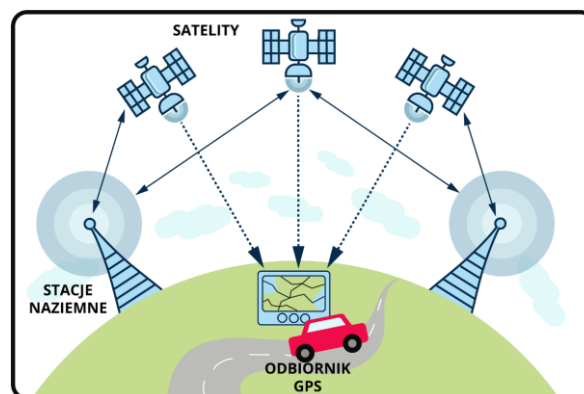


1. Wstęp teoretyczny

GPS (ang. Global Positioning System), którego pełna nazwa brzmi GPS–NAVSTAR (ang. Global Positioning System – Navigation Signal Timing and Ranging), jest to system nawigacji satelitarnej, stworzony przez Departament Obrony Stanów Zjednoczonych, obejmujący swoim zasięgiem całą kulę ziemską. System ten składa się z trzech segmentów:

- segmentu kosmicznego – 31 satelitów orbitujących wokół Ziemi na średniej orbicie okołoziemskiej;
- segmentu naziemnego – stacji kontrolnych i monitorujących na Ziemi
- segmentu użytkownika – odbiorników sygnału.

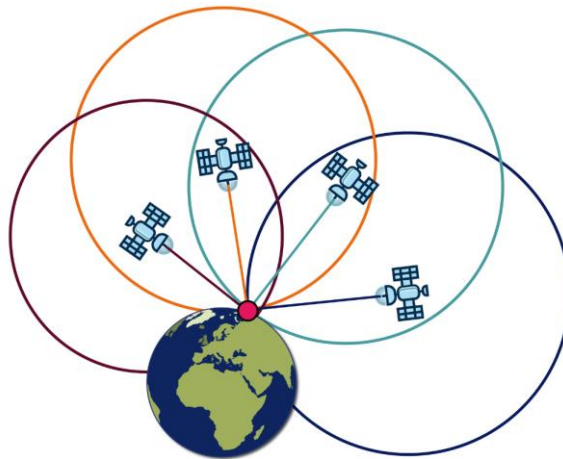
Działanie systemu GPS polega na pomiarze czasu dotarcia sygnału radiowego z satelitów do odbiornika. Znając prędkość fali elektromagnetycznej oraz znając dokładny czas wysłania danego sygnału można obliczyć odległość odbiornika od satelitów. Sygnał GPS zawiera w sobie informację o układzie satelitów na niebie (tzw. almanach) oraz informację o ich teoretycznej drodze oraz odchylen od niej (tzw. efemeryda). Odbiornik GPS w pierwszej fazie aktualizuje te informacje w swojej pamięci oraz wykorzystuje w dalszej części do ustalenia swojej odległości od poszczególnych satelitów, dla których odbiornik jest w zasięgu. Wykonując odpowiednie operacje mikroprocesor odbiornika może obliczyć pozycję geograficzną (długość, szerokość geograficzną oraz wysokość elipsoidalną) i następnie podać ją w wybranym układzie odniesienia, a także aktualny czas GPS z bardzo dużą dokładnością.



Rys. 1 Schemat działania systemu GPS. Źródło: Englishsquare.pl Sp. z o.o., CC BY-SA 3.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

Bardzo ważnym elementem systemu GPS jest czas. Odbiornik mierzy czas przebiegu sygnału od satelity do anteny odbiornika, a jednocześnie obliczane są współrzędne miejsca, w którym znajdował się satelita w momencie nadania sygnału. Dzięki temu znana jest odległość odbiornika od satelity. Jeden pomiar pozwala na wytyczenie pewnego rodzaju sfery w miejscu, gdzie znajdował się satelita w momencie nadania sygnału. Wykonanie dwóch kolejnych pomiarów pozwoli na zakreślenie dwóch innych sfer. Wyznaczone w ten sposób obszary przecinają się. Miejsca przecięć sfer będą określać poszukiwaną lokalizację odbiornika. Mając łącznie trzy pomiary (trzy sfery), ustalone zostaną dwa punkty, w których może

znajdować się antena odbiornika. Dlatego też konieczny jest jeszcze jeden pomiar (czwarty) pozwalający na uwzględnienie poprawki zegara odbiornika.



