2.1 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$

证明: $\exists N,\ \forall n>N \quad |x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$$n>\frac{1}{\varepsilon} \quad 令 N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

$\forall\ n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 都有 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-1\right|$ 恒成立

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$

2.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$

由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}=1$

2.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}$$

$$\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2+2n}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+2n)}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}$$

$$=\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2+n}=\frac{n^2+n}{2(n^2+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}=\frac{1}{2}$$

2.4、设 $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ $(n=1,2,\cdots)$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=2-\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}2-\frac{1}{n}=2$$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ ↑

a_n 单调有界, 收敛于2

2.5 设 $x_1=2$，$x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3$ $(n=2,3,\cdots)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：$x_n+x_nx_{n-1}-4x_{n-1}=3$

$$x_n(1+x_{n-1})=3+4x_{n-1}$$

$$x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3+4x_n}{1+x_n}-\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$$

$$=\frac{(3+4x_n)(1+x_{n-1})-(1+x_n)(3+4x_{n-1})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

$\because x_1=2$ $\quad x_2=\dfrac{3+8}{1+2}=\dfrac{11}{3}>2$

$\therefore \quad x_n - x_{n-1} > 0$

$\{x_n\}$单调递增

$$x_n = \frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 3+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} < 4$$

$\therefore \{x_n\}$单调且有上界

$\therefore \{x_n\}$极限存在

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+4x_n}{1+x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$x_n^2 + x_n - 4x_n - 3 = 0$$

$$x_n^2 - 3x_n - 3 = 0$$

$$x_n = \frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$$

由保号性可知 $A>0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$