# Interpolacje krzywą sklejaną

## 1. Stopień pierwszy (1th order)

W celu interpolacji funkcjami sklejanymi należy przyjąć stopień wielomianu, którym będziemy aproksymować przestrzeń pomiędzy dwoma punktami węzłowymi. W przypadku stopnia pierwszego będzie to funkcja liniowa.

Każdy przedział pomiędzy dwoma punktami węzłowymi można aproksymować za pomocą funkcji:

$$s(x) = a_i(x - x_i) + y_i \quad dla\ x_i \leq x \leq x_{i+1} \tag{1.1}$$

Ponieważ dysponując już dwoma punktami można jednoznacznie określić współczynniki funkcji liniowej. Już z informacji o dwóch punktach można określić uniwersalną iterację dla zbioru n-punktów. Wykorzystując warunek brzegowy (1.2) we wzorze (1.1):

$$s(x_{i+1}) = y_{i+1} \tag{1.2}$$

Otrzymujemy:

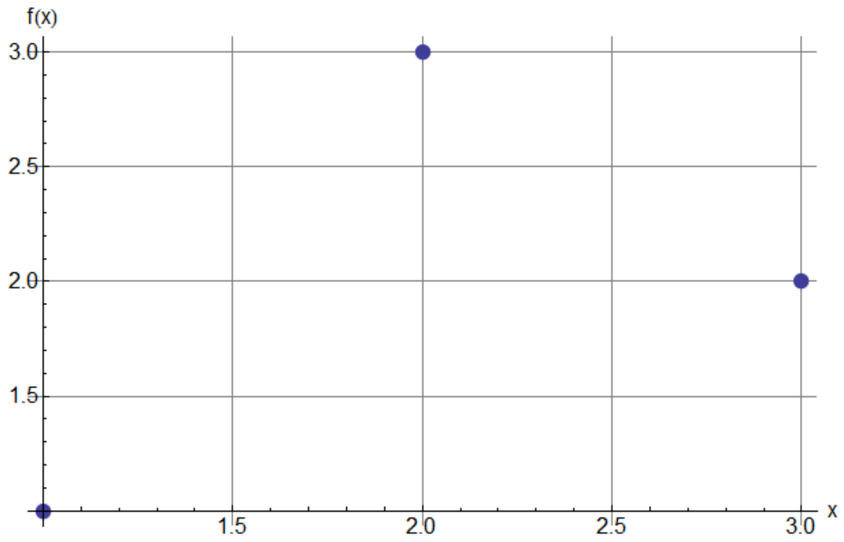
$$\begin{gathered} a_i(x_{i+1} - x_i) + y_i = y_{i+1} \\ a_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Krzywą sklejaną rzędu pierwszego dla dwóch kolejnych punktów węzłowych można opisać - jako

$$s(x) = \left\{ \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i) + y_i \quad dla\ x_i \leq x \leq x_{i+1} \right. \tag{1.4}$$

# Przykład 1

Wykonaj interpolację splinem liniowym dla zbioru punktów z rysunku.




*Rys. 1 Zbiór punktów do interpolacji*

W naszym przypadku interpolację będą tworzyły dwie krzywe sklejane w węźle x=2.

Ze wzoru (1.4) otrzymujemy:

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{3-1}{2-1}(x-1)+1 = 2x-1 & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{2-3}{3-2}(x-2)+3 = 5-x & 2 \le x \le 3 \end{cases} \tag{1.5}$$

## 2. Interpolacja krzywą sklejaną stopnia trzeciego (3rd order)

W przypadku interpolacji krzywą stopnia większego od 1 wymagane są warunki ciągłości funkcji sklejanych w punktach węzłowych oraz w punktach brzegowych.

