4.1 $f(x)$在$x=0$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}=1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x^2\to 0^+} f(x^2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x^2)}{x^2}\cdot x^2 = 1\cdot 0$$

C

4.2 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，$\varphi(x)$在$x=1$连续，

则$\varphi(1)=0$是$f(x)$在$x=1$可导的______条件

$f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，$\varphi(x)$在$x=1$连续

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)\text{ 存在}$$

① $\varphi(1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=0$

A. $0\to 0$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-(x-1)(x^2+x+1)\varphi(x)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}A\cdot 0\to 0$$

充分条件

② $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=A$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)=\lim_{x\to 1^+}3\varphi(x)$$

$$=\lim_{x\to 1^-}-3\varphi(x)$$

$\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=0$ 必要条件

充分必要条件 A

4.3 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义，$f(0)=1$，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$

证明：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)+2x+2xf(x)-2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\underbrace{\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}}_{=-2}+\frac{2(f(x)-1)}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{1-2x}+2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2+2(2x-1)}{2x-1}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x(2x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{2x-1}=-2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2(f(x)-1)}{x}=2f'(0)=2\quad f'(0)=1$$

4.4 设 $y=f(\ln^2x)e^{f^2(x)}$，其中 f 可微，计算 $\frac{dy}{dx}$

解：$\ln y = \ln f(\ln^2 x) + f^2(x)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(\ln^2 x)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{f(\ln^2 x)} + 2f(x)\cdot f'(x)$$

$$y' = \frac{2\ln x f'(\ln^2 x)e^{f^2(x)}}{x} + 2f(\ln^2 x)e^{f^2(x)}f(x)f'(x)$$

4.5 设$f(x)$在$x=2$的某邻域内具有任意阶导数，且$f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，计算$f^{(n)}(2)$，其中n为正整数

解：$f'(x)=e^{f(x)}$

$$f''(x) = e^{f(x)}\cdot f'(x) = e^{2f(x)}$$

$$f'''(x) = 2e^{3f(x)}$$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,e^{nf(x)}$$

$f^{(n)}(2) = (n-1)!e^{n}$

4.6 设函数 $y=y(x)$ 由 $y=x\ln y$ 确定，计算 $\frac{dy}{dx}$

$y' = \ln y + x \cdot \frac{y'}{y}$

$\frac{yy' - xy'}{y} = \ln y$

$y' \cdot \frac{y-x}{y} = \ln y$

$y' = \frac{y\ln y}{y-x}$

4.7 设 $y=y(x)$ 由 $xe^{f(y)} = e^{y}\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f' \neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$\ln x + f(y) = y + \ln\ln 29$

$$\frac{1}{x} + f'(y)\cdot y' = y'$$

$$-\frac{1}{x^2} + f''(y)\cdot y'^2 + f'(y)\cdot y'' = y''$$

$$y'' = \frac{[1-f'(y)]^2 - f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

4.8 已知$f'(x)=Ae^x$（A为正常数），求$f(x)$的反函数的二阶导数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{Ae^x}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{f'(x)}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$= \left(\frac{1}{Ae^x}\right)'\cdot\left(\frac{1}{Ae^x}\right)$$

$$= -\frac{1}{Ae^x}\cdot\frac{}{Ae^x} = -\frac{1}{A^2e^{2x}}$$

4.9 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x}, & x<0 \\ A, & x=0 \\ ax^2+b, & x>0 \end{cases}$，求常数A、

a、b的值，使f(x)在x=0处可导，并求f'(0)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-A}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{\pi}{x}-\frac{A}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+b-A}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\left(ax+\frac{b}{x}-\frac{A}{x}\right)$$

$f'(0)=0$ $A=0$, $b=0$ a为任意常数

4.10 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2)+1 \\ y=2\arctan t-(t+1)^2 \end{cases}$

求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

4.11 设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\sqrt{\cos x})}{\ln(1-x\sin x)}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\sqrt{\cos x})}{\ln(1-x\sin x)} \qquad \frac{0}{0}$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\sqrt{\cos x})-f(0)}{(1-\sqrt{\cos x})-0}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}$$

$$=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-x\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=-\frac{1}{2}f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{4}f'(0)$$