Представлюсь

Ефим Алексеевич Кубышкин

- Сейчас студент магистратуры
- Заканчивал ТехПрог
- tg: @EfKub (если очень нужен)
- email: st098235@student.spbu.ru (если не срочно, но формально)

@EFKUB

Цели курса

Зачем и что мы делаем

Цели курса

Зачем и что мы делаем

- Дать минимальную математическую культуру
  - Математика сложная, а мы не математики $\Rightarrow$ надо прощупать на простом
  - Программистская интуиция, чтобы упростить понимание. Но с соблюдением формальностей

Цели курса

Зачем и что мы делаем

- Дать минимальную математическую культуру
  - Математика сложная, а мы не математики $\Rightarrow$ надо прощупать на простом
  - Программистская интуиция, чтобы упростить понимание. Но с соблюдением формальностей
- Познакомить с базой
  - Дальше будут предполагать (преподаватели, работодатели), что вы знаете некоторые алгоритмы и определения
  - Кирпичики, из которых строится нечто большее, не освоите это – дальше будет беда

Цели курса

Зачем и что мы делаем

- Дать минимальную математическую культуру
  - Математика сложная, а мы не математики $\Rightarrow$ надо прощупать на простом
  - Программистская интуиция, чтобы упростить понимание. Но с соблюдением формальностей
- Познакомить с базой
  - Дальше будут предполагать (преподаватели, работодатели), что вы знаете некоторые алгоритмы и определения
  - Кирпичики, из которых строится нечто большее, не освоите это – дальше будет беда

Дискретная математика – самая применимая математика для программиста, Вам придётся её знать, если хотите расти как специалист

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \cup B) \land (x \notin A \cap B)\}$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \cup B) \land (x \notin A \cap B)\}$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A} = \{x \mid x \notin A \land x \in \mathbb{U}\}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A)$

Базовые операции над множествами

Какие знаете?

1. Объединение (union) $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
2. Пересечение (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$
3. Разность (difference, subtraction) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$
4. Симметрическая разность (symmetric difference) $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \cup B) \land (x \notin A \cap B)\}$
5. Декартово произведение (cartesian product) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$
6. Дополнение до универсума (complement) A^c или $\overline{A} = \{x \mid x \notin A \land x \in \mathbb{U}\}$
7. Булеан, множество подмножеств (powerset) 2^A или $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

Пустое множество

И как перестать его бояться

Пустое множество $\varnothing$ – множество без элементов

Пустое множество

И как перестать его бояться

Пустое множество $\varnothing$ – множество без элементов

Как будут выглядеть следующие множества?

- $2^{\varnothing}$
- $2^{2^{\varnothing}}$
- $2^{2^{2^{\varnothing}}}$

Пустое множество

И как перестать его бояться

Пустое множество $\varnothing$ – множество без элементов

Как будут выглядеть следующие множества?

- $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$
- $2^{2^{\varnothing}}$
- $2^{2^{2^{\varnothing}}}$

Пустое множество

И как перестать его бояться

Пустое множество $\varnothing$ – множество без элементов

Как будут выглядеть следующие множества?

- $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$
- $2^{2^{\varnothing}} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $2^{2^{2^{\varnothing}}}$

Пустое множество

И как перестать его бояться

Пустое множество $\varnothing$ – множество без элементов

Как будут выглядеть следующие множества?

- $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$
- $2^{2^{\varnothing}} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $2^{2^{2^{\varnothing}}} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\ \{\varnothing\}\}\ \}$

Отношения

Как выражать интуитивно понятные вещи на теории множеств

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – непустые множества, тогда **Отношение** – это любое подмножество их декартового произведения $R \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

Отношения

Как выражать интуитивно понятные вещи на теории множеств

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – непустые множества, тогда **Отношение** – это любое подмножество их декартового произведения $R \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

Примеры

1. "Больше или равно" над натуральными числами $a \geq b \Leftrightarrow (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2. $\ldots$

Бинарные отношения

Вечная классика

Бинарное отношение – это отношение на декартовом квадрате $R \subset X \times X$, обычно, если x и y находятся в отношении, то пишут xRy (инфиксная запись)

Бинарные отношения

Вечная классика

Бинарное отношение – это отношение на декартовом квадрате $R \subset X \times X$, обычно, если x и y находятся в отношении, то пишут xRy (инфиксная запись)

Важные типы отношений

1. Рефлексивное: $\forall x \ : \ xRx$
2. Симметричное: $\forall x, y \ : \ xRy \to yRx$
3. Транзитивное: $\forall x, y, z \ : \ xRy \wedge yRz \to xRz$
4. Асимметричное: $\forall x, y \ : \ xRy \to \neg(yRx)$
5. Иррефлексивное: $\forall x \ : \ \neg(xRx)$
6. Антисимметричное: $\forall x, y \ : \ xRy \wedge yRx \to x = y$
7. Эквивалентное: рефлексивность + симметричность + транзитивность
8. Отношение частичного порядка: рефлексивность + антисимметричность + транзитивность
9. Линейно упорядоченное множество: частично упорядоченное множество + $\forall x, y \ : \ xRy \vee yRx$

Частично упорядоченные множества

Некоторые примеры

Частично упорядоченные множества

Некоторые примеры

- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle, \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ – числа с "обычным" порядком
- $\langle \mathbb{N}, | \rangle, \langle \mathbb{N}, \vdots \rangle$ – отношение делимости на натуральных числах
- Лексикографический порядок
- Отношение "быть подстрокой"
- $\langle 2^X, \subset \rangle$ – булеан любого множества естественно упорядочен отношением включения
- DAG — Directed Acyclic Graph — направленный ациклический граф. Отношение заведем такое: если из одной вершины можно дойти по стрелочкам до другой, то мы будет говорить, что они находятся в отношении достижимости

