

# Matematická analýza 2 lidsky

## Jakub Dokulil

---

Vytvořeno pro zjednodušení a lepší interpretaci složitých matematických definic od Lůd'y ♡. Proto neručím správnost. Poslední aktualizace 13. května 2020. Šířte a upravujte podle svého gusta.

Před zkouškou

---

Podrobněji projít Jordanovu míru!

## Obsah

1	Metrické prostory	1
2	Podmnožiny metrickém prostoru	2
3	Konvergence v metrickém prostoru	3
4	Úplné a kompaktní metrické prostory	3
5	Zobrazení	4
6	Funkce $n$ proměnných	4
7	Parciální a směrová derivace	5
8	Implicitní funkce	5
9	Vázané extrémy	7
10	Dvojný integrál	8
11	Jordanův přístup k dvojnému integrálu	9
12	Trojný integrál	11
13	Substituce	11
14	Křivky	11
15	Křivkový integrál	12
16	Nezávislost na integrační cestě = konzervativní pole	12
17	Plochy v prostoru	12

## 1 Metrické prostory

Nechápat množinu  $\mathbb{R}^n$  pouze jako množinu  $n$ -tic, ale jako množinu na níž jsou nadefinovány operace sčítání a násobení skalárem - **vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$** .

Metrický prostor  $M$  s prvky  $x, y \in M$  splňuje následující axiomy:

- Totožné body jsou od sebe vzdálené 0

- vzdálenost  $x$  od  $y$ , je stejná jako vzdálenost  $y$  od  $x$  (symetrie)
- platí trojúhelníková nerovnost  $|xy| \leq |xy| + |yz|$  ( $\rho(x, y) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ )

**Metrika na  $M$**  = Vzdálenost bodů je nadefinována jako zobrazení  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$

**Metrický prostor** je dvojice  $(M, \rho)$

**Druhy metrik** **Manhattanská** - pravoúhlý systém,  $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$

**Eukleidovská** - nejkratší možná cesta  $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots}$

**Šachovnicová** - nejvzdálenější souřadnice  $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$

**Koule a okolí** –

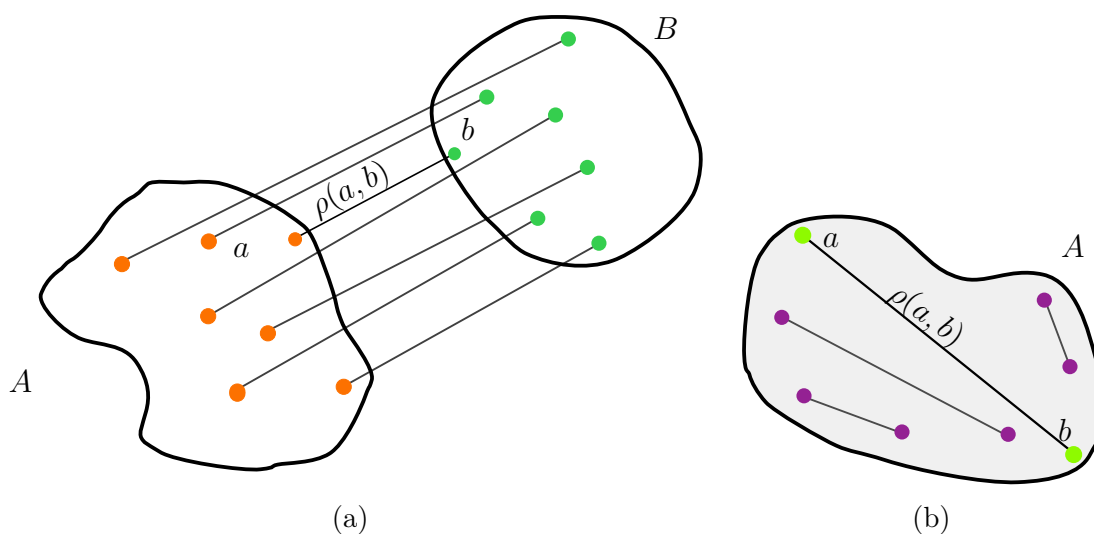
**Koule** je množina bodů  $X$  metrického prostoru  $(M, \rho)$ , které mají od jejího středu  $a$  stejnou „vzdálenost“ ( $\rho(a, X) = \text{konst.}$ )

