上 海 交 通 大 学 试 卷 （A 卷）

（2021 至 2022 学年第 2 学期　2022 年 6 月 16 日，16:00–18:00）

班级号 ________________　学号 ________________　姓名 ________________

课程名称 ______最优化方法______　成绩 ________________

一、选择题（共20分，每题4分）

1 无约束优化问题 (P)：$\min f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_2^2 - 3x_1$ 的局部极小点为

(A) $(1, 0)$

(B) $(1, 2)$

(C) $(-1, 0)$

(D) $(-1, 2)$

2 给定约束优化问题 (P):

$$\begin{aligned} \min\ & \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(x_2 - 2\right)^2 \\ \text{s.t.}\ & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

该问题的最优解为

(A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

(B) $\left(\frac{9}{4}, 2\right)$

(C) $(0, 2)$

(D) $(0, 0)$

3 以下哪个函数不是凸函数？

(A) $f(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(B) $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

(C) $f(\mathbf{x}) = -\log(e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

(D) $f(x) = x\log(x),\ x > 0$

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
评阅人							

4 图解法求解线性规划问 (P):

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

的解为 $(x_1, x_2) =$

(A) $(0, 0)$

(B) $(4, 3)$

(C) $(0, 5)$

(D) $(0, 2)$

5 下列使用导数的最优化方法中，不具有二次终止性的是:

(A) BFGS法

(B) 共轭梯度法

(C) 最速下降法

(D) DFP法

二、填空题（共30分，每空3分）

1 线性规划问题 (P):

$$
\begin{aligned}
\max\ & 20x_1 + 14x_2 + 60x_3 + 4x_4 \\
\text{s.t.}\ & x_1 - 6x_3 + x_4 \le -2, \\
& x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \le -7, \\
& x_2, x_3, x_4 \le 0,
\end{aligned}
$$

的对偶问题为________________________，该对偶问题的最优解为________________________。利用对偶问题的最优解及互补松弛性质，得原问题的最优解为________________________，目标函数的最优解为________________________。

2 约束优化问题 (P):

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1^2 \le x_2, \\
& x_1 + x_2 \le 2
\end{aligned}
$$

的K-T条件为________________________，K-T点为________________________，该点是否为(P)的最优解________________________（填是或不是）。

3 无约束优化问题的牛顿法的迭代公式为 ________________________。该方法是否具有二次终止性？________________________（填是或否）。 用此方法求解 $\min\ (x_1-1)^3 + x_2^2$ 取初始点 $\mathbf{x}^{(1)} = (0,1)^\top$ 时，第1次的迭代结果为 $\mathbf{x}^{(2)} =$ ________________________。

三、 (10 分) 给定线性规划问题 (P):

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11, \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 3, \\
& x_1 - 2x_3 = 1, \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

(a) 写出 (P) 的标准形式;

(b) 用大M法求解该问题。

四、 (10 分) 考虑如下约束优化问题 (P):

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-1)^2+x_2^2 \\ &\text{s.t.}\quad -x_1+\frac{1}{2}\beta x_2^2=0 \end{aligned}$$

讨论β取何值时$\mathbf{x}=(0,0)$ 是局部最优解。

五、 (10 分) 用Fletcher-Reeves共轭梯度法（FR法）求解下列无约束优化问题

$$\min\ x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2.$$

(a) 考虑初始点和初始搜索方向分别为

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{和} \quad d^{(1)}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

判断 $d^{(1)}$ 是否为最速下降方向。

(b) 以 $x^{(1)}, d^{(1)}$ 为初始点和初始搜索方向，用FR法计算1次迭代的结果。

六、 (10 分) 用Zoutendijk可行方向法求解以下约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + 1 \geq 0 \\
& -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

设初始点为 $x^{(1)} = (0, 0)^\top$.

(a) 在 $x^{(1)}$ 处，写出起作用约束和不起作用约束的系数矩阵。

(b) 计算3次迭代的结果。

(c) 设第3次迭代结果为 $x^{(3)}$，判断 $x^{(3)}$ 是否为最优解。

七、 (10 分) 用内点罚函数法求解以下约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{6}(x_1+1)^3 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(a) 定义出障碍函数。

(b) 设 r_k 为障碍因子，求出内点法的解析解 $\overline{x}_{r_k}$.

(c) 当 $r_k \to 0$ 时，判断内点法的解 $\overline{x}_{r_k}$ 是否趋于最优解。