

Laboratorium AiSD

Operacje na B-drzewach

B-drzewa są parametryzowane wartością t – minimalnym stopniem wężła. Każdy węzeł, z wyjątkiem korzenia, zawiera minimalnie $t - 1$ kluczy. Maksymalna liczba kluczy wynosi $2t - 1$. Klucze w węźle uporządkowane są rosnąco, a poddrzewo znajdujące się między kluczami K_n i K_{n+1} zawiera klucze k spełniające nierówność: $K_n \leq k \leq K_{n+1}$, co jest rozwinięciem własności drzewa BST.

Operacje wykonywane na B-drzewie gwarantują jego zbalansowanie, gdyż liście zawsze znajdują się na tym samym poziomie.

W książce Cormena można znaleźć prostsze wersje poniższych algorytmów, które wymagają pojedynczego przejścia po drzewie. Działają one zapobiegawczo, nadając drzewu taką strukturę, że będzie ono poprawne po danej operacji. **Tutaj przedstawiono algorytmy w wersji z naprawianiem, gdzie przywracanie własności B-drzewa następuje PO wykonaniu operacji.**

1. Wyszukiwanie

Operacja wyszukiwania klucza k przebiega w następujący sposób:

- 1) Jeżeli korzeń jest pusty, wartość nie występuje w drzewie. Koniec.
- 2) Wpp, znajdź miejsce wśród kluczy, gdzie k powinno znajdować się w węźle:
 - a. Jeśli występuje, zwróć ją. Koniec.
 - b. Wpp:
 - i. Jeżeli węzeł jest liściem, wartość nie występuje w drzewie. Koniec.
 - ii. Wpp, zejdź do poddrzewa, w którym wartość powinna się znajdować i wróć do 2).

2. Wstawianie

Operacja wstawiania wymaga pomocniczej operacji podziału węzła wykonywanej dla węzłów pełnych - o $2t - 1$ kluczy.

Przy podziale, środkowy klucz K węzła jest przesuwany do rodzica, zaś druga połowa kluczy i dzieci węzła trafia do nowo utworzonego prawego brata W_R . Pierwsza połowa węzłów i kluczy pozostaje w dzielonym węźle W (teraz już jako W_L).

W wyniku podziału, węzeł oraz jego powstały brat mają minimalną $(t - 1)$ liczbę kluczy.

Operacja wstawiania klucza k przebiega w następujący sposób:

- 1) Jeśli korzeń jest pusty, tworzony jest nowy korzeń i wstawiany jest do niego klucz k . Koniec.
- 2) Wpp, tak, jak w algorytmie wyszukiwania, znajdowany jest liść, do którego klucz k powinien trafić. Jeśli na ścieżce od korzenia do liścia znaleziono wartość k , to kończymy.
- 3) Jeśli węzeł (liść) nie jest pełny, to wstawiamy do niego k . Koniec.
- 4) Wpp, dokonujemy podziału węzła W na W_L oraz W_R i wstawiamy wartość k do odpowiedniego węzła. Wartość środkowa k' jest wstawiana do rodzica węzła W jak w 3).
- 5) Jeżeli w wyniku podziałów podzielony został również korzeń, tworzony jest nowy korzeń drzewa i wstawiana jest do niego wartość środkowa pochodząca z oryginalnego korzenia. Koniec.

3. Usuwanie

Operacja usuwania wymaga dwóch operacji pomocniczych – rotacji oraz złączenia węzłów.

Złączenie węzłów (minimalnych) polega na odwróceniu operacji podziału – klucz K rozdzielający węzły W_L i W_R w rodzicu zostaje wstawiony do W_L , klucze i dzieci W_R zostają przepisane na koniec W_L . W_R zostaje usunięty.

Rotacja z lewego/prawego brata W_B węzła W polega na zabraniu z W_B klucza maksymalnego/minimalnego, przeniesieniu go do rodzica w miejsce

klucza K i opuszczenie K do węzła W . Do W przepinane jest skrajne prawe/lewe dziecko W_B . W wyniku rotacji, węzeł „kradnie” klucz ze swojego brata oraz skrajne dziecko.

Operacja usuwania klucza k przebiega w następujący sposób:

- 1) Jeżeli korzeń jest pusty – Koniec.
- 2) Wpp, klucz k jest wyszukiwany w drzewie:
 - a. Jeżeli go nie znaleziono – Koniec.
 - b. Wpp:
 - i. Jeżeli k znajduje się w liściu, to jest on z niego usuwany. Jeśli w wyniku tej operacji węzeł ma mniej niż $t - 1$ kluczy i nie jest on korzeniem, to dokonywana jest naprawa:
 1. Jeśli lewy brat nie jest minimalny, to wykonywana jest rotacja z lewego brata. Koniec.
 2. Jeśli prawy brat nie jest minimalny, to wykonywana jest rotacja z prawego brata. Koniec.
 3. Wpp, węzeł jest łączony z lewym lub prawym bratem, co może sprawić, że rodzic będzie miał mniej niż minimalną liczbę kluczy. Jeśli rodzic spełnia warunku B-drzewa, to Koniec. Wpp, rodzic jest naprawiany tak jak w: 1 -> 2 -> 3.
 - ii. Jeśli k znajduje się w węźle wewnętrznym, to:
 1. Usuwany jest poprzednik węzła, o ile nie wymaga to naprawy. W przeciwnym przypadku usuwany jest następnik, o ile nie wymaga to naprawy. Zarówno poprzednik, jak i następnik znajdują się w liściu, więc usunięcie przebiega jak w punkcie i.
 2. Jeśli usunięcie poprzednika i następnika wymaga naprawy, to usuwany jest którykolwiek z nich.
 3. Usunięta wartość k' zastępuje k w węźle. Koniec.
- 3) Jeśli w wyniku usuwania korzeń stał się pusty, to jest on zastępowany przez swoje jedyne dziecko.

Krok ii.1 stanowi rozwiązanie idealne, jednak jego pominięcie, tj. nieszukanie lepszej (pod względem naprawy) z wartości (poprzednika/następnika) do usunięcia, gwarantuje otrzymanie poprawnego B-drzewa. Z tego powodu, celem uproszczenia, krok ii.1 można pominąć.