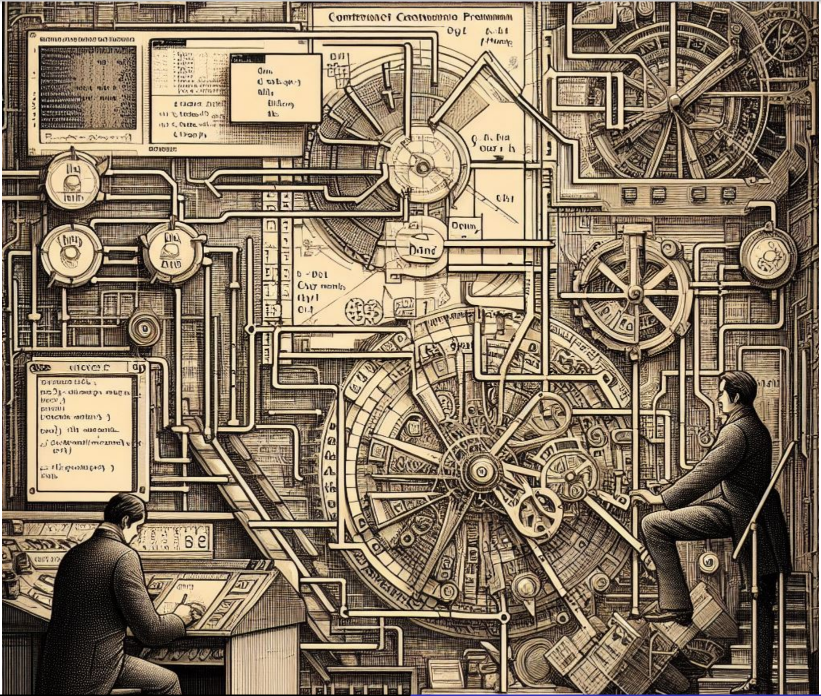
Programowanie z więzami oraz przeszukiwanie lokalne

Paweł Rychlikowski

Instytut Informatyki UWr

3 kwietnia 2024



Constraint Logic Programming

- Spróbujemy powiedzieć o programowaniu logicznym z więzami mówiąc maksymalnie mało o samym programowaniu logicznym
- o którym z kolei trochę powiemy, jak będziemy zajmowali się logiką.

Uwaga

Możemy (na płytkim poziomie) potraktować CLP jako constraint solver, czyli system, w którym definiujemy zadanie więzowe i otrzymujemy rozwiązanie.

Constraint Solver

Deklaratywne podejście do programowania

- Wypisujemy więzy (w jakimś formalnym języku)
- (możemy się wspomóc programowaniem, więzów może być dużo)
- Rozwiązaniem zajmuje się Solver (nie musimy implementować propagacji więzów i backtrackingu)

Przykładowe systemy CLP

- SWI-Prolog (ma moduł clpfd)
- GNU-Prolog (trochę stary i nierozwijany)
- Eclipse (http://eclipseclp.org/)

Składowe zadania w CLP

Przypominamy: musimy określić zmienne, ich dziedziny oraz więzy na nich.

Zmienne

Zmienne są zmiennymi prologowymi, piszemy je **wielką literą** (to nie jest konwencja, tylko silne wymaganie!).

Dziedziny

```
V in 1..10
[A,B,C,D] ins 1..10
```

Więzy

Języki CLP mają bardzo bogate możliwości wyrażania problemów za pomocą więzów.

Przyślijcie Więcej Pieniędzy


```
puzzle(Vars) :-
        Vars = [S,E,N,D,M,O,R,Y],
        Vars ins 0..9,
        all_different(Vars),
                     S*1000 + E*100 + N*10 + D +
                     M*1000 + O*100 + R*10 + E #=
        M*10000 + O*1000 + N*100 + E*10 + Y,
        M #\= 0, S #\= 0.
```

Uwaga: przecinek oddziela **atomy**, na końcu **klauzuli** musi być kropka.