Rys. 2 Lokalizacja GPS. Źródło: Englishsquare.pl Sp. z o.o., CC BY-SA 3.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

GPS pracuje na obszarze całej Ziemi, a satelity krążą po orbitach na wysokości około 20183 km. Zadaniem systemu jest dostarczenie użytkownikom informacji o ich położeniu oraz ułatwienie nawigacji po terenie.

Pierwsze prace nad stworzeniem satelitarnego systemu nawigacji rozpoczęły się w roku 1973 i miały mieć zastosowanie tylko do celów wojskowych. Pierwszy satelita systemu GPS został umieszczony na orbicie w styczniu 1978 roku, a w lipcu 1995 roku system uzyskał pełną sprawność operacyjną. Obecnie z systemu GPS może korzystać w zasadzie każdy – wystarczy tylko posiadać odpowiedni odbiornik GPS.

Głównym zadaniem systemu jest dostarczenie użytkownikom informacji o ich położeniu oraz ułatwienie nawigacji po terenie, dzięki temu technologia GPS znalazła swoje zastosowanie między innymi w:

- transporcie drogowym,
- pozycjonowaniu maszyn budowlanych,
- geodezji, kartografii,
- badaniu trzęsień ziemi
- ochronie środowiska,
- ratownictwie medycznym na wodzie i lądzie,
- rolnictwie,
- lotnictwie (pozycja samolotu, helikoptera itp.),
- żegludze morskiej.

2. Położenie w układzie współrzędnych kartezjańskich

Do wyznaczenia dokładnej pozycji za pomocą systemu GPS konieczny jest jednoczesny pomiar z co najmniej czterech różnych satelitów. W rozpatrywanym przypadku dysponujemy sygnałem pochodzącym z 5 satelitów znajdujących się na wysokości $2 \cdot 10^7$ metra nad powierzchnią morza. Współrzędne położenia w układzie sferycznym (szerokość geograficzną - θ oraz długość geograficzną - ϕ) i czas nadesłania sygnału od poszczególnych satelitów przedstawiono w tabeli 1.

Nr	Szerokość geograficzna [°]	Długość geograficzna [°]	Czas nadesłania sygnału [s]
1	52.885907	13.395837	6.681942096329203e-02
2	50.312052	12.373351	6.685485794155749e-02
3	47.796902	19.381854	6.678159811857652e-02
4	50.619584	26.244260	6.675754177119679e-02
5	55.488272	28.787526	6.685983402652426e-02

Tabela 1 Współrzędne położenia satelitów w układzie sferycznym oraz czas nadesłania przez nie sygnału do odbiornika

Na potrzeby zadania przyjmujemy, że środek układu współrzędnych kartezjańskich znajduje się w środku Ziemi, zaś promień wodzący jest to odległość od środka Ziemi do poziomu morza i wynosi zgodnie z założeniami – 6378137 m.

2.1 Konwersja układu współrzędnych sferycznych na współrzędne kartezjańskie

Znając szerokość – θ i długość geograficzną – ϕ oraz promień wodzący – r , jesteśmy w stanie przejść z układu sferycznego na kartezjański korzystając z następujących wzorów:

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \cos \phi \\ y = y(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \sin \phi \\ z = z(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \end{cases}$$

Jakobian przejścia wynosi:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta$$

2.2 Konwersja układu współrzędnych kartezjańskich na współrzędne sferyczne

Analogiczną konwersję układów współrzędnych możemy wykonać znając współrzędne położenia (x, y, z) . Tego typu przejście wyraża się następującymi wzorami:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ \theta = \arcsin \frac{z}{r} \end{cases}$$

3. Optymalizacja bez ograniczeń metodą najmniejszych kwadratów

Znając współrzędne kartezjańskiego każdego z satelitów (x_i, y_i, z_i) jesteśmy w stanie określić ich odległość od odbiornika o współrzędnych (x, y, z). W tym celu należy skorzystać z następującego równia:

