Herleitung zur Quantisierung der Leitfähigkeit in Nanodrähten

Jakob Remmert

Februar 2025

1 Grundlagen

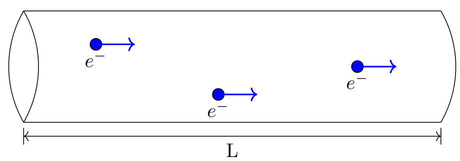

Abbildung 1: Strom im klassischen Draht

Klassisch verstehen wir den Strom I als die Ladung Q, die pro Zeiteinheit t durch unseren Draht der Länge L fließt.
Dabei bezeichnet N die Anzahl der Elektronen im Draht, e die zugehörige Elementarladung und v die Geschwindigkeit, mit welcher diese sich durch den Draht fortbewegen.

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{t} \underset{t=L/v}{=} \frac{N \cdot e \cdot v}{L} \Rightarrow \frac{I}{e} = \frac{N \cdot v}{L} \tag{1}$$

Elektronen lassen sich jedoch nicht nur als klassisches Teilchen, sondern auch als Welle beschreiben. Dies nennt man den Welle-Teilchen-Dualismus.
Gleichung 2 setzt dabei den Impuls p als klassische Größe in Verbindung mit der Wellenlänge λ eines Elektrons und schafft so eine Relation zwischen klassischer und quantenphysikalischer Betrachtungsweise. Dabei ist h das Plancksche Wirkungsquantum, eine Konstante.

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{2}$$

Außerdem gilt für die kinetische Energie E von Elektronen mit Masse m.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \overbrace{=}^{p=mv} \frac{p^2}{2m} \tag{3}$$

2 Ausbildung des Nanodrahtes

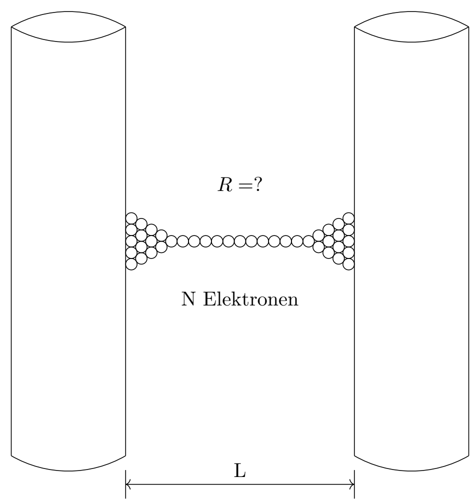

Abbildung 2: Ausbildung des Nanodrahtes

Werden die Goldrähte langsam voneinander getrennt, bilden sich für kurze Zeit Nanodrähte zwischen den 2 Drähten aus. Diese haben eine Dicke von nur wenigen Atomen, eine Länge L und bestehen aus N Atomen, von denen jedes ein freies Elektron besitzt.

L ist nur wenige Mikrometer lang, auf atomarer Skala jedoch noch so "groß", dass der Nanodraht als eindimensionaler Potentialtopf der Länge L betrachtet werden kann.

3 Der Potentialtopf

Im Potentialtopf können wir die Elektronen als stehende Wellen betrachten. Dadurch, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons außerhalb des Drahtes 0 ist (das Elektron kann sich nur innerhalb des Drahtes aufhalten) und die Welle kontinuierlich sein muss, muss die Elektronenwelle einen Knoten am Rand des Potentialtopfes haben. Daraus folgt, dass nur bestimmte Wellenlängen möglich sind (s. Abb. 3):

$$\lambda_i = \frac{2}{i}L \quad ; i = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Kennt man die Wellenlänge, kann man mithilfe der de-Broglie-Beziehung (2) den Impuls eines Elektrons berechnen.

$$p_i = \frac{h}{\lambda_i} = i\frac{h}{2L} \tag{5}$$

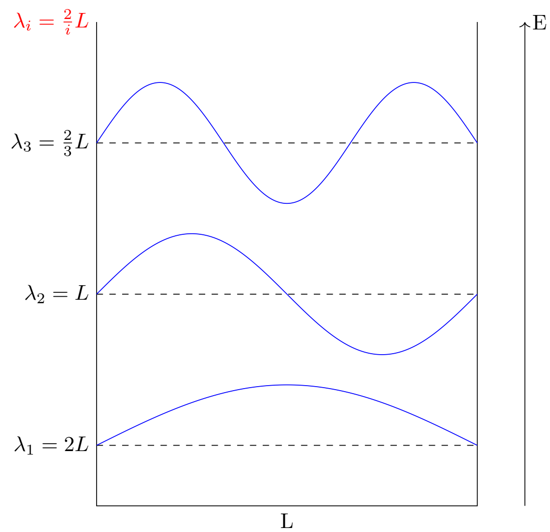

Abbildung 3: Elektronenwellen im Potentialtopf

Aus dem Impuls kann man wiederum die Geschwindigkeit und die kinetische Energie des Elektrons bestimmen.

