Matematická analýza 2 lidsky
Jakub Dokulil

Vytvořeno pro zjednodušení a lepší interpretaci složitých matematických definic od Lůďy ♡. Proto neručím správnost. Poslední aktualizace 11. května 2020. Šiřte a upravujte podle svého gusta.
Před zkouškou

Podrobněji projít Jordanovu míru!

Obsah

1 Metrické prostory

Nechápatmnožinu $\mathbb{R}^n$ pouze jako množinu n-tic, ale jako množinu na níž jsou nadefinovány operace sčítání a násobení skalárem - **vektorový prostor nad** $\mathbb{R}$.

Metrický prostor M s prvky $x, y \in M$ splňuje následující axiomy:

- Totožné body jsou od sebe vzdálené 0
- vzálenost x od y, je stejná jako vzdálenost y od x (symetrie)
- platí trojúhelníková nerovnost $|xy| \leq |xy| + |yz|$ $(\rho(x,y) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z))$

Metrika na M = Vzdálenost bodů je nadefinována jako zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$

Metrický prostor je dvojce (M, ρ)

Druhy metrik **Manhattanská** - pravoúhlý systém, $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$

Eukleidovská - nejkratší možná cesta $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots}$

Šachovnicová - nejvzdálenější souřadnice $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$

Koule a okolí –

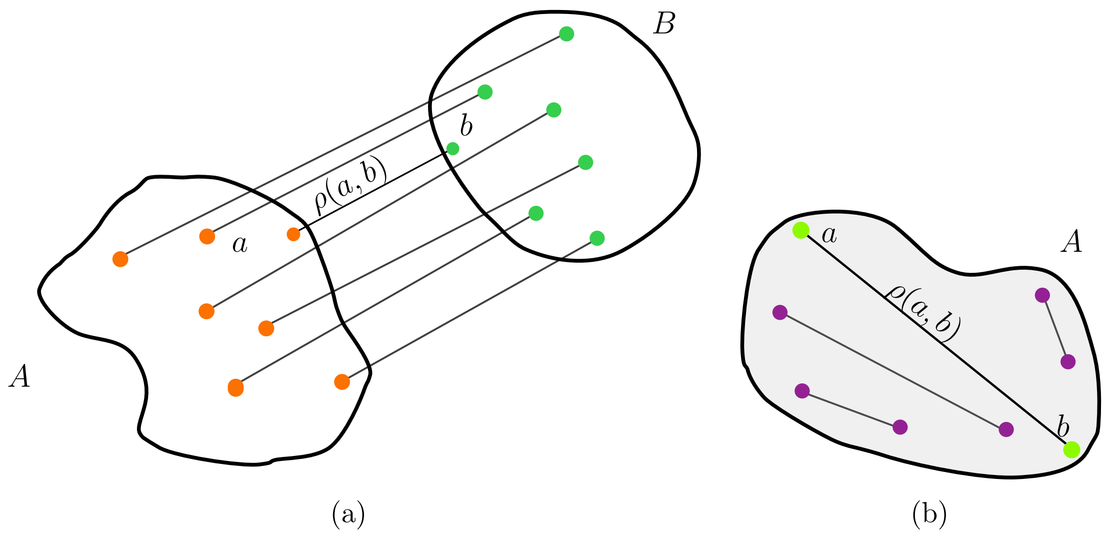
Koule je množina bodů X metrického prostoru (M, ρ), které mají od jejího středu a stejnou „vzdálenost“ ($\rho(a, X) =$ konst.)

Ryzí okolí bodu a je koule bez středu.

Vzdálenst prostorů, průměr –

vzdálenost množin $\rho(A, B)$ v metr. prostoru, je jejich nekratší spojnice – $\inf\{\rho(a, b); a \in A; b \in B\}$

průměr množiny $d(A)$ je nevětší vzdálenost dvou prvků množiny, $\sup\{\ldots$



Obrázek 1: (a) vzdálenost množin. (b) Průměr množiny.

