ARTUR ANACLETO DE SOUZA MATOS

NÚMEROS COMPLEXOS

Santos-SP

2020

NÚMEROS COMPLEXOS

Bom, tudo começa com isso aqui:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 1 - 4 => \Delta = -3$$

Nessa hora a gente pensa:” C#ralho, f@deu, delta negativo não tem solução.”

Realmente não tinha, até que em um belo dia, Leonhard Euler teve o seguinte pensamento :”kk vo resolve saporra so de meme”. Sob essa óptica, Euler desenvolveu o seguinte raciocínio:

$$Se: -3 = -1 \cdot 3 \quad e \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$Então\ \sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

Para melhorar sua definição, Euler resolveu determinar a seguinte igualdade:

$i = \sqrt{-1}$, sendo i o marco inicial para a criação de um novo conceito, o de número imaginário. Este novo elemento (i) será chamado de unidade imaginária, sendo ele o responsável por classificar um número em imaginário ou não.

Desta forma teremos um novo conjunto numérico, onde não existem somente números Reais, mas também números imaginários.

Vale ressaltar que o conjunto dos complexos engloba todos os outros conjuntos, de modo que qualquer número possa ser escrito como um número complexo.

Por exemplo:

4 é um número complexo, contudo, este não possui parte imaginária, apenas parte Real.

42i também é um número complexo que, por sua vez, é chamado de imaginário puro, já que não possui parte Real.

Além disso, um número complexo pode ser representado com uma parte Real e uma parte imaginária ao mesmo tempo, sendo essa representação definida como **Forma Algébrica** (ou retangular).

De um modo geral temos $z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi$, ou seja, $z\ pertence\ ao\ conjunto\ dos\ complexos\ tal\ que\ z = a + bi$, sendo “a” a parte Real desse número e “bi” a parte imaginária.

Por exemplo:

4 – i → 4 é a parte real, enquanto -1i é a parte imaginária.

OBS: a forma algébrica padrão de um número complexo é a+bi, portanto um número complexo representado por a-bi é na realidade a+(-bi).

$\frac{21-43i}{2}$ → $\frac{21}{2}$ é a parte real, enquanto $-\frac{43i}{2}$ é a parte imaginária.

E assim por diante.

POTÊNCIAS DE i

Essa aqui, na real, foi uma lógica bem simples:

$$i^0 = 1$$

$$Já\ que\ qualquer\ número\ elevado\ a\ 0\ é\ igual\ a\ 1\ com\ exceção\ do\ próprio\ 0.$$

$$i^1 = \sqrt{-1}\quad certo???$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 => i^2 = -1$$

$$propriedade\ de\ potência\ e\ radiciação\ aqui\ em\ cima: \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

$$i^3 = i^2 \cdot i^1 => i^3 = -1 \cdot i => i^3 = -i$$

$$propriedade\ de\ potência\ novamente: a^n \cdot a^m = a^{m+n}.$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 => i^4 = -1 \cdot -1 => i^4 = 1$$

As próximas potências eu deixo pro leitor fazer, mas eu dou logo um toque: essa sequência de resultados que eu acabei de mostrar (1,i,-1,-i) se repete pra sempre, ou seja, a cada 4 potências a sequência recomeça.

Desta forma, para descobrir o valor de uma potência de i muito alta, basta dividir o expoente por 4 e elevar i ao resto da divisão.

Por exemplo:

i^{5479} =?

$$\begin{array}{l|l} 5479 & 4 \\ \hline 14 & 1369 \\ \;\;27 & \\ \;\;\;\;39 & \\ \;\;\;\;\;\;3 & \end{array}$$

Logo $i^{5479} = i^3 = -i$

OPERAÇÕES COM COMPLEXOS

Nessa hora, a gente vai do mais básico pro mais “complexo” XD.

ADIÇÃO

Para efetuar a adição com números complexos, basta somar a parte real de um com a parte real do outro e a parte imaginária de um com a parte imaginária do outro.