**Ryzí okolí** bodu  $a$  je koule bez středu.

**Vzdálenost prostorů, průměr** –

**vzdálenost** množin  $\rho(A, B)$  v metr. prostoru, je jejich nejkratší spojnice –  $\inf\{\rho(a, b); a \in A; b \in B\}$

**průměr** množiny  $d(A)$  je největší vzdálenost dvou prvků množiny,  $\sup\{\dots\}$



Obrázek 1: (a) vzdálenost množin. (b) Průměr množiny.

## 2 Podmnožiny metrickém prostoru

**Pojmy:** spojené s množinou  $A$  v metrickém prostoru.

**vnitřní bod** – alespoň jedno okolí bodu je součástí množiny (**vnitřek** –  $A^\circ$ )

**hraniční bod** – není ani v množině ani mimo ni. Jeho okolí má prázdný průnik s množinou ( $O(a) \cap A = \emptyset$ ), ale i se zbytkem prostoru ( $O(a) \cap (M \setminus A) = \emptyset$ ) (**hranice** –  $\partial A$ )

**bod uzávěru** vzdálenost od množiny je 0 (**uzávěr** –  $\bar{A}$ )

**hrom. bod** - každé okolí není prázdné (**hrom body** –  $A'$ )

**izolovaný bod** - existuje okolí, ve kterém je bod sám

**otevřená množina** pro množina je svým vnitřkem, nemá hranici

**uzavřená množina** každý bod má nulovou vzdálenost od ní, je sama svým užávěrem

### 3 Konvergence v metrickém prostoru

Polsoupnost bodů  $\{x_n\}$  si lze představit jako diskrétně rozložené body v metrickém prostoru (například body v rovině).

**Konvergentní posloupnost** – vzdálenost (metrika) bodů konverguje k nule. Posloupnost  $x_n$  konverguje k bodu  $x$  pokud se k bodu podle metriky blíží –  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$

**Ohraničená posloupnost** - pokud množina výsledků posloupnosti, funkčních hodnot, je ohraničená. (má konečný průměr)

**Cauchyovská** - od určitého  $n_0$  leží každé dvě funkční hodnoty v  $\varepsilon$  okolí.

konvergentní  $\Rightarrow$  Cauchyovská

*Důkaz věty* – zvolit  $\frac{\varepsilon}{2}$  a použít trojúhelníkovou nerovnost.

**Uzavřenost a konvergence** – podmnožina metrického prostoru  $A$  je uzavřená  $\Leftrightarrow$  každá konvergentní posloupnost v podmnožině konverguje k  $a$  posloupnost konvergující k  $a \in A$

**Uzavřenost a konvergence** – podmnožina metrického prostoru  $A$  je uzavřená  $\Leftrightarrow$  každá konvergentní posloupnost v podmnožině konverguje k  $a$ , pak  $a \in A$

**ekv metriky** metriky jsou ekvivalentní pokud konvergentní posloupnosti dávají stejnou konvergenci

**ekv metriky jinak** metriky  $\rho, \sigma$  jsou ekvivalentní pokud existují kladná čísla  $a, b$  tak, aby

$$a\sigma \leq \rho \leq b\sigma$$

*Důkaz:* vezme se konvergentní posloupnost bodů  $x_n$  tak aby  $\lim \sigma(x_n, a) = 0$  s využitím věty o třech posloupnostech platí  $\lim \rho(x_n, a) = 0$ .

**indukované metriky** podprostor metrického prostoru má svou vlastní metriku shodnou s tou originální (například aplikace metriky pro  $\mathbb{R}^2$  na  $\mathbb{R}$ , kde se uvažuj, že prvky  $a$  z  $\mathbb{R}$  lze zapsat jako  $(a, 0)$ .

### 4 Úplné a kompaktní metrické prostory

V úplném prostoru má každá Cauchyovská posloupnost má limitu náležící danému prostoru. (Například  $\mathbb{Q}$  s Eukleidovskou metrikou, posloupnost  $\{\frac{1}{n} + n\}$  konverguje k  $e \notin \mathbb{Q}$ ).

uzavřená podmnožina úplného prostoru je úplná.