$$v_i = \frac{p_i}{m} = i\frac{h}{2mL} \tag{6}$$

$$E_i \underset{3}{=} \frac{p_i^2}{2m} = i^2\frac{h^2}{2m\left(2L\right)^2} = i^2\frac{h^2}{8mL^2} \tag{7}$$

4 Energieniveaus

Äquivalent zum Atom halten sich auch in unserem Nanodraht die Elektronen in diskreten Energieniveaus auf (s. Abb. 4). Aufgrund des Pauli-Prinzips befinden sich in jedem Energieniveau 2 Elektronen. [1]
Das letzte besetzte Energieniveau wird Fermi-Energie E_F genannt.
Dadurch, dass sich N freie Elektronen in dem Draht befinden und jedes Niveau mit 2 Elektronen besetzt ist, gilt:

$$E_F = E_{N/2} \tag{8}$$

In unserer Herleitung haben wir bis jetzt angenommen, dass es sich bei den Elektronen um stehende Wellen handelt. In der Realität propagieren unsere Wellen jedoch durch den Draht.

[1] Aus dem Pauli Prinzip folgt, dass Elektronen in dem selben Energieniveau nicht exakt gleich sein dürfen. Die eine Eigenschaft, in der sie sich unterscheiden können, ist der Spin. Ein Elektron hat entweder einen Spin von $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$.

Wir können unser Modell trotzdem nutzen, indem wir die stehenden Wellen als Überlagerung von sich nach links und nach rechts ausbreitenden Wellen betrachten.
Für den Fall, dass keine Spannung anliegt, gilt somit:

$$\begin{aligned} N_{\rightarrow} &= N_{\leftarrow} = \frac{N}{2} \\ \Rightarrow E_F &= E_{N\rightarrow} = E_{N\leftarrow} \end{aligned} \tag{9}$$

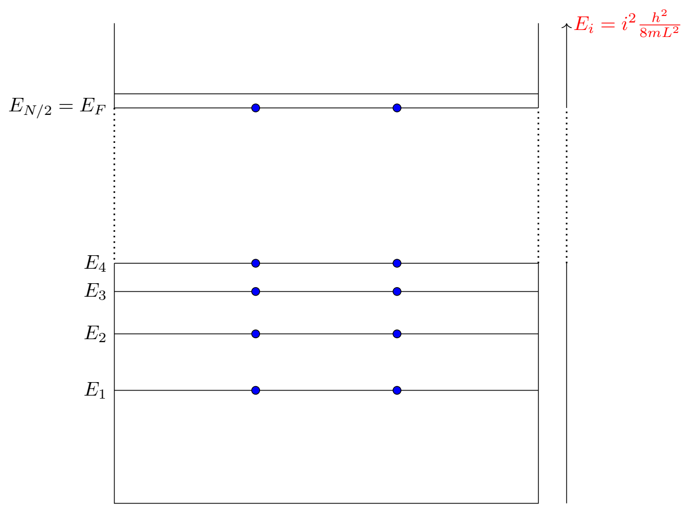

Abbildung 4: Energieniveaus in unserem Nanodraht

5 Anlegen einer Spannung

Legen wir nun eine Spannung zwischen die zwei Drähte an, so erhöhen wir die Fermi-Energien auf der einen Seite des Nanodrahtes (s. Abb. 6). Die Elektronen können sich nun durch den Draht bewegen.