De um modo geral, temos:

$$Seja\ Z = a + bi\ e\ W = c + di$$

$$Z + W = (a + c) + (b + d)i$$

Por exemplo:

$$Seja\ A = 22 + 12i\ e\ M = 17 + 24i$$

$$A + M = (22 + 17) + (12 + 24)i$$

$$A + M = 39 + 36i$$

$$Seja\ D = -12 + 47i\ e\ F = 23 - 32i$$

$$D + F = (-12 + 23) + \big(47 + (-32)\big)$$

$$D + F = 11 + 15i$$

SUBTRAÇÃO

A subtração é análoga a adição, parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.

De um modo geral, temos:

$$Seja\ Z = a + bi\ e\ W = c + di$$

$$Z - W = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo:

$$Seja\ A = 22 + 12i\ e\ M = 17 + 24i$$

$$A - M = (22 - 17) + (12 - 24)i$$

$$A - M = 5 - 12i$$

$$Seja\ D = -12 + 47i\ e\ F = 23 - 32i$$

$$D - F = (-12 - 23) + \big(47 - (-32)\big)$$

$$D - F = -35 + 79i$$

(Sim, eu tenho preguiça de pensar em exemplos)

MULTIPLICAÇÃO

Para a multiplicação, utilizaremos dois conceitos:

- A propriedade distributiva;
- i^2= -1.

No caso da primeira, basta lembrar que:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Ou seja, o primeiro vezes o primeiro, o primeiro vezes o segundo, o segundo vezes o primeiro, o segundo vezes o segundo. :)

OBS: quando não há nenhum sinal entre os termos, é porque eles estão multiplicando um ao outro.

De um modo geral, temos:

$$Seja\ Z = a + bi\ e\ W = c + di$$

$$Z \cdot W = ac + adi + cbi + bdi^2 \rightarrow Z \cdot W = ac + adi + cbi + bd(-1)$$

$$Z \cdot W = ac + adi + cbi - bd$$

$$Z \cdot W = ac - bd + (cb + bd)i$$

Por exemplo:

$$Seja\ A = 2 + i\ e\ M = 1 + 4i$$

$$A \cdot M = 2 + 8i + i + 4i^2$$

$$A \cdot M = 2 + 9i - 4$$

$$A \cdot M = -2 + 9i$$

$$Seja\ D = -1 + 7i\ e\ F = 3 - 2i$$

$$D \cdot F = -3 + 2i + 21i - 14i^2$$

$$D \cdot F = -3 + 14 + 23i => D \cdot F = 11 + 23i$$

DIVISÃO

Na divisão, a gente vai usar dois conceitos também:

- Multiplicação de complexos;
- Conjugado.

Bom, o primeiro a gente já conhece, então vamos pro segundo. O conjugado de um número complexo é determinado da seguinte maneira:

$$Seja\ z = a + bi$$

$$conjugado\ de\ z = a - bi$$

$$O\ conjugado\ de\ z\ \text{é}\ representado\ por\ \bar{z}, portanto:$$

$$\bar{z} = a - bi$$

OBS: O conjugado de z é $\bar{z}$ e o conjugado de $\bar{z}$ é z, ou seja, o conjugado de a+bi é

a-bi e o conjugado de a-bi é a+bi.

Agora que a gente já definiu conjugado, bora pra divisão. Ela ocorre da seguinte maneira:

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \cdot \frac{\bar{W}}{\bar{W}}$$

Ou seja, na divisão de complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

De um modo geral, temos:

$$Seja\, Z = a + bi\; e\; W = c + di$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{ac - adi + cbi - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2}$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{ac + bd + (-ad + cb)i}{c^2 + d^2}$$

Note que ao multiplicarmos um número complexo por seu conjugado, cancelamos sua parte imaginária, deixando apenas um número real.

Além disso, é interessante observar que na divisão, o denominador sempre será o produto da soma pela diferença, ou seja, uma diferença de dois quadrados.