**Kompaktní prostor** – ze všech posloupností jeho bodů, které obsahuje lze vybrat konvergentní posloupnost

$A$  kompaktní množina v prostoru  $\Rightarrow A$  uzavřená a ohraničená

$A$  je uzavřený a ačkoli může mít díru nesmí se jednat o pěnu.

*Pozn1:* Pro prostory  $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$ ,  $i = 1, 2, \infty$  platí implikace (kompaktní  $\Leftrightarrow$  uzavřená a ohraničená)

*Pozn2:* Kompaktní prostor je vždy úplný.

## 5 Zobrazení

**Izometrické zobr.** takové které zachovává vzdálenost ( $F : (M, \rho) \rightarrow (N, \sigma)$  pak  $\rho(x, y) = \sigma(F(x), F(y))$ .)

**Spojitě zobrazení**  $x$  z  $\varepsilon$ -okolí se zobrazí na  $F(x)$  z  $\delta$ -okolí  $F(x_0)$ .

**Heineho podm.** pokud  $x$  konverguje k  $x_0$  pak  $F(x)$  konverguje k  $x_0$ .

**zobrazení kompaktní mn** kompaktní množina se zobrazí na kompaktní množinu. (Důsledkem jsou Weierstrassovy věty.)

**Stejněměrně spojitě zobrazení** dvojice vzor obraz lze projev  $\varepsilon - \delta$ -okoím ( $\rho(x, y) < \delta$ ,  $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$ )

**Heine-Cantor**<sup>1</sup> – prostor  $M$  je kompaktní, zobr.  $F$  je spojitě, pak  $F$  je stejněměrně spojitě.

**Lipschitzovské zobrazení** Lineárně násobí (škáluje) vzdálenosti. Existuje  $L > 0$  tak, že  $\sigma(F(x), F(y)) = L\rho(x, y)$  (vzdálenost obrazů dvou bodů je menší jak násobek vzdálenosti bodů samotných.)

Lipschitzovské  $\Rightarrow$  Stejněměrně spojitě

**Kontrakce** je zobrazení s  $0 < L < 1$

**Limita zobrazení**  $x_0$  je hromadný bod množiny  $M$ , zobrazení v něm má limitu<sup>2</sup>  $a$  jestliže  $x$  z ryzího  $\delta$  okolí ( $x \in O_\delta^*(x_0)$ ) se zobrazí do  $\varepsilon$ -okolí  $a$  ( $F(x) \in O_\varepsilon^*(a)$ )

**Pevný bod** se zobrazí sám na sebe ( $F : M \rightarrow M, F(x) = x$ )

**Banachova věta** o pevném bodu. Pokud je zobrazení kontrakcí, pak existuje jediný pevný bod.

## 6 Funkce $n$ proměnných

Funkce  $n$  proměnných je zadefinována jako zobrazení

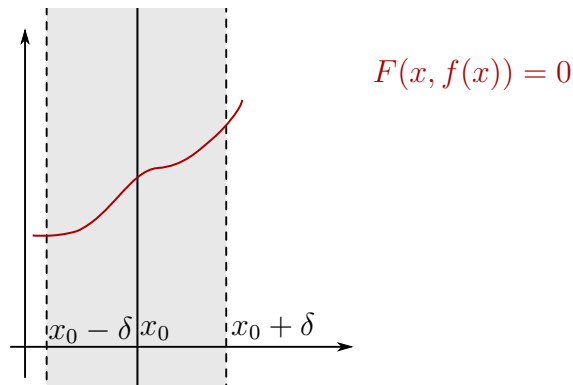
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Def. obor** množina  $x \in \mathbb{R}^n$  tak, že k němu existuje obraz.

**Obor hodnot** množina  $y \in \mathbb{R}$ , tak že je obrazem nějakého  $x$ .

<sup>1</sup>Pro  $\mathbb{R}$ : je-li funkce spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak je na něm také stejněměrně spojitá.

<sup>2</sup>**Pozor:** od Nechvátalových materiálů se liší značení. V materiálech je značena  $y_0$  nikoli  $a$ .



