

# Теория формальных языков и трансляций. Домашняя работа №2

Кубышкин Е.А., группа 21.Б-07

22 сентября 2023г.

## Упражнение I-2.1

**ДАНО:** Грамматика  $G = (V_N, V_T, P, S)$ , где  $V_N = \{S, A, B\}$ ,  $V_T = \{0, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow 0A, S \rightarrow 1B, S \rightarrow 0, \\ & A \rightarrow 0A, A \rightarrow 0S, A \rightarrow 1B, \\ & B \rightarrow 1B, B \rightarrow 1, B \rightarrow 0\}. \end{aligned}$$

**НАЙТИ:** Язык, порождающийся данной грамматикой.

**МЕТОД РЕШЕНИЯ:** Логические рассуждения.

**РЕШЕНИЕ:**

1. Понятно, что если мы приходим в нетерминал  $B$ , то мы обязаны накапливать единицы и завершаться либо 0, либо 1. Таким образом, вне зависимости от того, какой был префикс  $\text{pref}$ , если был хотя бы один нетерминал  $B$ , то слово имеет вид:  $\text{pref } 1^+0^k$ , где  $k \in \{0, 1\}$
2. Далее рассмотрим  $\text{pref}$  (уже отсекая любые пути, содержащие  $B$ ):
  - а) Можем сразу прийти в вариант с  $B$ , так что возможно, что  $\text{pref} = \varepsilon$

- б) Далее единственный вариант — идти в  $0A$ . Отсюда мы можем накопить любое количество  $0$ , из-за правила  $A \rightarrow 0A$ , а после варианты  $A \rightarrow 0S$  и  $A \rightarrow 1B$  по сути не отличаются, потому что мы либо ничего не меняем и продолжаем накапливать  $1$ , либо зайдём в  $B$ , тем самым закончив разбирать  $\text{pref}$ . Значит,  $\text{pref} = 0^*$

3. Если вообще не идти в  $B$ :

- а) Можно сразу пойти в  $0$
- б) Можно пойти в  $0A$ , тогда самый короткий способ закончить слово:  $S \rightarrow 0A \rightarrow 00S \rightarrow 000$ . Так что  $2$  нулей быть не может, только  $1, 3$  или больше.
- с) Или можно продолжать любое количество  $0$ , тогда слово будет иметь вид  $0^k$ , где  $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$

Подводя итог, язык, порождающийся грамматикой имеет вид  $\{0^k\} \cup \{0^*1^+0^b\}$ , где  $b \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$

## Упражнение I-2.2

**ДАНО:** Язык  $L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ , где  $w$  не содержит двух последовательных единиц.

**НАЙТИ:** Регулярную грамматику, порождающую этот язык.

**МЕТОД РЕШЕНИЯ:** Предоставим подходящую регулярную грамматику.

**РЕШЕНИЕ:**

$$G = \{V_N, V_T, P, S\},$$

где

$$V_N = \{A, B, S\}, V_T = \{0, 1\},$$

$$P = \{S \rightarrow 0B, S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, S \rightarrow 0$$

$$A \rightarrow 0B, A \rightarrow 0$$

$$B \rightarrow 0B, B \rightarrow 1A, B \rightarrow 1\}$$

## Упражнение I-2.3

**ДАНО:** контекстно-свободная грамматика  $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ , где  $P = \{S \rightarrow aAS, S \rightarrow a, A \rightarrow SbA, A \rightarrow ba, A \rightarrow SS\}$

**НАЙТИ:** Неформально описать слова, порождающиеся этой грамматикой

**МЕТОД РЕШЕНИЯ:** Логические рассуждения

**РЕШЕНИЕ:**

## Упражнение I-2.4

**ДАНО:** Алгоритм теоремы 2.2

**НАЙТИ:** Проверить принадлежность слов  $(abaa)$ ,  $(abbb)$ ,  $(baaba)$  к грамматике из примера 2.7

**МЕТОД РЕШЕНИЯ:** Воспользоваться алгоритмом из теоремы 2.2

**РЕШЕНИЕ:**

1.  $abaa$ , для этого слова  $|abaa| = 4$ :