Диаграммы Хассе

Диаграмма Хассе – представление конечного частично упорядоченного множества в виде рисунка его транзитивного сокращения. Проще: элементы множества – узлы, рисуем между ними стрелки только если они находятся в отношении, а лишние стрелки, которые гарантированы рефлексивностью и транзитивностью не рисуем

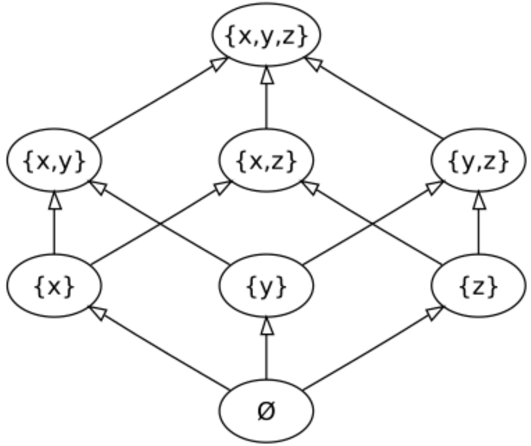
Диаграммы Хассе

Диаграмма Хассе – представление конечного частично упорядоченного множества в виде рисунка его транзитивного сокращения. Проще: элементы множества – узлы, рисуем между ними стрелки только если они находятся в отношении, а лишние стрелки, которые гарантированы рефлексивностью и транзитивностью не рисуем

Упражнения

- $\langle P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}), \subset \rangle$
- $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, | \rangle$

Пример для $\langle P(\{x, y, z\}), \subset \rangle$



Функции

Да, не просто "соответствие"

Отображение (тоже самое, что и функция) из X в Y ($f : X \to Y$) – это кортеж $\langle X, Y, R \rangle$, где

- X – домен
- Y – кодомен
- R – график: отношение на $X \times Y$, такое что $\forall x \in X \; \exists! y \in Y \;\; : \;\; xRy$

Функции

Да, не просто "соответствие"

Отображение (тоже самое, что и функция) из X в Y ($f : X \to Y$) – это кортеж $\langle X, Y, R \rangle$, где

- X – домен
- Y – кодомен
- R – график: отношение на $X \times Y$, такое что $\forall x \in X \ \exists! y \in Y \ : \ xRy$

Что тогда означает тогда запись $f(x) = y$?

Функции

Да, не просто "соответствие"

Отображение (тоже самое, что и функция) из X в Y ($f : X \to Y$) – это кортеж $\langle X, Y, R \rangle$, где

- X – домен
- Y – кодомен
- R – график: отношение на $X \times Y$, такое что $\forall x \in X \; \exists ! y \in Y \; : \; xRy$

Что тогда означает тогда запись $f(x) = y$?

Каверзные примеры

- Функции $id_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $id_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, которые работают одинаково $\forall x \in \mathbb{N} \; id_1(x) = id_2(x) = x$
- Если домен или кодомен является пустым множеством

Важные типы отношений

Отношение $f : X \to Y$

- Инъективное:
- Сюрьективное:
- Биективное: инъективное + сюръективное

Важные типы отношений

Отношение $f : X \to Y$

- Инъективное: $\forall x_1 \in X \, \forall x_2 \in X \ : \ f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$
- Сюрьективное:
- Биективное: инъективное + сюръективное

Важные типы отношений

Отношение $f : X \to Y$

- Инъективное: $\forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X \; : \; f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$
- Сюрьективное: $\forall y \in Y \; \exists x \in X \; : f(x) = y$
- Биективное: инъективное + сюрьективное

Важные типы отношений

Отношение $f : X \to Y$

- Инъективное: $\forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X \;:\; f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$
- Сюрьективное: $\forall y \in Y \; \exists x \in X \;:\; f(x) = y$
- Биективное: инъективное + сюръективное, или $\forall y \in Y \; \exists! x \in X \;:\; f(x) = y$

Чуть-чуть про доказательства

Мышцы математики

Как можно доказывать какие-то утверждения?

Чуть-чуть про доказательства

Мышцы математики

Как можно доказывать какие-то утверждения?

- По определению. "Почему НОД двух разных простых чисел равен 1? По определению!!"

Чуть-чуть про доказательства

Мышцы математики

Как можно доказывать какие-то утверждения?

- По определению. "Почему НОД двух разных простых чисел равен 1? По определению!!"
- От противного. "Почему нельзя делить на ноль? Ну, давайте попробуем..."

Чуть-чуть про доказательства

Мышцы математики

Как можно доказывать какие-то утверждения?

- По определению. "Почему НОД двух разных простых чисел равен 1? По определению!!"
- От противного. "Почему нельзя делить на ноль? Ну, давайте попробуем..."
- По индукции (или как очень формально сказать "и так далее"). "Докажите, что сумма первых n чисел равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Давайте посмотрим на простые случаи, убедимся, что паттерн сохранятся, и скажем "и так далее"

Чуть-чуть про доказательства

Мышцы математики

Как можно доказывать какие-то утверждения?

- По определению. "Почему НОД двух разных простых чисел равен 1? По определению!!"
- От противного. "Почему нельзя делить на ноль? Ну, давайте попробуем..."
- По индукции (или как очень формально сказать "и так далее"). "Докажите, что сумма первых n чисел равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Давайте посмотрим на простые случаи, убедимся, что паттерн сохранятся, и скажем "и так далее"

Формально, математическая индукция – это аксиома (вообще, схема аксиом), которая формулируется так:

Для всякого свойства P верно

$$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1))) \to \forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$$