2 Podmnožiny metrickém prostoru

Pojmy: spojené s množinou A v metrickém prostoru.

vnitřní bod – alespoň jedno okolí bodu je součástí množiny (**vnitřek** – A°)

hraniční bod – *není ani v množině ani mimo ni.* Jeho okolí má prázdný průnik s množinou ($O(a) \cap A = \emptyset$), ale i se zbytkem prostoru ($O(a) \cap (M \backslash A) = \emptyset$) (**hranice** – ∂A)

bod uzávěru vzdálenost od množiny je 0 (**uzávěr** – $\bar{A}$)

hrom. bod - každé okolí není prázdné (**hrom body** – A')

izolovaný bod - existuje okolí, ve kterém je bod sám

otevřená množina pro množina je svým vnitřkem, nemá hranici

uzavřená množina každý bod má nulovou vzdálenost od ní, je sama svým užávěrem

3 Konvergence v metrickém prostoru

Polsoupnost bodů $\{x_n\}$ si lze představit jako diskrétně rozložené body v metrickém prostoru (například body v rovině).

Konvergentní posloupnost – vzdálenost (metrika) bodů konverguje k nule. Posloupnost x_n konverguje k bodu x pokud se k bodu podle metriky blíží – $\lim_{n \to \inf} \rho(x_n, x) = 0$

Ohraničená posloupnost - pokud množina výsledků posloupnosti, funkčních hodnot, je ohraničená. (má konečný průměr)

Cauchyovská - od určitého n_0 leží každé dvě funkční hodnoty v ε okolí.

$$\text{konvergentní} \Rightarrow \text{Cauchyovská}$$

Důkaz věty – zvolit $\frac{\varepsilon}{2}$ a použít trojúhelníkovou nerovnost.

Uzavřenost a konvergence – podmnožina metrického prostoru A je uzavřená $\Leftrightarrow$ každá konvergentní posloupnost v podmnožině konverguje k a posloupnost konvergující k $a \in A$

Uzavřenost a konvergence – podmnožina metrického prostoru A je uzavřená $\Leftrightarrow$ každá konvergentní posloupnost v podmnožině konverguje k a, pak $a \in A$

ekv metriky metriky jsou ekvivalentní pokud konvergentní posloupnosti dávají stejnou konvergenci

ekv metriky jinak metriky ρ, σ jsou ekvivalentní pokud existují kladná čísla a, b tak, aby

$$a\sigma \leq \rho \leq b\sigma$$

Důkaz: vezme se konvergentní posloupnost bodů x_n tak aby $\lim \sigma(x_n, a) = 0$ s využitím věty o třech posloupnostech platí $\lim \rho(x_n, a) = 0$.

indukované metriky podprostor metrického prostoru má svou vlastní metriku shodnou s tou originální (například aplikace metriky pro $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$, kde se uvažuj, že prvky a z $\mathbb{R}$ lze zapsat jako $(a, 0)$.

4 Úplné a kompaktní metrické prostory

V úplném prostoru má každá Cauchyovská posloupnost má limitu náležící danému prostoru. (Například $\mathbb{Q}$ s Eukleidovskou metrikou, posloupnost $\left\{\frac{1}{n} + n\right\}$ konverguje k e $\notin \mathbb{Q}$).

uzavřená podmnožina úplného prostoru je úplná.

Kompaktní prostor – ze všech posloupností jeho bodů, které obsahuje lze vybrat konvergentní posloupnost

$$A \text{ kompaktní množina v prostoru} \Rightarrow A \text{ uzavřená a ohraničená}$$

A je uzavřený a ačkoli může mít díru nesmí se jednat o pěnu.
Pozn1: Pro prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$, $i = 1, 2, \infty$ platí implikace (kompaktní $\Leftrightarrow$ uzavřená a ohraničená)
Pozn2: Kompakní prostor je vždy úplný.

5 Zobrazení

Izometrické zobr. takové které zachovává vzdálenost ($F : (M, \rho) \to (N, \sigma)$ pak $\rho(x, y) = \sigma(F(x), F(y))$.)

Spojité zobrazení x z ε-okolí se zobrazí na $F(x)$ z δ-okolí $F(x_0)$.

Heineho podm. pokud x konverguje k x_0 pak $F(x)$ konverguje k x_0.

zobrazení kompaktní mn kompaktní množina se zobrazí na kompaktní množinu. (Důsledkem jsou Weierstrassovy věty.)

Stejnoměrně spojité zobrazení dvojce vzor obraz lze projet $\varepsilon - \delta$-okoím ($\rho(x, y) < \delta$, $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$)

Heine-Cantor [1] – prostor M je kompaktní, zobr. F je spojité, pak F je stejnoměrně spojité.