Obrázek 2: okolí nulového bodu pro následnou implicitní funkci.

*pozn:* Spojitost zevdena podle předchozí kapitoly. Zavádí se „nelastní případ“  $(\mathbb{R}^*)^n = \underbrace{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \dots \times \mathbb{R}^*}_{n\text{-krát}}$

Pro okolí se používá šachovnicová metrika  $\rho_\infty$ .

**Limita funkce** funkce má v bodě  $a$  limitu pokud se  $x$  z ryzího  $\delta$ -okolí zobrazí do  $\varepsilon$ -okolí.

**věta 6.7** funkce má v bodě limitu pokud se zobrazí na kruhové okolí obrazu

**parciální derivace** definovaná pomocí limity  $h \rightarrow 0$  se přičítá jen k jedné proměnné.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

## 7 Parciální a směrová derivace

**Schwarzova v.** druhé parciální derivace podle různých proměnných jsou záměnné

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_n \partial x_m} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_m \partial x_n}$$

**Směrová derivace** definičním oborem se vede přímka nebo rovina v požadovaném směru, která se derivuje.

$$\phi(t) = f(x_0 + s_1 t, y_0 + s_2 t)$$

**Gradient** funkce  $f$

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

## 8 Implicitní funkce

Pokud funkce  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  má nulový bod  $[x_0, y_0]$  ( $F(x_0, y_0) = 0$ ). V okolí takového bodu je funkce  $y = f(x)$  definovaná *implicitně* rovnicí  $F(x, y) = 0$ , pokud na  $\delta$ -okolí bodu  $x_0$  platí  $F(x, f(x)) = 0$ . Tedy vybere jen takové body z okolí  $x_0$  viz 2, které následně budou tvořit funkci  $f$ . Zkusit chápat tak, že se nejprve z nulového bodu určí funkce  $f$  a následně pomocí této funkce se najdou zbylé body z  $\mathbb{R}^2$ , které budou tvořit funkci  $f$ .

**Věta o existenci impl. funkce** Implicitní funkce existuje pokud ( $\Leftrightarrow$ )

1.  $F$  je spojitá na čtverci  $R$  ( $a$ -okolí bodu  $x_0, y_0$  v  $\rho_\infty$ ),
2. existuje  $\frac{\partial F}{\partial y}$  spojitá v b.  $[x_0, y_0]$ ,
3.  $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$  – viz příklad s kružnicí, pro  $x = r$  a  $y = 0$ , pak se nemusí jednat o zobrazení, jednomu  $x$  mohou být přiřazena dvě  $y$ .

**Derivace impl funkce** je definována jako

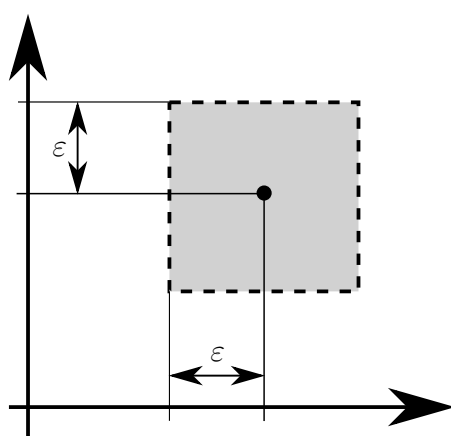
$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

Pokud jsou druhé derivace také spojité, tak lze určit druhou derivaci:

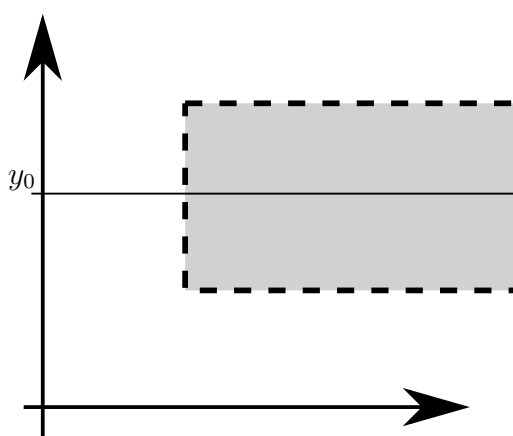
**impl funkce dvou proměnných** podobně lze definovat i pro zobrazení  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $z = f(x, y)$ , zde se definuje pro  $\delta$  - okolí  $(x - \delta, x + \delta) \times (y - \delta, y + \delta)$  bodu  $f(x, y, f(x, y))$ .