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} = ct_i$$

Gdzie:

i – numer rozpatrywanego satelity $i = 1, 2, 3, 4, 5$

c – prędkość światła w próżni $c = 299792458 \frac{m}{s}$

t_i – czas transmisji sygnału i -tego satelity

Po przekształceniach powyższego wzoru otrzymujemy następujące równanie:

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 - (ct_i)^2 = 0$$

Stosując metodę najmniejszych kwadratów jesteśmy w stanie określić współrzędne (x, y, z), zgodne ze wzorem:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^5 ((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 - (ct_i)^2)^2$$

4. Wyznaczenie położenia przy pomocy programu MATLAB oraz AMPL

Otrzymany wynik:

- we współrzędnych kartezjańskich

$$(x, y, z) = (3688880, 1439486, 5000227)$$

- we współrzędnych sferycznych

$$(r, \theta, \varphi) = (6378137, 51.6235, 21.3169)$$

Współrzędne geograficzne szukanego punktu to:

$$(51.6235, 21.3169) = (51^\circ 37' 24.6'', 21^\circ 19' 0.84'')$$

5. Wpływ zmian poszczególnych parametrów na uzyskany wynik

5.1 Punkt startowy

W implementacji metody optymalizacji realizującej metodę Levenberga-Marquardta konieczne jest wyznaczenie punktu startowego. Do zbadania wpływu wyboru punktu startowego na dokładność otrzymanych wyników posłużono się 5 punktami, których położenie jest następujące:

1. Punkty (0,0,0) – punkt startowy znajdujący się w środku kuli ziemskiej (w początku układu współrzędnych).
2. Punkty (3.6468e+06, 1.4003e+06, 5.0419e+06) - punkt startowy znajdujący się na powierzchni Ziemi – Pałac Kultury i Nauki.
3. Punkty (3.6697e+06, 1.4091e+06, 5.0735e+06) - punkt startowy znajdujący się w pobliżu kuli ziemskiej.
4. Punkt (1.5011e+07, 7.4007e+06, 2.0389e+07) - punkt startowy znajdujący się w pobliżu jednej z satelita (w naszym przypadku jest to satelita numer 4).
5. Punkt (7.5054e+10, 3.7003e+10, 1.0194e+11) – punkt startowy znacznie oddalony od kuli ziemskiej.

Wpływ doboru odpowiedniego punktu startowego na dokładność otrzymanego rozwiązania przedstawiono w tabeli 2.

Nr	Współrzędne punktu startowego	Norma residuum
1	(0,0,0)	5.46875e-02
2	(3.6468e+06, 1.4003e+06, 5.0419e+06)	4.29688e-02
3	(3.6697e+06, 1.4091e+06, 5.0735e+06)	3. 90626e-02
4	(1.5011e+07, 7.4007e+06, 2.0389e+07)	1.75496e+25
5	(7.5054e+10, 3.7003e+10, 1.0194e+11)	4.23057e+30

Tabela 2 Wpływ doboru odpowiedniego punktu startowego na dokładność otrzymanych rozwiązań

Z otrzymanych wartości norm residuum wynika, że punkty startowe znajdujący się wewnątrz, na powierzchni lub w pobliżu Ziemi dają zadowalające wynik, a uzyskane przez nie normy residuum nie przekracza rzędu $e-02$.

Wybór punktu startowego znajdującego się w pewnej odległości od powierzchni Ziemi - punkty 4 i 5, skutkuje uzyskaniem norm residuum bardzo wysokich rzędów, co przekłada się na małą dokładność w otrzymanych wynikach.

5.2 Dokładność w teście STOP-u metody

Defaultowa dokładność testu stopu dla metody Levenberga-Marquardta wynosi $1e-06$. Dokładność ta implementowana jest w kodzie programu pod nazwą – TolFun. Korzystając z komendy - `options.Display='iter-detailed'` otrzymujemy tabelę statystyk opisującą obliczenia w każdej iteracji solvera. Otrzymane wyniki dla poszczególnych wartości TolFun (ang. FunctionTolerance), przy wartościach `options.StepTolerance = options.OptimalityTolerance = $1e-16$` oraz modyfikacji `options.SpecifyObjectiveGradient` między wartościami true (solver używa jacobianu zdefiniowanego przez użytkownika [zdefiniowanego w fun] lub jacobianu [przy użyciu JacobMult] dla funkcji celu), a false (wartość domyślna, solver przybliża jacobian przy użyciu różnic skończonych) prezentują się następująco:

