[分析] $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, $n>N$时

恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

① 先写距离 $|x_n-a|\overset{令}{<}\varepsilon$

② 反解出n的范围: $n>g(\varepsilon)$

③ 取 $N=[g(\varepsilon)]+1$

eg、证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ (q为常数且 $|q|<1$)

证明: ① $|q^n-0|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon$, 不妨设 $0<\varepsilon<1$

② 反解n: $n\ln|q|<\ln\varepsilon$

$$\Rightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$$

③ 取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$, 则当 $n>N$时, 就

有 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, 则 $|q^n-0|<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

注1. 当 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公比为 q，$q\neq 1$ 的等比数列时，其前 n 项和：$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

当 q 为常~~数~~且 $|q|<1$ 时，$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

注2. $|q|<1 \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

如 $q = 1-\frac{1}{n}$，$n=2,3,\cdots \Rightarrow |q|<1$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

eg2 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

证明：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，$n>N$ 时，有 $|a_n - A| < \varepsilon$

由不等式 $||a|-|b|| \leq |a-b|$，有

$$||a_n|-|A|| \le |a_n-A| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = |A|$$

注：若$A=0$，则 $||a_n|-|A|| = ||a_n|-0| = |a_n-0|$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

思路：欲证 $a_n\to 0$，转化为 $|a_n|\longrightarrow 0$

若使用夹逼准则 $0\le |a_n| \le \cdots \le \cdots b_n$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \| & & \| \\ 0 & \Rightarrow & 0 & \Leftarrow & 0 \end{array}$$

子列问题

$\{a_n\}$：$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 取无穷项

$\Rightarrow a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots a_{n_k}, \cdots$ 则子列

☆ 定理：若$\{a_n\}$收敛，则其任何子列$\{a_{n_k}\}$

也收敛且 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

$A \Rightarrow B = C \cap B$

$\overline{A} \Leftarrow \overline{B} = \overline{C \cap B} = \overline{C} \cup \overline{B}$

$\{a_n\}$发散 $\Longleftarrow$ 到一个子列发散

$\Longleftarrow$ 或两子列收敛但收敛值不同

eg3. 证明~~数~~数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 极限不存在

[分析] $\{n^{(-1)^n}\}$

$\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \cdots, \frac{1}{2n-1}, 2n, \cdots$

子列: $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$, 发散

$\Rightarrow \{n^{(-1)^n}\}$ 发散

收敛数列性质

① 唯一性

② 有界性

③ 保号性

极限的四则运算 $\lim\limits_{n\to\infty} x = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y = b$

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$

③ 若 $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

eg5. [分析] 令 $a_n + b_n = u_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

令 $a_n - b_n = v_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 3$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = 1 + 3 = 4$

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 1-3 = -2$

又 $u_n + v_n = 2a_n$，$u_n - v_n = 2b_n$

eg6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

[分析] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2$

$$\begin{cases} \text{夹逼：} & \begin{array}{ccc} y_n \le & x_n & \le z_n \\ \downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ A & A & A \\ (+\infty & +\infty & (+\infty) \end{array} \quad n\to\infty \\ \text{单调有界：} & \{x_n\}\uparrow \text{ 且有上界}, \ \downarrow \text{ 且有下界} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \text{定义法：} & |x_n - a| \to 0 \end{cases}$$

eg7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

[分析]

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}$$

$$\begin{array}{cccc} & \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\ n\to\infty & 1 & \Rightarrow 1 \Leftarrow & 1 \end{array}$$

eg8. $\{a_n\}$满足 $a_1=a\ (a>0)$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求其值

[分析] 递推式 $\Rightarrow$ 单调有界准则

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$ 显然，$a_n>0$

$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{2}$

$\Rightarrow\{a_n\}$有下界

且 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n}-a_n\right)$

$$=\frac{2-a_n^2}{2a_n}\leq 0$$

$$\Rightarrow \{a_n\}\downarrow$$

由单调有界准则 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n \xlongequal{存在} A$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{2}{A}\right)\Rightarrow \\ 由保号性, A\geq\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow A=\sqrt{2}$

eg9. 设 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

[分析] $x_{n+1}=\sin x_n$, $0<x_1<\pi$

① $0<x_1<\pi$

② 设 $0<x_n<\pi$

③ 则 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi$

$\Rightarrow \{x_n\}\downarrow$ 且有下界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}} A$

$A = \sin A \Rightarrow A = 0$