**Derivace**

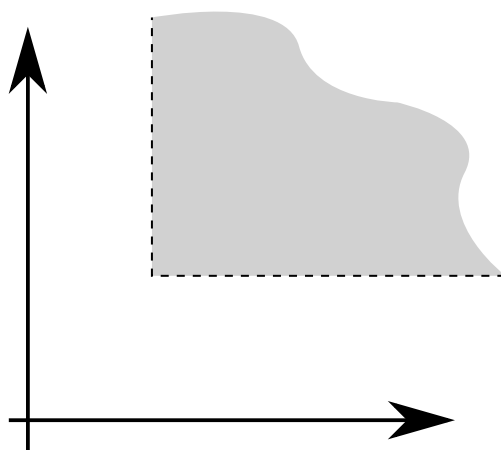
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}$$



(a)



(b)



(c)

Obrázek 3: (a) (b) (c)

**m-funkce** zjednodušeně  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Přesněji:

$$\mathcal{F} : [x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

čili  $\mathcal{F}$  vektor  $\rightarrow$  vektor, proto se také někdy mluví o *vektorovém poli*.

**Diferencovatelnost** Funkce  $\mathcal{F}$  je diferencovatelná pokud všechny funkce  $f_1$  až  $f_m$  jsou diferencovatelné. Pak

$$d\mathcal{F}(X_0) : [h_1, h_2, \dots, h_n] \rightarrow [df_1(X_0), df_2(X_0), \dots, df_m(X_0)]$$

lze jej také určit Jacobiovou maticí  $\mathcal{F}'$  (maticí prvních derivací)

$$\mathcal{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

a pak totální diferenciál je:

$$\begin{pmatrix} df_1(X_0) \\ df_2(X_0) \\ \vdots \\ df_m(X_0) \end{pmatrix} = \mathcal{F}'(X_0) \begin{pmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ \vdots \\ dh_n \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}'(X_0)$  je zde matice hodnot prvních derivací.

Pro  $m = n$  se determinant Jacobiho matice nazývá *Jacobián*. a značí se  $J_{\mathcal{F}}(X_0)$

**Matice složeného zobrazení:** Jacobiho matice složeného zobrazení  $\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  je součinem matic jednotlivých zobrazení  $\mathcal{H}'(X_0) = \mathcal{F}'(Y_0)\mathcal{G}'(X_0)$ . Pokud máme zobrazení  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  a zobrazení

**Lokální inverze** Pokud je v bodě  $\mathcal{F}$  Jacobián nulový, pak je zobrazení v bodě tomto prosté. Pak platí:

$$(\mathcal{F}^{-1})'(Y_0) = (\mathcal{F}'(X_0))^{-1} \quad a \quad J_{\mathcal{F}^{-1}} = \frac{1}{J_{\mathcal{F}}(X_0)}$$

**Implicitní  $m$ -funkce** Pokud je  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$

- spojitá na okolí bodu  $[X_0, Y_0] = \left[ \underbrace{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0}_{n \text{ prvků}}, \underbrace{y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0}_{m \text{ prvků}} \right] O_a([X_0, Y_0])$
- a funkce je v bodě nulová,  $\mathcal{G}(X_0, Y_0) = (0, 0, \dots, 0)$
- a všechny funkce  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  jsou derivovatelné podle všech proměnných  $y_1, y_2, \dots, y_m$  – aby v okolí nikam zběsile neskákala, ale měnila se předvídatelně, **zapisuje se do Jacobiho matice!**

pak je implicitně zadána jediná spojitá  $m$ -funkce

$$Y = \mathcal{F}(X)$$

## 9 Vázané extrémy

**Vázaný extrém** je extrém z vybrané podmnožiny definičního oboru, přičemž podmnožina bývá definována soustavou rovnic (*podmínky vázaného extrému*). Vázaný extrém  $X_0$  funkce  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je definován tak, že existuje podokolí na  $M$  kde má funkce extrém.