- a)  $T_0 = \{S\}$
- b)  $T_1 = T_0 \cup \{aAS, a\}$
- c)  $T_2 = T_1 \cup \{aAa, abaS, aSSS\}$
- d)  $T_3 = T_2 \cup \{abaa\}$  На этом шаге мы увидели, что в множестве  $T_3$  есть нужная цепочка  $abaa$ , дальше расписывать для наших задач не имеет смысла, данное слово принадлежит языку, порождаемому грамматикой  $G$

2.  $abbb$  для него  $|abbb| = 4$ , значит, что множества до  $T_3$  будут совпадать. Возьмём  $T_0, T_1, T_2$  из предыдущего пункта:

- a)  $T_3 = T_2 \cup \{abaa, aSSa, aaSS, aSaS\}$
- b)  $T_4 = T_3 \cup \{aaSa, aSaa, aaaS\}$
- c)  $T_5 = T_4 \cup \{aaaa\}$
- d)  $T_6 = T_5$

алгоритм закончен, в множестве  $T_5$  не нашлось слова  $abbb$ , значит слово не принадлежит языку, порождаемому грамматикой  $G$

3.  $baaba$ , для него  $|baaba| = 5$ :

- a)  $T_0 = \{S\}$
- b)  $T_1 = T_0 \cup \{aAS, a\}$
- c)  $T_2 = T_1 \cup \{aSbAS, abaS, aSSS, aAaAS, aAa\}$

- d)  $T_3 = T_2 \cup \{aabAS, aSbAa, aaSS, aSaS, aSSa, aAaAa, abaa\}$
- e)  $T_4 = T_3 \cup \{aabAa, aaaS, aaSa, aSaa\}$
- f)  $T_5 = T_4 \cup \{aaaa\}$
- g)  $T_6 = T_5$

алгоритм закончил свою работу, так как  $baaba \notin T_5$  слово не принадлежит языку, порождаемому грамматикой  $G$

## Упражнение I-2.5

**ДАНО:** Контекстно-свободная или регулярная грамматика  $G$ , теорема 2.2.

**НАЙТИ:** Ответ на вопрос, можно ли улучшить оценку для  $m$ .

**МЕТОД РЕШЕНИЯ:**

**РЕШЕНИЕ:** Зафиксируем общий вид грамматики  $G = (V_T, V_N, P, S)$

- Рассмотрим случай регулярной грамматики, тут  $P = \{A \rightarrow Ba, A \rightarrow a\}$ , где  $A, B \in V_N$ ,  $a \in V_T$ . Таким образом мы либо не увеличиваем длину цепочки, либо увеличиваем максимум на 1, так что оценка имеет вид  $n \geq m$ .
- В случае, если  $G$  — контекстно-свободная грамматика оценку улучшить невозможно, так как никаких ограничений на длину на каждом шаге вывода нет.

## Упражнение I-2.16

**ДАНО:** Неукорачивающая грамматика  $G = (V_N, V_T, P, S)$ , где  $V_N = \{S, B, C\}$ ,  $V_T = \{a, b, c\}$  и

$$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}.$$

**НАЙТИ:** Построить НС-грамматику, эквивалентную данной.

**МЕТОД РЕШЕНИЯ:** Воспользуемся алгоритмом приведения неукорачивающей грамматики к НС-грамматике.

**РЕШЕНИЕ:** Все правила, кроме  $CB \rightarrow BC$  уже соответствуют требованиям НС-грамматики. Пусть  $X$  и  $Y$  — новые нетерминалы, тогда заменим правило  $CB \rightarrow BC$  на следующие четыре правила:

$$CB \rightarrow XB \quad XB \rightarrow XY \quad XY \rightarrow BY \quad BY \rightarrow BC$$

Все они удовлетворяют требованиям НС-грамматик. Итого, получили грамматику  $G' = (V_N, V_T, P, S)$ , где  $V_N = \{S, B, C, X, Y\}$ ,  $V_T = \{a, b, c\}$  и

$$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, aB \rightarrow ab, \\ bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc, \\ CB \rightarrow XB, XB \rightarrow XY, XY \rightarrow BY, BY \rightarrow B\}.$$