Macierze permutacyjne, macierze redukowalne i macierze nieredukowalne

Kuba Ptak

24 listopada 2024

1 Macierze Permutacyjne

Macierzą permutacyjną nazywamy taką macierz, która jest macierzą kwadratową ($M_{n\times n}$), w której każda kolumna zawiera *tylko jedną jedynkę*, a pozostałe jej elementy są równe zero. Weźmy macierz ortogonalną M, to znaczy $M^TM = MM^T = I_n$. Macierz ta jest nieosobliwa, a jej wyznacznik jest równy ± 1. Całkowita liczba permutacji $n \times n$ macierzy wynosi $n!$.
Jeśli przemnożymy macierz, powiedzmy R przez macierz permutacyjną M lewostronnie: MR, to działanie to zmieni kolejność rzędów macierzy R, z kolei mnożąc RM prawostronnie, zmienimy kolejność kolumn macierzy R. Macierz permutacyjna M, posiadająca pożądany efekt reorganizacji macierzy jest skonstruowana używając tych samych operacji na macierzy jednostkowej. Przykładowymi macierzami permutacyjnymi (w tym przypadku dla $n = 3$) są:

1. Macierz jednostkowa I_n: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Odwrotna macierz jednostkowa J_n : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Macierz przesunięcia K_n (zwana także cykliczną macierzą permutacji): $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Mnożenie macierzy lewostronnie i prawostronnie przez J_n odwraca kolejność rzędów (J_nA), oraz odwraca kolejność kolumn (AJ_n). Przemnożenie macierzy przez K_n zmienia kolejność rzędów (K_nA) oraz kolejność kolumn (AK_n) jedno miejsce w przód i przenosi pierwszą wartość na ostatnie miejsce, to znaczy, cyklicznie permutuje rzędy lub kolumny. Warto nadmienić, że macierz J_n jest symetryczną macierzą Hankela, a macierz K_n jest macierzą cyrkulacyjną.
Elementarna macierz pemutacji P różni się od macierzy jednostkowej I_n tylko w dwóch rzędach i kolumnach, i oraz j. Możemy zapisać to jako $P = I_n - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T$, gdzie e_i jest i-tą kolumną I_n. Macierz ta jest symetryczna i spełnia $P^2 = I_n$, a jej wyznacznikiem jest -1. Ogólna macierz permutacji może być zapisana jako produkt elementarnych machierzy permutacji $P = P_1P_2...P_k$, gdzie k jest takie, że $det(P) = (-1)^k$.
Łatwo pokazać, że $det(\lambda I - K_n) = \lambda^n - 1$, co oznacza, że wartości własne K_n wynoszą $1, w, w^2, ..., w^{n-1}$, gdzie $w = \exp(2\pi i/n)$ jest n-tym pierwiastkiem z jedynki. Macierz K_n posiada dwie diagonale jedynek, które "idą w górę macierzy" kiedy jest potęgowana: $K_n^i \neq I$, dla $i < n$ oraz $K_n^n = I$.

2 Macierze redukowalne

Definicja 1 (Macierz redukowalna)**.** Kwadratową macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy redukowalną, jeżeli za pomocą permutacji odpowiednich wierszy i kolumn możemy ją sprowadzić do postaci górnotrójkątnej. Oznacza to, że macierz jest redukowalna, jeżeli istnieje taka macierz permutacji P lub Q, że zachodzi:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

lub równoznacznie

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

gdzie B i D to macierze kwadratowe, a 0 to macierz zerowa.
Warto zaznaczyć, że jeżeli Macierz A jest redukowalna, to macierz A^T jest także redukowalna.

Definicja 2. Jeśli A jest nieredukowalną macierzą taką, że jeżeli $a_{ij} \neq 0$, $A \to a_{ij}E_{ij}$ jest redukowalna, to macierz A jest nazywana prawie redukowalną (z ang. *neraly reducive*).

Diagonalą macierzy A rozmiaru $n \times n$ jest zbiór elementów tej macierzy, po jednym z każdej kolumny i każdego wiersza. Jeżli σ jest permutacją 1, 2, ..., n, to diagonalą związaną z σ jest ciąg elementów: $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, ..., a_{n\sigma(n)}$. Gdy σ jest permutacją identycznościową, to diagonala jest nazywana diagonalą główną (z ang. *main diagonal*). Digonalą dodatnią nazywa się diagonlę, której każdy element $a_{n\sigma(n)} > 0$.