Lipschitzovské zobrazení Lineárně násobí (škáluje) vzdálenosti. Existuje $L > 0$ tak, že $\sigma(F(x), F(y)) = L\rho(x, y)$ (vzdálenost obrazů dvou bodů je menší jak násobek vzdálenosti bodů samotných.)

$$\text{Lipschitzovské} \Rightarrow \text{Stejnoměrně spojité}$$

Kontrakce je zobrazení s $0 < L < 1$

Limita zobrazení x_0 je hromadný bod množiny M, zobrazení v něm má limitu[2] a jestliže x z ryzího δ okolí ($x \in O^*_\delta(x_0)$) se zobrazí do ε-okolí a ($F(x) \in O^*_\varepsilon(x_0)$)

Pevný bod se zobrazí sám na sebe ($F : M \to M, F(x) = x$)

Banachova věta o pevném bodu. Pokud je zobrazení kontrakcí, pak existuje jediný pevný bod.

6 Funkce n proměnných

Funkce n proměnných je zadefinována jako zobrazení

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Def. obor množina $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že k němu existuje obraz.

Obor hodnot množina $y \in \mathbb{R}$, tak že je obrazem nějakého x.

pozn: Spojitost zevdena podle předchozí kapitoly. Zavadí se „nelastní případ“ $(\mathbb{R}^*)^n = \underbrace{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \cdots \times \mathbb{R}^*}_{n\text{-krát}}$.

Pro okolí se používá šachovnicová metrika ρ_∞.

Limita funkce funkce má v bodě a limitu pokud se x z ryzího δ-okolí zobrazí do ε-okolí.

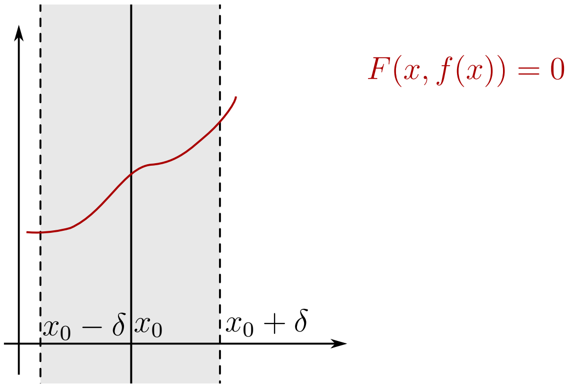
věta 6.7 funkce má v bodě limitu pokud se zobrazí na kruhové okolí obrazu

parciální derivace definovanéá pomocí limity $h \to 0$ se přičítá jen k jedné proměnné.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

[1] *Pro* $\mathbb{R}$*:* je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na něm také stejnoměrně spojitá.

[2] **Pozor:** od Nechvátalových materiálů se liší značení. V materiálech je značena y_0 nikoli a.



Obrázek 2: okolí nulového bodu pro následnou implicitní funkci.

7 Parciální a směrová derivace

Schwarzova v. druhé parciální derivace podle různých proměnných jsou záměnné

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_n \partial x_m} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_m \partial x_n}$$

Směrová derivace definičním oborem se vede přímka nebo rovina v požadovaném směru, která se derivuje.

$$\phi(t) = f(x_0 + s_1 t, y_0 + s_2 t)$$

Gradient funkce f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

8 Implicitní funkce

Pokud funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma nulový bod $[x_0, y_0]$ ($F(x_0, y_0) = 0$). V okolí takového bodu je funkce $y = f(x)$ definovaná *implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$, pokud na δ-okolí bodu x_0 platí $F(x, f(x)) = 0$. Tedy vybere jen takové body z okolí x_0 viz 2, které následně budou tvořit funkci f. Zkusit chápat tak, že se nejprve z nulového bodu určí funkce f a následně pomocí této funkce se najdou zbylé body z $\mathbb{R}^2$, které budou tvořit funkci f.

Věta o existenci impl. funkce Implicitní funkce existuje pokud ($\Leftarrow$)

1. F je spojitá na čtverci R (a-okolí bodu x_0, y_0 v ρ_∞),
2. existuje $\frac{\partial F}{\partial y}$ spojitá v b. $[x_0, y_0]$,
3. $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$ – viz příklad s kružnicí, pro $x = r$ a $y = 0$, pak se nemusí jednat o zobrazení, jednomu x mohou být přiřazena dvě y.