Wykorzystanie solwera więzowego

Postać programu CLP

```
name([V1, ..., Vn]) :-
      V1 in 1..K, ..., Vn in 1..K,
      V1 # >= V5, abs(V2+V6) # = abs(V7-V8),
      min(V3,V7) # > V3 + 2*V1,
      labeling([options], [V1,...,Vn]).
```

(nie ma spacji po krzyżykach!)

Wykorzystanie solwera więzowego

Postać programu CLP

```
name([V1, ..., Vn]) :-
     V1 in 1..K, ..., Vn in 1..K,
     V1 #>= V5, abs(V2+V6) #= abs(V7-V8),
     min(V3,V7) #> V3 + 2*V1,
     labeling([options], [V1,...,Vn]).
```

(nie ma spacji po krzyżykach!)

- Czyli mamy obsługę zmiennych i dziedzin, ustanowienie więzów oraz wywołanie przeszukiwania z nawrotami (labeling).

Wykorzystanie solwera więzowego

Postać programu CLP

```
name([V1, ..., Vn]) :-
     V1 in 1..K, ..., Vn in 1..K,
     V1 # >= V5, abs(V2+V6) # = abs(V7-V8),
     min(V3,V7) # > V3 + 2*V1,
     labeling([options], [V1,...,Vn]).
```

(nie ma spacji po krzyżykach!)

- Czyli mamy obsługę zmiennych i dziedzin, ustanowienie więzów oraz wywołanie przeszukiwania z nawrotami (labeling).
- Część czarna jest częścią *techniczną*, stanowiącą naszą *daninę* dla Prologa

Wykorzystanie solwera więzowego

Postać programu CLP

```
name([V1, ..., Vn]) :-
      V1 in 1..K, ..., Vn in 1..K,
      V1 # >= V5, abs(V2+V6) # = abs(V7-V8),
      min(V3,V7) # > V3 + 2*V1,
      labeling([options], [V1,...,Vn]).
```

(nie ma spacji po krzyżykach!)

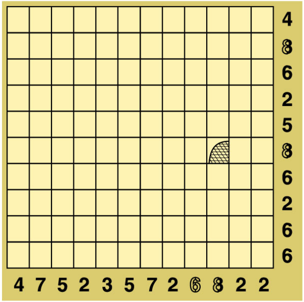
- Czyli mamy obsługę zmiennych i dziedzin, ustanowienie więzów oraz wywołanie przeszukiwania z nawrotami (labeling).
- Część czarna jest częścią *techniczną*, stanowiącą naszą *daninę* dla Prologa
- Ten program możemy napisać, używając Ulubionego Języka Programowania – wystarczy, że ma `print`, `printf`, `puts`, ...

Testowanie hetmanów. Python + Prolog

- Zobaczmy, jak działa program queen_produce.py
- Jak wyglądają wynikowe programy
- Jak duże instancje jesteśmy w stanie rozwiązywać?

Przykład 2: burze

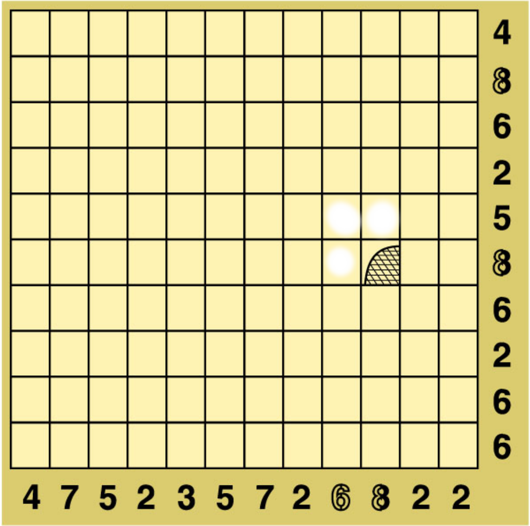
Zapewne pojawią się na liście P3...

