6.1 设在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$的大小顺序为（B）

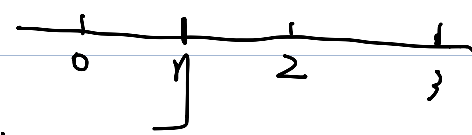
$$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi) \quad 0<\xi<1$$

$$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$$

6.2 设$f(x)$在$[0,3]$连续，在$(0,3)$内可导，且$f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明必存在$\xi\in(0,3)$，s.t. $f'(\xi)=0$

证明：由平均值定理，$\exists\,\eta\in[0,2]$，st

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$



由罗尔定理，$\because f(\eta)=1$，$f(3)=1$

$\therefore \exists\,\xi\in(\eta,3)$，s.t. $f'(\xi)=0$

6.3 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx$ $(k>1)$. 证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$,

s.t. $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

证明：要证$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

即证 $f'(\xi)+(\xi^{-1}-1)f(\xi) \Rightarrow f(x)e^{(\ln x-x)}$

令$F(x)=f(x)\cdot x\cdot e^{-x}$，只需证$\exists t_1, t_2\in[0,1]$, s.t. $F(t_1)=F(t_2)$

$\because f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx$

由积分中值定理，$k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$

$0<\eta<\frac{1}{k}<1$

$F(\eta)=f(\eta)\cdot\eta\cdot e^{-\eta}$

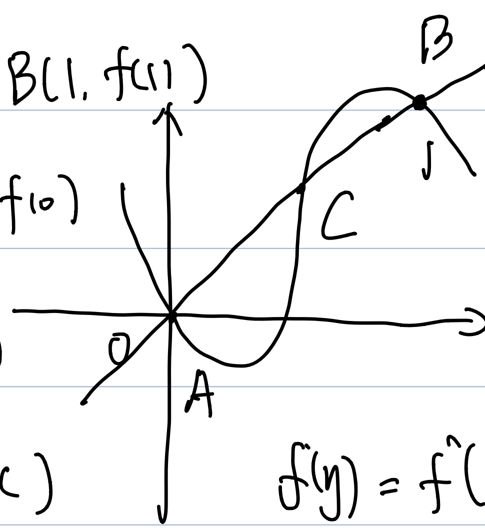
$F(1)=f(1)\cdot 1\cdot e^{-1}=\eta e^{1-\eta}f(\eta)\cdot e^{-1}=f(\eta)\eta e^{-\eta}$

$\therefore F(1) = F(\eta)$

$\therefore$ 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, s.t. $f'(\xi) = (1-\xi^{-1}) f(\xi)$

6.4 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 过 $A(0,f(0))$ 及 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$, 证明 $\exists \xi \in (0,1)$, s.t. $f''(\xi)=0$

证明: $A(0,f(0))$ $B(1,f(1))$



$k = \dfrac{f(1)-f(0)}{1} = f(1)-f(0)$

$y = (f(1)-f(0))x + f(0)$

$f(1)-f(c) = f'(\tau)(1-c)$ $f'(\eta) = f'(\tau)$

$f(c)-f(0) = f'(\eta)(c-0)$

$f'(\tau) = \dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}$ $f'(\eta) = \dfrac{f(c)-f(0)}{c}$

$\because f(c)=(f(1)-f(0))c+f(0)$

$$f'(y)=\frac{c(f(1)-f(0))}{c}=f(1)-f(0)$$

$$f'(z)=\frac{f(1)-(f(1)-f(0))c-f(0)}{1-c}$$

$$=\frac{(1-c)f(1)-(1-c)f(0)}{1-c}=f(1)-f(0)$$

$\therefore f'(y)=f'(z)$，$0<y<c$，$c<z<1$

由罗尔定理，$\exists\ \xi\in(y,z)$，s.t. $f''(\xi)=0$

6.5（导数介值定理）设$f(x)$在$[a,b]$上可导，若$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，证明对于任意的介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间的μ，存在$\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=\mu$

证明：不妨设$f'_+(a)<f'_-(b)$

设$F(x)=f(x)-\mu x$，$F(x)$在$[a,b]$上可导

且$F_+'(a)=f_+'(a)-\mu<0$，$F_-'(b)=f_-'(b)-\mu>0$

$$\therefore \begin{cases} F_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0 \\ F_-'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0 \end{cases}$$

根据极限的保号性：

$(a,a+\xi_1)$ $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0 \Rightarrow F(x)<F(a)$

$(b-\xi_2,b)$ $\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0 \Rightarrow F(x)<F(b)$

故$F(a)$与$F(b)$均不是$F(x)$在$[a,b]$上最小值，又因$F(x)$在$[a,b]$上一定可以取得最小值，则其最小值必在(a,b)内取到，设$F(x)$在(a,b)内最小值为ξ，

由费马定理，$F'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\mu$

6.6 已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) $\exists\, \xi \in (0,1)$, s.t. $f(\xi)=1-\xi$

(2) $\exists\, \eta, \zeta \in (0,1)$, $\eta \neq \zeta$ s.t. $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

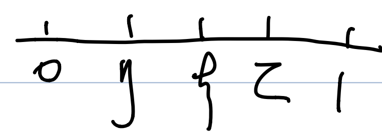
(1) 证明：设 $F(x)=f(x)+x-1$

$$F(0)=-1 \qquad F(1)=1$$

$\because F(0)\cdot F(1)<0$，由零点定理，$\exists\, \xi\in(0,1)$，

s.t. $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi-1=0$

(2) 证明：$f(0)=0$，$f(1)=1$



$$f'(\eta)f'(\zeta)=1$$

设$0<\xi<1$，

由拉格朗日中值定理，

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi - 0} = \frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{1-\xi}{\xi}$$

$$f'(z) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{1-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{\xi}{1-\xi}$$

$\because f(\xi) = 1-\xi$

$\therefore f'(\eta)\cdot f'(z) = 1$

6.7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，s.t. $f'''(\xi)=3$

证明：$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$

$0<\eta<x$

$x=-1,\quad 0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\ -1<\eta_1<0$ ①

$x=0,\quad 1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\ 0<\eta_2<1$ ②

② − ①　$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$

由连续函数的介质定理，$\exists\ \xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$,

s.t. $f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3$