- TolFun= $1e-06$

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	4	4.339e+29	5.93e+22	0.01	
1	8	1.19065e+29	2.59e+22	0.001	1.22499e+07
2	12	7.92564e+28	2.26e+22	0.0001	1.12206e+07
3	16	2.88222e+26	1.2e+21	1e-05	2.75543e+06
4	20	6.37364e+21	5.57e+18	1e-06	188953
5	24	3.23338e+12	1.25e+14	1e-07	896.993
6	28	0.0546875	7.78e+06	1e-08	0.0202058

Rys. 3 Wartość SpecifyObjectiveGradient=false

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	1	4.339e+29	6.07e+22	0.01	
1	2	4.93293e+27	5.09e+21	0.001	5.60446e+06
2	3	1.66474e+24	9.01e+19	0.0001	759616
3	4	2.20221e+17	3.27e+16	1e-05	14486.8
4	5	3860.77	4.33e+09	1e-06	5.27284

Rys. 4 Wartość SpecifyObjectiveGradient=true

- TolFun=1e-12

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	4	4.339e+29	5.93e+22	0.01	
1	8	1.19065e+29	2.59e+22	0.001	1.22499e+07
2	12	7.92564e+28	2.26e+22	0.0001	1.12206e+07
3	16	2.88222e+26	1.2e+21	1e-05	2.75543e+06
4	20	6.37364e+21	5.57e+18	1e-06	188953
5	24	3.23338e+12	1.25e+14	1e-07	896.993
6	28	0.0546875	7.78e+06	1e-08	0.0202058
7	32	0.0390625	3.88e+06	1e-09	4.41266e-09

Rys. 5 Wartość SpecifyObjectiveGradient=false

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	1	4.339e+29	6.07e+22	0.01	
1	2	4.93293e+27	5.09e+21	0.001	5.60446e+06
2	3	1.66474e+24	9.01e+19	0.0001	759616
3	4	2.20221e+17	3.27e+16	1e-05	14486.8
4	5	3860.77	4.33e+09	1e-06	5.27284
5	6	0.0429688	1.97e+06	1e-07	6.98055e-07

Rys. 6 Wartość SpecifyObjectiveGradient=true

- TolFun=1e-18

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	4	4.339e+29	5.93e+22	0.01	
1	8	1.19065e+29	2.59e+22	0.001	1.22499e+07
2	12	7.92564e+28	2.26e+22	0.0001	1.12206e+07
3	16	2.88222e+26	1.2e+21	1e-05	2.75543e+06
4	20	6.37364e+21	5.57e+18	1e-06	188953
5	24	3.23338e+12	1.25e+14	1e-07	896.993
6	28	0.0546875	7.78e+06	1e-08	0.0202058
7	32	0.0390625	3.88e+06	1e-09	4.41266e-09
8	58				2.80885e-10

Rys. 7 Wartość SpecifyObjectiveGradient=false

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	1	4.339e+29	6.07e+22	0.01	
1	2	4.93293e+27	5.09e+21	0.001	5.60446e+06
2	3	1.66474e+24	9.01e+19	0.0001	759616
3	4	2.20221e+17	3.27e+16	1e-05	14486.8
4	5	3860.77	4.33e+09	1e-06	5.27284
5	6	0.0429688	1.97e+06	1e-07	6.98055e-07
6	7	0.0390625	3.76e+06	1e-08	4.25725e-09
7	32				2.81562e-10

Rys. 8 Wartość SpecifyObjectiveGradient=true

- TolFun=1e-24

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	4	4.339e+29	5.93e+22	0.01	
1	8	1.19065e+29	2.59e+22	0.001	1.22499e+07
2	12	7.92564e+28	2.26e+22	0.0001	1.12206e+07
3	16	2.88222e+26	1.2e+21	1e-05	2.75543e+06
4	20	6.37364e+21	5.57e+18	1e-06	188953
5	24	3.23338e+12	1.25e+14	1e-07	896.993
6	28	0.0546875	7.78e+06	1e-08	0.0202058
7	32	0.0390625	3.88e+06	1e-09	4.41266e-09
8	58				2.80885e-10