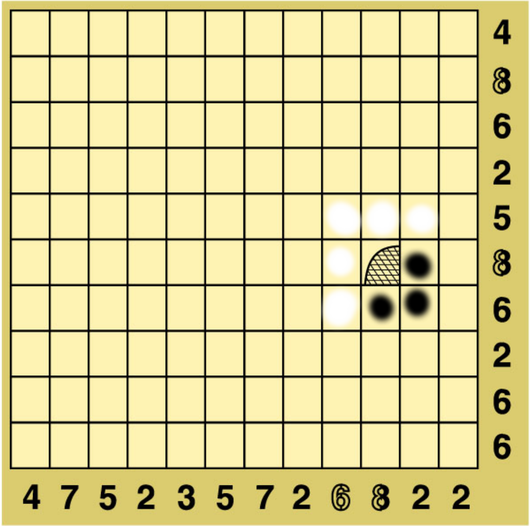


Zasady

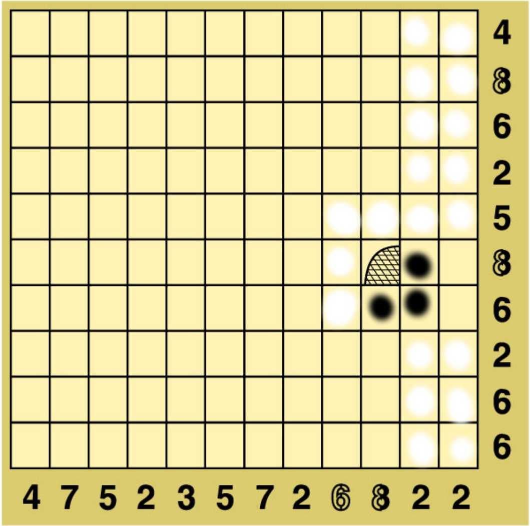
1. Radary mówią, ile jest pól burzowych w wierszach i kolumnach.
2. Burze są prostokątne.
3. Burze nie stykają się rogami.
4. Burze mają wymiar co najmniej 2×2.

