7.1 证明方程 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=0$ 有两个实根

证明：$(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)=0$

令 $F(x)=(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)$

$[1,2]$，$F(1)>0$，$F(2)<0 \Rightarrow \exists x_1\in(1,2)$, s.t. $F(x_1)=0$

$[2,3]$，$F(2)<0$，$F(3)>0 \Rightarrow \exists x_2\in(2,3)$, s.t. $F(x_2)=0$

$\because$ $F(x)=0$ 最多两个实根

$\therefore$ 方程有两个实根

7.2 若 $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+a_0=0$，证明方程

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根

证明：设 $F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

$F(0)=a_0$

$F(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$

设 $f(x) = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + \cdots + a_0 x$

则 $f'(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

$f(0) = 0$, $f(1) = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + a_0 = 0$

由罗尔定理知，$\exists x_0 \in (0,1)$ s.t. $f'(x_0) = 0$

即 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根

7.3 设在 $[1,+\infty)$ 上，$f''(x) < 0$, $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$,

证明：$f(x) = 0$ 在 $(1,+\infty)$ 内只有一个实根

证明：$\because f''(x) < 0$

$\therefore f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上 $\downarrow$

$\therefore f'(x) < f'(1) = -3 < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上 $\downarrow$

$f(2) < f(1) - 3 - 1 = -1$

$\therefore f(1)f(2) < 0$

$\therefore f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 内只有一个实根

$f(x) = f(1) + f'(\xi)(x-1) < 2 + (-3)(x-1)$

$= 5 - 3x$

7.5 证明不等式 $\ln(1+\frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$ $(0 < x < +\infty)$

证明: $\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} > 0$

设 $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{x-(x+1)}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$$

$\therefore f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减小

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$\therefore f(x) > 0$

7.6 证明：当 $0 < a < b < \pi$ 时，

$$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a$$

证明：设 $f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x$, $0 < x < \pi$

$f'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x + \pi$

$= x\cos x - \sin x + \pi$

$f''(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0$

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上 $\downarrow$

$f'(0) = \pi$ $\quad f'(\pi) = 0$

$\therefore f'(x) > 0$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增

$\therefore b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a$

7.7 证明不等式：

(1) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，$x < \tan x$

(2) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，$(x^2+\sqrt{4+x^4})\cos x < 2$

(1) 证明：设 $f(x) = x - \tan x$

$$f'(x) = 1 - \sec^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减

$\because f(0) = 0$ $\therefore f(x) < 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立

$\therefore x < \tan x$

(2) 证明：$(x^2+\sqrt{4+x^4})\cos x < 2$

设 $f(x) = (x^2+\sqrt{x^4+4})\cos x - 2$

$$f'(x) = \left(2x + \frac{\frac{1}{2}(4x^3)}{\sqrt{x^4+4}}\right)\cos x - (x^2+\sqrt{x^4+4})\sin x$$

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x^4+4}+2x^3}{\sqrt{x^4+4}}\cos x-\frac{x^2\sqrt{x^4+4}+x^4+4}{\sqrt{x^4+4}}\sin x$$

设 $g(x)=\left(2x\sqrt{x^4+4}+2x^3\right)\cos x-\left(x^2\sqrt{x^4+4}+x^4+4\right)\sin x$

$$f'(x)=\underbrace{x\left(x^2+\sqrt{4+x^4}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4+x^4}}-\frac{\tan x}{x}\right)}\cos x$$

由(1) $\frac{2}{\sqrt{4+x^4}}<1<\frac{\tan x}{x}$

$\therefore f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上 ↓

$f(x)<f(0)=2$

$\left(x^2+\sqrt{4+x^4}\right)\cos x<2$