Postać krzywej sklejanej dla każdego punktu węzłowego $x_i$ możemy opisać, w postaci:

$$s(x) = a_0 + a_1(x-x_i) + a_2(x-x_i)^2 + a_3(x-x_i)^3 \tag{2.1}$$

Dla N-punktów węzłowych, wzór (2.1) możemy ujednolicić do postaci:

$$s_j(x) = \sum_{i=0}^{3} a_{j,i}\left(x-x_j\right)^i \; dla \;\; x_j \le x \le x_{j+1}\,, j = 0,1, \dots N-1 \tag{2.2}$$

Dla każdego punktu węzłowego, w przypadku interpolacji krzywą stopnia trzeciego, będziemy poszukiwać 4-ech niewiadomych. Dlatego dla N punktów do interpolacji otrzymamy (N-1) krzywych np. dla 4 punktów otrzymamy następujący układ równań z 12 niewiadomymi:

$$s(x) = \begin{cases} a_{00} + a_{01}(x-x_0) + a_{02}(x-x_0)^2 + a_{03}(x-x_0)^3 & x_0 \le x \le x_1 \\ a_{10} + a_{11}(x-x_1) + a_{12}(x-x_1)^2 + a_{13}(x-x_1)^3 & x_1 \le x \le x_2 \\ a_{20} + a_{21}(x-x_2) + a_{22}(x-x_2)^2 + a_{23}(x-x_2)^3 & x_2 \le x \le x_3 \end{cases} \tag{2.3}$$

W jaki sposób poszukiwać niewiadome? Aby się tego dowiedzieć - rozważmy przykład identyczny z przykładem dla krzywej sklejanej pierwszego stopnia.

# Przykład 2

Dany jest zbiór punktów A=((1,1),(2,3),(3,2)). Wykonaj interpolację krzywą trzeciego stopnia.

W naszym przypadku krzywą interpolującą złożymy z dwóch krzywych trzeciego stopnia, które skleimy w punkcie wspólnym dla obu krzywych, czyli x=2. Krzywe te można zapisać w postaci wzoru:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_{00} + a_{01}(x-1) + a_{02}(x-1)^2 + a_{03}(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \\ s_2(x) = a_{10} + a_{11}(x-2) + a_{12}(x-2)^2 + a_{13}(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases} \tag{2.3}$$

Do zapewnienia odpowiedniej gładkości funkcji z spojeniu oraz brzegach, będziemy potrzebować 1 i 2-giej pochodnej funkcji s(x)

$$s'(x) = \begin{cases} s'_1(x) = a_{01} + 2a_{02}(x-1) \quad + 3a_{03}(x-1)^2 & 1 \le x \le 2 \\ s'_2(x) = a_{11} + 2a_{12}(x-2) \quad + 3a_{13}(x-2)^2 & 2 \le x \le 3 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$s"(x) = \begin{cases} s"_1(x) = 2a_{02} + 6a_{03}(x-1) & 1 \le x \le 2 \\ s"_2(x) = 2a_{12} + 6a_{13}(x-2) & 2 \le x \le 3 \end{cases} \tag{2.5}$$

Do znalezienia współczynników obu wielomianów, będziemy potrzebować 8 równań:

$$\begin{array}{c} s_1(x_0) = y_0 \\ s_1(x_1) = y_1 \\ s_2(x_1) = y_1 \\ s_2(x_2) = y_2 \\ s_1'(x_1) = s_2'(x_1) \\ s_1^{"}(x_1) = s_2^{"}(x_1) \\ s_1^{"}(x_0) = 0 \\ s_2^{"}(x_2) = 0 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_{00} = y_0 \\ a_{00} + a_{01}(x_1 - x_0) + a_{02}(x_1 - x_0)^2 + a_{03}(x_1 - x_0)^3 = y_1 \\ a_{10} = y_1 \\ a_{10} + a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(x_2 - x_1)^2 + a_{13}(x_2 - x_1)^3 = y_2 \\ a_{01} + 2a_{02}(x_1 - x_0) + 3a_{03}(x_1 - x_0)^2 = a_{11} \\ 2a_{02} + 6a_{03}(x_1 - x_0) = 2a_{12} \\ 2a_{02} = 0 \\ 2a_{12} + 6a_{13}(x_2 - x_1) = 0 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Po podstawieniu wartości do równań (2.6) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