Rys. 9 Wartość SpecifyObjectiveGradient=false

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	1	4.339e+29	6.07e+22	0.01	
1	2	4.93293e+27	5.09e+21	0.001	5.60446e+06
2	3	1.66474e+24	9.01e+19	0.0001	759616
3	4	2.20221e+17	3.27e+16	1e-05	14486.8
4	5	3860.77	4.33e+09	1e-06	5.27284
5	6	0.0429688	1.97e+06	1e-07	6.98055e-07
6	7	0.0390625	3.76e+06	1e-08	4.25725e-09
7	32				2.81562e-10

Rys. 10 Wartość SpecifyObjectiveGradient=true

Wpływ doboru dokładności stopu na działanie algorytmu przedstawiono w tabeli 3.

	Liczba iteracji		Liczba oszacowań funkcji	
	SpecifyObjectiveGradient			
TolFun	false	true	false	true
1e-06	6	4	28	5
1e-12	7	5	32	6
1e-18	7	6	32	7
1e-22	7	6	32	7

Tabela 3 Wpływ dokładności stopu na działanie algorytmu

Na podstawie otrzymanych wyników widać, że wraz ze wzrostem dokładności metody, konieczne jest wykonanie większej ilości oszacowań funkcji oraz iteracji, aby znaleźć rozwiązanie zadania.

Znaczący wpływ ma również dobór wartości parametru SpecifyObjectiveGradient. Jeżeli jego wartość jest ustawiona na – false (domyślna wartość) to solver przybliży jacobian przy użyciu różnic skończonych, a tym samym konieczna jest nieznacznie większa ilość iteracji w celu znalezienia rozwiązania oraz kilkukrotnie większa liczba oszacowań funkcji niż w przypadku, gdy wartość SpecifyObjectiveGradient = true, czyli solver używa jacobianu zdefiniowanego przez użytkownika (zdefiniowanego w fun) lub jacobianu (przy użyciu JacobMult) dla funkcji celu.

5.3 Zaburzenia danych

W świecie rzeczywistym występuje wiele różnych czynników powodujących występowanie błędów i zakłóceń przesyłanych, czy też odbieranych danych. W celu minimalizacji ich wpływu często stosuje się różnego rodzaju uproszczenia, odpowiednie zależności matematyczne, czy też wysokiej klasy wyspecjalizowany sprzęt. W rozpatrywanym przez nas przypadku przyjęliśmy na sztywno określony czas nadejścia sygnału od satelity do odbiornika, jednak w rzeczywistości pomiar czasu przebiegu sygnału obarczony jest różnego rodzaju błędami.

W tej części projektu rozpatrzony zostanie wpływ dokładności zaokrąglenia czasu nadesłanego sygnału przez poszczególne satelity na dokładność otrzymanego wyniku. Uzyskane wartości przedstawiono w tabeli numer 4.