Lemat 3. Jeśli A jest redukowalną macierzą $n \times n$ z s podprzekątniowymi, to istnieje niepusty podzbiór $\omega = 1, ..., s$ taki, że $F_{ij} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $i \in \omega$ oraz $j \notin \omega$, gdzie F_{ij} to elementy podprzekątniowych.

Lemat 4. Jeśli A jest prawie redukowalną macierzą $n \times n$ z s przekątniowymi blokami, wtedy dla każdego $i \neq j$, F_{ij} zawiera co najwyżej jeden niezerowy element.

Lemat 5. Jeśli A jest prawie redukowalną macierzą $n \times n$ gdzie $n > 1$, to istnieje permutacja P, że dla pewnego $t > 1$ istnieje iloczyn $P^T AP$ w formie trywiallnej z t blokami przekątniowymi, że każdy z nich jest prawie redukowalny.

3 Macierze nieredukowalne

Kwadratową macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy redukowalną, jeżeli nie istnieje taka macierz permutacyjna P (lub Q), dla której $P^T AP$ jest macierzą górnotrójkątną (lub analogicznie $Q^T AQ$ jest macierzą dolnotrójkątną).
Jeśli macierz A jest nieredukowalna to A^T również jest nieredukowalna

Odnotujmy, że jeśli macierz A jest redukowalna, to dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej p, potęga $(A)^p$ jest redukowalna.

Nie jest to jednak prawdą dla macierzy nieredukowalnych. Weźmy na przykład macierz nieredukowalną

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Dla dowolnej potęgi A, $(A)^p$, gdzie p jest parzystą liczbą całkowitą, zachodzi

$$(A)^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(Dla p - nieparzystego mamy $(A)^p = A$).

Twierdzenie 6 (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa)**.** Niech A będzie nieujmeną macierzą nieredukowalną rzędu $n \geqslant 2$. Wtedy:

1. Macierz A ma dodatnią wartość własną charakterystyczną $\lambda^*(A)$, nazywaną również wartością własną Frobeniusa lub dominującą wartością własną. Związany z nią może być dodatni wektor własny kolumnowy x^*, czyli zachodzi:

$$Ax^* = \lambda^*(A)x^*, \quad x^* > [0]$$

Ponadto, wszystkie wektory własne skojarzone z innymi rzeczywistymi wartościami własnymi macierzy A nie są półdodatnie. To samo dotyczy (lewostronnych) wektorów własnych rzędowych p^*. Innymi słowy, $x^* > [0]$ $(p) > [0]$, są one unikalne z dokładnością do mnożenia przez dodatnie skalary.

2. Wartość własna $\lambda^*(A)$ rośnie, gdy którykolwiek element macierzy A wzrasta
3. Wartość własna λ^* jest pojedynczym pierwiastkiem równania charakterystycznego
4. $\lambda^*(A) \leqslant |\lambda|, \forall\lambda \neq \lambda^*(A)$ dla dowolnej innej wartości własnej macierzy A (jeżeli $\lambda^*(A) < |\lambda|, \quad \forall\lambda \neq \lambda^*(A)$, wtedy A jest nazywane *prymitywną*
5. $(\rho I - A)^{-1} > [0]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho > \lambda^*(A)$

Definicja 7. Niech A będzie macierzą taką, że $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Niech u i v będą liczbami całkowitymi dodatnimi, takimi, że $1 \leqslant u \leqslant m$, $1 \leqslant v \leqslant n$. Niech α oznacza silnie rosnący ciąg u liczb całkowitych $(i_1, ..., i_u)$ wybranych spośród $1, ..., m$, i niech β oznacza silnie rosnący ciąg v liczb całkowitych $(j_1, ..., j_v)$ wybranych spośród $1, ..., n$. Wówczas $A[\alpha|\beta]$ jest podmacierzą macierzy A, której wiersze indeksowane są przez α. a kolumny przez β. $A[\alpha|\beta)$ jest podmacierzą macierzy A z wierszami indeksowanymi przez α i kolumnami indeksowanymi przez dopełnienie zbioru β w $1, 2, ..., n$. $A(\alpha|\beta]$ i $A(\alpha|\beta)$ są definiowane analogicznie.

Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & F_{12} & ... & F_{1S} \\ F_{21} & A_2 & ... & F_{2S} \\ ... & .. & .. & .. \\ F_{S1} & F_{S2} & ... & A_S \end{bmatrix}$$

gdzie dla danej liczby $s > 1$ każda macierz A_k jest nieredukowalna, to mówimy, że macierz A jest w *postaci normalnej*

4 Krótki opis programu

Zdefiniowana jest funkcja dfs. Wykonuje ona przeszukiwanie w głąb na podanym grafie, reprezentowanym przez macierz sąsiedztwa mat, zaczynając od wierzchołka start. Wykorzystuje stos (st), aby śledzić wierzchołki do odwiedzenia. Lista visited śledzi odwiedzone wierzchołki. Funkcja odwiedza każdy wierzchołek i przeszukuje jego sąsiadów, dopóki nie ma więcej wierzchołków do odwiedzenia. Jeśli istnieje ścieżka od wierzchołka startowego do nieodwiedzonego wierzchołka, funkcja zwraca True. W przeciwnym przypadku zwraca False.

Zdefiniowana jest funkcja is_reducible. Przyjmuje ona macierz sąsiedztwa mat jako dane wejściowe i sprawdza, czy graf reprezentowany przez mat jest redukowalny. Iteruje po każdym wierzchołku w grafie i dla każdego wierzchołka wywołuje funkcję dfs. Jeśli dfs zwraca True dla jakiegokolwiek wierzchołka, oznacza to, że istnieje ścieżka od tego wierzchołka do nieodwiedzonego wierzchołka, co wskazuje na redukowalność. W takim przypadku drukuje komunikat "Macierz jest redukowalna" i zwraca True. Jeśli żadna ścieżka nie istnieje dla żadnego wierzchołka, drukuje komunikat "Macierz jest nieredukowalna" i zwraca False.

Kod następnie sprawdza, czy jest uruchamiany jako główny skrypt, używając if __name__ == "__main__":.

Podpowiada użytkownikowi, aby wprowadził rozmiar macierzy i tworzy pustą macierz mat tego rozmiaru za pomocą np.zeros((size, size)).

Następnie podpowiada użytkownikowi, aby wprowadził wartości dla każdego wiersza macierzy. Dzieli dane wejściowe na listę wartości, konwertuje je na liczby zmiennoprzecinkowe za pomocą map(float, input("").split()) i przypisuje je do odpowiedniego wiersza macierzy mat.

Na koniec wywołuje funkcję is_reducible z macierzą mat, aby określić, czy graf jest redukowalny czy nie. Wynik jest drukowany na konsolę.

4.1 Instrukcja korzystania z programu

Program jest prosty i intuicyjny.
Użytkownik zostaje zapytany o rozmiar macierzy, odpowiedź wprowadzona zostaje z klawiatury.

Następnie użytkownik zostaje poproszony o podanie wartości dla kolejnych wierszy, również z klawiatury. Po zakończeniu etapu z wprowadzaniem danych, program wywołuje funkcje na zadanej przez użytkownika macierzy, która w rezultacie wypisuje komunikat, dający odpowiedź na pytanie o redukowalności lub nieredukowalności.
Poniżej przykładowe zastosowanie dla dwóch macierzy, sprawdzające działanie programu:

```
Podaj rozmiar macierzy: 3
Podaj wartości w wierszu [1] :
1 1 1
Podaj wartości w wierszu [2] :
2 2 2
Podaj wartości w wierszu [3] :
3 -3 3
Macierz jest nieredukowalna
```

Rysunek 1: Przykład dla macierzy nieredukowalnej rozmiaru 3

```
Podaj rozmiar macierzy: 3
Podaj wartości w wierszu [1] :
1 0 0
Podaj wartości w wierszu [2] :
2 3 4
Podaj wartości w wierszu [3] :
5 6 7
Macierz jest redukowalna
```

Rysunek 2: Przykład dla macierzy redukowalnej rozmiaru 3

Bibliografia

[1] Nick Hingham, *What is a Permutation Matrix?* Żródło: `https://nhigham.com/2022/04/28/what-is-a-permutation-matrix/`, dostęp 24 listopada 2024

[2] Roger A. Horn, Charles R. Johnson *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2013

[3] Fuzhen Zhang, *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*, Springer, 2011

[4] Mark Hendrik, Richard Sinkhorn, *A Special Class of Irreducible Matrices - The Nearly Reducible Matrices*, University of Houston, 1970

[5] Giorgio Giorgi, DEM Working Paper Series *Nonnegative square matrices: irreducibility, reducibility, primitivity and some economic applications*, University of Pavia

[6] *Reducible and Irreducible matrices*, The world of mathematics, 29.08.2021, źródło: `https://www.youtube.com/watch?v=vU0jZMk5lWE&t=101s`