{4\pi}{5}) \approx 0.5878, sin(\pi) = 0\}$
Wartości do pomnożenia sumy funkcji:
Dla 3: $\frac{\frac{3\pi}{5}-0}{1+3+3+1} = \frac{3\pi}{40}$
Dla 2: $\frac{\pi-\frac{3\pi}{5}}{1+4+1} = \frac{\pi}{15}$
Rozbicie na 3 i 2 przedziały: $\frac{3\pi}{40}(1*0+3*0.5878+3*0.9511+1*0.9511) + \frac{\pi}{15}(1*0.9511+4*0.5878+1*0) = 2.0034$