Caso o leitor não se lembre, diferença de dois quadrados trata-se de um produto notável, em que:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Nesse caso b=di, e ao elevar di ao quadrado obtemos d^2i^2, ou seja, – d^2.

IGUALDADE ENTRE COMPLEXOS

Não se trata de uma operação propriamente dita, no entanto, é um conceito que se faz necessário para o desenvolvimento de equações envolvendo números complexos.

Diz-se que um número complexo z, tal que $z = a + bi$ é igual a um número complexo w tal que $w = c + di$ se, e somente se, $a = c\; e\; b = d$.

Portanto, um número complexo só será igual a outra se suas partes reais forem iguais e se suas partes imaginárias também forem iguais.

Por exemplo:

$$Seja\, z1 = (1 + x) + i\;\; e\;\; z2 = 3 + 2i$$

$$Se\, z1 = z2,\;\; 1 + x = 3 => x = 3 - 1 => x = 2$$

Portanto z1=z2 quando x=2.

REAL E IMAGINÁRIO PURO

Esse tema havia sido abordado no início, contudo, não foi dada uma definição algébrica. Adotando z=a+bi, z será Real quando a=0 e z será imaginário puro quando b=0.

Por exemplo:

$$Seja\ z = (3 - 5m) + (2k + 3). Determine\ m\ e\ k\ de\ modo\ que:$$

$a)z\ seja\ Real:$

$Para\ que\ z\ seja\ real,$ é $necessário\ que\ b\ seja\ igual\ a\ 0.$

$Sendo:$

$b = (2k + 3), basta\ igualar\ esse\ valor\ a\ 0\ para\ descobrir\ o\ valor\ de\ k.$

$$Logo, 2k + 3 = 0 => 2k = -3 => k = -\frac{3}{2}$$

$b)z\ seja\ imaginário\ puro:$

$Para\ que\ z\ seja\ real,$ é $necessário\ que\ a\ seja\ igual\ a\ 0\ e\ que\ b \neq 0$

$Sendo:$

$a = (3 - 5m), basta\ igualar\ esse\ valor\ a\ 0\ para\ descobrir\ o\ valor\ de\ m.$

$$Logo, 3 - 5m = 0 => -5m = -3 => m = \frac{3}{5}$$

E como visto acima, b=0 quando k $=-\frac{3}{2}$.

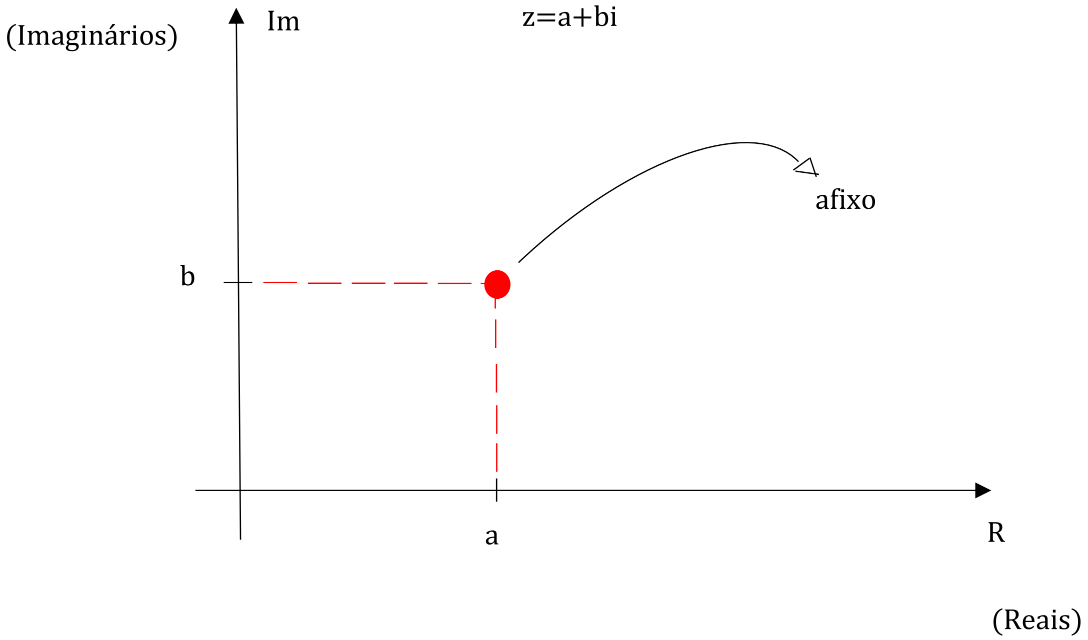
Portanto, $k \neq -\frac{3}{2}\ para\ que\ b\ seja\ imaginário\ puro.$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