**Lagrangeovy multiplikátory** nechť máme funkci  $f$  a podmínky  $g_1, \dots, g_m$ . Dohromady dávají zobrazení  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq m < n$ ) a mají spojitě všechny parciální derivace. Nechť Jacobiho matice  $\mathcal{G}'$  m-funkce  $\mathcal{G}$  má hodnotu  $m$  (podmínky jsou na sobě nezávislé). Pak je-li v  $X_0$  vážený extrém platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0$$

tj pokud se k derivaci podle jedné proměnné přičnou násobky derivací podmínek podle druhé proměnné dostaneme nulu.

**Stacionární bod** – bod pro který existují L. multiplikátory, tak že vyhovují podmínce. Lze je nalézt pomocí Lagrangeovy funkce

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k$$

Položí se  $\vec{\nabla} L = 0$  čímž vzniká vztah výše.

**Zda-li je v stac bodě  $S$  extrém se určí pomocí druhého diferenciálu  $d^2L(S, \Lambda_S)$**   
 Pozitivně definitní  $\Rightarrow$  minimum.

## 10 Dvojný integrál

Cílem je nalézt objem pod pochou na obdélníku  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ .

1. Dělení obdélníku  $I$  na  $n \times m$  menších obdélníčků  $I_{ij}$ . Dělení je značeno  $D$ .  $D_x : a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,  $D_y$  – obdobně
2. Obsah obdélníčku  $I_{ij}$  je značen  $\lambda(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$
3. Horní a dolní hodnota
  - $M_{ij}$  - supremum funkce na obdélníčku  $ij$
  - $m_{ij}$  - infimum funkce na obdélníčku  $ij$
4. Horní a dolní součet. Součet „dolního a horního objemu“

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \lambda(I_{ij}) \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \lambda(I_{ij})$$

5. Pro všechna dělení  $D \in \mathcal{D}$  platí, že dolní a horní integrál (dolní je největších z těch pod křivkou a horní ...)

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y) dx dy = \sup \{s(D, f) : D \in \mathcal{D}\} \quad \iint_{\overline{I}} f(x, y) dx dy = \inf \{S(D, f) : D \in \mathcal{D}\}$$

6. Riemannův integrál hodnota integrálů, pokud

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y) dx dy = \iint_{\overline{I}} f(x, y) dx dy$$

Platí:

Spojitá na obdelníku  $\Rightarrow$  integrovatelná na obdelníku

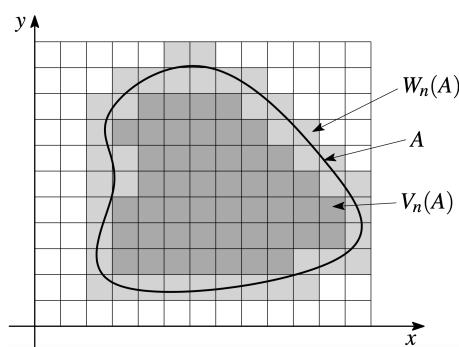


**Fubiniho v.** *Nejdřív jeden rozměr (integrál), pak druhý rozměr.* Pokud máme obdelník  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , pak integrál lze spočítat jako

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

**Normální množina** Například normální množina vzhledem k ose  $x$  znamená, že množina je pro  $x \in \langle a, b \rangle$  vymezena funkcemi  $\varphi_1, \varphi_2$  (funkce se nesmí křížit, tj.  $\varphi_1 < \varphi_2$ ). Pak **Fubiniho věta nabývá obecnější podoby**

$$\iint_{M_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy \right) dx; \quad \iint_{M_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x, y) dx \right) dy$$



Obrázek 4: Jádro řádu  $n$  (tmavší šedá) a obal řádu  $n$  (světlejší šedá) množiny  $A$  (čtverce jádra jsou zároveň čtverci obalu).