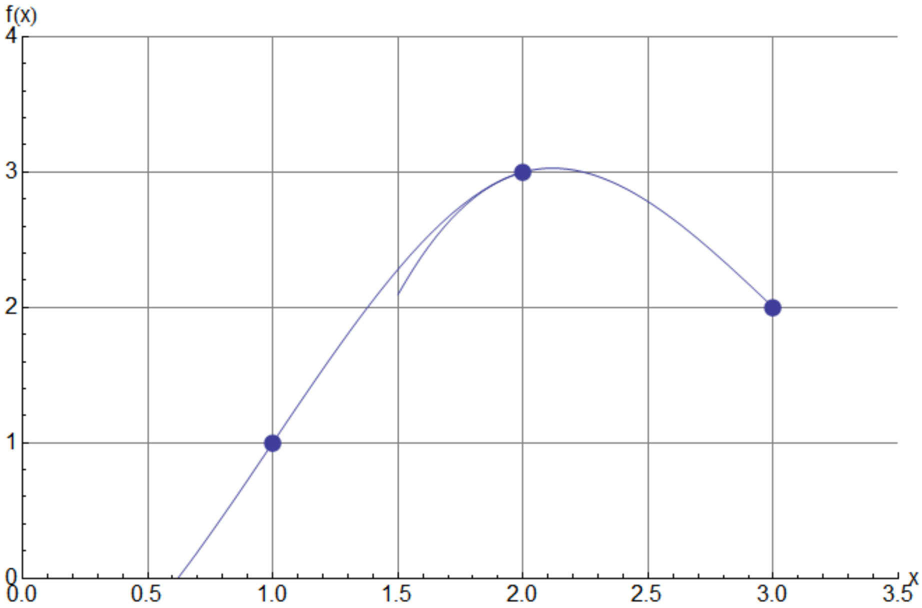
Którego rozwiązaniem jest wektor a:

$$a^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Podstawiając (2.8) do (2.3) otrzymujemy równania dwóch krzywych interpolujących:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \frac{11}{4}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \\ 3 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{9}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{4}(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases} \tag{2.9}$$

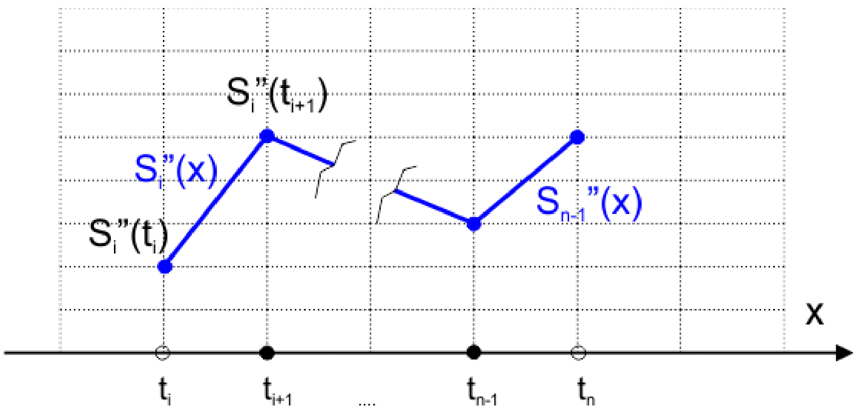
Wynik przedstawia rysunek




*Rys. 2 Na rysunku przedstawiono wynik obliczeń - profile dwóch krzywych. Profile celowo ekstrapolowano poza rozpatrywany zakres.*

## 3. Interpolacja krzywą sklejaną stopnia trzeciego (3rd order) – przejście do n-węzłów

Interpolację krzywą trzeciego stopnia można uzyskać również wychodząc z analizy drugiej pochodnej dla dwóch sąsiadujących punktów węzłowych. Dla każdych dwóch węzłów ($t_i$ i $t_{i+1}$) druga pochodna poszukiwanej funkcji sklejanej będzie miała pewne wartości np. ( $z_i$ i $z_{i+1}$)




*Rys. 3 Wizualizacja drugiej pochodnej krzywej trzeciego stopnia (funkcja liniowa)*

$$s_i"(t_i) = z_i \quad oraz \quad s_i"(t_{i+1}) = z_{i+1} \tag{3.1}$$

Ponieważ druga pochodna funkcji sklejanej stopnia trzeciego ma charakter liniowy do określenia współczynnika kierunkowego tej prostej potrzebne są dwa kolejne węzły i wartości w tych węzłach. Wtedy drugą pochodna możemy zapisać, jako:

$$s_i"(x) = \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}(x - t_i\ ) + z_i \tag{3.2}$$