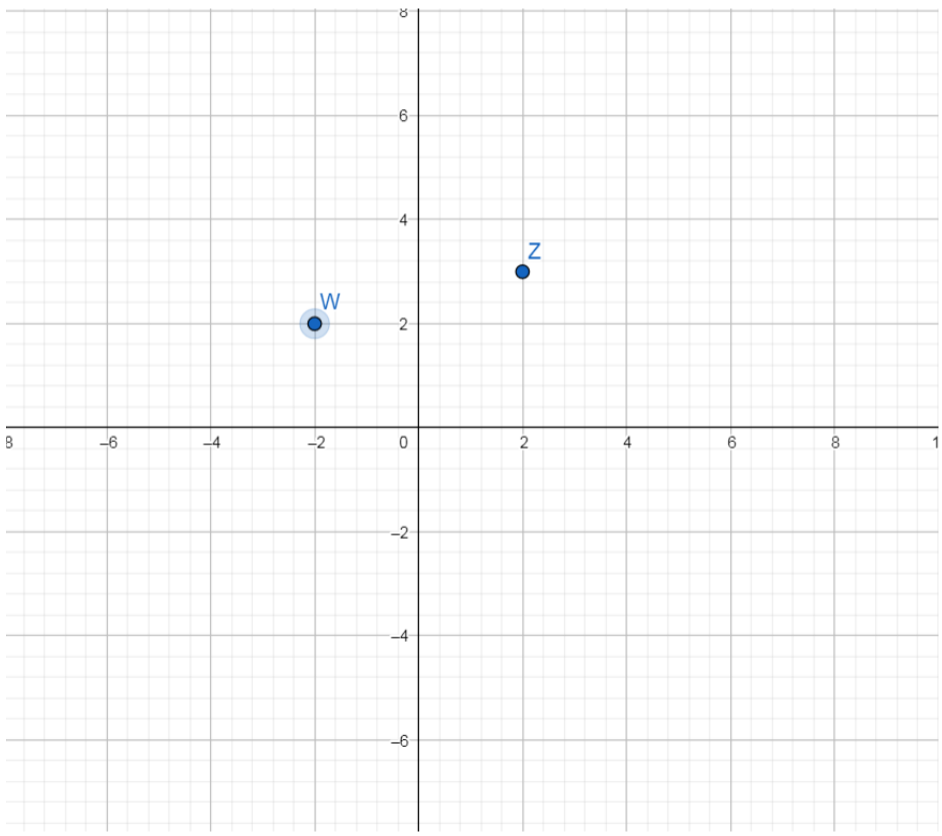
O conjunto dos complexos, assim como o dos Reais, pode ser representado graficamente através de pares ordenados, no entanto, este conjunto não faz é representado no plano cartesiano, e sim no plano de Argand-Gauss. A principal diferença para o plano cartesiano é que o eixo Y representa número imaginários ao invés de números reais.

Um ponto, formado por um par ordenado, no plano de Argand-Gauss recebe o nome de afixo.