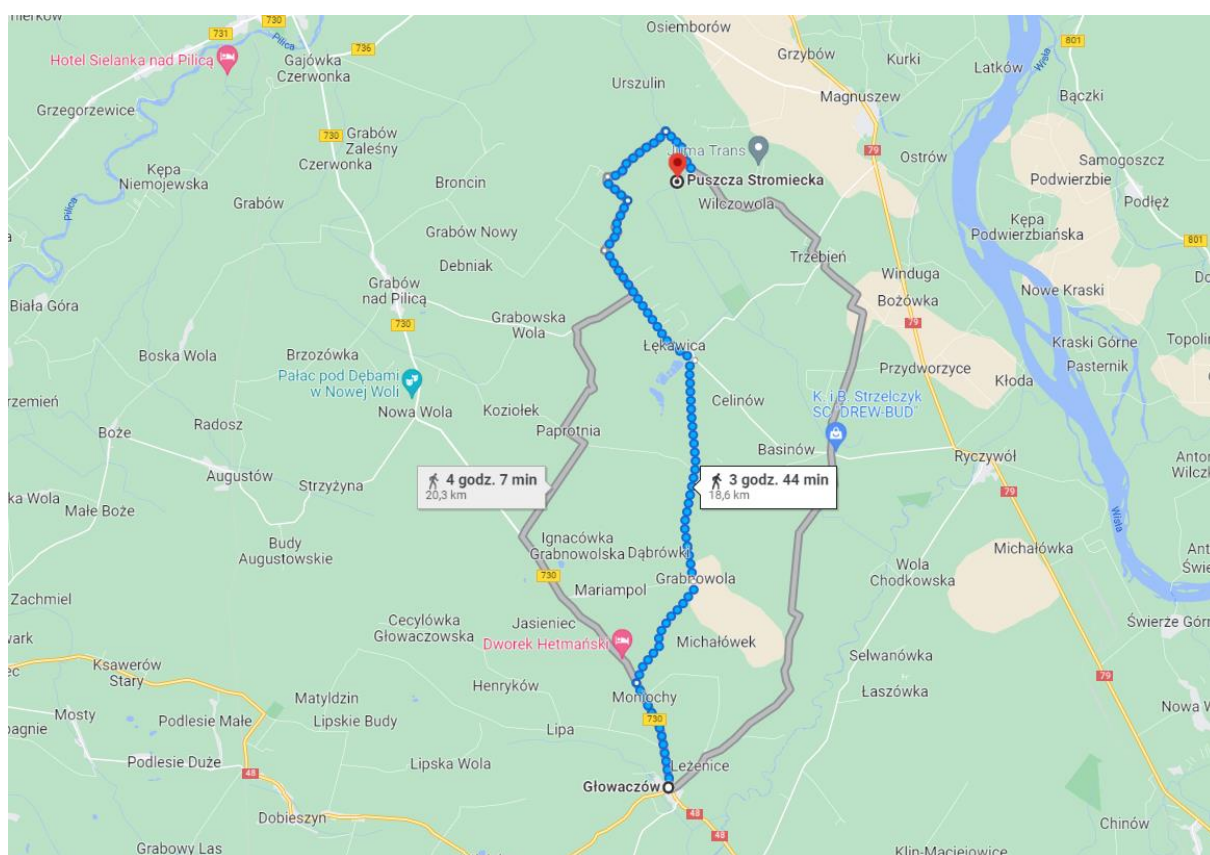
Nr satelity	Czas nadeśłania sygnału przez satelity	Szerokość geograficzna	Długość geograficzna	Norma residuum
1	6.681942096329203e-02	51.623499599999990 = 51° 37' 24.6"	21.3168762999999894 = 21° 19' 0.75"	0.054687500000000
2	6.685485794155749e-02			
3	6.678159811857652e-02			
4	6.675754177119679e-02			
5	6.685983402652426e-02			
1	6.68194209632e-02	51.623499599421606 = 51° 37' 24.6"	21.316876299838670 = 21° 19' 0.75"	3.456404296875000e +05
2	6.68548579415e-02			
3	6.67815981185e-02			
4	6.67575417711e-02			
5	6.68598340265e-02			
1	6.6819420e-02	51.623502145951484 =51° 37' 24.61"	21.316863435768937 = 21° 19' 0.71"	7.122095474644647e +13
2	6.6854857e-02			
3	6.6781598e-02			
4	6.6757541e-02			
5	6.6859834e-02			
1	6.681e-02	51.7475240919044 = 51° 44' 51.09"	21.319615069980316 = 21° 19' 10.61"	1.084461567908914e +21
2	6.685e-02			
3	6.678e-02			
4	6.675e-02			
5	6.685e-02			

Tabela 4. Wpływ zaburzenia związanego z czasem nadejścia sygnału na otrzymane wyniki

Na podstawie wyników uzyskanych w tabeli 4 widać, że spadek dokładność czasu nadejścia sygnału, nie wpływa (do pewnego stopnia zaokrąglenia) w znaczący sposób na uzyskany wynik położenia odbiornika. Mimo dużej rozbieżności wartości norm residuum (o kilka rzędów wielkości), współrzędne geograficzne szukanego punktu różnią się jedynie końcowymi

liczbami po przecinku w stopniach dziesiętnych dla liczby uciętych cyfr równej – 4 oraz 8. W ostatnim przypadku (12 uciętych cyfr względem bazowego czasu nadeśłania sygnału) zmiana położenia geograficznego szukanego punktu jest bardziej widoczna, a otrzymana współrzędna długości geograficznej różni się o $0^{\circ}7'23,49''$ względem bazowej, zaś szerokość geograficzna o $0^{\circ}0'9,86''$. Widać więc, że spadek dokładności pomiaru czasu nadejścia sygnału bardziej wpływa na współrzędną długości geograficznej, niż szerokości i do pewnego poziomu jej wpływ jest pomijalnie mały.