Jeżeli odległość pomiędzy sąsiednimi węzłami określimy jako $h_i$

$$h_i = t_{i+1} - t_i \tag{3.3}$$

To wzór (3.2) można zapisać, jako:

$$s_i"(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) + \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x) \tag{3.4}$$

W celu otrzymania profilu krzywej trzeciego stopnia należy formułę (3.4) scałkować dwukrotnie. W wyniku tej operacji otrzymujemy funkcję s(x) z dwoma stałymi całkowania C i D.

$$s_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x) \tag{3.5}$$

Stałe C i D otrzymamy, wykorzystując warunki brzegowe (3.6):

$$s_i(t_i) = y_i \quad oraz \quad s_i(t_{i+1}) = y_{i+1} \tag{3.6}$$

W konsekwencji równanie funkcji sklejanej dla przedziału <$t_i$,$t_{i+1}$> (3.5) przyjmuje postać:

$$\begin{gathered} s_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6})(t_{i+1} - x) \end{gathered} \tag{3.7}$$

W celu uzyskania pełnego opisu wielomianowego krzywej sklejanej (3.7), musimy wyznaczyć wszystkie współczynniki $z_i$ oraz $z_{i+1}$ . Do tego celu wykorzystamy warunki ciągłości pierwszej pochodnej dwóch kolejnych krzywych trzeciego stopnia w pojedynczym węźle wewnętrznym. Różniczkując po x (3.7) otrzymujemy:

$$s_i'(x) = -\frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right) + (\frac{z_i h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i}) \tag{3.8}$$

$$s_i'(x = t_i) = -\frac{h_i}{3}z_i - \frac{h_{i+1}}{6}z_{i+1} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{y_i}{h_i} \tag{3.9}$$

$$s'_{i-1}(x=t_i) = \frac{h_{i-1}}{6} z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} z_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}} \tag{3.10}$$

Dla węzłów wewnętrznych pochodne (3.9) i (3.10) powinny być sobie równe, dlatego:

$$\begin{gathered} s'_i(t_i) = s'_{i-1}(t_i) \Rightarrow \\ h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \\ dla\ 1 \le i \le n-1 \end{gathered} \tag{3.11}$$

Przyjmując (drugie pochodne w węzłach skrajnych równe 0 – krzywa sklejana naturalna):

$$z_0 = z_n = 0 \tag{3.12}$$

oraz parametry (robocze):

$$h_i = t_{i+1} - t_i\ , \qquad u_i = 2(h_{i-1} + h_i)\,, \qquad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)\,, \qquad v_i = b_i - b_{i-1} \tag{3.13}$$

Rozwiązanie problemu krzywej sklejanej trzeciego rzędu dla n- węzłów można zapisać w postaci układu równań z macierzą wstęgową:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

…po uwzględnieniu węzłów skrajnych:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ u_1 & h_1 & & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.13a}$$

# Przykład 2 (3 węzły)

Dany jest zbiór punktów A=((1,1),(2,3),(3,2)). Wykonaj interpolację krzywą trzeciego stopnia.

Uogólnione równanie krzywej sklejanej:

$$s_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6})(t_{i+1} - x)$$

Równania kanoniczne krzywych (3 punkty, 2 krzywe):

$$s_0(x) = \frac{z_0}{6}(2 - x)^3 + \frac{z_1}{6}(x - 1)^3 + \left(3 - \frac{z_1}{6}\right)(x - 1) + (1 - \frac{z_0}{6})(2 - x)$$

$$s_1(x) = \frac{z_1}{6}(3 - x)^3 + \frac{z_2}{6}(x - 2)^3 + \left(2 - \frac{z_2}{6}\right)(x - 2) + \left(3 - \frac{z_1}{6}\right)(3 - x)$$

Zwróć uwagę, że naszym problemem jest rozwiązanie układu równań zbudowanego na podstawie formuły (3.11). Dlatego dla trzech punktów w zbiorze A, mamy układ równań:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ h(z_0 + 4z_1 + z_2) = 6(-1) - 6 * 2 = -18 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