Burze: wnioskowanie

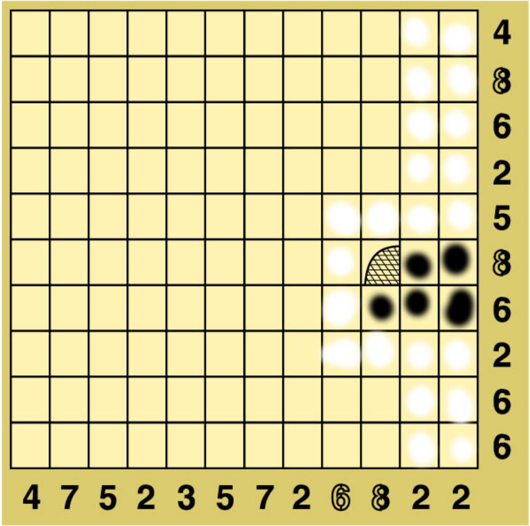


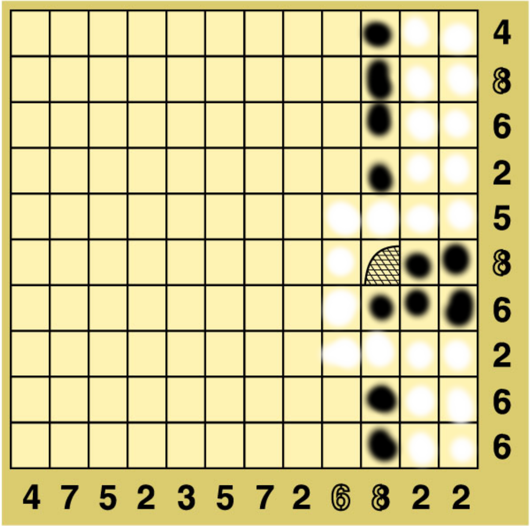

4
8
6
2
5
8
6
2
6
6
4 7 5 2 3 5 7 2 6 8 2 2

Burze: wnioskowanie

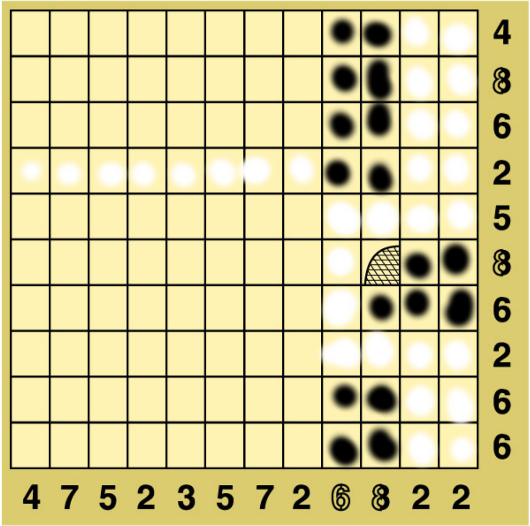


Burze: wnioskowanie

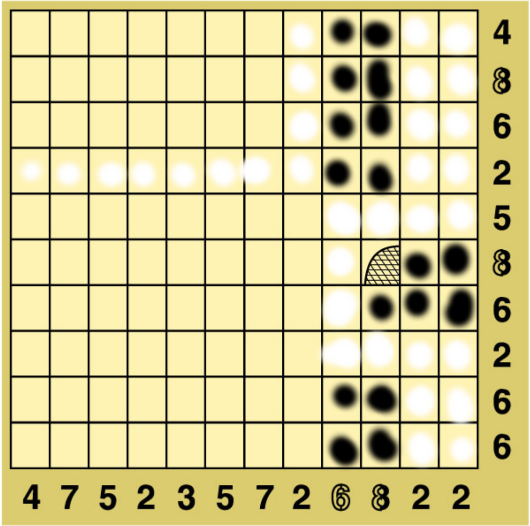



4
8
6
2
5
8
6
2
6
6
4 7 5 2 3 5 7 2 6 8 2 2

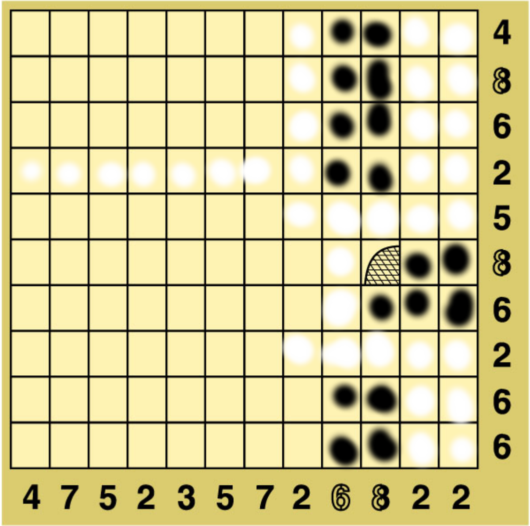
Burze: wnioskowanie



Burze: wnioskowanie



Burze: wnioskowanie



Rozwiązanie

- Strategia 1: jak obrazki logiczne, wnioskowanie + ew. backtracking
- Strategia 2: wykorzystujemy SWI-Prolog

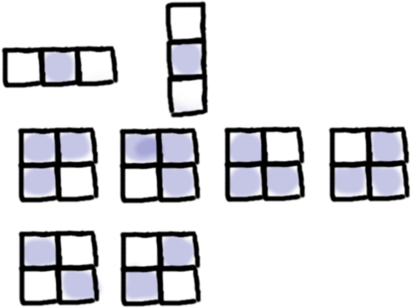
Kodowanie burz

- Zmienne, dziedziny: piksele, 0..1
- Radary: $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = K$
- Prostokąty: ?
- Co najmniej 2×2?
- Nie stykają się rogami.

Kodowanie burz

- Jak wygląda każdy kwadrat 2×2?
- Jak wygląda każdy prostokąt 1×3 albo 3×1?

Zabronione układy



Pytanie

Jak wyrazić to językiem relacji arytmetycznych?