Różnica odległości między współrzędnymi geograficznymi - ($51^{\circ} 37' 24.6''$, $21^{\circ} 19' 0.75''$) dla najdokładniejszych czasów nadejścia sygnału, a współrzędnymi geograficznymi – ($51^{\circ} 44' 51.09''$, $21^{\circ} 19' 10.61''$) dla czasów najmniej dokładnych zaprezentowana w na poniższym rysunku:

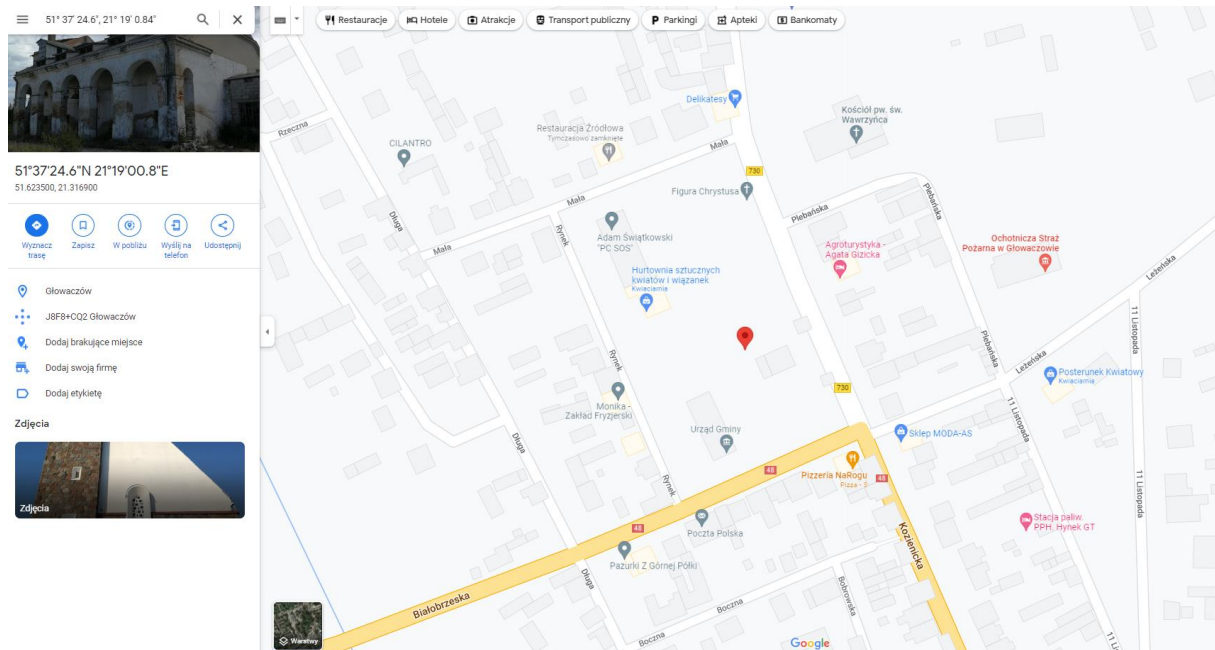


Rys. 11 Różnica odległości między dwoma skrajnymi współrzędnymi geograficznymi z tabeli 4

6. Lokalizacja wyznaczonego położenia w Google Maps

Współrzędne geograficzne szukanego punktu (51° 37' 24.6", 21° 19' 0.84").

Otrzymany wynik w Google Maps:



Rys. 12 Szukany punkt zaznaczony w Google Maps

7. Bibliografia

1. https://pl.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System
2. <https://www.multigps.pl/gps>
3. https://pl.wikipedia.org/wiki/Uk%C5%82ad_wsp%C3%B3%C5%82rz%C4%99dn%C4%99dnych_sferycznych
4. http://www.cs.put.poznan.pl/rklaus/gps/wyznaczanie_pozycji.htm
5. https://uk.mathworks.com/help/optim/ug/lsgnnonlin.html?s_tid=doc_ta
6. Robert Fourer, David M. Gay, Brian W. Kernighan, "A Modeling Language for Mathematical Programming", 2003