Derivace impl funkce je definována jako

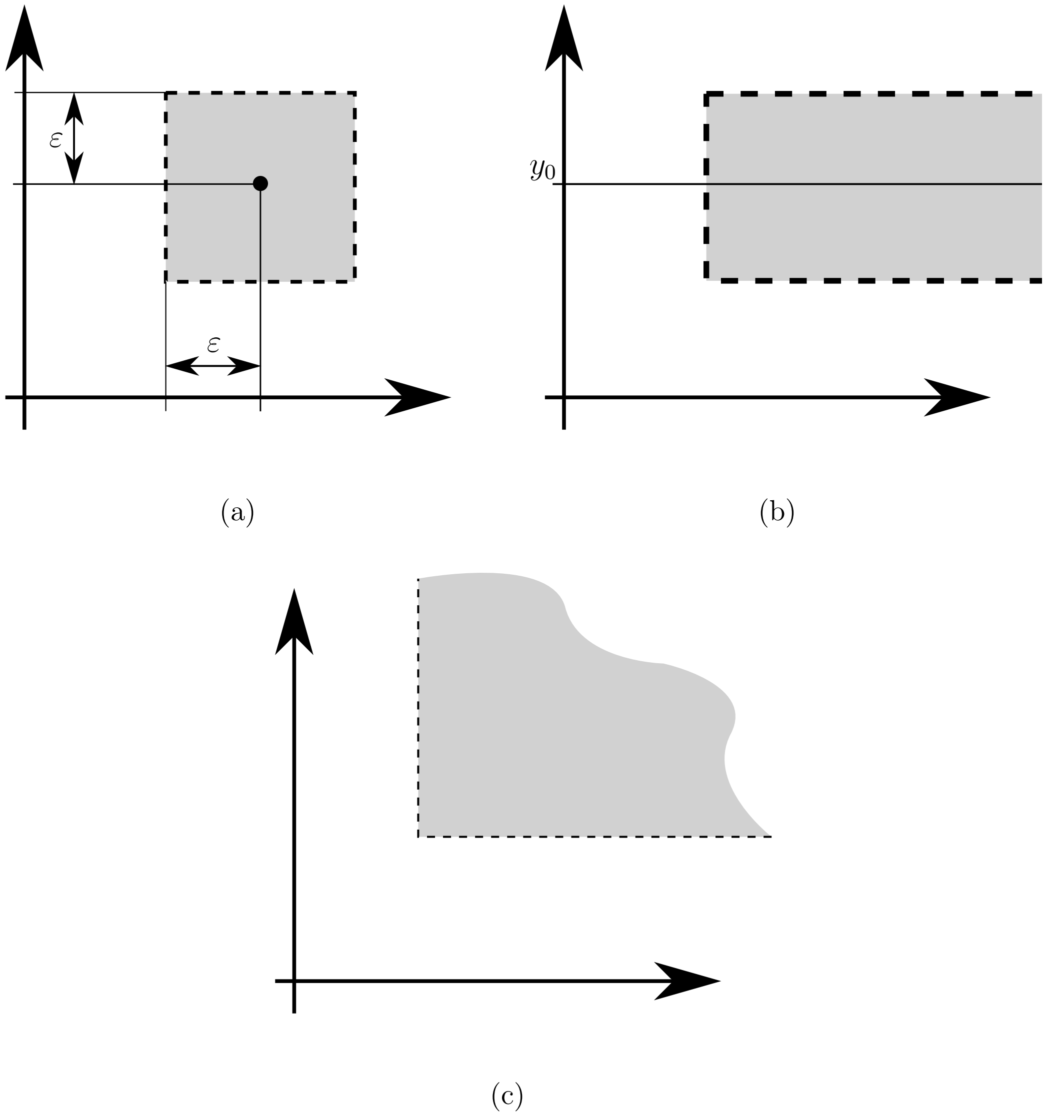
$$\frac{\mathrm{d} f(x_0)}{\mathrm{d} x} = \frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}$$

Pokud jsou druhé derivace také spojité, tak lze určit druhou derivaci:

impl funkce dvou proměnných podobně lze definovat i pro zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a $z = f(x,y)$, zde se definuje pro δ - okolí $(x-\delta, x+\delta) \times (y-\delta, y+\delta)$ bodu $f(x,y,f(x,y))$.