Z którego możemy zbudować macierz :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 4 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

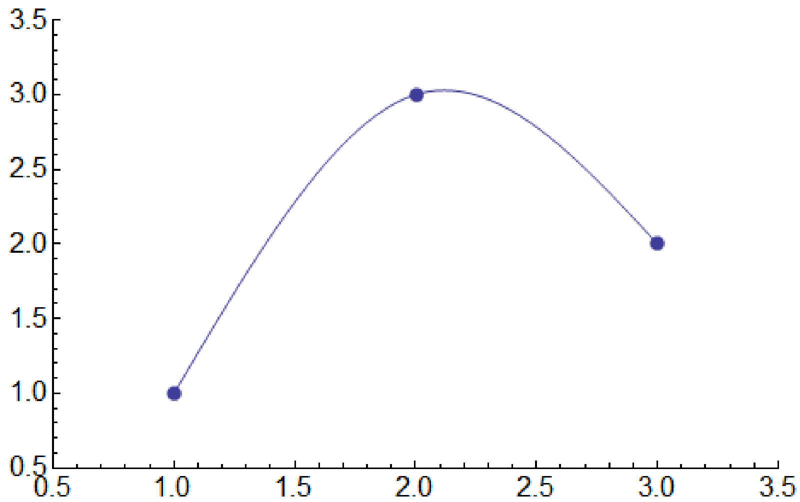
Rozwiązaniem układu jest wektor:

$$z^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Równania krzywych:

$$s(x) = \begin{cases} 2 + \frac{15}{4}(x - 1) - \frac{3}{4}(x - 1)^3 - x & 1 \le x \le 2 \\ \frac{15}{4}(3 - x) - \frac{3}{4}(3 - x)^3 + 2(x - 2) & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Wizualizacja wyniku:




*Rys. 4. Profile dwóch krzywych sklejanych.*

## Przykład 3 (5 węzłów)

Zwiększmy zbiór punktów o kolejne dwa. Teraz dany jest zbiór punktów A=((1,1),(2,3),(3,2),(4,4),(5,1)). Wykonaj interpolację krzywą trzeciego stopnia.

Uogólnione równanie krzywej sklejanej:

$$s_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6})(t_{i+1} - x)$$

Dane:

| | | Węzły wewnętrzne | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indeks | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Y | 1 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| H | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| Z | 0 | ? | ? | ? | 0 |

Równania kanoniczne krzywych:

$$s_0(x) = \frac{z_0}{6}(2 - x)^3 + \frac{z_1}{6}(x - 1)^3 + \left(3 - \frac{z_1}{6}\right)(x - 1) + (1 - \frac{z_0}{6})(2 - x)$$

$$s_1(x) = \frac{z_1}{6}(3 - x)^3 + \frac{z_2}{6}(x - 2)^3 + \left(2 - \frac{z_2}{6}\right)(x - 2) + \left(3 - \frac{z_1}{6}\right)(3 - x)$$

$$s_2(x) = \frac{z_2}{6}(4-x)^3 + \frac{z_3}{6}(x-3)^3 + \left(4 - \frac{z_3}{6}\right)(x-3) + \left(2 - \frac{z_2}{6}\right)(4-x)$$

$$s_3(x) = \frac{z_3}{6}(5-x)^3 + \frac{z_4}{6}(x-4)^3 + \left(1 - \frac{z_4}{6}\right)(x-4) + \left(4 - \frac{z_3}{6}\right)(5-x)$$

Korzystamy z formuły (3.11) i budujemy układ równań:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ h(z_0 + 4z_1 + z_2) = 6(2-3) - 6(3-1) = -18 \\ h(z_1 + 4z_2 + z_3) = 6(4-2) - 6(2-3) = 18 \\ h(z_2 + 4z_3 + z_4) = 6(1-4) - 6(4-2) = -30 \\ z_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \\ 18 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

