1 令$C = \{ e_1, e_2, e_3\}$,

affine hull: $\{\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 | \, e_1, e_2, e_3 \in C, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1\}$;

convex hull: $\{\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 | \, e_1, e_2, e_3 \in C, \theta_i \geq 0, i = 1,2,3, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1\}$;

conic hall: $\{\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 | \, e_1, e_2, e_3 \in C, \theta_i \geq 0, i = 1,2,3\}$

2 C 是 P 范数单位球的表达式，范数需满足三角不等式，也即

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

考虑在二维空间取点$x = (1,0), y = (0,1)$，则$||x|| = 1$，$||y|| = 1$,则有如下不等式：

$$||x + y|| = 2^{\frac{1}{p}} \leq ||x|| + ||y|| = 2$$

所以$\frac{1}{p} \leq 1$,也即 P 的范围是[1,∞)

对于更高维空间也可取类似的点，n 维空间则应满足

$$n^{\frac{1}{p}} \leq n$$

可解得 P 的范围是[1,∞)。

3 假设点$(x_1, y_1) \in S_1$，$(x_1, y_2) \in S_2$，$(x_1', y_1') \in S_1$，$(x_1', y_2') \in S_2$

点$(x_1, y_1 + y_2)$，$(x_1', y_1' + y_2') \in S$

因为S_1, S_2是凸集，所以对于$0 \leq \theta \leq 1$有

$$(\theta x_1 + (1-\theta) x_1', \theta y_1 + (1-\theta) y_1') \in S_1$$

$$(\theta x_1 + (1-\theta) x_1', \theta y_2 + (1-\theta) y_2') \in S_2$$

而由凸集的定义可知

$$\theta(x_1, y_1 + y_2) + (1-\theta)(x_1', y_1' + y_2')$$
$$= (\theta x_1 + (1-\theta)x_1', (\theta y_1 + (1-\theta)y_1')$$
$$+ (\theta y_2 + (1-\theta)y_2')) \in S$$

所以 S 也是凸集

4　假设C是凸集，由于$\lambda_1 C + \lambda_2 C$中的向量$x$形式为$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \;\; x_1, x_2 \in C$，由于$C$的凸集性质，有

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \in C$$

两边同时乘以$\lambda_1 + \lambda_2$有

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in (\lambda_1 + \lambda_2)C$$

所以有

$$\lambda_1 C + \lambda_2 C \subset (\lambda_1 + \lambda_2)C$$

如果C不是凸集，令$C = \{0, x\}, \lambda_1, \lambda_2 = 1$，则有

$$\lambda_1 C + \lambda_2 C = C + C = \{0, x, 2x\}$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)C = 2C = \{0,2x\}$$

二者显然不相等，证毕

5　对任意一个点$a \in A$都有$a + C \subset B + C$,我们可以假设$A = \{0\}$，则需要证明$0 \subset B$，假设0不属于B，则存在一个实数$\varepsilon > 0$以及一个R^n中的线性泛函f使得$f(0) = 0, f|B > \varepsilon$。因为$C$是有界的，所以对任意$x \in C +$都有$f(x) < \infty$，令对任意$x \in C, f(x)$的最小值是$c$，则必定存在一个点$x \in C$使得

$$f(x) < c + \varepsilon$$

但是对于每一个$y \in B$以及$z \in C$有

$$f(y+z)=f(y)+f(z)>\varepsilon+c$$

所以$x\notin B+C$，这与$C\subset B+C$不合，因此假设不成立，所以

$0\subset B$进而可证$A\subset B$

6 (1) 考虑

$$B=\{x\in R^2|-1\leq x_1\leq 1,-1\leq x_2\leq 1\}$$

$$A=\{x\in R^2|x_1=1,-1\leq x_2\leq 1\}$$

二者都是凸集且$A\subseteq B$，而

$$relintB=\{x\in R^2|-1<x_1<1,-1<x_2<1\}$$

$$relintA=\{x\in R^2|x_1=1,-1<x_2<1\}$$

则有$relintA$不属于$relintB$

(2) 由于

$$x+\epsilon(x-y)=(1+\epsilon)x-\epsilon y\in C,\epsilon>0$$

这代表一条以x为端点的射线，其反向延长线会经过y，如果x不属于$relintC$，那么x在C的边界上，这条射线与C的唯一交点为x，故不成立，所以$x\in relintC$

反过来，如果$x\in relintC$，那么对于任意$y\in C$，都存在$\epsilon>0$使

$$x+\epsilon(x-y)=(1+\epsilon)x-\epsilon y,\epsilon>0$$

因为射线与C的交点不止一个

(3) $\forall Y\in AC,\exists\epsilon>0,X\in relint(AC)$使得

$$X+\epsilon(X-Y)\in AC$$

令$Y=Ay,X=Ax,x,y\in C$则有

$$Ax+\epsilon(Ax-Ay)\in AC$$

$$A(x+\epsilon(x-y)) \in AC$$

因为$x+\epsilon(x-y) \in C$,所以

$$ArelintC \in relint(AC)$$