## 11 Jordanův přístup k dvojnému integrálu

**Míra množiny**  $\lambda$  je *cosí jako obsah*. Zobrazení  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Měla by splňovat následující podmínky

- $A = B \rightarrow \lambda(A) = \lambda(B)$  - stejná množina, stejný obsah
- $A \subseteq B \rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)$  menší množina, menší obsah
- $A \cap B = \emptyset \rightarrow \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

Nadefinuje se síť řádu  $n$ , kde *čím větší  $n$  tím menší čtverečky*. Pak  $j$ -tý a  $k$ -tý čtverec je brán jako

$$Q_{j,k}^n = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

Jelikož má jeden čtverec stranu  $\frac{1}{2^n}$  tak potom jeho míra, *obsah*, je:

$$\lambda(Q_{j,k}^n) = \left( \frac{1}{2^n} \right)^2$$

Sjednocení čtverců je nazýváno **elementární množinou**  $M = \cup_{j,k \in I} Q_{j,k}^n$ . Definujem **jádro a obal množiny**  $A$ .

- Jádro jsou všechny čtverečky, které jsou celé v množině  $A$ .
- Obal jsou všechny čtverečky, které jsou od množiny vzdáleny 0. Mají prázdný průnik s uzávěrem.

$A^\circ$  – vnitřek,  $\bar{A}$  – uzávěr,  $\partial A$  – hranice

$$V_n(A) = \cup \{Q^n : Q_{j,k}^n \subseteq A^\circ\}$$

$$W_n(A) = \cup \{Q^n : \bar{A} \cap Q_n \neq \emptyset\}$$

Vlastnosti:

- jádro  $\subseteq$  množina  $\subseteq$  obal
- míra hranice = obal - jádro
- čím vyšší  $n$  tím menší obal a tím větší jádro
- Posloupnosti  $\{\lambda(V_n)\}_{n=0}^\infty$  mají konečnou limitu

**Vnější a vnitřní Jordanova míra** Největší jádro a nejmenší obal. Vnitřní míra  $\lambda_*$  a vnější míra  $\lambda^*$  jsou definovány jako

$$\lambda_*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(V_n) \quad \lambda^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(W_n)$$

Pokud platí  $\lambda_*(A) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$ , pak číslo  $\lambda(A)$  je Jordanovou mírou množiny  $A$ .

**Vlastnosti:**

- $\lambda^* = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
- ...

Dále se čtvereček  $C_{jk}^n$  nazve *čtvercovou množinou*, dohromady pokrývají celý prostor  $\mathbb{R}^2$  a jsou vzájemně disjunktní. Přičemž každá čtvercová množina má konst. míru.

Množina  $M$  se pokryje čtvercovými množinami  $P$ , které nemají prázdný průnik s  $M$ . Míra množiny pak je

$$\lambda(M) = \sum_{i=1}^m \lambda(P_i^n)$$

Následně se vytvoří horní a dolní hodnota na čtverečku

$$h_i = \inf \{f(x, y); [x, y] \in P_i^n\}, \quad H_i = \sup \{f(x, y); [x, y] \in P_i^n\}$$

a horní a dolní součet, řádu  $n$

$$s_n(M, f) = \sum_{i=1}^m h_i \lambda(P_i^n) \quad S_n(M, f) = \sum_{i=1}^m H_i \lambda(P_i^n).$$

**Jordanovská definice dvojného Riemanova integrálu** nadefinuje se dolní a horní integrál funkce

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \iint_{\bar{M}} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Pokud se jednotlivé integrály sobě rovnají, nazveme společnou hodnotu dvojným Riemanovým integrálem  $f$  přes množinu  $M$ .

**Integrální věta o stř. hodnotě** pokud se jedná o součin dvou funkcí pak jednu funkci lze nahradit její střední hodnotou. Pokud  $\forall [x, y] \in M$  platí  $0 \leq g(x, y)$  a  $a < f(x, y) < b$  pak existuje  $\mu$

$$\iint_M f(x, y) g(x, y) = \mu \iint_M g(x, y)$$

**Skoro všude** = *všude krom množin míry nula.*

**int skoro všude** pokud skoro všude platí  $g(x, y) = f(x, y)$  pak

$$\iint f(x, y) = \iint g(x, y)$$

**Podmínka pro integrál** Pokud je funkce na  $M$  ohraničená a skoro všude spojitá, pak je integrovatelná.

## 12 Trojný integrál

Obdoba dvojného, jen přidat rozměr, platí také Fubiniho věta.