Warunek dobrych 3 pól

Mamy zmienne A, B, C

- $A + 2B + 3C \neq 2$
- $B \times (A + C) \neq 2$

Reifikacja. Warunki w więzach

Naturalne sformułowanie

Jeżeli środkowy piksel jest ustawiony, to wówczas przynajmniej 1 z otaczających go jest jedynką.

$$B \Rightarrow (A + C > 0)$$

Reifikacja (cd)

- Inny przykład: `A #<==> (B #> C)` (nawias dla czytelności)
- Naturalna propagacja:
  - Ustalenie *A* dorzuca więz
  - Jak wiemy, czy prawdziwy jest `B #> C`, to znamy wartość `A`

(więcej przykładów: zob. *SWI Prolog Reification predicates*)

Więz uniweralny w SWI-Prologu

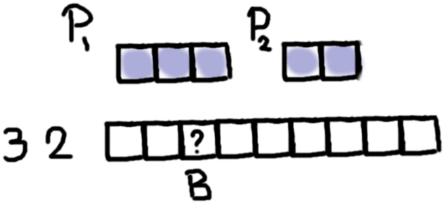
tuples_in

Wymieniamy explicite krotki wartości, jakie może przyjmować krotka zmiennych

Uwaga

Zauważmy, że ten więz pasuje do lokalnych warunków dla burz, na przykład dla prostokątów 3×1::

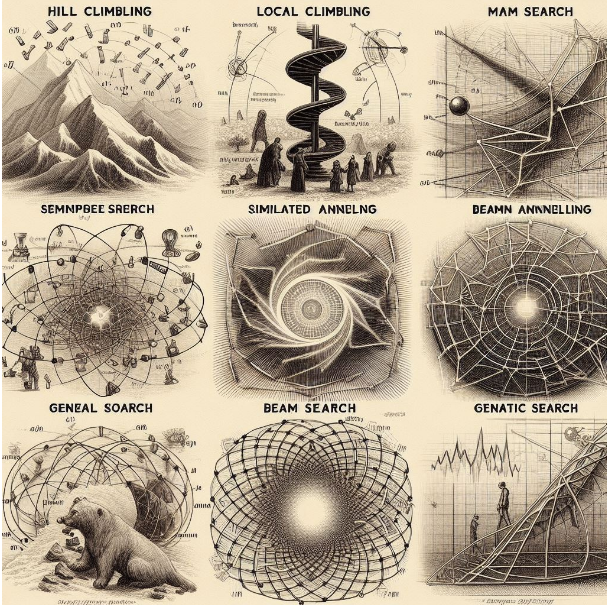
```
tuples_in( [[A,B,C]], [ [0,0,0], [1,1,0], [1,0,0],
[0,1,1], [0,0,1], [1,1,1], [1,0,1]])
```



- Użycie zmiennych P_1 i P_2 określających położenie bloku pozwala zmniejszyć dziedziny ($|P_1| + |P_2|$ zamiast $|P_1| \times |P_2|$ (mniejsze zużycie pamięci, niezmniejszona liczba kombinacji)
- Zmienna B ma wartość logiczną:

  3 *jest przykryte przez blok rozpoczynający się w* P_1 *lub przez blok rozpoczynający się w* P_2

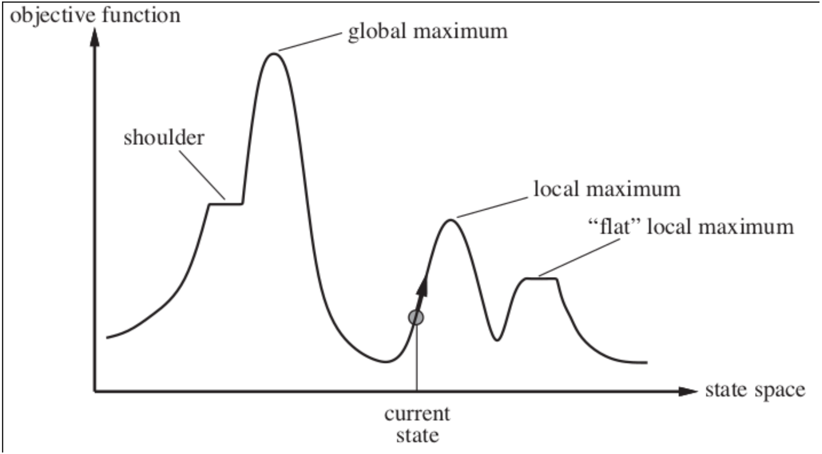
Na tym skończymy o więzach i przejdziemy do przeszukiwania lokalnego