Por exemplo:

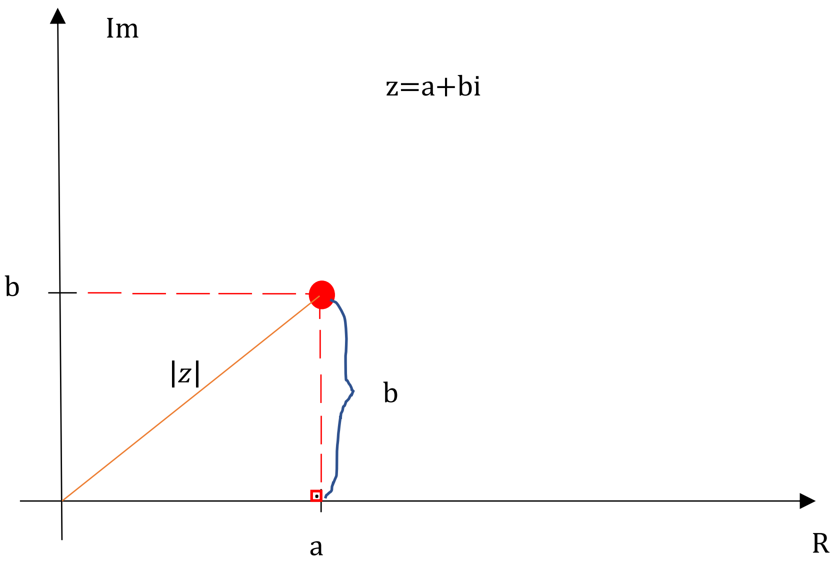


Se $z = 2 + 3i$ e $w = -2 + 2i$



MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Existem diversas maneiras de se definir o módulo de um número complexo, uma delas - a que utilizarei - será através da representação geométrica. O módulo de um número complexo é a reta que liga a origem do plano de Argand-Gauss ao afixo do número complexo em questão, formando um triângulo retângulo.



Desta forma, é possível encontrar o valor numérico do módulo de z através do Teorema de Pitágoras.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

OBS: $|z|$ *pode ser representado pela letra grega* $\rho = rho$ ($l\hat{e} - se$ rô).

Por exemplo:

Determinar o módulo de z e w, sendo $z = 2 + 3i$ e $w = 5i$

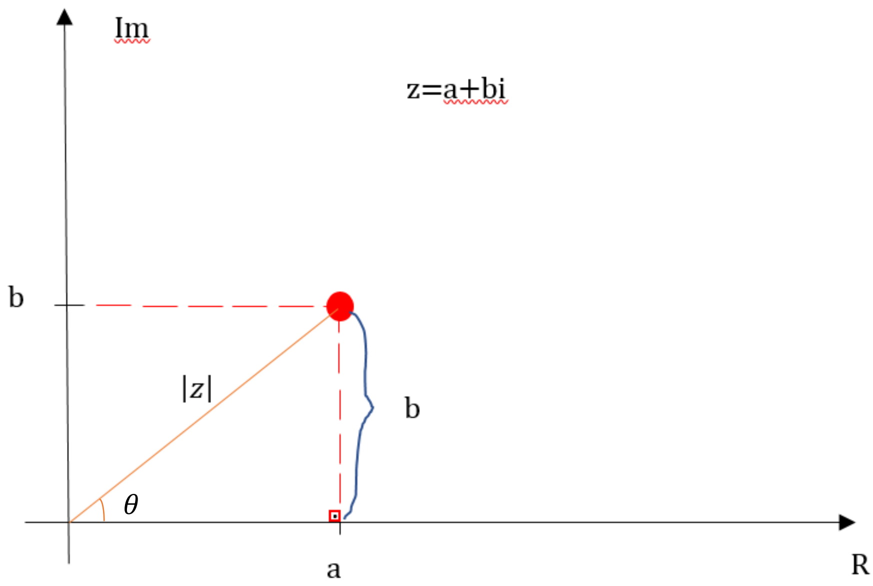
$|z| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{4+9} \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$

$|w| = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} \Rightarrow |w| = \sqrt{0+25} \Rightarrow |w| = \sqrt{25} \Rightarrow |w| = 5$

ARGUMENTO

O argumento de um número complexo é definido pelo ângulo formado entre o eixo dos reais e o módulo do número complexo. Para determinar o valor numérico deste, é necessário conhecimento básico de trigonometria.