Derivace

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}$$



Obrázek 3: (a) (b) (c)

m-**funkce** zjednodušeně $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to R^m$. Přesněji:

$$\mathscr{F} : [x_1, x_2, \ldots, x_n] \to [f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

čili $\mathscr{F}$ vektor $\to$ vektor, proto se také někdy mluví o *vektorovém poli*.

Diferencovatelnost Funkce $\mathscr{F}$ je difencovatelná pokud všechny funkce f_1 až f_m jsou diferencovatelné. Pak

$$\mathrm{d}\mathscr{F}(X_0) : [h_1, h_2, \ldots h_n] \to [\mathrm{d}f_1(X_O), \mathrm{d}f_2(X_0), \ldots, \mathrm{d}f_m(X_0)]$$

lze jej také určit Jacobiovou maticí $\mathscr{F}'$ (maticí prvních derivací)

$$\mathscr{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

a pak totální diferenciíl je:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(X_0) \\ \mathrm{d}f_2(X_0) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(X_0) \end{pmatrix} = \mathscr{F}'(X_0) \begin{pmatrix} \mathrm{d}h_1 \\ \mathrm{d}h_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}h_n \end{pmatrix}$$

$\mathscr{F}'(X_0)$ je zde matice hodnot prvních derivací.

Pro $m = n$ se determinant Jacobiho matice nazývá *Jacobián.* a značí se $J_{\mathscr{F}}(X_0)$

Matice složeného zobrazení: Jacobiho matice složeného zobrazení $\mathscr{H} = \mathscr{F} \circ \mathscr{G}$ je součinem matic jednotlivých zobrazení $\mathscr{H}'(X_0) = \mathscr{F}'(Y_0)\mathscr{G}'(X_0)$. Pokud máme zobrazení $\mathscr{G} : R^n \to \mathbb{R}^m$ a $\mathscr{F} : R^m \to R^p$ a zobrazení

Lokální inverze Pokud je v bodě $\mathscr{F}$ Jacobián nulový, pak je zobrazení v bodě tomto prosté. Pak platí:

$$(\mathscr{F}^{-1})'(Y_0) = (\mathscr{F}'(X_0))^{-1} \quad a \quad J_{\mathscr{F}^{-1}} = \frac{1}{J_{\mathscr{F}}(X_0)}$$

Implicitní m-funkce Pokud je $\mathscr{G} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$

- spojitá na okolí bodu $[X_0, Y_0] = \left[\underbrace{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0}_{n\text{prvků}}, \underbrace{y_1^0, y_2^0, \dots y_m^0}_{m\text{prvků}}\right] O_a([X_0, Y_0])$
- a funkce je v bodě nulová, $\mathscr{G}(X_0, Y_0) = (0, 0, \dots, 0)$
- a všechny funkce $\mathscr{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ jsou derivovatelné podle všech proměnných $y_1, y_2, \dots, y_n$ – aby v okolí nikam zběsile neskákala, ale měnila se předvídatelně, **zapisuje se do Jacobiho matice!**

pak je implicitně zadána jediná spojitá m-funkce

$$Y = \mathscr{F}(X)$$

9 Vázané extrémy

Vázaný extrém je extrém z vybrané podmnožiny definičního oboru, přičemž podmnožina bývá definována soustavou rovnic (*podmínky vázaného extrému*). Vázaný extrém X_0 funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definován tak, že existuje podokolí na M kde má funkce extrém.

Lagrangeovy multiplikátory nechť máme funkci f a podmínky $g_1, \dots, g_m$. Dohromady dávají zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq m < n)$ a mají spojité všechny parciální derivace. Nechť Jacobiho matice $\mathscr{G}'$ m-funkce $\mathscr{G}$ má hodnost m (podímnky jsou na sobě nezávislé). Pak je li v X_0 vázený extrém platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0$$

tj pokud se k derivaci podle jedné proměnné přičnou násobky derivací podmínek podle druhé proměnné dostaneme nulu.

Stacionární bod – bod pro který existují L. multiplikátory, tak že vyhovují podmínce. Lze je nalézt pomocí Lagrangeovy funkce

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum^m \lambda_k g_k$$

Položí se $\vec{\nabla} L = 0$ čímž vzniká vztah výše.