Przeszukiwania lokalne (ogólnie)

- Powiemy sobie o paru ideach związanych z przeszukiwaniem lokalnym.
- Można je wykorzystywać w zadaniach więzowych (MinConflicts z poprzedniego wykładu), ale nie tylko.

Krajobraz przeszukiwania lokalnego



Czym może być funkcja, którą minimalizujemy?

1. Liczbą **niespełnionych** więzów.

Czym może być funkcja, którą minimalizujemy?

1. Liczbą **niespełnionych** więzów.
2. **Wagą** niespełnionych więzów. Porównaj więzy:
    1. Nauczyciel ma tylko z jedną klasą lekcje na raz
    2. nikt nie ma dwóch biologii jednego dnia.

Czym może być funkcja, którą minimalizujemy?

1. Liczbą **niespełnionych** więzów.
2. **Wagą** niespełnionych więzów. Porównaj więzy:
    1. Nauczyciel ma tylko z jedną klasą lekcje na raz
    2. nikt nie ma dwóch biologii jednego dnia.
3. Czymś niezwiązanym bezpośrednio z więzami
    - produktywnością zespołu robotników (maksymalizemy, nie minimalizujemy!)
    - zadowoleniem gości weselnych z towarzystwa przy stolikach,
    - potencjalnym zyskiem sklepu,
    - dopasowaniem modelu do danych uczących

Czym może być funkcja, którą minimalizujemy?

1. Liczbą **niespełnionych** więzów.
2. **Wagą** niespełnionych więzów. Porównaj więzy:
   1. Nauczyciel ma tylko z jedną klasą lekcje na raz
   2. nikt nie ma dwóch biologii jednego dnia.
3. Czymś niezwiązanym bezpośrednio z więzami
   - produktywnością zespołu robotników (maksymalizemy, nie minimalizujemy!)
   - zadowoleniem gości weselnych z towarzystwa przy stolikach,
   - potencjalnym zyskiem sklepu,
   - **dopasowaniem modelu do danych uczących**

Czym może być funkcja, którą maksymalizujemy?

Uwaga

Ważna część uczenia maszynowego dotyczy **maksymalizacji dopasowania do danych uczących**

Hill climbing

Hill climbing jest chyba najbardziej naturalnym algorytmem inspirowanym poprzednim rysunkiem.

- Dla stanu znajdujemy wszystkie następniki i wybieramy ten, który ma największą wartość.
- Powtarzamy aż do momentu, w którym nie możemy nic poprawić

Problem

Oczywiście możemy utknąć w lokalnym maksimum.

Hill climbing z losowymi restartami

Uwaga

Możemy podjąć dwa działania, oba testowaliśmy w obrazkach logicznych:

1. Dorzucać ruchy niekoniecznie poprawiające (losowe, ruchy w bok)
2. Gdy nie osiągamy rozwiązania przez dłuższy czas rozpoczynamy od początku.

Hill climbing + random restarts (w trywialny sposób) jest algorytmem zupełnym z p-stwem 1 (bo „kiedyś” wylosujemy układ startowy)

Inne warianty Hill climbing

a) Stochastic hill climbing – wybieramy losowo ruchy w górę (p-stwo stałe, albo zależne od wielkości skoku).
b) First choice hill climbing – losujemy następnika tak długo, aż będzie on ruchem w górę
   - dobre, jeżeli następników jest bardzo dużo

Uwaga

Idee z tego i kolejnych algorytmów można dowolnie mieszać – na pewno coś wyjdzie!