Tomemos como base o gráfico a seguir:



Note que é formado um triângulo retângulo tendo $|z|$ *a hipotenusa e tendo a e b como catetos*. Além disso, o argumento fica claro nesta imagem, sendo definido pela letra grega $\theta = theta$ ($l\hat{e} - se\ t\acute{e}ta$).

É importante lembrar que:

$$sen = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$cos = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Dessa forma, temos :

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} \quad \text{ou} \quad sen\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad ou \;\; cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

OBS: É de suma importância o conhecimento relativo a ângulos notáveis e a conversão de graus para π radianos.

Tabela de Entes Trigonométricos

...

arco	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	2π
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1	0
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0	1
tangente $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	- - -	0	- - -	0

FORMA TRIGONOMÉTRICA (ou polar)

Além da forma algébrica, um número complexo pode ser representado por sua forma trigonométrica, que é definida pelo módulo do número complexo acompanhado de seu argumento.

Para demonstrar de uma maneira melhor, temos que a forma trigonométrica de um número complexos é escrita da seguinte maneira:

$$z = |z| \angle \theta° \; ou \; z = \rho \angle \theta°$$

Ou

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta) \quad que\ também\ pode\ ser\ escrito\ como\ z = \rho cis\theta$$

A segunda maneira costuma ser a mais usual em questões de vestibulares e afins.

Vale lembrar que:

$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \ e \ cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Logo,

$$b = sen\theta \cdot \rho \quad e \quad a = cos\theta \cdot \rho$$

Por exemplo:

Dê a forma trigonométrica de z=2+2i

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} => |z| = \sqrt{8} => |z| = 2\sqrt{2} \ ou \ seja \ \rho = 2\sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} => cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{4} => cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que acima foi utilizado um recurso matemático chamado racionalização, cujo objetivo é remover a raiz do denominador multiplicando tanto o numerador quanto o denominador por um elemento que assim o faça.

$$sen\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} => sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O argumento que possui $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *como seno e cosseno* é *o* â*ngulo de* 45° *ou* $\pi/4$.

Portanto, a forma trigonométrica de z é:

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \text{isen}\frac{\pi}{4})$$

Para as seguintes operações adotaremos valores fixos.

$$Seja \ z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) \quad e \quad z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação na forma trigonométrica é relativamente mais simples do que a da forma algébrica. Nela, multiplicaremos os módulos dos números complexos multiplicados e somaremos seus argumentos.

De um modo geral, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \text{isen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Por exemplo:

$$Seja\, z = 2(\cos 45° + isen45°)\ e\ w = \sqrt{3}(cos30° + isen30°)$$

$$z \cdot w = 2 \cdot \sqrt{3}(\cos(45 + 30) + isen(45 + 30))$$

$$z \cdot w = 2\sqrt{3}(cos75° + isen75°)$$

DIVISÃO

A divisão é análoga a multiplicação, dividiremos os módulos e subtrairemos os argumentos.

De um modo geral, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))$$

Por exemplo:

$$Seja\, z = 3(cos2\pi + isen2\pi)e\ w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{isen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + isen\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3}{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + \text{isen}\frac{5\pi}{3})$$

POTENCIAÇÃO

Para realizar a potenciação de números complexos, utilizaremos a primeira fórmula de Moivre. Dado $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, temos

$$z^n = \rho^n(\cos(n \cdot \theta) + isen(n \cdot \theta))$$

Não tem segredo, é só jogar na fórmula! (ou usar o raciocínio e ver que é a mesma coisa da multiplicação.)