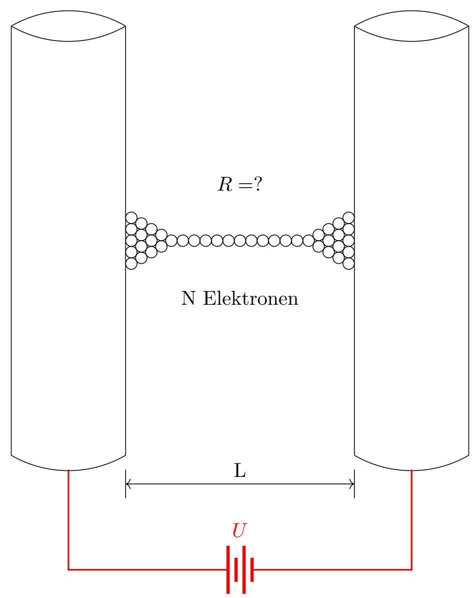

Abbildung 5: Nanodraht mit angelegter Spannung U

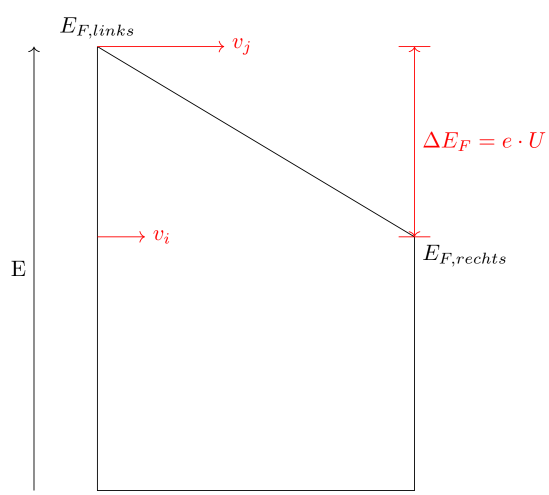

Abbildung 6: Differenz der Fermi Energien bei Spannung U

$$
\begin{aligned}
e \cdot U = E_{F,links} - E_{F,rechts} = E_j - E_i &\underset{7}{=} \frac{h^2}{8mL^2}\left(j^2 - i^2\right) \\
&= \frac{h^2}{8mL^2} \overbrace{(j-i)}^{=N_{\rightarrow}-N_{\leftarrow}=\Delta N} (j+i) = \overbrace{\frac{h^2}{8mL^2}}^{\frac{h}{2L}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2mL}} \Delta N\,(j+i) \\
&= \frac{h}{2mL}\Delta N \frac{1}{2}\frac{h}{2mL}(j+i) \underset{6}{=} \frac{h}{2mL}\Delta N \overbrace{\frac{1}{2}(v_j + v_i)}^{\bar{v}} \qquad (10) \\
&= \frac{h}{2L}\Delta N \bar{v} = \frac{h}{2}\frac{\Delta N \bar{v}}{L} \underset{1}{=} \frac{h}{2e} I \\
\Rightarrow U = \frac{h}{2e^2} I \Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} \approx 12,9\Omega
\end{aligned}
$$

In der Realität bildet sich jedoch nicht nur ein Nanodraht, sondern mehrere, welche nacheinander abreißen. Beim Ausbilden von k Drähten reduziert sich der Widerstand, wie man es bei einer klassischen Parallelschaltung erwarten würde, um einen Faktor $\frac{1}{k}$.
Somit gilt für den Widerstand.

$$
R = \frac{h}{2ke^2} \quad ; k = 1, 2, 3 \ldots \qquad (11)
$$

6 Der Schaltkreis

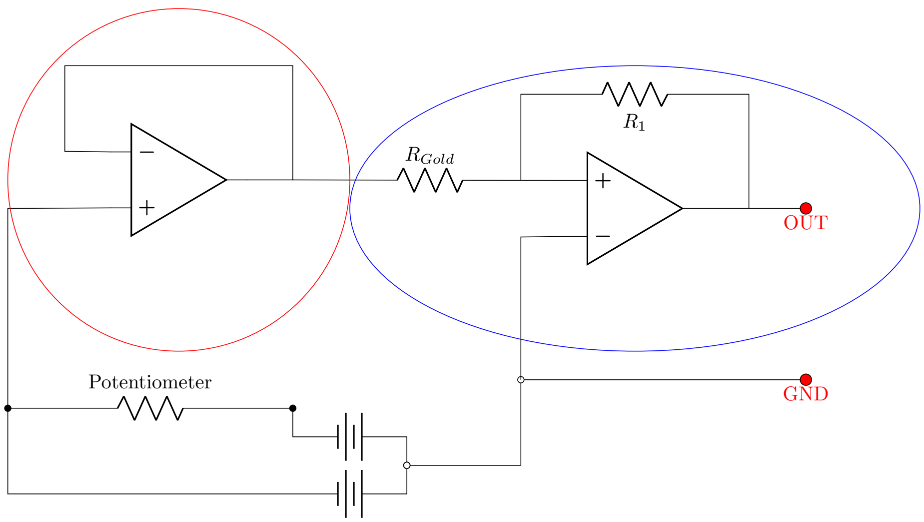

Abbildung 7: Der Schaltkreis

In diesem Abschnitt werden die Funktionsweisen der 2 eingebauten Operationsverstärker in dem Aufbau erläutert.

ROT:
Der im roten Kreis markierte Operationsverstärker fungiert in dieser Schaltung als sogenannter Spannungsfolger. Das bedeutet, dass er die Eingangsspannung nahezu exakt an seinem Ausgang wiedergibt. Durch diese Eigenschaft wird der Teil des Schaltkreises vor dem Golddraht effektiv von dem nachfolgenden Teil entkoppelt. Unabhängig davon, was hinter dem Spannungsfolger geschieht, liefert er stets die gleiche Ausgangsspannung, die der Eingangsspannung entspricht.

BLAU:
Der Operationsverstärker im blauen Kreis sorgt hier dafür, dass die Stufen äquidistant, d.h. gleich weit voneinander entfernt, sind.
Konkret gilt:

$$I = \frac{U_{ein}}{R_{Gold}} = \frac{U_{aus}}{R_1} \Rightarrow U_{aus} = \frac{R_1}{R_{Gold}} \cdot U_{ein} \underset{11}{=} k \cdot \frac{2e^2}{h} \cdot R_1 \cdot U_{ein} \qquad (12)$$