Zda-li je v stac bodě S extrém se určí pomocí druhého diferenciálu $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ Pozitivně definitní $\Rightarrow$ minimum.

10 Dvojný intergrál

Cílem je nalézt objem pod pochou na obdélníku $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

1. Dělení obdélníku I na na $n \times m$ menších obdélníčků $I_{i,j}$. Dělení je značeno D. $D_x : a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, D_y – obdobně
2. Obsah obdélníčku I_{ij} je značen $\lambda(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$
3. Horní a dolní hodnota
   - M_{ij} - supremum funkce na obdélníčku ij
   - m_{ij} - infimum funkce na obdélníčku ij
4. Horní a dolní součet. Součet „dolního a horního objemu“

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \lambda(I_i j) \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \lambda(I_i j)$$

5. Pro všechna dělení $D \in \mathscr{D}$ platí, že dolní a horní intergrál (dolní je největších z těch pod křivkou a horní ...)

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \sup\{s(D, f) : \ D \in \mathscr{D}\} \qquad \iint_{\overline{I}} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \inf\{S(D, f) : \ D \in \mathscr{D}\}$$

6. Riemanův integrál hodnota integrálů, pokud

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{\overline{I}} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Platí:

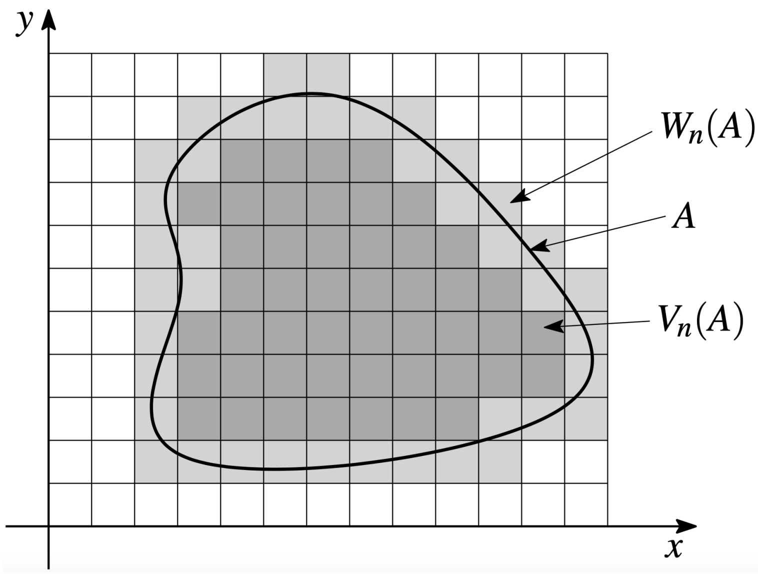
Spojitá na obdelníku $\Rightarrow$ integrovatelná na obdelníku

Fubiniho v. *Nejdřív jeden rozměr (integrál), pak druhý rozměr.* Pokud máme obdelník $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, pak integrál lze spočítat jako

$$\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Normální množina Například normání množina vzhledem k ose x znamená, že množina je pro $x \in \langle a, b\rangle$ vymezena funkcemi φ_1, φ_2 (funkce se nesmí křížit, tj, $\varphi_1 < \varphi_2$). Pak **Fubiniho věta nabývá obecnější podoby**

$$\iint_{M_x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x; \qquad \iint_{M_y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$



Obrázek 4: Jádro řádu n (tmavší šedá) a obal řádu n (světlejší šedá) množiny A (čtverce jádra jsou zároveň čtverci obalu).

11 Jordanův přístup k dvojnému integrálu

Míra množiny λ je *cosi jako obsah.* Zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$. Měla by splňovat následující podmínky

- $A = B \;\to\; \lambda(A) = \lambda(B)$ - stejná množina, stejný obsah
- $A \subseteq B \;\to\; \lambda(A) \leq \lambda(B)$ menší množina, menší obsah
- $A \cap B = \emptyset \;\to\; \lambda(A \cup B)\lambda(A) + \lambda(B)$

Nadefinuje se síť řádu n, kde *čím větší n tím menší čtverečky.* Pak j-tý a k-tý čtverec je brán jako

$$Q^n_{j,k} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n}\}$$

Jelikož má jeden čtverec stranu $\frac{1}{2^n}$ tak potom jeho míra, *obsah* je:

$$\lambda(Q^n_{j,k}) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$$