7.1 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 k 的取值范围

$$f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1=0$$

$$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$$

① $k\le 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}-\infty, & k<0\\ -1, & k=0\end{cases}$$

$k\le 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个根

② $k>0$ 时，$f'(x)=0$　$x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$，$f''(x)>0$

$\therefore x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 为极小值点，且 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)^2}-1=0$$

$$k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

7.2 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且当$x>a$时，$f'(x)>k>0$，其中k为常数，若$f(a)<0$，证明方程$f(x)=0$在$\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$内有且仅有一个实根

证明：$\because x>a$时，$f'(x)>k>0$

$\therefore f(x)$在$[a,+\infty)$上$\uparrow$

$\because f'(x)>k$

$\therefore f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)>k\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-ka$

$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>ak-ak+f(a)-f(a)=0$

$\therefore f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$

$\therefore f(a)f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)<0$

又$\because f(x)$在$\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]\uparrow$

$\therefore f(x)=0$在$\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$内有且仅有一个实根

7.3 证明对任意常数 a, b, 且 $a<b$, $\sin a-\sin b \leq b-a$

证明: $\sin a + a \leq \sin b + b$

设 $f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单增

$\therefore$ 对任意常数 a, b, $a<b$

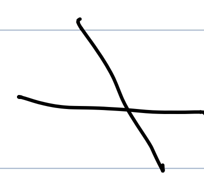
$\sin a - \sin b \leq b - a$

7.4 证明对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $x - x^2 < \frac{1}{e}$

证明: 设 $f(x) = x - x^2$

$f'(x) = 1 - 2x$

令 $f'(x) = 0$, $x = \frac{1}{2}$



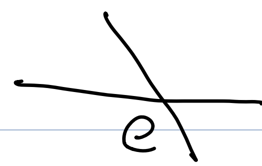
$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{2})\uparrow$, $(\frac{1}{2},+\infty)\downarrow$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}<\frac{1}{e}$

7.5 设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$

证明: 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$



令 $f'(x)=0$, $x=e$

$f(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减

$\because b>a>e$

$\therefore f(b)<f(a)$，即 $\frac{\ln b}{b}<\frac{\ln a}{a}$

$b\ln a>a\ln b$

即 $a^b>b^a$

7.6. 证明: $\left(\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right)^2<\frac{1}{x(1+x)^2}$ $(x>0)$

证明: $\left|\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}<0$

设 $f(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

$f(x)$在$(0,+\infty)\downarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\therefore f(x)$在$x>0$上大于0

$\therefore$ 只需证 $\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<0$

设 $g(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

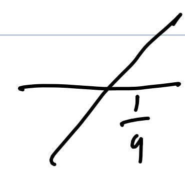
$$g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} + \frac{\overline{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) + \sqrt{x}}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x} + 1 + x + 2x}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2} = \frac{1+3x-2\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}$$

设 $h(x) = 1+3x-2\sqrt{x}$

$$h'(x) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$



令 $h'(x) = 0 \Rightarrow 9 = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{9}$

$h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{9})\downarrow$，在 $(\frac{1}{9}, +\infty)\uparrow$

$h(x)_{min} = h(\frac{1}{9}) = 1 + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$

$\therefore g'(x)$ 在 $(0, +\infty)\uparrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\therefore g(x) < 0$