Por exemplo:

Seja $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{isen}\frac{\pi}{3}\right)$, $z^3 =?$

$$z^3 = 5^3\left(\cos\frac{3\pi}{3} + \text{isen}\frac{3\pi}{3}\right)$$

$$z^3 = 125(cos\pi + isen\pi)\ ou\ z^3 = 125cis\pi$$

RADICIAÇÃO

A radiciação pode ser um pouco confusa a princípio, não obstante, ao entender a segunda Fórmula de Moivre, se torna uma operação trivial como as demais.

Vamos pensar da seguinte maneira, dado um número complexo

$z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, $\sqrt[n]{z}$ tem n raízes : $r_0, r_1, r_2 \dots r_{n-1}$, dadas por

$r_k = r(cos\theta_k + isen\theta_k)$ com $\theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ e $r = \sqrt[n]{\rho}$, sendo $k \in \{0,1,2 \dots, n-1\}$

Dessa forma, temos:

$rk = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \text{isen}\ \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)]$

Mas o que isso tudo quer dizer?

Bom, neste momento daremos nome aos bois. Entende-se por n , qualquer número natural maior ou igual a 2 (já que raiz de 1 é o próprio número e raiz de 0 é impossível).

k , por sua vez, será a quantidade de raízes possíveis para determinado valor de n, como k admite 0 como valor, seu valor máximo será igual a n-1.

OBS: Todas as raízes de n terão o mesmo módulo ($\sqrt[n]{\rho}$) .

Acho que ficou confuso, então vou exemplificar da seguinte forma, pensa em $\sqrt[2]{z}$, o n dessa raiz é 2, então os valores de k possíveis para essa raiz serão 0 e 1.

Se n for igual a 3, os valores possíveis para k serão 0, 1 e 2, nos dando um total de 3 raízes, ficou claro?

Claro ou não, farei um exemplo utilizando valores numéricos para elucidar possíveis dúvidas do leitor.

Calcular as raízes cúbicas de -1, ou seja, $\sqrt[3]{-1}$

Primeiramente, é preciso descobrir o módulo e o argumento de z. Sendo

$z = -1 + 0i$, $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} => \rho = 1$

$$cos\theta = -\frac{1}{1} = -1 \quad e \quad sen\theta = \frac{0}{1} = 0$$

O argumento que tem os valores de -1 e 0 para cosseno e seno, respectivamente, é o ângulo de 180° ou π. Logo $\theta = \pi$

Olhemos novamente para a Segunda Fórmula de Moivre:

$$rk = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \text{isen}\ \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)]$$

E agora a gente pensa, se $n = 3$, quantos valores de k serão possíveis? Exato! Três valores. Dessa forma, será necessário fazer 3 contas, uma com k=0, outra com k=1 e outra com k=2.

Comecemos com k=0

$$r0 = \sqrt[3]{1}\ [\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) + \text{isen}\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)] \ => r0 = 1(\cos\frac{\pi}{3} + \text{isen}\frac{\pi}{3})$$

$$r0 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Agora k=1

$$r1 = \sqrt[3]{1}\ [\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) + \text{isen}\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right)] => r1 = 1(cos\pi + isen\pi)$$

$$r1 = -1 + 0i = -1$$

E, por fim, k=2

$$r2 = \sqrt[3]{1}\ [\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) + \text{isen}\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right)] \ => r2 = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + \text{isin}\frac{5\pi}{3})$$

$$r2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Desta maneira, encontramos os 3 valores que correspondem a $\sqrt[3]{-1}$.