## 13 Substitute

2-funkce  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je na  $M$  regulární pokud  $J_{\mathcal{F}} \neq 0$ . Pokud je  $\mathcal{F}$  regulární a  $M$ , kde  $M \subseteq \Omega$ ,  $\Omega$  – otevřená množina, pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \iint_{M^*} f(\mathcal{F}(u, v)) |J_{\mathcal{F}}(u, v)| dx dy$$

Používané transformace:

- Translace  $x = u + a$ ,  $y = v + b$ , pak  $J(u, v) = 1$
- dilatace  $x = au$ ,  $y = bu$  pak  $J(u, v) = ab$
- Zavedení polárních souřadnic.  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  pak  $J(\rho, \varphi) = \rho$
- Zavedení eliptických souřadnic.  $x = a\rho \cos \varphi$ ,  $y = b\rho \sin \varphi$  pak  $J(\rho, \varphi) = ab\rho$

Analogicky pro trojné integrály

- Válcové souřadnice  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  a  $z = z$  pak  $J(\rho, \varphi, z) = \rho$
- Sférické souřadnice  $x = \rho \cos \varphi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$  a  $z = \rho \cos \theta$  pak  $J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \theta$ .

## 14 Křivky

**Rovinná křivka** pokud existuje funkce  $\mathcal{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$  spojitá pro  $t \in \langle a, b \rangle$ . Pak množina  $\Gamma\{\mathcal{F}(t) : t \in \langle a, b \rangle\} \subseteq \mathbb{R}^2$  je rovinnou křivkou.

**Vlastnosti křivek** Křivky mohou mít Vlastnosti

**Jednoduchá** – nikde se neprotíná,  $\mathcal{F}$  je prostá

**Jednoduchá uzavřená** – jednoduchá a uzavřená

**Třídy  $C^1$**  pokud funkce  $\varphi$  a  $\psi$  mají spojitě první derivace na  $\langle a, b \rangle$

**Jednoduchá hladká** – je-li jednoduchá, třídy  $C_1$  a také  $\varphi^2 + \psi > 0$

**Jednoduchá uzavřená hladká** – jednoduchá hladká a  $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(b)$ ,  $\psi'_+(a) = \psi'_-(b)$

**Jednoduchá po částech hladká** – spojení jednoduchých hladkých křivek spojených koncovými body

## 15 Křivkový integrál

**První druh** „běžný integrál“ pokud je  $\Gamma$  jednoduchá hladká křivka parametrizovaná  $\mathcal{F}$  a  $f$  – skalární pole

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

**Druhý druh** *skalární součin* pokud je  $\Gamma$  orientovaná jednoduchá hladká křivka parametrizovaná  $\mathcal{F}$  a  $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  – vektorové pole

$$\int_{\Gamma} \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \pm \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt$$

$\pm$  podle orientace křivky

**Greenova věta** Pro normální množinu vzhledem k ose  $x$  s hranicí  $\partial M$  funkce  $\varphi$  a  $\psi$  a vektorové pole  $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  je spojitě na  $M$  a má spojitě derivace, pak

$$\iint_M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial M} (P, Q) \cdot d\vec{s}$$

## 16 Nezávislost na integrační cestě = konzervativní pole

$\vec{f} = (P, Q)$  je vektorové pole a  $\Omega$  oblast v  $\mathbb{R}^2$  a  $A, B$  body v oblasti a  $\Gamma$  po částech hladká křivka ležící v oblasti. Pokud hodnota integrálu  $\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$  je stejná pro každou křivku

**Pfaffova forma** pokud  $(P, Q)$  nezávisí na integrační cestě, pak výraz  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  pak potenciálem je:

$$\Phi(x, y) = \int_{[x_A, y_A]}^{[x, y]} (P, Q) \cdot d\vec{s}$$

Bod A je konstantní a koncový bod je proměnlivý.

Pokud je  $f$  konzervativní vektorové pole a  $\Phi$  jeho potenciál pak

$$\int_A^B P dx + Q dy = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Podmínka pro konzervativní pole  $f$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$$

## 17 Plochy v prostoru