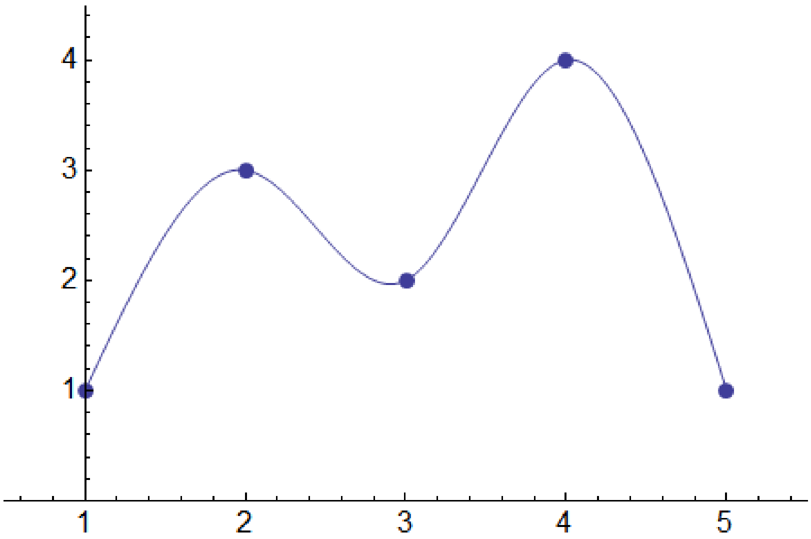
Rozwiązaniem jest wektor z:

$$z^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{93}{14} & \frac{60}{7} & -\frac{135}{14} & 0 \end{bmatrix}$$

Profile krzywych budujemy na podstawie równań kanonicznych dla poszczególnych zakresów:

$$s(x) = \begin{cases} 2 + \frac{115}{28}(x-1) - \frac{31}{28}(x-1)^3 - x & 1 \le x \le 2 \\ \frac{115}{28}(3-x) - \frac{31}{28}(3-x)^3 + \frac{4}{7}(x-2) + \frac{10}{7}(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \\ \frac{4}{7}(4-x) + \frac{10}{7}(4-x)^3 + \frac{157}{28}(x-3) - \frac{45}{28}(x-3)^3 & 3 \le x \le 4 \\ -4 + \frac{157}{28}(5-x) - \frac{45}{28}(5-x)^3 + x & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

Rezulat przedstawia rysunek 4.




*Rys. 5 Profile krzywych w rozpatrywanych przedziałach*

## Przykład 4 (5 węzłów różnoodległych)

Zmieniamy zbiór danych i przeprowadzamy analizę dla węzłów różnoodległych. Dany jest zbiór punktów $\mathrm{A} = ((1,1),(2,3),(5,2),(9,4),(14,1))$. Wykonaj interpolację krzywą trzeciego stopnia.

Uogólnione równanie krzywej sklejanej dla każdego przedziału:

$$s_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6})(t_{i+1} - x)$$

Dane:

| | | Węzły wewnętrzne | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indeks | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| T | 1 | 2 | 5 | 9 | 14 |
| Y | 1 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| H | 1 | 2 | 4 | 5 | Brak |
| Z | 0 | ? | ? | ? | 0 |

Równania kanoniczne:

$$s_0(x) = \frac{z_0}{6*1}(2-x)^3 + \frac{z_1}{6*1}(x-1)^3 + \left(\frac{3}{1} - \frac{z_1*1}{6}\right)(x-1) + (\frac{1}{1} - \frac{z_0}{6})(2-x)$$

$$s_1(x) = \frac{z_1}{6*2}(5-x)^3 + \frac{z_2}{6*2}(x-2)^3 + \left(\frac{5}{2} - \frac{z_2*2}{6}\right)(x-2) + \left(\frac{2}{2} - \frac{z_1}{6}\right)(5-x)$$

$$s_2(x) = \frac{z_2}{6}(4-x)^3 + \frac{z_3}{6}(x-3)^3 + \left(4 - \frac{z_3}{6}\right)(x-3) + \left(2 - \frac{z_2}{6}\right)(4-x)$$

$$s_3(x) = \frac{z_3}{6}(5-x)^3 + \frac{z_4}{6}(x-4)^3 + \left(1 - \frac{z_4}{6}\right)(x-4) + \left(4 - \frac{z_3}{6}\right)(5-x)$$