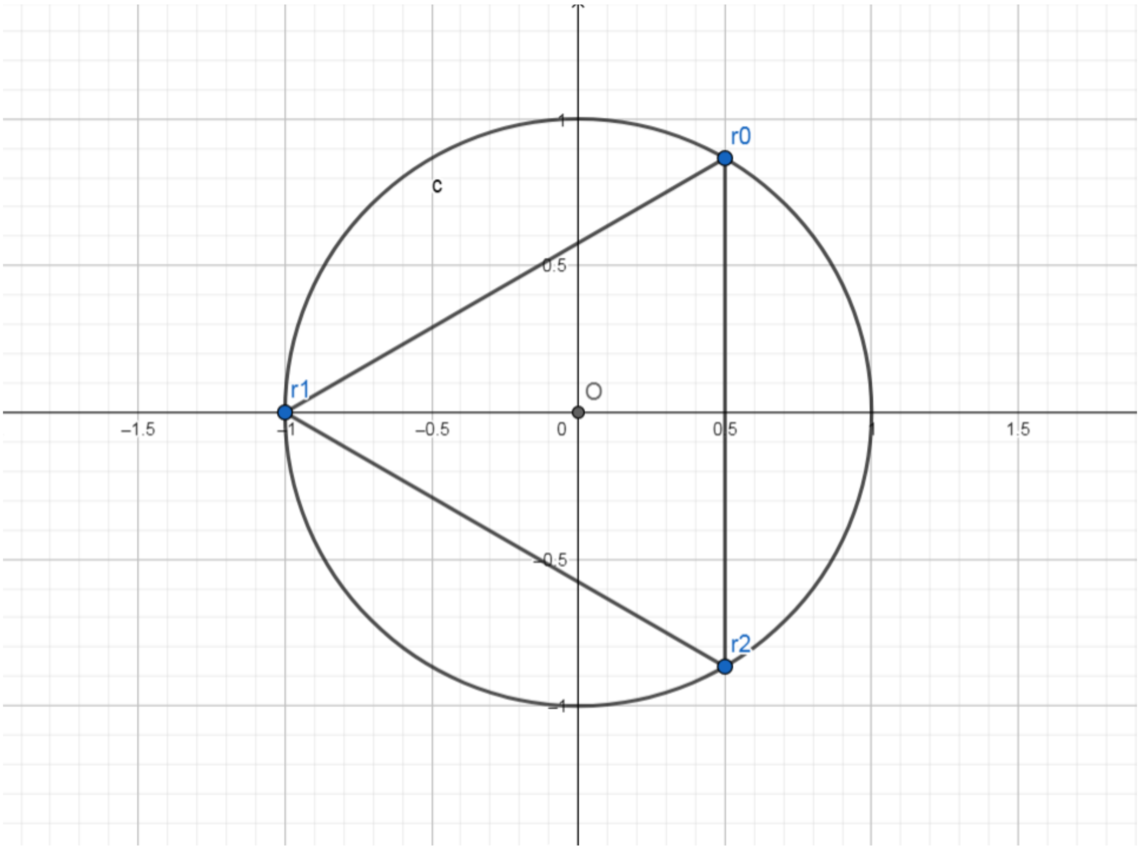
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Uma coisa legal da radiciação, é que como todas as raízes possuem o mesmo módulo ($\sqrt[n]{\rho}$), elas podem ser representadas como pontos de uma circunferência de centro (0,0) e raio $r = \sqrt[n]{\rho}$ no plano de Argand-Gauss, formando um polígono regular inscrito se $n \geq 3$.

Tomemos como exemplo a raiz desenvolvida anteriormente. $\sqrt[3]{-1}$ formará um triângulo inscrito na circunferência de r= 1, com pontos $r0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $r1 = (-1{,}0)$

$e\ r2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Observe a imagem abaixo:



Uma raiz quarta formaria um quadrado, uma raiz quinta formaria um pentágono e assim por diante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson. *FUNDAMENTOS DE MATEMATICA ELEMENTAR: COMPLEXOS, POLINÔMIOS, EQUAÇÕES*. 1. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977. 207 p. 6 vols.

PEREIRA, Paulo. COMPLEXOS: RADICIAÇÃO (2ª FÓRMULA DE MOIVRE) (AULA 14/14) . 2017. (15m33s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hvG_1MO9XlQ>. Acesso em: 15 jul. 2020.