Symulowane wyżarzanie

- Motywacja fizyczna: ustalanie struktury krystalicznej metalu.
- Jeżeli będziemy ochładzać powoli, to metal będzie silniejszy (bliżej globalnego minimum energetycznego).
- **Symulowane** wyżarzanie – próba oddania tej idei w algorytmie.

Algorytm

Symulujemy opadającą temperaturę, prawdopodobieństwo ruchu chaotycznego zależy malejąco od temperatury.

Symulowane wyżarzanie (2)

- Przykładowa implementacja bazuje na first choice hill climbing.
- Jak wylosowany ruch (**r**) jest poprawiający (czyli $\Delta F > 0$), to go wykonujemy (maksymalizacja F).
- W przeciwnym przypadku wykonujemy ruch **r** z p-stwem $p = e^{\frac{\Delta F}{T}}$
- Pilnujemy, żeby T zmniejszało się w trakcie działania (i było cały czas dodatnie)

Komentarze do wzoru

- $\Delta F \leq 0$, $T > 0$, czyli $0 \leq p \leq 1$.
- Im większe pogorszenie, tym mniejsze p-stwo
- Im większa temperatura, tym większe p-stwo.

Taboo search

Problem

Być może płaskie maksimum lokalne.

Rozwiązanie

Dodajemy pamięć algorytmowi, zabraniamy powtarzania ostatnio odwiedzanych stanów.

Local beam search

- Zamiast pamiętać pojedynczy stan, pamiętamy ich k (wiązkę).
- Generujemy następniki dla każdego z k stanów.
- Pozostawiamy k liderów.

Uwaga 1

To nie to samo co k równoległych wątków hill-climbing (bo uwaga algorytmu może przerzucać się do bardziej obiecujących kawałków przestrzeni)

Uwaga 2

Beam search jest bardzo popularnym algorytmem w różnych zadaniach wykorzystujących sieci neuronowe do modelowania sekwencji (np. tłumaczenie maszynowe).

Algorytmy ewolucyjne

- Zarządzamy populacją osobników (czyli np. pseudorozwiązań jakiegoś problemu więzowego).
- Mamy dwa rodzaje operatorów:
  a) Mutacja, która z jednego osobnika robi innego, podobnego.
  b) Krzyżowanie, która z dwóch osobników robi jednego, w jakiś sposób podobnego do „rodziców”.
- Nowe osobniki oceniane są ze względu na wartość funkcji przystosowania
- Przeżywa k najlepszych.

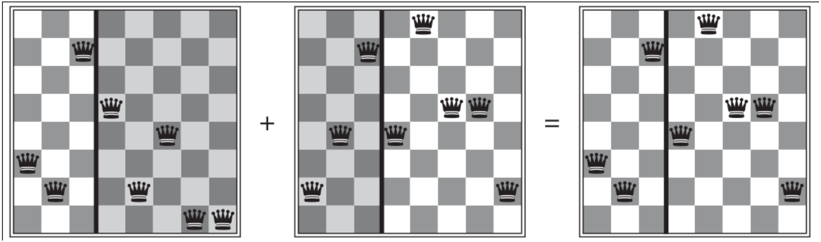
Uwaga

Zauważmy, że choć zmienił się język, jeżeli pominiemy krzyżowanie, to otrzymamy wariant Local beam search (mutacja jako krok w przestrzeni stanów).

Krzyżowanie. Przykład

Pytanie

Czym mogłoby być krzyżowanie dla zadania z N hetmanami?



Algorytmy ewolucyjne. Kilka uwag

1. Krzyżowanie i mutacje można zorganizować tak, że najpierw powstają dzieci, a następnie się mutują z pewnym prawdopodobieństwem.
2. Wybór osobników do rozmnażania może zależeć od funkcji dopasowania (większe szanse na reprodukcję mają lepsze osobniki)
3. Można mieć wiele operatorów krzyżowania i mutacji.